Бифуркации в динамических системах. Детерминированный хаос. Квантовый хаос

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Краткое сообщение
УДК 532.511
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36

Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкости и газа

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт, Россия
E-mail: o1o2o3@yandex.ru

Поступила в редакцию 1.10.2021, принята к публикации 26.12.2021, опубликована 31.01.2022

Аннотация. *Цель* исследования состоит в получении формул для такой скорости воображаемых частиц, что циркуляция скорости (реальной) жидкости по любому контуру, состоящему из этих воображаемых частиц, изменяется (в процессе движения воображаемых частиц) по заданному временному закону. (До настоящего времени были известны только такие скорости воображаемых частиц, при которых упомянутая циркуляция в процессе движения оставалась неизменной). *Метод.* Без использования асимптотических, численных и других приближенных методов проводится строгий анализ динамического уравнения движения (течения) любой непрерывной текучей среды, от идеальной жидкости до вязкого газа. Рассмотрены плоскопараллельные и незакрученные осесимметричные течения. Используется представление о движении воображаемых частиц, основанное на критерии К. Зоравского (который также называется теоремой А. А. Фридмана). *Результаты.* Предложены формулы для скорости воображаемых частиц. В эти формулы входят параметры (реального) течения, их пространственные производные и функция времени, определяющая закон изменения во времени циркуляции скорости (реальной) жидкости по контурам, движущимся вместе с воображаемыми частицами. Кроме того оказалось, что при заданной функции времени (и, как следствие, при заданном законе изменения циркуляции по времени) скорость воображаемых частиц определяется неоднозначно. В результате предложен способ менять скорость и направление движения воображаемых частиц в некотором диапазоне при сохранении выбранного закона изменения циркуляции во времени. Для вязкой несжимаемой жидкости предложены формулы, в которые не входят давление и его производные. *Заключение.* Предложена новая лагранжева точка зрения на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкостей всех типов. Получены формулы для скорости такого перемещения контуров, при котором циркуляция скорости (реальной) жидкости по любому контуру изменяется по заданному временному закону. Этот теоретический результат можно использовать в вычислительной гидродинамике для ограничения количества доменов при использовании бессеточного метода расчета течений вязкой несжимаемой жидкости (метода вязких вихревых доменов).

Ключевые слова: скорость движения контуров, циркуляция скорости, скорость воображаемых частиц, критерий Зоравского, теорема Фридмана, метод вязких вихревых доменов.

Для цитирования: *Сизых Г. Б.* Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкости и газа // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 30–36. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36

Short communication
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36

New Lagrangian view of vorticity evolution in two-dimensional flows of liquid and gas

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology, Russia
E-mail: o1o2o3@yandex.ru

Received 1.10.2021, accepted 26.12.2021, published 31.01.2022

Abstract. *Purpose* of the study is to obtain formulas for such a speed of imaginary particles that the circulation of the speed of a (real) fluid along any circuit consisting of these imaginary particles changes (in the process of motion of imaginary particles) according to a given time law. (Until now, only those speeds of imaginary particles were known, at which the mentioned circulation during the motion remained unchanged). *Method.* Without implementation of asymptotic, numerical and other approximate methods, a rigorous analysis of the dynamic equation of motion (flow) of any continuous fluid medium, from an ideal liquid to a viscous gas, is carried out. Plane-parallel and nonswirling axisymmetric flows are considered. The concept of motion of imaginary particles is used, based on the K. Zoravsky criterion (which is also called A. A. Fridman's theorem). *Results.* Formulas for the speed of imaginary particles are proposed. These formulas include the parameters of the (real) flow, their spatial derivatives and the function of time, which determines the law of the change in time of the (real fluid) velocity circulation along the contours moving together with the imaginary particles. In addition, it turned out that for a given function of time (and, as a consequence, for a given law of change in circulation with respect to time), the speed of imaginary particles is determined ambiguously. As a result, a method is proposed to change the speed and direction of motion of imaginary particles in a certain range (while maintaining the selected law of changes in circulation in time). For a viscous incompressible fluid, formulas are proposed that do not include pressure and its derivatives. *Conclusion.* A new Lagrangian point of view on the vorticity evolution in two-dimensional flows of fluids of all types is proposed. Formulas are obtained for the velocity of such movement of contours, at which the real fluid velocity circulation along any contour changes according to a given time law. This theoretical result can be used in computational fluid dynamics to limit the number of domains when using a gridless method for calculating flows of a viscous incompressible fluid (the method of viscous vortex domains).

Keywords: velocity of contours motion, circulation of velocity, velocity of imaginary particles, Zoravsky criterion, Friedmann's theorem, method of viscous vortex domains.

For citation: Sizykh GB. New Lagrangian view of vorticity evolution in two-dimensional flows of liquid and gas. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1):30–36. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36

Введение

Бессеточный метод дискретных вихрей (применяемый для расчета вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости [1–3]) был распространен на двухмерные течения вязкой несжимаемой жидкости после появления для таких течений аналогов теорем Гельмгольца о вихрях [4, 5]. В статьях [4, 5] были найдены скорости (вообще говоря, не совпадающие со скоростью жидкости) такого движения контуров, при котором циркуляция скорости жидкости по контурам остается постоянной. Для двухмерных, то есть для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости выражения для скорости переноса контуров можно представить одной общей формулой: $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu[\Omega \times \mathbf{rot}\Omega]/\Omega^2$, где $\mathbf{V}$ — скорость жидкости, $\Omega = \mathbf{rot}\mathbf{V}$ — завихренность, ν — кинематический коэффициент вязкости, $\times$ — знак векторного произведения. С использованием этих скоростей был разработан так называемый метод вязких вихревых доменов (ВВД) для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости [6]. В научно-популярной форме суть метода ВВД кратко изложена, например, во введении к статье [7], в которой доказано существование скорости $\mathbf{U}$ для пространственных течений жидкости любого типа. Одна из трудностей, которая возникает при реализации метода ВВД, состоит в «зарождении» на каждом шаге по времени новых вихревых доменов, что приводит к необходимости применять различные подходы для перераспределения доменов и их интенсивности с целью ограничения общего количества доменов, находящихся в области течения [8–10]. Несложно заметить, что сохранение циркуляции скорости жидкости по контуру (сохранение интенсивности вихревого домена), движущемуся со скоростью $\mathbf{U}$, не обязательно для метода ВВД. Достаточно, чтобы был известен закон изменения этой циркуляции во времени. Поэтому если найти такую скорость $\mathbf{U}$, при которой интенсивность домена достаточно быстро стремится к нулю с ростом времени, наличием каждого домена можно будет пренебречь после некоторого конечного числа шагов по времени. В итоге количество учитываемых доменов будет ограничено «естественным образом».

Таким образом, вычислительная гидродинамика поставила перед теоретической гидродинамикой задачу: найти такую скорость $\mathbf{U}$, чтобы интенсивность домена менялась по заранее заданному временному закону. Цель данной статьи состоит в поиске выражения для такой скорости через параметры течения, их производные и (произвольно заданный) закон изменения интенсивности доменов во времени.

Поскольку не исключена возможность распространения метода дискретных вихрей и на другие типы течений, поиск скорости $\mathbf{U}$ проводится для всех типов жидкостей (от идеальной жидкости до вязкого газа). При этом рассматриваются только такие области вихревого ($\Omega \neq 0$) течения жидкости, в которых все гидродинамические параметры и скорость $\mathbf{U}$ дважды непрерывно дифференцируемы по пространственным координатам и времени.

1. Критерий Зоравского

Следуя [11–17], для формулировки утверждений будем пользоваться представлением о движении внутри жидкости воображаемых частиц, предложенным в [11].

Пусть пространственная область G расположена внутри жидкости с полем скорости $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ и в ней это поле является вихревым ($\Omega = \mathbf{rot}\,\mathbf{V} \neq 0$) в течение некоторого открытого промежутка времени. В области G рассмотрим также течение воображаемой жидкости, частицы которой движутся со скоростью $\mathbf{U}(x, y, z, t)$. Частицы воображаемой жидкости не взаимодействуют с частицами реальной жидкости и не влияют на ее движение. Пусть в области G в течение интервала времени (t_1, t_2) завихренность реальной жидкости Ω и скорость воображаемой жидкости $\mathbf{U}$ связаны уравнением

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \mathbf{rot}\,(\Omega \times \mathbf{U}) = 0. \qquad (1)$$

В этом случае из критерия Зоравского [18,19], который также называется теоремой Фридмана [20], следует, что в интервале (t_1, t_2) отрезки вихревых линий и вихревых трубок перемещаются вместе с частицами воображаемой среды, движущимися со скоростью $\mathbf{U}$, а интенсивность вихревых трубок (циркуляция Γ скорости $\mathbf{V}$ по контуру, один раз опоясывающего трубку) сохраняется (до тех пор, пока эти частицы находятся внутри области G).

Это следствие критерия Зоравского будет использовано ниже.

2. Общий случай непрерывной текучей среды

Динамическое уравнение движения непрерывной текучей среды всегда можно представить в виде $\partial\mathbf{V}/\partial t + \Omega \times \mathbf{V} = \mathbf{F}_0 - \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V}^2/2)$, где $\mathbf{F}_0$ — плотность распределения равнодействующей всех сил, приложенных к жидкости или газу, отнесенная к плотности жидкости или газа. Далее, под жидкостью будем понимать как жидкость, так и газ, имея в виду, что жидкость может быть сжимаемой. Иногда удобно выделить потенциальную составляющую $\mathbf{F}_0$ и представить динамическое уравнение в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \boldsymbol{\nabla} f, \tag{2}$$

где f — некоторое скалярное поле (градиент $\boldsymbol{\nabla} f$ включает в себя $\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{V}^2/2)$). Так, например, динамическое уравнение Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости представляется следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \Omega \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \boldsymbol{\nabla}\left[\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi\right], \quad \mathbf{F} = -\nu\, \mathbf{rot}\, \Omega, \tag{3}$$

где p — давление, ρ — плотность, Π — потенциал массовых сил.

Перейдем к рассмотрению двухмерных течений. Пусть $\alpha(t)$ — любая гладкая функция времени $t \in (t_1, t_2)$, $\boldsymbol{\nabla} g$ — градиент любой дважды непрерывно дифференцируемой по времени и пространству функции g. При плоскопараллельном течении векторы $\boldsymbol{\nabla} g$, $\boldsymbol{\nabla} f$ и $\mathbf{F}$ лежат в плоскости течения, а при осесимметричном — имеют нулевую окружную составляющую.

Воспользуемся свойством ортогональности векторов скорости $\mathbf{V}$ и завихренности Ω в двухмерных течениях. Раскрывая три двойных векторных произведения (с учетом $\Omega \cdot \mathbf{V} = (\Omega \cdot \boldsymbol{\nabla} g) = (\Omega \cdot \mathbf{F}) = 0$) получаем, что уравнение

$$\partial \mathbf{V}/\partial t + \Omega \times \mathbf{U} = -\alpha(t)\mathbf{V} - \boldsymbol{\nabla}(f + g), \tag{4}$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + [\Omega \times \mathbf{F}]/\Omega^2 + \alpha[\Omega \times \mathbf{V}]/\Omega^2 + [\Omega \times \boldsymbol{\nabla} g]/\Omega^2, \tag{5}$$

равносильно уравнению (2).

Наряду со скоростью $\mathbf{U}$ рассмотрим скорость еще одной воображаемой жидкости $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \exp\{\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau) d\tau\}$. Завихренность $\tilde{\Omega}$ скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ равна $\tilde{\Omega} = \Omega \exp\{\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau) d\tau\}$. Подставим выражения $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}} \exp\{-\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau) d\tau\}$ и $\Omega = \tilde{\Omega} \exp\{-\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau) d\tau\}$ в уравнение (4). После сокращений и умножения на $\exp\{\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau) d\tau\}$ получим

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + \tilde{\Omega} \times \mathbf{U} = -\exp\left\{\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau) d\tau\right\} \boldsymbol{\nabla}(f + g). \tag{6}$$

Ротация уравнения (6) приводит к уравнению вида (1). Последнее означает (см. текст после формулы (1)), что циркуляция $\tilde{\Gamma}$ скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ по контурам, перемещающимся вместе с частицами воображаемой жидкости со скоростью (5), сохраняется с течением времени. Поскольку скорость $\mathbf{V}$ связана со скоростью $\tilde{\mathbf{V}}$ соотношением $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}} \exp\{-\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau) d\tau\}$, то циркуляция Γ скорости (реальной) жидкости $\mathbf{V}$ по каждому контуру, перемещающемуся со скоростью (5), меняется с течением времени по закону

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\left\{-\int_{t_1}^{t} \alpha(\tau) d\tau\right\}. \tag{7}$$

Формулы (5) и (7) есть основной результат данной статьи. Надлежащий выбор функции $\alpha(t)$ позволяет задавать закон изменения циркуляции по времени, а выбор функции g — изменять величину и направление скорости воображаемых частиц $\mathbf{U}$. При этом, как замечено в [7], различным $\alpha(t)$ и g будут соответствовать различные равноправные точки зрения на эволюцию завихренности.

3. Вязкая несжимаемая жидкость

Для вязкой несжимаемой жидкости уравнение движения имеет вид (3). Поэтому $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu[\Omega \times \mathbf{rot}\,\Omega]/\Omega^2 + \alpha[\Omega \times \mathbf{V}]/\Omega^2 + [\Omega \times \boldsymbol{\nabla} g]/\Omega^2$. При движении контуров (доменов) с такой скоростью их интенсивность Γ будет меняться согласно (7). При применении этой скорости в методе ВВД функции $\alpha(t)$ и g в течение каждого шага должны обладать гладкостью, описанной после формулы (3). Однако они могут быть разрывными при переходе от одного шага по времени к следующему. Такие разрывы допускаются потому, что они соответствуют переходам от одной лагранжевой точки зрения на эволюцию завихренности к другой. Так, например, функцию $\alpha(t)$ можно считать константой на каждом шаге по времени, при этом величина константы может быть различной на разных шагах. Чтобы воспользоваться величинами, которые в любом случае вычисляются при реализации метода ВВД, можно положить $\boldsymbol{\nabla} g = \beta \boldsymbol{\nabla} |\Omega|$ или $\boldsymbol{\nabla} g = \beta \boldsymbol{\nabla} \ln |\Omega|$, где $\beta(t)$ — любая ступенчатая функция времени, постоянная на каждом расчетном шаге (например, $\beta(t) \equiv 0$).

Заключение

Предложена новая лагранжева точка зрения на эволюцию завихренности в плоскопараллельных и незакрученных течениях жидкостей всех типов. Получены формулы для скорости такого перемещения контуров, при котором циркуляция скорости жидкости по любому движущемуся контуру изменяется по заданному временному закону. Этот теоретический результат можно использовать в вычислительной гидродинамике для ограничения количества доменов при использовании бессеточного метода расчета течений вязкой несжимаемой жидкости (метода вязких вихревых доменов).

Список литературы

1. *Rosenhead L.* The formation of vortices from a surface of discontinuity // Proc. R. Soc. Lond. A. 1931. Vol. 134, no. 823. P. 170–192. DOI: 10.1098/rspa.1931.0189.
2. *Белоцерковский С. М., Ништ М. И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P. D.* Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 320 p. DOI: 10.1017/CBO9780511526442.
4. *Голубкин В. Н., Сизых Г. Б.* О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 176–178.
5. *Брутян М. А., Голубкин В. Н., Крапивский П. Л.* Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 1988. Т. 19, № 2. С. 98–100.
6. *Дынникова Г. Я.* Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // Доклады Академии наук. 2004. Т. 399, № 1. С. 42–46.
7. *Марков В. В., Сизых Г. Б.* Эволюция завихренности в жидкости и газе // Известия РАН. МЖГ. 2015. № 2. С. 8–15.
8. *Dynnikova G. Y., Dynnikov Y. A., Guvernyuk S. V., Malakhova T. V.* Stability of a reverse Karman vortex street // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33, no. 2. P. 024102. DOI: 10.1063/5.0035575.
9. *Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y.* On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing // Entropy. 2021. Vol. 23, no. 1. P. 118. DOI: 10.3390/e23010118.
10. *Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E.* Fast methods for vortex influence computation in meshless

Lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. Vol. 126. P. 255–267. DOI: 10.2495/BE420231.
11. *Сизых Г. Б.* Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. DOI: 10.1134/S0032823519030135.
12. *Сизых Г. Б.* Замкнутые вихревые линии в жидкости и газе // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2019. Т. 23, № 3. С. 407–416. DOI: 10.14498/vsgtu1723.
13. *Миронюк И. Ю., Усов Л. А.* Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. DOI: 10.14498/vsgtu1815.
14. *Коцур О. С.* О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 1. С. 76–85.
15. *Миронюк И. Ю., Усов Л. А.* Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176. DOI: 10.53815/20726759_2020_12_4_171.
16. *Сизых Г. Б.* О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 3. С. 144–147. DOI: 10.53815/20726759_2021_13_3_144.
17. *Сизых Г. Б.* Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. DOI: 10.14498/vsgtu1861.
18. *Prim R., Truesdell C.* A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1. P. 32–34.
19. *Truesdell C.* The Kinematics of Vorticity. Bloomington: Indiana University Press, 1954. 232 p.
20. *Фридман А. А.* Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. М.: ОНТИ, 1934. 370 с.

References

1. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity. Proc. R. Soc. Lond. A. 1931;134(823):170–192. DOI: 10.1098/rspa.1931.0189.
2. Belotserkovskii SM, Nisht MI. Separated and Unseparated Ideal Liquid Flow around Thin Wings. Moscow: Nauka; 1978. 352 p. (in Russian).
3. Cottet GH, Koumoutsakos PD. Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. 320 p. DOI: 10.1017/CBO9780511526442.
4. Golubkin VN, Sizykh GB. Some general properties of plane-parallel viscous flows. Fluid Dynamics. 1987;22(3):479–481. DOI: 10.1007/BF01051932.
5. Brutyan MA, Golubkin VN, Krapivskii PL. On the Bernoulli equation for axisymmetric viscous fluid flows. TsAGI Science Journal. 1988;19(2):98–100 (in Russian).
6. Dynnikova GY. Lagrange method for Navier–Stokes equations solving. Proceedings of the Academy of Sciences. 2004;399(1):42–46 (in Russian).
7. Markov VV, Sizykh GB. Vorticity evolution in liquids and gases. Fluid Dynamics. 2015;50(2): 186–192. DOI: 10.1134/S0015462815020027.
8. Dynnikova GY, Dynnikov YA, Guvernyuk SV, Malakhova TV. Stability of a reverse Karman vortex street. Physics of Fluids. 2021;33(2):024102. DOI: 10.1063/5.0035575.
9. Kuzmina K, Marchevsky I, Soldatova I, Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing. Entropy. 2021;23(1):118. DOI: 10.3390/e23010118.

10. Leonova D, Marchevsky I, Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless Lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation. WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019;126:255–267. DOI: 10.2495/BE420231.
11. Sizykh GB. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow. Fluid Dynamics. 2019;54(7):907–911. DOI: 10.1134/S0015462819070139.
12. Sizykh GB. Closed vortex lines in fluid and gas. Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019;23(3):407–416 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1723.
13. Mironyuk IY, Usov LA. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body. Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020;24(4):780–789 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1815.
14. Kotsur OS. On the existence of local formulae of the transfer velocity of local tubes that conserve their strengths. Proceedings of MIPT. 2019;11(1):76–85 (in Russian).
15. Mironyuk IY, Usov LA. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas. Proceedings of MIPT. 2020;12(4):171–176 (in Russian). DOI: 10.53815/20726759_2020_12_4_171.
16. Sizykh GB. On the collinearity of vortex and the velocity behind a detached bow shock. Proceedings of MIPT. 2021;13(3):144–147 (in Russian). DOI: 10.53815/20726759_2021_13_3_144.
17. Sizykh GB. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave. Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2021;25(3):588–595 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1861.
18. Prim R, Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines. Proc. Amer. Math. Soc. 1950;1:32–34.
19. Truesdell C. The Kinematics of Vorticity. Bloomington: Indiana University Press; 1954. 232 p.
20. Friedman AA. Experience in the Hydromechanics of Compressible Fluid. Moscow: ONTI; 1934. 370 p. (in Russian).

Сизых Григорий Борисович — родился в Ангарске (1961). Окончил факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (1985). В 1992 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области исследования движения и горения пылегазовых смесей. Ведет научно-исследовательскую работу в теории движения жидкости, газа и пылегазовых смесей. За последние пять лет (2017–2021) опубликовал по этой тематике 28 научных работ и доложил свои результаты на двух международных конференциях. Работает доцентом на кафедре высшей математики Московского физико-технического института.

Россия, 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9
Московский физико-технический институт
E-mail: o1o2o3@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-5821-8596
AuthorID: 1131068