



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2)

Научная статья

УДК 517.957

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-132-151

Динамика решений одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа

А. А. Корнута , В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: korn_57@mail.ru, art-inf@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.10.2020, принята к публикации 4.01.2022,
опубликована 31.03.2022

Аннотация. Целью работы является исследование начально-краевой задачи для параболического функционально-дифференциального уравнения в кольцевой области, которое описывает динамику фазовой модуляции световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с контуром обратной связи, с преобразованием поворота (отвечает оператор инволюции) и условиями Неймана на границе в классе периодических функций. Более подробно исследуются пространственно-неоднородные стационарные решения, бифурцирующие из пространственно-однородного стационарного решения в результате бифуркации типа «вилка» и периодические по времени решения типа «бегущая волна». **Методы.** Для представления исходного уравнения в виде нелинейных интегральных уравнений используется функция Грина. Применяется метод центральных многообразий для доказательства теоремы о существовании в окрестности бифуркационного параметра решений указанного уравнения и исследования их асимптотической формы. Численное моделирование пространственно-неоднородных решений и бегущих волн проведено с использованием метода Галёркина. **Результаты.** Получены интегральные представления рассматриваемой задачи в зависимости от вида линеаризованного оператора. С использованием метода центральных многообразий доказана теорема о существовании и асимптотической форме решений начально-краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения параболического типа с оператором инволюции на кольце. В результате численного моделирования, основанного на галёркинских аппроксимациях, в рассматриваемой задаче построены приближенные пространственно-неоднородные стационарные решения и периодические по времени решения типа бегущей волны. **Заключение.** Предложенная схема применима не только к инволютивным операторам поворота и условиям Неймана на границе кольца, но и к другим крайевым условиям и круговым областям. Представление исходной начально-краевой задачи в виде нелинейных интегральных уравнений второго рода позволяет более просто находить коэффициенты асимптотических разложений, доказывать теоремы существования и единственности, а также использовать различное число коэффициентов разложения нелинейной составляющей в правой части исходного уравнения в окрестности выделенного решения (например, стационарного). Визуализация численного решения подтверждает теоретические выкладки и показывает возможность формирования сложных фазовых структур.

Ключевые слова: оптическая система, нелинейная среда керровского типа, параболическое нелинейное уравнение, оператор инволюции, устойчивость решений.

Для цитирования: Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Динамика решений одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 132–151.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-132-151

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equation of parabolic type

A. A. Kornuta , V. A. Lukianenko

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: korn_57@mail.ru, art-inf@yandex.ru

Received 15.10.2020, accepted 4.01.2022, published 31.03.2022

Abstract. Purpose of this work is to study the initial-boundary value problem for a parabolic functional-differential equation in an annular region, which describes the dynamics of phase modulation of a light wave passing through a thin layer of a nonlinear Kerr-type medium in an optical system with a feedback loop, with a rotation transformation (corresponds the involution operator) and the Neumann conditions on the boundary in the class of periodic functions. A more detailed study is made of spatially inhomogeneous stationary solutions bifurcating from a spatially homogeneous stationary solution as a result of a bifurcation of the “fork” type and time-periodic solutions of the “traveling wave” type. *Methods.* To represent the original equation in the form of nonlinear integral equations, the Green’s function is used. The method of central manifolds is used to prove the theorem on the existence of solutions of the indicated equation in a neighborhood of the bifurcation parameter and to study their asymptotic form. Numerical modeling of spatially inhomogeneous solutions and traveling waves was carried out using the Galerkin method. *Results.* Integral representations of the considered problem are obtained depending on the form of the linearized operator. Using the method of central manifolds, a theorem on the existence and asymptotic form of solutions of the initial-boundary value problem for a functional-differential equation of parabolic type with an involution operator on an annulus is proved. As a result of numerical modeling based on Galerkin approximations, in the problem under consideration, approximate spatially inhomogeneous stationary solutions and time-periodic solutions of the traveling wave type are constructed. *Conclusion.* The proposed scheme is applicable not only to involutive rotation operators and Neumann conditions on the boundary of the ring, but also to other boundary conditions and circular domains. The representation of the initial-boundary value problem in the form of nonlinear integral equations of the second kind allows one to more simply find the coefficients of asymptotic expansions, prove existence and uniqueness theorems, and also use a different number of expansion coefficients of the nonlinear component in the right-hand side of the original equation in the neighborhood of the selected solution (for example, stationary). Visualization of the numerical solution confirms the theoretical calculations and shows the possibility of forming complex phase structures.

Keywords: optical system, Kerr-type nonlinear medium, parabolic nonlinear equation, involution operator, stability solved.

For citation: Kornuta AA, Lukianenko BA. Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equation of parabolic type. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(2):132–151. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-132-151

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В последние несколько десятилетий внимание исследователей привлекают математические модели нелинейной оптики. Они обладают богатой динамикой самоорганизующихся систем, а варьирование параметров позволяет управлять такой динамикой и наблюдать экспериментально широкий спектр изменения светового поля. Характерной является оптическая система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного внешнего контура двумерной обратной связи [1–3]. В зависимости от реализации обратной связи рассматриваются модели, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями или параболическими функционально-дифференциальными уравнениями с преобразованием пространственных переменных искомой функции [4, 5]. Более общим является случай учёта запаздывания в системе [4, 6–8]. В этом случае функционально-дифференциальное уравнение

$$\tau_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) = \mu \Delta u(x, t) + K(1 + \gamma \cos Qu(x, t - \tau)), \quad x \in S, \quad t \geq 0$$

описывает фазовую модуляцию световой волны $u(x, t)$ в тонком слое нелинейной среды керровского типа в пределах апертуры $S \subset \mathbb{R}^2$. Указанное уравнение дополняется краевыми условиями на границе ∂S , а также начальными условиями при $(x, t) \in S \times [-\tau, 0]$. В уравнении Δ — оператор Лапласа, $\mu > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного поля, γ ($0 < \gamma < 1$) — видность (контрастность) интерференционной картины, $Qu(x, t) = u(q(x), t)$, $q(x)$ — гладкое обратимое преобразование пространственной переменной (например, отражение, поворот).

Исследования функционально-дифференциальных уравнений имеет большую историю, начиная с работ А. Д. Мышкиса [9], Р. Беллмана, К. Кука [10], классической работы Дж. Хейла [11], цикла работ А. Л. Скубачевского и его учеников [12], В. М. Варфоломеева [13, 14], А. Б. Муравника [15, 16], работ А. В. Разгулина и его учеников [17–19], Е. П. Белана [20, 21] и его учеников [22–24], О. Б. Лыковой [25] и других авторов.

Выявление бегущих волн, вращающихся волн, фронтов представляет практический интерес. Бифуркация Андронова–Хопфа приводит к рождению вращающихся волн на окружности в случае преобразования поворота пространственных аргументов [5, 18, 26, 27]. Их взаимодействие на окружности изучалось в работах [20, 21], а двумерные вращающиеся волны в круге с преобразованием поворота рассматривались в [25].

Задача моделирования явлений структурообразования, проявляющихся в экспериментах, таких как бегущие (вращающиеся) волны, далека от завершения. Здесь существенную роль играют апертура области, параметры задачи, организация обратной связи, краевые условия, а также выбор бифуркационного параметра. В отличие от многих исследований в данной работе таким параметром является коэффициент диффузии μ . В работах С. Д. Глызина, А. Ю. Колесова, Н. Х. Розова (в частности, [28]) для динамических систем типа реакция–диффузия при условии уменьшения коэффициента диффузии рассмотрен феномен многомодового диффузионного хаоса. Исследование указанных задач актуально как с позиций теории нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа, так и в связи с разнообразными приложениями в нелинейной оптике.

1. Постановка задачи

На кольце $S = \{(r, \theta) \mid 0 < r_1 \leq r \leq r_2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \mu \Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad (r, \theta) \in S, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $u = u(r, \theta, t)$ с преобразованием поворота на угол h , $Qu = u(r, \theta + h, t)$, например, $h = (2\pi)/p$ ($p \in \mathbb{N}$), с условиями Неймана на границе

$$\frac{\partial u(r_1, \theta, t)}{\partial r} = \tilde{g}_1(\theta, t), \quad \frac{\partial u(r_2, \theta, t)}{\partial r} = \tilde{g}_2(\theta, t), \quad (2)$$

начальным условием

$$u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta), \quad (3)$$

условием периодичности

$$u(r, \theta + 2\pi, t) = u(r, \theta, t). \quad (4)$$

Здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат, $\mu > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, преобразование поворота на угол $h = (2\pi)/p$ определяет оператор $Q = Q_h$, который является оператором инволюции $Q^p = I$ [29], $K > 0$ —

коэффициент, пропорциональный интенсивности входящего потока, $\gamma (0 < \gamma < 1)$ — коэффициент видности (контрастности) интерференционной картины.

При исследовании задачи (1)–(4) используются следующие пространства: функциональное пространство $H = L_2^r(r_1, r_2) \times (0, 2\pi)$ — пространство функций из L^2 квадратично интегрируемых с весом r , со скалярным произведением и нормой, соответственно

$$\langle u, v \rangle_H = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} u(r, \theta) \overline{v(r, \theta)} r dr d\theta, \quad \|u\|_H^2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} |u(r, \theta)|^2 r dr d\theta;$$

функциональное пространство H^2 — соболевское пространство комплекснозначных функций двух вещественных переменных со скалярным произведением и нормой, соответственно

$$\langle u, v \rangle_{H^2} = \langle u, v \rangle_H + \langle -\Delta u, -\Delta v \rangle_H, \quad \|u\|_{H^2}^2 = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^2}};$$

функциональное пространство $H_{2\pi}^2 = \{u | u(\theta + 2\pi) = u(\theta)\}$ — замкнутое пространство 2π -периодичных функций из H^2 .

Корректность начально-краевой задачи (1)–(4) для кольца S может быть доказана по аналогии с задачей для круга $0 < r < r_1$, доказанной ранее в работе [30].

Рассматривается проблема нахождения приближённого пространственно-неоднородного решения задачи (1)–(4), бифурцирующего из его пространственно-однородного решения. В качестве бифуркационного параметра выбран коэффициент диффузии μ .

2. Интегральные представления уравнения

Пусть w — одно из решений задачи (1)–(4). Выполним замену $u = w + v$, где $v(r, \theta, t)$ — новая неизвестная функция. Тогда с учётом $\cos(w + v) = \cos w \cos v - \sin w \sin v = \cos w(\cos v - 1) - \sin w \sin v + \cos w$, получим

$$\begin{aligned} K [1 + \gamma \cos Q_h u] &= K [1 + \gamma Q_h \cos(w + v)] = \\ &= K [1 + \gamma \cos Q_h w] - K \gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h w, Q_h v), \end{aligned}$$

где $f(Q_h w, Q_h v) = K \gamma (\cos Q_h w (\cos Q_h v - 1) - \sin Q_h w (\sin Q_h v - Q_h v))$.

Разложение нелинейной функции $f(Q_h v, Q_h w)$ в ряд по степеням v начинается с v^2 и $f(Q_h w, 0) = 0$.

Задача (1)–(4) относительно v примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \mu \Delta v - K \gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w), \quad (r, \theta) \in S, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

с условиями второго рода на границе

$$\frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} = g_1(\theta, t), \quad \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} = g_2(\theta, t), \quad g_i(\theta, t) \in H_{2\pi}^2, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

начальным условием

$$v(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta), \quad (7)$$

условием периодичности

$$v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t). \quad (8)$$

Сохраняя в разложении $f(Q_h v, Q_h w)$ конечное число членов ряда, получаем ряд модельных уравнений.

В [31] проведен подробный анализ частных решений $u(r, \theta, t) = w$ уравнения (1): стационарного, равного постоянной, $u = w = \text{const}$; стационарного, зависящего только от r , $u = w(r)$; стационарного, зависящего только от θ , $u = w(\theta)$; стационарного, зависящего от r и θ , $u = w(r, \theta)$; нестационарного, зависящего только от t , $u = w(t)$; нестационарного, зависящего от t и θ , $u = w(\theta, t)$.

Уравнение (5), в зависимости от специфики постановки задачи, удобно представлять в трёх операторных формах

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= A_j v + B_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ A_1 v &= \mu \Delta v, \quad B_1 = -v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w); \\ A_2 v &= \mu \Delta v - v, \quad B_2 = -K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w); \\ A_3 v &= \mu \Delta v - v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v, \quad B_3 = f(Q_h v, Q_h w). \end{aligned}$$

Лемма 1. Операторы A_j , $j = 1, 2, 3$ имеют полную в $L_2(\Omega)$, $\Omega = \{(r, \theta) \mid r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_{n,m}(r, \theta) = R_{n,m}(\lambda_{n,m} r) \exp[in\theta], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$R_{n,m}(r) = R_{n,m}(\lambda_{n,m} r) = J_n(\lambda_{n,m} r) \cdot Y'_n(\lambda_{n,m} r_1) - Y_n(\lambda_{n,m} r) \cdot J'_n(\lambda_{n,m} r_1) \quad (9)$$

определяются через функции Бесселя J_n , Y_n [32] первого и второго рода, соответственно, порядка n :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \tilde{\psi}_n(x), \quad \text{где} \quad \tilde{\psi}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \\ Y_n(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\text{ctg } \pi \alpha \cdot J_\alpha(x) - \frac{1}{\sin \pi \alpha} \cdot J_{-\alpha}(x) \right), \end{aligned}$$

$\lambda_{n,m} = \tilde{\lambda}$ – последовательность нумерованных в порядке возрастания корней уравнения

$$J'_n(\tilde{\lambda} r_1) \cdot Y'_n(\tilde{\lambda} r_2) - J'_n(\tilde{\lambda} r_2) \cdot Y'_n(\tilde{\lambda} r_1) = 0. \quad (10)$$

Функции $R(r) = R_{n,m}(\lambda_{m,n})$ являются решениями краевой задачи для уравнения Бесселя

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (\tilde{\lambda}^2 r^2 - n^2) R(r) = 0, \quad R'(r_1) = 0, \quad R'(r_2) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

Собственные значения: $\lambda = -\mu \lambda_{n,m}^2$ (для оператора A_1); $\lambda = -1 - \mu \lambda_{n,m}^2$ (для A_2); $\lambda = -1 - \mu \lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh]$ (для A_3), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\Lambda = -K\gamma \sin Q_h w = -K\gamma \sin w$, для $w = \text{const}$.

Доказательство. Собственные функции $\psi_{n,m}(r, \theta)$ получаем в результате применения метода разделения переменных для уравнений $\frac{\partial v}{\partial t} = A_j v$, $j = 1, 2, 3$. Например, для уравнения с оператором A_3 , представляя $v(r, \theta, t) = X(r, \theta) \cdot T(t) \equiv R(r) \cdot \Phi(\theta) \cdot T(t)$, приходим к задаче Штурма–Лиувилля для $X(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \mu \Delta X(r, \theta) - X(r, \theta) + \Lambda Q_h X(r, \theta) &= \lambda X(r, \theta), \\ \frac{\partial X(r_1, \theta)}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial X(r_2, \theta)}{\partial r} = 0, \quad X(r, \theta + 2\pi) = X(r, \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

и уравнению для функции $T(t)$: $T'(t) - \lambda T(t) = 0$.

Разделяя переменные в (12), для $R(r)$ приходим к задаче (11), а для $\Phi(\theta)$, в отличие от задачи с операторами $A_{1,2}$ ($\Lambda \equiv 0$), задача Штурма–Лиувилля имеет вид:

$$\Phi''(\theta) + \nu\Phi(\theta) = 0, \quad Q_h\Phi(\theta) + \alpha\Phi(\theta) = 0, \quad \Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\nu = \nu_n = n^2, \quad \Phi = \Phi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[\pm in\theta], \quad \alpha_n = -\frac{Q_h\Phi_n(\theta)}{\Phi_n(\theta)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Определим собственные значения λ оператора A_3 (12).

Раскладывая в ряд $X(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} v_{n,m} \psi_{n,m}(r, \theta)$ по функциям $\psi_{n,m}(r, \theta)$, получим для коэффициентов разложения $v_{n,m}$

$$(-1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh]) v_{n,m} = \lambda v_{n,m}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Откуда следует, что для A_3

$$\lambda = -1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

При $\Lambda = 0$ получаем собственные значения для оператора A_2 и, очевидно, $\lambda = -\mu\lambda_{n,m}^2$ для оператора A_1 .

Решениями краевой задачи (11) являются функции $R(r) = C_1 J_n(r) + C_2 Y_n(r)$. Учитывая краевые условия задачи (11), получим:

$$\begin{aligned} C_1 J'_n(\tilde{\lambda}r_1) + C_2 Y'_n(\tilde{\lambda}r_1) &= 0, \\ C_1 J'_n(\tilde{\lambda}r_2) + C_2 Y'_n(\tilde{\lambda}r_2) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Система (13) относительно C_1 и C_2 имеет нетривиальное решение, если $\tilde{\lambda}$ является решением уравнения (10). Известно, что уравнение (10) имеет счётное число положительных корней [32] $\lambda_{n,m}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда C_1 и C_2 определяются из любого уравнения системы (13) (то есть определяется решение (9)):

$$C_1 = -C_2 \frac{Y'_n(\lambda_{n,m}r_1)}{J'_n(\lambda_{n,m}r_1)} \quad \text{или} \quad C_2 = -C_1 \frac{J'_n(\lambda_{n,m}r_1)}{Y'_n(\lambda_{n,m}r_1)}. \quad \square$$

На основании выкладок метода разделения переменных Леммы 1, запишем функцию Грина для оператора A_1 :

$$\begin{aligned} G_1(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) &= \frac{\rho}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp[-in(\theta - \varphi)] R_{n,m}(r) R_{n,m}(\rho) \exp[-\mu\lambda_{n,m}^2(t - \tau)]}{d_{n,m}^2}, \\ d_{n,m}^2 &= \frac{2}{\pi^2 \lambda_{n,m}^2 r_1^2} \left[\frac{\pi^2 r_1^2}{4} (\lambda_{n,m}^2 r_2^2 - n^2) (R_{n,m}(r_2))^2 - (\lambda_{n,m}^2 r_1^2 - n^2) \right], \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{14}$$

Для неоднородного линейного уравнения с оператором A_1 с условиями, приведёнными к однородным краевым и начальным условиям

$$v_t = A_1 v + v_0(r, \theta)\delta(t) + g_2(\theta, t)\delta(r - r_2) - g_1(\theta, t)\delta(r - r_1) + f(r, \theta, t) \equiv A_1 v + f_1,$$

решение можно представить через функцию Грина

$$v(r, \theta, t) = \int_0^t \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} G_1(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) f_1(\rho, \varphi, \tau) d\varphi \rho d\rho d\tau.$$

Функция Грина G_2 для оператора A_2 будет отличаться от G_1 множителем $\exp[-(1 + \mu\lambda_{n,m}^2)t]$ вместо $\exp[-\mu\lambda_{n,m}^2 t]$, а G_3 для оператора A_3 – множителем $\exp[(-1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh])t]$.

В случае нелинейных уравнений с операторами A_j с нулевыми краевыми и ненулевыми начальными условиями использование функций Грина G_j приводит к нелинейным уравнениям следующего вида

$$v_j(r, \theta, t) = \int_0^t \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} G_j(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) [B_j(v(\rho, \varphi, \tau)) + v_0(\rho, \varphi)\delta(\tau)] d\varphi \rho d\rho d\tau, \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Уравнения (15) удобны для приближённых вычислений и оценок.

3. Бифуркация решения, асимптотическое представление

Далее в этом разделе рассматриваем пространственно-неоднородные стационарные решения, бифурцирующие из пространственно-однородного стационарного решения $u(r, \theta, t) = w = \text{const}$, которое определяется равенством

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (16)$$

Известно [33], что при увеличении K число корней уравнения (16) растёт и состав их меняется. Зафиксируем гладкую ветвь, соответствующую одному из решений (16)

$$w = w(K, \gamma), \quad 1 + K\gamma \sin w(K, \gamma) \neq 0.$$

Линеаризуем уравнение (1) на выделенном стационарном пространственно-однородном решении $w(K, \gamma)$, выполним замену $u = v + w$ и, выделив линейную часть, получим уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \mu \Delta v - K\gamma \sin w \cdot Q_h v + f(Q_h v, w), \quad (r, \theta) \in S, \quad t \geq 0.$$

Для обнаружения решений, которые наблюдались в экспериментах (например, [34]), предположим, что оператор Q_h является инволютивным: $Q_h^p = I$. Выберем $h = 2\pi/p$, $p \in \mathbb{N}$. Представляет интерес $p \geq 3$ (случай $p = 2$ исследован ранее [24]).

Собственные значения оператора A_3

$$\lambda = -1 - \mu\lambda_{n,m}^2 - K\gamma \sin w \exp\left[i\frac{2\pi n}{p}\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Лемма 2. Устойчивость решения v определяется знаком вещественной части выражения (17): $\lambda = \alpha_{n,m} + i\beta_{n,m}$, где $\text{Re } \lambda = \alpha_{n,m} = -1 - \mu\lambda_{n,m}^2 - K\gamma \sin w \cos(2\pi n/p)$, $\text{Im } \lambda = \beta_{n,m} = -K\gamma \sin w \sin(2\pi n/p)$. Если $\text{Re } \lambda < 0$, то решение v устойчивое, если $\text{Re } \lambda > 0$, то решение v неустойчивое [35, стр. 29].

Действительная часть $\alpha_{n,m} = -1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \cos(2\pi n/p)$ содержит параметры K, γ, w, μ , из которых в общем случае значимыми являются K и μ . Выберем в качестве бифуркационного параметра коэффициент диффузии μ , зафиксировав при этом Λ .

В общем случае, для $Q_h \Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi/p)$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Решение линеаризованной задачи, соответствующей (5)–(8), может быть представлено в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{n,m} R_{n,m}(r) \exp[-in\theta] \exp\left[\left(-1 - \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp\left[i\frac{2\pi n}{p}\right]\right)t\right].$$

В зависимости от значений действительной и мнимой частей λ могут быть получены различные типы решений, в частности, при $\operatorname{Re} \lambda \neq 0, \operatorname{Im} \lambda = 0$ получаем стационарные решения (5)–(8), при $\operatorname{Re} \lambda = 0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ получаем чисто периодические решения (5)–(8)

$$A_{n,m}(r) \exp \left[-i \left(n\theta + \Lambda \sin \frac{2\pi n}{p} t \right) \right].$$

3.1. Метод центральных многообразий. Для исследования бифуркационных явлений используем принятую методику, основанную на построении иерархии упрощенных моделей в окрестности точек бифуркации [20, 36].

Далее рассмотрим случай $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$. Используя линеаризацию уравнения (5) на выделенном стационарном пространственно-однородном решении $w(K, \gamma)$, выполним замену $u = v + w$ и рассмотрим одну из модельных задач задачи (5)–(8):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \mu \Delta v - K\gamma \sin w \cdot Q_h v - \frac{K\gamma \cos w}{2!} \cdot Q_h v^2 + \frac{K\gamma \sin w}{3!} \cdot Q_h v^3, \quad (18)$$

$$0 < r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t \geq 0,$$

с условиями второго рода на границе

$$\frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad (19)$$

начальным условием

$$v(r, \theta, 0) = 0 \quad (20)$$

и условием периодичности

$$v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t). \quad (21)$$

Учитывая, что $\Lambda = -K\gamma \sin w$, и, обозначив $\Omega = -K\gamma(\operatorname{ctg} w/2)$, (18) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v + \mu \Delta v + \Lambda Q_h v + \Omega Q_h v^2 - \frac{\Lambda}{6} Q_h v^3, \quad (22)$$

$$0 < r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t \geq 0.$$

Уравнение (22), линеаризованное в окрестности нулевого решения, представим в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A_3 v, \quad (23)$$

где $A_3 v = -v + \mu \Delta v + \Lambda Q_h v$.

Далее будем считать, что $h = \pi/3$ (аналогично можно рассмотреть другие случаи).

Линейный оператор A_3 с областью определения H^2 , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве H , является самосопряженным оператором. На основании Леммы 1 устанавливается

Лемма 3. Для случая поворота $h = \pi/3$, $\operatorname{Re} \lambda_n \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda_n = \beta_{n,m} = K\gamma \sin w \sin(\pi n/3) = 0$, оператору A_3 соответствует разложение в ряд по собственным функциям $\psi_{3s,m}(r, \theta) = R_{3s,m} \cos 3s\theta$, $s = 1, 2, \dots$ с собственными значениями

$$\lambda_{3s} = -\mu \lambda_{3s,m}^2 - 1 + (-1)^s \Lambda, \quad (24)$$

где $\lambda_{3s,m}$ — m -корень уравнения (10).

Доказательство следует из общего случая (Лемма 1) разложения линейного оператора A_3 , рассматриваемого в гильбертовом пространстве H с областью определения H^2 по полной ортонормированной системе собственных функций $\psi_{n,m}(r, \theta)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. При $h = \pi/3$, $\Lambda < -1$, существует $\delta > 0$, такое что при фиксированном значении $m = 1$ и для любых значений параметра μ , удовлетворяющих неравенству $\mu_1 - \delta < \mu < \mu_1$, где $\mu_s = (-1 - (-1)^s \Lambda) / \lambda_{3s,m}^2$, $s = 1, 2, \dots$, существует непрерывная ветвь стационарных точек $z(\mu) > 0$ уравнения

$$\dot{z} = \lambda_3(\mu)z + \frac{1}{2d_{3,1}^2} \left(\frac{\Lambda\gamma_1}{4} - \frac{\Omega^2\gamma_2^2}{(2\lambda_3 - \lambda_6)d_{6,1}^2} \right) z^3 + \dots, \quad (25)$$

которой соответствует стационарное решение $v = \varphi(r, \theta, \mu)$ уравнения (22), определяемое равенством

$$\varphi(r, \theta, \mu) = zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta + z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta + \xi(z, r, \theta, \mu) |_{z=z(\mu)}, \quad (26)$$

$$P_6(r, \mu) = \frac{\Omega\gamma_2}{2(2\lambda_3 - \lambda_6)d_{6,1}^2} \cdot R_{6,1}(r), \quad (27)$$

$$P_9(r, \mu) = \frac{1}{2(3\lambda_3 - \lambda_9)d_{9,1}^2} \left[-\frac{\Omega^2\gamma_2\gamma_3}{(2\lambda_3 - \lambda_6)d_{6,1}^2} + \frac{\Lambda\gamma_4}{12} \right] \cdot R_{9,1}(r), \quad (28)$$

где $\xi(z, r, \theta, \mu) = O(|z|^4)$, $R_{3s,1}$ и $d_{3s,1}^2$, $s = 1, 2, 3$ определяются равенствами (9) и (14), соответственно,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_{r_1}^{r_2} rR_{3,1}^4(r)dr, & \gamma_2 &= \int_{r_1}^{r_2} rR_{3,1}^2(r)R_{6,1}(r)dr, \\ \gamma_3 &= \int_{r_1}^{r_2} rR_{3,1}(r)R_{6,1}(r)R_{9,1}(r)dr, & \gamma_4 &= \int_{r_1}^{r_2} rR_{3,1}^3(r)R_{9,1}(r)dr. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение $\varphi(r, \theta, \mu)$ — орбитально устойчиво.

Доказательство. Согласно теореме 5.1.1 работы [36] и Леммам 1, 2, если $\Lambda > 1$, то нулевое решение (23) неустойчиво для любых $\mu > 0$. Если $-1 < \Lambda < 1$, то нулевое решение (23) является асимптотически устойчивым для любых $\mu > 0$. Интерес представляет случай $\Lambda < -1$. Выберем теперь K так, чтобы выполнялось условие: $\Lambda = \Lambda(K) < -1$.

Здесь $\mu_s = (-1 - (-1)^s \Lambda) / \lambda_{3s,m}^2$, $s = 1, 2, \dots$. Если $\mu > \mu_1$, то согласно Лемме 2 нулевое решение задачи (23) является устойчивым. При убывании параметра μ и его прохождении через значение μ_1 одно собственное значение λ_3 проходит через мнимую ось.

Если $\mu_2 < \mu < \mu_1$, то индекс неустойчивости нулевого решения равен 1. Индекс неустойчивости нулевого решения повышается на единицу при уменьшении μ и его прохождении через μ_s , $s = 2, 3, \dots$

В окрестности $v = 0$ для μ , удовлетворяющих неравенству $\mu_1 - \delta < \mu < \mu_1$, существует центральное многообразие [36], представимое в виде

$$\varphi(r, \theta, \mu) = zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta + z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta + \xi(z, r, \theta, \mu) |_{z=z(\mu)}, \quad (30)$$

где $P_6(r, \mu), P_9(r, \mu), \dots$ функции из пространства $L_2^r[r_1, r_2]$. На многообразии (30) уравнение (22) принимает вид

$$\dot{z} = \lambda_3(\mu)z + C_2z^2 + C_3z^3. \quad (31)$$

Найдём коэффициенты разложений (30) и (31). Для этого подставим (30) и (31) в уравнение (22):

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_3(\mu)z + C_2z^2 + C_3z^3 \right) \left(zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + 2zP_6(r, \mu) \cos 6\theta + 3z^2P_9(r, \mu) \cos 9\theta \right) = \\ & = \mu \left(zR_{3,1}''(r) \cos 3\theta + z^2P_6''(r, \mu) \cos 6\theta + z^3P_9''(r, \mu) \cos 9\theta + \right. \\ & \quad \left. + \frac{zR_{3,1}'(r) \cos 3\theta}{r} + \frac{z^2P_6'(r, \mu) \cos 6\theta}{r} + \frac{z^3P_9'(r, \mu) \cos 9\theta}{r} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{9zR_{3,1}''(r) \cos 3\theta}{r^2} - \frac{36z^2P_6''(r, \mu) \cos 6\theta}{r^2} - \frac{81z^3P_9''(r, \mu) \cos 9\theta}{r^2} \right) + \\ & \quad + \Lambda \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta - z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta \right) + \\ & \quad + \Omega \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta - z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta \right)^2 - \\ & \quad - \frac{\Lambda}{6} \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, \mu) \cos 6\theta - z^3P_9(r, \mu) \cos 9\theta \right)^3. \end{aligned} \quad (32)$$

В силу ортогональности системы собственных функций $\cos 3s\theta$, $s = 1, 2, 3$ приравняем коэффициенты при указанных функциях в левой и правой частях равенства (32). При $\cos 3\theta$ получим

$$\begin{aligned} & R_{3,1}(r) \left[z \left(\lambda_3 + 1 + \Lambda \right) + C_2z^2 + C_3z^3 \right] = \\ & = \mu z \left(R_{3,1}''(r) + \frac{R_{3,1}'(r)}{r} - \frac{9R_{3,1}(r)}{r^2} \right) - \Omega z^3 R_{3,1}(r) P_6(r, \mu) + \frac{\Lambda z^3 R_{3,1}^3(r)}{8}. \end{aligned}$$

Так как $R_{3,1}(r)$ – решение краевой задачи уравнения Бесселя (11), то

$$\begin{aligned} & R_{3,1}(r) \left[z \left(\lambda_3 + 1 + \Lambda + \mu\lambda_{3,1}^2 \right) + C_2z^2 + C_3z^3 \right] = \\ & = -\Omega z^3 R_{3,1}(r) P_6(r, \mu) + \frac{\Lambda z^3 R_{3,1}^3(r)}{8}. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_3 = -1 - \mu\lambda_{3,1}^2 - \Lambda$, то $C_2 = 0$, $C_3 R_{3,1}(r) = -\Omega R_{3,1}(r) P_6(r, \mu) + \frac{\Lambda R_{3,1}^3(r)}{8}$. Следовательно,

$$C_3 = \frac{1}{d_{3,1}^2} \left(-\Omega \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) P_6(r, \mu) dr + \frac{\Lambda \gamma_1}{8} \right), \quad (33)$$

где $\gamma_1 = \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^4(r) dr$, $P_6(r, \mu) = \frac{\gamma_2 \Omega R_{6,1}(r)}{2d_{6,1}^2 (2\lambda_3 - \lambda_6)}$.

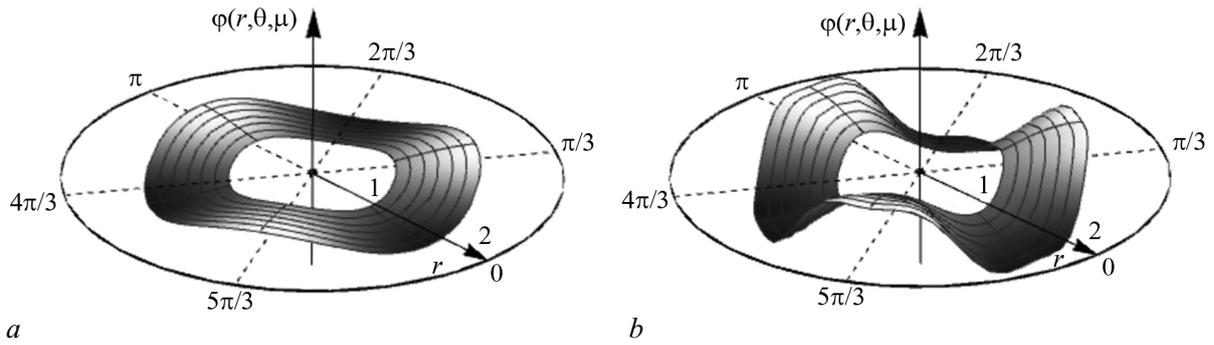


Рис. 1. Приближённое стационарное решение (30) для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ в цилиндрической системе координат при $\mu = 0.1$ (a) и $\mu = 0.01$ (b)

Fig. 1. Approximate stationary solution of (30) for $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ in a cylindrical coordinate system for $\mu = 0.1$ (a) and $\mu = 0.01$ (b)

Исходя из условия $\Lambda < -1$ и равенства (24), очевидно, что $C_3 < 0$, тогда имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилка» (см. [36], гл. 6. 3) и от тривиальной особой точки уравнения (25) ответвляются две устойчивые стационарные точки.

Проводя аналогичные (громоздкие) выкладки для $s = 2, 3$, получим утверждения Теоремы.

Таким образом, в некоторой окрестности μ_1 существует стационарное решение $v = \varphi(r, \theta, \mu)$ уравнения (22), определяемое равенствами (26)–(28). Решение $\varphi(r, \theta, \mu)$ – орбитально устойчиво. \square

Теорема носит локальный характер.

При использовании пакета «Wolfram Mathematica 11.3» для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ построены полученные в Теореме приближённые решения (30) для различных значений бифуркационного параметра μ (рис. 1).

Следствие 1. Полученные результаты согласуются с одномерным случаем, когда узкое кольцо можно заменить окружностью. При $h = \pi/3$, $\Lambda < -1$, существует $\delta > 0$ и $\mu_1 = (-1 - \Lambda)/9$, такое что для любых значений параметра μ , удовлетворяющих неравенству $\mu_1 - \delta < \mu < \mu_1$, существует непрерывная ветвь стационарных точек $z(\mu) > 0$ уравнения

$$\dot{z} = \lambda_3(\mu)z + \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda}{4} - \frac{\Omega^2}{(2\lambda_3 - \lambda_6)} \right) z^3 + \dots,$$

которой соответствует стационарное решение $v = \varphi_1(\theta, \mu)$ уравнения (22) на окружности $S(r_1 = r_2)$ с условием 2π -периодичности, определяемое равенством

$$\begin{aligned} \varphi_1(\theta, \mu) = & z \cos 3\theta + z^2 \frac{\Omega}{2(2\lambda_3 - \lambda_6)} \cos 6\theta + \\ & + z^3 \frac{1}{2(3\lambda_3 - \lambda_9)} \left[-\frac{\Omega^2}{(2\lambda_3 - \lambda_6)} + \frac{\Lambda}{12} \right] \cos 9\theta + \xi(z, \theta, \mu) \Big|_{z=z(\mu)}, \end{aligned}$$

где $\xi(z, \theta, \mu) = O(|z|^4)$, $\lambda_{3s} = -1 + (-1)^s \Lambda - (3s)^2 \mu$, $s = 1, 2, 3$.

Решение $\varphi_1(\theta, \mu)$ – орбитально устойчиво.

3.2. Метод Галёркина. Для того чтобы провести исследование асимптотики стационарных решений задачи (18)–(21) при уменьшении бифуркационного параметра μ и его отходе

от критического значения μ_1 , воспользуемся методом Галёркина, в соответствии с которым приближённые решения представим в виде

$$\varphi^*(r, \theta) = \sum_{k=1}^N (z_k \exp[ik\theta] + \bar{z}_k \exp[-ik\theta]) R_{k,1}(r), \quad (34)$$

здесь z_k, \bar{z}_k – комплексно-сопряжённые выражения.

Требую, чтобы функция $\varphi^*(r, \theta)$, определяемая равенством (34), удовлетворяла уравнению (18), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= \lambda_k z_k + \sigma_k(z, \bar{z}), \\ \dot{\bar{z}}_k &= \bar{\lambda}_k \bar{z}_k + \bar{\sigma}_k(z, \bar{z}), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\lambda_k(\mu) = -1 - \mu \lambda_{k,1}^2 + \exp[ikh]\Lambda$, $\bar{\lambda}_k(\mu) = -1 - \mu \lambda_{k,1}^2 + \exp[-ikh]\Lambda$, $\sigma_k(z, \bar{z})$, $\bar{\sigma}_k(z, \bar{z})$ – формы третьей степени от z_k, \bar{z}_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

Одним из решений системы (35) является нулевое решение, устойчивость которого определяется спектром $\{\lambda_k(\mu), \bar{\lambda}_k(\mu)\}$ соответствующей матрицы устойчивости. Как и выше, считаем, что выполняется условие $\Lambda < -1$.

Пусть $h = \pi/3$, тогда первое критическое значение бифуркационного параметра, при котором нулевое стационарное решение системы (35) теряет устойчивость, $\mu_1 = (-\Lambda - 1)/\lambda_{3,1}^2$. В результате этого происходит бифуркация типа «вилка» и при $\mu < \mu_1$ рождается пара устойчивых стационарных точек $\pm z^*(\mu) = \{0, 0, \pm z_3^*, 0, 0, \pm z_6^*, \dots\}$, являющихся решениями алгебраической системы уравнений

$$\lambda_k z_k + \varepsilon_k(z_l) = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, N, \quad (36)$$

где $\varepsilon_k(z_l)$ – полином третьей степени, содержащий вторую и третью степень z_l .

Исходя из этого, с учётом (34), пространственно-неоднородное стационарное решение задачи (18)–(21) определяется асимптотическим равенством

$$\varphi^*(r, \theta, \mu) = \sum_{k=1}^{[N/3]} z_{3k}(\mu) \cos[3k\theta] R_{3k,1}(r). \quad (37)$$

Например, при $N = 3$ решение $z^*(\mu)$ определяется системой

$$\begin{aligned} \lambda_3 z_1 + \frac{1}{8d_3^2} [\Lambda (\beta_3 z_1^3 + 2\delta_{36} z_2^2 z_1 + 2\delta_{39} z_3^2 z_1 + \zeta_{39} z_1^2 z_3 + \xi_{639} z_2^2 z_3) - 8\Omega z_2 (\delta_{369} z_3 + \xi_{36} z_1)] &= 0, \\ \lambda_6 z_2 + \frac{1}{8d_6^2} [-\Lambda z_2 (\beta_6 z_2^2 + 2\delta_{36} z_1^2 + 2\delta_{69} z_3^2 + 2\xi_{639} z_1 z_3) + \Omega z_1 (8\delta_{369} z_3 + 4\xi_{36} z_1)] &= 0, \\ \lambda_9 z_3 + \frac{1}{24d_9^2} [3\Lambda (\beta_9 z_3^3 + 2\delta_{39} z_1^2 z_3 + 2\delta_{69} z_2^2 z_3 + \zeta_{39} \Lambda z_1^3 + \xi_{639} z_2^2 z_1) - 24\delta_{369} \Omega z_2 z_1] &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_k &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{k,1}^4(r) dr, \quad k = 3, 6, 9; \quad \delta_{kl} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{k,1}^2(r) R_{l,1}^2(r) dr, \quad k, l = 3, 6, 9 (k < l); \\ \zeta_{39} &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^3(r) R_{9,1}(r) dr, \quad \xi_{36} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) R_{6,1}(r) dr, \\ \delta_{369} &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) R_{6,1}^2(r) R_{9,1}^2(r) dr, \quad \xi_{639} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{6,1}^2(r) R_{3,1}(r) R_{9,1}(r) dr. \end{aligned} \quad (38)$$

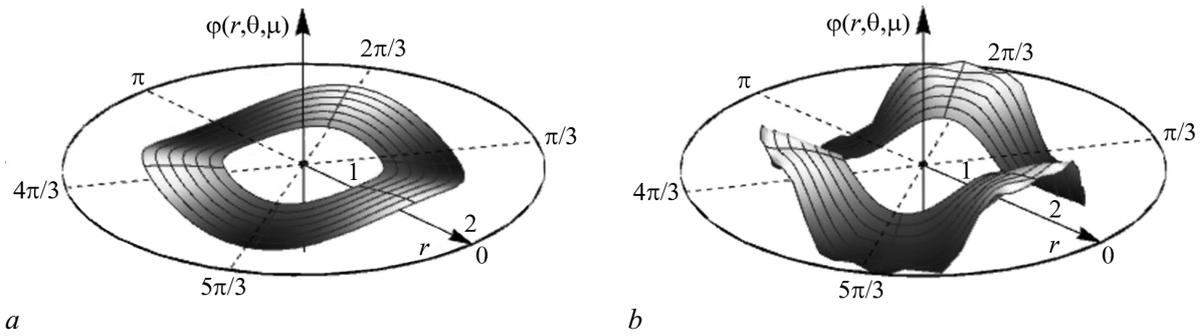


Рис. 2. Приближённое решение (30), полученное с применением метода Галёркина, для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ в цилиндрической системе координат при $\mu = 0.1$ (a) и $\mu = 0.01$ (b)

Fig. 2. Approximate solution (30) obtained using the Galerkin method for $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ in a cylindrical coordinate system for $\mu = 0.1$ (a) and $\mu = 0.01$ (b)

Численный анализ для $N = 5$ проводился при фиксированных значениях параметров $\Lambda = -3/2$, $\Omega = 0.129264$, что соответствует $K = 2$, $\gamma = 0.761058$, $w = 1.74147$. Получены следующие результаты.

1. Критическое значение бифуркационного параметра $\mu^* \approx 0.113315$.
2. При $\mu > \mu^*$ нулевое решение системы (36) устойчиво.
3. При уменьшении параметра μ и прохождении критического значения μ^* одно собственное значение спектра матрицы устойчивости нулевого решения λ_3 проходит через нуль и становится положительным. В результате происходит бифуркация типа «вилка» и от теряющего устойчивость нулевого решения ответвляется пара устойчивых стационарных решений. В частности, при $\mu = 0.11331$ решение системы (36) $z^*(\mu) = \{0, 0, \pm 0.0481462, 0, 0, \pm 0.0000198428, 0, \dots\}$.
4. При дальнейшем уменьшении параметра μ собственное значение λ_3 остаётся положительным.
5. Спектр матрицы устойчивости решения $z^*(\mu)$ лежит на отрицательной полуоси.

В пакете «Wolfram Mathematica 11.3» для различных значений бифуркационного параметра μ построены полученные с применением метода Галёркина приближённые решения $\varphi(r, \theta, \mu)$, определяемые равенством (37) (рис. 2).

Приближённые решения задачи (18)–(21), построенные с применением метода центральных многообразий и метода Галёркина, практически совпадают.

3.3. Бегущая волна. Заметим, что в отличие от результатов, полученных выше, наличие поворота пространственных координат может моделировать ситуацию, когда пространственно-однородное решение при изменении параметров в задаче (μ, K) теряет устойчивость колебательным образом. В этом случае возникает бегущая волна.

Далее, используя представление решения (34) задачи (18)–(21) в методе Галёркина, построим двухмодовую аппроксимацию её периодического решения типа «бегущая волна», которое рождается в результате бифуркации Андронова–Хопфа при наибольшем критическом значении параметра $\mu = \mu^* : \{\text{Re } \lambda(\mu^*) = 0\}$ (24) от теряющего колебательным образом устойчивость нулевого решения системы (35).

Указанное решение ищем в виде

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \rho_1 \exp[i\theta_1], & z_2(t) &= 0, & z_3(t) &= \rho_3 \exp[i(3\theta_1 + \alpha_3)]; \\ \bar{z}_1(t) &= \rho_1 \exp[-i\theta_1], & \bar{z}_2(t) &= 0, & \bar{z}_3(t) &= \rho_3 \exp[-i(3\theta_1 + \alpha_3)], \end{aligned} \quad (39)$$

где $\rho_k = \rho_k(t, \mu) > 0$, $\theta_k = \theta_k(t, \mu)$, $k = 1, 3$.

Считаем $\theta_1(t, \mu) = \omega(\mu)t$. Подставим (39) в (35), получим систему для определения ρ_k, α_3 :

$$\begin{aligned} \rho_1(\lambda_1^* d_1^2 - i\omega) - \frac{1}{2}\Lambda \exp[ih] [\xi_{13} \exp[i\alpha_3] \rho_3 \rho_1^2 - \beta_1 \rho_1^3 - 2\delta_{13} \rho_3^2 \rho_1] &= 0, \\ \rho_1(\hat{\lambda}_1^* d_1^2 + i\omega) - \frac{1}{2}\Lambda \exp[-ih] [\xi_{13} \exp[-i\alpha_3] \rho_3 \rho_1^2 - \beta_1 \rho_1^3 - 2\delta_{13} \rho_3^2 \rho_1] &= 0, \\ \rho_3(\lambda_3^* d_3^2 - 3i\omega) - \frac{1}{6}\Lambda \exp[3ih] [\xi_{13} \exp[-i\alpha_3] \rho_1^3 - 3\beta_3 \rho_3^3 - 6\delta_{13} \rho_3 \rho_1^2] &= 0, \\ \rho_3(\hat{\lambda}_3^* d_3^2 + 3i\omega) - \frac{1}{6}\Lambda \exp[-3ih] [\xi_{13} \exp[i\alpha_3] \rho_1^3 - 3\beta_3 \rho_3^3 - 6\delta_{13} \rho_3 \rho_1^2] &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $d_k^2 (k = 1, 3)$ определяется равенством (14), $\beta_k (k = 1, 3)$, δ_{13} определяются равенствами (38), $\xi_{13} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{1,1}^3(r) R_{3,1}(r) dr$.

При $\mu > \mu^*$ система имеет только нулевое ($\rho_1 = 0, \rho_3 = 0$) устойчивое решение. При уменьшении параметра μ и прохождении критического значения μ^* нулевое решение теряет устойчивость и при этом происходит рождение решения вида:

$$\begin{aligned} \rho_1^2(\mu) &= \frac{6\Psi_3^c}{\Lambda (\Psi_1^c (3\gamma_1 (\Psi_3^c)^2 - 4\delta_{13} \Psi_3^c - \gamma_3 \Psi_1^c))} \left[\omega (3\omega \sin 4h + d_3^2 \Upsilon_{13}^c) + \right. \\ &\quad \left. + (d_1^2 (3\omega \Upsilon_{31}^c + d_3^2 (\Lambda \sin 3h (1 + \mu \lambda_{3,1}^2) - \Upsilon^s (1 + \mu \lambda_{1,1}^2))) \right], \\ \sin^2 \alpha_3(\mu) &= -\frac{12\Psi_1^c \Psi_3^c}{\Lambda^2 \xi_{13}^2 \rho_1(\mu)^4}, \\ \cos \alpha_3(\mu) &= \frac{\sin \alpha_3(\mu) (\gamma_1 \Lambda \rho_1^2(t) - 2d_1^2 \Lambda) \Psi^s}{2\Psi_1^c} + \frac{4\delta_{13} \Psi_1^c}{\Lambda \xi_{13}^2 \sin \alpha_3(\mu) \rho_1^2(t)}, \\ \rho_3(\mu) &= \frac{-2\Psi_1^c}{\Lambda \xi_{13} \sin \alpha_3(\mu) \rho_1(\mu)}, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\Psi_k^c = k\omega \cos(kh) - d_k^2 \sin(kh)(\mu \lambda_{k,1}^2 + 1)$, $k = 1, 3$, $\Psi^s = \omega \sin h + d_1^2 \cos h(\mu \lambda_{1,1}^2 + 1)$, $\Upsilon_{jk}^c = -\Lambda \cos jh + \cos 4h(\mu \lambda_{k,1}^2 + 1)$, $(j, k = 1, 3, j \neq k)$, $\Upsilon^s = -\Lambda \sin h + \sin 4h(\mu \lambda_{3,1}^2 + 1)$, значение ω определяется из основного тригонометрического тождества для $\alpha_3(\mu)$, знак $\sin \alpha_3(\mu)$ выбирается противоположным знаком Ψ_1^c .

Следовательно, система (35) при $\mu < \mu^*$ имеет решение

$$\begin{aligned} z_1(t, \mu) &= \rho_1(\mu) \exp[i\theta_1(\mu)t], \quad z_2(t) = 0, \quad z_3(t, \mu) = \rho_3(\mu) \exp[i(3\theta_1(\mu)t + \alpha_3(\mu))]; \\ \bar{z}_1(t, \mu) &= \rho_1(\mu) \exp[-i\theta_1(\mu)t], \quad \bar{z}_2(t) = 0, \quad \bar{z}_3(t, \mu) = \rho_3(\mu) \exp[-i(3\theta_1(\mu)t + \alpha_3(\mu))]. \end{aligned} \quad (42)$$

Подставив (42) в (34), получаем периодическое решение $\varphi^*(r, \theta, t, \mu)$ задачи (18)–(21).

Указанное решение рождается устойчивым.

Численное моделирование проводилось для $h = 2\pi/3$ при фиксированных значениях параметров $\Lambda = -3/2$, $\Omega = 0.129264$, которые соответствуют параметрам $K = 2$, $\gamma = 0.761058$,

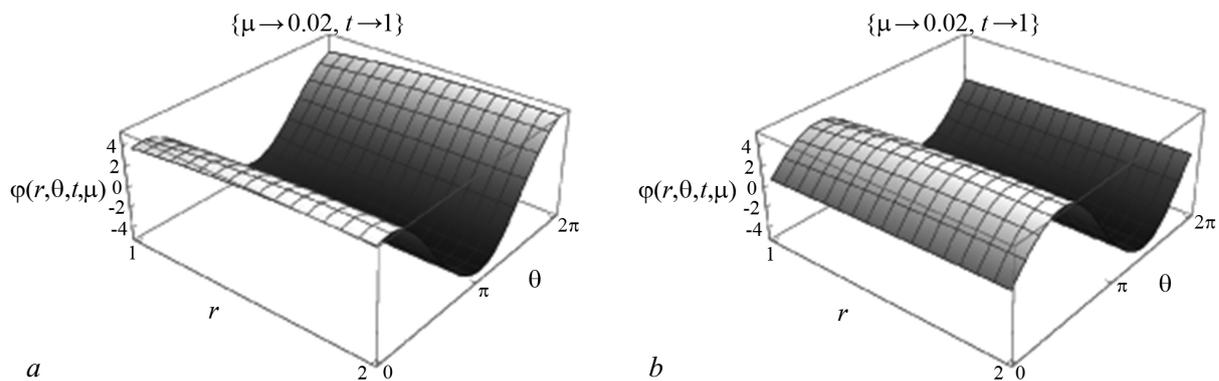


Рис. 3. Приближённое решение (30) типа «бегущая волна», полученное с применением метода Галёркина, для $\Lambda = -3/2$, $h = 2\pi/3$ при $\mu = 0.1$ (a) и $\mu = 0.01$ (b)

Fig. 3. An approximate solution (30) of the “traveling wave” type obtained using the Galerkin method for $\Lambda = -3/2$, $h = 2\pi/3$ for $\mu = 0.1$ (a) and $\mu = 0.01$ (b)

$w = 1.74147$ исходной задачи. В пакете «Wolfram Mathematica 11.3» для различных значений бифуркационного параметра μ при $N = 5$ были построены галёркинские аппроксимации периодических решений $\varphi^*(r, \theta, t, \mu)$ (рис. 3).

Заключение

В работе рассмотрена начально-краевая задача для параболического функционально-дифференциального уравнения в кольцевой области, которое описывает динамику фазовой модуляции световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с контуром обратной связи, с оператором инволюции и условиями Неймана на границе в классе периодических функций. С использованием функции Грина получено интегральное представление рассматриваемого уравнения, что позволяет более просто находить коэффициенты асимптотических разложений, доказывать теоремы существования и единственности (аналогично [30]), а также использовать различное число коэффициентов разложения нелинейной составляющей в правой части исходного уравнения в окрестности выделенного решения (например, стационарного).

С применением метода центральных многообразий доказана теорема о существовании в окрестности бифуркационного значения параметра μ (коэффициента диффузии) пространственно-неоднородного решения, которое ответвляется от пространственно-однородного решения. С помощью метода Галёркина проведено численное моделирование бифурцирующих пространственно-неоднородных стационарных решений и бегущих волн при фиксированных значениях параметров.

Рассмотренная математическая модель соответствует оптической схеме, в которой за счёт керровской нелинейности происходит визуализация фазы световой волны. Распределению фазы соответствует распределение интенсивности в поперечном сечении. Визуализация численного решения подтверждает теоретические выкладки и показывает возможность формирования сложных фазовых структур.

Список литературы

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // В кн.: Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263–325.

2. *Разгулин А. В.* Задача управления двумерным преобразованием пространственных аргументов в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1078–1091.
3. *Разгулин А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики. М.: МАКС Пресс, 2008. 203 с.
4. *Akhmanov S. A., Vorontsov M. A., Ivanov V. Y., Larichev A. V., Zheleznykh N. I.* Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // J. Opt. Soc. Am. B. 1992. Vol. 9, no. 1. P. 78–90. DOI: 10.1364/JOSAB.9.000078.
5. *Vorontsov M. A., Razgulin A. V.* Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions // Photonics and Optoelectronics. 1993. Vol. 1, no. 2. P. 103–111.
6. *Chesnokov S. S., Rybak A. A.* Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems // Laser Physics. 2000. Vol. 10, no. 5. P. 1061–1068.
7. *Iroshnikov N. G., Vorontsov M. A.* Transverse rotating waves in the non-linear optical system with spatial and temporal delay // In: *Frontiers in Nonlinear Optics: The Sergei Akhmanov Memorial Volume* / Ed. by Walther H., Koroteev N., Scully M. O. Boca Raton: CRC Press, 1993. P. 261–278.
8. *Razgulin A. V.* Finite-dimensional dynamics of distributed optical systems with delayed feedback // *Computers and Mathematics with Applications*. 2000. Vol. 40, no. 12. P. 1405–1418. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00249-2.
9. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О минимуме квадратичного функционала и о линейных краевых задачах эллиптического типа с отклоняющимися аргументами // УМН. 1979. Т. 34, № 3(207). С. 197–198.
10. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М: Мир, 1967. 548 с.
11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.
12. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1394–1401.
13. *Варфоломеев Е. М.* О бифуркации Андронова–Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных // УМН. 2007. Т. 62, № 2(374). С. 173–174. DOI: 10.4213/rm6389.
14. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2007. Т. 21. С. 5–36.
15. *Муравник А. Б.* О задаче Коши для некоторых неоднородных дифференциально-разностных параболических уравнений // *Математические заметки*. 2003. Т. 74, № 4. С. 538–548. DOI: 10.4213/mzm288.
16. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2014. Т. 52. С. 3–141.
17. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // *Математическое моделирование*. 1993. Т. 5, № 4. С. 105–119.
18. *Разгулин А. В., Романенко Т. Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. Т. 53, № 11. С. 1804–1821. DOI: 10.7868/S0044466913110136.
19. *Романенко Т. Е.* Двумерные вращающиеся волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом пространственных аргументов и запаздыванием // *Дифференциальные уравнения*. 2014. Т. 50, № 2. С. 260–263. DOI: 10.1134/S0374064114020149.

20. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 645–654.
21. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2005. Т. 1, № 1. С. 3–34.
22. Белан Е. П., Хазова Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4, № 1–2(32). С. 43–57.
23. Белан Е. П., Шиян О. В. Автоколебательные режимы горения вдоль полосы // Динамические системы. 2009. № 27. С. 3–16.
24. Корнута А. А. Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении на окружности с поворотом пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4, № 1–2(32). С. 59–75.
25. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 10. С. 1348–1357.
26. Ларичев А. В. Динамические процессы в нелинейных оптических системах с двумерной обратной связью: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.21. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1995. 108 с.
27. Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A., Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physica D. 1999. Vol. 125, no. 1–2. P. 123–141. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00196-1.
28. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионный хаос и его инвариантные числовые характеристики // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 203, № 1. С. 10–25. DOI: 10.4213/tmf9824.
29. Карпетянц Н. К., Самко С. Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. Ростов: Издательство Ростовского университета, 1988. 187 с.
30. Хазова Ю. А., Лукьяненко В. А. Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 4. С. 85–98. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98.
31. Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции // Динамические системы. 2019. Т. 9(37), № 4. С. 390–409.
32. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
33. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 430 с.
34. Arecchi F. T., Boccaletti S., Ducci S., Pampaloni E., Ramazza P. L., Residori S. The liquid crystal light valve with optical feedback: A case study in pattern formation // Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials. 2000. Vol. 9, no. 2. P. 183–204. DOI: 10.1142/S0218863500000170.
35. Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Динамические системы – 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7–140.
36. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.
37. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970. 328 с.

References

1. Akhmanov SA, Vorontsov MA, Ivanov VY. Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: Toward the creation of nonlinear-optical analogues of neural networks. In: *New Physical Principles of Optical Data Processing*. Moscow: Nauka; 1990. P. 263–325 (in Russian).
2. Razgulin AV. The problem of control of a two-dimensional transformation of spatial arguments in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 2006;42(8):1140–1155. DOI: 10.1134/S001226610608009X.
3. Razgulin AV. *Nonlinear Models of Optical Synergetics*. Moscow: MAKS-Press; 2008. 203 p. (in Russian).
4. Akhmanov SA, Vorontsov MA, Ivanov VY, Larichev AV, Zheleznykh NI. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures. *J. Opt. Soc. Am. B*. 1992;9(1):78–90. DOI: 10.1364/JOSAB.9.000078.
5. Vorontsov MA, Razgulin AV. Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions. *Photonics and Optoelectronics*. 1993;1(2):103–111.
6. Chesnokov SS, Rybak AA. Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems. *Laser Physics*. 2000;10(5):1061–1068.
7. Iroshnikov NG, Vorontsov MA. Transverse rotating waves in the non-linear optical system with spatial and temporal delay. In: Walther H, Koroteev N, Scully MO, editors. *Frontiers in Nonlinear Optics: The Sergei Akhmanov Memorial Volume*. Boca Raton: CRC Press; 1993. P. 261–278.
8. Razgulin AV. Finite-dimensional dynamics of distributed optical systems with delayed feedback. *Computers and Mathematics with Applications*. 2000;40(12):1405–1418. DOI: 10.1016/S0898-1221(00)00249-2.
9. Kamenskii GA, Myshkis AD, Skubachevskii AL. The minimum of a quadratic functional, and linear elliptic boundary-value problems with deviating arguments. *Russian Mathematical Surveys*. 1979;34(3):201–202. DOI: 10.1070/RM1979v034n03ABEH003993.
10. Bellman RE, Cooke KL. *Differential-Difference Equations*. New York: Academic Press; 1963. 465 p.
11. Hale JK. *Theory of Functional Differential Equations*. New-York: Springer-Verlag; 1977. 366 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
12. Skubachevskii AL. On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 1998;34(10):1395–1402.
13. Varfolomeev EM. Andronov–Hopf bifurcation for quasi-linear parabolic functional differential equations with transformations of spatial variables. *Russian Mathematical Surveys*. 2007;62(2):398–400. DOI: 10.1070/RM2007v062n02ABEH004401.
14. Varfolomeev EM. On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2008;153(5):649–682. DOI: 10.1007/s10958-008-9141-0.
15. Muravnik AB. The Cauchy problem for certain inhomogeneous difference-differential parabolic equations. *Mathematical Notes*. 2003;74(4):510–519. DOI: 10.1023/A:1026143810717.
16. Muravnik AB. Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016;216(3):345–496. DOI: 10.1007/s10958-016-2904-0.
17. Razgulin AV. Rotational waves in optical system with 2-d feedback. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 1993;5(4):105–119 (in Russian).
18. Razgulin AV, Romanenko TE. Rotating waves in parabolic functional differential equations with

- rotation of spatial argument and time delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013;53(11):1626–1643. DOI: 10.1134/S0965542513110109.
19. Romanenko TE. Two-dimensional rotating waves in a functional-differential diffusion equation with rotation of spatial arguments and time delay. *Differential Equations*. 2014;50(2):264–267. DOI: 10.1134/S0012266114020141.
 20. Belan EP. On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 2004;40(5):692–702. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000043527.22864.ac.
 21. Belan EP. On the dynamics of traveling waves in a parabolic equation with the transformation of the shift of the spatial variable. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2005;1(1): 3–34 (in Russian).
 22. Belan EP, Khazova YA. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dynamical Systems*. 2014;4(1–2(32)):43–57 (in Russian).
 23. Belan EP, Shiyani OV. Self-oscillatory combustion regimes along the strip. *Dynamical Systems*. 2009;(27):3–16 (in Russian).
 24. Kornuta AA. Metastable structures in a parabolic equation with rotation of the spatial variable. *Dynamical Systems*. 2014;4(1–2(32)):59–75 (in Russian).
 25. Belan EP, Lykova OB. Rotating structures in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations*. 2004;40(10):1419–1430. DOI: 10.1007/s10625-004-0008-y.
 26. Larichev AV. *Dynamic Processes in Nonlinear Optical Systems With Two-Dimensional Feedback*. PhD Thesis in Physical and Mathematical Sciences. Moscow: Lomonosov Moscow State University; 1995. 108 p. (in Russian).
 27. Grigorieva EV, Haken H, Kashchenko SA, Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback. *Physica D*. 1999;125(1–2):123–141. DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00196-1.
 28. Glyzin SD, Kolesov AY, Rozov NC. Diffusion chaos and its invariant numerical characteristics. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2020;203(1):443–456. DOI: 10.1134/S0040577920040029.
 29. Karapetiants NK, Samko SG. *Equations With Involution Operators and Their Applications*. Rostov-on-Don: Rostov University Publishing; 1988. 187 p. (in Russian).
 30. Khazova YA, Lukianenko VA. Application of integral methods for the study of the parabolic problem. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2019;27(4):85–98 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-4-85-98.
 31. Kornuta AA, Lukianenko VA. Functional-differential equations of parabolic type with an involution operator. *Dynamical Systems*. 2019;9(4):390–409 (in Russian).
 32. Abramowitz M, Stegun IA, editors. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Washington: National Bureau of Standards; 1964. 1082 p.
 33. Mishchenko EF, Sadovnichiy VA, Kolesov AY, Rozov NK. *Autowave Processes in Nonlinear Media With Diffusion*. Moscow: Fizmatlit; 2005. 430 p. (in Russian).
 34. Arecchi FT, Boccaletti S, Ducci S, Pampaloni E, Ramazza PL, Residori S. The liquid crystal light valve with optical feedback: A case study in pattern formation. *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*. 2000;9(2):183–204. DOI: 10.1142/S0218863500000170.
 35. Arnol'd VI, Ilyashenko YS. Ordinary differential equations. In: *Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Dynamical Systems I*. Berlin: Springer-Verlag; 1988. P. 1–148.
 36. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlin: Springer-Verlag; 1981. 350 p. DOI: 10.1007/BFb0089647.
 37. Bateman H, Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms*. Vol. 2. New York: McGraw-Hill Book Company; 1954. 451 p.



Корнута Анжелика Александровна — родилась в Симферополе (1969). Окончила с отличием Симферопольский государственный университет по специальности математика (1992). Старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Научные интересы — анализ решений функционально-дифференциальных уравнений параболического типа с преобразованием пространственных переменных, бифурцирующих при изменении параметров уравнения, математическое моделирование. Опубликовала 9 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, 4
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского
E-mail: korn_57@mail.ru
AuthorID: 890574



Лукьяненко Владимир Андреевич — родился в с. Юрковка Винницкой области (1949). Окончил Одесский государственный университет имени И. И. Мечникова по специальности математика (1972). Доцент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение) Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Опубликовал свыше 140 научных статей по направлениям уравнения типа свертки, краевые задачи теории аналитических функций и уравнения в частных производных, линейные и нелинейные уравнения 1-го рода, математическое моделирование, интеллектуализация обработки данных.

Россия, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, 4
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского
E-mail: art-inf@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-5271-031X
AuthorID: 885978