



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья
УДК 517.9:621.373.7

DOI: 10.18500/0869-6632-003015
EDN: EXLIBY

**Динамика системы Рабиновича–Фабриканта
и ее обобщенной модели в случае отрицательных значений
параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации**

Л. В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН, Россия
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: turukinalv@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.06.2022, принята к публикации 22.08.2022,
опубликована онлайн 7.11.2022, опубликована 30.11.2022

Аннотация. Цель настоящей работы — численное исследование системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели, описывающих возникновение хаоса при параметрическом взаимодействии трех мод в неравновесной среде с кубической нелинейностью, в случае, когда параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации, принимают отрицательные значения. Указанные модели демонстрируют богатую динамику, во многом отличающуюся от той, что наблюдалась для них же, но в случае положительных значений параметров. **Методы.** Исследование основано на численном решении дифференциальных уравнений, а также их численном бифуркационном анализе с помощью программы MatCont. **Результаты.** Для исследуемых моделей построены карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров, зависимости показателей Ляпунова от параметра, аттракторы и их бассейны притяжения. На плоскости параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации, численно найдены и построены бифуркационные линии для положения равновесия и предельного цикла периода один. Для обеих моделей проведено сопоставление динамики, наблюдаемой в случае, когда параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации, принимают отрицательные значения, с наблюдавшейся в случае, когда указанные параметры принимают положительные значения. И показано, что в первом случае пространство параметров имеет более простое устройство. **Заключение.** Детально исследованы система Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенная модель в случае, когда параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации, принимают отрицательные значения. Показано, что по сравнению со случаем положительных значений указанных параметров, имеется ряд существенных отличий. Например, появляется новый тип хаотического аттрактора, исчезает мультистабильность, не связанная с внутренней симметрией системы, и т. д. Полученные результаты являются новыми, так как система Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенная модель впервые подробно исследовались в области отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации.

Ключевые слова: модель Рабиновича–Фабриканта, обобщенная модель Рабиновича–Фабриканта, хаотические аттракторы, бифуркационный анализ, показатели Ляпунова.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

Для цитирования: Тюрюкина Л. В. Динамика системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели в случае отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 685–701. DOI: 10.18500/0869-6632-003015. EDN: EXLIBY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients

L. V. Turukina

Saratov Branch of Kotelnikov Institute
of Radioengineering and Electronics of RAS, Russia
Saratov State University, Russia
E-mail: turukinalv@yandex.ru

Received 20.06.2022, accepted 22.08.2022,
available online 7.11.2022, published 30.11.2022

Abstract. *Purpose* of this work is a numerical study of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model, which describe the occurrence of chaos during the parametric interaction of three modes in a nonequilibrium medium with cubic nonlinearity, in the case when the parameters that have the meaning of dissipation coefficients take negative values. These models demonstrate a rich dynamics that differs in many respects from what was observed for them, but in the case of positive values of the parameters. *Methods.* The study is based on the numerical solution of the differential equations, and their numerical bifurcation analysis using the MatCont program. *Results.* For investigated models we present a charts of dynamic regimes in the control parameters plane, Lyapunov exponents depending on the parameters, attractors and their basins. On the parameters plane, which have the meaning of dissipation coefficients, bifurcation lines and points are numerically found. They are plotted for equilibrium point and period one limit cycle. For both models we compared dynamics observed in the case when the parameters that have the meaning of dissipation coefficients take negative values, with the one observed in the case when these parameters take positive values. And it is shown that in the first case parameter space has a simpler structure. *Conclusion.* The Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model were studied in detail in the case when the parameters which have the meaning of dissipation coefficients take negative values. It is shown that there are a number of differences in comparison with the case of positive values of these parameters. For example, a new type of chaotic attractor appears, multistability that is not related to the symmetry of the system disappears, etc. The obtained results are new, since the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model were studied in detail for the first time in the region of negative values of parameters which have the meaning of dissipation coefficients.

Keywords: Rabinovich–Fabrikant model, generalized Rabinovich–Fabrikant model, chaotic attractors, Lagrange formalism, bifurcation analysis, multistability.

Acknowledgements. Research was carried out under support of the Russian Science Foundation (project no. 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

For citation: Turukina LV. Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):685–701. DOI: 10.18500/0869-6632-003015

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В 1979 году М. И. Рабинович и А. Л. Фабрикант исследовали задачу о модуляционной неустойчивости при параметрическом взаимодействии мод в неравновесной диссипативной среде с кубической нелинейностью и со спектрально узким усилением [1]. Авторы записали нелинейное параболическое комплексное уравнение, которое представляет собой обобщение известной модели Ландау. Далее они предположили дискретность пространственного спектра решений в резонансном случае для периодических граничных условий. Кроме того, в спектральный интервал, в котором среда является активной, попадают всего три моды — основная и два ее сателлита, возникающие в результате модуляционной неустойчивости. В итоге для рассматриваемой задачи ими была получена следующая система:

$$\begin{aligned}\dot{a}_0 &= 2\sigma a_1 a_2 a_0^* \exp(-i\Delta\omega t) + \gamma_0 a_0 + \sigma a_0(|a_0|^2 + 2|a_1|^2 + 2|a_2|^2), \\ \dot{a}_{1,2} &= 2\sigma a_{2,1} a_0^2 \exp(i\Delta\omega t) - \nu_{1,2} a_0 + \sigma a_{1,2}(2|a_0|^2 + |a_{1,2}|^2 + 2|a_{2,1}|^2).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь a_0 — комплексная амплитуда основной моды, $a_{1,2}$ — комплексные амплитуды спутников; γ_0 — коэффициент диссипации для основной моды, а $\nu_{1,2}$ — коэффициенты диссипации для спутников; $\Delta\omega$ — частотная расстройка, заданная как $\Delta\omega = 2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2$, где ω_0 — частота основной моды, а $\omega_{1,2}$ — частоты спутников; σ — параметр, характеризующий нелинейность в системе, t — безразмерное время. Последняя при условии, что основная мода доминирует над спутниками ($a_0 \gg a_1 = a_2$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$), была сведена к действительной трехмерной модели:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + xy),\end{aligned}\tag{2}$$

где x, y, z — динамические переменные (x и y пропорциональны $\sqrt{a_0}$, а z — a_1), а γ и ν — параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации ($\gamma = \gamma_0$).

Как показали исследования последних лет [2–11], система (1) демонстрирует богатую динамику: регулярные и хаотические аттракторы разной топологии, мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы разных типов, и т. д. Так, например, в работе [2] авторы исследовали разнообразные аттракторы системы (1): положения равновесия, периодические циклы и хаотические аттракторы, а также гетероклинические орбиты, соединяющие положения равновесия с устойчивыми циклами и хаотическими аттракторами. А в работах [3–5] исследовались хаотические аттракторы системы (1) для различных значений параметров γ и ν . Авторы показали, что в системе Рабиновича–Фабриканта (1) наблюдаются типологически разные хаотические аттракторы. При этом в работах [3, 4] основное внимание уделено так называемым «скрытым аттракторам» и «виртуальным» седлам. В работе [6] авторы предложили аналоговую схему, которая описывается моделью (1), и провели ее подробное исследование: бифуркационные диаграммы, фазовые портреты, отображения «первого возврата» и т. д. В работе [7] авторы рассматривали механизм стабилизации хаотической системы в окрестности неустойчивых точек равновесия на примере нескольких систем, в том числе системы Рабиновича–Фабриканта (1).

В работе [8] подробно численно исследована система Рабиновича–Фабриканта (1): построены карты динамических режимов, зависимости показателей Ляпунова, аттракторы и бассейны их притяжения, найдены линии основных бифуркаций неподвижных точек и предельного цикла. Также в указанной работе приведены примеры периодических и хаотических аттракторов разной топологии и показано, что система (1) демонстрирует мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы разных типов или топологий. И, наконец, в работе [9] авторы рассмотрели и подробно численно исследовали случай трехмодового взаимодействия в присутствии диссипации с кубической нелинейностью общего вида¹. Используя формализм Лагранжа, авторы работы [9] записали обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для действительных переменных. В предположении, что система находится в окрестности резонанса, по описанной в работе [1] методологии была получена система, представляющая собой обобщение модели Рабиновича–Фабриканта (1) на случай кубической нелинейности общего вида:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [p(x^2 + z) + q(-y^2 + 3z) - 1]y + \gamma x, \\ \dot{y} &= [p(-x^2 + 3z) + q(y^2 + z) + 1]x + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + (p + q)xy).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, γ и ν — параметры, идентичные параметрам модели Рабиновича–Фабриканта, а p и q — параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие в системе. При этом, как показано в работе [9], система (2) полностью совпадает с системой (1), если $p = 1.0$ и $q = 0$.

¹Напомним, что в работе [1] авторами рассматривался частный случай кубической нелинейности, который отвечал комплексному параболическому уравнению.

Отметим, что модели (1) и (2) носят в определенном смысле универсальный характер, так как они применимы к системам различной физической природы, в которых имеет место трехмодовое взаимодействие в присутствии кубической нелинейности. Например, в таких, как волны Толлмина–Шлихтинга в гидродинамических течениях [12], ветровые волны на воде [13], волны в химических средах с диффузией [14], радиотехнические системы, которые допускают как аналоговое моделирование, так и реализацию в радиотехническом устройстве [8], и т. д.

В настоящей работе проведено подробное численное исследование систем (1) и (2) для случая, когда параметры γ и ν принимают отрицательные значения. Такой выбор параметров обусловлен тем, что во всех указанных выше работах исследования проводились исключительно для положительных значений параметров γ и ν . А так как в уравнениях (1) перед слагаемыми, задающими диссипацию, стоят разные знаки, то это означает, что у основной моды диссипация отрицательная, а у сателлитов — положительная. В случае отрицательных значений параметров γ и ν ситуация сменится на противоположную: у основной моды диссипация станет положительной, а у сателлитов — отрицательной. Таким образом, знак параметров γ и ν определяет, на какой частоте осуществляется накачка энергии, а на какой — ее отбор. При этом в работах [3,4,6] отмечалось, что хотя отрицательные значения параметров γ и ν и не имеют физического смысла применительно к задаче, сформулированной в работе [1], для них система Рабиновича–Фабриканта (1) также будет демонстрировать нетривиальную динамику и хаотический аттрактор нового типа. Последний в работе [3] назван как «Gramophone-like chaotic attractor». С другой стороны, системы (1) и (2) можно рассматривать как эталонные модели, описывающие сложную динамику и хаос. И, как следствие, параметры, присутствующие в уравнениях, могут принимать любые разумные значения. Таким образом, можно ожидать, что представленные в данной работе результаты дополняют результаты перечисленных выше работ, в первую очередь [8,9], создавая полную картину динамического поведения систем (1) и (2).

1. Динамика системы Рабиновича–Фабриканта в случае отрицательных значений параметров γ и ν

Сначала рассмотрим динамику системы Рабиновича–Фабриканта (1). Пусть параметры γ и ν принимают отрицательные значения. Построим для нее карту динамических режимов и ее увеличенные фрагменты на плоскости параметров (ν, γ) (рис. 1). Такая карта строится при сканировании плоскости параметров, когда в каждой ее точке численно определяется тип наблюдаемого

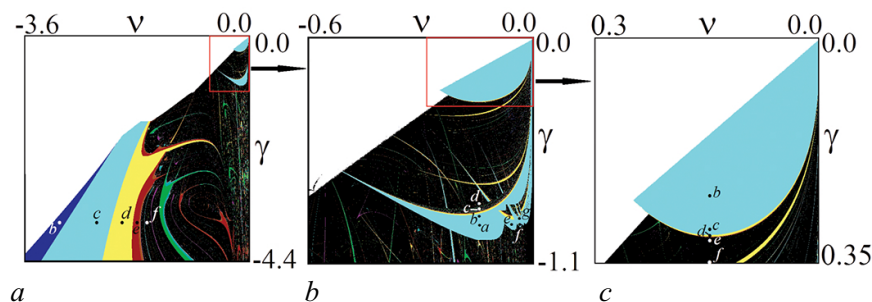


Рис. 1. Карта динамических режимов (a) и ее увеличенные фрагменты (b, c) системы Рабиновича–Фабриканта (1) на плоскости параметров (ν, γ) . На фрагменте a буквами обозначены точки, в которых построены аттракторы, представленные на рис. 2. На фрагментах b, c — аттракторы, представленные на рис. 3, 5 (цвет онлайн)

Fig. 1. Chart of dynamical regimes (a) and its enlarged fragments (b, c) of the Rabinovich–Fabrikant model (1) at (ν, γ) parameter plane. On fragment a, the letters indicate the points where the attractors shown in Fig. 2 are plotted. On fragments b, c, the letters indicate the points where the attractors shown in Fig. 3 and Fig. 5 are plotted (color online)

режима, который обозначается соответствующим цветом. На картах (см. рис. 1) цветом выделены следующие режимы: темно-синий цвет отвечает положению равновесия, голубой — предельному циклу периода 1, желтый — циклу периода 2, красный — циклу периода 4, и т. д., черный цвет отвечает хаотическому режиму, а белым цветом обозначена область «убегания траекторий на бесконечность». Указанные периоды циклов определяются стандартным образом с помощью сечения Пуанкаре.

На карте (рис. 1, *a*) можно выделить две области, отличающиеся своим устройством. Первая расположена в нижней части карты (параметр $\gamma < -1.5$). Здесь наблюдаются разнообразные области периодических режимов и хаоса. Для лучшего понимания наблюдаемой в указанной области динамики для системы Рабиновича–Фабриканта (1) построены зависимости показателей Ляпунова от параметра ν и аттракторы в нескольких точках пространства параметров (рис. 2). Из рисунка следует, что если зафиксировать значение параметра γ , например $\gamma = -3.8$, и менять значение параметра ν , двигаясь по плоскости параметров слева направо, то сначала, при больших по модулю отрицательных значениях параметра ν , все три показателя Ляпунова отрицательные (рис. 2, *a*), а в фазовом пространстве рассматриваемой системы наблюдаются два симметрично расположенные и переходящие друг в друга при одновременной замене $x \rightarrow -x$ и $y \rightarrow -y$

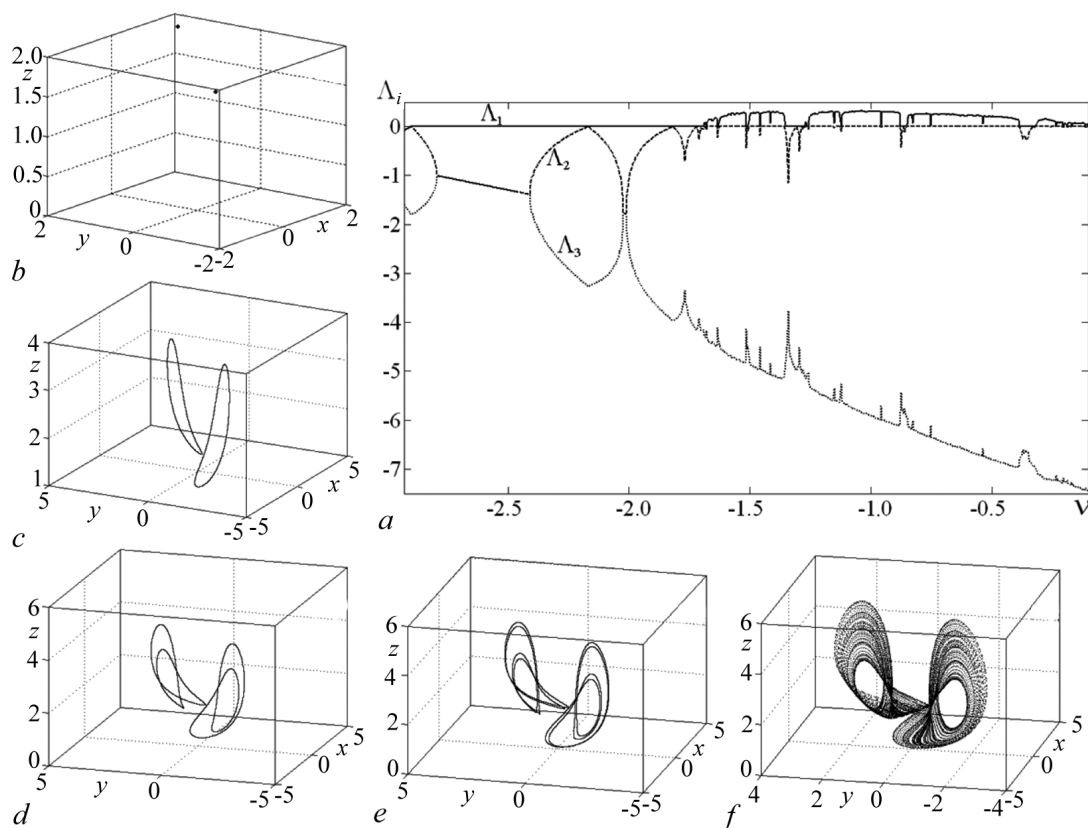


Рис. 2. *a* — Зависимость показателей Ляпунова системы Рабиновича–Фабриканта (1) от параметра ν для $\gamma = -3.8$. *b–f* — Аттракторы системы Рабиновича–Фабриканта (1), построенные для следующих значений параметров: $\gamma = -3.8$ и $\nu = -2.9$ (*b*), $\nu = -2.2$ (*c*), $\nu = -2.0$ (*d*), $\nu = -1.8$ (*e*) и $\nu = -1.5$ (*f*). Точки, в которых построены аттракторы, отмечены на рис. 1, *a* соответствующими буквами

Fig. 2. *a* — Graphs of Lyapunov exponents of the Rabinovich–Fabrikant system (1) on the parameter ν at $\gamma = -3.8$. *b–f* — Attractors of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at $\gamma = -3.8$ and $\nu = -2.9$ (*b*), $\nu = -2.2$ (*c*), $\nu = -2.0$ (*d*), $\nu = -1.8$ (*e*) and $\nu = -1.5$ (*f*). In Fig. 1, *a* the points at which the attractors plotted are marked by the corresponding letters

положения равновесия (рис. 2, b). Отметим, что системы (1) и (2) обладают свойством симметрии относительно одновременной замены переменных

$$\begin{aligned}x &\rightarrow -x, \\y &\rightarrow -y.\end{aligned}\tag{4}$$

Это свойство приводит к тому, что в фазовом пространстве рассматриваемых систем будет наблюдаться либо симметрично расположенная пара аттракторов (когда один аттрактор переходит в другой при замене (3)), либо один симметричный аттрактор (который при замене (3) переходит сам в себя)². При увеличении параметра ν (модуль параметра ν уменьшается) старший показатель Ляпунова становится нулевым, а два оставшиеся показателя по-прежнему отрицательные. Это отвечает тому, что в системе рождается симметричная пара предельных циклов периода 1 (рис. 2, c). Если и дальше увеличивать параметр ν , то будет наблюдаться последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 2, d, e), пока, наконец, старший показатель Ляпунова не станет положительным (см. рис. 2, a) и в системе не возникнет симметричная пара хаотических аттракторов (рис. 2, f). Точки, в которых построены аттракторы, отмечены на рис. 1, a соответствующими буквами.

Таким образом, при достаточно больших отрицательных значениях параметра γ динамика системы Рабиновича–Фабриканта качественно такая же, что наблюдалась для нее же в случае, когда параметры γ и ν были положительными, а параметр $\gamma > 0.8$ [8]. Однако, если в случае положительных значений параметров γ и ν ширина областей периодических и хаотического режимов с ростом параметра γ уменьшалась, то теперь она увеличивается (см. рис. 1, a).

Вторая область располагается при небольших, по модулю, значениях параметров γ и ν и более детально представлена на увеличенных фрагментах (рис. 1, b, c). На ней наблюдается несколько областей предельного цикла периода 1, внутри которых имеет место переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Все эти области, как будет показано далее, отличаются топологией наблюдаемого внутри них предельного цикла периода 1.

Рассмотрим сначала область, представленную на рис. 1, c. На рис. 3 представлены график зависимости показателей Ляпунова системы (1) от параметра γ и ее аттракторы, построенные в некоторых точках, отмеченных на рис. 1, c соответствующими буквами. Вначале внутри этой области система (1) демонстрирует симметричный предельный цикл периода 1, который переходит сам в себя при замене $x \rightarrow -x$ или $y \rightarrow -y$ (рис. 3, b). Отметим, что ранее такой тип симметрии ни в системе Рабиновича–Фабриканта, ни в ее обобщенной модели не наблюдался. При уменьшении параметра γ (модуль параметра γ увеличивается) этот цикл претерпевает бифуркацию потери симметрии и становится неустойчивым, а вместо него рождается симметричная пара предельных циклов периода 1 (рис. 3, c). Особенно хорошо эти изменения заметны на проекциях указанных циклов на плоскости (x, y) , (x, z) и (y, z) , которые представлены на рис. 4, a, b. Для удобства восприятия циклы переходящие друг в друга, на рис. 3, 4 и на аналогичных им рисунках, изображены красным и синим цветами. В дальнейшем на базе каждого из циклов периода 1, представленных на рис. 3, c, будет наблюдаться каскад бифуркаций удвоения периода, соответствующие циклы периода 2 представлены на рис. 3, d, пока в системе не возникнет хаотический аттрактор (рис. 3, e, f). При этом сначала он будет иметь ту же топологию, что и предельный цикл периода 1 (сравним рис. 3, c и 3, e, а также рис. 4, b и 4, c), а потом в результате кризиса топология хаотического аттрактора изменится (см. рис. 3, f). Отметим, что хаотический аттрактор такого типа, как показан на рис. 3, f, ранее в системе Рабиновича–Фабриканта или ее обобщенной модели не наблюдался. В работе [3] аттракторы такой конфигурации называли «Gramophon-like chaotic attractor». Выбор названия, очевидно, обусловлен видом проекции аттрактора на плоскость (x, y) (рис. 4, d).

²В дальнейшем при описании наблюдаемых в рассматриваемых системах аттракторов будем использовать выражения «симметричная пара...» или «симметричный...» подразумевая симметрию, заданную формулой (3).

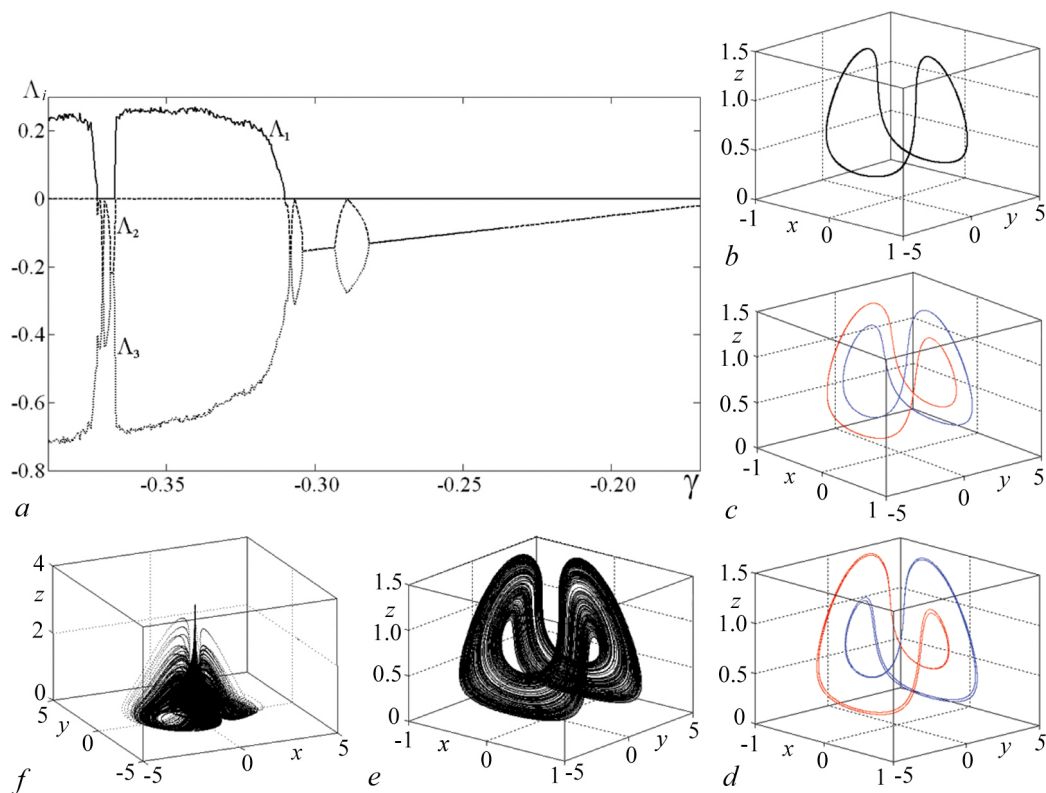


Рис. 3. *a* — Зависимость показателей Ляпунова системы Рабиновича–Фабриканта (1) от параметра γ для $\nu = -0.15$. *b–f* — Аттракторы системы Рабиновича–Фабриканта (1), построенные для следующих значений параметров: $\nu = -0.15$ и $\gamma = -0.24$ (*b*), $\gamma = -0.29$ (*c*), $\gamma = -0.307$ (*d*), $\gamma = -0.313$ (*e*) и $\gamma = -0.32$ (*f*). Точки, в которых построены аттракторы, отмечены на рис. 1, с соответствующими буквами (цвет онлайн)

Fig. 3. *a* — Graphs of Lyapunov exponents of the Rabinovich–Fabrikant system (1) on the parameter γ at $\nu = -0.15$. *b–f* — Attractors of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at $\nu = -0.15$ and $\gamma = -0.24$ (*b*), $\gamma = -0.29$ (*c*), $\gamma = -0.307$ (*d*), $\gamma = -0.313$ (*e*) and $\gamma = -0.32$ (*f*). In Fig. 1, *c* the points at which the attractors plotted are marked by the corresponding letters (color online)

Теперь рассмотрим нижнюю часть представленного на рис. 1, *b* фрагмента карты динамических режимов системы Рабиновича–Фабриканта (1). Здесь наблюдается несколько структур цикла периода 1. На рис. 5 представлены периодические и хаотические аттракторы, построенные для некоторых из этих структур. Точки, в которых они построены, отмечены на рис. 1, *b* соответствующими буквами. А на рис. 4, *e–j* представлены проекции некоторых из этих аттракторов на плоскости (x, y) , (x, z) и (y, z) . В самой левой структуре система (1) демонстрирует симметричный предельный цикл периода 1 (рис. 5, *a*, рис. 4, *e*). Как и в описанном выше случае, он сначала теряет симметрию, порождая симметричную пару предельных циклов периода 1 (рис. 5, *b*, рис. 4, *f*). Эти циклы в дальнейшем претерпевают каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого рождается хаотический аттрактор, который сначала имеет топологию предельного цикла (рис. 5, *c*), а потом топологию типа «Gramophone» (рис. 5, *d*, рис. 4, *g*). В остальных структурах будет аналогичная динамика. Отличия будут лишь в топологии предельного цикла периода 1. Так, во второй слева структуре для системы (1) сразу будет наблюдаться симметричная пара предельных циклов периода 1 (рис. 5, *e* и рис. 4, *h*). В третьей слева структуре опять будет один симметричный предельный цикл периода 1 (рис. 5, *f* и рис. 4, *i*), который перед бифуркацией удвоения периода потеряет симметрию (рис. 5, *g* и рис. 4, *j*). Таким образом, в рассматриваемой области будет наблюдаться чередование структур, одна из которых отвечает симметричному предельному циклу периода 1, а вторая — симметричной паре предельных циклов периода 1.

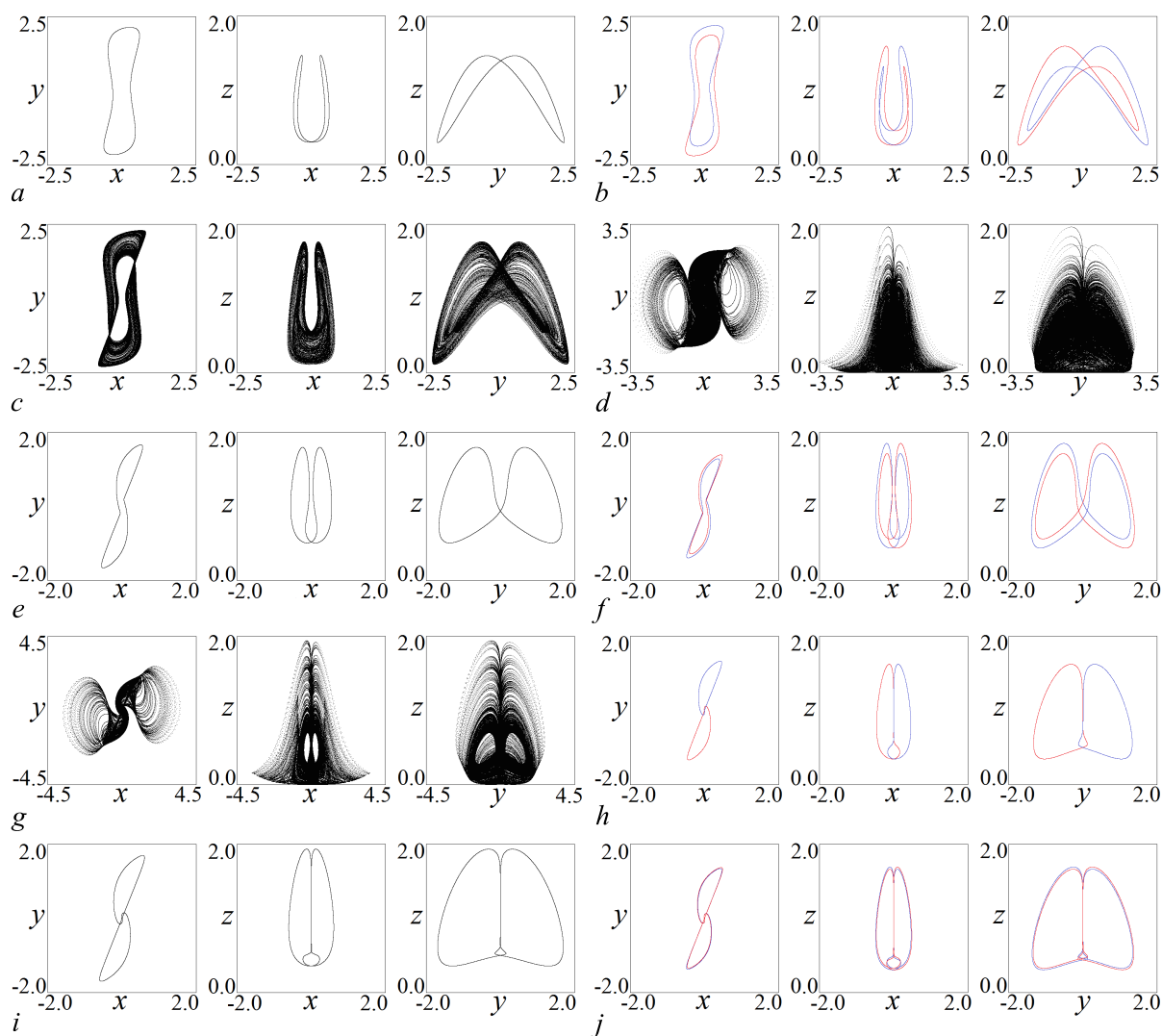


Рис. 4. Проекция аттракторов системы Рабиновича–Фабриканта (1) на плоскости (x, y) , (x, z) , (y, z) , построенные для следующих значений параметров: $\nu = -0.15$, $\gamma = -0.24$ (a); $\nu = -0.15$, $\gamma = -0.29$ (b); $\nu = -0.15$, $\gamma = -0.313$ (c); $\nu = -0.15$, $\gamma = -0.32$ (d); $\gamma = -0.9$, $\nu = -0.15$ (e); $\gamma = -0.87$, $\nu = -0.15$ (f); $\gamma = -0.8$, $\nu = -0.15$ (g); $\gamma = -0.9$, $\nu = -0.06$ (h); $\gamma = -0.9$, $\nu = -0.04$ (i); $\gamma = -0.87$, $\nu = -0.04$ (j). Соответствующие трехмерные аттракторы представлены на рис. 3 для фрагментов a–d и на рис. 5 для фрагментов e–j (цвет онлайн)

Fig. 4. Attractors projections of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at $\nu = -0.15$ and $\gamma = -0.24$ (a), $\nu = -0.15$ and $\gamma = -0.29$ (b), $\nu = -0.15$ and $\gamma = -0.313$ (c), $\nu = -0.15$ and $\gamma = -0.32$ (d), $\gamma = -0.9$ and $\nu = -0.15$ (e), $\gamma = -0.87$ and $\nu = -0.15$ (f), $\gamma = -0.8$ and $\nu = -0.15$ (g), $\gamma = -0.9$ and $\nu = -0.06$ (h), $\gamma = -0.9$ and $\nu = -0.04$ (i), $\gamma = -0.87$ and $\nu = -0.04$ (j). Corresponding three-dimensional attractors are shown in fig. 3 for case a–d and in fig. 5 for case e–j (color online)

На рис. 6 представлены сечения типичных бассейнов притяжения аттракторов системы (1) плоскостью $z_0 = \text{Const}$. На рис. 6, a показаны бассейны для случая, когда в системе (1) реализуется симметричная пара предельных циклов периода 1, представленных на рис. 2, b. Из рисунка видно, что бассейны большие, хотя с ростом значения динамической переменной z_0 их размер немного уменьшается; внутри бассейнов нет областей «убегания траектории на бесконечность», что было типично в случае положительных значений параметров γ и ν [8], а их граница устроена довольно сложным образом. Отметим, что для всех других аттракторов из этой области (нижняя часть карты динамических режимов), как периодических, так и хаотических, бассейны притяжения будут такими же, как и в рассмотренном случае.

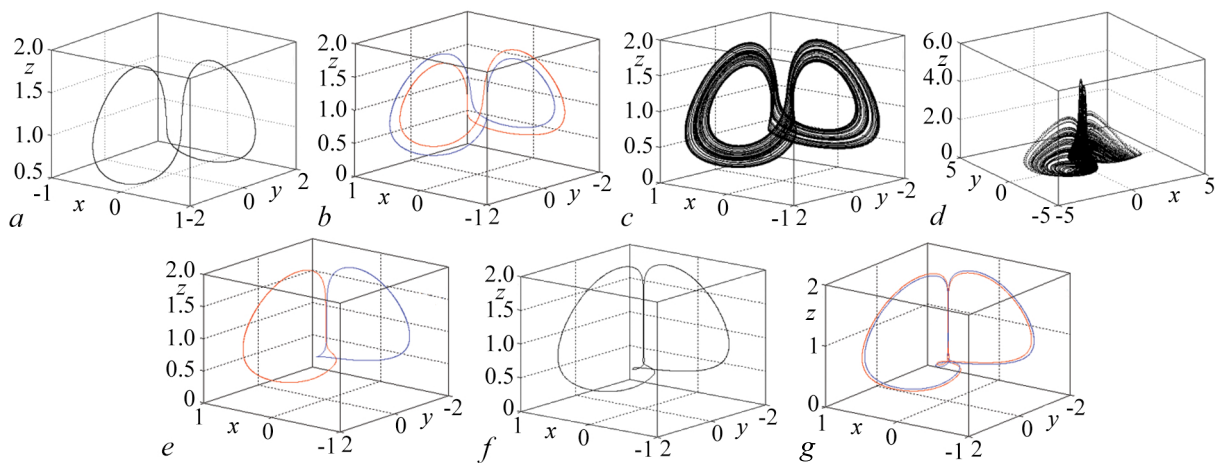


Рис. 5. Аттракторы системы Рабиновича–Фабриканта (1), построенные для следующих значений параметров: $\gamma = -0.9$, $\nu = -0.15$ (a); $\gamma = -0.87$, $\nu = -0.15$ (b); $\gamma = -0.83$, $\nu = -0.15$ (c); $\gamma = -0.8$, $\nu = -0.15$ (d); $\gamma = -0.9$, $\nu = -0.06$ (e); $\gamma = -0.88$, $\nu = -0.06$ (f); $\gamma = -0.86$, $\nu = -0.06$ (g). Точки, в которых построены аттракторы, отмечены на рис. 1, b соответствующими буквами (цвет онлайн)

Fig. 5. Attractors of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at $\gamma = -0.9$ and $\nu = -0.15$ (a), $\gamma = -0.87$ and $\nu = -0.15$ (b), $\gamma = -0.83$ and $\nu = -0.15$ (c), $\gamma = -0.8$ and $\nu = -0.15$ (d), $\gamma = -0.9$ and $\nu = -0.06$ (e), $\gamma = -0.88$ and $\nu = -0.06$ (f), $\gamma = -0.86$ and $\nu = -0.06$ (g). In Fig. 1, b the points at which the attractors plotted are marked by the corresponding letters (color online)

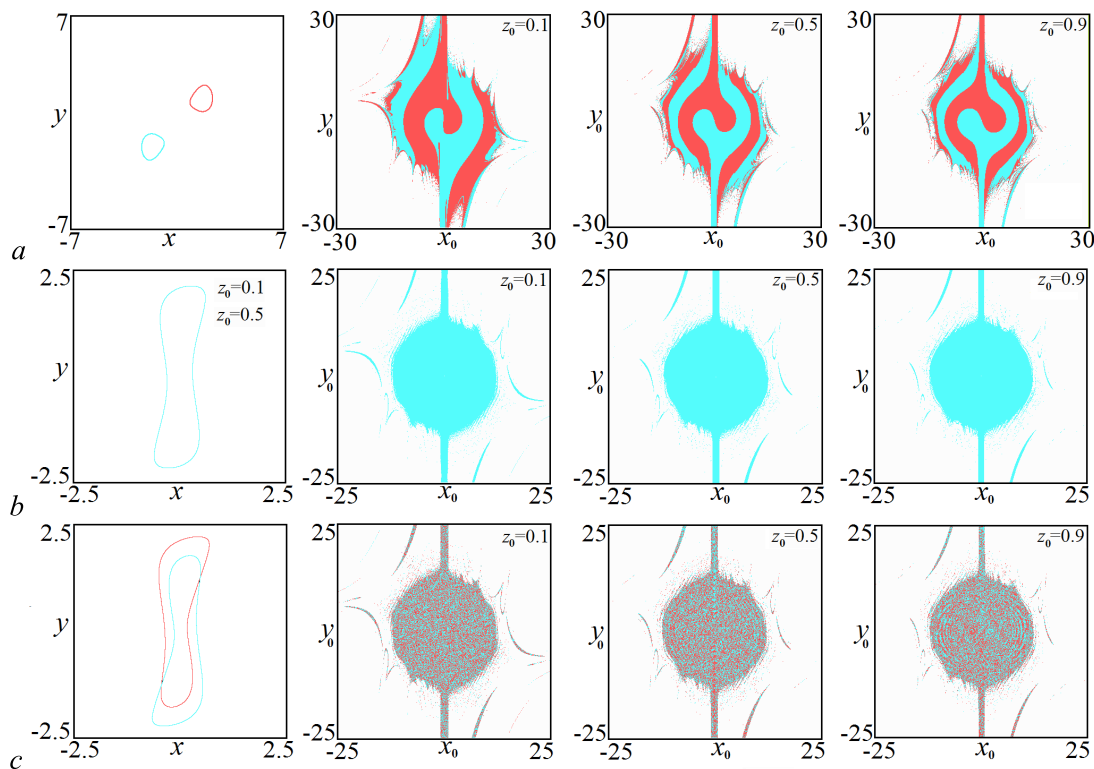


Рис. 6. Сечения бассейнов притяжения аттракторов системы Рабиновича–Фабриканта (1) плоскостью $z_0 = \text{Const}$, построенные для следующих значений параметров $\gamma = -3.8$, $\nu = -2.2$ (a); $\gamma = -0.24$, $\nu = -0.15$ (b); $\gamma = -0.29$, $\nu = -0.15$ (c). Бассейны окрашены в тот же цвет, что и соответствующие аттракторы (цвет онлайн)

Fig. 6. Sections of the basins of the attractors by the $z_0 = \text{Const}$ plane plotted for the Rabinovich–Fabrikant system (1), $\gamma = -3.8$ and $\nu = -2.2$ (a), $\gamma = -0.24$ and $\nu = -0.15$ (b), $\gamma = -0.29$ and $\nu = -0.15$ (c). The basin is colored to the same color as the attractors (color online)

На рис. 6, *b* представлены бассейны для симметричного предельного цикла периода 1, показанного на рис. 3, *b*, а на рис. 6, *c* — для симметричной пары предельных циклов периода 1, показанных на рис. 3, *c*. В обоих случаях бассейны имеют одинаковый размер, который не меняется с ростом значения динамической переменной z_0 , и форму в виде окружности со сложно устроенной границей и двумя вертикальными полосами. При этом во втором случае (см. рис. 6, *c*) точки, стартовав из которых траектория приходит на один или другой цикл, заполняют бассейн хаотическим образом. А значит, даже малое изменение начальных значений динамических переменных приведет к тому, что система (1) будет «перескакивать» с одного аттрактора на другой. Для всех остальных аттракторов, независимо от их периода, из этой же области (область небольших значений параметров γ и ν) бассейны притяжения будут такими же, как на рис. 6, *b* и рис. 6, *c*.

2. Динамика обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта в случае отрицательных значений параметров γ и ν

Теперь рассмотрим динамику обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) в случае, когда параметры γ и ν принимают отрицательные значения. Для начала построим для нее карты динамических режимов на плоскости (p, q) для нескольких значений параметров γ и ν . Соответствующие карты представлены на рис. 7. На этих и на всех последующих картах используется та же цветовая палитра, что и на рис. 1.

На представленных выше картах, так же, как и в случае положительных значений параметров γ и ν [9], наблюдаются области периодических и хаотических режимов, представляющие собой выходящие из начала координат расширяющиеся лучи, а сами карты обладают симметрией относительно линии $p = -q$. Однако, если при положительных значениях параметров γ и ν , на плоскости (p, q) наблюдалась универсальная структура областей периодических и хаотических режимов, не зависящая от параметров γ и ν , то теперь это не так. При вариации параметров γ и ν ,

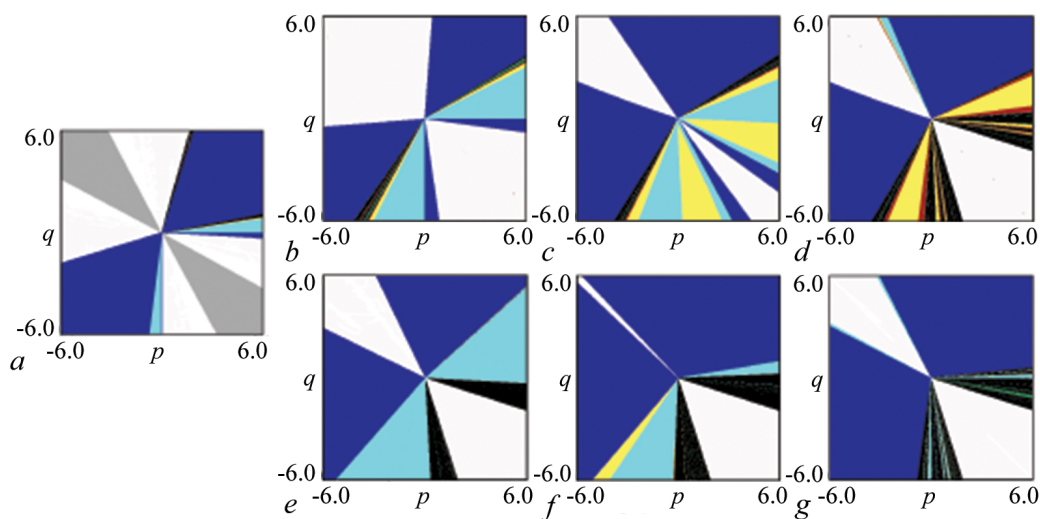


Рис. 7. *a* — Карта динамических режимов системы Рабиновича–Фабриканта (1) на плоскости (p, q) . $\gamma = 0.96$ и $\nu = 1.5$. Рисунок взят из работы [9]. *b–g* — Карты динамических режимов обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) на плоскости параметров (p, q) . Параметры γ и ν принимают следующие значения: $\gamma = -3.8$, $\nu = -2.9$ (*b*); $\gamma = -3.8$, $\nu = -2.2$ (*c*); $\gamma = -3.8$, $\nu = -1.5$ (*d*); $\gamma = -0.24$, $\nu = -0.15$ (*e*); $\gamma = -0.35$, $\nu = -0.15$ (*f*); $\gamma = -0.9$, $\nu = -0.15$ (*g*) (цвет онлайн)

Fig. 7. *a* — Chart of dynamical regimes of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at (p, q) parameter plane. A figure is taken from the work [9]. *b–g* — Charts of dynamical regimes of the general model (2) at (p, q) parameter plane. $\gamma = -3.8$ and $\nu = -2.9$ (*b*), $\gamma = -3.8$ and $\nu = -2.2$ (*c*), $\gamma = -3.8$ and $\nu = -1.5$ (*d*), $\gamma = -0.24$ and $\nu = -0.15$ (*e*), $\gamma = -0.35$ and $\nu = -0.15$ (*f*), $\gamma = -0.9$ and $\nu = -0.15$ (*g*) (color online)

карта динамических режимов обобщенной модели (2) меняется, временами довольно сильно. Одни области становятся уже, другие — шире, а некоторые и вообще исчезают. Еще одно отличие состоит в том, что если в случае положительных значений параметров γ и ν в обобщенной модели наблюдался режим, представляющий собой инвариантное (устойчивое) множество в виде окружности, целиком лежащее в плоскости $z = 0$ (область этого режима располагалась на карте динамических режимов вдоль линии $p = -q$, внутри области «убегания траектории на бесконечность» и окрашена в серый цвет), то в случае отрицательных значений параметров γ и ν указанный режим не наблюдается.

Теперь рассмотрим устройство карты динамических режимов обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) на плоскости (ν, γ) . Так как в рассматриваемом случае на плоскости параметров (p, q) не наблюдается никакой универсальной структуры, то будем строить карты динамических режимов обобщенной модели (2), выбирая параметры p и q так, чтобы обойти по плоскости (p, q) начало координат против часовой стрелки стартовав из точки 1, как показано на рис. 8, а. Соответствующие карты динамических режимов представлены на рис. 8, b–h.

В точке 1 значения параметров $p = 0.9$ и $q = -0.1$. Карта динамических режимов системы (2) для данного случая показана на рис. 8, b и представляет собой сильно искаженную картину, характерную для системы Рабиновича–Фабриканта (1) (см. рис. 1, а). На ней так же, как и ранее, наблюдаются области различных периодических и хаотических режимов, но сами области сильно изменили свою конфигурацию и стали меньше, а некоторые области периодических режимов вообще исчезли. В первую очередь речь идет об областях, наблюдавшихся при небольших значениях параметров γ и ν . В точке 2 (рис. 8, а), значения параметров $p = 1.0$ и $q = 0$. Соответствующая карта динамических режимов системы (2) представлена на рис. 8, c и будет полностью идентична той, что наблюдалась для системы (1) (сравним рис. 8, c и рис. 1, а). Что не удивительно, так как, как отмечалось ранее (см. Введение), именно при этих значениях параметров уравнения системы (2) превращаются в уравнения системы (1).

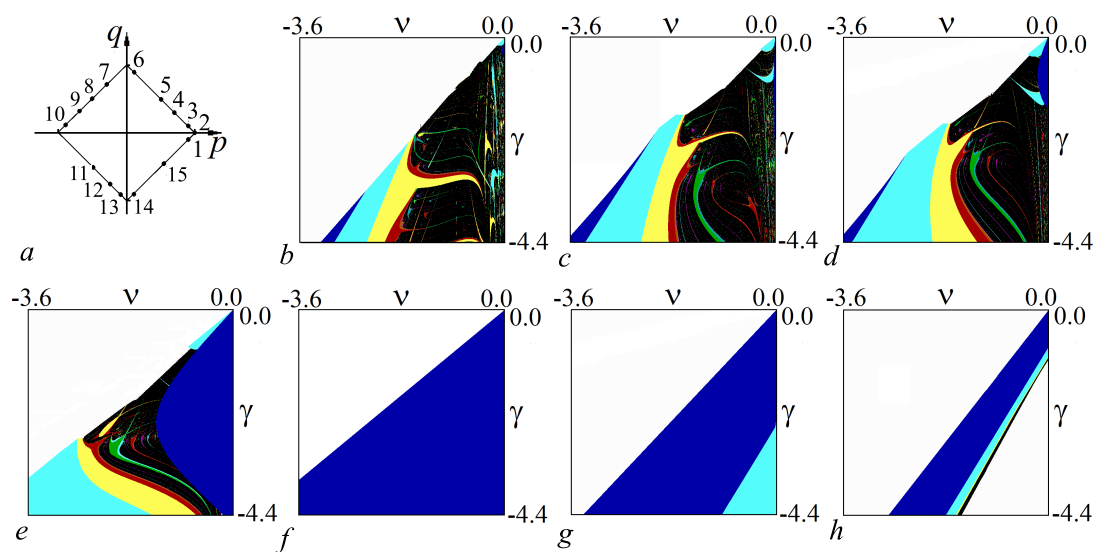


Рис. 8. а — Плоскость (p, q) с указанием точек, в которых строятся карты динамических режимов (b–h) обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) на плоскости параметров (ν, γ) . Параметры p и q принимают следующие значения: $p = 0.9, q = -0.1$ (b); $p = 1, q = 0$ (c); $p = 0.9, q = 0.1$ (d); $p = 0.7, q = 0.3$ (e); $p = 0.5, q = 0.5$ (f); $p = 0.1, q = 0.9$ (g); $p = -0.3, q = 0.7$ (h) (цвет онлайн)

Fig. 8. a — (p, q) parameter plane. The points at which charts of dynamical regimes plotted are shown in this plane. b–h — Charts of dynamical regimes of the general model (2) at (ν, γ) parameter plane. Parameters p, q values: $p = 0.9$ and $q = -0.1$ (b), $p = 1$ and $q = 0$ (c), $p = 0.9$ and $q = 0.1$ (d), $p = 0.7$ and $q = 0.3$ (e), $p = 0.5$ and $q = 0.5$ (f), $p = 0.1$ and $q = 0.9$ (g), $p = -0.3$ and $q = 0.7$ (h) (color online)

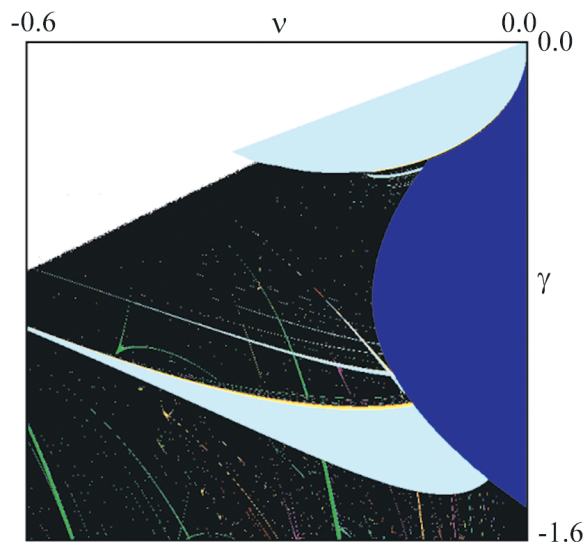


Рис. 9. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) на плоскости параметров (v, γ) для $p = 0.9$ и $q = 0.1$ (цвет онлайн)

Fig. 9. Enlarged fragment of the chart of dynamical regimes of the general model (2) at (v, γ) parameter plane, $p = 0.9$ and $q = 0.1$ (color online)

Теперь перейдем в точку 3. Для нее параметры p и q равны, соответственно $p = 0.9$ и $q = 0.1$. Карта динамических режимов для данного случая представлена на рис. 8, *d*. Рассмотрим этот случай более подробно. На рис. 9 представлен увеличенный фрагмент указанной выше карты динамических режимов. Из сравнения рис. 1, *a* с рис. 8, *d*, а рис. 1, *b* с рис. 9 видно, что если область больших значений параметров γ и v (нижняя часть карты) практически не изменилась, единственное количественное отличие состоит в том, что области предельных циклов периода 1 и 2 стали шире, то область небольших значений параметров γ и v демонстрирует заметные изменения. Во-первых, в области небольших значений параметров γ и v , около правой границы, появилась еще одна область, отвечающая новому положению равновесия. Как будет показано далее, эта область не вытесняет наблюдавшиеся при данных значения параметров режимы, а накладывается на них. Как следствие, в рассматриваемой области в обобщенной модели

(2) будет иметь место мультистабильность: в фазовом пространстве будут сосуществовать симметричная пара новых положений равновесия и либо предельные циклы, либо хаотический аттрактор. Последнее зависит от конкретных значений параметров γ и v . При этом топология предельных циклов и хаотического аттрактора будет такой же, как и в случае системы (1). А вот устройство бассейнов притяжения изменится и не будет зависеть от периода сосуществующих аттракторов. Например, на рис. 10, *a* представлен бассейн для случая, когда в фазовом пространстве сосуществуют симметричная пара положений равновесия и хаотический аттрактор. Из рисунка видно, что большая часть бассейна хаотически заполнена точками, стартовав из которых траектория придет либо в одно из положений равновесия (соответствующие точки окрашены в синий и зеленый цвет), либо на хаотический аттрактор (соответствующие точки окрашены в голубой цвет). И лишь в окрестности начала координат, что хорошо видно на увеличенном фрагменте сечения бассейна, построенного для $z_0 = 0.5$, будут наблюдаться небольшие «острова» бассейнов притяжения положений равновесия (см. рис. 10, *a*). Причем с ростом z_0 эти «острова» будут уменьшаться, пока совсем не исчезнут. Второе отличие карты динамических режимов, построенной для обобщенной модели (2), от карты, построенной для системы (1), состоит в том, что области всех периодических режимов сдвинуты вниз по параметру γ (сравним рис. 1, *b* с рис. 9).

Теперь вернемся к описанию того, как меняются карты динамических режимов обобщенной модели (2) на плоскости (v, γ) при движении на плоскости (p, q) вдоль маршрута, показанного на рис. 8, *a*. При переходе из точки 3 в точку 4 ($p = 0.7$ и $q = 0.3$) область нового положения равновесия будет увеличиваться в размере (см. рис. 8, *e*), пока, наконец, в точке 5 ($p = 0.5$ и $q = 0.5$) не останется только область, отвечающая новому положению равновесия (см. рис. 8, *f*)³. Далее в точке 6 ($p = 0.1$ и $q = 0.9$), помимо области нового положения равновесия будет

³ Отметим, что область «убегания траектории на бесконечность» будет присутствовать на всех картах динамических режимов, представленных на рис. 8. Поэтому при описании наблюдаемых на картах изменений она упоминаться не будет.

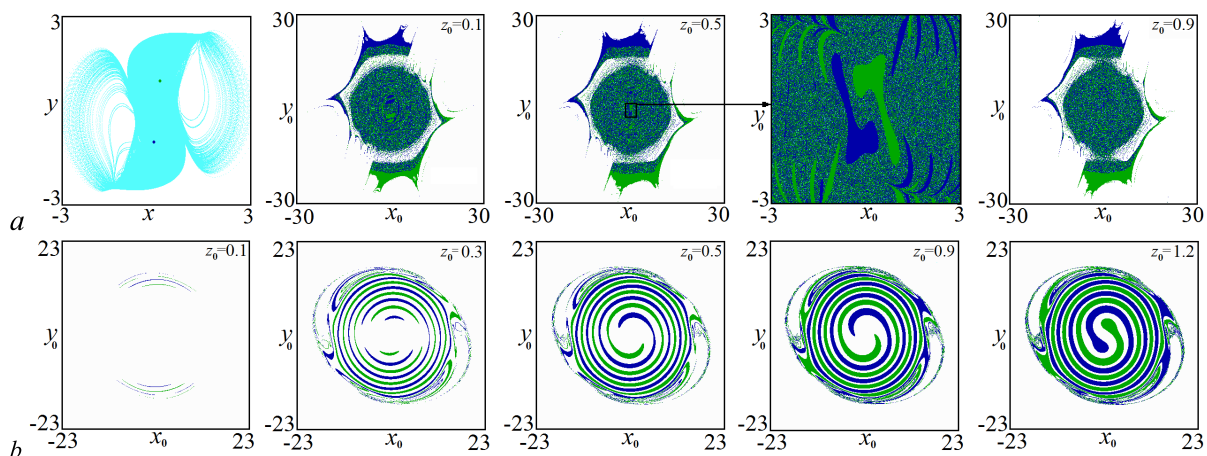


Рис. 10. Сечения бассейнов притяжения аттракторов обобщенной модели (2) плоскостью $z_0 = \text{Const}$, построенные для следующих значений параметров $p = 0.9, q = 0.1, \gamma = -0.4, v = -0.1$ (a) и $p = -0.3, q = 0.7, \gamma = -2.0, v = -0.9$ (b). Бассейны окрашены в тот же цвет, что и соответствующие аттракторы (цвет онлайн)

Fig. 10. Sections of the basins of the attractors by the $z_0 = \text{Const}$ plane plotted for the general model (2), $p = 0.9, q = 0.1, \gamma = -0.4, v = -0.1$ (a) and $p = -0.3, q = 0.7, \gamma = -2.0, v = -0.9$ (b). The basin is colored to the same color as the attractors (color online)

наблюдаться область, отвечающая предельному циклу периода 1 (см. рис. 8, g). После чего, при движении из точки 6 в точку 7 ($p = -0.3$ и $q = 0.7$), последовательно будут появляться области, отвечающие предельным циклам все большего и большего периода. Пока, наконец, в точке 7 не появится область, отвечающая хаотическому режиму (см. рис. 8, h). При этом все наблюдаемые на этой карте области имеют вид узких, особенно в случае предельных циклов и хаоса, полос. Отметим, что для всех наблюдаемых режимов бассейны притяжения будут одинаковы и будут иметь вид, показанный на рис. 10, b. На этом рисунке представлены бассейны для случая, когда в фазовом пространстве наблюдается симметричная пара положений равновесия. Видно, что при небольших z_0 бассейны представляют собой узкие дуги, которые с ростом z_0 соединяются, образуя спираль. С ростом z_0 число витков спирали будет уменьшаться, а их толщина — увеличиваться (см. рис. 10, b). Как оказалось, при дальнейшем движении по выбранному маршруту показанные на рис. 8, h полосы будут становиться все уже и уже, пока полностью не исчезнут, и в точке 8 ($p = -0.5$ и $q = 0.5$) в обобщенной системе Рабиновича–Фабриканта (2) будет наблюдаться лишь «убегание траектории на бесконечность».

Если далее продолжить движение по плоскости параметров (p, q) согласно указанному выше маршруту, то трансформация карт динамических режимов пойдет в обратном порядке. А именно, в точке 9 будет наблюдаться картина, представленная на рис. 8, h, в точке 10 — на рис. 8, g, в точке 11 — на рис. 8, f и т. д. В точке 15 так же, как и в точке 8 будет наблюдаться лишь «убегание траектории на бесконечность».

3. Бифуркационный анализ системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели

В заключение исследования для системы Рабиновича–Фабриканта (1) и ее обобщенной модели (2) был проведен бифуркационный анализ с помощью программы *MatCont*. Были численно найдены и построены линии основных бифуркаций для положений равновесия и предельных циклов периода 1. Соответствующие бифуркационные диаграммы представлены на рис. 11. Они хорошо согласуются с картами динамических режимов, построенными для системы (1) и системы (2) для тех же значений параметров и представленными на рис. 1, рис. 8, d и рис. 9.

Сначала рассмотрим бифуркационную диаграмму для системы Рабинович–Фабриканта (1). Она показана на рис. 11, а. Из диаграммы следует, что в области больших значений параметра γ ($\gamma < -2$) при движении по плоскости слева направо сначала на линии SN в результате седло-узловой бифуркации рождаются устойчивое и неустойчивое положения равновесия. Далее устойчивое положение равновесия становится неустойчивым на линии H, в результате бифуркации Андронова–Хопфа. При этом в системе рождается устойчивый предельный цикл, период которого удваивается на линии бифуркации удвоения периода PD (рис. 11, а, левый фрагмент). Как следует из вида карты динамических режимов (рис. 1, а), далее будет иметь место каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого в системе (1) возникает хаотический аттрактор.

В области небольших значений параметров γ и ν наблюдается несколько областей существования предельного цикла периода 1 (см. рис. 11, а, правый фрагмент). Верхняя область ограничена линиями бифуркации удвоения периода PD, которая представляет собой замкнутую кривую, и обратной бифуркацией Неймарка–Сакера NS. А нижние области (на правом фрагменте рис. 11, а показано две таких области) ограничены линиями седло-узловой бифуркации предельных циклов

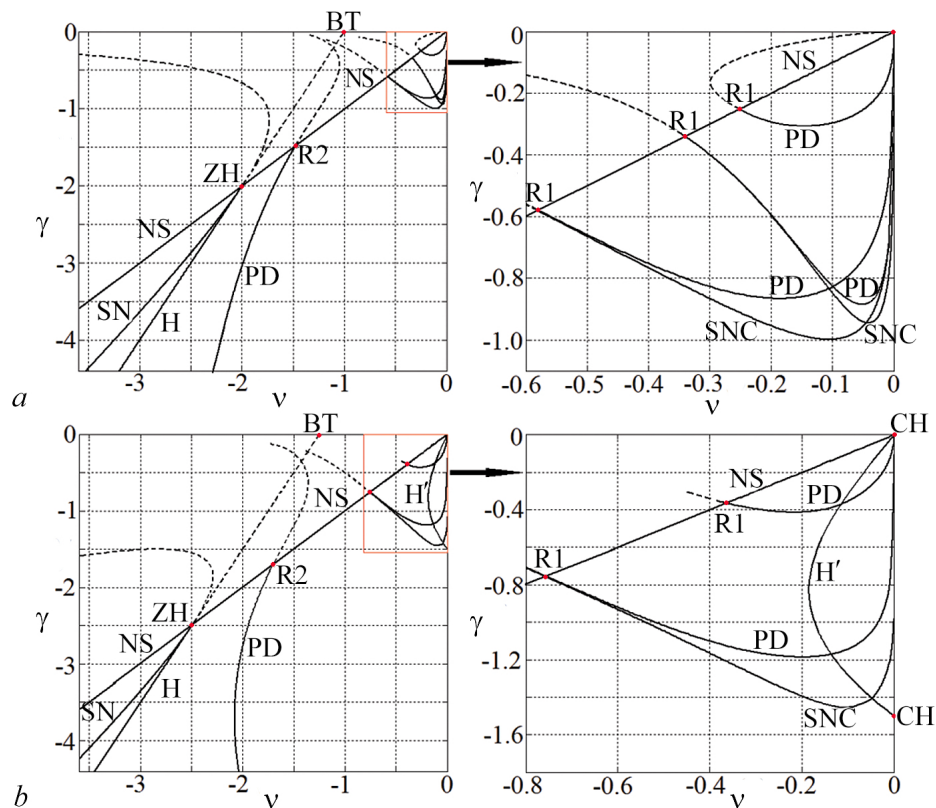


Рис. 11. Бифуркационные линии и точки системы Рабинович–Фабриканта (1) (а) и ее обобщенной модели (2) для случая $p = 0.9$ и $q = 0.1$ (b) на плоскости (ν, γ) . SN — седло-узловая бифуркация неподвижной точки, SNC — седло-узловая бифуркация предельных циклов, H — прямая бифуркация Андронова–Хопфа, H' — обратная бифуркация Андронова–Хопфа, PD — бифуркация удвоения периода предельных циклов, NS — обратная бифуркация Неймарка–Сакера, ZH — точка пересечения линии касательной бифуркации неподвижной точки и линии бифуркации Андронова–Хопфа (точка бифуркации Zero–Hopf), R1 — резонанс 1 : 1, R2 — резонанс 1 : 2, BT — точка бифуркации Богданова–Тakens. Сплошными линиями показаны бифуркации устойчивых режимов, а пунктирными — неустойчивых

Fig. 11. Bifurcations lines and points of the Rabinovich–Fabrikant system (1) and its general model (2) at $p = 0.9$ and $q = 0.1$ on the (ν, γ) parameter plane. SN is saddle-node bifurcation of the stable point, SNC is saddle-node bifurcation of the limit cycle, H is direct Hopf bifurcation, H' is inverse Hopf bifurcation, PD is period doubling bifurcation of the limit cycle, NS is inverse Neimark–Saker bifurcation, ZH is Zero–Hopf bifurcation point, R1 is resonance 1:1, R2 is resonance 1:2, BT is Bogdanov–Takens bifurcation point. The bifurcation lines corresponded unstable regimes are indicated by dotted lines

SNC и бифуркации удвоения периода PD. Отметим, что области периодического и хаотического поведения ограничены линией обратной бифуркацией Неймарка–Сакера NS, на которой есть точки бифуркаций коразмерности два, такие как ZH — точка бифуркации Zero–Hopf, $R1$ — резонанс $1 : 1$, $R2$ — резонанс $1 : 2$.

Теперь рассмотрим бифуркационную диаграмму для обобщенной модели системы Рабиновича–Фабриканта (2). Она представлена на рис. 11, *b*. Из сопоставления рис. 11, *a* и рис. 11, *b* следует, что в целом бифуркационная картина обобщенной модели (2) идентична той, что наблюдается в системе Рабиновича–Фабриканта (1) за исключением двух отличий имеющих место при небольших значениях параметров γ и ν . Первое отличие состоит в том, что линия бифуркации удвоения периода PD, ограничивающая верхнюю область предельного цикла периода 1, в обобщенной модели не является замкнутой кривой (см. рис. 11, *b*, правый фрагмент). Второе — в том, что в обобщенной модели (2), в области небольших значений параметров γ и ν , наблюдается линия бифуркации, которой не было в системе Рабиновича–Фабриканта. Это линия H' , которая отвечает обратной бифуркации Андронова–Хопфа и на которой рождается устойчивое положение равновесия и неустойчивый предельный цикл (см. рис. 11, *b*, правый фрагмент).

Заключение

В настоящей работе были численно с помощью методов теории динамического хаоса исследованы система Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенная модель в случае, когда параметры γ и ν , имеющие смысл коэффициентов диссипации, принимают отрицательные значения. Для обеих систем были построены карты динамических режимов, аттракторы и их проекции, типичные для данных систем бассейны притяжения аттракторов. Найдены основные бифуркации положений равновесия и предельных циклов периода один. Проведено сопоставление системы Рабиновича–Фабриканта с ее обобщенной моделью, а также с результатами, полученными ранее для случая положительных значений параметров γ и ν .

Исследование показало, что в обеих исследуемых моделях в пространстве параметров наблюдаются области, отвечающие устойчивым положениям равновесия, предельным циклам различных периодов и хаотическим аттракторам. При этом так же, как и в случае положительных значений параметров γ и ν , все аттракторы, независимо от типа и периода, возникают либо парами, переходящими друг в друга при одновременной замене $x \rightarrow -x$ и $y \rightarrow -y$, либо если аттрактор один, то он обладает симметрией относительно той же замены переменных. То есть в системе имеет место мультистабильность, связанная с внутренней симметрией систем. А вот мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы различных периодов и топологии, характерная для случая, когда параметры γ и ν принимают положительные значения, в случае отрицательных значений указанных параметров в системе Рабиновича–Фабриканта отсутствует полностью. А в ее обобщенной модели наблюдается лишь в области небольших значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации.

Также исследование показало, что в случае отрицательных значений параметров γ и ν в системе Рабиновича–Фабриканта и в ее обобщенной модели наблюдается хаотический аттрактор типа «Gramophone», который при положительных значениях указанных параметров не наблюдался. Кроме того, в случае отрицательных значений параметров γ и ν бассейны притяжения всех аттракторов имеют практически одинаковое устройство: они существенно больше, чем в случае положительных значений этих параметров, и не содержат областей, отвечающих «убеганию траектории на бесконечность».

Еще одно отличие. Если в случае положительных значений параметров γ и ν в обобщенной модели плоскость параметров, характеризующих нелинейность системы, имела универсальное устройство, то в случае отрицательных значений указанных параметров это не так. Хотя качественно устройство плоскости параметров, характеризующих нелинейность системы,

для отрицательных значений параметров γ и ν такое же, как в случае положительных значений, но оно довольно сильно меняется при вариации параметров.

Таким образом, можно отметить, что настоящая работа дополняет работы [8, 9] формируя полную картину динамики системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели для любых значений входящий в них параметров.

Список литературы

1. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
2. Danca M.-F., Feckan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich-Fabrikant system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 2. P. 1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
3. Danca M.-F. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86, no. 2. P. 1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
4. Danca M.-F., Kuznetsov N., Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 88, no. 1. P. 791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
5. Luo X., Small M., Danca M.-F., Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, no. 9. P. 3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993.
6. Danca M.-F., Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, no. 10. P. 3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
7. Srivastava M., Agrawal S. K., Vishal K., Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system // Applied Mathematical Modelling. 2014. Vol. 38, no. 13. P. 3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
8. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Сложная динамика и хаос в модельной системе Рабиновича–Фабриканта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2019. Т. 19, № 1. С. 4–18. DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
9. Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29.
10. Liu Y., Yang Q., Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234, no. 1. P. 101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
11. Agrawal S. K., Srivastava M., Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems // Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 69, no. 4. P. 2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
12. Hocking L. M., Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance // Proc. R. Soc. Lond. A. 1972. Vol. 326, no. 1566. P. 289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
13. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // В кн.: Нелинейные волны / под. ред. Гапонова-Грехова А. В. М.: Наука, 1979. С. 68–104.
14. Kuramoto Y., Yamada T. Turbulent state in chemical reactions // Progress of Theoretical Physics. 1976. Vol. 56, no. 2. P. 679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.

References

1. Rabinovich MI, Fabrikant AL. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1979;77(2):617–629 (in Russian).

2. Danca MF, Feckan M, Kuznetsov N, Chen G. Looking more closely to the Rabinovich-Fabrikant system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2016;26(2):1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
3. Danca MF. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system. *Nonlinear Dynamics*. 2016;86(2):1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
4. Danca MF, Kuznetsov N, Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system. *Nonlinear Dynamics*. 2017;88(1):791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
5. Luo X, Small M, Danca MF, Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007;17(9):3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993.
6. Danca MF, Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2004;14(10):3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
7. Srivastava M, Agrawal SK, Vishal K, Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system. *Applied Mathematical Modelling*. 2014;38(13):3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
8. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Turukina LV. Complex dynamics and chaos in the Rabinovich–Fabrikant model. *Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2019;19(1):4–18 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
9. Kuznetsov SP, Turukina LV. Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(1):7–29 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29.
10. Liu Y, Yang Q, Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010;234(1):101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
11. Agrawal SK, Srivastava M, Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems. *Nonlinear Dynamics*. 2012;69(4):2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
12. Hocking LM, Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1972;326(1566):289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
13. Andronov AA, Fabrikant AL. Landau damping, wind waves, and whistler. In: Gaponov-Grekhov AV, editor. *Nonlinear Waves*. Moscow: Nauka; 1979. P. 68–104 (in Russian).
14. Kuramoto Y, Yamada T. Turbulent state in chemical reactions. *Progress of Theoretical Physics*. 1976;56(2):679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.



Тюрюкина Людмила Владимировна родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2000). По окончании аспирантуры защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (СГУ, 2003), имеет звание доцента по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. По совместительству работает доцентом на кафедре динамических систем Института физики СГУ на базе СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Имеет более 50 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: turukinalv@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-4221-8900
 AuthorID (eLibrary.Ru): 39405