



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья
УДК 537.86; 519.21

DOI: 10.18500/0869-6632-003016
EDN: FNRSUD

Синхронизация волн возбуждения в двухслойной сети нейронов ФитцХью–Нагумо при шумовой модуляции параметров межслойной связи

И. Р. Рамазанов, И. А. Корнеев[✉], А. В. Слепнев, Т. Е. Вадивасова

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ibadulla.ramazanov@yandex.ru, ✉ ivankorneew@yandex.ru,
a.v.slepnev@gmail.com, vadvivasovate@yandex.ru

*Поступила в редакцию 7.07.2022, принята к публикации 20.09.2022,
опубликована онлайн 11.11.2022, опубликована 30.11.2022*

Аннотация. Целью работы является изучение возможности синхронизации волновых процессов в распределенных возбудимых системах посредством шумовой модуляции силы связи между ними. **Методы.** Простая модель сети нейронов, представляющая собой два связанных слоя возбудимых осцилляторов ФитцХью–Нагумо с кольцевой топологией, исследуется методами численного моделирования. Связь между слоями имеет случайную компоненту, задаваемую для каждой пары связанных осцилляторов независимыми источниками цветного гауссова шума. **Результаты.** Показано, что при определенных параметрах шума связи (интенсивности и времени корреляции) возможно получить режим, близкий к полной (синфазной) синхронизации бегущих волн в случае идентичных взаимодействующих слоев и режим синхронизации скоростей распространения волн в случае неидентичных слоев, отличающихся значениями коэффициентов внутрислойной связи. **Заключение.** Эффектами синхронизации фаз и скоростей распространения волн возбуждения в ансамблях нейронов можно управлять с помощью случайных процессов взаимодействия возбудимых осцилляторов, задаваемых статистически независимыми источниками шума. Управляющими параметрами при этом могут служить как интенсивность шума, так и его время корреляции. Полученные на простой модели результаты могут носить достаточно общий характер.

Ключевые слова: сети осцилляторов, нелинейные системы, модель ФитцХью–Нагумо, нелинейная связь, цветной шум, модуляция шума, синхронизация.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 20-12-00119.

Для цитирования: Рамазанов И. Р., Корнеев И. А., Слепнев А. В., Вадивасова Т. Е. Синхронизация волн возбуждения в двухслойной сети нейронов ФитцХью–Нагумо при шумовой модуляции параметров межслойной связи // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 732–748. DOI: 10.18500/0869-6632-003016. EDN: FNRSUD

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Synchronization of excitation waves in a two-layer network of FitzHugh–Nagumo neurons with noise modulation of interlayer coupling parameters

I. R. Ramazanov, I. A. Korneev✉, A. V. Slepnev, T. E. Vadivasova

Saratov State University, Russia

E-mail: ibadulla.ramazanov@yandex.ru, ✉ivankorneev@yandex.ru,

a.v.slepnev@gmail.com, vadivasovate@yandex.ru

Received 7.07.2022, accepted 20.09.2022, available online 11.11.2022, published 30.11.2022

Abstract. The purpose of this work is to study the possibility of synchronization of wave processes in distributed excitable systems by means of noise modulation of the coupling strength between them. *Methods.* A simple model of a neural network, which consists of two coupled layers of excitable FitzHugh–Nagumo oscillators with a ring topology, is studied by numerical simulation methods. The connection between the layers has a random component, which is set for each pair of coupled oscillators by independent sources of colored Gaussian noise. *Results.* The possibility to obtain a regime close to full (in-phase) synchronization of traveling waves in the case of identical interacting layers and a regime of synchronization of wave propagation velocities in the case of non-identical layers differing in the values of the coefficients of intra-layer coupling is shown for certain values of parameters of coupling noise (intensity and correlation time). *Conclusion.* It is shown that the effects of synchronization of phases and propagation velocities of excitation waves in ensembles of neurons can be controlled using random processes of interaction of excitable oscillators set by statistically independent noise sources. In this case, both the noise intensity and its correlation time can serve as control parameters. The results obtained on a simple model can be quite general.

Keywords: networks of oscillators, nonlinear systems, FitzHugh–Nagumo model, nonlinear coupling, colored noise, noise modulation, synchronization.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, grant No. 20-12-00119.

For citation: Ramazanov IR, Korneev IA, Slepnev AV, Vadivasova TE. Synchronization of excitation waves in a two-layer network of FitzHugh–Nagumo neurons with noise modulation of interlayer coupling parameters. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6):732–748. DOI: 10.18500/0869-6632-003016

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Источники внутреннего и внешнего шума оказывают влияние на все объекты и системы живой природы и техники. Они могут существенно изменить поведение системы [1–9], что необходимо учитывать при моделировании и прогнозировании различных возможных эффектов. Влияние шума может быть очень разнообразно в зависимости от характеристик шума и от динамики самой системы. В условиях сильной нелинейности и сложной динамики теоретические методы исследования не всегда могут быть применимы. В этом случае важную роль приобретает численное моделирование.

Далеко не все эффекты, связанные с воздействием шумов на нелинейные системы, в настоящее время в достаточной степени изучены. Особенно это касается многокомпонентных ансамблей и распределенных систем. Исследованию влияния шумов на динамику ансамблей и распределенных систем посвящен ряд работ (например, [10–15]), в которых рассматриваются индуцированные шумом фазовые переходы, а также эффекты стохастического и когерентного резонансов в сложных многокомпонентных системах. Одним из важных вопросов является влияние шума на синхронизацию колебаний, поскольку фундаментальное явление синхронизации играет важнейшую роль в поведении различных нелинейных систем в живой природе и технике и лежит

в основе формирования пространственных структур. Известно, что наличие источников шума в автогенераторе приводит к тому, что фазовый захват не является строгим и наблюдается на конечном времени (так называемая «эффективная синхронизация» [16]). В то же время, воздействие общего шума на невзаимодействующие или слабо взаимодействующие автоколебательные и возбудимые системы приводит к их частотно-фазовой синхронизации [17–22]. Более того, было показано, что стохастические колебания, возникающие в бистабильных и возбудимых осцилляторах под действием шума, также могут быть, в некотором смысле, синхронизованы [23–29]. В ансамблях возбудимых систем синхронизация стохастических колебаний при определенных параметрах шума приводит к возникновению сложных кластерных структур, таких как когерентно-резонансная химера [30]. Недавно было показано, что параметрический шум, модулирующий параметр связи, может вызывать частичную синхронизацию сложной пространственно-временной динамики в связанных слоях хаотических отображений [31, 32] и позволяет управлять поведением ансамбля, демонстрирующего химерные состояния [33].

Шум играет принципиальную роль в моделях нейродинамики, поскольку нейроны, в большинстве случаев, являются возбудимыми осцилляторами и их поведение во многом определяется уровнем и параметрами шума в системе [34–42]. Может также быть поставлен вопрос о возможном влиянии на динамику нейронных ансамблей шума, присутствующего в цепочках связи. В настоящей работе мы рассматриваем простейшую модель нейронной системы, представляющую собой двухслойную сеть возбудимых осцилляторов ФитцХью–Нагумо с кольцевой топологией. В пределах одного слоя (кольца) осцилляторы соединены локальными диссипативными связями и, таким образом, в каждом из слоев может быть реализован режим бегущей волны возбуждения. При этом источники шума внутри слоев не рассматриваются. Связь между слоями также является локальной и диссипативной, однако сила взаимодействия осцилляторов носит случайный характер и определяется независимыми источниками шума. Данная модель, разумеется, не является реалистичной моделью какой-либо нейронной системы, однако она позволяет выявить ряд эффектов, вызванных шумовой модуляцией параметра связи, которые могут носить достаточно общий характер. В работе показано, как параметры случайной компоненты связи между слоями могут влиять на режим синхронизации наблюдающихся в них волн возбуждения.

1. Исследуемая модель и методы численного анализа

Как отмечено во введении, в работе исследуется модель возбудимой нейронной системы, представляющая собой ансамбль из двух слоев (колец) осцилляторов ФитцХью–Нагумо (ФХН) [43, 44] с локальным взаимодействием и коэффициентом межслойной связи, имеющим шумовую компоненту. Уравнения системы могут быть записаны в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{j,1} = \frac{1}{\varepsilon} (x_{j,1} - y_{j,1} - \alpha x_{j,1}^3) + \sigma_1 (x_{j-1,1} + x_{j+1,1} - 2x_{j,1}) + (k_0 + kz_j) [x_{j,2} - x_{j,1}], \\ \dot{y}_{j,1} = \gamma x_{j,1} - y_{j,1} + \beta, \\ \dot{x}_{j,2} = \frac{1}{\varepsilon} (x_{j,2} - y_{j,2} - \alpha x_{j,2}^3) + \sigma_2 (x_{j-1,2} + x_{j+1,2} - 2x_{j,2}) + (k_0 + kz_j) [x_{j,1} - x_{j,2}], \\ \dot{y}_{j,2} = \gamma x_{j,2} - y_{j,2} + \beta, \\ \dot{z}_j = -\mu z_j + \sqrt{2\mu} n_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ \text{граничные условия: } x_{j\pm N,i}(t) = x_{j,i}(t), \quad y_{j\pm N,i}(t) = y_{j,i}(t), \quad i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь j — номер элемента в слое, i — номер слоя. Слои состоят из идентичных осцилляторов ФХН с диссипативной локальной связью внутри колец. Коэффициенты внутренней связи σ_1 и σ_2 для двух колец могут различаться. Все остальные параметры одинаковы. Осцилляторы

с одинаковыми номерами j , принадлежащие разным слоям, локально связаны. Сила межслойной связи характеризуется одним и тем же постоянным значением коэффициента связи k_0 , к которому добавляются случайные компоненты $kz_j(t)$. В проведенных исследованиях полагается, что $k_0 = 0$, то есть постоянная компонента связи отсутствует. Случайные переменные $z_j(t)$ описываются одномерными процессами Орнштейна–Уленбека с одинаковыми статистическими характеристиками, порождаемыми независимыми источниками гауссова белого шума $n_j(t)$. Независимые процессы $z_j(t)$ имеют гауссово распределение со стационарным средним $\langle z_j(t) \rangle \equiv 0$. Таким образом, коэффициент связи, определяемый шумом, со временем меняет знак, становясь то положительным (притягивающая связь), то отрицательным (отталкивающая связь). Дисперсия процессов $z_j(t)$ в стационарном режиме равна единице: $D(z_j) \equiv 1$, а корреляционная функция описывается спадающей экспонентой:

$$\Psi_{z_j}(\tau) = e^{-\mu|\tau|}, \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (2)$$

Соответственно, спектральная плотность мощности этих процессов имеет форму лоренциана

$$W_{z_j}(\omega) = \frac{4\mu}{\mu^2 + \omega^2}, \quad \omega > 0. \quad (3)$$

Время корреляции и ширина спектра на уровне половинной мощности определяются параметром μ : $\tau_{\text{кор}} = \mu^{-1}$; $\Delta\omega_{1/2} = \mu$. Важно отметить следующую особенность рассматриваемой модели цветного шума. Дисперсия всех нормированных источников равна единице, а с учетом множителя k она равна k^2 . Так как дисперсия пропорциональна интегралу от спектральной плотности, то фиксированное значение дисперсии означает постоянство интегральной мощности шума вне зависимости от ширины спектра мощности. С ростом ширины спектра (с ростом параметра μ) интегральная мощность источников шума распределяется на все более широкий диапазон частот, и спектральная плотность в точке максимума в нуле и на других частотах уменьшается. При $\mu \rightarrow \infty$ спектральная плотность стремится к нулю, что не позволяет рассмотреть предельный переход к белому шуму с конечной спектральной плотностью.

При проведении численного моделирования были зафиксированы следующие параметры системы (1): $N = 100$ (количество элементов в слое ансамбля); $\alpha = 1/3$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.8$, $\varepsilon = 0.01$ (параметры осцилляторов, соответствующие возбуждому режиму); $\sigma_1 = 4.5$ (коэффициент связи в первом слое); $\sigma_2 = 4.5$ или $\sigma_2 = 5.5$ (коэффициент связи во втором слое); $k_0 = 0$ (постоянная составляющая коэффициента межслойной связи). Интенсивность шумовой компоненты межслойной связи k и параметр μ , управляющий шириной спектра источников шума, рассматриваются как управляющие и меняются в ходе исследований.

Для установления исходных режимов в двух невзаимодействующих кольцах начальные условия задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{j,1}(0) &= 2 \sin(2\pi j/N), & y_{j,1}(0) &= 2 \cos(2\pi j/N), \\ x_{j,2}(0) &= 2 \sin(2\pi j/N + \varphi), & y_{j,2}(0) &= 2 \cos(2\pi j/N + \varphi), & z_j(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия (4) обеспечивают в обоих кольцах режим бегущей волны с длиной волны, равной длине системы (основная волновая мода). Параметр φ определяет фазовый сдвиг двух волн. При получении установившегося режима бегущих волн в двух невзаимодействующих кольцах параметр k полагается равным нулю. При этом шумовые переменные z_j не влияют на волновые процессы, однако интегрирование на времени установления волновых режимов обеспечивает также установление статистических характеристик источников шума. Мгновенные состояния осцилляторов и переменных шума в установившемся режиме при отсутствии связи между кольцами запоминались и затем использовались в качестве начальных условий при исследовании взаимодействия колец.

В работе исследуется эффект фазовой синхронизации волн возбуждения в двух идентичных слоях, а также эффективной частотно-фазовой синхронизации при внесении расстройки параметров внутрислойной связи. Для диагностики синхронизации волн в идентичных слоях рассчитывается величина, характеризующая степень идентичности (синфазности) пространственных структур, которую мы будем называть погрешностью синфазной синхронизации. Мгновенное значение погрешности синхронизации определяется, как

$$\delta_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left([x_{j,2}(t) - x_{j,1}(t)]^2 + [y_{j,2}(t) - y_{j,1}(t)]^2 \right). \quad (5)$$

Так как δ_t может меняться во времени, рассчитывалось ее среднее значение

$$\delta = \langle \delta_t \rangle, \quad (6)$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по времени.

Для диагностики синхронизации частот колебаний (фазовых скоростей) рассчитываются средние периоды (межспайковые интервалы) колебаний осцилляторов (для всех осцилляторов в одном слое они одинаковы). Мгновенный период τ_n есть время между двумя последовательными пересечениями в одном направлении значением переменной x уровня, принятого за порог зажигания (при расчетах выбиралось значение $x_{th} = 1.5$). Средний период есть

$$T = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \tau_n, \quad (7)$$

где M — число последовательных пересечений в одном направлении уровня x_{th} на времени наблюдения. Средняя частота колебаний f есть величина, обратная среднему периоду. Даже если колебания являются периодическими, значения τ_n могут различаться для различных n , поэтому применяется усреднение. Для диагностики синхронизации средних периодов и частот рассчитывалось отношение

$$\theta = \frac{T_2}{T_1} = \frac{f_1}{f_2}, \quad (8)$$

где индексы указывают номер слоя.

2. Синхронизация фаз бегущих волн в двух идентичных слоях

В двух невзаимодействующих слоях ($k = k_0 = 0$) при выбранных значениях параметров и начальных условиях (4) устанавливались режимы бегущих волн. Скорости распространения волн (и, соответственно, частоты колебаний) были строго одинаковыми, но между волнами существовал постоянный сдвиг фаз. Установившиеся состояния двух невзаимодействующих слоев фиксировались и использовались в качестве начальных условий для дальнейших исследований. При исследовании межслойного взаимодействия система уравнений (1) сначала интегрировалась с выбранными начальными условиями (при $k = k_0 = 0$) на времени t_0 . Затем между слоями вводилась связь, которая в проведенных расчетах была полностью случайной (шумовой), то есть полагалось, что $k_0 = 0$, $k \neq 0$. Система интегрировалась при наличии связи на времени установления t_k . Затем, при необходимости, производился расчет среднего значения погрешности синхронизации δ на времени t_δ . Времена установления t_0 и t_k составляли, как правило, не менее 5000 единиц безразмерного времени системы (то есть $5 \cdot 10^6$ шагов интегрирования). Время усреднения выбиралось равным 4000 безразмерных единиц.

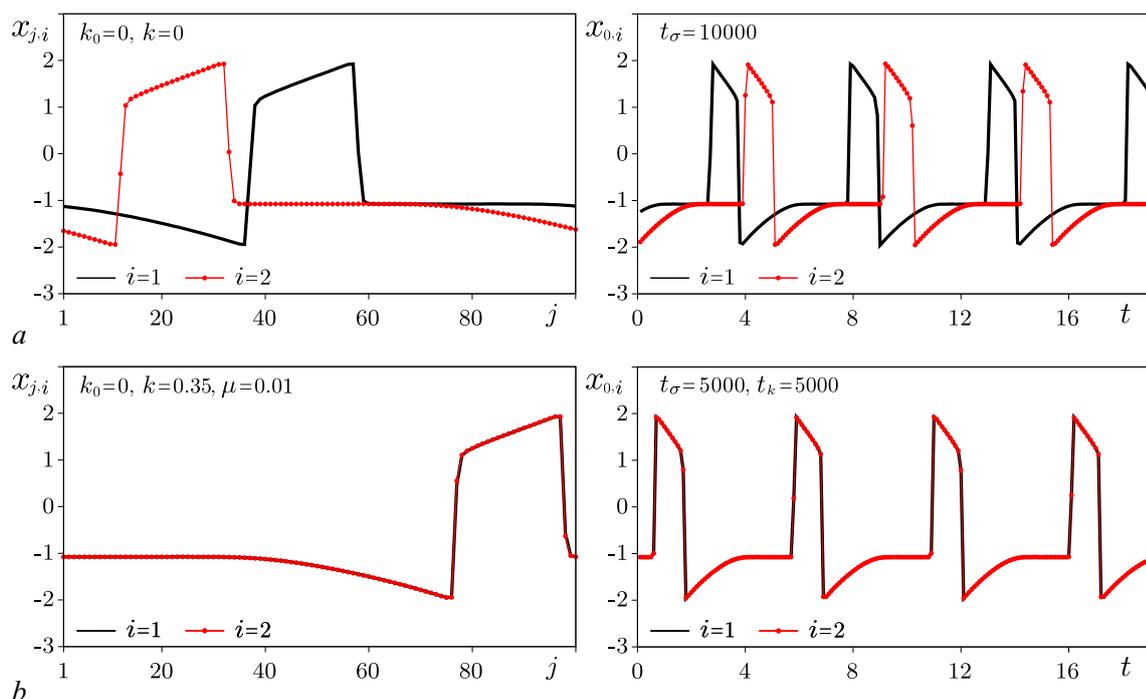


Рис. 1. Мгновенные профили бегущих волн (левый столбец) и колебания осцилляторов $x_{0,i}$ (правый столбец) в двух идентичных слоях $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.5$: *a* – при отсутствии межслойной связи $k = 0$; *b* – при случайной связи $k = 0.35$, $\mu = 0.01$ (цвет онлайн)

Fig. 1. Snapshots of traveling waves (left column) and oscillations $x_{0,i}$ (right column) in two identical rings $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.5$: *a* – in the absence of interlayer coupling $k = 0$; *b* – in case of random coupling $k = 0.35$, $\mu = 0.01$ (color online)

Мгновенные профили волн и колебания осцилляторов с одинаковым номером $j = 0$ в кольцах в установившемся режиме при отсутствии взаимодействия приведены на рис. 1, *a*. Хорошо виден фазовый сдвиг колебаний и волновых профилей. При введении межслойной шумовой связи с интенсивностью $k = 0.35$ и параметром $\mu = 0.01$ после периода установления t_k наблюдается синхронизация мгновенных профилей волн и фаз колебаний всех осцилляторов с одинаковыми номерами в двух слоях. Соответствующий режим иллюстрирует рис. 1, *b*.

Более детальное исследование поведения двух слоев с шумовой связью показывает, что периодические колебания с постоянным сдвигом фазы между слоями, как правило, не устанавливаются, а наблюдаемый эффект синхронизации сильно зависит от времени наблюдения и реализации случайных процессов, обеспечивающих межслойную связь. Также существенную роль играет значение параметра μ , определяющего спектрально-корреляционные свойства источников шума. Эти свойства шумовой синхронизации идентичных слоев проиллюстрированы на рис. 2.

На рис. 2, *a, b* приведены зависимости мгновенного значения погрешности синхронизации (величина δ_t) от времени, полученные при $k = 0.35$, $\mu = 0.01$ для двух разных реализаций шума, обозначенных как noise 1 и noise 2. Необходимо пояснить, что при интегрировании стохастических дифференциальных уравнений (1) приращения состояний всех случайных источников шума $n_j(t)$ на шаге интегрирования задаются с помощью последовательности случайных чисел, генерируемых специальной программой – генератором некоррелированных случайных чисел со стандартным гауссовым распределением. Та или иная реализация шума (точнее, набор реализаций всех источников $n_j(t)$) определяется некоторым входным параметром этой программы (инициализирующей переменной). Источники шума при $\mu = 0.01$ являются узкополосными низкочастотными и процессы взаимодействия элементов двух слоев будут «медленными». Приведенные графики

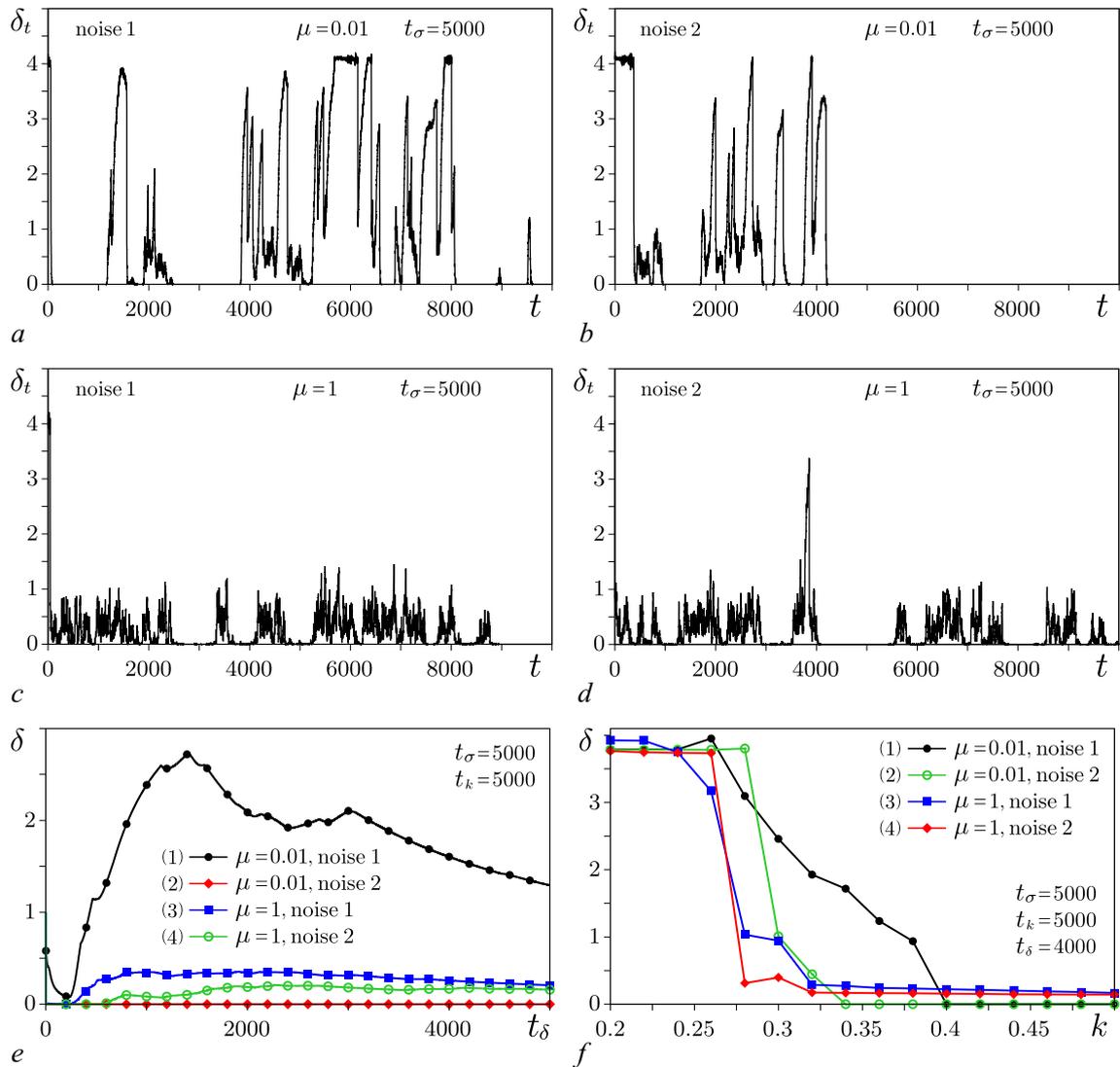


Рис. 2. Поведение погрешности синхронизации при различном выборе реализации шума: *a, b* – зависимости мгновенного значения погрешности синхронизации δ_t от времени при $k = 0.35$, $\mu = 0.01$; *c, d* – зависимости δ_t от времени при $k = 0.35$, $\mu = 1.0$; *e* – зависимости средней погрешности синхронизации δ от времени усреднения при $\mu = 0.01$, $\mu = 1.0$ и фиксированном значении параметра $k = 0.35$; *f* – зависимости величины δ от параметра шумового взаимодействия k , полученные для двух реализаций шума при $\mu = 0.01$, $\mu = 1.0$ и фиксированных временах установления и усреднения (указаны на графиках) (цвет онлайн)

Fig. 2. Behavior of the synchronization error with different choice of noise realizations: *a, b* – dependences of the instantaneous value of the synchronization error δ_t on time at $k = 0.35$, $\mu = 0.01$; *c, d* – time dependences of δ_t at $k = 0.35$, $\mu = 1.0$; *e* – dependences of the average synchronization error δ on the averaging time at $\mu = 0.01$, $\mu = 1.0$ and a fixed coupling parameter $k = 0.35$; *f* – dependences of δ on the coupling parameter k obtained for two noise realizations at $\mu = 0.01$, $\mu = 1.0$ and fixed settling and averaging times (shown on the graphs) (color online)

свидетельствуют о том, что постоянный сдвиг фаз между волнами в двух слоях на рассматриваемом времени наблюдения не устанавливается. Зависимости δ_t от времени имеют вид процесса перемежаемости, что свидетельствует о сложном характере колебаний осцилляторов в двух слоях, вызванном действием шума. При этом могут наблюдаться длительные интервалы полностью синхронного поведения. Они сменяются интервалами, на которых δ_t принимает большие значения. Конкретная последовательность состояний зависит от реализации шума. В силу длительности

интервалов с различным поведением, не удастся получить установившееся среднее значение погрешности синхронизации на приемлемых для численного исследования временах. Соответствующие графики зависимости δ от времени усреднения приведены на рис. 2, *e* (кривые 1, 2). Время усреднения варьировалось от нуля и до 5000 безразмерных единиц. Для реализации шума noise 2 в любой интервал усреднения в этом диапазоне после времени установления ($t_k = 5000$) не попадают отличные от нуля значения мгновенной погрешности синхронизации (см. рис. 2, *b*) и средняя погрешность строго равна нулю. Однако вывод о полной синхронизации может оказаться преждевременным. Возможно, с увеличением времени интегрирования сбоя синхронизации снова появится. Аналогичные зависимости δ_t от времени при том же значении параметра связи $k = 0.35$, тех же реализациях шума, но при более широкополосном шуме с параметром $\mu = 1.0$ приведены на рис. 2, *c, d*. Эти зависимости, так же как в предыдущем случае, показывают отсутствие установившегося режима с постоянным фазовым сдвигом волн. В отличие от узкополосного шума, при $\mu = 1.0$ не наблюдаются длительные интервалы полной синхронизации слоев, однако сами значения δ_t становятся существенно меньше. Усреднение погрешности синхронизации на временах порядка 4000...5000 безразмерных единиц дает практически установившееся и близкое для обеих реализаций шума значение δ (кривые 3, 4 на рис. 2, *e*).

На рис. 2, *f* сравниваются зависимости значений средней погрешности δ от интенсивности шумового взаимодействия k , полученные для двух реализаций шума при $\mu = 0.01$ и $\mu = 1.0$. Время усреднения погрешности синхронизации выбрано равным $t_\delta = 4000$ безразмерных единиц. По графикам можно примерно установить порог синхронизации. Он соответствует значению параметра k , при котором наблюдается резкое уменьшение величины δ . Величина δ может принимать нулевые значения (полная синхронизация) или выходить на уровень достаточно малых значений (частичная синхронизация). Для шума с параметром $\mu = 1.0$ зависимости $\delta(k)$, полученные для двух реализаций шума, ведут себя сходным образом и пороговые значения k примерно совпадают (кривые 3, 4). Для узкополосного низкочастотного шума с $\mu = 0.01$ зависимости $\delta(k)$, полученные для двух реализаций шума, сильно различаются (кривые 1, 2), причем, в случае реализации noise 1, погрешность синхронизации убывает с ростом k постепенно (кривая 1) и возникает сложность с определением порога синхронизации. Если же рассматривать полную синхронизацию и определять порог условием $\delta_m = 0$, то при $\mu = 1.0$ полная синхронизация не наблюдается, а при $\mu = 0.01$ порог существенно зависит от реализации шума.

Проблемы в определении порога синхронизации связаны с недостаточно большим временем усреднения t_δ , однако медленный характер процессов (особенно при низкочастотном шуме) и большие затраты времени на интегрирование уравнений (1) не позволяют произвести усреднение на времени, достаточном для установления величины δ . Тем не менее полученные графики $\delta(k)$ показывают наличие эффекта синхронизации слоев (хотя бы частичной) и зависимость порога синхронизации от спектрально-корреляционных свойств цветного шума, задающего межслойную связь. На рис. 3, *a* приведены зависимости величины δ от интенсивности шумовой модуляции связи k . При расчетах использовались одни и те же реализации источников шума $z_j(t)$ (noise 1) и одни и те же времена установления режима и усреднения погрешности синхронизации. Можно заметить, что с ростом ширины спектра шума (параметра μ) сначала наблюдается некоторое уменьшение порога синхронизации, но затем, при очень широком спектре шума, порог растет и при $\mu = 100$ синхронизация перестает наблюдаться в пределах изменения параметра $k \leq 1$ (на графиках поведение при $0.5 \leq k \leq 1$ не отражено). Причина зависимости порога синхронизации от ширины спектра шума поясняется на рис. 3, *b*). На нем приведены графики спектральной плотности источников шума $z_j(t)$, рассчитанные по формуле (3), для различных значений параметра μ . Вертикальными пунктирными линиями показаны спектральные компоненты в спектре мощности колебаний осцилляторов в слоях без связи. Поскольку эти колебания периодические

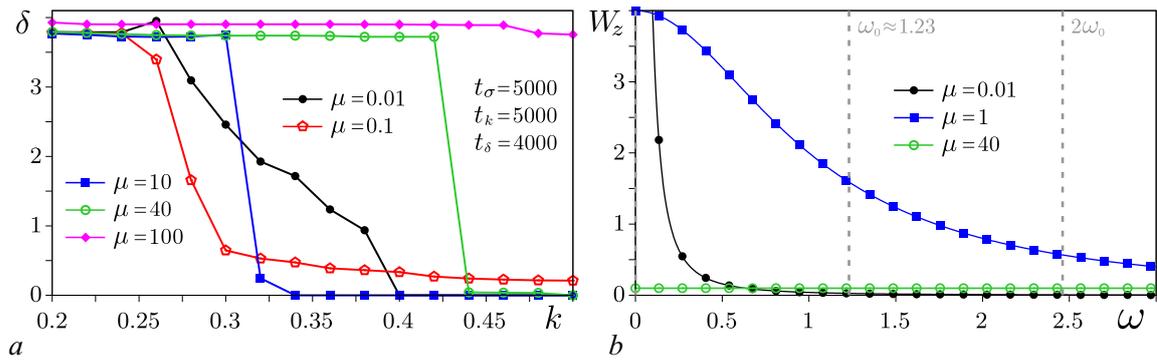


Рис. 3. Эффект синхронизации при различных значениях ширины спектра шума связи: *a* — зависимости погрешности синхронизации δ бегущих волн от интенсивности шума связи k в двух идентичных кольцах $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.5$ при различных значениях параметра шума μ ; *b* — графики спектральной плотности шума для различных значений параметра μ , рассчитанные по формуле (3). При расчете всех зависимостей $\delta(k)$ использовалась реализация шума noise 1. Времена установления и усреднения указаны на рисунке. Вертикальные пунктирные линии на панели (*b*) отмечают спектральные линии в спектре колебаний осцилляторов в режиме, проиллюстрированном на рис. 1 при $k = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 3. The effect of synchronization at different values of the spectrum width of the noise coupling: *a* — dependencies of the synchronization error δ of travelling waves on the noise coupling intensity k in two identical rings $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.5$ at different values of noise parameter μ ; *b* — graphs of noise spectral density for different values of parameter μ calculated by the formula (3). When calculating all dependences $\delta(k)$, the noise 1 realization was used. The settling and averaging times are shown in the figure. The vertical dotted lines in panel (*b*) mark the spectral lines in the spectrum of oscillations of oscillators in the regime illustrated in fig. 1 at $k = 0$ (color online)

(см. рис. 1, *a*), то их спектр является дискретным и спектральная плотность состоит из δ -пику на основной частоте $\omega_0 = 1.23 \pm 0.001$ и её гармониках, а также на нулевой частоте, поскольку среднее значение колебаний отлично от нуля. При $\mu = 0.01$ спектр шума сосредоточен на низких частотах, а в области основной частоты колебаний спектральная плотность шума очень мала. С ростом параметра μ спектр шума становится более широким и спектральная плотность на частоте ω_0 несколько возрастает. Это приводит к более эффективному влиянию шумовой связи на поведение слоев. При дальнейшем увеличении параметра μ увеличивается спектральная плотность шума на гармониках основной частоты ω_0 , но уменьшается на основной частоте и на более низких частотах. Это, по-видимому, приводит к росту порога синхронизации, и далее, при больших значениях μ , синхронизация не возникает.

3. Синхронизация скоростей бегущих волн в двух кольцах с различными значениями коэффициентов связи элементов в кольце

Скорость бегущей волны возбуждения в кольце осцилляторов ФХН существенно зависит от коэффициента связи элементов кольца. Таким образом, задав во втором слое значение $\sigma_2 \neq \sigma_1$ можно получить в каждом из слоев (при отсутствии взаимодействия между ними) бегущие волны, отличающиеся не только начальными фазами, но и скоростями. Соответственно, осцилляторы в двух слоях будут колебаться с различной частотой. В проведенных исследованиях выбирались значения $\sigma_1 = 4.5$ или $\sigma_2 = 5.5$, что обеспечивало разность скоростей волновых процессов при отсутствии связи между слоями. При введении случайной связи наблюдался захват средних интерспайковых интервалов (и, соответственно, средних частот) колебаний осцилляторов. Было исследовано поведение средних интерспайковых интервалов (средних периодов колебаний) в двух слоях и их отношения $\theta = T_2/T_1$ и погрешности синхронизации δ_m . Как и прежде, связь осуществлялась только через случайные переменные ($k_0 = 0$).

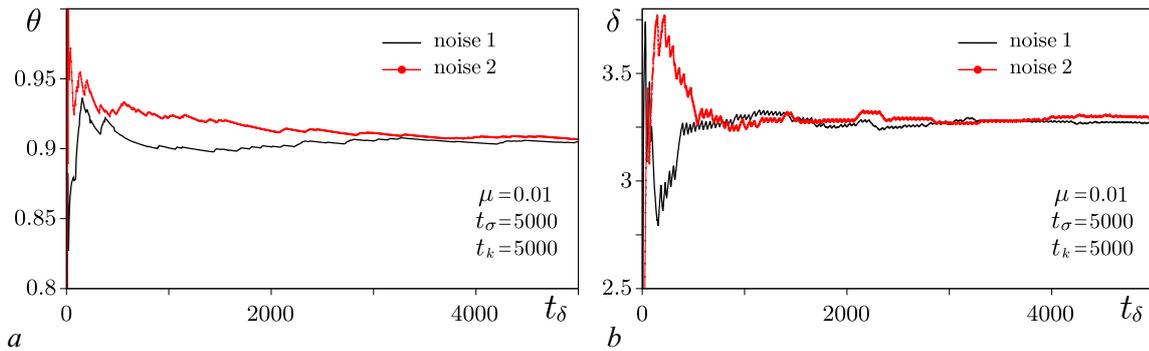


Рис. 4. Процесс установления усредненных характеристик синхронизации в неидентичных слоях с коэффициентами внутрислойной связи $\sigma_1 = 4.5$, $\sigma_2 = 5.5$ при значении параметров межслойной связи $k = 0.35$, $\mu = 0.01$ и двух различных реализациях шума: a – зависимости от времени усреднения t_δ отношения средних периодов $\theta = T_2/T_1$ и b – средней погрешности синхронизации δ . Времена установления указаны на графиках (цвет онлайн)

Fig. 4. The process of establishing the average synchronization characteristics in non-identical layers with intralayer coupling coefficients $\sigma_1 = 4.5$, $\sigma_2 = 5.5$ for interlayer coupling parameters $k = 0.35$, $\mu = 0.01$ and two different noise realizations: a – dependence on averaging time t_δ for the ratio of the average periods $\theta = T_2/T_1$ and b – the average synchronization error δ . Settling times are indicated on the graphs (color online)

На рис. 4 приведены примеры зависимостей отношения средних периодов колебаний $\theta = T_2/T_1$ и погрешности синхронизации δ от времени усреднения t_δ для двух реализаций шума при фиксированных параметрах $k = 0.35$ и $\mu = 0.01$. Можно видеть, что в данном случае установление средних значений даже при низкочастотном шуме связи происходит быстрее, чем в идентичных слоях. При t_δ усредненные характеристики θ и δ можно считать практически установившимися, причем их стационарные значения в пределах точности расчетов не зависят от реализации шума.

Зависимости отношения средних периодов колебаний в двух слоях $\theta = T_2/T_1$ и погрешности синхронизации δ от интенсивности шума связи k , полученные для трех значений параметра μ , приведены на рис. 5. Можно видеть, что при определенном (пороговом) значении интенсивности случайной связи k отношение средних периодов становится близким к единице (рис. 5, a).

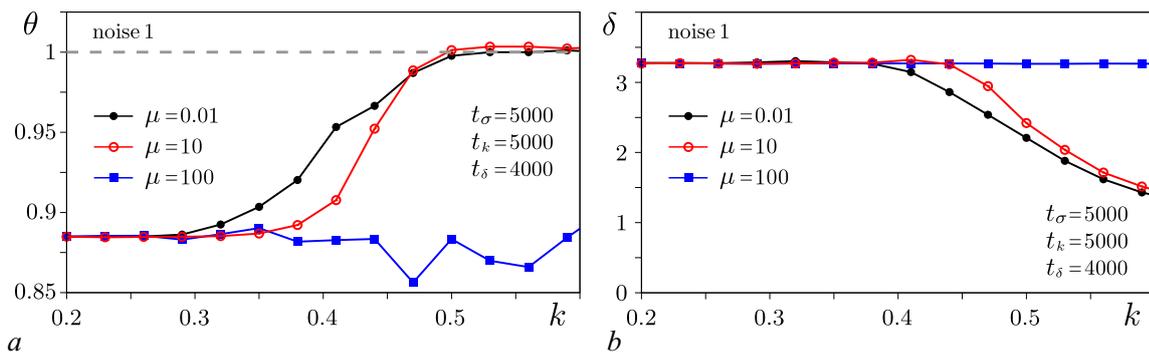


Рис. 5. Характеристики синхронизации в двух неидентичных слоях $\sigma_1 = 4.5$, $\sigma_2 = 5.5$ при различных значениях параметра шума $\mu = 0.01, 10, 100$: a – зависимости отношения средних периодов колебаний $\theta = T_2/T_1$ и b – погрешности синхронизации δ от коэффициента межслойной связи k . При расчетах использовалась одна реализация шума (noise 1). Времена установления и усреднения указаны на рисунке (цвет онлайн)

Fig. 5. Synchronization characteristics in two non-identical rings $\sigma_1 = 4.5$, $\sigma_2 = 5.5$ at different values of noise parameter $\mu = 0.01, 10, 100$: a – dependencies of the ratio of average oscillation periods T_2/T_1 and b – synchronization errors δ on the interlayer coupling coefficient k . In the calculations, one realization of noise (noise 1) was used. The settling and averaging times are shown in the figure (color online)

В целом, расчеты показывают, что синхронизация скоростей волн, средних периодов/средних частот колебаний наблюдается в достаточно широком диапазоне значений μ . Можно отметить, что пороги синхронизации при $\mu = 0.01$ и $\mu = 10$ практически совпадают. Однако, если шум становится очень широкополосным ($\mu = 100$), то синхронизация не наблюдается. Исчезновение эффекта синхронизации частот в случае широкополосного шума (так же как исчезновение синхронизации фаз волн в идентичных слоях) объясняется уменьшением спектральной плотности шума при расширении частотного диапазона и фиксированном значении дисперсии. Зависимости погрешности синхронизации δ от интенсивности шума связи k показывают, что в случае частотной синхронизации величина δ заметно уменьшается, но остается далекой от нуля (рис. 5, b). Таким образом, в исследованном диапазоне значений параметра $k \leq 0.5$ в области синхронизации частот синфазная или близкая к ней синхронизация не наблюдается. Однако, возможно, она имеет место (хотя бы частично) при большей интенсивности случайной связи. На рис. 6, a приведены мгновенные профили волн и колебания осцилляторов с одинаковым номером $j = 0$ в двух слоях в установившемся режиме при отсутствии взаимодействия. Несинхронность колебаний осцилляторов в двух слоях хорошо заметна на реализациях переменных $x_{0,1}(t)$ и $x_{0,2}(t)$ (правый столбец). При введении шумовой связи между слоями наблюдается синхронизация волновых скоростей и частот колебаний (рис. 6, b). При этом следует отметить, что колебания перестают быть строго периодическими и мгновенные интерспайковые интервалы в двух кольцах не вполне совпадают, что можно видеть на реализациях, приведенных справа. Синхронизация волновых скоростей, частот и интерспайковых интервалов колебаний наблюдается только в среднем и не зависит от выбора времени установления источников шума или инициализирующих переменных, задающих реализации шума.

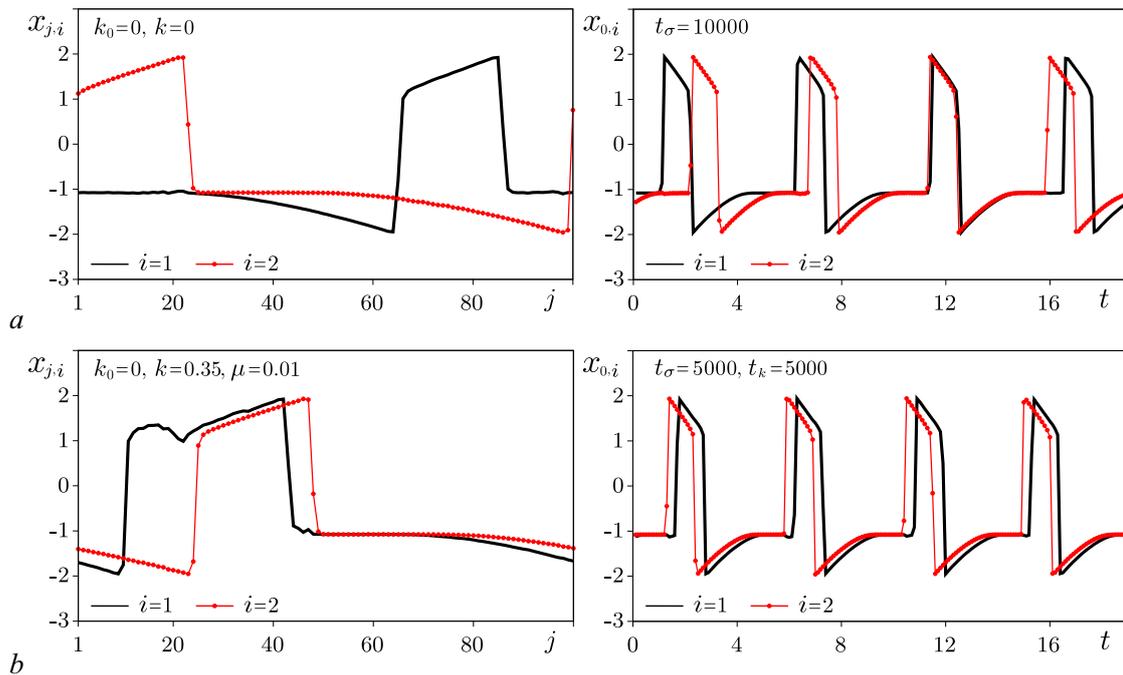


Рис. 6. Мгновенные профили бегущих волн (левый столбец) и колебания осцилляторов $x_{0,i}$ (правый столбец) в двух неидентичных кольцах $\sigma_1 = 4.5$, $\sigma_2 = 5.5$: a — при отсутствии межслойной связи $k = 0$; b — при случайной связи $k = 0.35$, $\mu = 0.01$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Snapshots of traveling waves (left column) and oscillations $x_{0,i}$ (right column) in two non-identical rings $\sigma_1 = 4.5$, $\sigma_2 = 5.5$: a — in the absence of interlayer coupling $k = 0$; b — in case of noisy coupling $k = 0.35$, $\mu = 0.01$ (color online)

Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о наличии эффектов частотной и фазовой (полной и частичной) синхронизации слоев в сети возбудимых осцилляторов ФитцХью–Нагумо в режиме бегущих волн при случайном характере интенсивностей межслойных взаимодействий осцилляторов, задаваемых независимыми источниками цветного гауссова шума. Важно отметить, что среднее значение шума связи для каждой пары взаимодействующих осцилляторов в установившемся режиме было выбрано равным нулю, то есть постоянная компонента связи отсутствовала. Тем не менее эффекты синхронизации слоев наблюдались как в случае идентичных слоев, так и при наличии различия в параметрах слоев. Кроме того, было показано, что при фиксированной интегральной мощности источников шума изменение спектрально-корреляционных свойств шума значительно влияет на эффекты синхронизации, которая перестает наблюдаться с увеличением ширины спектра шума. Такой эффект объясняется уменьшением спектральной плотности шума с расширением спектра. По-видимому, в случае модуляции межслойной связи белым шумом с определенной спектральной плотностью (интенсивностью) синхронизация также будет наблюдаться.

Был исследован процесс установления режима синхронизации в идентичных и неидентичных слоях. Показано, что этот процесс может быть очень длительным и иметь характер случайной перемежаемости, что особенно заметно в случае узкополосного низкочастотного шума связи. Постоянная разность фаз бегущих волн даже в идентичных слоях при этом не устанавливается, а стационарное значение средней ошибки синхронизации не достигается даже при очень больших временах усреднения. Такое поведение системы препятствует определению порога синхронизации, который оказывается зависящим от времен установления и усреднения, а также от выбора реализации шума. Однако эти эффекты уменьшаются с ростом ширины спектра шума и слабо проявляются в случае неидентичности взаимодействующих слоев.

Список литературы

1. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984. 322 p. DOI: 10.1007/3-540-36852-3.
2. *Graham R.* Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // In: Garrido L. (eds) Fluctuations and Stochastic Phenomena in Condensed Matter. Lecture Notes in Physics, vol. 268. Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. P. 1–34. DOI: 10.1007/3-540-17206-8_1.
3. *Schimansky-Geier L., Herzog H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // Journal of Statistical Physics. 1993. Vol. 70, no. 1–2. P. 141–147. DOI: 10.1007/BF01053959.
4. *Arnold L.* Random dynamical systems // In: Johnson R. (eds) Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1609. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995. P. 1–43. DOI: 10.1007/BFb0095238.
5. *Moss F.* Stochastic resonance: From the ice ages to the monkey's ear // In: Weiss G. H. (eds) Contemporary Problems in Statistical Physics. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1994. P. 205–253. DOI: 10.1137/1.9781611971552.ch5.
6. *Kabashima S., Kawakubo T.* Observation of a noise-induced phase transition in a parametric oscillator // Phys. Lett. A. 1979. Vol. 70, no. 5–6. P. 375–376. DOI: 10.1016/0375-9601(79)90335-9.
7. *Pikovsky A. S., Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, no. 5. P. 775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
8. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 7–38. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199901c.0007.
9. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. Vol. 39, no. 1. P. 72–82. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.01.128.

10. *García-Ojalvo J., Sancho J. M.* Noise in Spatially Extended Systems. New York: Springer, 1999. 307 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1536-3.
11. *Hou Z., Yang L., Xiaobin Z., Xin H.* Noise induced pattern transition and spatiotemporal stochastic resonance // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, no. 14. P. 2854–2857. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.2854.
12. *Zimmermann M. G., Toral R., Piro O., San Miguel M.* Stochastic spatiotemporal intermittency and noise-induced transition to an absorbing phase // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, no. 17. P. 3612–3615. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3612.
13. *Perc M.* Noise-induced spatial periodicity in excitable chemical media // *Chemical Physics Letters.* 2005. Vol. 410, no. 1–3. P. 49–53. DOI: 10.1016/j.cplett.2005.05.042.
14. *Cao F. J., Wood K., Lindenberg K.* Noise-induced phase transitions in field-dependent relaxational dynamics: The Gaussian ansatz // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, no. 5. P. 051111. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.051111.
15. *Слепнев А. В., Шепелев И. А., Вадивасова Т. Е.* Эффекты шумового воздействия на активную среду с периодическими граничными условиями // *Письма в ЖТФ.* 2014. Т. 40, № 2. С. 30–36.
16. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961. 560 с.
17. *Neiman A. B., Russell D. F.* Synchronization of noise-induced bursts in noncoupled sensory neurons // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88, no. 13. P. 138103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.138103.
18. *Ritt J.* Evaluation of entrainment of a nonlinear neural oscillator to white noise // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68, no. 4. P. 041915. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.041915.
19. *Goldobin D. S., Pikovsky A.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, no. 4. P. 045201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.045201.
20. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 354, no. 5–6. P. 423–427. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.01.079.
21. *Nagai K. H., Kori H.* Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled nonidentical oscillators // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81, no. 6. P. 065202. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.065202.
22. *Dolmatova A. V., Goldobin D. S., Pikovsky A.* Synchronization of coupled active rotators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062204. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062204.
23. *Neiman A.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, no. 4. P. 3484–3487. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.3484.
24. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, no. 23. P. 4157–4160. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.4157.
25. *Lindner J. F., Meadows B. K., Ditto W. L., Inghiosa M. E., Bulsara A. R.* Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, no. 1. P. 3–6. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.3.
26. *Anishchenko V. S., Neiman A. B.* Stochastic synchronization // In: Schimansky-Geier L., Pöschel T. (eds) *Stochastic Dynamics. Lecture Notes in Physics*, vol. 484. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. P. 154–166. DOI: 10.1007/BFb0105607.
27. *Han S. K., Yim T. G., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, no. 9. P. 1771–1774. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1771.
28. *Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F.* Noise-enhanced phase synchronization in excitable media // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, no. 23. P. 4896–4899. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4896.
29. *Challenger J. D., McKane A. J.* Synchronization of stochastic oscillators in biochemical systems // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 1. P. 012107. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012107.

30. *Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E.* Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117, no. 1. P. 014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102.
31. *Vadivasova T. E., Slepnev A. V., Zakharova A.* Control of inter-layer synchronization by multiplexing noise // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2020. Vol. 30, no. 9. P. 091101. DOI: 10.1063/5.0023071.
32. *Rybalova E. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Zakharova A.* Multiplexing noise induces synchronization in multilayer networks // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2022. Vol. 163. P. 112521. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112521.
33. *Nikishina N. N., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E.* Destruction of cluster structures in an ensemble of chaotic maps with noise-modulated nonlocal coupling // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2022. Vol. 27, no. 2. P. 242–251. DOI: 10.1134/S1560354722020083.
34. *Doiron B., Rinzel J., Reyes A.* Stochastic synchronization in finite size spiking networks // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74, no. 3. P. 030903. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.030903.
35. *Patel A., Kosko B.* Stochastic resonance in continuous and spiking neuron models with levy noise // *IEEE Transactions on Neural Networks.* 2008. Vol. 19, no. 12. P. 1993–2008. DOI: 10.1109/TNN.2008.2005610.
36. *Ozer M., Perc M., Uzuntarla M.* Stochastic resonance on Newman–Watts networks of Hodgkin–Huxley neurons with local periodic driving // *Phys. Lett. A.* 2009. Vol. 373, no. 10. P. 964–968. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.01.034.
37. *He Z.-Y., Zhou Y.-R.* Vibrational and stochastic resonance in the FitzHugh–Nagumo neural model with multiplicative and additive noise // *Chinese Physics Letters.* 2011. Vol. 28, no. 11. P. 110505. DOI: 10.1088/0256-307X/28/11/110505.
38. *Bressloff P. C., Lai Y. M.* Stochastic synchronization of neuronal populations with intrinsic and extrinsic noise // *The Journal of Mathematical Neuroscience.* 2011. Vol. 1, no. 1. P. 2. DOI: 10.1186/2190-8567-1-2.
39. *Kilpatrick Z. P.* Stochastic synchronization of neural activity waves // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, no. 4. P. 040701. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.040701.
40. *Sharma S. K., Malik M. Z., Brojen Singh R. K.* Stochastic synchronization of neurons: the topological impacts // *Bioinformatics.* 2018. Vol. 14, no. 9. P. 504–510. DOI: 10.6026/97320630014504.
41. *Yilmaz E., Ozer M., Baysal V., Perc M.* Autapse-induced multiple coherence resonance in single neurons and neuronal networks // *Scientific Reports.* 2016. Vol. 6, no. 1. P. 30914. DOI: 10.1038/srep30914.
42. *Yamakou M. E., Jost J.* Control of coherence resonance by self-induced stochastic resonance in a multiplex neural network // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 100, no. 2. P. 022313. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022313.
43. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal.* 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
44. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the IRE.* 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.

References

1. Horsthemke W, Lefever R. *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology.* Berlin, Heidelberg: Springer; 1984. 322 p. DOI: 10.1007/3-540-36852-3.
2. Graham R. *Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems.* In: Garrido L, editor. *Fluctuations and Stochastic Phenomena in Condensed Matter. Lecture Notes in Physics,* vol. 268. Berlin, Heidelberg: Springer; 1987. P. 1–34. DOI: 10.1007/3-540-17206-8_1.

3. Schimansky-Geier L, Herzel H. Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator. *Journal of Statistical Physics*. 1993;70(1–2):141–147. DOI: 10.1007/BF01053959.
4. Arnold L. Random dynamical systems. In: Johnson R, editor. *Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1609. Berlin, Heidelberg: Springer; 1995. P. 1–43. DOI: 10.1007/BFb0095238.
5. Moss F. Stochastic resonance: From the ice ages to the monkey’s ear. In: Weiss GH, editor. *Contemporary Problems in Statistical Physics*. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM; 1994. P. 205–253. DOI: 10.1137/1.9781611971552.ch5.
6. Kabashima S, Kawakubo T. Observation of a noise-induced phase transition in a parametric oscillator. *Phys. Lett. A*. 1979;70(5–6):375–376. DOI: 10.1016/0375-9601(79)90335-9.
7. Pikovsky AS, Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett*. 1997;78(5):775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
8. Anishchenko VS, Neiman AB, Moss F, Shimansky-Geier L. Stochastic resonance: noise-enhanced order. *Phys. Usp*. 1999;42(1):7–36. DOI: 10.1070/PU1999v042n01ABEH000444.
9. Bashkirtseva I, Ryashko L, Schurz H. Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009;39(1):72–82. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.01.128.
10. García-Ojalvo J, Sancho JM. *Noise in Spatially Extended Systems*. New York: Springer; 1999. 307 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1536-3.
11. Hou Z, Yang L, Xiaobin Z, Xin H. Noise induced pattern transition and spatiotemporal stochastic resonance. *Phys. Rev. Lett*. 1998;81(14):2854–2857. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.2854.
12. Zimmermann MG, Toral R, Piro O, San Miguel M. Stochastic spatiotemporal intermittency and noise-induced transition to an absorbing phase. *Phys. Rev. Lett*. 2000;85(17):3612–3615. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3612.
13. Perc M. Noise-induced spatial periodicity in excitable chemical media. *Chemical Physics Letters*. 2005;410(1–3):49–53. DOI: 10.1016/j.cplett.2005.05.042.
14. Cao FJ, Wood K, Lindenberg K. Noise-induced phase transitions in field-dependent relaxational dynamics: The Gaussian ansatz. *Phys. Rev. E*. 2007;76(5):051111. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.051111.
15. Slepnev AV, Shepelev IA, Vadivasova TE. Noise-induced effects in an active medium with periodic boundary conditions. *Tech. Phys. Lett*. 2014;40(1):62–64. DOI: 10.1134/S1063785014010271.
16. Stratonovich RL. *Selected Questions of the Theory of Fluctuations in Radio Engineering*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1961. 560 p. (in Russian).
17. Neiman AB, Russell DF. Synchronization of noise-induced bursts in noncoupled sensory neurons. *Phys. Rev. Lett*. 2002;88(13):138103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.138103.
18. Ritt J. Evaluation of entrainment of a nonlinear neural oscillator to white noise. *Phys. Rev. E*. 2003;68(4):041915. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.041915.
19. Goldobin DS, Pikovsky A. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise. *Phys. Rev. E*. 2005;71(4):045201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.045201.
20. Hramov AE, Koronovskii AA, Moskalenko OI. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? *Phys. Lett. A*. 2006;354(5–6):423–427. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.01.079.
21. Nagai KH, Kori H. Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled nonidentical oscillators. *Phys. Rev. E*. 2010;81(6):065202. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.065202.
22. Dolmatova AV, Goldobin DS, Pikovsky A. Synchronization of coupled active rotators by common noise. *Phys. Rev. E*. 2017;96(6):062204. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062204.
23. Neiman A. Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems. *Phys. Rev. E*. 1994;49(4):3484–3487. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.3484.
24. Shulgin B, Neiman A, Anishchenko V. Mean switching frequency locking in stochastic bistable

- systems driven by a periodic force. *Phys. Rev. Lett.* 1995;75(23):4157–4160. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.4157.
25. Lindner JF, Meadows BK, Ditto WL, Inghiosa ME, Bulsara AR. Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 1995;75(1):3–6. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.3.
 26. Anishchenko VS, Neiman AB. Stochastic synchronization. In: Schimansky-Geier L, Pöschel T, editors. *Stochastic Dynamics. Lecture Notes in Physics*, vol. 484. Berlin, Heidelberg: Springer; 1997. P. 154–166. DOI: 10.1007/BFb0105607.
 27. Han SK, Yim TG, Postnov DE, Sosnovtseva OV. Interacting coherence resonance oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1999;83(9):1771–1774. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1771.
 28. Neiman A, Schimansky-Geier L, Cornell-Bell A, Moss F. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media. *Phys. Rev. Lett.* 1999;83(23):4896–4899. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4896.
 29. Challenger JD, McKane AJ. Synchronization of stochastic oscillators in biochemical systems. *Phys. Rev. E.* 2013;88(1):012107. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012107.
 30. Semenova N, Zakharova A, Anishchenko V, Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Phys. Rev. Lett.* 2016;117(1):014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102.
 31. Vadivasova TE, Slepnev AV, Zakharova A. Control of inter-layer synchronization by multiplexing noise. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2020;30(9):091101. DOI: 10.1063/5.0023071.
 32. Rybalova EV, Vadivasova TE, Strelkova GI, Zakharova A. Multiplexing noise induces synchronization in multilayer networks. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2022;163:112521. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112521.
 33. Nikishina NN, Rybalova EV, Strelkova GI, Vadivasova TE. Destruction of cluster structures in an ensemble of chaotic maps with noise-modulated nonlocal coupling. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2022;27(2):242–251. DOI: 10.1134/S1560354722020083.
 34. Doiron B, Rinzel J, Reyes A. Stochastic synchronization in finite size spiking networks. *Phys. Rev. E.* 2006;74(3):030903. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.030903.
 35. Patel A, Kosko B. Stochastic resonance in continuous and spiking neuron models with levy noise. *IEEE Transactions on Neural Networks.* 2008;19(12):1993–2008. DOI: 10.1109/TNN.2008.2005610.
 36. Ozer M, Perc M, Uzuntarla M. Stochastic resonance on Newman–Watts networks of Hodgkin–Huxley neurons with local periodic driving. *Phys. Lett. A.* 2009;373(10):964–968. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.01.034.
 37. He ZY, Zhou YR. Vibrational and stochastic resonance in the FitzHugh–Nagumo neural model with multiplicative and additive noise. *Chinese Physics Letters.* 2011;28(11):110505. DOI: 10.1088/0256-307X/28/11/110505.
 38. Bressloff PC, Lai YM. Stochastic synchronization of neuronal populations with intrinsic and extrinsic noise. *The Journal of Mathematical Neuroscience.* 2011;1(1):2. DOI: 10.1186/2190-8567-1-2.
 39. Kilpatrick ZP. Stochastic synchronization of neural activity waves. *Phys. Rev. E.* 2015;91(4):040701. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.040701.
 40. Sharma SK, Malik MZ, Brojen Singh RK. Stochastic synchronization of neurons: the topological impacts. *Bioinformatics.* 2018;14(9):504–510. DOI: 10.6026/97320630014504.
 41. Yilmaz E, Ozer M, Baysal V, Perc M. Autapse-induced multiple coherence resonance in single neurons and neuronal networks. *Scientific Reports.* 2016;6(1):30914. DOI: 10.1038/srep30914.
 42. Yamakou ME, Jost J. Control of coherence resonance by self-induced stochastic resonance in a multiplex neural network. *Phys. Rev. E.* 2019;100(2):022313. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022313.
 43. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal.* 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
 44. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE.* 1962;50(10):2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.



Рамазанов Ибадулла Рамзесович — родился в 1996 году. Окончил с отличием магистратуру Института физики Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика». Аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики. С 2020 года работает инженером на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета. Научные интересы: ансамбли связанных осцилляторов, параметрические системы, синхронизация, теория устойчивости.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ibadulla.ramazanov@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-6521-7313
AuthorID (eLibrary.Ru): 1143282
ScopusID: 57783407500



Корнеев Иван Александрович — родился в селе Еруслан Саратовской области (1992), окончил Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2017). Имеет диплом бакалавра по направлению «Радиофизика» и диплом магистра по направлению «Радиофизика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2021). Ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики и заведующий учебной лабораторией радиофизики. Область научных интересов: математическое моделирование, численный и физический эксперимент, синхронизация, мемристивные системы.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ivankorneew@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-1716-5170
AuthorID (eLibrary.Ru): 1131734
ScopusID: 56736395900



Слепнев Андрей Вячеславович — родился в Саратове (1987), окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (2009). Получил степень магистра физики по направлению «Физика» (СГУ, 2011). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2014). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, заместитель руководителя по организационной работе Научного медицинского центра, заведующий научной лабораторией «Умного сна», ответственный за научную работу в Институте физики. Научные интересы: динамика распределенных систем, формирование пространственных структур, влияние регулярного и случайного воздействия на динамику нелинейных систем, нейронные сети.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: a.v.slepnev@gmail.com
ORCID: 0000-0003-0273-6479
AuthorID (eLibrary.Ru): 620884
ScopusID: 56034673600



Вадивасова Татьяна Евгеньевна — родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981). Доктор физико-математических наук. В настоящее время — профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: vadivasovate@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-8081-2820
AuthorID (eLibrary.Ru): 34840
ScopusID: 6701738949