Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003013
EDN: LSEQWO

О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора

О. И. Москаленко✉, *Е. В. Евстифеев*

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ✉o.i.moskalenko@gmail.com, evstifeevev@mail.ru
Поступила в редакцию 3.06.2022, принята к публикации 6.07.2022,
опубликована онлайн 14.10.2022, опубликована 30.11.2022

Аннотация. *Целью* работы является исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. В качестве объектов исследования выбраны однонаправленно связанные системы Лоренца, а для диагностики синхронного режима использован модифицированный метод вспомогательной системы. *Результатом* работы является доказательство наличия мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора. Для этого в работе получены бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний взаимодействующих систем Лоренца при значении параметра связи, соответствующем реализации в исследуемой системе режима перемежающейся обобщенной синхронизации, а также рассчитана зависимость меры мультистабильности от величины параметра связи. Показано, что в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации мера мультистабильности оказывается положительной, что является дополнительным подтверждением наличия мультистабильности в данном случае.

Ключевые слова: обобщенная синхронизация, мультистабильность, системы со сложной топологией аттрактора, перемежаемость, метод вспомогательной системы.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук (проект № МД-18.2022.1.2).

Для цитирования: *Москаленко О. И., Евстифеев Е. В.* О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 676–684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013. EDN: LSEQWO

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003013

On existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with complex topology of attractor

O. I. Moskalenko, E. V. Evstifeev

Saratov State University, Russia

E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com, evstifeevev@mail.ru

Received 3.06.2022, accepted 6.07.2022, available online 14.10.2022, published 30.11.2022

Abstract. *Aim* of this work is to study the possibility of existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in systems with complex attractor topology. Unidirectionally coupled Lorentz systems have been chosen as an object of study, and a modified auxiliary system method has been used to detect the presence of the synchronous regime. *Result* of the work is a proof of the presence of multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with a complex topology of attractor. For this purpose, the basins of attraction of the synchronous and asynchronous states of interacting Lorenz systems have been obtained for the value of the coupling parameter corresponding to the realization of the intermittent generalized synchronization regime in the system under study, and the dependence of the multistability measure on the value of the coupling parameter has also been calculated. It is shown that in the regime of intermittent generalized synchronization the measure of multistability turns out to be positive, which is an additional confirmation of the presence of multistability in this case.

Keywords: generalized synchronization, multistability, systems with complex topology of attractor, intermittency, auxiliary system approach.

Acknowledgements. This work was financially supported by the Grant Council of the President of the Russian Federation for the state support of young Russian scientists — doctors of sciences (project No. MD-18.2022.1.2).

For citation: Moskalenko OI, Evstifeev EV. On existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with complex topology of attractor. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6):676–684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013

Мультистабильность является универсальным явлением, характерным для систем различной природы [1]. Под мультистабильностью подразумевается сосуществование в фазовом пространстве динамической системы нескольких аттракторов, выбор которых зависит от начальных условий этой системы. Впервые термин «мультистабильность» был введен в рассмотрение в работе [2], посвященной зрительному восприятию. Позднее мультистабильность была обнаружена почти во всех областях науки и техники, включая электронику, оптику, механику и биологию.

В настоящее время явление мультистабильности достаточно хорошо изучено применительно к автономной и неавтономной динамике исследуемых систем (см., например, [3–7] и др.). Однако анализ синхронной динамики взаимодействующих систем и явлений вблизи границ различных типов синхронизации с позиций мультистабильности до настоящего времени детально не проводился, хотя и существуют работы, направленные на изучение мультистабильности при разрушении синхронных режимов с точки зрения бифуркационного анализа в дискретных отображениях, генетических элементах, лазерных системах и ансамблях связанных осцилляторов (см., например, [8–12]).

Среди известных типов синхронизации наименее изученным с точки зрения мультистабильности является режим обобщенной хаотической синхронизации [13–15]. Этот режим означает установление связи между состояниями взаимодействующих систем в виде функционала и может наблюдаться как в случае однонаправленной, так и взаимной связи между этими системами. В обоих случаях вблизи границы обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение, причем тип перемежаемости, реализуемый в данном случае, не зависит от характера связи между системами, а определяется топологией аттракторов взаимодействующих систем:

в системах с относительно простой топологией (с аттрактором ленточного типа) имеет место перемежаемость типа «on – off» [16, 17], в то время как в осцилляторах со сложной (двулистной) структурой наблюдается перемежаемость перескоков [18, 19]. Для систем с относительно простой топологией аттрактора недавно обнаружено наличие мультистабильности в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации [20, 21], в то время как вблизи границы этого режима в системах с более сложной структурой аттрактора подобные исследования до настоящего времени не проводились.

Поэтому целью настоящей работы является изучение возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора.

В качестве объекта исследования выбраны две однонаправленно связанные системы Лоренца [22]:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1),\\
\dot{y}_1 &= r_1x_1 - y_1 - x_1z_1,\\
\dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1,\\
\dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2),\\
\dot{y}_2 &= r_2x_2 - y_2 - x_2z_2,\\
\dot{z}_2 &= -bz_2 + x_2y_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

(где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ — векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем, $\sigma = 10$, $b = 2$, $r_1 = 40$ и $r_2 = 35$ — управляющие параметры, ε — параметр связи), находящиеся вблизи границы обобщенной синхронизации. Для диагностики обобщенной синхронизации в данном случае традиционно используется метод вспомогательной системы [23], суть которого сводится к введению в рассмотрение дополнительной, так называемой вспомогательной системы $\mathbf{x}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, идентичной по управляющим параметрам ведомой системе, но стартующей с других начальных условий, принадлежащих бассейну притяжения того же самого аттрактора. Вспомогательная система Лоренца имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= \sigma(y_3 - x_3) + \varepsilon(x_1 - x_3),\\
\dot{y}_3 &= r_3x_3 - y_3 - x_3z_3,\\
\dot{z}_3 &= -bz_3 + x_3y_3,
\end{aligned} \tag{2}$$

и рассматривается исключительно в совокупности с уравнением (1). Если обобщенная синхронизация между ведущим $\mathbf{x}_1$ и ведомым $\mathbf{x}_2$ осцилляторами отсутствует, то ведомая $\mathbf{x}_2$ и вспомогательная $\mathbf{x}_3$ системы будут эволюционировать на одном и том же аттракторе, но при этом в один и тот же момент времени их поведение будет совершенно различным ($\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_3$). В режиме обобщенной синхронизации ввиду установления функциональной связи между состояниями ведущей $\mathbf{x}_1$ и ведомой $\mathbf{x}_2$ систем, а также ведущей $\mathbf{x}_1$ и вспомогательной $\mathbf{x}_3$ систем, состояния ведомой и вспомогательной систем после завершения переходного процесса должны стать идентичными (то есть, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3$ в любой момент времени).

Как показали проведенные расчеты, режим обобщенной синхронизации в системе (1) возникает при $\varepsilon = 11.5$. Ниже границы этого режима, как отмечалось выше, наблюдается перемежающееся поведение. В данном случае функциональная связь между состояниями взаимодействующих систем устанавливается не всегда, а только в определенные интервалы времени, называемые ламинарными фазами или фазами синхронного поведения систем. В остальные моменты времени, называемые турбулентными всплесками, режим обобщенной синхронизации не наблюдается. Таким образом, в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации наблюдается чередование фаз синхронного и асинхронного поведения взаимодействующих систем, а для диагностики этого режима также возможно использовать метод вспомогательной системы. Для этого необходимо проанализировать разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем и определить длительности характерных фаз поведения.

В то же самое время, как показывают проведенные исследования, при фиксированных начальных условиях ведущей и вспомогательной систем и различных начальных условиях ведомой системы в системе (1)–(2) в один и тот же момент времени могут наблюдаться как одинаковые, так и различные (синхронные или асинхронные) фазы поведения, что свидетельствует о наличии мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в данном случае. Для иллюстрации вышесказанного на рис. 1 приведены бассейны притяжения ведомой системы Лоренца (1), полученные в различные моменты времени при значении параметра связи $\varepsilon = 8.8$, соответствующем режиму перемежающейся обобщенной синхронизации. Начальные условия для ведущей (1) и вспомогательной (2) систем, как отмечалось выше, всегда выбирались фиксированными, а для ведомой системы координата y_2 фиксировалась, а координаты x_2, z_2 варьировались, как указано на рисунке. На рис. 1 темный цвет соответствует фазам синхронного поведения (в смысле обобщенной синхронизации), светлый — асинхронным. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность. Из рисунков видно, что во все рассмотренные моменты времени вблизи границы обобщенной синхронизации в исследуемой системе имеет место мультистабильность.

Для количественной характеристики степени мультистабильности и диагностики обобщенной синхронизации с учетом этой особенности необходимо рассмотреть ансамбль ведомых осцилляторов Лоренца, находящихся под воздействием одной и той же ведущей системы:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1),\\
\dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1,\\
\dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1,\\
\dot{x}_2^i &= \sigma(y_2^i - x_2^i) + \varepsilon(x_1 - x_2^i),\\
\dot{y}_2^i &= r_2 x_2^i - y_2^i - x_2^i z_2^i,\\
\dot{z}_2^i &= -b z_2^i + x_2^i y_2^i,
\end{aligned} \tag{3}$$

с теми же значениями управляющих параметров, что и для системы (1)–(2), и отличающимися

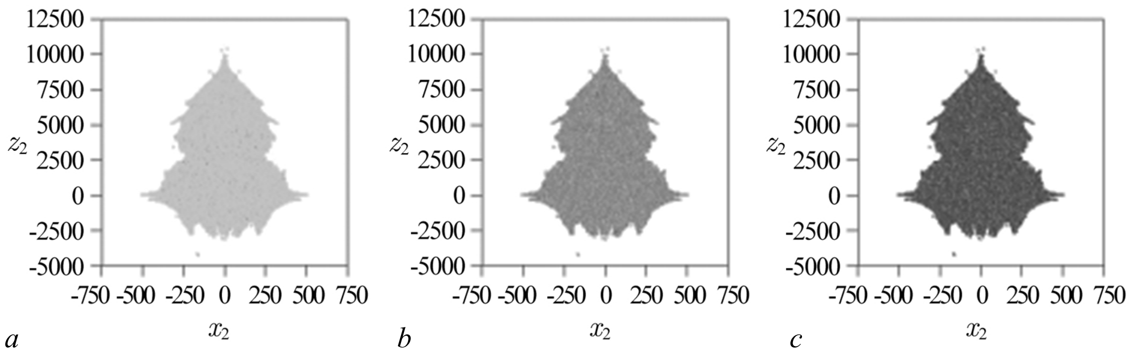

Рис. 1. Бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний ведомой системы Лоренца (1), находящейся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации с ведущей системой, при значении параметра связи $\varepsilon = 8.8$ на плоскости начальных условий (x_2, z_2) $(y_2 = 1.1)$, полученные в различные моменты времени: $t = 20000$ (*a*), 40000 (*b*), 70000 (*c*). Темный цвет соответствует реализации в фиксированный момент времени режима обобщенной синхронизации в системе (1), светлый цвет относится к асинхронному режиму. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность

Fig. 1. Basins of attraction of synchronous and asynchronous states of the response Lorenz system (1) being un the intermittent generalized synchronization regime with the drive system for the coupling parameter value $\varepsilon = 8.8$ on the plane of initial conditions (x_2, z_2) $(y_2 = 1.1)$ obtained in different moments of time: $t = 20000$ (*a*), 40000 (*b*), 70000 (*c*). Dark color corresponds to the realization the generalized synchronization regime in system (1) for a fixed moment of time, light color refers to the asynchronous regime. White color corresponds to the going the representation point to infinity

значениями начальных условий ведомых систем, равномерно распределенными по аттракторам этих систем. Здесь $i = 1 \ldots N$, $N = 4000$ — число элементов в ансамбле, $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{x}_2^i = (x_2^i, y_2^i, z_2^i)$ — векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем, соответственно. Диагностику обобщенной синхронизации в данном случае целесообразно проводить при помощи модифицированного метода вспомогательной системы, предложенного в работе [21], согласно которому необходимо провести сравнение состояний ведомых систем между собой (фактически, сравнивать состояния ведомой и вспомогательной систем при различных начальных условиях) и произвести расчет так называемой меры мультистабильности в зависимости от величины параметра связи. В роли меры мультистабильности по аналогии с работой [21] выступает вероятность наблюдения асинхронного режима, вычисляемая как

$$P_a = 1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{n(\mathbf{x}_2^i)}{N(N-1)}, \tag{4}$$

где $n(\mathbf{x}_2^i)$ — число систем, состояния которых в данный момент времени совпадают с состоянием i-го осциллятора. Совпадение состояний двух ведомых систем между собой, как отмечалось выше, согласно классическому методу вспомогательной системы [23], означает, что они находятся в режиме обобщенной синхронизации с ведущей системой. Тогда понятно, что если все ведомые системы находятся в режиме обобщенной синхронизации с ведущей системой, то $P_a = 0$. Аналогично, если для всех систем в данный момент времени наблюдается асинхронное поведение, то $P_a = 1$. Интерес представляет промежуточный вариант, когда только часть систем демонстрирует синхронное поведение, а остальная часть находится в асинхронном режиме. В данном случае $P_a \in (0, 1)$, а вблизи границы обобщенной синхронизации имеет место мультистабильность.

На рис. 2 представлена зависимость усредненной по времени вероятности наблюдения асинхронного режима

$$\mathrm{P} = \int_0^T P_a(t)dt, \tag{5}$$

полученной для системы (3), от параметра связи ε. Видно, что по мере увеличения параметра связи мера мультистабильности монотонно уменьшается от 1 до 0, отражая переход от асинхронного состояния к режиму обобщенной синхронизации, а вблизи границы возникновения синхронного

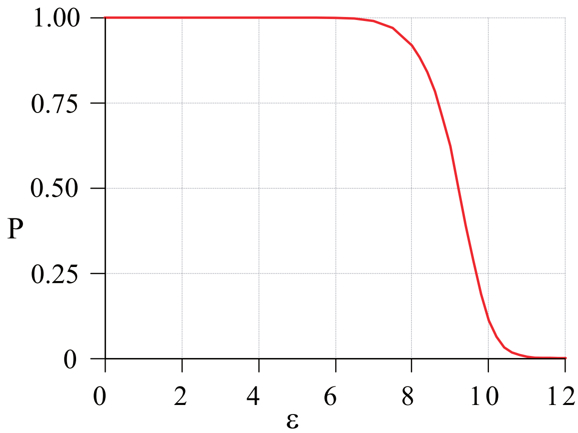

Рис. 2. Зависимость меры мультистабильности P от параметра связи ε, полученной при помощи модифицированного метода вспомогательной системы для системы (3)

Fig. 2. Dependence of the multistability measure P on the coupling parameter ε obtained by means of the modified auxiliary system method for the system (3)

режима эта мера отлична от нуля, что является дополнительным подтверждением наличия мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в исследуемой системе.

Таким образом, в настоящей работе на примере однонаправленно связанных систем Лоренца показано, что на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора имеет место мультистабильность. Сделанные выводы подтверждены при помощи построения карт бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний взаимодействующих систем, а также путем расчета меры мультистабильности в зависимости от величины параметра связи. Установлено, что по аналогии с системами с относительно простой топологией аттрактора в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации систем с относительно сложной структурой мера мультистабильности оказывается положительной, что доказывает наличие мультистабильности в данном случае.

Список литературы

1. *Pisarchik A. N., Feudel U.* Control of multistability // Physics Reports. 2014. Vol. 540, no. 4. P. 167–218. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.02.007.
2. *Attneave F.* Multistability in perception // Sci. Am. 1971. Vol. 225, no. 6. P. 63–71. DOI: 10.1038/scientificamerican1271-62.
3. *Безручко Б. П., Селезнев Е. П., Смирнов Е. В.* Эволюция бассейнов притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, № 8. С. 12–17.
4. *Eschenazi E., Solari H. G., Gilmore R.* Basins of attraction in driven dynamical systems // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39, no. 5. P. 2609–2627. DOI: 10.1103/PhysRevA.39.2609.
5. *Moreno-Bote R., Rinzel J., Rubin N.* Noise-induced alternations in an attractor network model of perceptual bistability // Journal of Neurophysiology. 2007. Vol. 98, no. 3. P. 1125–1139. DOI: 10.1152/jn.00116.2007.
6. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, no. 6. P. 1607–1626. DOI: 10.1142/S0218127408021233.
7. *Поздняков М. В., Савин А. В.* Особенности мультистабильных режимов несимметрично связанных логистических отображений // Известия вузов. ПНД. 2010. Т. 18, № 5. С. 44–53. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-5-44-53.
8. *Postnov D. E., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O. V., Balanov A. G., Anishchenko V. S., Mosekilde E.* Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // Chaos. 1999. Vol. 9, no. 1. P. 227–232. DOI: 10.1063/1.166394.
9. *Carvalho R., Fernandez B., Vilela Mendes R.* From synchronization to multistability in two coupled quadratic maps // Phys. Lett. A. 2001. Vol. 285, no. 5–6. P. 327–338. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00370-X.
10. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Hénon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63, no. 5. P. 056212. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.056212.
11. *Pikovsky A., Popovych O., Maistrenko Y.* Resolving clusters in chaotic ensembles of globally coupled identical oscillators // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87, no. 4. P. 044102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.044102.
12. *Campos-Mejía A., Pisarchik A. N., Arroyo-Almanza D. A.* Noise-induced on–off intermittency in mutually coupled semiconductor lasers // Chaos, Solitons & Fractals. 2013. Vol. 54. P. 96–100. DOI: 10.1016/j.chaos.2013.06.006.
13. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, no. 2. P. 980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.

14. *Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Hramov A. E.* Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 84, no. 3. P. 037201. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.037201.
15. *Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E., Boccaletti S.* Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86, no. 3. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216.
16. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // Europhys. Lett. 2005. Vol. 70, no. 2. P. 169–175. DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6.
17. *Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Pivovarov A. A., Evstifeev E. V.* Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators // Chaos. 2020. Vol. 30, no. 8. P. 083133. DOI: 10.1063/5.0007156.
18. *Москаленко О. И., Короновский А. А., Ханадеев В. А.* Метод выделения характерных фаз поведения в системах со сложной топологией аттрактора, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 3. С. 274–281. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-274-281.
19. *Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Pivovarov A. A., Khanadeev V. A., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization // Phys. Rev. E. 2020. Vol. 102, no. 1. P. 012205. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205.
20. *Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Selskii A. O., Evstifeev E. V.* On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 8. P. 083106. DOI: 10.1063/5.0055302.
21. *Москаленко О. И., Короновский А. А., Сельский А. О., Евстифеев Е. В.* Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, № 2. С. 3–6. DOI: 10.21883/PJTF.2022.02.51910.18985.
22. *Zheng Z., Wang X., Cross M. C.* Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65, no. 5. P. 056211. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.056211.
23. *Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, no. 5. P. 4528–4535. 10.1103/PhysRevE.53.4528.

References

1. Pisarchik AN, Feudel U. Control of multistability. Physics Reports. 2014;540(4):167–218. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.02.007.
2. Attneave F. Multistability in perception. Sci. Am. 1971;225(6):63–71. DOI: 10.1038/scientificamerican1271-62.
3. Bezruchko BP, Seleznev EP, Smirnov EV. Evolution of basins of attractors of symmetrically coupled systems with period doubling. Tech. Phys. Lett. 1995;21(8):12–17 (in Russian).
4. Eschenazi E, Solari HG, Gilmore R. Basins of attraction in driven dynamical systems. Phys. Rev. A. 1989;39(5):2609–2627. DOI: 10.1103/PhysRevA.39.2609.
5. Moreno-Bote R, Rinzel J, Rubin N. Noise-induced alternations in an attractor network model of perceptual bistability. Journal of Neurophysiology. 2007;98(3):1125–1139. 10.1152/jn.00116.2007.
6. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008;18(6):1607–1626. DOI: 10.1142/S0218127408021233.
7. Pozdnyakov MV, Savin AV. Multistable regimes in asymmetrically coupled period-doubling

systems. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2010;18(5):44–53 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-5-44-53.

8. Postnov DE, Vadivasova TE, Sosnovtseva OV, Balanov AG, Anishchenko VS, Mosekilde E. Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization. Chaos. 1999;9(1):227–232. DOI: 10.1063/1.166394.
9. Carvalho R, Fernandez B, Vilela Mendes R. From synchronization to multistability in two coupled quadratic maps. Phys. Lett. A. 2001;285(5–6):327–338. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00370-X.
10. Astakhov V, Shabunin A, Uhm W, Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Hénon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism. Phys. Rev. E. 2001;63(5):056212. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.056212.
11. Pikovsky A, Popovych O, Maistrenko Y. Resolving clusters in chaotic ensembles of globally coupled identical oscillators. Phys. Rev. Lett. 2001;87(4):044102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.044102.
12. Campos-Mejía A, Pisarchik AN, Arroyo-Almanza DA. Noise-induced on–off intermittency in mutually coupled semiconductor lasers. Chaos, Solitons & Fractals. 2013;54:96–100. DOI: 10.1016/j.chaos.2013.06.006.
13. Rulkov NF, Sushchik MM, Tsimring LS, Abarbanel HDI. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. Phys. Rev. E. 1995;51(2):980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
14. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization. Phys. Rev. E. 2011;84(3):037201. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.037201.
15. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Hramov AE, Boccaletti S. Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks. Phys. Rev. E. 2012;86(3):036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216.
16. Hramov AE, Koronovskii AA. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. Europhys. Lett. 2005;70(2):169–175. DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6.
17. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Pivovarov AA, Evstifeev EV. Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators. Chaos. 2020;30(8):083133. DOI: 10.1063/5.0007156.
18. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Khanadeev VA. Method for characteristic phase detection in systems with complex topology of attractor being near the boundary of generalized synchronization. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(3):274–281 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-274-281.
19. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Pivovarov AA, Khanadeev VA, Hramov AE, Pisarchik AN. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization. Phys. Rev. E. 2020;102(1):012205. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205.
20. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Selskii AO, Evstifeev EV. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems. Chaos. 2021;31(8):083106. DOI: 10.1063/5.0055302.
21. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Selskii AO, Evstifeev EV. A method to detect the characteristics of intermittent generalized synchronization based on calculation of probability of the synchronous regime observation. Tech. Phys. Lett. 2022;48(1):49–52. DOI: 10.21883/PJTF.2022.02.51910.18985.
22. Zheng Z, Wang X, Cross MC. Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. E. 2002;65(5):056211. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.056211.
23. Abarbanel HDI, Rulkov NF, Sushchik MM. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. Phys. Rev. E. 1996;53(5):4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528.

Москаленко Ольга Игоревна — родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006), кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012), доктор физико-математических наук (2017). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов — исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временым рядам и их применение к живым системам. Автор около 200 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах, нескольких монографий и патентов на изобретения и полезные модели.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5727-5169
AuthorID (eLibrary.Ru): 150252

Евстифеев Евгений Валентинович — окончил бакалавриат (2019) и магистратуру (2021) факультета нелинейных процессов (ныне Института физики) СГУ. На данный момент является аспирантом кафедры физики открытых систем первого года обучения. Область научных интересов — параллельные вычисления на графических ускорителях, численное решение задач нелинейной динамики и хаоса, хаотическая синхронизация, показатели Ляпунова. Автор семи статей в отечественных и зарубежных рецензируемых научных журналах, участник всероссийских и международных научных конференций.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: evstifeevev@mail.ru
ORCID: 0000-0001-7474-1926