Бифуркации в динамических системах. Детерминированный хаос. Квантовый хаос

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья
УДК 517.958

DOI: 10.18500/0869-6632-003142
EDN: XYHFND

Метод траекторных аттракторов для диссипативных уравнений в частных производных с малым параметром

В. В. Чепыжов[1,2]

[1]Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: ✉chep@iitp.ru

Поступила в редакцию 15.08.2024, принята к публикации 29.10.2024, опубликована онлайн 20.11.2024, опубликована 29.11.2024

Аннотация. *Цель* настоящего исследования — изучение предельного поведения траекторных аттракторов диссипативных уравнений и систем математической физики, зависящих от малого параметра, когда малый параметр стремится к нулю. Основное внимание уделено случаям, когда для предельного уравнения не выполнена или не доказана теорема единственности решения соответствующей начально-краевой задачи. Рассматриваются следующие задачи: аппроксимация 3D-системы Навье–Стокса с помощью α-модели Лерэ, усреднение комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау в области с густой перфорацией, а также предел нулевой вязкости 2D-системы Навье–Стокса с экмановским трением. *Методы.* В данной работе используется метод траекторных динамических систем и траекторных аттракторов, который особенно эффективен при изучении сложных уравнений с частными производными, для которых не имеет место или не доказана теорема единственности решения соответствующей начально-краевой задачи. *Результаты.* Для всех рассмотренных задач получены предельные уравнения и доказана сходимость по Хаусдорфу траекторных аттракторов исходных уравнений к траекторным аттракторам предельных уравнений в подходящей топологии, когда малый параметр стремится к нулю. *Заключение.* В работе показано, что метод траекторных аттракторов весьма эффективен при исследовании диссипативных уравнений математической физики с малым параметром. Удается найти предельные уравнения и доказать сходимость траекторных аттракторов изучаемых уравнений к траекторным аттракторам предельных уравнений в соответствующей топологии, когда малый параметр стремится к нулю.

Ключевые слова: глобальные аттракторы, траекторные аттракторы, малый параметр, сходимость аттракторов.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 23-71-30008).

Для цитирования: *Чепыжов В. В.* Метод траекторных аттракторов для диссипативных уравнений в частных производных с малым параметром // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 858–877. DOI: 10.18500/0869-6632-003142. EDN: XYHFND

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003142

Trajectory attractors method for dissipative partial differential equations with small parameter

V. V. Chepyzhov[1,2]

[1]Institute for Information Transmission Problems RAS, Moscow, Russia
[2]National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ✉chep@iitp.ru

Received 15.08.2024, accepted 29.10.2024, available online 20.11.2024, published 29.11.2024

Abstract. The *purpose* of this work is to study the limit behaviour of trajectory attractors for some equations and systems from mathematical physics depending on a small parameter when this small parameter approaches zero. The main attention is given to the cases when, for the limit equation, the uniqueness theorem for a solution of the corresponding initial-value problem does not hold or is not proved. The following problems are considered: approximation of the 3D Navier–Stokes system using the Leray α-model, homogenization of the complex Ginzburg–Landau equation in a domain with dense perforation, and zero viscosity limit of 2D Navier–Stokes system with Ekman friction. *Methods.* In this paper, the method of trajectory dynamical systems and trajectory attractors is used that is especially effective in the study of complicated partial differential equations for which the uniqueness theorem for a solution of the corresponding initial-value problem does not hold or is not proved. *Results.* For all problems under the consideration, we obtain the limit equations and prove the Hausdorff convergence for trajectory attractors of the initial equations to the trajectory attractors of the limit equations in the appropriate topology when the small parameter tends to zero. *Conclusion.* In the work, we demonstrate that the method of trajectory attractors is highly effective in the study of dissipative equations of mathematical physics with small parameter. We succeed to find the limit equations and to prove the convergence of trajectory attractors of the considered equations to the trajectory attractors of the limit (homogenized) equations in the corresponding topology as small parameter is vanishes.

Keywords: global attractors, trajectory attractors, small parameter, convergence of attractors.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 23-71-30008).

For citation: Chepyzhov VV. Trajectory attractors method for dissipative partial differential equations with small parameter. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):858–877. DOI: 10.18500/0869-6632-003142

Введение

Многие важные задачи математической физики связаны с изучением решений эволюционных уравнений с частными производными на больших интервалах времени и в пределе, когда время стремится к бесконечности. В последние десятилетия большой прогресс в этой области достигнут применением теории аттракторов бесконечномерных динамических систем. Для многих важных диссипативных уравнений было показано, что долговременное поведение их решений можно описывать с помощью конечномерных глобальных аттракторов (см., монографии [1, 2] и цитируемую в них обширную литературу). Этот подход, ставший классическим, применяется к начально-краевым задачам, обладающим свойством существования и единственности решения в подходящем фазовом пространстве начальных условий задачи. Вместе с тем существует значительный класс сложных задач, для которых можно строить решения, определенные на всей полуоси времени, но теорема единственности или не доказана, или не имеет места. Примером такой задачи является неоднородная 3D-система Навье–Стокса, для которой сформулирована нерешенная «проблема миллениума». Эта система и другие уравнения подобного типа будут рассмотрены в данной статье. Для таких задач также разработаны эффективные методы, позволяющие изучать соответствующие траекторные динамические системы и строить для них траекторные аттракторы. Фазовым пространством для таких уравнений служит все пространство траекторий, то есть функций, зависящих от времени (см. [3, 4]).

Метод траекторных аттракторов является весьма общим, он работает для уравнений и систем, для которых удается построить пространство траекторий (решений) хоть в каком-то слабом смысле. Другая полезная особенность этой теории состоит в том, что позволяет исследовать задачи с малым параметром, который может входить в уравнения весьма сложно и даже сингулярно (например, стоять при старших производных или быть периодом частых пор среды). Проблема, таким образом, состоит в изучении предельного поведения траекторных аттракторов исходных уравнений, когда малый параметр стремится к нулю. При этом мерой близости аттракторов, которые являются подмножествами функциональных банаховых пространств, является полурасстояние по Хаусдорфу в подходящей метрике.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 кратко излагается классическая теория динамических систем и их глобальных аттракторов. Раздел 2 посвящен траекторным динамическим системам и траекторным аттракторам. В разделе 3 строится траекторный аттрактор 3D-системы Навье–Стокса на трехмерном торе. В разделе 4 вводится так называемая α-модель Лерэ, которая сглаживает и аппроксимирует 3D-систему Навье–Стокса, а число α является малым параметром, который отвечает за длину шага подсеточной решетки. Известно, что подобные α-модели хорошо аппроксимируют турбулентные течения в каналах и трубах. Формулируется теорема о сходимости траекторных аттракторов α-модели Лерэ к траекторному аттрактору точной 3D-системы Навье –Стокса при $\alpha \to 0$ в соответствующей метрике. Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау в перфорированной области с малым шагом перфорации ε изучается в разделе 5. При этом на границах областей перфорации ставится 3-е граничное условие, имеющее физический смысл, которое также зависит от ε. В разделе 6 решается задача усреднения уравнения Гинзбурга–Ландау в области с перфорацией, выписывается усредненное уравнение в области без перфорации и приводится теорема о сходимости траекторных аттракторов уравнения с перфорацией к траекторному аттрактору без перфорации при $\varepsilon \to 0$. Разделы 7 и 8 посвящены исследованию предела нулевой вязкости аттракторов 2D-уравнений Навье–Стокса с экмановским трением на двумерном торе. Доказывается, что в пределе получаются аттракторы 2D-уравнений Эйлера с тем же экмановским трением. Этот результат справедлив как для глобальных аттракторов, так и для траекторных аттракторов этих уравнений.

1. Динамические системы и их глобальные аттракторы

Динамической системой называется пара

$$(\mathcal{E}, \{\mathcal{S}(t)\}),$$

где $\mathcal{E}$ — *фазовое пространство* и $\{\mathcal{S}(t), t \geqslant 0\}$ — семейство отображений

$$\mathcal{S}(t) : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

которое образует *полугруппу*, то есть

$$\mathcal{S}(0) = \mathrm{Id}, \; \mathcal{S}(t_1) \circ \mathcal{S}(t_2) = \mathcal{S}(t_1 + t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geqslant 0.$$

Здесь Id обозначает тождественное отображение. Обычно $\mathcal{E}$ — это полное метрическое или банахово пространство. Параметр t называется временем.

Динамические системы естественным образом возникают при изучении *автономных эволюционных уравнений* вида

$$\partial_t u(t) = -F(u), \tag{2}$$

где $F(u)$ — некоторый нелинейный дифференциальный оператор. Уравнение (2) необходимо дополнить *начальным условием*

$$u|_{t=0} = u_0 \in E, \tag{3}$$

где E — некоторое банахово пространство. Предположим, что при любом $u_0 \in E$ задача Коши (2), (3) имеет единственное решение $u(t), t \geqslant 0$, такое, что $u(t) \in E$ при всех $t \geqslant 0$.

Рассмотрим отображения в пространстве E, $S(t) : E \to E,\ t \geqslant 0$, которые определяются по формуле

$$S(t)u_0 := u(t),\ \forall u_0 \in E,\ t \geqslant 0, \tag{4}$$

где $u(t)$ — это решение (2), (3) с начальным условием u_0. Тогда пара $(E, \{S(t)\})$ образует динамическую систему.

Мы будем рассматривать *диссипативные* динамические системы.

Определение 1. *1) Множество $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$ называется* поглощающим *для динамической системы $(\mathcal{E}, \{\mathcal{S}(t)\})$, если для любого множества $B \subseteq \mathcal{E}$, ограниченного в метрике $\mathcal{E}$, найдется число $t_1 = t_1(B)$ такое, что $\mathcal{S}(t) \subseteq \mathcal{P}$ при всех $t \geqslant t_1$.*
2) Множество $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$ называется притягивающим *для динамической системы $(\mathcal{E}, \{\mathcal{S}(t)\})$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ является поглощающим для этой динамической системы.*

Определение 2. *Динамическая система $(\mathcal{E}, \{\mathcal{S}(t)\})$ называется* диссипативной*, если она имеет ограниченное в $\mathcal{E}$ поглощающее множество.*

Замечание 1. *В классе ограниченных множеств существование притягивающего множества эквивалентно существованию поглощающего множества. Отличие этих понятий проявляется в классе компактных множеств, что существенно, когда фазовое пространство $\mathcal{E}$ является бесконечномерным. Существуют диссипативные динамические системы, которые имеют компактное притягивающее множество, но у них нет компактного поглощающего множества.*

В приложениях ограниченное поглощающее множество часто строится в виде шара в $\mathcal{E}$ достаточно большого радиуса:

$$\mathcal{P} = B_\rho := \{\|u\|_{\mathcal{E}} \leqslant \rho\}.$$

Определение 3. *Множество $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ называется* глобальным аттрактором *динамической системы $(\mathcal{E}, \{\mathcal{S}(t)\})$, если:*

i) $\mathcal{A}$ компактно *в топологии $\mathcal{E}$;*
ii) $\mathcal{A}$ *является* притягивающим *множеством этой динамической системы;*
iii) $\mathcal{A}$ строго инвариантно *относительно* $\{\mathcal{S}(t)\} :\ \mathcal{S}(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, *при всех* $t \geqslant 0$.

Сформулируем основную теорему о существовании глобального аттрактора диссипативной динамической системы (см. [1,2]).

Теорема 1. *Пусть динамическая система $(\mathcal{E}, \{\mathcal{S}(t)\})$ имеет* компактно поглощающее (или компактное притягивающее) *множество $\mathcal{P}$, а полугруппа $\{\mathcal{S}(t)\}$ является непрерывной в топологии $\mathcal{E}$, тогда существует глобальный аттрактор $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.*

Замечание 2. *В этой теореме условие непрерывности полугруппы можно ослабить, заменив его на условие замкнутости (см., например, [5]).*

Глобальные аттракторы были построены для большого числа диссипативных динамических систем, порождаемых эволюционными уравнениями в частных производных. При этом использовалось важное ключевое свойство таких задач — однозначная разрешимость задачи Коши (2), (3) в подходящем фазовом пространстве начальных условий (см. [1–3]).

2. Траекторные динамические системы и траекторные аттракторы

Существует значительное семейство *«некорректных»* уравнений и систем математической физики, для которых теоремы единственности соответствующей задачи Коши не доказаны или не имеют места. Самый знаменитый пример — это неоднородная 3D-система Навье–Стокса в ограниченной области с условиями прилипания на границе. Другие примеры: комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с произвольными коэффициентами дисперсии, общие системы реакции–диффузии, диссипативные 2D-уравнения Эйлера, эллиптические системы в цилиндрических областях и многие другие.

Для подобных задач также разработаны эффективные методы, позволяющие строить аттракторы. Один из таких методов, основанный на изучении траекторных динамических систем и траекторных аттракторов, был предложен в работах М. И. Вишика и В. В. Чепыжова [3,6–8], а также независимо в работах G. Sell [4].

Пусть имеется некоторое семейство $\{u(s), s \geqslant 0\}$ глобальных решений (траекторий) уравнения (2), которое мы будем обозначать $\mathcal{K}^+$ и называть *пространством траекторий*. Здесь переменная времени t, которая участвует в эволюционном уравнении (2), заменена на переменную s.

Предполагается, что множество $\mathcal{K}^+$ лежит в некотором линейном функциональном пространстве

$$\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc} = \{f(s), s \geqslant 0\}.$$

Более того, при каждом $M > 0$

$$f(s) \in \mathcal{F}(0, M), \quad \forall f \in \mathcal{F}_+^{loc},$$

где $\mathcal{F}(0, M) = \mathcal{F}(0, M; E)$ — некоторое банахово пространство, состоящее из функций, значения которых принадлежат (всюду или почти всюду) банахову пространству E. Примерами таких пространств могут служить пространства $\mathcal{F}(0, M) = C([0, M]; E)$ и $\mathcal{F}(0, M) = L_p(0, M; E)$. Тогда пространства $\mathcal{F}_+^{loc}$ совпадают с $C(\mathbb{R}_+; E)$ и $L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$ соответственно. В приложениях будут также использоваться пересечения или суммы подобных пространств.

Рассмотрим операторы трансляции $T(h), h \geqslant 0$, на пространстве $\mathcal{F}_+^{loc}$:

$$T(h)f(s) = f(h + s), \quad h \geqslant 0.$$

Предположим, что $T(h)$ отображает $\mathcal{F}_+^{loc}$ в себя. Тогда операторы $\{T(h)\}$ образуют *трансляционную полугруппу*:

$$T(0) = \mathrm{Id}, \quad T(h_1) \circ T(h_2) = T(h_1 + h_2), \quad \forall h_1, h_2 \geqslant 0.$$

Предположим, что $\mathcal{K}^+$ является трансляционно инвариантным, то есть если $u(s) \in \mathcal{K}^+$, то при всех $h \geqslant 0$, функция $T(h)u(s) = u(h + s) \in \mathcal{K}^+$.

Это свойство, как правило, выполнено, поскольку уравнение (2) является автономным. Следовательно, полугруппа $\{T(h)\}$ отображает $\mathcal{K}^+$ в себя:

$$T(h)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+, \quad \forall h \geqslant 0.$$

Заменим переменную h на переменную времени t, которая была в определении динамической системы (см. (1)), и рассмотрим действие трансляционной полугруппы $\{T(t)\}$ на пространстве траекторий $\mathcal{K}^+$.

Мы построили новую динамическую систему $(\mathcal{K}^+, \{T(t)\})$, связанную с автономным уравнением (2).

Задача состоит в изучении глобального аттрактора $\mathfrak{A}$ этой *траекторной динамической системы*. Такой аттрактор называется *траекторным аттрактором*.

Для описания притяжения к аттрактору необходимо ввести топологию в фазовом пространстве $\mathcal{K}^+$, а также объяснить, что называть *«ограниченными»* множествами в $\mathcal{K}^+$.

Предположим, что в пространствах $\mathcal{F}(0,M)$ задана некоторая хаусдорфова топология $\Theta(0,M)$ при каждом $M>0$. Например, если $\mathcal{F}(0,M)=C([0,M];E)$, то $\Theta(0,M)$ — это топология равномерной сходимости на отрезке $[0,M]$ по норме E. Если $\mathcal{F}(0,M)=L_p(0,M;E)$, то $\Theta(0,M)$ — это может быть сильная или слабая топология пространства $L_p(0,M;E)$.

Затем в пространстве $\mathcal{F}_+^{loc}$ вводится топология Θ_+^{loc}, которая по определению является топологией локальной сходимости в топологии $\Theta(0,M)$ при *каждом* $M>0$. Такая топология называется *индуктивным пределом* топологий $\Theta(0,M)$ при $M\to+\infty$. Эта топология также является хаусдорфовой топологией.

Легко проверяется, что трансляционная полугруппа $\{T(t)\}$ *непрерывна* в топологии Θ_+^{loc}. Это свойство значительно упрощает построение траекторного аттрактора и изучение его свойств.

Рассмотрим также подпространство $\mathcal{F}_+^b\subset\mathcal{F}_+^{loc}$, состоящее из функций $f(s)$, $s\geqslant 0$, которые имеют конечную норму

$$\|f\|_{\mathcal{F}_+^b}:=\sup_{h\geqslant 0}\|f(\cdot+h)\|_{\mathcal{F}(0,1)}. \tag{5}$$

Эта норма используется для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий $\mathcal{K}^+$. Предполагается, что $\mathcal{K}^+\subset\mathcal{F}_+^b$.

Определение 4. *Множество $\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{K}^+$ есть* траекторный аттрактор*, если:*

i) *$\mathfrak{A}$ ограничено по норме $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и компактно в Θ_+^{loc};*

ii) *$\mathfrak{A}$ является притягивающим множеством в топологии Θ_+^{loc}, то есть для любого множества $\mathfrak{B}\subset\mathcal{K}^+$, ограниченного в $\mathcal{F}_+^b$, и для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathfrak{A})$ найдется $\tau=\tau(\mathfrak{B},\mathcal{O})$ такое, что $T(t)\mathfrak{B}\subset\mathcal{O}(\mathfrak{A})$ при всех $t\geqslant\tau$;*

iii) *$\mathfrak{A}$ строго инвариантно относительно $\{T(t)\}:T(t)\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$ для любого $t\geqslant 0$.*

Сформулируем основную теорему о траекторных аттракторах (см. [3, 7]).

Теорема 2. *Пусть пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ уравнения (2) имеет притягивающее множество $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{K}^+$, которое* ограничено *в $\mathcal{F}_+^b$ и* компактно *в Θ_+^{loc}. Тогда трансляционная полугруппа $\{T(t)\}$ имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}\subseteq\mathcal{P}$.*

Часто в приложениях таким компактным притягивающим множеством в Θ_+^{loc} служит поглощающее множество $\mathcal{P}=\mathcal{K}^+\cap B_R$, где $B_R=\{u\mid\|u\|_{\mathcal{F}_+^b}\leqslant R\}$ — шар в $\mathcal{F}_+^b$ достаточно большого радиуса. В этом случае, если топология Θ_+^{loc} построена на основе слабой сходимости, то по известной теореме Урысона о метризуемости компактных множеств, шар B_R с топологией Θ_+^{loc} является полным метрическим пространством (см. [3]). Это упрощает построение траекторного аттрактора.

Кроме того, свойство поглощения шаром B_{2R_0} часто следует из неравенств вида

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_+^b}\leqslant C(\|u\|_{\mathcal{F}_+^b})\exp(-\gamma t)+R_0,\ \forall u\in\mathcal{K}^+\qquad(\gamma>0), \tag{6}$$

которые в конкретных приложениях доказываются с использованием априорных оценок изучаемых уравнений.

В следующих разделах изучаются траекторные аттракторы эволюционных уравнений, которые зависят от малого параметра $\varepsilon>0$. Мы будем исследовать сходимость этих аттракторов при $\varepsilon\to 0$ к траекторным аттракторам соответствующих предельных уравнений. Будет использовано следующее понятие сходимости множеств по Хаусдорфу.

Определение 5. *Говорят, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ сходятся к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ при $\varepsilon\to 0$ в топологии Θ_+^{loc}, если для любой окрестронсти $\mathcal{O}(\mathfrak{A}_0)$ множества $\mathfrak{A}_0$ в топологии Θ_+^{loc} найдется число $\varepsilon_1>0$ такое, что $\mathfrak{A}_\varepsilon\subset\mathcal{O}(\mathfrak{A}_0)$ при всех $\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$. Мы будем записывать эту сходимость следующим образом:*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon\to\mathfrak{A}_0\ (\varepsilon\to 0)\ \textit{в топологии}\ \Theta_+^{loc}.$$

3. Траекторный аттрактор 3D-системы Навье–Стокса

Рассматривается 3D-система Навье–Стокса на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$:

$$\begin{aligned} &\partial_t v = -\nu A v - P(v \cdot \nabla)v + g(x),\ \nabla \cdot v = 0, \\ &x \in \mathbb{T}^3 := [\mathbb{R} \bmod 2\pi]^3,\ t \geqslant 0; \end{aligned} \tag{7}$$

где $\nu > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $A = -P\Delta$ — оператор Стокса и P — проектор Лерэ. Здесь $v = (v^1(x,t), v^2(x,t), v^3(x,t))$ — неизвестное векторное поле и $g(x) = (g^1(x), g^2(x), g^3(x))$ — известная внешняя сила. Предполагается, что эти функции имеют нулевое среднее:

$$\int_{\mathbb{T}^3} v(x,t)dx = 0,\ \int_{\mathbb{T}^3} g(x)dx = 0.$$

Пусть $\mathcal{V}$ — пространство тригонометрических полиномов с нулевыми дивергенцией и средним. Через H^s, $s \in \mathbb{R}_+$, обозначается замыкание $\mathcal{V}$ в норме $\|\cdot\|_s$ пространства $H^s(\mathbb{T}^3)^3$. Пусть $H = H^0$, и пространство H^{-s}, $s \geqslant 0$, является сопряженным к H^s. Норма в H обозначается $\|\cdot\|$.

Пусть внешняя сила $g \in H$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{K}^+$ рассмотрим семейство всех слабых решений $\{v(x,t), t \geqslant 0\}$ 3D-системы Навье–Стокса (7) со следующими свойствами:

i) $v(\cdot) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$;
ii) $v(t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 + \nu\|\nabla v(t)\|^2 \leqslant (g, v(t))_H. \tag{8}$$

Такие решения называются *решениями Лерэ–Хопфа* (см. [3,9]).

Заметим, что любое решение $v(t)$, $t \geqslant 0$, задачи Коши для системы НС (7) с начальным условием $v(0) \in H$, которое строится по методу приближений Галеркина, принадлежит $\mathcal{K}^+$. Значит, пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ не пусто и достаточно широко (см. [3,9]).

Замечание 3. *В последние годы появились работы, которые в некоторой степени подтверждают гипотезу о возможной неединственности решений Лерэ–Хопфа 3D-системы Навье–Стокса с одинаковыми начальными данными для некоторых внешних сил. Например, в работе [10] такие решения построены для случая внешних сил специального вида, которые зависят от времени. Это еще раз обосновывает полезность изучения траекторных аттракторов для 3D-системы Навье–Стокса и для других подобных уравнений.*

Из системы НС (7) следует, что $\partial_t v \in L_{4/3}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1})$ при всех $v \in \mathcal{K}^+$ (см. [9]). Введем банахово пространство

$$\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}} = \left\{ v(\cdot) \mid v \in L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H),\ \partial_t v \in L_{4/3}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} = \|v\|_{L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;H^1)} + \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} + \|\partial_t v\|_{L_{4/3}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;H^{-1})}.$$

Напомним, что

$$\|v\|_{L_p^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;E)}^p = \sup_{t \geqslant 0} \int_t^{t+1} \|v(s)\|_E^p ds.$$

Предложение 1. *Пространство $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, и для любой траектории $v(\cdot) \in \mathcal{K}^+$ выполнено следующее неравенство:*

$$\|T(h)v(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant C_0 \|v(\cdot)\|^2_{L_\infty(0,1;H)} \exp\left(-\nu\lambda_1 h\right) + R_0,\ \forall h \geqslant 0, \tag{9}$$

величины C_0, R_0 зависят только от ν, λ_1 и $\|g\|_0$, $\lambda_1 = \lambda_1(A)$ — первое собственное значение оператора Стокса A.

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} = \left\{ v(\cdot) \mid v \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H),\ \partial_t v \in L_{4/3}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}) \right\}.$$

В этом пространстве вводится топология Θ_+^{loc}, порождаемая следующей сходимостью: последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ сходится к $v \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ в Θ_+^{loc}, если $v_n \to v$ в $L_2(0, M; H)$, то есть

$$\int_0^M \|v_n(t) - v(t)\| dt \to 0 \quad \forall M > 0.$$

Заметим, топология Θ_+^{loc} метризуема, $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}} \subset \Theta_+^{\mathrm{loc}}$, и любой шар

$$B_R = \left\{ v \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}} \mid \|v\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant R \right\} \text{ в } \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$$

компактен в пространстве Θ_+^{loc} (см. [3]).

На пространстве траекторий $\mathcal{K}^+$ 3D-системы НС действует трансляционная полугруппа $\{T(h),\ h \geqslant 0\}$, которая отображает $\mathcal{K}^+$ в себя: $T(h)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$ при всех $h \geqslant 0$.

Изучается траекторный аттрактор полугруппы $\{T(h),\ h \geqslant 0\}$ в пространстве $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}. Ограниченные множества берутся по норме пространства $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$.

Из неравенства (9) следует, что шар

$$B_{2R_0} = \left\{ v(\cdot) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}} \mid \|v\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant 2R_0 \right\}$$

в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ является поглощающим множеством полугруппы $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}^+}$ в топологии Θ_+^{loc}. Напомним, что множество B_{2R_0} компактно в этой топологии.

Теорема 3. *3D-система Навье–Стокса (7) имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$, который ограничен в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и компактен в Θ_+^{loc}.*

Доказательство приведено в [3].

4. Траекторный аттрактор α-модели Лерэ и его предел при $\alpha \to 0$

Рассматривается следующая сглаженная 3D-система:

$$\partial_t v = -\nu A v - P(u \cdot \nabla) v + g(x), \quad \nabla \cdot v = 0, \tag{10}$$

$$v = u + \alpha^2 A u, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^3. \tag{11}$$

Неизвестная функция $u = (I + \alpha^2 A)^{-1} v$ является «сглаженной» функцией (для v). При $\alpha = 0$ получается точная 3D-система НС. Система (10), (11) называется α-моделью Лерэ (см. [11–13]). Число $\alpha \geqslant 0$ является малым параметром задачи.

Задача Коши для системы (10), (11) с начальным условием $u(0) \in H^2$ имеет единственное решение (см. [11, 12])

$$u \in L_2(0, M; H^3) \cap L_\infty(0, M; H^2) \;\text{ и }\; \partial_t u \in L_2(0, M; H^1),\ \forall\, M > 0.$$

Для соответствующей функции $v = (I + \alpha^2 A)u$ имеем

$$v \in L_2(0, M; H^1) \cap L_\infty(0, M; H) \;\text{ и }\; \partial_t v \in L_2(0, M; H^{-1}),\ \forall\, M > 0.$$

Энергетическое неравенство (8) становится энергетическим тождеством:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|^2 + \nu\|v(t)\|^2 = \langle g, v(t)\rangle, \quad t \geqslant 0. \tag{12}$$

С помощью энергетического тождества (12) доказывается следующая априорная оценка для решений α-модели Лерэ.

Предложение 2. *Если $u(t)$ — решение α-модели Лерэ (10), (11), то функция $v(t) = (I + \alpha^2 A)u(t)$ принадлежит $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и*

$$\|T(h)v(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant C_1\|v(0)\|^2 \exp\left(-\nu\lambda_1 t\right) + R_1. \tag{13}$$

Константы C_1, R_1 не зависят от α.

Аналогично пространству траекторий $\mathcal{K}^+$ системы НС определяем пространство траекторий $\mathcal{K}_\alpha^+$ для α-модели Лерэ. Пространство $\mathcal{K}_\alpha^+$ состоит из всех функций

$$\mathcal{K}_\alpha^+ = \{v_\alpha(t) = (I + \alpha^2 A)u_\alpha(t) \mid u_\alpha(0) \in H^2\},$$

где $u_\alpha(t)$ — это решение α-модели Лерэ с произвольным начальным условием $u_\alpha(0) \in H^2$.

Напомним, что любая траектория из пространства $\mathcal{K}_\alpha^+$ удовлетворяет энергетическому тождеству (12).

Трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ действует на $\mathcal{K}_\alpha^+$. Из неравенства (13) следует, что $\mathcal{K}_\alpha^+ \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, и найдется поглощающее множество полугруппы $\{T(h)\}$ в $\mathcal{K}_\alpha^+$, ограниченное в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и компактное в Θ_+^{loc}.

Тогда аналогично разделу 3 устанавливается существование траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_\alpha$ для α-модели Лерэ при $\alpha > 0$, то есть $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathcal{K}_\alpha^+$, $\mathfrak{A}_\alpha$ ограничен в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и компактен в Θ_+^{loc};

$$T(h)\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha \quad \forall h \geqslant 0,$$

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H)}(T(h)B_\alpha, \mathfrak{A}_\alpha) \to 0\ (h \to +\infty), \quad \forall M > 0,$$

для любого ограниченного (в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$) множества $B_\alpha \subset \mathcal{K}_\alpha^+$.

Наконец, из априорной оценки (13) следует, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\alpha$ равномерно (по $\alpha \in (0, 1]$) ограничены в пространстве $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$.

Теорема 4. *Траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\alpha$ α-модели Лерэ сходятся к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}$ 3D-системы НС при $\alpha \to 0+$:*

$$\mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A} \quad (\alpha \to 0+) \quad \text{в } \Theta_+^{\mathrm{loc}}, \tag{14}$$

то есть при каждом $M > 0$

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H)}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}) \to 0\ (\alpha \to 0+).$$

Эта теорема доказана в [12], а в работе рассмотрены [13] другие α-модели системы Навье–Стокса, для которых также предложена некоторая классификация в зависимости от силы сходимости траекторных аттракторов при $\alpha \to 0$.

5. Уравнение Гинзбурга–Ландау в перфорированной области

Пусть G_0 — область в $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$ такая, что $\overline{G}_0$ — компактное множество диффеоморфное шару. Для мультииндексов $j \in \mathbb{Z}^3$ зададим точки и множества:

$$P_\varepsilon^j = \varepsilon j, \quad G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon^3 G_0,$$

где $\varepsilon > 0$ является малым параметром задачи. Определим область $\widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{3}\varepsilon\} \subset \Omega$ и множество допустимых мультииндексов

$$\Upsilon_\varepsilon = \left\{ j \in \mathbb{Z}^n : G_\varepsilon^j \cap \overline{\widetilde{\Omega}}_\varepsilon \neq \emptyset \right\}.$$

Заметим, что $|\Upsilon_\varepsilon| \simeq d\varepsilon^{-3}$, где $d > 0$ — некоторая константа.

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$. Рассмотрим следующую перфорированную область:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G}_\varepsilon, \text{ где } G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j.$$

Изучается начально-краевая задача для комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау в перфорированной области Ω_ε

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = (1 + \alpha \mathrm{i})\Delta u_\varepsilon + R u_\varepsilon - (1 + \beta \mathrm{i})\, |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon + g(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \ t \geqslant 0 \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^3 b_\varepsilon^j(x) u_\varepsilon = 0, & x \in \partial G_\varepsilon^j, \ j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь $u = u_1 + \mathrm{i} u_2 \in \mathbb{C}$, α, β, R — вещественные числа, степень $p \geqslant 2$, ν — единичный вектор нормали к границе полостей G_ε^j, функция $g(x) \in L_2(\Omega; \mathbb{C})$, в 3-м краевом условии стоит коэффициент

$$b_\varepsilon^j(x) = b\Big(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^3}\Big),$$

где $b(x, y) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^3)$, причем $0 < b_0 \leqslant b(x, y) \leqslant B_0$ для некоторых констант b_0, B_0, и функция $b(x, y)$ является 1-периодической по переменной y.

Обозначим пространства $\mathbf{H} := L_2(\Omega; \mathbb{C})$ и $\mathbf{H}_\varepsilon := L_2(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$ с нормами $\| \cdot \|_0$ и $\| \cdot \|_{0,\varepsilon}$, а также $\mathbf{V} := H_0^1(\Omega; \mathbb{C})$ и $\mathbf{V}_\varepsilon := H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega; \mathbb{C})$ — пространства функций с нулевым следом на $\partial\Omega$ и с нормами $\|v\|_1$ и $\|v\|_{1,\varepsilon}$. Аналогично $\mathbf{L}_p := L_p(\Omega; \mathbb{C})$ $\mathbf{L}_{p,\varepsilon} := L_p(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$ — пространства с нормами $\|v\|_{\mathbf{L}_p}^p$ и $\|v\|_{\mathbf{L}_{p,\varepsilon}}^p$.

Обозначим через $\mathbf{V}' := H^{-1}(\Omega; \mathbb{C})$ и $\mathbf{V}'_\varepsilon := H^{-1}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$ пространства, сопряжённые к $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_\varepsilon$. Напомним, что $\mathbf{L}_q$ и $\mathbf{L}_{q,\varepsilon}$ являются сопряжёнными к $\mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_{p,\varepsilon}$, где $q = p/(p-1)$. Чаще всего рассматриваются уравнения ГЛ со степенью $p = 4$ и тогда $q = 4/3$.

Рассматриваются обобщённые решения задачи (15), то есть функции $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t)$, $x \in \Omega_\varepsilon$, $t \geqslant 0$,

$$u_\varepsilon \in L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{p,\varepsilon}),$$

удовлетворяющие соответствующему интегральному тождеству. Тогда по теореме вложения Соболева $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_q(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r})$, где $r = \max\{1, 3(1/2 - 1/p)\}$

Предложение 3. *При фиксированном ε для любой $U(\cdot) \in \mathbf{H}_\varepsilon$ существует слабое решение $u(x,t)$ задачи (15) такое, что $u(x,0) = U(x)$. При этом $u_\varepsilon(x,t) \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$ и выполнено энергетическое тождество.*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{0,\varepsilon} + \|\nabla u_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{0,\varepsilon} + \|u_\varepsilon(\cdot,t)\|^p_{\mathbf{L}_{p,\varepsilon}} - R\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|u_\varepsilon(x,t)|^2\,dx +$$
$$+\varepsilon^3\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial G^j_\varepsilon} b^j_\varepsilon(x)u_\varepsilon\cdot\bar{u}_\varepsilon dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\mathrm{Re}(g(x)\bar{u}_\varepsilon(x,t))dx$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Аналогичная теорема для системы–реакции в области без перфорации доказана в [3].

Мы будем для краткости опускать индекс ε в обозначениях пространств, где это не вызовет разночтений.

Построим траекторный аттрактор для уравнения Гинзбурга–Ландау (15) в области с перфорацией.

Чтобы описать пространство траекторий $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ задачи (15), определим банаховы пространства

$$\mathcal{F}_{0,M} := L_p(0,M;\mathbf{L}_p) \cap L_2(0,M;\mathbf{V}) \cap L_\infty(0,M;\mathbf{H}) \cap \left\{ v \;\middle|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in L_q\left(0,M;\mathbf{H}^{-r}\right)\right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{0,M}} := \|v\|_{L_p(0,M;\mathbf{L}_p)} + \|v\|_{L_2(0,M;\mathbf{V})} + \|v\|_{L_\infty(0,M;\mathbf{H})} + \left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L_q(0,M;\mathbf{H}^{-r})}.$$

Введем пространство

$$\mathcal{F}^{loc}_+ = L^{loc}_p(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_p) \cap L^{loc}_2(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap L^{loc}_\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap \left\{\frac{\partial v}{\partial t} \in L^{loc}_q(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r})\right\}.$$

Напомним, что пространство $\mathcal{F}^{loc}_+ = \mathcal{F}^{loc}_{\varepsilon,+}$ зависит от ε.

Обозначим через $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ семейство всех слабых решений $u(x,t)$ задачи (15). При любом $U \in \mathbf{H}$ найдется траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}^+_\varepsilon$ такая, что $u(x,0) = U(x)$. Следовательно, пространство траекторий $\mathcal{K}^+_\varepsilon$ задачи (15) не пусто и достаточно обширно (см. [3]).

Рассмотрим трансляционную полугруппу $\{T(h),\ h \geqslant 0\}$, действующую на пространстве $\mathcal{K}^+_\varepsilon$, $(T(h)u(x,t) = u(x,h+t))$. Заметим, что

$$T(h)\mathcal{K}^+_\varepsilon \subseteq \mathcal{K}^+_\varepsilon, \quad \forall h \geqslant 0.$$

Определим метрики $\rho_{0,M}(\cdot,\cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{0,M}$, используя нормы в этих пространствах:

$$\rho_{0,M}(u,v) = \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathcal{F}_{0,M}}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0,M}.$$

Эти метрики порождают топологию Θ^{loc}_+ в $\mathcal{F}^{loc}_+$, которая является метризуемой. Последовательность $\{v_n\} \subset \mathcal{F}^{loc}_+$ сходится к $v \in \mathcal{F}^{loc}_+$ в Θ^{loc}_+, если для любого $M > 0$

$$\|v_n(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_p(0,M;\mathbf{L_p})} + \|v_n(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(0,M;\mathbf{V})} +$$
$$+\|v_n(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_\infty(0,M;\mathbf{H})} + \|\partial_t v_n(\cdot) - \partial_t v(\cdot)\|_{L_q(0,M;\mathbf{H}^{-r})} \to 0\ (n \to \infty)$$

Для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ воспользуемся нормой банахова пространства

$$\mathcal{F}_+^b = \mathbf{L}_p^b(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_p) \cap L_2^b(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^b(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r}) \right\},$$

которое является подпространством пространства $\mathcal{F}_+^{loc}$.

Предложение 4. *При фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (15) имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в сильной топологии $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$. Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ равномерно (по $\varepsilon \in (0,1)$) ограничены в $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$ и компактны в $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$.*

Аналогичное утверждение доказано в [14] для общей системы реакции–диффузии.

6. Усреднение уравнения Гинзбурга–Ландау при $\varepsilon \to 0+$

Изучим предельное поведение траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ уравнения Гинзбурга–Ландау (15) при $\varepsilon \to 0+$ и их связь с траекторным аттрактором соответствующего усредненного уравнения в области Ω без перфорации, но которое содержит некоторый дополнительный «странный» член.

Чтобы определить этот «странный член» (потенциал предельного уравнения), рассмотрим следующую внешнюю задачу по переменной y:

$$\begin{cases} -\Delta_y v = 0, & y \in \mathbb{R}^3 \setminus G_0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu_y} + b(x,y)v = b(x,y), & y \in \partial G_0, \\ v \to 0, & |y| \to \infty. \end{cases}$$

В этой задаче (фиксированная) переменная x играет роль медленного параметра. Предельный потенциал $V(x)$ определяется по формуле

$$V(x) = \int\limits_{\partial G_0} \frac{\partial}{\partial \nu_y} v(x,y)\, d\sigma_y. \tag{16}$$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (1+\alpha \mathrm{i})\Delta u + Ru - (1+\beta \mathrm{i})\,|u|^{p-2}u - V(x)u + g(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u = U(x), & t = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Для любого начального условия $U(\cdot) \in \mathbf{H}$ задача (17) имеет слабое решение $u = u(x,t),\ t \geqslant 0$, которое удовлетворяет следующему энергетическому тождеству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_0^2 + \|\nabla u(\cdot,t)\|_0^2 + \|u(\cdot,t)\|_{\mathbf{L}_p}^p - R\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\,dx +$$
$$+ \int\limits_\Omega V(x)|u(x,t)|^2\,dx = \int\limits_\Omega \mathrm{Re}(g(x)\bar{u}(x,t))dx, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

Пространство траекторий $\overline{\mathcal{K}}^+$ состоит из всех слабых решений задачи (17).

Пространство траекторий $\overline{\mathcal{K}}^+$ принадлежит пространству

$$\mathcal{F}_{0,+}^{loc} = L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \in L_q^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-1}) \right\},$$

где $\mathbf{H} := L_2(\Omega)^N$, $\mathbf{V} := H_0^1(\Omega)^N$, и $\mathbf{L}_p := \mathbf{L}_p(\Omega)$ не зависят от ε. В области Ω нет полостей. Вводится, как обычно, пространство

$$\mathcal{F}_{0,+}^{b} = L_p^{b}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap L_2^{b}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \;\middle|\; \frac{\partial v}{\partial t} \in L_q^{b}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right\}$$

для определения ограниченных множеств в $\overline{\mathcal{K}}^+$.

Предложение 5. *Задача (17) имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в топологии $\Theta_{0,+}^{loc}$. Множество $\overline{\mathfrak{A}}$ ограничено в $\mathcal{F}_{0,+}^{b}$ и компактно в $\Theta_{0,+}^{loc}$.*

Следующая теорема доказывается аналогично основной теореме в [14] для общей системы реакции–диффузии.

Теорема 5. *Справедливо следующее предельное соотношение в топологии $\Theta_{0,+}^{loc}$, которая соответствует предельному уравнению в области без перфорации*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \;\; \textit{при } \varepsilon \to 0+,$$

то есть для любого $M > 0$ в пространстве $\mathcal{F}_{0,0,M}$ мы имеем

$$\operatorname{dist}_{\mathcal{F}_{0,0,M}}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Замечание 4. *Отметим, что функции из множества $\mathfrak{A}_\varepsilon$ определены на перфорированных областях Ω_ε. Тем не менее все эти функции можно продолжить внутрь полостей так, чтобы нормы в пространствах $\mathbf{H}, \mathbf{V}$ и $\mathbf{L}_p$ (без перфорации) оставались (почти) такими же, что и в пространствах с перфорацией $\mathbf{H}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon$ и $\mathbf{L}_{p,\varepsilon}$. Поэтому в теореме 5 все расстояния измеряются в пространствах без перфорации.*

7. 2D-системы Навье–Стокса и Эйлера с экмовским трением

Рассматривается 2D-система Навье–Стокса с трением

$$\begin{cases} \partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p + ru = \nu\Delta u + g, \\ u\big|_{t=0} = u^0, \quad \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{18}$$

которая в пределе нулевой вязкости при $\nu \to 0^+$ переходит в 2D-систему Эйлера с трением

$$\begin{cases} \partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p + ru = g, \\ u\big|_{t=0} = u^0, \quad \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Неизвестными являются вектор скорости $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))$ и давление $p = p(x,t)$. Внешняя сила $g = g(x) = (g^1(x), g^2(x))$ известна. Коэффициент вязкости $\nu \geqslant 0$ является малым параметром задачи.

Системы рассматриваются на торе $x \in \mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2$ с периодическими граничными условиями. Член ru, где $r > 0$, параметризует экмановское трение, и система (18) становится диссипативной при всех $\nu \geqslant 0$, включая систему (19) при $\nu = 0$.

Системы вида (18) и (19) описывают плоские пространственно-периодические течения соответственно вязкой и невязкой жидкости в водоеме над грубым, шершавым дном. Такие уравнения, в частности, используются в математической геофизике при описании крупномасштабных процессов, протекающих в атмосфере или в океане (см. [15]). Член $-ru$ моделирует основную крупномасштабную диссипацию, которая происходит в планетарном пограничном слое. Член, содержащий вязкость ν, отвечает за мелкомасштабную диссипацию.

Изучается поведение аттракторов 2D-системы Навье–Стокса с трением (18) при $\nu \to 0^+$.

Введем пространства Соболева:

$$\mathcal{H}^s := \{u \in H^s(\mathbb{T}^2)^2, \quad \operatorname{div} u = 0\}.$$

Фазовым пространством для систем Навье–Стокса (18) и Эйлера (19) будет служить пространство $\mathcal{H}^1$ со стандартным скалярным произведением и соболевской нормой:

$$(u, v)_1 := (u, v)_{\mathcal{H}^1} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v), \quad \|u\|_1^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2.$$

Предложение 6. *Пусть $u^0, g \in \mathcal{H}^1$. Тогда при $\nu > 0$ и при любом $T > 0$ система (18) имеет единственное решение $u \in C([0, T], \mathcal{H}^1) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}^2)$ и выполнено следующее уравнение баланса энергии и энстрофии:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_1^2 + \nu\left(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2\right) + r\|u(t)\|_1^2 = (g, u(t))_1. \tag{20}$$

Доказательство вполне аналогично классическому случаю $r = 0$ (см., например, [1, 2]).

Рассмотрим операторы

$$S(t)u_0 = u(t),\ t \geqslant 0,\ S(t) : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^1,$$

где $u(t)$ — решение системы (18) с начальным условием u^0. Операторы $\{S(t), t \geqslant 0\}$ образуют полугруппу в пространстве $\mathcal{H}^1$.

Аттракторы для классической 2D-системы Навье–Стокса (без трения, при $r = 0$) были построены в пионерских работах О. А. Ладыженской, М. И. Вишика, А. В. Бабина, Р. Темама (см. [1, 2]). Глобальный аттрактор для двумерной системы Навье–Стокса с трением (18) (при $r > 0$) был построен в работе [16] в фазовом пространстве $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^2)$. Для построения аттрактора использовался метод энергетических тождеств из работы [17]. Однако, имея уравнение баланса энергии и энстрофии, с помощью метода R.Rosa строится глобальный аттрактор и в фазовом пространстве $\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2)$.

Теорема 6. *Полугруппа $\{S(t)\}$, соответствующая системе (18) (при $r > 0$), имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}_\nu$ в пространстве $\mathcal{H}^1$. Глобальные аттракторы $\mathcal{A}_\nu$ равномерно ограничены в норме $\mathcal{H}^1$, причем*

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_\nu} \|u\|_1 \leqslant \frac{\|g\|_1}{r} \qquad \forall \nu \geqslant 0. \tag{21}$$

Следующее неравенство Липшица доказывается с помощью тождества (20).

Предложение 7. *Для любых $u_0, u_1 \in \mathcal{H}^1$, $\|u_0\|_1, \|u_1\|_1 \leqslant R$, выполнено неравенство*

$$\|S(t)u_0 - S(t)u_1\|_1 \leqslant C(R, t)\|u_0 - u_1\|_1,\ \forall t \geqslant 0, \tag{22}$$

где $C(R, s)$ — монотонно возрастающая функция по аргументам $R \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$.

Построим теперь траекторный аттрактор для системы (18) и установим его связь с глобальным аттрактором $\mathcal{A}_\nu$ этой системы. В качестве пространства траекторий рассмотрим

$$\mathcal{K}_\nu^+ = \left\{u(t) = S(t)u_0, t \geqslant 0 \mid u_0 \in \mathcal{H}^1\right\},$$

а в качестве объемлющего пространства выберем

$$\mathcal{F}_+^{loc} = C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1),$$

причем топологией Θ_+^{loc} в $\mathcal{F}_+^{loc}$ будет служить топология локальной равномерной сходимости по норме $\mathcal{H}^1$, то есть по определению последовательность $\{v_n(s), s \geqslant 0\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к $v(s) \in \mathcal{F}_+^{loc}$ в Θ_+^{loc}, если для любого $M > 0$

$$\|v_n(s) - v(s)\|_{C([0,M];\mathcal{H}^1)} = \max_{s \in [0,M]} \|v_n(s) - v(s)\|_1 \to 0 (n \to \infty).$$

Тогда пространство $\mathcal{F}_+^b = C^b(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1)$ с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_+^b} = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|v(s)\|_1,$$

которая используется для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий $\mathcal{K}_\nu^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ (см. раздел 2).

Следующая теорема вытекает непосредственно из существования глобального аттрактора $\mathcal{A}_\nu$ и из неравенства Липшица (22).

Теорема 7. *Траекторным аттрактором системы* (18) *в пространстве траекторий* $\mathcal{K}_\nu^+$ *в топологии* Θ_+^{loc} *служит множество*

$$\mathfrak{A}_\nu = \{u(t) = S(t), t \geqslant 0 \mid u_0 \in \mathcal{A}_\nu\},$$

причем отображение

$$\Phi : \mathcal{A}_\nu \to \mathfrak{A}_\nu, \ \Phi(u) = S(t)u, \ t \geqslant 0,$$

является гомеоморфизмом в соответствующих топологиях пространств $\mathcal{H}^1$ *и* Θ_+^{loc}.

Рассмотрим теперь систему (19) без вязкости, то есть при $\nu = 0$.

Предложение 8. *Пусть* $u^0, g \in \mathcal{H}^1$. *Тогда при любом* $T > 0$ *система* (19) *имеет, по крайней мере, одно решение* $u(t) \in C([0,T]; \mathcal{H}^1)$ *и для любого такого решения вещественная функция* $\|u(t)\|_1^2 = \|u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2$ *является абсолютно непрерывной по переменной времен* t *и выполняется тождество для энергии и энстрофии*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_1^2 + r\|u(t)\|_1^2 = (u(t), g)_1. \tag{23}$$

Доказательство существования решения системы (19) достаточно стандартно и использует метод галеркинских приближений (см. [9]). Ключевое тождество (23) доказывается с использованием работы [18] (см. также [19, 20]).

Замечание 5. *Отметим, что вопрос о справедливости теоремы единственности для двумерной системы Эйлера в пространстве* $C([0,T]; \mathcal{H}^1)$ *при условии, что* $u^0, g \in \mathcal{H}^1$ *остается открытым. Замечательная теорема В. Юдовича о единственности решения системы Эйлера доказана для более гладких предположений* $u^0, g \in \mathcal{W}^{1,\infty}$ *и в более гладком пространстве* $L^\infty(0,T; W^{1,\infty})$ *(см. [21]).*

Переходя к аттракторам, необходимо сначала обобщить определение глобального аттрактора для систем Навье–Стокса (18) с единственностью на случай системы Эйлера (19), решения которой в классе $C([0,T];\mathcal{H}^1)$ могут быть не единственными.

Определение 6. *Множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}^1$ называется (обобщенным) глобальным аттрактором системы* (19)*, если:*

i) $\mathcal{A}$ компактно *в* $\mathcal{H}^1$*;*

ii) $\mathcal{A}$ *является* притягивающим*: для любого ограниченного в $C_b(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^1)$ подмножества $\mathcal{B} = \{u(t),\ t \geqslant 0\}$, состоящего из решений системы* (19)*, выполняется*

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{B}(t),\mathcal{A}) \to 0 \ \ \textit{при} \ \ t \to \infty;$$

iii) $\mathcal{A}$ минимально по включению *среди всех компактных притягивающих множеств.*

Здесь $\mathcal{B}(t)$ — сечение в момент $t \geqslant 0$ множества $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}(t) = \{u(t),\ u \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{H}^1.$$

Вопрос о построении обобщенного глобального аттрактора $\mathcal{A}_0 \Subset \mathcal{H}^1$ двумерной системы Эйлера с трением (19) на плоскости в сильной топологии $\mathcal{H}^1$ решен в работе [20], где также существенную роль играло уравнение баланса энергии и энстрофии, которое доказывается с использованием методов известной работы [18] про уравнения переноса.

Теорема 8. *Система* (19) *имеет обобщенный глобальный аттрактор $\mathcal{A}_0$ в пространстве $\mathcal{H}^1$, причем выполнено неравенство*

$$\sup_{u\in\mathcal{A}_0} \|u\|_1 \leqslant \frac{\|g\|_1}{r}. \tag{24}$$

Перейдем к построению траекторного аттрактора системы (19). Рассмотрим пространство траекторий $\mathcal{K}_0^+$, которое состоит из всех слабых решений $u(t), t \geqslant 0$, этой системы. Пространство $\mathcal{K}_0^+$ принадлежит $\mathcal{F}_+^{loc} = C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^1)$ с топологией Θ_+^{loc}, введенной выше для случая $\nu > 0$. Как и выше, $\mathcal{F}_+^b = C^b(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^1)$.

Трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ действует на $\mathcal{K}_0^+$. Из тождества (23) следует, что $\mathcal{K}_0^+ \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и найдется поглощающее множество полугруппы $\{T(h)\}$ в $\mathcal{K}_0^+$, ограниченное в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, и компактное в соответствующей слабой топологии $\Theta_+^{\mathrm{loc,w}}$. Однако у этой полугруппы нет компактного поглощающего множества в сильной топологии Θ_+^{loc}. В этом состояла основная трудность этой задачи. В работе [20] для случая системы на всей плоскости было доказано, что полугруппа $\{T(h)\}$ в $\mathcal{K}_0^+$ является асимптотически компактной в топологии Θ_+^{loc} и, следовательно, существует сильный траекторный аттрактор. Аналогично доказывается следующая теорема для 2D-системы Эйлера с трением на торе.

Теорема 9. *Система* (19) *имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_0$ в пространстве траекторий $\mathcal{K}_0^+$ с топологией Θ_+^{loc}, причем выполнено неравенство*

$$\sup_{u\in\mathfrak{A}_0} \|u\|_{\mathcal{F}_+^b} \leqslant \frac{\|g\|_1}{r}. \tag{25}$$

Кроме того, множество

$$\mathfrak{A}_0(0) = \mathfrak{A}_0|_{t=0} := \{u(0) \mid u \in \mathfrak{A}_0\} \Subset \mathcal{H}^1$$

является обобщенным глобальным аттрактором этой системы, $\mathfrak{A}_0 = \mathcal{A}_0$.

Замечание 6. *Отметим, что в отличие от случая $\nu > 0$ мы не можем говорить о гомеоморфности аттракторов $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{A}_0$, поскольку для случая $\nu = 0$ у нас нет естественного отображения вдоль траекторий уравнения в силу отсутствия теоремы единственности решений задачи Коши для системы Эйлера с трением.*

8. Предел нулевой вязкости

Сформулируем две основные теоремы о пределе нулевой вязкости глобальных и траекторных аттракторов для системы 2D Навье–Стокса с трением.

Итак, для каждого $\nu > 0$ система Навье–Стокса (18) обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}_\nu$, при этом предельная система Эйлера (19) при $\nu = 0$ также обладает обобщенным глобальным аттрактором $\mathcal{A}_0$, причем семейство множеств $\{\mathcal{A}_\nu\}_{\nu \geqslant 0}$ равномерно ограничено в $\mathcal{H}^1$:

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_\nu} \|u\|_1 \leqslant \frac{\|g\|_1}{r} \qquad \forall \nu \geqslant 0.$$

Сформулируем первый основной результат.

Теорема 10. *Пусть $g \in \mathcal{H}^1$. Тогда аттракторы $\mathcal{A}_\nu$ в $\mathcal{H}^1$ сильно полунепрерывно сверху зависят от ν при $\nu \to 0^+$:*

$$\lim_{\nu \to 0^+} \operatorname{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_0) = 0. \tag{26}$$

Аналогичная теорема доказана в работе [22] для систем Навье–Стокса и Эйлера с трением во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, а также в работе [23] для систем в ограниченной области со свободными (stress free) граничными условиями.

Сформулируем второй основной результат.

Теорема 11. *При выполнении условий теоремы 10 траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\nu$ 2D-системы Навье–Стокса с трением сходятся в топологии Θ_+^{loc} к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ 2D-системы Эйлера с трением, то есть*

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];\mathcal{H}^1)}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\nu, \Pi_{0,M}\mathfrak{A}_0) \to 0 \quad (\nu \to 0).$$

При доказательстве теоремы 11, как и при доказательстве теоремы 10, используется метод энергетических тождеств (см. [17]) , при этом сильная локальная сходимость в пространстве $C([0,M];\mathcal{H}^1)$ достигается с помощью метода работы [20]. Подробное доказательство здесь не приводится.

Заключение

В данной работе метод траекторных аттракторов применяется в задачах возмущения диссипативных уравнений с частными производными. Теория траекторных динамических систем и траекторных аттракторов была разработана в совместных работах М. И. Вишика и В. В. Чепыжова. Она особенно полезна при изучении диссипативных нелинейных уравнений математической физики, для которых соответствующая начально-краевая задача имеет глобальное по времени (слабое) решение, но теорема единственности этого решения или не установлена, или не имеет места. Важным примером таких уравнений является трехмерная неоднородная система Навье –Стокса в ограниченной области с условиями прилипания на границе, для которой теорема единственности не доказана. Другой пример это общая система реакции–диффузии, в которой нелинейная функция взаимодействия не удовлетворяет условию Липщица, и, в частности, трехмерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау. Для таких задач нельзя напрямую применить классическую теорию диссипативных динамических полугрупп, действующих в фазовом пространстве начальных условий задачи, и построить для них глобальный аттрактор. Однако для таких уравнений можно рассмотреть траекторную динамическую систему, построить траекторной аттрактор соответствующей полугруппы трансляций по времени и исследовать его свойства. Этот универсальный подход можно применить для изучения различных типов диссипативных уравнений, а именно: для общих системам реакции–диффузии, для трехмерной системы Навье–Стокса, для диссипативных волновых уравнений, для нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрических областях и для многих других сложных задач. Особое внимание в статье уделено методу траекторных аттракторов в задачах аппроксимации и сингулярного возмущения в некоторых моделях математической физики, зависящих от малого параметра. В работе рассмотрена α-модель Лерэ, аппроксимирующая 3D-систему Навье–Стокса, и изучено поведение ее траекторного аттрактора, когда малый параметр α стремится к нулю. Кроме того, исследовано комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау в перфорированной области, в котором малым параметром ε служит шаг перфорации, и усреднение его траекторного аттрактора, когда $\varepsilon \to 0$. Изучен сильный предел при вязкости $\nu \to 0$ аттракторов 2D-систем Навье–Стокса с экмановским трением, когда в пределе при $\nu = 0$ получается аттрактор 2D-системы Эйлера с трением.

Список литературы

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
2. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd ed. Applied Mathematical Sciences, vol. 68. New York: Springer-Verlag, 1997. 650 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0645-3.
3. *Vishik M. I., Chepyzhov V. V.* Attractors for Equations of Mathematical Physics. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 49. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2002. 364 p.DOI: 10.1090/coll/049.
4. *Sell G. R.* Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations // J. Dyn. Diff. Eq. 1996. Vol. 8, no. 1. P. 1–33. DOI: 10.1007/BF02218613.
5. *Chepyzhov V. V., Conti M., Pata V.* A minimal approach to the theory of global attractors // Discrete and Continuous Dyn. Sys. 2012. Vol. 32, iss. 6. P. 2079–2088. DOI: 10.3934/dcds.2012.32.2079.
6. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Trajectory attractors for evolution equations // C. R. Acad. Sci. Paris. 1995. Vol. 321. Série I. P. 1309–1314.
7. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math.Pures Appl. 1997. Vol. 76, no. 10. P. 913–964. DOI: 10.1016/S0021-7824(97)89978-3.
8. *Вишик М. И., Чепыжов В. В.* Траекторные аттракторы уравнений математической физики // УМН. 2011. Т. 66, № 4. С. 3–102.
9. *Lions J.-L.* Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969. 554 p.
10. *Albritton D., Brue E., Colombo M.* Gluing non-unique Navier-Stokes solutions // Ann. PDE. 2023. Vol. 9, no. 2. 17. DOI: 10.1007/s40818-023-00155-8.
11. *Cheskidov A., Holm D. D., Olson E., Titi E. S.* On Leray-α model of turbulence // Proceedings of the Royal Society a Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2005. Vol. 461. P. 629–649. DOI: 10.1098/rspa.2004.1373.
12. *Chepyzhov V. V., Titi E. S., Vishik M. I.* On the convergence of solutions of the Leray-α model to the trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system // Discrete and Continuous Dyn. Sys. 2007. Vol. 17, no. 3. P. 33–52.
13. *Чепыжов В. В.* Об аппроксимации траекторного аттрактора 3D системы Навье–Стокса различными α-моделями гидродинамики // Матем. сб. 2016. Т. 207, № 4. С. 143–172. DOI: 10.4213/sm8549.
14. *Бекмаганбетов К.А., Чепыжов В.В., Чечкин Г.А.* Об аттракторах уравнений реакции–диффузии в пористой ортотропной среде // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2021. Т. 498. С. 10–15. DOI: 10.31857/S2686954321030036.
15. *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. New York: Springer, 1979. DOI: 10.1007/978-1-4684-0071-7.
16. *Ilyin A. A., Patni K., Zelik S. V.* Upper bounds for the attractor dimension of damped Navier–

Stokes equations in $\mathbb{R}^2$ // Discrete and Continuous Dyn. Sys. 2016. Vol. 36. P. 2085–2102. DOI: 10.3934/dcds.2016.36.2085.
17. *Rosa R.* The global attractor for the 2D Navier–Stokes flow on some unbounded domains // Nonlinear Anal. 1998. Vol. 32, iss. 1. P. 71–85. DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00453-7.
18. *DiPerna R., Lions P.* Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory // Invent. Math. 1989. Vol. 98. P. 511–547. DOI: 10.1007/BF01393835.
19. *Boyer F., Fabrie P.* Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models. Applied Mathematical Sciences, vol. 183. New York: Springer, 2013. 526 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-5975-0.
20. *Chepyzhov V. V., Ilyin A. A., Zelik S. V.* Strong trajectory and global $\mathbf{W^{1,p}}$-attractors for the damped-driven Euler system in $\mathbb{R}^2$ // Discrete Contin. Dyn. Syst. B. 2017. Vol. 22, iss. 5. P. 123–155. DOI: 10.3934/dcdsb.2017109.
21. *Юдович В. И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Ж. Выч. Мат. Физ. 1963. Т. 3. С. 1032–1066.
22. *Ильин А. А., Чепыжов В. В.* О сильной сходимости аттракторов уравнений Навье–Стокса в пределе исчезающей вязкости // Матем. заметки. 2017. Т. 101, № 4. С. 635–639. DOI: 10.4213/mzm11457.
23. *Chepyzhov V. V., Ilyin A. A., Zelik S. V.* Vanishing viscosity limit for global attractors for the damped Navier-Stokes system with stress free boundary conditions // Physica D. 2018. Vol. 376–377. P. 31–38. DOI: 10.1016/j.physd.2017.08.005.

References

1. Babin AV, Vishik MI. Attractors of Evolution Equations. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.; 1992. 532 p.
2. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd ed. Applied Mathematical Sciences, vol. 68. New York: Springer-Verlag; 1997. 650 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0645-3.
3. Vishik MI, Chepyzhov VV. Attractors for equations of mathematical physics, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 49. Providence, R.I.: American Mathematical Society; 2002. 364 p.DOI: 10.1090/coll/049.
4. Sell GR. Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations. J. Dyn. Diff. Eq. 1996;8(1):1–33. DOI: 10.1007/BF02218613.
5. Chepyzhov VV, Conti M, Pata V. A minimal approach to the theory of global attractors. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2012;32(6):2079–2088. DOI: 10.3934/dcds.2012.32.2079.
6. Chepyzhov VV, Vishik MI. Trajectory attractors for evolution equations. C. R. Acad. Sci. Paris. 1995;321(I):1309–1314.
7. Chepyzhov VV, Vishik MI. Evolution equations and their trajectory attractors. J. Math. Pures Appl. 1997;76(10):913–964. DOI: 10.1016/S0021-7824(97)89978-3.
8. Vishik MI, Chepyzhov VV. Trajectory attractors for equations of mathematical physics. Russian Math. Surveys. 2011;66(4):637–731.
9. Lions J-L. Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars; 1969. 554 p.
10. Albritton D, Brue E, Colombo M. Gluing non-unique Navier-Stokes solutions. Ann. PDE. 2023;9(2):17. DOI: 10.1007/s40818-023-00155-8.
11. Cheskidov A, Holm DD, Olson E., Titi ES. On Leray-α model of turbulence. Proceedings of the Royal Society a Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2005;461:629–649. DOI: 10.1098/rspa.2004.1373.
12. Chepyzhov VV, Titi ES, Vishik MI. On the convergence of solutions of the Leray-α model

to the trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system. Discrete and Continuous Dyn. Sys. 2007;17(3):33–52.

13. Chepyzhov VV. Approximating the trajectory attractor of the 3D Navier-Stokes system using various α-models of fluid dynamics. Sb. Math. 2016;207(4):610–638. DOI: 10.4213/sm8549.
14. Bekmaganbetov KA, Chepyzhov VV, Chechkin GA. On attractors of reaction–diffusion equations in a porous orthotropic medium. Dokl. Math. 2021;103(3):103–107. DOI: 10.1134/S1064562421030030.
15. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. New York: Springer; 1979. DOI: 10.1007/978-1-4684-0071-7.
16. Ilyin AA, Patni K, Zelik SV. Upper bounds for the attractor dimension of damped Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^2$. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2016;36:2085–2102. DOI: 10.3934/dcds.2016.36.2085.
17. Rosa R. The global attractor for the 2D Navier–Stokes flow on some unbounded domains. Nonlinear Anal. 1998;32:71–85. DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00453-7.
18. DiPerna R, Lions P. Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory. Invent. Math. 1989;98:511–547. DOI: 10.1007/BF01393835.
19. Boyer F, Fabrie P. Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models. Applied Mathematical Sciences, vol. 183. New York: Springer; 2013. 526 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-5975-0.
20. Chepyzhov VV, Ilyin AA, Zelik SV. Strong trajectory and global $\mathbf{W^{1,p}}$-attractors for the damped-driven Euler system in $\mathbb{R}^2$. Discrete Contin. Dyn. Syst. B. 2017;22(5):123–155. DOI: 10.3934/dcdsb.2017109.
21. Yudovich VI. Non-Stationary flow of an ideal incompressible fluid. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1963;3(6):1407–1456. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90247-7.
22. Ilyin AA, Chepyzhov VV. On strong convergence of attractors of Navier–Stokes equations in the limit of vanishing viscosity. Math. Notes. 2017;101(4):746–750. DOI: 10.1134/S0001434617030336.
23. Chepyzhov VV, Ilyin AA, Zelik SV. Vanishing viscosity limit for global attractors for the damped Navier-Stokes system with stress free boundary conditions. Physica D. 2018;376-377:31-38. DOI: 10.1016/j.physd.2017.08.005.

Чепыжов Владимир Викторович — родился в Москве (1962). Окончил с отличием механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. Доктор физико-математических наук (2004, ИППИ РАН). С 1987 года работает в лаборатории № 1 Института проблем передачи информации РАН, с 2012 года в должности главного научного сотрудника. Научные интересы — уравнения с частными производными, бесконечномерные динамические системы, аттракторы, эпсилон-энтропия. Опубликовал свыше 150 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 127051 Москва, Большой Каретный пер., 19 стр.1
Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН
E-mail: chep@iitp.ru
ORCID: 0000-0003-2472-8672
AuthorID (eLibrary.Ru): 5460