

УДК 621.391:530.145.1

© 2023 г. Е.Н. Петрова, С.А. Пирогов

ПОЛУРАСПАД И СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Сделана попытка дать точную математическую интерпретацию соотношения неопределенностей “энергия-время”.

Ключевые слова: квантовая механика, соотношение неопределенностей, время полураспада.

DOI: 10.31857/S0555292323040034, **EDN:** VRNUVG

§ 1. Введение

Со времени создания квантовой механики известны два соотношения неопределенностей [1]:

$$\Delta p \cdot \Delta q \sim \hbar, \quad (1)$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar. \quad (2)$$

Здесь Δp и Δq – неопределенности импульса и координаты вдоль выбранного направления, а ΔE и Δt – неопределенности энергии и времени.

Первому из них, (1), точный математический смысл придали Э. Кеннард [2] и независимо Г. Вейль [3] в 1927–28 гг. А именно, если под Δp и Δq понимать среднеквадратические отклонения измеряемых величин p и q в каком-либо квантовом состоянии, то

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq \frac{1}{2} \hbar.$$

Однако подобная интерпретация соотношения (2) невозможна, потому что квантовая механика не приписывает времени t никакого распределения вероятностей.

Физическая интерпретация соотношения (2) была дана Н. Бором [4]. Однако для нее нелегко найти точную математическую формулировку. Л.Д. Ландау возразил против буквального понимания соотношения (2) фразой: “Кто же мне мешает точно измерить энергию и тут же посмотреть на часы?” [5]. В курсе [6] соотношение (2) интерпретируется через характеристическое время эволюции физической системы, определение которого громоздко и неявно (т. 1, гл. VIII).

Мы хотим связать неопределенность энергии ΔE с такой характеристикой состояния физической системы как время полураспада. Близкая к нашей оценка правой части (2) получена в работе Л.И. Мандельштама и И.Е. Тамма [7] более сложным путем. Для краткости положим $\hbar = 1$.

§ 2. Формулировка

В комплексном линейном пространстве L состояний физической системы считается заданным скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, предполагается, что оно линейно по

второму аргументу и антилинейно по первому. Пространство L мы будем считать полным, т.е. гильбертовым. Будем считать, что динамику системы задает некий самосопряженный оператор, т.е. гамильтониан, H . Состояния системы описываются единичными векторами в пространстве L . При этом, если в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии $\psi(0)$, то в момент времени t ее состоянию будет соответствовать вектор

$$\psi(t) = \exp(-itH)\psi(0).$$

Считается, что если система находится в некотором состоянии φ , то вероятность обнаружить ее (при измерении) в состоянии ψ определяется формулой

$$P = |(\varphi, \psi)|^2$$

(“постулат Борна”, см. также [8]). В частности, если в начальный момент времени система находилась в состоянии $\psi(0) = \psi$, то вероятность найти ее через время t в том же самом состоянии ψ равна

$$P(t) = |(\psi, \exp(-itH)\psi)|^2.$$

Поэтому естественно дать следующее

Определение 1. *Временем полураспада* состояния ψ физической системы называется величина

$$T_{1/2} = \inf \left\{ t > 0 : P(t) < \frac{1}{2} \right\}. \quad (3)$$

(Эта величина равна длине отрезка временной оси, начинающегося в нуле, на котором $P(t) \geq \frac{1}{2}$.)

Неопределенность энергии ΔE определяется аналогично неопределенностям Δp и Δq как среднеквадратическое отклонение энергии. Поскольку оператор энергии H (т.е. гамильтониан) является самосопряженным, то для него существует спектральное разложение

$$H = \int E \Pi(dE), \quad (4)$$

где $\Pi(dE)$ – проекторнозначная мера на вещественной оси. Спектральное разложение обобщает представление эрмитова оператора H с простым дискретным спектром в виде

$$H = \sum E_n P_n,$$

где P_n – проектор на вектор состояния с энергией E_n . При этом распределение вероятностей значений энергии в некотором состоянии ψ (которое является единичным вектором в L) задается формулой [9]

$$F(dE) = (\psi, \Pi(dE) \psi). \quad (5)$$

Результат измерения энергии в состоянии ψ является, таким образом, случайной величиной, имеющей распределение $F(dE)$. Обозначим через ξ эту случайную величину. Математическое ожидание, соответствующее распределению F , мы будем обозначать угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$. Всегда предполагается, что математическое ожидание $\langle \xi \rangle$ существует и конечно. Обычным образом определяется дисперсия: $\text{Var } \xi = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2$.

Определение 2. *Неопределенностью энергии ΔE в состоянии ψ называется среднеквадратическое уклонение*

$$\Delta E = \sqrt{\text{Var } \xi}.$$

Теорема 1. *В любом состоянии ψ имеет место неравенство*

$$\Delta E \cdot T_{1/2} \geq \sqrt{2 - \sqrt{2}}. \quad (6)$$

§ 3. Доказательство

В силу спектральной теоремы (4) и равенства (5) имеем

$$(\psi, \psi(t)) = \int \exp(-itE) F(dE).$$

Если мы введем характеристическую функцию распределения $F(dE)$ обычным путем как

$$\varphi_F(t) = \int \exp(itE) F(dE),$$

то

$$P(t) = |\varphi_F(t)|^2,$$

и время полураспада можно будет определить формулой

$$T_{1/2} = \inf \left\{ t > 0 : |\varphi_F(t)| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Удобно ввести функцию

$$\chi(t) = \exp(-it\langle \xi \rangle) \varphi_F(t),$$

иначе говоря,

$$\chi(t) = \int \exp(it(E - \langle \xi \rangle)) F(dE).$$

Таким образом, $\chi(t)$ – это характеристическая функция centered величины $\xi - \langle \xi \rangle$. Очевидно, что

$$|\chi(t)| = |\varphi_F(t)|$$

и потому

$$P(t) = |\chi(t)|^2,$$

а значит,

$$T_{1/2} = \inf \left\{ t > 0 : |\chi(t)| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Для функции $\chi(t)$ имеем элементарные равенства

$$\chi(0) = 1, \quad \chi'(0) = 0, \quad \chi''(0) = -\text{Var } \xi,$$

и при любом t

$$\chi''(t) = - \int (E - \langle \xi \rangle)^2 \exp(it(E - \langle \xi \rangle)) F(dE),$$

а значит, при любом t

$$|\chi''(t)| \leq \text{Var } \xi.$$

Отсюда имеем

$$|\chi'(t)| \leq \text{Var } \xi \cdot t, \quad t > 0,$$

$$|1 - \chi(t)| = \left| \int_0^t \chi'(s) ds \right| \leq \text{Var } \xi \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\text{Var } \xi}{2} \cdot T_{1/2}^2 \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\Delta E \cdot T_{1/2} \geq \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

т.е. в обычных единицах $\sqrt{2 - \sqrt{2}}\hbar$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
2. Kennard E.H. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen // Z. Physik. 1927. V. 44. № 4–5. P. 326–352. <https://doi.org/10.1007/BF01391200>
3. Weyl H. Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig: Hirzel, 1928.
4. Bohr N. Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik // Naturwissenschaften. 1928. V. 16. № 15. P. 245–257. <https://doi.org/10.1007/BF01504968>
5. Пайерлс Р. Сюрпризы в теоретической физике. М.: Наука, 1988.
6. Мессиа А. Квантовая механика. Т. 1. М.: Наука, 1978.
7. Мандельштам Л.И., Тамм И.Е. Соотношение неопределенности энергия – время в нерелятивистской квантовой механике // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1945. Т. 9. № 1–2. С. 122–128.
8. Landau L., Peierls R. Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie // Z. Physik. 1931. V. 69. № 1–2. P. 56–69. <https://doi.org/10.1007/BF01391513>
9. Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.

Петрова Елена Николаевна
Пирогов Сергей Анатольевич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва
petrova@iitp.ru
s.a.pirogov@bk.ru

Поступила в редакцию
21.01.2024
После доработки
28.02.2024
Принята к публикации
28.02.2024