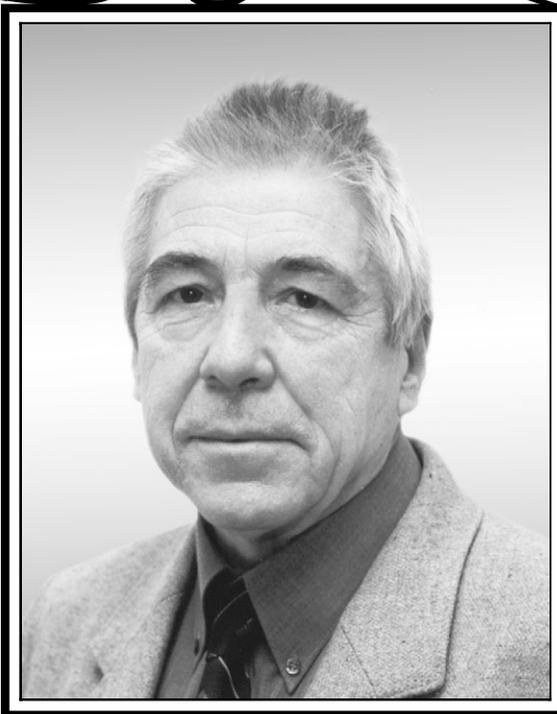


ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

# Прикладная Деловая Динамика



6  
2024

*90 лет Леониду Павловичу Шильникову  
(1934–2011)*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

*М. В. Сысоева*, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*С. Боккалетти*, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

*А. М. Быков*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*С. В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*Н. С. Гинзбург*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*С. А. Каценко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

*А. В. Красков*, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

*Н. В. Кузнецов*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

*Ж. ван Луйтелаар*, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

*А. Люттйоханн*, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*И. И. Мохов*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

*А. Б. Нейман*, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

*В. И. Некоркин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Пиковский*, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

*А. Н. Писарчик*, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. В. Тучин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

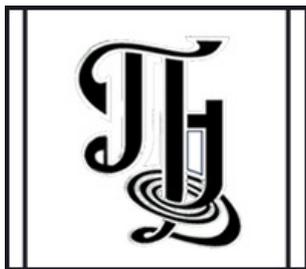
*Е. Я. Фрисман*, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)

*В. А. Царёв*, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)

*В. А. Черепенин*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

**Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

**Издатель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

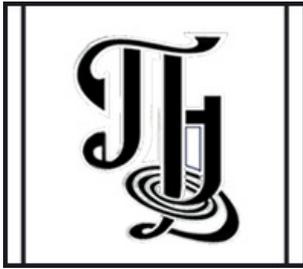
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией А. А. Грищенко  
Редактор А. Р. Нигметулина  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,  
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,  
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 20.11.2024  
Вышел в свет 29.11.2024  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 24,65 (26,5)  
Тираж 100 экз. Заказ № 156-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского  
университета. Адрес типографии: Россия,  
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies ([ural-press.ru](http://ural-press.ru))

The journal is Open Access

Head of Editorial office A. A. Grishchenko  
Editor A. R. Nigmatulina  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru),  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 20.11.2024. Published 29.11.2024  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 24,65 (26,5)  
Edition of 100 copies. Order No. 156-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

*Гонченко С. В., Малкин М. И.* Научное наследие Л. П. Шильникова: к 90-летию юбилею ..... 713

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС.  
КВАНТОВЫЙ ХАОС

*Гонченко С. В., Гонченко А. С., Казаков А. О., Самылина Е. А.* Смешанная динамика: элементы теории и примеры ..... 722

*Морозов К. Е.* О неконсервативных возмущениях трёхмерных интегрируемых систем ..... 766

*Каценко С. А., Толбей А. О.* Квазинормальные формы для систем двух уравнений с большим запаздыванием ..... 781

*Ефремова Л. С., Шалагин М. А.* О предельных множествах простейших косых произведений на многомерных клетках ..... 796

*Сухарев Д. М., Корякин В. А., Казаков А. О.* Об аттракторах лоренцевского типа в шестимерном обобщении модели Лоренца ..... 816

*Гонченко А. С.* О дискретных аттракторах Лоренца различных типов ..... 832

*Чепыжов В. В.* Метод траекторных аттракторов для диссипативных уравнений в частных производных с малым параметром ..... 858

*Кулагин Н. Е., Лерман Л. М.* Пространственная динамика в семействе дифференциальных уравнений шестого порядка из теории структурообразования ..... 878

*Жукова Н. И., Шейна К. И.* Группы базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана ..... 897

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА  
И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

*Рассадин А. Э.* Асимптотическое решение для SIS-модели с учётом миграции и диффузии ..... 908

**C O N T E N T S**

**EDITORIAL**

*Gonchenko S. V., Malkin M. I.* Scientific heritage of L. P. Shilnikov: to the 90th anniversary 713

**BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.  
QUANTUM CHAOS**

*Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Kazakov A. O., Samylina E. A.* Mixed dynamics: elements of theory and examples..... 722

*Morozov K. E.* On non-conservative perturbations of three-dimensional integrable systems 766

*Kashchenko S. A., Tolbey A. O.* Quasinormal forms for systems of two equations with large delay..... 781

*Efremova L. S., Shalagin M. A.* On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells..... 796

*Sukharev D. M., Koryakin V. A., Kazakov A. O.* On Lorenz-type attractors in a six-dimensional generalization of the Lorenz model..... 816

*Gonchenko A. S.* On discrete Lorenz attractors of various types..... 832

*Chepyzhov V. V.* Trajectory attractors method for dissipative partial differential equations with small parameter..... 858

*Kulagin N. E., Lerman L. M.* Spatial dynamics in the family of sixth-order differential equations from the theory of partial formation..... 878

*Zhukova N. I., Sheina K. I.* Groups of basic automorphisms of chaotic Cartan foliations with Eresmann connection..... 897

**MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES**

*Rassadin A. E.* An asymptotic solution for the SIS epidemic model, taking into account migration and diffusion..... 908



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003143  
EDN: YFTKVA

## Научное наследие Л. П. Шильникова: к 90-летию юбилею

*С. В. Гонченко, М. И. Малкин*

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия  
E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, malkin@unn.ru

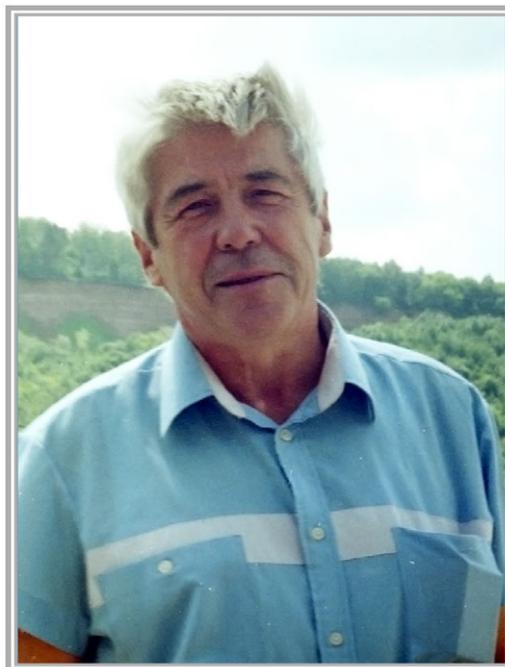
*Поступила в редакцию 24.10.2024, опубликована 29.11.2024*

**Для цитирования:** Гонченко С. В., Малкин М. И. Научное наследие Л. П. Шильникова: к 90-летию юбилею // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 713–721. DOI: 10.18500/0869-6632-003143. EDN: YFTKVA

**For citation:** Gonchenko SV, Malkin MI. Scientific heritage of L. P. Shilnikov: to the 90th anniversary. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):713–721. DOI: 10.18500/0869-6632-003143

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

В этом году мы отмечаем 90-летний юбилей Леонида Павловича Шильникова (1934–2011), выдающегося российского математика и одного из основоположников математической теории динамического хаоса и теории глобальных бифуркаций многомерных систем. Достаточно перечислить лишь часть полученных им фундаментальных результатов — создание теории глобальных бифуркаций многомерных динамических систем, открытие спирального хаоса, создание современной математической теории синхронизации, теории аттракторов лоренцевского типа, теории аттракторов типа «тор–хаос» (переход к хаосу через разрушение двумерных инвариантных торов), развитие теории гомоклинического хаоса и многое другое — чтобы представить высочайший уровень его математического таланта и то значение его научного вклада, который он внес в современную науку — Нелинейную Динамику. Научные труды Л. П. Шильникова широко известны специалистам во всем мире,



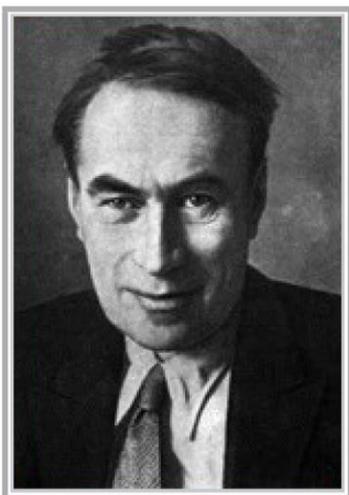
а его результаты, признанные ныне классическими, включены практически во все современные учебники по динамическим системам.

Леонид Павлович родился 17 декабря 1934 г. в городе Котельниче Кировской области. Окончив среднюю школу в 1952 г., он поступил на физико-математический факультет Горьковского государственного университета, который окончил в 1957 г. В 1957–1960 гг. он был аспирантом Горьковского университета, а затем стал научным сотрудником Горьковского исследовательского физико-технического института. С 1963 г. основным местом работы Леонида Павловича стал только что образовавшийся при ГГУ Институт прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК), где он занимал должности старшего научного сотрудника, заведующего лабораторией (с 1967 г.) и заведующего отделом с 1982 г. до конца жизни. Он преподавал в университете, читал как регулярные, так и специальные курсы (вплоть до последнего года он читал курс «Бифуркации многомерных динамических систем»). Студенты, живо интересующиеся наукой, высоко ценили его лекции и семинары.

Л. П. Шильников был блестящим представителем знаменитой школы Андронова по нелинейной динамике и, по сути, создал собственное направление, которое сейчас известно как школа Шильникова по динамическим системам. Научные результаты Л. П. Шильникова впечатляют одновременно своей широтой охвата темы и глубиной проникновения в ее суть.

Л. П. Шильников является основоположником теории глобальных бифуркаций многомерных систем. Основные бифуркации систем на плоскости были исследованы А. А. Андроновым, Е. А. Леонтович и А. Г. Майером еще в 1930-е годы двадцатого столетия, в том числе и бифуркации гомоклинических петель сепаратрис состояний равновесия. В самом начале 1960-х годов Шильников изучил многомерные аналоги этих нелокальных бифуркаций и нашел общие условия, при которых из петли рождается только одна периодическая траектория.

Однако вскоре после этого Шильниковым (в работе 1965 г.) было открыто совершенно неожиданное и принципиально новое явление, коренным образом изменившее представление о динамике многомерных систем. Он обнаружил, что наличие гомоклинической петли у состояния равновесия типа седло–фокус влечет при выполнении определенных условий (которые сейчас называются условиями Шильникова) существование бесконечного множества периодических траекторий. При этом в любой окрестности гомоклинической петли лежит нетривиальное гиперболическое множество, что свидетельствует о хаотической динамике с весьма богатой структурой.



А. А. Андронов



Е. А. Леонтович

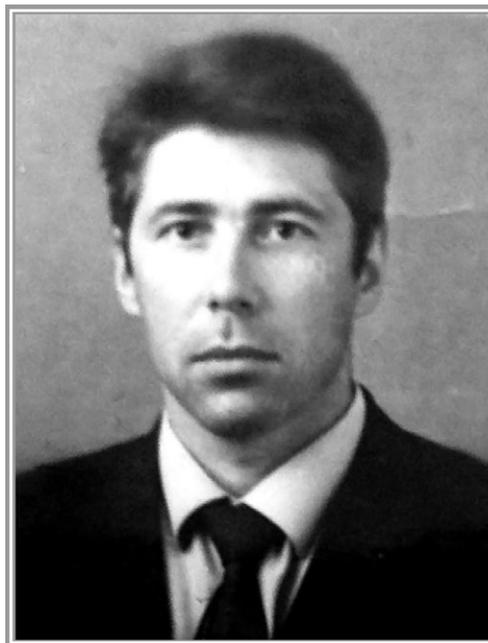


А. Г. Майер

К настоящему времени открытый Шильниковым спиральный хаос обнаружен во многих моделях, вне зависимости от их происхождения, будь то физика, химия или биология. А тогда, в 1965 году, никто даже не подозревал, что такая простая на первый взгляд структура приводит к столь сложному поведению траекторий. Для самого Леонида Павловича это открытие стало определяющим моментом его научной жизни, и последующие десятилетия он посвятил исследованию основных гомоклинических структур, ответственных за различные типы хаотического поведения многомерных систем.

К этой теме в первую очередь следует отнести важнейшие работы Л. П. Шильникова, в которых им была решена задача о структуре множества траекторий, целиком лежащих в малой окрестности грубой (трансверсальной) гомоклинической траектории Пуанкаре. Шильников показал, что данное множество равномерно гиперболично и допускает полное описание в терминах топологической схемы Бернулли из двух символов.<sup>1</sup> Шильников считал этот результат принципиально важным и не устал подчеркивать, что существование грубой гомоклинической траектории Пуанкаре является универсальным критерием хаоса. Для преодоления технических трудностей, возникающих при исследовании поведения нелинейной системы в окрестности седловых состояний равновесия и периодических траекторий, Шильников создает новую технику «краевой задачи», которая потом была развита и использована им во многих других ситуациях. Таким путем были изучены структура множества траекторий вблизи гомоклинической трубы инвариантного тора и (вместе с Л. М. Лерманом) вблизи гомоклинических траекторий в бесконечномерных и неавтономных системах. Эти результаты в совокупности намного опередили свое время. Так, еще в своей работе 1968 г. Шильников писал, что гомоклинические трубы к инвариантным торах важны в задаче о диффузии Арнольда. И действительно, в последние годы конструкция Шильникова стала активно применяться в подобных задачах.

К этому же времени (конец 60-х) относится еще одно удивительное его открытие нового класса бифуркаций, которые сейчас называются гомоклиническим  $\Omega$ -взрывом. Имеется в виду ситуация, когда у системы до момента бифуркации была простая динамика (система Морса–Смейла), а сразу после бифуркации ее динамика мгновенно становится сложной, хаотической. Шильников привел пример такой бифуркации системы на границе систем Морса–Смейла,



Л. П. Шильников в 1960-е годы

<sup>1</sup> Гомоклинические траектории были открыты Пуанкаре еще в конце 19-го века при исследовании им задачи трех тел. Такие траектории лежат в пересечении устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий седловой периодической траектории. Когда соответствующее пересечение является трансверсальным, гомоклиническая траектория называется грубой. Еще Пуанкаре понимал, что в окрестности грубой гомоклинической траектории имеет место сложное хаотическое поведение траекторий. Однако только лишь в работе 1935 г. Биркгоф показал, что в случае аналитического сохраняющего площадь отображения здесь существует счетное множество периодических траекторий. Через 30 лет, в 1965 г., Смейл установил, что в типичном случае (когда есть гладкая линеаризация вблизи седла) в этой окрестности также существует нетривиальное гиперболическое подмножество траекторий, аналогичное подкове Смейла. В 1967 г. Л. П. Шильников дал окончательное решение этой задачи (которую он называл задачей Пуанкаре–Биркгофа), получив полное описание всех траекторий, целиком лежащих в окрестности грубой гомоклинической траектории Пуанкаре.



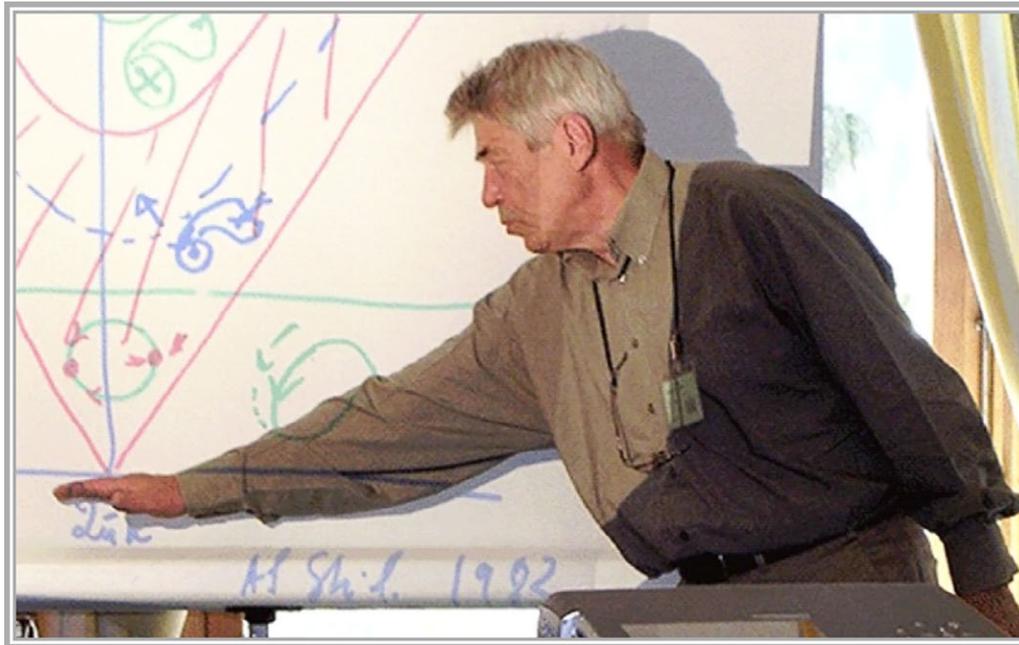
А. Д. Морозов, М. И. Малкин, Л. П. Шильников и Л. М. Лерман на банкете, посвященном 90-летию ННГУ (2006)

имеющей несколько гомоклинических петель состояния равновесия типа седло–седло (это всегда условие коразмерности один, независимо от числа петель). В этом случае при исчезновении равновесия на месте букета гомоклинических петель возникает нетривиальное гиперболическое инвариантное множество. По простоте конструкции этот сценарий гомоклинического  $\Omega$ -взрыва, предложенный Шильниковым, превосходит все известные на сегодня, и до сравнительно недавнего времени он был единственным, в котором возникающее сложное множество является равномерно гиперболическим.<sup>2</sup>

Уже эти первые результаты 60-х годов сделали имя Л. П. Шильникова известным в научном мире. А с начала 70-х годов вокруг Леонида Павловича стал образовываться научный коллектив учеников и единомышленников. В течение многих лет Шильников был заведующим лабораторией в руководимом Е. А. Леонтович-Андроновой отделе дифференциальных уравнений НИИ ПМК, а с 1982 г. он стал заведующим этим отделом. Первыми учениками Леонида Павловича были Н. К. Гаврилов, В. С. Афраймович, Л. М. Лерман, А. Д. Морозов, Л. А. Беляков и В. В. Быков. Затем их круг расширился, в отдел пришли А. Н. Баутин, В. И. Лукьянов, С. В. Гонченко, М. И. Малкин, Д. В. Тураев, А. Л. Шильников и др. В результате сформировалась мощная научная группа, которая составила костяк известной сейчас во всем мире школы динамических систем Шильникова.

В работах шильниковской школы в 1970–1980-х годах был, по существу, создан новый раздел теории многомерных динамических систем — теория глобальных бифуркаций, а также заложены теоретические основы современной теории математической синхронизации. Одной из важнейших тем этих исследований стала фундаментальная проблема бифуркационных сценариев перехода к хаосу от систем с простой структурой. Первоначально были выделены две такие большие группы сценариев: переход к хаосу через гомоклинические касания и через разрушение двумерных инвариантных торов.

<sup>2</sup>Еще один сценарий такого типа был описан в работе Тураева и Шильникова (1995), в которой был представлен пример бифуркации «катастрофы голубого неба» с рождением гиперболического аттрактора.



Л. П. Шильников на лекции по математической теории синхронизации

Основные бифуркации гомоклинических касаний были изучены в работах Н. К. Гаврилова и Л. П. Шильникова (1972–1973). Впоследствии эти исследования активно продолжались. Было получено много интересных результатов, а главным открытием, как считал сам Шильников, явилось то, что бифуркации систем с квадратичными касаниями приводят к появлению гомоклинических касаний сколь угодно высокого порядка (Гонченко–Тураев–Шильников). Таким образом, было явно показано, что традиционная логика исследования бифуркаций по степени увеличения коразмерности, идущая от теории особенностей, не работает при изучении многих классов систем со сложной динамикой. В частности, если система зависит от конечного числа параметров и при некотором их значении имеется гомоклиническое касание, то полное описание динамики и бифуркаций системы получить в принципе невозможно! Эти результаты в совокупности с теорией Ньюхауса<sup>3</sup> составляют в настоящее время фундамент теории гомоклинического хаоса.

Несомненно, к одному из самых главных научных достижений Л. П. Шильникова нужно с полным правом также отнести его вклад в развитие современной математической теории синхронизации. Классическая теория, восходящая к известным работам А. А. Андронова и А. А. Витта, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и др., имела дело с изучением влияния периодических возмущений малой амплитуды либо на автоколебательную систему, либо на систему, близкую к линейной консервативной. В работах 1970-х годов Л. П. Шильникова и А. Д. Морозова соответствующие задачи были впервые рассмотрены для систем, близких к нелинейным консервативным системам. В те же годы в работах Л. П. Шильникова, написанных совместно с В. С. Афраймовичем, были разработаны новые качественные и аналитические методы исследования многомерных автоколебательных систем с периодическими (вообще говоря, не малыми) возмущениями, в том числе были указаны и исследованы их бифуркации, приводящие к сложной хаотической динамике. В частности, были исследованы глобальные бифуркации, связанные с исчезновением

<sup>3</sup>В своих работах 70-х годов Ньюхаус показал, что системы с гомоклиническими касаниями плотно заполняют области в пространстве динамических систем (области Ньюхауса). Первоначально этот результат был представлен Ньюхасом как некоторый контрпример к гипотезе Смейла о плотности грубых многомерных систем. Однако, конечно, более важным оказалось то значение, которое имеет открытие Ньюхауса для нелинейной динамики в целом.



Л. П. Шильников с учениками и коллегами на Международной конференции по динамическим системам, посвященной его 70-летию (Нижний Новгород, 2005). Слева направо: В. С. Гонченко (аспирант), А. Ю. Жиров, С. В. Гонченко, Л. П. Шильников, Е. А. Сатаев, Р. В. Плыкин

седло-узловой периодической траектории в многомерной системе в случае, когда ее неустойчивое многообразие возвращается в устойчивую область. До этих работ считалось, что такая бифуркация должна обязательно приводить к появлению гладкого двумерного (квазипериодического) инвариантного тора по аналогии с известной бифуркацией Андронова–Витта возникновения устойчивого предельного цикла (автоколебания) при исчезновении седло-узла с гомоклинической петлей. Поэтому совершенно неожиданным оказалось сделанное в работах Афраймовича и Шильникова открытие того, что еще до момента бифуркации резонансный тор может стать негладким, а после бифуркации (когда седло-узел исчезает) тор разрушается, и на его месте возникает хаотическое множество. Фактически здесь был открыт и исследован новый универсальный механизм перехода к хаосу через разрушение двумерного тора. К настоящему времени, в связи с развитием компьютерной техники, этот сценарий является «общим местом» в прикладных исследованиях и часто наблюдается в конкретных моделях.

В конце 70-х годов системами со сложной динамикой заинтересовались физики и ученые из других областей науки. Вопрос о том, насколько открытый математиками динамический хаос нужен для естествознания, обсуждался весьма широко, и Шильников принимал в дискуссиях активное участие. И здесь поворотным моментом, а по сути, доказательством того, что динамический хаос является одним из фундаментальных явлений природы, стало открытие странного аттрактора в системе Лоренца. В то время в теории динамических систем были известны только гиперболические странные аттракторы. Однако в системах из приложений они тогда не наблюдались, и физики относились к ним с недоверием, как к чисто математическому объекту. Шильников понимал, что исследование системы Лоренца неминуемо приведет к совершенно новому взгляду на природу динамического хаоса. Он немедленно начал серию замечательных работ по аттрактору Лоренца, выполненных совместно с В. С. Афраймовичем и В. В. Быковым.

Его идея состояла в том, что непосредственное изучение системы можно заменить исследованием так называемой геометрической модели, которая позволяла дать детальное описание

структуры аттрактора Лоренца. Кроме того, было показано, что аттрактор Лоренца всегда негрубый: в нем при малых возмущениях возникают и исчезают петли сепаратрис. Что особенно важно, были исследованы бифуркации аттрактора Лоренца, приводящие к его рождению, образованию лакун и разрушению аттрактора.<sup>4</sup> Независимо и практически одновременно на Западе появилось большое число статей по аттрактору Лоренца. Тем не менее, по сравнению с другими подходами, теория Афраймовича–Быкова–Шильникова до сих пор остается наиболее полной и удобной для анализа структуры и эволюции аттракторов лоренцевского типа в различных системах.

Л. П. Шильников очень гордился этими результатами, и тематика с аттракторами Лоренца оставалась для него приоритетной вплоть до конца жизни. В первую очередь его занимал вопрос о бифуркационных механизмах возникновения и разрушения аттрактора Лоренца. В частности, он предложил эффективные критерии рождения аттрактора Лоренца при глобальных бифуркациях (1981), а позднее в его работе с Д. Тураевым и А. Шильниковым (1993) были построены также эффективные критерии рождения аттрактора Лоренца при локальных бифуркациях.

Еще при работе над первыми статьями по аттрактору Лоренца было замечено, что он может разрушаться при образовании гомоклинических касаний и в нем появляются устойчивые периодические траектории больших периодов и с настолько узкими областями притяжения, что сам аттрактор при компьютерном моделировании продолжает оставаться хаотическим. Это послужило непосредственным толчком для формирования концепции квазиаттрактора — притягивающего множества, которое наряду с гиперболическими подмножествами может содержать и устойчивые периодические траектории больших периодов. Шильников считал, что идея квазиаттрактора дает наиболее адекватный математический образ динамического хаоса, наблюдаемого во многих прикладных задачах.

В дальнейшем этой теме — исследованию глобальных бифуркаций, приводящих к рождению устойчивых периодических траекторий — было посвящено немало работ Шильникова и его учеников. При этом были найдены не только условия появления таких траекторий, но также были построены критерии их отсутствия (как у самой системы, так и у всех близких). Впоследствии это привело к открытию в его работе с Тураевым (1998) нового класса псевдогиперболических аттракторов, которые, так же как и гиперболические, сохраняют свою хаотичность при всех малых гладких возмущениях, но, в отличие от последних, допускают гомоклинические касания. Сейчас теория псевдогиперболических аттракторов активно развивается в основном в работах учеников Л. П. Шильникова, и уже известно немало примеров таких аттракторов в конкретных моделях.



Рыбалка была настоящей страстью для Леонида Павловича (за любимым занятием на берегу озера в Атланте, 2007)

<sup>4</sup>При этом важную роль в исследовании динамических свойств аттрактора Лоренца и его бифуркаций играла конструкция инвариантного слоения для отображения Пуанкаре. Она позволила свести анализ топологических свойств динамики на аттракторе к изучению одномерного разрывного фактор-отображения. В свою очередь, это позволило провести полную классификацию таких отображений с помощью нидинг-инвариантов (М. И. Малкин).

В области приложений Л. П. Шильников опубликовал ряд работ по математическим проблемам возникновения турбулентности, вызвавшим большой интерес у физиков. В частности, он описал несколько феноменологических сценариев возникновения странных аттракторов в многомерных потоках и отображениях, в том числе гиперхаотических спиральных аттракторов, которые сейчас называются аттракторами Шильникова. Он также интересовался структурой уединенных волн (солитонов и фронтов), поскольку они естественно описываются гомоклиническими и гетероклиническими решениями. В основном работы по солитонной тематике проводились в сотрудничестве с группой физиков из Москвы, возглавляемой В. М. Елеонским. В частности, в этих работах был открыт новый тип солитонов, математическим образом которых являются так называемые супергомоклиники (двойкоасимптотические траектории к гомоклиническим петлям).

Леонид Павлович Шильников был выдающимся специалистом в теории динамических систем, обладавшим широким кругозором и особенной интуицией. Как истинный большой ученый, он умел «волшебным образом» увидеть связь между, казалось бы, несвязанными вещами, найти единственно правильную постановку задачи, предложить подход, который неожиданно становился актуальным годы спустя. Это было одной из основных причин, почему многие специалисты из различных областей науки поддерживали и ценили тесные контакты с Л. П. Шильниковым.

За более чем полувековой период научной деятельности Л. П. Шильников опубликовал более 200 работ, в том числе несколько монографий. Работы Л. П. Шильникова получили широкое признание в мировом научном сообществе. Подтверждением этого является присуждение ему премии А. М. Ляпунова Российской академии наук (1998) и премии М. А. Лаврентьева Национальной академии наук Украины (2005). В 2001 г. ему была присуждена премия фонда А. Гумбольдта. Л. П. Шильников был несомненным лидером нижегородской математической жизни, одним из инициаторов создания Нижегородского математического общества (1995) и его первым президентом. В его честь был организован ряд международных конференций по динамическим системам как у нас, так и за рубежом. В Нижегородском университете стало хорошей традицией ежегодно, начиная с 2012 года, проводить конференцию по динамическим системам «Shilnikov WorkShop», посвященную памяти Л. П. Шильникова. Эту конференцию мы проводим всегда в декабре:



Л. П. Шильников с супругой Людмилой Ивановной (Флорида, 2007)

даты ее проведения приурочены к 17 декабря — дню рождения Л. П. Шильникова. В 2022 году в ННГУ была проведена первая межвузовская студенческая олимпиада по математике имени Л. П. Шильникова. Она прошла с большим успехом и собрала большое число талантливой молодежи. Теперь эта олимпиада стала ежегодной.

7 ноября 2016 года в Нижегородском университете была открыта мемориальная доска в честь Леонида Павловича Шильникова. В 2017 году в издательстве Нижегородского университета вышла из печати книга Л. П. Шильникова «Избранные труды», в которой были представлены, в частности, его классические работы по теории бифуркаций, относящиеся к 1960–1970-м годам. Как показало время, они намного опередили общий уровень мировых исследований и сохраняют свою актуальность и по сей день.



Мемориальная доска Л. П. Шильникову на стене учебного корпуса № 6 университетского городка ННГУ



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Обзорная статья  
УДК 517.925 + 517.93

DOI: 10.18500/0869-6632-003138  
EDN: PFFDTK

### Смешанная динамика: элементы теории и примеры

С. В. Гонченко<sup>1,2</sup>, А. С. Гонченко<sup>1,2</sup>, А. О. Казаков<sup>1</sup>✉, Е. А. Самылина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия  
E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, agonchenko@mail.ru, ✉kazakovdz@yandex.ru, samylina\_evgeniya@mail.ru

Поступила в редакцию 15.07.2024, принята к публикации 4.08.2024,  
опубликована онлайн 26.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Основной целью работы является представление недавних результатов, полученных в математической теории динамического хаоса и связанных с открытием его новой третьей формы, так называемой смешанной динамики. Этот тип хаоса сильно отличается от двух его классических форм — консервативного и диссипативного хаоса, и главное его отличие состоит в том, что аттракторы и репеллеры могут пересекаться, не совпадая при этом. Основные результаты работы связаны с построением теоретических схем, направленных на математическое обоснование этого явления с помощью самых общих методов топологической динамики. В работе также приводятся ряд примеров систем из приложений, в которых наблюдается смешанная динамика. Показывается, что такая динамика может быть разных типов: от близкой к консервативной до сильно диссипативной, а также что она может возникать в результате различных бифуркационных механизмов.

**Ключевые слова:** динамический хаос, смешанная динамика, CRH-аттрактор, полный аттрактор, абсолютная область Ньюхауса.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 24-11-00339 (раздел 1), гранта РФФ № 23-71-30008 (раздел 2). Исследования в разделе 3.1 проведены в рамках гранта FSWR-2020-0036 Министерства науки и высшего образования РФ, а исследования разделах 3.2 и 3.3 выполнены при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

**Для цитирования:** Гонченко С. В., Гонченко А. С., Казаков А. О., Самылина Е. А. Смешанная динамика: элементы теории и примеры // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 722–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003138. EDN: PFFDTK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Mixed dynamics: elements of theory and examples

S. V. Gonchenko<sup>1,2</sup>, A. S. Gonchenko<sup>1,2</sup>, A. O. Kazakov<sup>1</sup>✉, E. A. Samylina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, agonchenko@mail.ru, ✉kazakovdz@yandex.ru,  
samylina\_evgeniya@mail.ru

Received 15.07.2024, accepted 4.08.2024, available online 26.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The main goal of the paper is to present recent results obtained in the mathematical theory of dynamical chaos and related to the discovery of its new, third, form, the so-called mixed dynamics. This type of chaos is very different from its two classical forms, conservative and dissipative chaos, and its main difference is that attractors and repellers can intersect without coinciding. The main results of the paper are related to construction of theoretical schemes aimed to mathematical justification of this phenomenon using the most general methods of topological dynamics. The paper also provides a number of examples of systems from applications in which mixed dynamics is observed. It is shown that such dynamics can be of different types, from close to conservative to strongly dissipative, and also that it can arise as a result of various bifurcation mechanisms.

**Keywords:** dynamical chaos, mixed dynamics, CRH-attractor, full attractor, absolute Newhouse domain.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-11-00339 (section 1), the Russian Science Foundation grant No. 23-71-30008 (section 2). Research in section 3.1 was carried out within the framework of the grant FSWR-2020-0036 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. The studies in sections 3.2 and 3.3 were carried out with the financial support of the fundamental research program of the National Research University Higher School of Economics.

**For citation:** Gonchenko SV, Gonchenko AS, Kazakov AO, Samylina EA. Mixed dynamics: elements of theory and examples. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):722–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003138

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Введение

Когда говорят о динамическом хаосе в конечномерных системах, обычно имеют в виду две его совершенно разные формы: консервативный и диссипативный.

*Консервативный хаос* характерен для систем, сохраняющих фазовый объем, в частности, для гамильтоновых систем с двумя и большим числом степеней свободы. При этом все фазовое пространство такой хаотической (неинтегрируемой) системы выглядит как некоторое неравномерно гиперболическое «хаотическое море» с беспорядочно разбросанными внутри него эллиптическими островами (островками устойчивости по Ляпунову), и никаких асимптотически устойчивых инвариантных множеств здесь нет. Говорят, что здесь хаос «размазан» (возможно, крайне неравномерно) по всему фазовому пространству. С точки зрения топологической динамики [1] консервативная динамика для систем с компактным фазовым пространством характеризуется тем, что это фазовое пространство является цепно-транзитивным, то есть от каждой его точки можно перейти к любой другой по  $\varepsilon$ -траекториям системы для любого  $\varepsilon > 0$ . Такие системы называются *топологически консервативными*, и их класс гораздо шире, чем системы, сохраняющие фазовый объем. В частности, таковыми являются все ановские отображения двумерного тора [2], которые в общем случае не сохраняют площадь. Существуют и другие примеры таких систем (см., в частности, раздел 1.3 и рис. 6).

*Диссипативный хаос* имеет совсем другую природу: он связан прежде всего с существованием в фазовом пространстве системы странных аттракторов — асимптотически устойчивых замкнутых инвариантных множеств с нетривиальной структурой. Поэтому фазовое пространство

диссипативной системы устроено совсем по-другому, чем у консервативных систем. Когда такое фазовое пространство компактно, в нем существуют «дырки» двух типов — это поглощающие области, в которые входят все положительные полутраектории, пересекающие их границу, и отталкивающие области, которые являются поглощающими при обращении времени. При этом аттракторы лежат внутри поглощающих областей, а репеллеры (аттракторы при обращении времени) — внутри отталкивающих областей. Соответственно, здесь аттракторы и репеллеры лежат в разных частях фазового пространства и, естественно, не пересекаются.

Целью настоящей работы является обзор недавних результатов, полученных в теории динамического хаоса, которые заставляют по-новому взглянуть на саму эту теорию. В основе этих результатов лежит открытие нового третьего типа динамического хаоса, так называемой *смешанной динамики* [3, 4], суть которой состоит в том, что аттракторы и репеллеры в системе могут пересекаться, не совпадая при этом. На первый взгляд это кажется невозможным и противоречащим здравому смыслу, если считать, как это общепринято, что аттрактор — это притягивающее множество, к которому стремятся все траектории из его окрестности, а репеллер — отталкивающее (притягивающее в обратном времени), и оба они являются замкнутыми инвариантными множествами. Однако в работе [5], как мы теперь знаем, было показано в главных деталях, как это противоречие между «отталкиванием и притягиванием» может быть преодолено, не выходя за рамки классической теории динамических систем.

О самой работе [5] мы поговорим более подробно в разделе 2, а здесь отметим только лишь ее основной результат. Именно в [5] было установлено, что двумерные отображения (диффеоморфизмы) могут иметь одновременно бесконечно много устойчивых и бесконечно много вполне неустойчивых периодических траекторий, стоков и источников соответственно, причем таких, что *замыкания множества стоков и множества источников имеют непустое пересечение*<sup>1</sup>. Очевидно, по любому разумному определению аттрактора системы, периодические стоки должны ему принадлежать, соответственно, периодические источники должны принадлежать репеллеру. Поскольку и аттракторы, и репеллеры являются замкнутыми инвариантными множествами, то, естественно, они должны содержать и замыкания входящих в них траекторий. В частности, они должны содержать не только сами множества стоков и источников, но и их замыкания. А тогда, в силу [5], хаотические аттракторы и репеллеры систем из абсолютных областей Ньюхауса должны типично нетривиально пересекаться<sup>2</sup>.

Таким образом, чисто математический результат, полученный в [5], непосредственно указывает на возможность существования совершенно нового типа хаоса, при котором аттракторы не отделены от репеллеров. Однако этот вывод тогда, в конце 90-х, казался абсолютно парадоксальным, поскольку он полностью противоречил общепринятой концепции (даже в определенном смысле аксиоме) динамического хаоса, по которой аттракторы должны быть отделены от репеллеров. При этом консервативный хаос рассматривался как абсолютно другой тип динамического хаоса, для которого понятия «аттрактор» и «репеллер» вообще не употреблялись<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>Более того, диффеоморфизмы такого типа типичны в так называемых абсолютных областях Ньюхауса [6, 7], то есть они образуют подмножества второй категории Бэра в открытых (в  $C^2$ -топологии) областях пространства динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями, а также системы с универсальной динамикой [8]. Одним из критериев универсальной динамики является существование у системы грубых периодических траекторий всех топологических типов, допускаемых ее размерностью (устойчивых, вполне неустойчивых и седловых всех индексов, то есть всех размерностей устойчивых инвариантных многообразий). Возможность появления такой динамики в любой размерности при бифуркациях негрубых гетероклинических контуров была установлена в работе [9].

<sup>2</sup>Конечно, с точки зрения эволюционной динамики аттракторы и репеллеры по определению разделены по времени как предельные режимы в будущем и в прошлом. Однако как множества в фазовом пространстве они всегда являются важнейшими топологическими инвариантами любой системы.

<sup>3</sup>Однако, в принципе, в случае консервативных систем, заданных на компактном фазовом пространстве  $M$ , можно считать, что «аттрактором» и одновременно «репеллером» системы является все  $M$  — тогда такие «аттрактор» и «репеллер» естественно совпадают. Это представление вполне согласуется с понятием максимального аттрактора

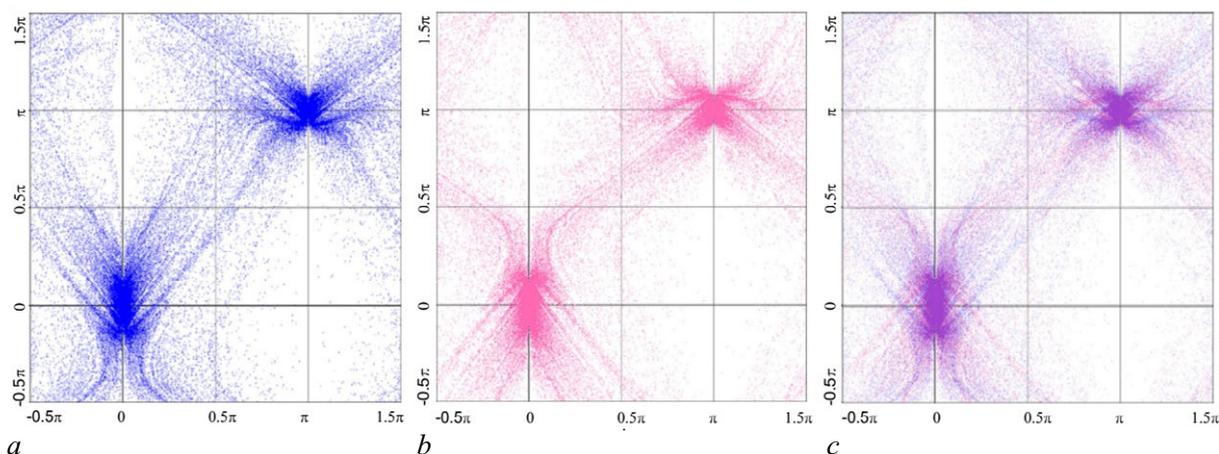


Рис. 1. Пример хаотической динамики в модели Пиковского–Топаж 4-х связанных ротаторов [16]. Здесь фазовое пространство для отображения Пуанкаре является двумерным тором. Подсчитано  $2 \cdot 10^5$  итераций, последние  $10^5$  из них показаны на картинках; *a* – аттрактор – результат итерирования вперед показан синими точками; *b* – репеллер – результат итерирования назад показан красными точками; *c* – смешанная динамика – картинки *a* и *b* наложены друг на друга, в результате то множество, по которому аттрактор пересекается с репеллером, получилось в фиолетовых тонах (цвет онлайн)

Fig. 1. An example of chaotic dynamics in the Pikovsky–Topaj model of 4 coupled rotators [16]. Here the phase space for the Poincaré map is a two-dimensional torus.  $2 \cdot 10^5$  iterations have been calculated, the last  $10^5$  of them are shown in the pictures; *a* – attractor – the result of iterating forward is shown with red dots; *b* – repeller – the result of iterating backwards is shown with blue dots; *c* – mixed dynamics – pictures *a* and *b* are superimposed on each other, as a result, the set by which the attractor intersects with the repeller turned out in purple tones (color online)

Но даже тот математический факт из [5], что в диссипативном случае аттракторы и репеллеры могут, в принципе, иметь непустое пересечение, сам по себе вполне мог оказаться интересным только лишь как чисто теоретический. С точки зрения приложений он мог оказаться совсем неинтересным, так как более вероятным (в силу «аксиомы» об отделимости аттракторов от репеллеров) казалось то, что явление смешанной динамики не может наблюдаться на практике. Действительно, численных экспериментов, в которых рассматривались репеллеры, было очень мало, а аттракторы практически во всех из них рассматривались исключительно как «аттракторы точки», то есть как асимптотически устойчивый предельный режим для положительных полутраекторий одной начальной точки, в лучшем случае нескольких – если, например, рассматривались вопросы мультистабильности. Более того, даже в случае двумерных диффеоморфизмов из абсолютных областей Ньюхауса, таких, как в [5], итерации точки могли вполне сходиться к простому аттрактору, например, устойчивой траектории очень большого периода, так что его трудно было бы отличить от хаотической орбиты, см. дискуссию на эту тему в [11–14].

Таким образом, идея о том, что хаотические аттракторы и репеллеры могут нетривиально пересекаться, на первых порах, что называется, «повисла в воздухе». Однако нужно сказать, что первый же известный нам численный эксперимент с аттракторами и репеллерами, проведенный в работе Пиковского и Топаж [15] с моделью четырех симметрично связанных простых ротаторов, показал, что численно найденные аттракторы и репеллеры могут пересекаться по визуально большому множеству (практически совпадают), см. рис. 1. Хаотическая динамика этой модели весьма детально была исследована в нашей работе [16], в которой, собственно,

или репеллера (когда в качестве поглощающей (отталкивающей) области рассматривается все  $M$ ), а также с введенным в работе Рюэлля [10] определением аттрактора как устойчивого цепно-транзитивного множества, см. также раздел 1.4. Заметим, что для консервативных систем с компактным фазовым пространством, в силу теоремы Пуанкаре о возвращаемости, единственным цепно-транзитивным инвариантным множеством является все фазовое пространство.

и было доказано существование смешанной динамики в модели Пиковского–Топажа, см. также раздел 3.1 настоящей работы. Заметим, что самой первой моделью из приложений, в которой была целенаправленно найдена смешанная динамика, оказалась неголономная модель кельтского камня [17]. Кроме того, в работе [18] был не только предложен ряд критериев существования смешанной динамики у двумерных обратимых диффеоморфизмов с хаотической динамикой, но также и сформулирована гипотеза об обратимой смешанной динамике (RMD-conjecture). Эта гипотеза была доказана в [19] для так называемого априори неконсервативного случая (в класс таких систем попадает также и указанная модель Пиковского–Топажа).

К настоящему времени известен уже целый ряд моделей из приложений, в которых наблюдается смешанная динамика, см., например, [16–18, 20–29]. На рис. 2 проиллюстрированы результаты исследования хаотической динамики неголономной модели кельтского камня [17], рис. 2, *a*, и модели двух вихрей взаимодействующих с акустической волной [24], рис. 2, *b*.

Здесь на рис. 1 и 2 показаны фазовые портреты аттрактора (синие точки) и репеллера (красные точки) у соответствующих отображений Пуанкаре, которые двумерны в случае модели Пиковского–Топажа и модели вихрей и трехмерны в случае модели кельтского камня. Как видно, аттрактор и репеллер во всех случаях пересекаются. При этом для модели Пиковского–Топажа, рис. 1, и неголономной модели кельтского камня, рис. 2, *a*, аттрактор и репеллер пересекаются по визуально достаточно большому множеству, которое выглядит преимущественно в перемешанном (фиолетовом) цвете. Здесь численные результаты хорошо согласуются с теорией [4], по которой в случае смешанной динамики пересекающиеся хаотические аттрактор и репеллер должны почти совпадать (см. также раздел 1.4). В противоположность этому для модели двух вихрей, рис. 2, *b*, аттракторы и репеллеры также определенно пересекаются, но по визуально довольно «тощему» множеству. Это видимое противоречие с теорией объясняется тем, что здесь мы имеем дело с так называемой *сильно диссипативной смешанной динамикой*. В этом случае носителями аттрактора и репеллера являются инвариантные множества, которые по теории должны почти совпадать. Однако предельное распределение положительных и отрицательных итераций на них, сходящееся к соответствующим взаимно сингулярным инвариантным мерам  $\mu_{+\infty}$  и  $\mu_{-\infty}$ , экстремально

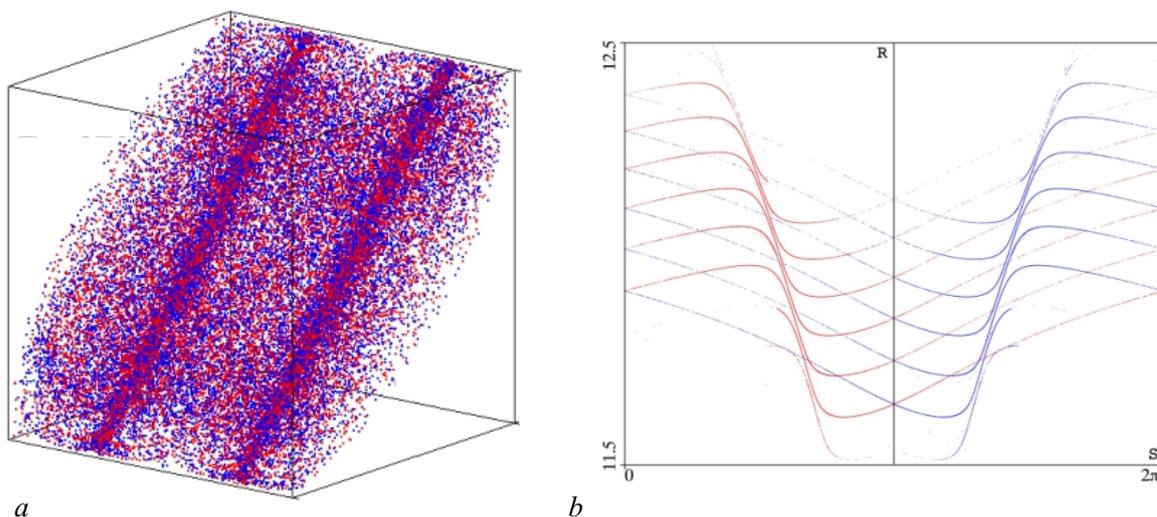


Рис. 2. Примеры смешанной динамики: *a* — в неголономной модели кельтского камня [17]; *b* — в модели двух вихрей, взаимодействующих с акустической волной [24] (цвет онлайн)

Fig. 2. Examples of mixed dynamics: *a* — in the nonholonomic model of the Celtic stone [17]; *b* — in the model of two vortices interacting with an acoustic wave [24] (color online)

асимметрично (почти вся  $\mu_{+\infty}$  сконцентрирована на синей части носителя (как бы на бывшем до слияния аттракторе), а почти вся  $\mu_{-\infty}$  — на красной части носителя<sup>4</sup>). Как показывают наши исследования, в случае модели двух вихрей никаким разумным числом итераций не удастся достичь хотя бы приблизительного сходства аттрактора и репеллера.

Математическое обоснование явления смешанной динамики в случае обратимых по времени систем было дано в работе [3], а в общем случае — в работе [4], см. также [29–31]. В первой части настоящей статьи (разделы 1 и 2) мы дадим детальный обзор результатов этих работ. В разделе 1 мы обсуждаем понятие аттрактора (и репеллера как аттрактора в обратном времени), а в разделе 2 — те теоретические результаты, из которых вытекает возможность нетривиального пересечения аттракторов и репеллеров. Основная проблема здесь — это как определить аттрактор универсальным образом так, чтобы его определение было бы максимально общим, то есть отражало природу аттрактора как «устойчивого замкнутого инвариантного множества», а кроме того, чтобы соответствующим образом определяемый аттрактор являлся бы еще и топологическим инвариантом. Последнее означает, что аттрактор должен быть определен в топологических терминах. По сути, здесь мы следуем подходу, предложенному в работах Конли, Рюэля и Харли [10, 32, 33], определять аттрактор в терминах топологической динамики, то есть с помощью аппарата  $\varepsilon$ -траекторий, и, соответственно, рассматривать тип его устойчивости как устойчивость относительно постоянных возмущений (что равносильно устойчивости относительно малого ограниченного шума), см. определения из раздела 1.4. У такого подхода есть ряд своих достоинств. Так, оно не противоречит классическому определению аттрактора, см. определение 1, а лишь обобщает его: дает возможность определять (в духе Конли [32]) аттрактор для любой системы с компактным фазовым пространством; имеет также практическую направленность, о чем писали еще Рюэлли и Харли [10, 33], есть и другие достоинства, подробнее см. раздел 1.4 и [30]. В разделе 1.6 мы даем определение полного аттрактора системы (фактически как максимального замкнутого инвариантного и устойчивого ее множества), а также полного репеллера системы, что, собственно, и является основой для возможности выделения трех различных форм динамики систем на компактном фазовом пространстве  $M$ :

- (топологически) консервативная динамика, когда полный аттрактор  $\mathcal{A}$  и полный репеллер  $\mathcal{R}$  совпадают, а также совпадают с  $M$ , то есть  $\mathcal{A} = \mathcal{R} = M$ ;<sup>5</sup>
- диссипативная динамика, когда  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ ;
- смешанная динамика, когда  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$  и  $\mathcal{A} \neq \mathcal{R}$ .

Однако в теории динамического хаоса, которую нельзя рассматривать как чисто математическую дисциплину, существуют важные проблемы, касающиеся того, как соответствующие теоретические конструкции и положения соотносятся с экспериментами. Во второй части работы, разделе 3, мы рассмотрим ряд моделей: модель Пиковского–Топажа 4-х связанных ротаторов; неголономную модель кельтского камня; модель двух вихрей, взаимодействующих с акустической волной и др., в которых наблюдается смешанная динамика, а также неконсервативное отображение Аносова, демонстрирующее заведомо топологически консервативную динамику. В последнем случае динамика такая, что все фазовое пространство (двумерный тор) является одновременно и аттрактором, и репеллером. В случае смешанной динамики аттрактор и репеллер также имеют непустое пересечение, но полностью не совпадают. Здесь множество  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R}$ , которое мы будем называть *обобщенным обратимым ядром*, см. [4], является замкнутым инвариантным

<sup>4</sup>Эту особенность распределения сингулярных мер  $\mu_{+\infty}$  и  $\mu_{-\infty}$  можно формализовать также тем, что так называемое расстояние Вассерштайна между аттрактором и репеллером в модели двух вихрей достаточно большое (тогда как оно мало в случаях модели Пиковского–Топажа и кельтского камня). См. также на эту тему работу [28].

<sup>5</sup>В этом случае  $M$  является цепно-транзитивным множеством и, следовательно, одновременно и аттрактором, и репеллером для любой точки фазового пространства.

множеством, к которому не стремятся ни при  $t \rightarrow +\infty$ , ни при  $t \rightarrow -\infty$  никакие траектории точек, не принадлежащих этому множеству. Однако в любой окрестности (обобщенного) обратимого ядра существует счетное множество асимптотических аттракторов и репеллеров. Здесь термином «асимптотический» мы подчеркиваем тот факт, что в любой окрестности такого аттрактора или репеллера существуют точки, траектории которых стремятся к нему при  $t \rightarrow +\infty$  или соответственно при  $t \rightarrow -\infty$ .

Это в теории. Однако в численных экспериментах эти асимптотические аттракторы и репеллеры часто совсем не обнаруживаются, так как они имеют экстремально узкие области притяжения и отталкивания (как, например, в аттракторе Эно, см. раздел 1.2). В результате, получается, что обобщенное обратимое ядро  $A \cap R$ , точнее его численная аппроксимация, распространяется на все фазовое пространство  $M$ . Этот факт можно объяснить следующим образом. Пусть  $\delta$  — это точность вычислений или амплитуда ограниченного внешнего шума. Тогда мы должны получить, что либо  $\delta$ -окрестность (или  $\delta$ -покрытие) множества  $A \cap R$  совпадает с  $M$ , либо, когда  $\delta$  очень мало, в множестве  $M \setminus (A \cap R)$  имеется лишь конечное число дырок размеров больших  $\delta$ , содержащих асимптотические аттракторы и репеллеры.

В тех примерах, которые мы рассматриваем (для  $\delta \sim 10^{-17}$ ), имеет место, скорее всего, первый случай. Для того чтобы обнаружить «дырки», нужна точность на несколько порядков более высокая. Например, в компьютерных экспериментах Галиаса и Такера [34] с отображением Эно для нахождения устойчивой периодической точки потребовалось не только брать  $\delta \sim 10^{-51}$ , но и использовать весьма нетривиальные принципы вычислений. Как нам кажется, и в наших численных экспериментах должна потребоваться примерно такая же точность для обнаружения «дырок», а кроме того, для уверенного их детектирования придется контролировать вычисления на каждом шагу, то есть вторгаться в область методов доказательных вычислений [35]. Однако здесь важны не сами «дырки» с асимптотическими аттракторами и репеллерами внутри, а факт их существования, который может быть установлен на основании определенных критериев [5, 18, 19, 36]. Эти критерии, основной из которых связан с тем, что рассматриваемая система принадлежит абсолютной области Ньюхауса, обсуждаются в разделе 2.

**Замечание 1.** В работе [16] было показано, что отображение Пуанкаре в случае модели Пиковского–Топажжа принадлежит абсолютной области Ньюхауса, то есть в этом случае доказан основной критерий смешанной динамики. Тот факт, что и для модели кельтского камня, и для модели вихрей соответствующие им системы принадлежат абсолютным областям Ньюхауса, не вызывает сомнения, хотя он пока и не доказан.

## 1. К вопросу об определении аттрактора

Понятие аттрактора, а в особенности странного аттрактора, является до сих пор одним из самых дискутируемых в теории динамических систем. К настоящему времени существует много разных его определений, которые с различных точек зрения отражают природу аттрактора как «устойчивого замкнутого инвариантного множества». Стандартное определение аттрактора (из математической энциклопедии) такое:

- *Аттрактор* — это компактное инвариантное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности.

Приведем также его развернутое изложение (из Википедии).

**Определение 1.** *Аттрактор* — это подмножество  $A$  фазового пространства, для которого выполняются следующие три условия:

- (i)  $A$  положительно инвариантно для системы  $f$ , то есть если  $a \in A$ , то  $f(t, a) \in A$  для всех  $t > 0$ ;
- (ii) существует окрестность  $B(A)$  множества  $A$ , которая называется бассейном притяжения для  $A$  и такая, что  $B(A)$  состоит из всех точек  $b$  фазового пространства, обладающих следующим свойством: для любой открытой окрестности  $N$  множества  $A$  существует положительная константа  $T$  такая, что  $f(t, b) \in N$  для всех  $t > T$ ; говорят, что точки  $b$  «входят в  $A$  при  $t \rightarrow \infty$ »;
- (iii) не существует собственных (непустых) подмножеств в  $A$ , обладающих первыми двумя свойствами.

Здесь  $t$  является независимой переменной — временем, которое либо непрерывно,  $t \in \mathbb{R}$ , для потоков, либо дискретно,  $t \in \mathbb{Z}$ , для отображений.

В этом случае сам аттрактор  $A$  является вполне определенным объектом, и он же является максимальным аттрактором в своей поглощающей области  $U \subset B(A)$ , то есть такой открытой области в фазовом пространстве, что  $T(\bar{U}) \subset U$  в случае отображений или  $T_t(\bar{U}) \subset U$  при  $t > 0$  в случае потоков, где через  $\bar{U}$  обозначено замыкание множества  $U$ . Тогда, соответственно,

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(U) \quad \text{и} \quad A = \bigcap_{t \geq 0} T_t(U).$$

**1.1. Квазиаттракторы по Афраймовичу–Шильникову [12].** Заметим, что определение 1 является корректным и вполне адекватным (а также хорошо согласующимся с численными экспериментами) в случае систем как с простыми (регулярными) аттракторами, так со странными аттракторами, которые сохраняют свою хаотичность при всех малых возмущениях. К последним относятся (нетривиальные) гиперболические аттракторы [2], которые являются грубыми, а также псевдогиперболические аттракторы [37, 38], к которым относятся сингулярно-гиперболические аттракторы (они же аттракторы лоренцевского типа) и дикие гиперболические аттракторы.

Однако, помимо таких настоящих хаотических аттракторов, в теории динамического хаоса большой интерес представляют странные аттракторы другого типа, так называемые *квазиаттракторы*. Для них указанные выше классические определения аттрактора не вполне отражают их природу и, вообще говоря, не годятся, см. дискуссию на эту тему в [11, 12, 14].

Напомним, что квазиаттракторами (по терминологии Афраймовича и Шильникова [12]) называются странные аттракторы, которые либо сами содержат устойчивые периодические траектории с большими периодами и очень узкими областями притяжения, либо такие траектории появляются в них при сколь угодно малых гладких возмущениях. При этом основной механизм возникновения устойчивых периодических траекторий в аттракторе напрямую связан с тем, что системы с квазиаттракторами допускают гомоклинические касания, бифуркации которых приводят к появлению (внутри аттрактора) асимптотически устойчивых периодических траекторий [39, 40].

Фундаментальным свойством квазиаттракторов является то, что соответствующие им системы принадлежат *диссипативным областям Ньюхауса*, то есть открытым областям в пространстве динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями, причем таким областям, для которых имеет место явление *Ньюхауса*:

- В диссипативных областях Ньюхауса типичны (образуют подмножество второй категории Бэра) системы с бесконечным множеством периодических стоков, замыкания которых содержат нетривиальные гиперболические подмножества<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Один из результатов на эту тему здесь такой: пусть диффеоморфизм  $f$  принадлежит диссипативной области

Этот результат определенно показывает, что системы из указанных (диссипативных) областей Ньюхауса могут иметь бесконечно много аттракторов. Однако в численных экспериментах очень часто ничего такого не наблюдается. Здесь, как правило, обнаруживается только один большой аттрактор, фазовый портрет которого выглядит вполне хаотическим, что подтверждается также расчетом определенных характеристик, например, показателей Ляпунова — здесь типична ситуация, когда стандартные вычислительные схемы показывают наличие положительных показателей Ляпунова у траекторий вблизи большого аттрактора. Это позволяет говорить, что численно найденный аттрактор является странным, но нужно иметь в виду, что он является таковым (странным) лишь на физическом уровне строгости, что часто бывает вполне достаточным для экспериментатора.

Нужно также сказать, что характерным свойством систем с квазиаттракторами является также и то, что при изменении значений параметров наряду с сохранением видимой хаотичности могут также наблюдаться явления типа синхронизации: при определенных значениях параметров вместо хаоса наблюдается устойчивая периодическая траектория. Такие открытые множества значений параметров называются окнами устойчивости.

Таким образом, наличие в пространстве параметров областей хаотичности и окон устойчивости является, наряду с существованием гомоклинических касаний, характерной особенностью квазиаттракторов.

Примеров квазиаттракторов великое множество. Можно сказать, что это почти все известные странные аттракторы из приложений. Примеров настоящих (гиперболических, псевдогиперболических или сингулярно-гиперболических) аттракторов известно не так уж много — это:

- нетривиальные гиперболические аттракторы, такие как аттракторы Аносова, Плыкина, Смейла–Вильямса и др., см. обзор [2], которые долгое время представляли лишь теоретический интерес — фактически до работ С.П. Кузнецова, в которых они были обнаружены в прикладных моделях, см. [41];
- сингулярно-гиперболические аттракторы, такие как аттракторы Лоренца трехмерных потоков [42–45];
- дикие псевдогиперболические аттракторы, такие как дискретные аттракторы Лоренца трехмерных отображений [46–48] и дикие спиральные аттракторы Тураева–Шильникова в случае четырехмерных потоков [37, 38].

**Замечание 2.** *Все эти аттракторы являются настоящими странными аттракторами, так как сохраняют свою хаотичность при всех малых гладких возмущениях. При этом псевдогиперболические дикие аттракторы, теория которых была построена в работе Тураева и Шильникова [37], допускают гомоклинические касания. Примеров таких аттракторов известно пока не так уж много, практически все они показаны на рис. 3. На рис. 3, a–d приведены примеры аттракторов трёхмерных отображений, а на рис. 3, e — пример дикого спирального аттрактора четырёхмерного потока (он содержит состояние равновесия типа седло-фокус с одномерным неустойчивым многообразием). Дискретные аттракторы рис. 3, a–c имеют свои аналоги (сингулярно-гиперболические аттракторы) среди трёхмерных потоков — соответственно аттрактор Лоренца, гетероклинический аттрактор Лоренца [48] и сдвоенный аттрактор*

---

Ньюхауса, и пусть  $f$  имеет некоторое равномерно гиперболическое подмножество  $\Lambda$  (любого типа, например, подкову Смейла, несколько подков, одну или несколько седловых периодических траекторий и т. п.). Тогда в некоторой окрестности  $f$  (в  $C^r$ -топологии,  $r \geq 2$ ) типичны диффеоморфизмы, у которых пересечение множества стоков и множества источников содержат  $\Lambda$ . Доказательство здесь стандартное [5, 11], оно основано на принципе вложенных областей для диффеоморфизмов с периодическими стоками и том свойстве множества  $\Lambda$ , что в нем плотны гиперболические (седловые) периодические траектории, у которых для плотного множества значений параметра существуют гомоклинические касания.

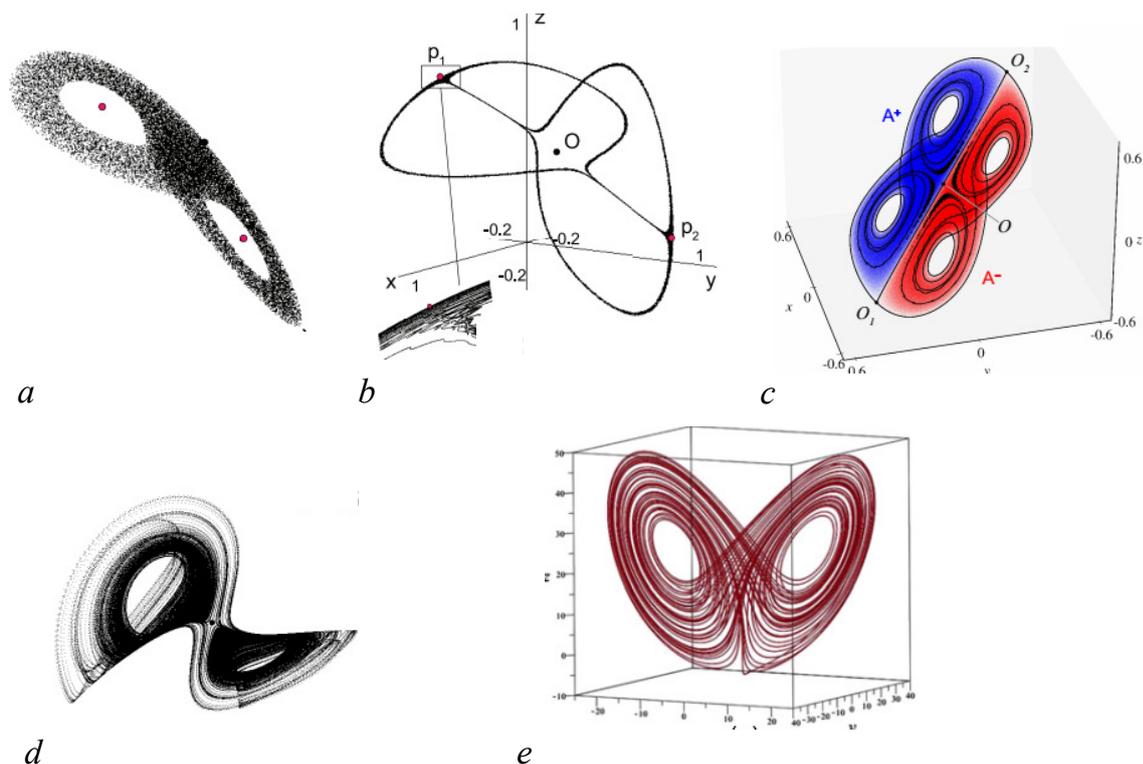


Рис. 3. Примеры гомоклинических аттракторов: *a* — дискретный аттрактор Лоренца [46, 48–50]; *b* — дискретный гетероклинический аттрактор Лоренца [48]; *c* — сдвоенный дискретный аттрактор Лоренца [51]; *d* — дискретный восьмерочный аттрактор [52]; *e* — дикий спиральный аттрактор [38] (цвет онлайн)

Fig. 3. Examples of homoclinic attractors: *a* — discrete Lorenz attractor [46, 48–50]; *b* — discrete heteroclinic Lorenz attractor [48]; *c* — conjoined Lorenz twins attractor [51]; *d* — discrete figure-eight attractor [52]; *e* — wild spiral attractor [38] (color online)

Лоренца [51] (с одним, двумя и тремя состояниями равновесия). У дискретного восьмерочного аттрактора (рис. 3, *d*) такого трехмерного потокового аналога не существует.

Вообще, теория квазиаттракторов составляет большой и весьма интересный раздел теории динамического хаоса, в котором существует огромное число нерешенных проблем. В частности, вопрос о том, что является аттрактором у систем из диссипативных областей Ньюхауса, обсуждался довольно активно, см., например, [5, 10–12, 14], и на этот счет были высказаны различные мнения и выработаны новые подходы.

**1.2. Квазиаттрактор в отображении Эно.** Один из интересных здесь вопросов связан с объяснением того эмпирического факта, что весьма часто в квазиаттракторе устойчивые периодические траектории вообще не наблюдаются. В определенном смысле это связано с тем, что периодические стоки рождаются здесь в основном в результате бифуркаций гомоклинических и гетероклинических (в гетероклинических контурах) касаний, и тогда по теории [5, 11, 39, 40, 53] такие стоки должны иметь большие периоды и области притяжения в виде очень узких ленточек, в которые трудно попасть при счете (и очень легко потерять за счет ошибок округления)<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Конечно, тут много зависит от специфики задачи. Например, в задаче о периодическом возмущении двумерной системы с диссипативной гомоклинической восьмеркой седла [54] окна устойчивости на плоскости параметров детектируются достаточно хорошо с помощью стандартных численных методов. Причем хорошо определяются те окна устойчивости, которые отвечают бифуркациям кубических гомоклинических касаний — эти окна имеют специфические



Заметим, что отображение (1) с помощью замены координат  $x \rightarrow a^{-1}y$ ,  $y \rightarrow ba^{-1}x$  приводится к виду

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = a + bx - y^2. \quad (2)$$

Отображение (2) называется стандартным отображением Эно. Именно в такой форме оно известно как одно из универсальных гомоклинических отображений — оно служит нормальной формой отображений первого возвращения вблизи квадратичных гомоклинических касаний [13, 58, 59].

**Замечание 3.** *Отличие в динамике отображений (1) и (2) проявляется, по- существу, только вблизи  $a = 0$ . Здесь отображение (1) при  $a = 0$  становится линейным и, соответственно, никакого отношения к гомоклинической динамике не имеет. Случай  $a = 0$ , наоборот, является весьма интересным для отображения (2). Так, при  $b = -1$  оно становится консервативным, и при  $a = 0$  в нем наблюдается вырожденный резонанс 1:4; при  $a = 0, b = -1$  отображение (2) имеет неподвижную точку с мультипликаторами  $\pm i$ , комплексная нормальная форма которой имеет вид  $\bar{z} = iz + Az^2z^* + B(z^*)^3$  с вырождением  $|A| = |B|$  (случай Арнольда [60]). Бифуркации этой неподвижной точки в двухпараметрическом семействе отображений  $\bar{x} = y, \bar{y} = \varepsilon_1 - x - y^2 + \varepsilon_2 y^3$  были изучены в [61], см. также [62].*

Таким образом, уже в случае простейших (по виду) нелинейных систем, таких как отображение Эно, возникают достаточно серьезные математические проблемы, связанные с тем, как правильно или более менее адекватно определять и идентифицировать в них аттракторы. В следующих параграфах мы дадим краткий обзор различных подходов к определению аттрактора. В разделе 1.3 мы обсудим некоторые особенности хорошо известных максимальных аттракторов и аттракторов Милнора. По материалам нашей работы [4] в разделе 1.4 будут представлены основные элементы теории CRH-аттракторов, в разделе 1.5 будут приведены их простейшие примеры, а в разделе 1.6 будут рассмотрены их обобщения — полные аттракторы и полные аттракторы по Рюэллю.

**1.3. Максимальный аттрактор и аттрактор Милнора.** К настоящему времени известно много различных определений аттрактора как устойчивого и замкнутого инвариантного множества системы. При этом если замкнутость и инвариантность везде подразумевается, то тип устойчивости может пониматься по-разному. Это хорошо можно увидеть на примере двух хорошо известных типов аттрактора: максимального аттрактора и аттрактора Милнора.

*Максимальный аттрактор*  $A_{max}$  определяется как замкнутое инвариантное множество, лежащее внутри некоторой поглощающей области  $U$ , и такое, что

$$A_{max} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(U)$$

в случае отображений или

$$A_{max} = \bigcap_{t \geq 0} T_t(U)$$

в случае потоков<sup>9</sup>.

Напомним, что открытая область  $U$  фазового пространства называется поглощающей, если под действием отображения  $T$  или потока  $T_t$  она переходит строго внутрь себя, то есть  $T(\bar{U}) \in U$

<sup>9</sup>Заметим, что формально максимальные аттракторы у систем с компактным фазовым пространством существуют всегда. Даже для тех систем, у которых единственной поглощающей областью является все фазовое пространство. Как, например, у консервативных систем или у отображений окружности с полуустойчивой неподвижной точкой, см. рис. 6, а. Тогда максимальный аттрактор — это все фазовое пространство (оно же и максимальный репеллер).

или  $T_t(\bar{U}) \in U$  при  $t > 0$ , где через  $\bar{U}$  мы обозначили замыкание области  $U$ . Соответственно, максимальный аттрактор получается в результате бесконечной процедуры пересечения образов  $U$  относительно положительных итераций отображения  $T$  или относительно сдвига  $U$  по траекториям потока  $T_t$  при  $t \rightarrow +\infty$ . На рис. 5 показаны простейшие примеры максимальных аттракторов.

Другое хорошо известное понятие аттрактора — это *аттрактор Милнора*  $A_M$  [63], который определяется как

- замкнутое инвариантное и минимальное по вложению множество в  $U$ , которое содержит  $\omega$ -предельные точки положительных полутраекторий почти всех (меры 1 по Лебегу) точек из  $U$ .

Конечно, у так определяемых аттракторов существуют как свои достоинства, так недостатки. Практически никаких других аттракторов, кроме максимальных, не рассматривается в гиперболической теории, имеющей дело с грубыми системами (либо с простой динамикой системы Морса–Смейла, либо с нетривиальными равномерно гиперболическими, базисными, множествами). Аттракторы Милнора также чрезвычайно популярны в теоретических исследованиях.

Однако и максимальный аттрактор, и аттрактор Милнора могут вообще не быть устойчивыми инвариантными множествами. С максимальным аттрактором это может случиться всякий раз, если выбирать неподходящую поглощающую область. Например, если такая область  $U$  содержит неустойчивую траекторию — источник (неустойчивый узел) или седло, то и максимальный аттрактор будет ее содержать, см. примеры рис. 5, *b* и *c*. Однако у максимального аттрактора всегда существуют его подмножества, которые являются настоящими аттракторами — на рис. 5, *b* и *c* это стоки (устойчивые узлы)  $a$  и  $b$ , у которых есть свои правильные поглощающие области  $U_a$  и  $U_b$ ; а на рис. 5, *a* область  $U$  сама является правильной поглощающей.

Что касается аттракторов Милнора, то они могут не быть аттракторами даже в простейших случаях. Так, в примере рис. 6, *a* отображения окружности с полуустойчивой (типа седло-узел) неподвижной точкой  $O$ , сама эта точка является аттрактором Милнора как  $\omega$ -предельная точка вообще для всех траекторий. Однако точка  $O$  не является устойчивой, соответственно, она не аттрактор в классическом смысле. Этот пример показывает, в частности, что и множество

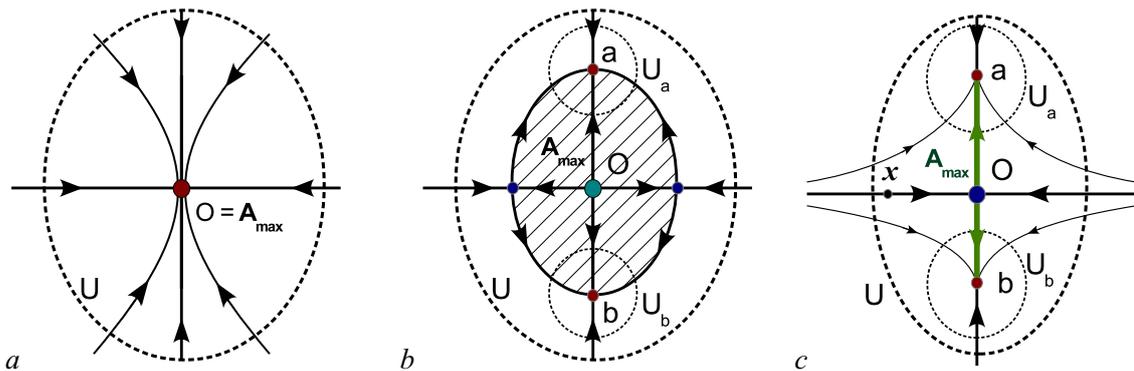


Рис. 5. Примеры максимальных аттракторов: *a* — устойчивая точка  $O$ ; *b* — диск с неустойчивым узлом  $O$  внутри; *c* — отрезок с седлом  $O$  внутри и устойчивыми точками  $a$  и  $b$  на концах. Максимальные аттракторы рисунков *b* и *c*, очевидно, не являются аттракторами в обычном смысле (например, они не являются аттракторами в смысле определения 1) (цвет онлайн)

Fig. 5. Examples of maximal attractors: *a* — a stable point  $O$ ; *b* — a disk with unstable node  $O$  inside; *c* — a segment with a saddle  $O$  inside and stable points  $a$  and  $b$  at its ends. The maximal attractors of figures *b* and *c* are obviously not attractors in the usual sense (for example, they are not attractors in the sense of Definition 1) (color online)

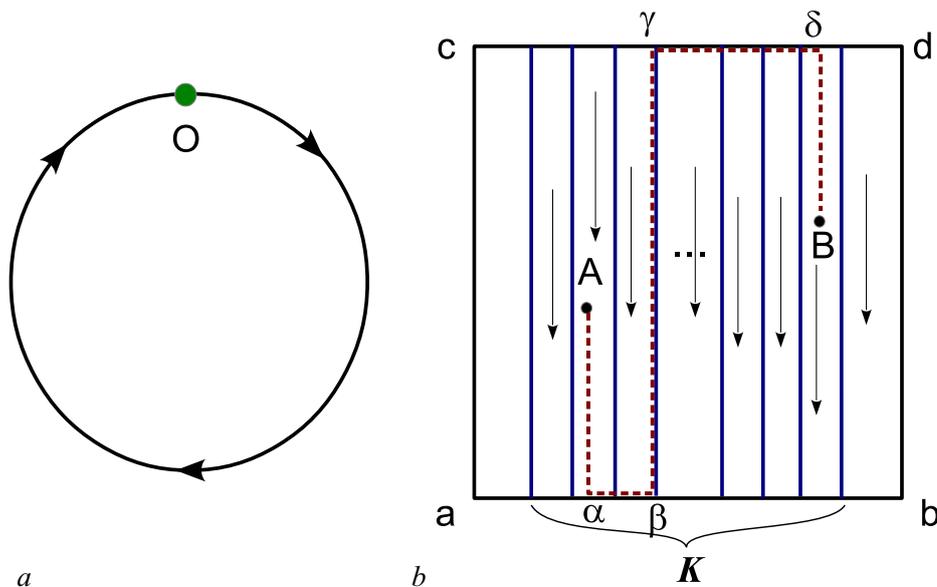


Рис. 6. Два примера систем с аттракторами Милнора:  $a$  – отображение окружности с полуустойчивой точкой  $O$ , которая является аттрактором Милнора, но не аттрактором;  $b$  – двумерный диффеоморфизм с канторовским множеством  $\mathcal{K}$  отрезков неподвижных точек, у которого аттрактор Милнора  $A_M$  это либо  $A_M = [ab]$ , если  $\text{mes } \mathcal{K} = 0$ , либо  $A_M = [ab] \cup \mathcal{K}$ , если  $\text{mes } \mathcal{K} \neq 0$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Two examples of systems with Milnor attractors:  $a$  – a circle map with a semistable point  $O$ , which is a Milnor attractor but not an attractor;  $b$  – a two-dimensional diffeomorphism with a Cantor set  $\mathcal{K}$  of segments of fixed points, for which the Milnor attractor  $A_M$  is either  $A_M = [ab]$  if  $\text{mes } \mathcal{K} = 0$  or  $A_M = [ab] \cup \mathcal{K}$  if  $\text{mes } \mathcal{K} \neq 0$

$\omega$ -предельных траекторий также не всегда является аттрактором. Заметим, что в этом примере максимальным аттрактором является вся окружность, поскольку она целиком как фазовое пространство является единственно возможной здесь поглощающей областью.

Интересно также, что аттрактор Милнора, в отличие от максимального, может вообще не быть топологическим инвариантом (в том смысле, что у двух топологически эквивалентных систем аттракторы Милнора могут быть разными). Скорее всего, это может быть только в сильно вырожденном случае. Однако все же некоторые примеры систем подобного типа существуют. Один из них, пример С. Минкова [64], проиллюстрирован на рис. 6,  $b$ . Это диффеоморфизм  $\hat{f}$  квадрата  $Q$ , обладающий следующими свойствами. Квадрат  $Q$  содержит канторовское множество  $\mathcal{K}$  вертикальных отрезков, все точки сторон квадрата и точки множества  $\mathcal{K}$  неподвижные, а остальные точки квадрата при итерациях  $\hat{f}$  стремятся к его нижней стороне  $[a, b]$ . В том случае, когда мера канторовского множества  $\mathcal{K}$  равна нулю, аттрактором Милнора диффеоморфизма  $\hat{f}$  является отрезок  $[a, b]$ . Однако, когда мера  $\mathcal{K}$  ненулевая, аттрактором Милнора будет являться уже множество  $[a, b] \cup \mathcal{K}$ . С другой стороны, очевидно, что любые два таких диффеоморфизма, независимо от меры множества  $\mathcal{K}$ , являются топологически эквивалентными.

Только что рассмотренные примеры показывают, что в определение аттрактора, во-первых, должно входить в каком-то виде условие на тип устойчивости (например, асимптотическая устойчивость, как в классическом определении), а во-вторых, это условие, а также все остальные, должно формулироваться в топологических терминах – тогда аттрактор всегда будет топологическим инвариантом.

Для авторов статьи [4] о математической концепции трех типов хаоса оказалось большим подспорьем, что такое весьма подходящее для их цели определение аттрактора уже давно существует. Оно было дано в работах Конли, Рюэлла и Харли [10, 32, 33] еще в начале 80-х в терминах

топологической динамики. Поэтому мы назвали такой аттрактор в работе [4] аттрактором Конли–Рюэлля–Харли, или сокращенно *CRH-аттрактором*. В этой же работе [4] были введены понятия *полного аттрактора* и *полного аттрактора по Рюэллю* на основе определения CRH-аттрактора, которые в конце концов позволили построить концепцию трех форм динамического хаоса. Ниже мы кратко коснемся этих вопросов.

**1.4. CRH-аттракторы.** Напомним некоторые факты и определения из топологической динамики [1]. Рассмотрим гомеоморфизм  $f$  (непрерывное взаимнооднозначное отображение) компактного метрического пространства  $\mathcal{M}$ .

Последовательность точек  $\{y_i\} \in \mathcal{M}$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots$  называется траекторией отображения  $f$ , если  $y_{i+1} = f(y_i)$ . Бесконечные в одну сторону последовательности  $\{y_1, y_2, \dots\}$  и  $\{\dots, y_{-1}, y_0, y_1\}$  называются положительной и, соответственно, отрицательной полутраекторией точки  $y_1$ , а конечная последовательность  $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  — траекторией длины  $N$ . Точка  $a \in \mathcal{M}$  называется  $\omega$ -предельной (соответственно,  $\alpha$ -предельной), если существует подпоследовательность точек  $y_{i_n} \subset \{y_i\}$  такая, что  $y_{i_n} \rightarrow a$  при  $i_n \rightarrow +\infty$  (соответственно при  $i_n \rightarrow -\infty$ ). Инвариантные множества, которые являются замыканием всех  $\omega$ -предельных и  $\alpha$ -предельных точек, называются соответственно  $\omega$ -предельным и  $\alpha$ -предельным множеством траектории  $\{y_i\}$ , а также  $\omega$ - и  $\alpha$ -предельным множеством любой точки этой траектории.

Для этих чисто динамических объектов в топологической динамике, см., например, [1], существуют свои аналоги, в основе которых лежит понятие  $\varepsilon$ -траектории.

**Определение 2.** Последовательность точек  $x_1, \dots, x_N$  называется  $\varepsilon$ -траекторией (длины  $N$ ) отображения  $f$ , если  $\text{dist}(f(x_j), x_{j+1}) < \varepsilon$  для всех  $j = 1, \dots, N - 1$ . Мы будем говорить, что  $\varepsilon$ -траектория  $x_1, \dots, x_N$  соединяет точки  $x_1$  и  $x_N$  и что  $x_N$  достижима от  $x_1$  (по  $\varepsilon$ -траекториям длины  $N$ ).

Соответствующим образом определяются положительные и отрицательные  $\varepsilon$ -траектории. Кроме того,  $\varepsilon$ -аналог для  $\omega$ -предельного множества точки  $x_1$ , так называемая *пролонгация* точки  $x_1$ , определяется как пересечение множеств  $\omega$ -предельных множеств для всех положительных  $\varepsilon$ -траекторий точки  $x_1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Заметим, что пролонгация точки — это замкнутое инвариантное множество, которое не только содержит  $\omega$ -предельное множество этой точки, но может быть больше его. Так, в примере рис. 5,  $c$  для точки  $x$  ее  $\omega$ -предельным множеством является седло  $O$ , а ее пролонгация — это отрезок  $[a, b]$  неустойчивого многообразия точки  $O$ , концевыми точками этого отрезка являются устойчивые точки  $a$  и  $b$ .

Напомним еще некоторые важные для нас понятия из топологической динамики.

**Определение 3.** Замкнутое инвариантное множество  $\Lambda$  называется *цепно-транзитивным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  и любых двух точек  $x \in \Lambda$  и  $y \in \Lambda$  существует  $\varepsilon$ -траектория, которая лежит в  $\Lambda$  и соединяет  $x$  и  $y$ .

**Определение 4.** Замкнутое инвариантное множество  $A_{\text{tot}}$  называется *устойчивым относительно постоянно действующих возмущений* (или *тотально устойчивым*), если оно устойчиво по Ляпунову относительно  $\varepsilon$ -траекторий для любого  $\varepsilon > 0$ . То есть если для любого  $\delta > 0$  существуют такое достаточно малое  $\varepsilon > 0$  такое, что любая положительная  $\varepsilon$ -траектория любой точки множества  $A_{\text{tot}}$  не покидает его  $\delta$ -окрестности.

Теперь мы можем дать определение аттрактора, на которое будем опираться в дальнейшем.

**Определение 5.** Замкнутое инвариантное множество, целиком лежащее в некоторой поглощающей области  $U$ , которое цепно-транзитивно и устойчиво относительно постоянно действующих возмущений, называется *CRH-аттрактором*.

Соответственно, CRH-репеллер определяется как CRH-аттрактор при обращении времени.

Можно высказать целый ряд аргументов в пользу использования такого определения аттрактора, которое обобщает другие хорошо известные определения, например, определения гиперболических аттракторов и аттракторов лоренцевского типа<sup>10</sup>, также явно содержит условие устойчивости и, кроме того, так определенный аттрактор является инвариантом топологической эквивалентности.

Одним из важных достоинств такого определения аттрактора является его практическая направленность. Действительно, когда численно или на эксперименте изучается какая-либо система, никогда нет гарантии, что она известна точно. Например, в том смысле, что на численном счете вместо точек траектории системы мы получаем последовательность точек, которые принадлежат, из-за ошибок счета, траектории(ям) постоянно изменяющейся, близкой, но другой системы. Поэтому то, что мы наблюдаем в эксперименте, это на самом деле нечто типа весьма специфической  $\varepsilon$ -траектории с достаточно малым  $\varepsilon$ . То есть в определенной мере определение 5 можно рассматривать как определение физически наблюдаемого аттрактора, когда точность наблюдения достаточно высока (соответственно,  $\varepsilon$  мало).<sup>11</sup>

Заметим также, что понятие CRH-аттрактора оказалось весьма важным и для теории динамического хаоса в целом. Так, например, в работе [4] было отмечено, что у конечномерных систем с компактным фазовым пространством  $M$  могут быть CRH-аттракторы только следующих трех типов:

- *консервативного* типа — в этом случае все фазовое пространство  $M$  является цепно-транзитивным множеством, и тогда  $M$  будет одновременно и CRH-аттрактором, и CRH-репеллером;
- *диссипативного* типа — в этом случае в любой окрестности CRH-аттрактора существуют точки (отличные от точек самого аттрактора), положительные полутраектории которых стремятся к нему;
- *смешанного* типа — тогда это *обратимое ядро* (reversible core), то есть CRH-аттрактор, который одновременно является и CRH-репеллером; в этом случае любая траектория точки, не принадлежащей аттрактору, все время находится в его окрестности, но не стремится к этому аттрактору-репеллеру ни в прямом, ни в обратном времени. Более того, для любой точки, не принадлежащей ядру, существует такое  $\varepsilon > 0$ , что любая ее положительная и отрицательная  $\varepsilon$ -траектория не соединяет эту точку с точками обратимого ядра.

**1.5. Простейшие примеры CRH-аттракторов.** Самые известные примеры CRH-аттракторов *консервативного типа* — это сохраняющие объем отображения или потоки компактно-многообразия  $M$ , которое само является в этом случае цепно-транзитивным множеством. Соответственно,  $M$  является одновременно и CRH-аттрактором, и CRH-репеллером. Существуют похожие примеры не сохраняющих объем отображений (но обязательно где-то его растягивающие, а где-то сжимающие), например, ановские отображения тора [28]. Другой пример — это отображение окружности с полуустойчивой неподвижной точкой  $O$ , см. рис. 6, *a*. Заметим, что в этом случае CRH-аттрактором (и CRH-репеллером) является вся окружность, так как любые ее две точки можно соединить  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0$ .

Заметим также, что у примера двумерного диффеоморфизма  $\hat{f}$ , показанного на рис. 6, *b*, также существует CRH-аттрактор консервативного типа — это весь квадрат  $Q$ . Нетрудно видеть, что

<sup>10</sup>В частности, в определение лоренцевских аттракторов часто входит условие их транзитивности, которое может и не выполняться даже для аттрактора Лоренца [44], однако цепная транзитивность здесь всегда существует.

<sup>11</sup>Для того чтобы получить математически достоверную информацию о динамике системы и то не всю, приходится не только использовать «безумную» точность вычислений, но и каждый раз их контролировать, например, с помощью методов интервальной арифметики или чего-то другого, см., например, [35, 42].

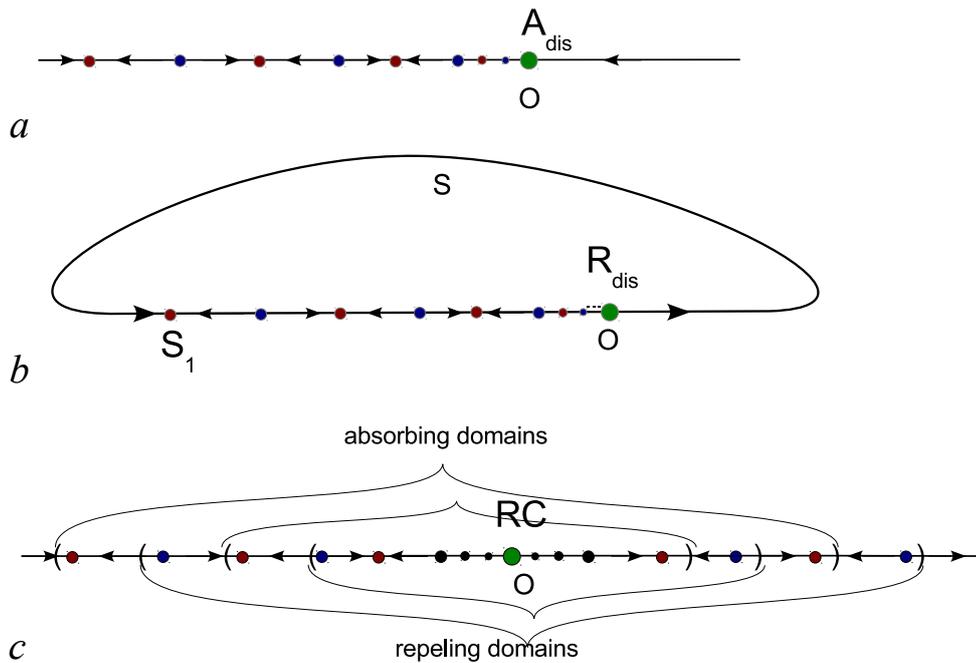


Рис. 7. Примеры одномерных отображений, у которых неподвижная точка  $O$  является пределом стоков и источников, и одновременно  $a$  – диссипативным  $CRH$ -аттрактором;  $b$  – диссипативным  $CRH$ -репеллером;  $c$  – обратимым ядром –  $CRH$ -аттрактором, который является одновременно и  $CRH$ -репеллером (цвет онлайн)

Fig. 7. Examples of one-dimensional maps whose fixed point  $O$  is a limit of sinks and sources, and simultaneously  $a$  – a dissipative  $CRH$ -attractor;  $b$  – a dissipative  $CRH$ -repeller;  $c$  – a reversible core –  $CRH$ -attractor that is also  $CRH$ -repeller (color online)

$Q$  является здесь цепно-транзитивным множеством. Действительно, пусть  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  – какие-либо две точки квадрата. Тогда легко построить  $\varepsilon$ -траекторию, соединяющую точки  $A$  и  $B$ : из точки  $A$  спускаемся по линии  $x = x_1$  до стороны  $[a, b]$  квадрата, по этой стороне, так как она состоит из неподвижных точек, достигаем (по  $\varepsilon$ -траектории) одной из линий множества  $\mathcal{K}$ , по этой линии добираемся до стороны  $[c, d]$ , по ней доходим до точки с координатой  $x = x_2$  и спускаемся вниз до точки  $B$  (путь  $AB$ , отмеченный пунктирной линией на рис. 6, b).

Примеры диссипативных  $CRH$ -аттракторов хорошо известны. Это, например, гиперболические аттракторы (в том числе простые – периодические стоки), аттракторы Лоренца, а также так называемые псевдогиперболические аттракторы [37, 38, 65]<sup>12</sup>. Все они также являются максимальными аттракторами в своей окрестности и характеризуются тем, что к ним стремятся все близкие траектории. Другой тип диссипативных  $CRH$ -аттракторов составляют те, к которым стремятся не все траектории точек из их окрестности. Простейший пример такого аттрактора в случае одномерного отображения показан на рис. 7, a. Здесь точка  $O$  является диссипативным  $CRH$ -аттрактором, так как траектории всех точек справа от точки  $O$  к ней стремятся, и одновременно  $O$  является также пределом (слева) бесконечной последовательности стоков и источников. В случае примера рис. 7, b точка  $O$  является  $CRH$ -репеллером (и одновременно она – предел бесконечной последовательности стоков и источников).

<sup>12</sup>Псевдогиперболические аттракторы характеризуются тем, что у любой их траектории существует положительный максимальный показатель Ляпунова, но тем не менее поведение траекторий в целом не является равномерно гиперболическим. Здесь возможны многочисленные бифуркации, но никакие из них не приводят к появлению устойчивых периодических траекторий. Это связано с тем, что в поглощающей области псевдогиперболического аттрактора система устроена так, что существуют инвариантные направления сильного (экспоненциального) сжатия и на трансверсальных к этим направлениям площадках их объемы растягиваются (также экспоненциально), подробнее см. [37, 66].

Примеров CRH-аттракторов смешанного типа — обратимых ядер — известно не так много, поскольку их теория начала развиваться сравнительно недавно. Обратимое ядро отличается от диссипативного аттрактора тем, что оно не притягивает (и не отталкивает) никаких траекторий. С другой стороны, динамика здесь не является также чисто консервативной. Так, в [4] (см. там теорему 1) показано, что

- обратимое ядро является пределом последовательности диссипативных аттракторов и репеллеров.

Простейшая иллюстрация к этой теореме показана на рис. 7, *c* для элементарного примера обратимого ядра одномерного отображения. Здесь точка  $O$  — обратимое ядро: она является пределом бесконечного множества диссипативных аттракторов и репеллеров (стоков и источников), однако сама не притягивает и не отталкивает никаких траекторий — любая траектория из ее окрестности стремится к ближайшему аттрактору, а в обратном времени — к ближайшему репеллеру. На рис. 7, *a* и 7, *b* показаны похожие примеры, у которых, однако, точка  $O$  не является обратимым ядром: в случае (*a*) она не репеллер (но является диссипативным CRH-аттрактором), а в случае (*b*) она не аттрактор.

Нетривиальными примерами обратимых ядер могут служить типичные симметричные эллиптические периодические траектории обратимых двумерных диффеоморфизмов [4,67]. В случае сохраняющих площадь отображений типичная эллиптическая траектория устойчива по Ляпунову из-за того, что она окружена континуумом инвариантных КАМ-кривых, которые не позволяют траектории уйти из окрестности точки. Однако такая точка неустойчива относительно постоянно действующих возмущений, поскольку КАМ-кривые и консервативные резонансы-гирлянды между ними не являются препятствием для  $\varepsilon$ -траекторий, рис. 8, *a*. В случае обратимых двумерных

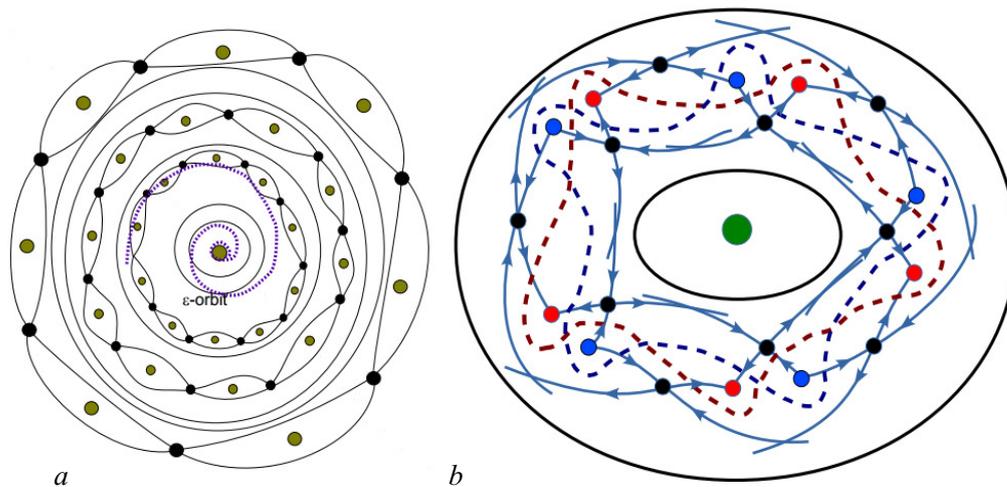


Рис. 8. Иллюстрация к структуре окрестности эллиптической точки  $O$ : *a* — в случае сохраняющего площадь отображения, здесь также символически показана  $\varepsilon$ -траектория, по которой точки могут убежать из окрестности точки  $O$ ; *b* — в случае обратимого отображения вокруг симметричной точки  $O$  также существуют КАМ-кривые, однако резонансы могут стать непроходимыми как для положительных, так и отрицательных  $\varepsilon$ -траекторий с достаточно малым  $\varepsilon$  из-за появления симметричных пар «источник-сток» периодических траекторий внутри резонансов (цвет онлайн)

Fig. 8. Illustration of the structure of a neighborhood of elliptic point  $O$ : *a* — in the case of area-preserving map, here is also symbolically shown an  $\varepsilon$ -orbit along which points can escape from the neighborhood of  $O$ ; *b* — in the case of reversible map, there are also KAM-curves around the symmetric point  $O$ , but the resonances can become impassable for both forward and backward  $\varepsilon$ -orbits with sufficiently small  $\varepsilon$  due to the appearance of symmetric “source-sink” pairs of periodic trajectories inside the resonances (color online)

диффеоморфизмов симметричная эллиптическая точка устроена очень похоже, поскольку она также окружена континуумом инвариантных КАМ-кривых, но в типичном случае [67] у нее появляются непроходимые для  $\varepsilon$ -траекторий резонансные зоны, внутри которых лежат периодические стоки и источники, рис. 8, *b*. Соответственно, как положительные, так и отрицательные  $\varepsilon$ -траектории с достаточно малым  $\varepsilon$  не могут перескочить через эти резонансы. Более подробно об этом см. в [4, 67].

**1.6. Полный аттрактор и полный аттрактор по Рюэллю.** Несомненно, что  $CRH$ -аттракторы — это настоящие аттракторы, которые составляют базис устойчивой динамики многомерных систем. В случае систем с гиперболическими и псевдогиперболическими аттракторами эти аттракторы также являются и  $CRH$ -аттракторами. Однако хорошо известно, что существуют странные аттракторы, которые не являются цепно-транзитивными множествами. Так, например, часто встречающиеся в приложениях квазиаттракторы (этот термин был предложен Афраймовичем и Шильниковым [12]) могут содержать внутри устойчивые периодические траектории (стоки) с настолько узкими областями притяжения и большими периодами, что они никак не обнаруживаются в экспериментах, и поэтому динамика кажется полностью хаотической. По этой причине квазиаттракторы также относят к странным аттракторам, во всяком случае, когда речь идет об экспериментах и прикладных задачах. Когда периодические стоки внутри квазиаттрактора имеют области притяжения очень малой ширины  $d$ , то они не являются препятствием для  $\varepsilon$ -траекторий с  $\varepsilon > d$ . Поэтому на численном счете, если точность вычислений не превышает  $d$ , такие аттракторы выглядят как  $CRH$ -аттракторы. Однако заранее величина  $d$  неизвестна, поэтому характерным свойством квазиаттракторов является то, что при изменении параметров хаотическое поведение траекторий может неожиданно сменяться регулярным (и наоборот). Соответствующие области значений параметров называются окнами устойчивости; они отвечают тому, что устойчивые периодические траектории становятся наблюдаемыми.

Примеров систем с квазиаттракторами очень много — это громадное большинство странных аттракторов моделей из приложений, кроме тех, для которых заранее известно, что они обладают гиперболическими или псевдогиперболическими аттракторами. Последних же, наоборот, пока еще очень мало<sup>13</sup>. Из этого можно сделать вывод, что квазиаттракторы нужно обязательно включать в хаотическую динамику. Это нужно делать даже с математической точки зрения, поскольку, как выясняется, без привлечения квазиаттракторов нельзя объяснить явление смешанной динамики, при котором пересекающиеся аттракторы и репеллеры, хотя и занимают примерно одну и ту же область фазового пространства, но никогда не совпадают полностью. В связи с этим отметим один результат, установленный в работе [4] (см. теорему 2 там):

- если  $CRH$ -аттрактор имеет непустое пересечение с  $CRH$ -репеллером, то они оба совпадают.

В частности, отсюда вытекает, что в случае смешанной динамики пересекающиеся аттракторы и репеллеры не являются цепно-транзитивными множествами, поскольку в противном случае они бы полностью совпадали. Их правильно нужно считать квазиаттракторами и квазирепеллерами.

Далее будем предполагать, что фазовое пространство  $M$  гомеоморфизма  $f$  не является цепно-транзитивным, соответственно, динамика не является топологически консервативной. Введем следующее понятие аттрактора для точки.

<sup>13</sup>Гиперболические аттракторы в физических моделях были открыты совсем недавно в работах С. П. Кузнецова, см. [41]. К псевдогиперболическим аттракторам можно отнести аттракторы Лоренца [44, 45], некоторые странные аттракторы опять же лоренцевского типа в случае трехмерных отображений [46, 47, 49, 50] и дикий спиральный аттрактор Тураева–Шильникова [37, 38]. Пожалуй, это все, что нам известно о таких настоящих странных аттракторах, которые являются, конечно,  $CRH$ -аттракторами.

**Определение 6.** Множество  $A_x$  называется аттрактором точки  $x$ , если оно является  $CRH$ -аттрактором и достижимо из  $x$  по  $\varepsilon$ -траекториям для любого  $\varepsilon > 0$ .

Заметим, что у точки  $x$  может быть несколько  $CRH$ -аттракторов. Например, на рис. 5,  $b$  у точки  $x$ , лежащей на устойчивой сепаратрисе седла  $O$ , существуют два таких аттрактора, точки  $a$  и  $b$ . Если число таких аттракторов конечно, то их объединение будем называть *полным аттрактором* точки  $x$ . В случае бесконечного числа таких аттракторов полным аттрактором точки  $x$  будем называть *замыкание объединения всех аттракторов точки  $x$* . Таким образом, полный аттрактор является замкнутым инвариантным множеством  $A_0(x)$ , которое, однако, не обязательно будет устойчивым. Как известно из топологической динамики [1], минимальное замкнутое устойчивое множество, содержащее  $A_0(x)$  — это *продолгация* множества  $A_0(x)$ , то есть *множество всех точек, достижимых из  $A_0(x)$  для всех произвольно малых  $\varepsilon > 0$* . Мы будем называть это множество *полным аттрактором по Рюэллю точки  $x$* .

Аналогичным образом определяется [4]:

**Определение 7.** *Полный аттрактор отображения  $f$  — это замыкание объединения всех  $CRH$ -аттракторов его точек, а полный аттрактор по Рюэллю отображения  $f$  — это продолгация его полного аттрактора.*

Таким же образом определяются репеллеры — как аттракторы для обратного отображения  $f^{-1}$ .

Рассмотрим простые примеры, показанные на рис. 7. На рис. 7,  $a$  полный аттрактор — это замыкание счетного множества стоков и точки  $O$ , к которой они накапливаются. Сама точка  $O$  является диссипативным  $CRH$ -аттрактором (но не репеллером). Очевидно, здесь полный аттрактор и полный аттрактор по Рюэллю совпадают. В примере рис. 7,  $b$  аналогично полный аттрактор состоит из счетного множества стоков и точки  $O$ . Однако точка  $O$  сама по себе не является аттрактором. Полный аттрактор по Рюэллю здесь получится, если к полному аттрактору добавим еще дугу  $\widehat{OS}_1$  — продолгацию точки  $O$ . Полученное множество уже будет устойчивым. В примере рис. 7,  $c$  полный аттрактор по Рюэллю (объединение счетного множества стоков и точки  $O$ ) и полный репеллер по Рюэллю (объединение счетного множества источников и точки  $O$ ) пересекаются по точке  $O$ , которая является здесь обратимым ядром. Этот последний пример можно рассматривать в качестве простейшей иллюстрации смешанной динамики.

## 2. Об областях Ньюхауса со смешанной динамикой

Как хорошо известно, в шестидесятых годах началось бурное развитие качественной теории многомерных динамических систем. Одним из главных ее достижений явилось создание гиперболической теории — теории грубых многомерных систем. По определению гиперболические системы образуют открытые области в пространстве динамических систем, но в отличие от двумерных, они не плотны, так как негрубые многомерные системы также могут образовывать области в пространстве динамических систем. И здесь прежде всего следует отметить области негрубости, связанные с гомоклиническими касаниями, так называемые *области Ньюхауса* [68, 69], а также области систем с аттракторами Лоренца [43, 44]. Однако если для полного описания аттракторов Лоренца в несимметричном случае требуется только два инварианта — нидинг-инварианта (в симметричном случае — один) [70, 71], то в областях Ньюхауса ситуация значительно сложнее [72–75]: здесь требуется бесконечное множество инвариантов (в частности, так называемых  $\Omega$ -модулей [76, 77]). Материализацией последнего факта является то, что в областях Ньюхауса плотны системы со счетным множеством периодических движений любых порядков вырождения, а также системы со счетным множеством гомоклинических касаний любых порядков [73, 78].

Фундаментальным свойством областей Ньюхауса является то, что они существуют в любой окрестности любой системы с гомоклиническим касанием. В случае двумерных диффеоморфизмов этот результат был доказан в работе Ньюхауса [69], а в многомерном случае — в работах [58, 79, 80]. Более того, как было показано в [58], если исходное квадратичное гомоклиническое касание к неподвижной (периодической) точке  $O$  многомерной системы  $F_0$  является простым и оно в однопараметрическом семействе  $F_\mu$  расщепляется при  $\mu = 0$  общим образом, то в этом семействе в любой окрестности  $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$  точки  $\mu = 0$  существуют интервалы Ньюхауса  $\Delta_{hom}^i \subset I_\varepsilon$ . При этом в  $\Delta_{hom}^i$  плотны значения  $\mu$ , при которых  $F_\mu$  имеет квадратичное гомоклиническое касание к точке  $O_\mu$ , и это касание расщепляется общим образом при изменении  $\mu$ .

В этом параграфе мы ограничимся только случаем двумерных диффеоморфизмов, для которого квадратичное гомоклиническое касание многообразий седловой неподвижной (периодической) точки  $O$  всегда является простым, если ее седловая величина  $\sigma$  отлична от 1. Здесь  $\sigma = |\lambda\gamma|$ , где  $\lambda$  и  $\gamma$  — мультипликаторы точки  $O$  (собственные значения линеаризованного в ней отображения Пуанкаре — отображения за период в данном случае). В этом случае справедлив следующий результат:

**Теорема 1.** Теорема Ньюхауса [11]. Пусть  $F_\mu$  — однопараметрическое семейство, в котором квадратичное гомоклиническое касание к точке  $O$  расщепляется при  $\mu = 0$  общим образом. Тогда в интервалах  $\Delta_{hom}^i$  типичны значения  $\mu$ , при которых  $F_\mu$  имеет счетное множество асимптотически устойчивых (вполне неустойчивых) периодических траекторий при  $\sigma < 1$  (при  $\sigma > 1$ ).

Заметим, что в [74, 75, 81] для многомерных систем, близких к системе с гомоклиническим касанием, найдены условия как существования, так и отсутствия в малой окрестности негрубой гомоклинической траектории периодических траекторий того или иного топологического типа<sup>14</sup>. В частности, в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием было установлено, что если  $\sigma_0 < 1$ , то ни  $g_0$ , ни близкие к  $g_0$  диффеоморфизмы, не имеют в малой окрестности  $U(O \cup \Gamma_0)$  вполне неустойчивых периодических траекторий, а если  $\sigma_0 > 1$  — устойчивых.

Таким образом, при общих условиях двумерные диффеоморфизмы с негрубой гомоклинической траекторией и близкие к ним не могут содержать в ее малой окрестности одновременно устойчивые и вполне неустойчивые периодические траектории.

Заметим, что пограничный случай квадратичного гомоклинического касания с  $\sigma_0 = 1$  был рассмотрен в работе [82], в которой было показано, что такие гомоклинические касания (к нейтральному седлу) могут продуцировать как устойчивые, так и вполне неустойчивые периодические траектории, а также устойчивые и неустойчивые инвариантные кривые (двумерные торы в случае потоков). Соответственно, существование таких гомоклинических касаний к нейтральным седлам вполне можно рассматривать в качестве одного из критериев смешанной динамики. Однако для этого нужно рассматривать уже двухпараметрические семейства. Как оказалось, чтобы обнаружить смешанную динамику в однопараметрических семействах, нужно рассматривать негрубые гетероклинические контуры.

Напомним, что *гетероклиническим контуром* в случае диффеоморфизма называется множество траекторий  $\mathcal{G}$ , содержащее несколько грубых (гиперболических) седловых периодических орбит  $O_1, \dots, O_n$  и гетероклинических к ним траекторий  $\Gamma_{i,i+1} \subset W^u(O_i) \cap W^s(O_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , и  $\Gamma_{n,1} \subset W^u(O_n) \cap W^s(O_1)$ .

<sup>14</sup>В [74, 75, 81] было установлено, например, что устойчивые периодические траектории могут возникать даже в случае, когда размерность неустойчивого многообразия точки  $O$  равна 2 (при этом ее неустойчивые мультипликаторы должны быть комплексно сопряженными), и что такие траектории неустранимым образом появляются лишь в двух- и даже трехпараметрических семействах. Соответственно, выход на границу устойчивости может сопровождаться появлением периодических орбит с двумя или даже, соответственно, с тремя мультипликаторами, равными по модулю единице.

В общем случае гетероклинический контур может содержать и другие траектории, например, несколько гетероклинических траекторий типа  $\Gamma_{i,i+1}$  или даже гомоклинические траектории типа  $\Gamma_{i,i}$ . Такой гетероклинический контур будем называть негрубым, если хотя бы одна из его гетероклинических или гомоклинических траекторий является негрубой, то есть в ее точках соответствующие устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются нетрансверсально.

В том случае, когда седловые величины всех неподвижных (периодических) точек негрубого гетероклинического контура одновременно меньше или больше единицы, динамические свойства и бифуркации таких контуров очень похожи на то, что имеет место в случае диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием, хотя и здесь есть свои особенности, см., например, [83, 84]. Однако если гетероклинический контур является *контуром смешанного типа*, то есть он содержит по крайней мере две неподвижные (периодические) точки, у одной из которых седловая величина меньше единицы, а у другой больше единицы, то и динамика в целом становится смешанной [5, 85].

В этом параграфе мы обсудим основной результат работы [5] — теорему о существовании абсолютных областей Ньюхауса вблизи двумерных диффеоморфизмов с негрубыми гетероклиническими контурами смешанного типа.

В работе [5] эта теорема доказывается в самом общем виде, но принципиальная часть доказательства проводится для контуров простейшего типа, таких как на рис. 9, а, а затем с использованием простых геометрических конструкций и понятий это доказательство легко переносится и на общий случай негрубых гетероклинических контуров, таких как на рис. 9, б.

Пусть  $f_0$  — двумерный диффеоморфизм с простейшим негрубыми гетероклиническим контуром, рис. 9, а. Он имеет две седловые неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  с мультипликаторами  $\lambda_1, \gamma_1$  и  $\lambda_2, \gamma_2$  соответственно, где  $0 < \lambda_i < 1 < \gamma_i$ . Мы также предполагаем, что  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  пересекаются трансверсально в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{12}$ , а  $W^u(O_2)$

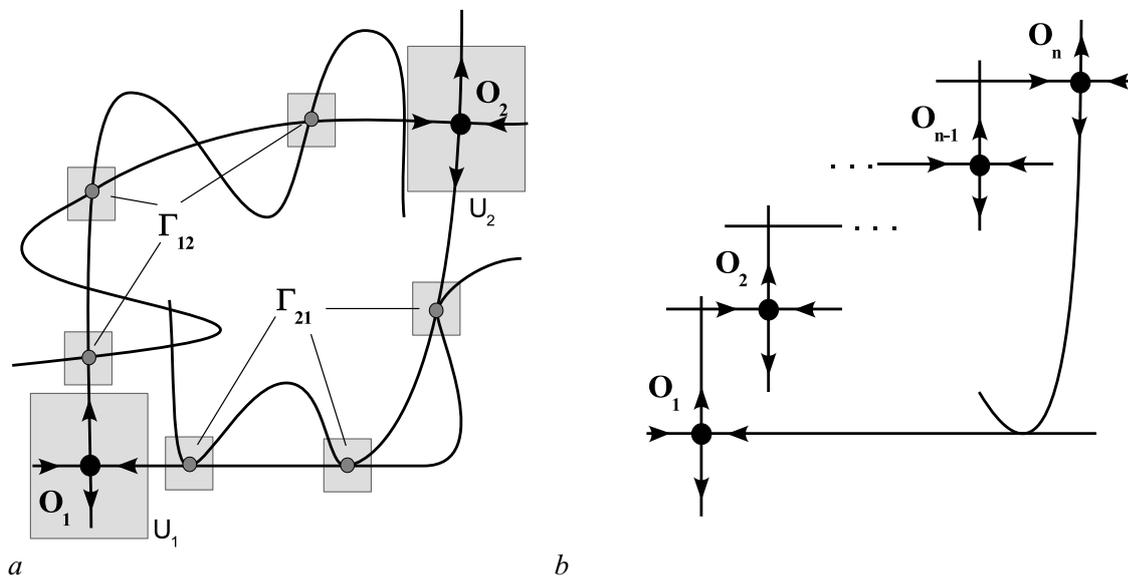


Рис. 9. Примеры двумерных диффеоморфизмов с простыми негрубыми гетероклиническими контурами: а — контур простейшего типа, который содержит 2 седловые неподвижные точки; б — контур общего типа с  $n$  седловыми неподвижными точками

Fig. 9. Examples of two-dimensional diffeomorphisms with simple non-transversal heteroclinic cycle: а — a cycle of simplest type which contains 2 saddle fixed points; б — a cycle of general type with  $n$  saddle fixed points

и  $W^s(O_1)$  имеют квадратичное касание в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{21}$ , рис. 9, а. Обозначим  $\sigma_i$  седловую величину точки  $O_i$ , то есть  $\sigma_i = |\lambda_i \gamma_i|$ . Будем предполагать, что у  $f_0$  одна из седловых величин  $\sigma_1$  или  $\sigma_2$  меньше единицы, а другая больше единицы. Пусть для определенности  $0 < \sigma_1 < 1 < \sigma_2$ .

Пусть  $U$  — достаточно малая фиксированная окрестность гетероклинического контура  $C = O_1 \cup O_2 \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{21}$ . Ее можно представить в виде объединения двух окрестностей  $U_1$  и  $U_2$  точек  $O_1$  и  $O_2$  с конечным числом окрестностей  $V_1, \dots, V_n$  тех точек траекторий  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{21}$ , которые не лежат в  $U_1$  и  $U_2$ , рис. 9. Периодическую траекторию  $Q$ , целиком лежащую в  $U$ , будем называть  $k$ -обходной, если она пересекает каждую из окрестностей  $V_i$  ровно в  $k$  точках.

При исследовании бифуркаций систем с негрубым гетероклиническим контуром естественно в первую очередь рассматривать бифуркации в однопараметрическом семействе  $f_\mu$  диффеоморфизмов, в котором исходное гетероклиническое касание в точках траектории  $\Gamma_{21}$  расщепляется при  $\mu = 0$  общим образом. Это означает, что при малых  $\mu > 0$  (или  $\mu < 0$ ) в  $U$  нет гетероклинических траекторий, близких к  $\Gamma_{21}$ , а при  $\mu < 0$  (или  $\mu > 0$ ) в  $U$  существуют ровно две трансверсальные гетероклинические траектории  $\tilde{\Gamma}_{21}^1$  и  $\tilde{\Gamma}_{21}^2$ , близкие к  $\Gamma_{21}$ , такие, что  $\tilde{\Gamma}_{21}^i(\mu) \rightarrow \Gamma_{21}$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

Будем считать для определенности, что траектории  $\tilde{\Gamma}_{21}^1$  и  $\tilde{\Gamma}_{21}^2$  появляются при  $\mu < 0$ . Достаточно очевидно, что при изменении  $\mu$  на отрезке  $(-\varepsilon, 0)$  для любого  $\varepsilon > 0$  в семействе  $f_\mu$  происходят многочисленные бифуркации, в том числе бифуркации, связанные с возникновением новых гомоклинических и гетероклинических касаний. На рис. 10 проиллюстрировано, как они образуются. Рассмотрим локальные куски  $l_i^u$  и  $l_i^s$  многообразий  $W^u(O_i)$  и  $W^s(O_i)$ ,  $i = 1, 2$ , такие, что при  $\mu = 0$  кривые  $l_1^u$  и  $l_2^s$  пересекаются трансверсально в некоторой точке  $M_2$  траектории  $G_{12}$ , а кривые  $l_2^u$  и  $l_1^s$  квадратично касаются в некоторой точке  $M_1$  траектории  $G_{21}$ . Выберем достаточно малые окрестности  $\Pi_1$  точки  $M_1$  и  $\Pi_2$  точки  $M_2$ . При некотором  $\mu < 0$  в этих окрестностях выберем отрезки кривых  $l_i^u$  и  $l_i^s$ : отрезки  $J \subset l_1^u$  и  $K \subset l_2^s$  на  $\Pi_2$  и отрезки  $L \subset l_1^s$  и  $I_0 \subset l_2^u$  на  $\Pi_1$ , как показано на рис. 10, а. При этом отрезок  $I_0$  выбирается так, что отрезок  $I = f_\mu^j(I_0)$  лежит в  $\Pi_2$  и пересекается с  $K$  трансверсально. Это (по  $\lambda$ -лемме) всегда можно сделать для всех достаточно больших  $j$ .

Теперь рассмотрим на  $\Pi_1$  образы и прообразы этих отрезков относительно итераций  $f_\mu$ : отрезки парабол  $I_k = f_\mu^k(I) \cap \Pi_1$  и  $J_k = f_\mu^k(J) \cap \Pi_1$ , а также горизонтальные отрезки  $K_m = f_\mu^{-m}(K) \cap \Pi_1$  и  $L = l_1^s \cap \Pi_1$ . Тогда при варьировании  $\mu$  мы получаем бифуркационные значения параметра:

- $\mu = \mu_k^1$ , отвечающее квадратичному гомоклиническому касанию к точке  $O_1$ , когда  $J_k \subset W^u(O_1)$  касается  $L \subset W^s(O_1)$ , рис. 10, b;
- $\mu = \mu_{kmj}^2$ , отвечающее квадратичному гомоклиническому касанию к точке  $O_2$ , когда  $I_k \subset f_\mu^{j+k}(I_0) \subset W^u(O_2)$  касается  $K_m \subset W^s(O_2)$ , рис. 10, c;
- $\mu = \mu_{km}^{12}$ , отвечающее квадратичному гетероклиническому касанию многообразий  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$ , когда  $J_k$  касается  $K_m$ , рис. 10, d;
- $\mu = \mu_{kj}^{21}$ , отвечающее квадратичному гетероклиническому касанию многообразий  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$ , когда  $I_k$  касается  $L$ , рис. 10, e.

По построению все эти бифуркационные значения  $\mu$  накапливаются к  $\mu=0$  при  $k, j, m \rightarrow \infty$ . Отметим, что значения  $\mu = \mu_{km}^{12}$  и  $\mu = \mu_{kj}^{21}$  отвечают существованию у  $f_\mu$  негрубых гетероклинических контуров: при  $\mu = \mu_k^{12}$  — это контур, содержащий точки  $O_1$  и  $O_2$ , нетрансверсальную гетероклиническую траекторию  $\tilde{\Gamma}_{12}$  и трансверсальную  $\tilde{\Gamma}_{21}$ ; при  $\mu = \mu_k^{21}$  — это контур исходного типа, содержащий точки  $O_1$  и  $O_2$ , старую трансверсальную гетероклиническую траекторию  $\Gamma_{12}$  и новую нетрансверсальную  $\tilde{\Gamma}_{21}$ .

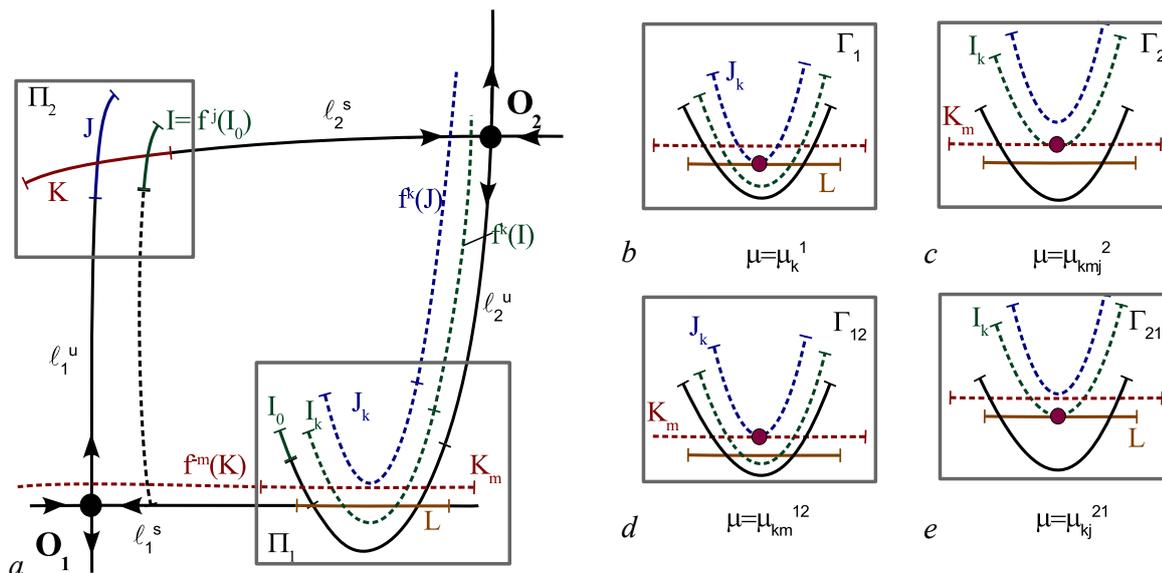


Рис. 10. Иллюстрация к существованию в семействе  $f_\mu$  бифуркаций, связанных с образованием гомоклинических и гетероклинических касаний при расщеплении исходного квадратичного гетероклинического касания между  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$ .  $a$  – Выделение отрезков многообразий  $W^u(O_i)$  и  $W^s(O_i)$ ,  $i = 1, 2$ , участвующих в образовании соответствующих касаний:  $b$  – гомоклиническое касание к точке  $O_1$ ;  $c$  – гомоклиническое касание к точке  $O_2$ ;  $d$  – гетероклиническое касание между  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$ ;  $e$  – вторичное гетероклиническое касание между  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  (цвет онлайн)

Fig. 10. Illustration of the existence in the family  $f_\mu$  of bifurcations related to the formation of homoclinic and heteroclinic tangencies at the splitting of the initial quadratic heteroclinic tangency between  $W^u(O_2)$  and  $W^s(O_1)$ .  $a$  – Selection of segments of manifolds  $W^u(O_i)$  and  $W^s(O_i)$ ,  $i = 1, 2$ , involved in the formation of the corresponding tangencies:  $b$  – homoclinic tangency to the point  $O_1$ ;  $c$  – homoclinic tangency to the point  $O_2$ ;  $d$  – heteroclinic tangency between  $W^u(O_1)$  and  $W^s(O_2)$ ;  $e$  – a secondary heteroclinic tangency between  $W^u(O_2)$  and  $W^s(O_1)$  (color online)

Для контура того типа, который показан на рис. 10,  $a$ ,<sup>15</sup> условие  $\mu < 0$  (соответствующие куски многообразий  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  пересекаются на  $\Pi_1$  в двух точках) является необходимым: как легко видеть, при  $\mu > 0$  не существует гомоклинических и гетероклинических траекторий к точке  $O_1$ .

Таким образом, в семействе  $f_\mu$  происходят бесконечно много бифуркаций, связанных с образованием квадратичных гомоклинических к неподвижной точке  $O_1$  с седловой величиной  $0 < \sigma < 1$  и к неподвижной точке  $O_2$  с  $\sigma > 1$ . В свою очередь, поскольку в семействе  $f_\mu$  эти касания расщепляются общим образом, это приводит к тому, что у диффеоморфизмов  $f_\mu$  появляются устойчивые и вполне неустойчивые периодические траектории, а также, как показано в [5], интервалы со смешанной динамикой. Последний результат как итоговый в этом параграфе мы сформулируем более детально.

<sup>15</sup>В двумерном случае негрубые гетероклинические контуры могут быть разбиты на три класса [83, 84] в зависимости от типа описания множества  $N$  траекторий, целиком лежащих в малой окрестности  $U$  контура: тривиальное (когда  $N = \{O_1, O_2, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}\}$ ); полное (когда все траектории  $N$  находятся во взаимнооднозначном соответствии с топологической схемой Бернулли из 4-х символов, в которой две гетероклинические траектории отождествлены); хаотическое (когда  $N$  является релятивно негрубым даже в случае, когда гетероклиническое касание сохраняется, в  $N$  непрерывным образом происходят бифуркации, в том числе с периодическими траекториями при варьировании параметров). Как и системы с гомоклиническими касаниями, системы с негрубыми гетероклиническими контурами играют важную роль в вопросах классификации глобальных бифуркаций. Так, контуры с тривиальным описанием могут принадлежать границе систем с простой структурой (систем Морса–Смейла), контуры с полным описанием – границы систем с нетривиальной равномерно гиперболической динамикой, а контуры с хаотическим описанием всегда лежат в областях систем с хаотической негиперболической динамикой (в том числе в областях Ньюхауса) [84].

**Теорема 2. (Гонченко–Тураев–Шильников [5]).** В семействе  $f_\mu$  на любом отрезке  $[-\mu_0, \mu_0]$  значений параметра  $\mu$  существуют интервалы Ньюхауса  $\Delta_i$  со смешанной динамикой, то есть в  $\Delta_i$  плотны (и типичны) значения параметра  $\mu$ , при которых  $f_\mu$  имеет одновременно счетное множество устойчивых и счетное множество вполне неустойчивых периодических траекторий. Замыкания множеств этих траекторий всегда содержат точки  $O_1$  и  $O_2$ .

Эта теорема также допускает следующее обобщение. Пусть диффеоморфизм  $f_\mu$  имеет в  $U$  при всех  $|\mu| < \mu_0$  равномерно гиперболическое множество  $\Lambda$  (например, какую-нибудь подкову Смейла). Тогда для типичного множества значений  $\mu$  из интервала  $\Delta_i$  замыкание множества стоков и замыкание множества источников в своем пересечении содержат  $\Lambda$ <sup>16</sup>. Еще с работы [39, 40] хорошо известно, что гиперболические множества занимают большую часть множества траекторий из окрестности гомоклинического касания, и более того, они создают скелет хаотической динамики в квазиаттракторах (и в квазирепеллерах).

Как мы сейчас знаем, в работе [5] было открыто новое динамическое явление, названное впоследствии *смешанной динамикой* [86, 87]. Как оказалось, у этого явления существует два взаимно связанных, но принципиально разных уровня. Первый, чисто математический, — это новый цикл результатов в теории динамических систем, связанный с существованием многомерных систем, демонстрирующих исключительное и максимальное разнообразие динамики, и постулируемый в таких новых понятиях, как абсолютные области Ньюхауса, ультимативно дикое гиперболические множества [6, 7], системы с универсальной динамикой [8], с максимальной эффективной и бифуркационной размерностью [9] и т. п.

Второй уровень — это то, что можно назвать как «три типа динамики» или «три типа динамического хаоса», и это то, что привело к открытию нового третьего типа динамического хаоса, который называется «смешанной динамикой». Второй уровень — гораздо более широкий, и он выходит далеко за рамки просто математики и теории динамических систем. Работа [5] относится, конечно, к первому уровню, но в ней были получены прорывные результаты, которые, собственно, и позволили почти через 20 лет перейти на второй уровень. В результате чего, в работах [17, 18] уже в явном виде обсуждались проблемы смешанной динамики как третьей формы динамического хаоса<sup>17</sup>, а ее математическое обоснование было дано в работах [3] и [4]. При этом в работе [3] рассматривались только обратимые (реверсивные) системы, а в работе [4] теория смешанной динамики была построена в самом общем виде для гомеоморфизмов компактных фазовых пространств на основе базовых понятий топологической динамики.

### 3. Примеры динамических систем из приложений, обладающих смешанной динамикой

В этом параграфе мы рассмотрим ряд моделей из приложений, в которых была обнаружена смешанная динамика. Таких известных нам моделей пока еще не слишком много, во-первых, в силу того, что сама концепция смешанной динамики возникла совсем недавно, а во-вторых, наверняка многие модели такого рода нам неизвестны в силу того, что тематика, связанная с аттракторами, всегда была преобладающей, а репеллеры практически совсем не рассматривались.

Нам кажется, что вообще первой работой, в которой хотя бы и на физическом уровне строгости анализировались взаимоотношения между аттракторами и репеллерами, была работа Пиковского и Топажа [15]. В нашей работе [16] модель Пиковского–Топажа четырех симметрично

<sup>16</sup>Такое утверждение для случая диссипативных областей Ньюхауса доказано в [11], см. также [75]. Сам метод доказательства, основанный на свойствах типичных множеств, автоматически переносится и на случай абсолютных областей Ньюхауса.

<sup>17</sup>В работе [17] было, в частности, показано, что смешанная динамика наблюдается в неголономной модели кельтского камня. По сути, это была первая модель из приложений, в которой этот тип хаоса был целенаправленно обнаружен и исследован.

связанных элементарных ротаторов была рассмотрена с математической точки зрения. Ниже мы дадим обзор некоторых полученных в [16] результатов.

**3.1. Модель Пиковского–Топажы четырех связанных ротаторов.** Модель Пиковского–Топажы [15] представляет собой систему следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_3 \\ \dot{\psi}_3 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_3 + \varepsilon \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{3}$$

Она описывает динамику четырех симметрично и нелинейно связанных элементарных ротаторов  $\Psi_k = \omega_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , где  $\omega_k$  константы такие, что  $\omega_i - \omega_{i+1} = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , для разности их фаз  $\psi_i = \Psi_i - \Psi_{i+1}$ . Соответственно,  $\psi_i \in [0, 2\pi)$  — это угловые переменные, и фазовым пространством системы (3) является трехмерный тор  $\mathbb{T}^3$ .

В этом параграфе рассмотрим систему (3), на примере которой мы попытаемся объяснить явление пересечения аттрактора и репеллера, которое визуально как бы подтверждается их фазовыми портретами, представленными на рис. 1. Если придерживаться традиционной точки зрения, что аттрактор не может пересекаться с репеллером, то можно представить, что они очень близко подходят друг к другу. Настолько близко, что промежутки между аттрактором и репеллером перестают быть заметными, но тем не менее всегда можно провести две непересекающиеся границы, близкие по форме к фрактальным, для поглощающей и отталкивающей областей. Однако такое представление вступает в противоречие с результатами из [5], и нужно считать, что рисунки 1 хорошо иллюстрируют явление смешанной динамики, о котором мы говорили выше.

Основной целью нашей работы [16] было как раз доказательство существования смешанной динамики в модели Пиковского–Топажы. Заметим, что система (3) является обратимой: она инвариантна относительно обращения времени  $t \rightarrow -t$  и замены координат вида

$$h: \psi_1 \rightarrow \pi - \psi_3, \quad \psi_2 \rightarrow \pi - \psi_2, \quad \psi_3 \rightarrow \pi - \psi_1,\tag{4}$$

которая является инволюцией, то есть  $h^2 = id$ , в случае трехмерного тора.

После замены координат

$$\xi = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}, \quad \eta = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2}, \quad \rho = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2} + \psi_2 - \pi$$

и времени  $t_{new} = (2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta))t$  система (3) принимает следующий вид, см. [16]:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)} \\ \dot{\eta} &= \frac{1 - \varepsilon \cos(\rho - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)} \\ \dot{\rho} &= 1\end{aligned}$$

или, что эквивалентно, она может быть представлена в форме неавтономной периодической по времени (с периодом  $2\pi$ ) системы вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)} \\ \dot{\eta} &= \frac{1 - \varepsilon \cos(t - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)}.\end{aligned}\tag{5}$$

Заметим, что система (5) корректно определена при всех  $\varepsilon < 2$ . Кроме того, она сама, а также ее отображение Пуанкаре  $T = T_{2\pi}$ , то есть отображение сдвига по траекториям за период  $t = 2\pi$ , обладают целым рядом симметрий [16].

- Отображение  $T_{2\pi}$  является обратимым относительно инволюции

$$R : \xi \rightarrow \xi, \eta \rightarrow -\eta,$$

которая является следствием инволюции (4). Это означает, что отображение  $T_{2\pi}$  и его обратное  $T_{2\pi}^{-1}$  сопряжены с помощью инволюции  $R$ , то есть  $T_{2\pi}^{-1} = R \circ T_{2\pi} \circ R$ .

- Система (5) и отображение  $T_{2\pi}$  симметричны относительно линейного преобразования вида

$$\sigma : \xi \rightarrow \pi - \xi, \eta \rightarrow \pi + \eta. \quad (6)$$

- Отображение  $T_{2\pi}$  является квадратом неориентируемого отображения, именно  $T_{2\pi} = (\tilde{T})^2$ , где  $\tilde{T} = \sigma \circ T_\pi$  и  $T_\pi$  — ориентируемое отображение сдвига по траекториям системы (5) за полпериода ( $t = \pi$ )<sup>18</sup>.

При  $\varepsilon = 0$  система (5) является автономной и ее динамика тривиальна — фазовое пространство заполнено замкнутыми траекториями. Соответственно, динамика отображения  $T_{2\pi}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$  будет полностью квазипериодической. Однако при увеличении  $\varepsilon$  у отображения  $T_{2\pi}(\varepsilon)$  начинают происходить многочисленные бифуркации, связанные с возникновением периодических траекторий, первоначально очень больших периодов, затем эти периоды постепенно уменьшаются, что позволяет численно проследить соответствующие бифуркации.

Так как отображение  $T_{2\pi}$  обратимо, то специальный интерес здесь представляют бифуркации разрушения симметрии, связанные сначала с рождением симметричных периодических траекторий, которые пересекают множество

$$\text{Fix}(R) : \{\eta = 0\} \cup \{\eta = \pi\}$$

неподвижных точек инволюции  $R$ , а затем с появлением из них симметричных пар периодических траекторий противоположных типов устойчивости (например, пары сток и источник или седла с якобианами больше и меньше 1).

В бифуркационный момент негрубая симметричная периодическая траектория двумерного ориентируемого отображения  $T_{2\pi}$  имеет два мультипликатора равных  $+1$ . Напомним, что если траектория  $Q$  отображения  $T$  имеет период  $n$ , то есть  $T^n(q) = q$  для любой точки  $q \in Q$ , то ее мультипликаторы это собственные значения матрицы линеаризации для  $T^n$  в точке  $q$ . В общем обратимом случае симметричные периодические траектории рождаются в результате так называемых параболических бифуркаций, имеющих тип « $0 \rightarrow 2$ », когда из ничего у  $T^n$  возникает симметричная неподвижная точка с мультипликаторами  $(+1; +1)$ , которая затем распадается на две симметричные неподвижные точки — седловую и эллиптическую. Для нашей задачи такие бифуркации не очень интересны, так как они в главном порядке являются консервативными.

Гораздо больший интерес представляют обратимые бифуркации типа « $0 \rightarrow 4$ », которые встречаются в рассматриваемой модели и разрушают ее консервативность. Они появляются здесь благодаря тому, что отображение Пуанкаре  $T_{2\pi}$  является квадратом неориентируемого отображения  $\tilde{T} = \sigma T_\pi$ . Соответственно, у отображения  $\tilde{T}$  рождающиеся симметричные периодические точки будут иметь пару мультипликаторов  $+1$  и  $-1$ , а значит, они могут распадаться на 4 точки — две консервативные симметричные периода 2 и две неконсервативные неподвижные несимметричные. Локальная теория таких бифуркаций, называемых обратимыми бифуркациями потери симметрии (symmetry-breaking bifurcations), была представлена в [16, 91, 92]. В частности, там было показано, что в случае симметричной неподвижной точки с мультипликаторами  $+1$  и  $-1$  возможны два случая невырожденных бифуркаций типа « $0 \rightarrow 4$ ». В первом случае точка распадается на две

<sup>18</sup>Последнее свойство симметрии отображения Пуанкаре является следствием так называемой симметрии потока по сдвигу времени (time-shift symmetry), часто встречающейся в периодически возмущенных автономных системах [88–90].

симметричные эллиптические точки периода 2 и две несимметричные седловые неподвижные точки с якобианами больше и меньше 1. Во втором случае точка распадается на две симметричные седловые точки периода 2 и две несимметричные неподвижные устойчивую и неустойчивую точки (сток и источник). Соответственно, у квадрата неориентируемого отображения будут появляться 4 неподвижные точки соответствующих типов. Это показывает, что бифуркации типа «0 → 4» должны быть типичными для периодических траекторий в случае отображения  $T_{2\pi}$ , когда они имеют нечетные периоды  $n = 2m + 1$ , то есть когда отображение первого возвращения  $T_{2\pi}^{2m+1} = (\tilde{T}^2)^{2m+1} = (\tilde{T}^{2m+1})^2$  является квадратом неориентируемого отображения. Заметим, что в случае четных периодов отображение  $T_{2\pi}^{2m}$  будет квадратом ориентируемого отображения  $\tilde{T}^{2m}$ , и поэтому здесь, скорее всего, должны происходить лишь консервативные в первом приближении параболические бифуркации.

В работе [16] были исследованы бифуркации типа «0 → 4» периодических точек отображения  $T_{2\pi}$  в случае нечетных периодов  $n \leq 9$  (для точек периодов  $\geq 11$  моменты бифуркаций еще можно было найти, но исключительная малость масштабов не позволяла исследовать что-то большее). На рис. 11 показаны некоторые детали соответствующей бифуркации для точки периода 3, которая происходит при  $\varepsilon = \varepsilon_3^* \simeq 0.455$ .

Отметим, что свойство обратимости отображения  $T_{2\pi}$  позволяет проводить достаточно простую процедуру нахождения тех значений параметра  $\varepsilon$ , при которых происходят бифуркации рождения симметричных периодических траекторий. Для данного периода  $n$  нужно только построить кривую  $T_{2\pi}^n(Fix(R))$  и найти момент, когда эта кривая будет касаться соответствующей линии множества  $Fix(R)$ . На рис. 11, а, в частности, показан случай, когда кривая  $T_{2\pi}^3(\{\eta = \pi\})$  (здесь линия  $\eta = \pi$  — одна из линий множества  $Fix(R)$ ) близка к моменту касания линии  $\eta = \pi$

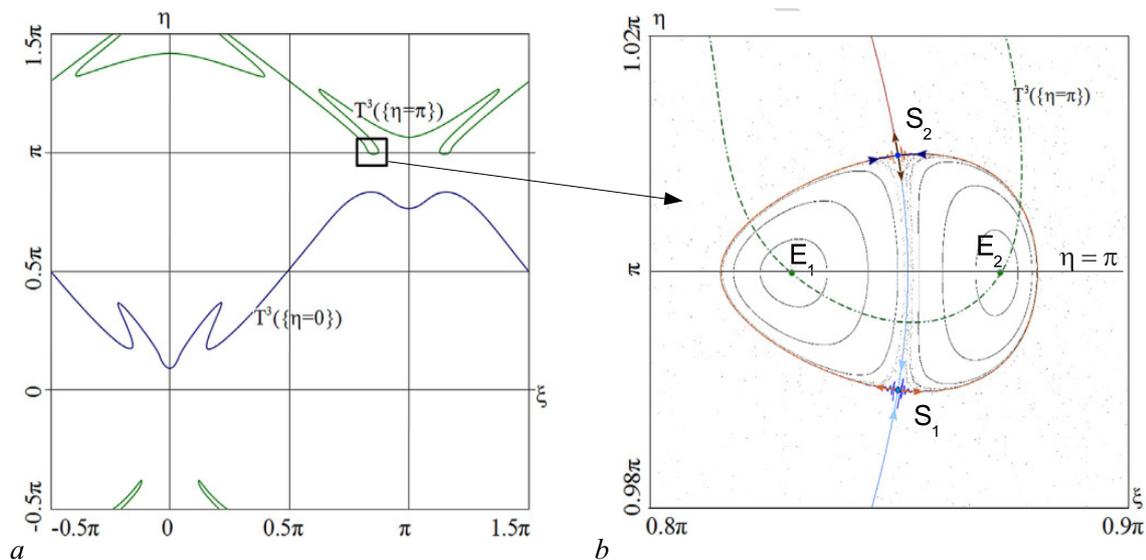


Рис. 11. а — Кривые  $T_{2\pi}^3(Fix(R))$  при  $\varepsilon = 0.457 > \varepsilon_3^*$ . Кривая  $T_{2\pi}^3(\{\eta = \pi\})$  пересекает линию  $\eta = \pi$  в двух парах точек, симметричных относительно линии  $\xi = \pi$ , так как система (5) симметрична относительно замены координат вида (6). б — Увеличенный фрагмент фазового портрета в прямоугольнике из рис. а, здесь отображение  $T_{2\pi}^3$  имеет 4 неподвижных точки: две симметричные эллиптические  $E_1$  и  $E_2$  и два неконсервативных седла  $S_1$  и  $S_2$  (с якобианами  $J(S_1) = J(S_2)^{-1} \simeq 1.39$ ) (цвет онлайн)

Fig. 11. а — Curves  $T_{2\pi}^3(Fix(R))$  at  $\varepsilon = 0.457 > \varepsilon_3^*$ . The curve  $T_{2\pi}^3(\{\eta = \pi\})$  intersects the line  $\eta = \pi$  at two pairs of points symmetric with respect to the line  $\xi = \pi$ , since system (5) is symmetric with respect to the coordinate substitution of the form (6). б — Magnified fragment of the phase portrait in the rectangle from Fig. а, here the map  $T_{2\pi}^3$  has 4 fixed points: two symmetric elliptic  $E_1$  and  $E_2$  and two non-conservative saddles  $S_1$  and  $S_2$  (with Jacobians  $J(S_1) = J(S_2)^{-1} \simeq 1.39$ ) (color online)

(они касаются друг друга при  $\varepsilon = \varepsilon_3^*$ ). Когда бифуркационные моменты найдены, структуру бифуркации можно уже изучать по фазовым портретам.

Отметим также, что указанные локальные бифуркации, которые, очевидно, разрушают консервативность в модели, ведут также и к глобальным бифуркациям, связанным с образованием негрубых гетероклинических контуров, содержащих седла с якобианами больше и меньше 1. Например, в случае с несимметричными седлами периода 3, примеры таких контуров, найденных в [16] численно, показаны на рис. 12. В силу теорем из работ [5, 93], бифуркации таких контуров приводят к возникновению смешанной динамики, когда у системы появляется счетное множество периодических стоков, источников и седел, в совокупности неотделимых друг от друга.

Таким образом, в работе [16] вопрос о существовании смешанной динамики в модели Пиковского–Топажа был исследован с разных сторон. Был подтвержден не только факт ее существования, но и исследованы бифуркационные механизмы ее возникновения как локальные, разрушающие консервативность, так и глобальные, распространяющие неконсервативные элементы динамики (периодические стоки и источники, например) далеко по фазовому пространству.

Отметим, что в работе [16] был найден также еще один интересный механизм «взрывного» возникновения смешанной динамики, в основе которой лежит бифуркация исчезновения неподвижной точки у отображения Пуанкаре  $T_{2\pi}$ . Эта бифуркация происходит при  $\varepsilon = \varepsilon_1^* \simeq 0.6042$ , она имеет тип « $0 \rightarrow 4$ » и связана с появлением при  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$  двух симметричных друг другу наборов из четырех неподвижных точек (сток, источник и два седла) вблизи точек пересечения линий симметрии  $\xi = 0 \cup \xi = \pi$  и линий  $\eta = 0 \cup \eta = \pi$  неподвижных точек инволюции  $R$ . В результате этого при  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$  динамика модели становится сугубо диссипативной — большинство траекторий стремится к стокам, которые становятся глобальными аттракторами, соответственно, глобальными репеллерами становятся источники. Если теперь проследить за этими аттракторами и репеллерами при уменьшении  $\varepsilon$ , то обнаруживается интересное явление типа «обратимой перемежаемости» — сначала возникает сложное непритягивающее (и неотталкивающее) множество, а после того,

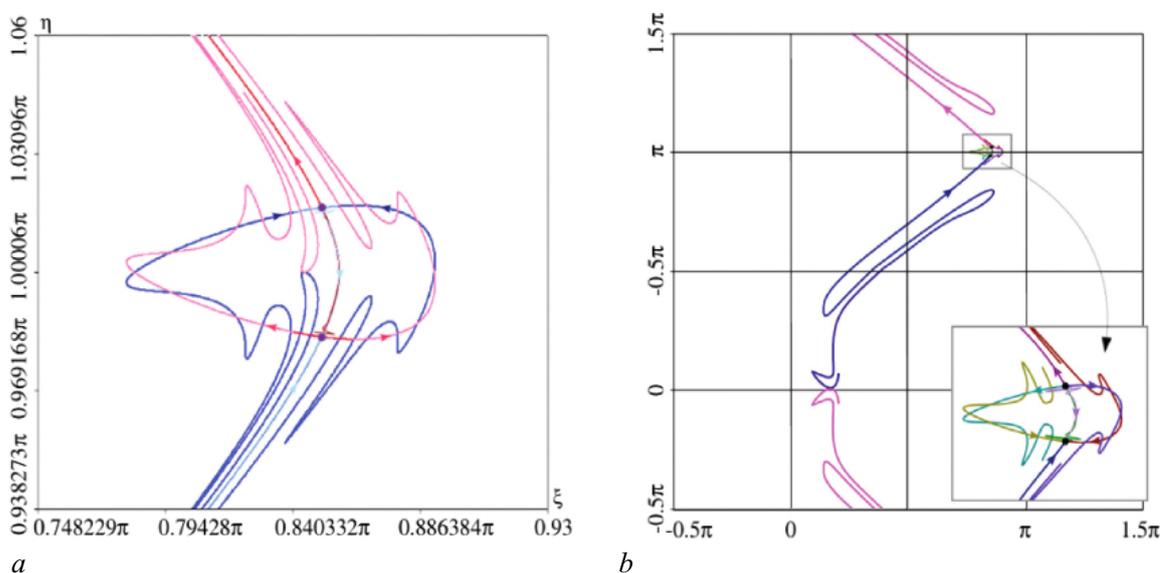


Рис. 12. *a* — Образование «малого» гетероклинического контура при  $\varepsilon \approx 0.46207$ . *b* — Образование «большого» гетероклинического контура при  $\varepsilon \approx 0.463$  (цвет онлайн)

Fig. 12. *a* — Formation of a “small” heteroclinic cycle at  $\varepsilon \approx 0.46207$ . *b* — Formation of a “large” heteroclinic cycle at  $\varepsilon \approx 0.463$  (color online)

как аттракторы и репеллеры сливаются (вместе с седлами), мгновенно возникает хаотическая смешанная динамика, см. рис. 1, который построен при  $\varepsilon = 0.6 < \varepsilon_1^*$ . На рис. 13 показаны некоторые этапы формирования упомянутой сложной динамики, которая метастабильна до тех пор, пока неподвижные точки не исчезнут.

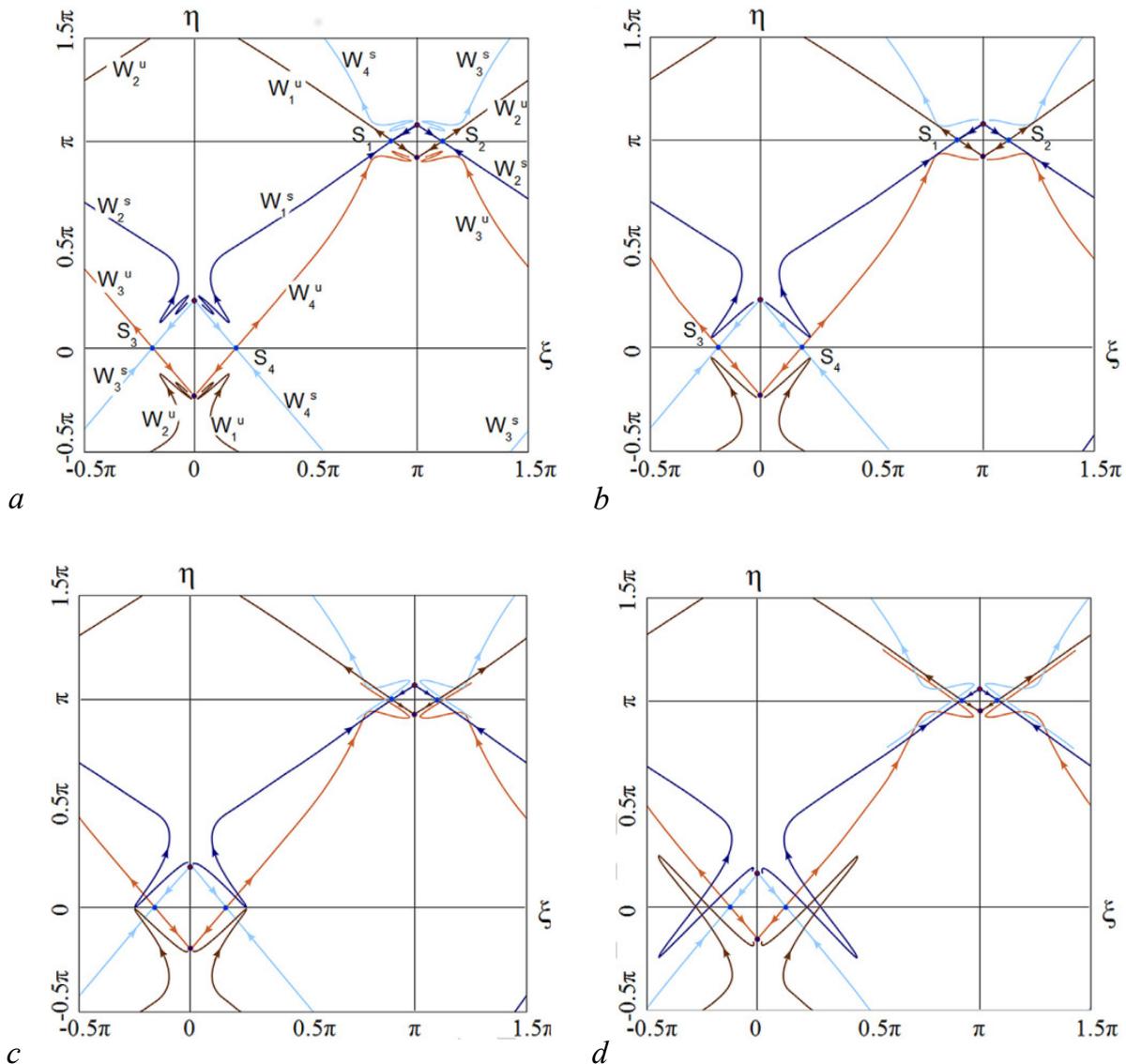


Рис. 13. Развитие динамики (при  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$ ) в модели при уменьшении  $\varepsilon$  в результате образования гетероклинических пересечений между инвариантными многообразиями седловых неподвижных точек  $S_i, i = 1, \dots, 4$ . *a* – Многообразия не пересекаются,  $\varepsilon = 0.7$  (динамика простая); *b* – момент образования гетероклинических пересечений,  $\varepsilon = \varepsilon_1^{het} \simeq 0.690$  (динамика становится хаотической); *c* – возникают симметричные гетероклинические траектории,  $\varepsilon = \varepsilon_2^{het} \simeq 0.679$  (начало возникновения консервативной динамики); *d* – уже развитые гомоклинические и гетероклинические структуры,  $\varepsilon = 0.650$  (возникают при  $\varepsilon < \varepsilon_2^{het}$ ) (цвет онлайн)

Fig. 13. Dynamics development (at  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$ ) in the model at decreasing  $\varepsilon$  as a result of the formation of heteroclinic intersections between invariant manifolds of saddle fixed points  $S_i, i = 1, \dots, 4$ . *a* – The manifolds do not intersect,  $\varepsilon = 0.7$  (the dynamics are simple); *b* – the moment of the formation of heteroclinic intersections,  $\varepsilon = \varepsilon_1^{het} \simeq 0.690$  (dynamics become chaotic); *c* – symmetric heteroclinic trajectories emerge,  $\varepsilon = \varepsilon_2^{het} \simeq 0.679$  (the beginning of the emergence of conservative dynamics); *d* – already developed homoclinic and heteroclinic structures,  $\varepsilon = 0.650$  (arise when  $\varepsilon < \varepsilon_2^{het}$ ) (color online)

**3.2. Неголономная модель кельтского камня.** Кельтским камнем называется твердое тело с округлой симметричной поверхностью, которое обладает динамической асимметрией в следующем смысле. Если положить такой камень на плоскость и завращать его вокруг вертикальной оси в определенном направлении, например, по часовой стрелке, то он может устойчиво продолжать свое вращение, как и всякое обычное округлое тело. Однако если попытаться закрутить такой камень против часовой стрелки, то он без всякой видимой причины вскоре замедлит свое вращение, начнет сильно раскачиваться, затем поменяет направление вращения на противоположное и, наконец, продолжит устойчиво вращаться по часовой стрелке (в идеале с той же угловой скоростью, как и в начале).

Неголономная модель кельтского камня (когда предполагается, что контакт камня с плоскостью точечный и отсутствует проскальзывание, соответственно, сила трения не производит работы) дает простое математическое объяснение этому явлению. Достаточно быстрому вращению

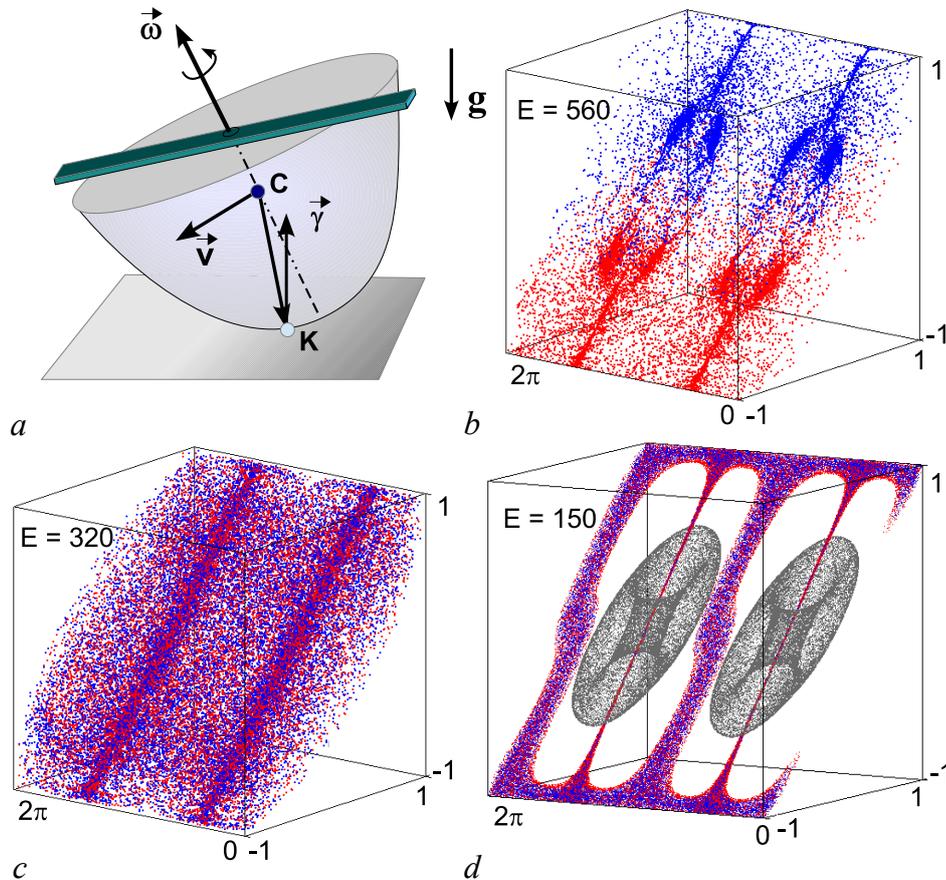


Рис. 14. *a* — Кельтский камень на плоскости — его можно представить как однородное тело с выпуклой поверхностью, симметричной относительно осей  $O_x$  и  $O_y$ , с плоской площадкой  $z = z_0$  в центре которой прикреплена тяжелая штанга, поворачивая ее, можно задавать соответствующую динамическую асимметрию камня; *b* — странный аттрактор (синие точки) и странный репеллер (красные точки); *c* — смешанная динамика; *d* — сосуществование смешанной динамики с поведением траекторий, которое практически не отличается на счете от консервативного (2 серых овала в середине куба) (цвет онлайн)

Fig. 14. *a* — Celtic stone on the plane — it can be represented as a homogeneous body with a convex surface symmetric about the axes  $O_x$  and  $O_y$ , with a flat area  $z = z_0$  in the center of which a heavy rod is attached; by rotating it, one can set the corresponding dynamical asymmetry of the stone; *b* — strange attractor (blue points) and strange repeller (red points); *c* — mixed dynamics; *d* — coexistence of mixed dynamics with trajectory behavior that is almost indistinguishable in numerics from the conservative one (2 gray ovals in the middle of the cube) (color online)

камня вокруг вертикальной оси, например, по часовой стрелке, отвечает в модели асимптотически устойчивое (так называемое перманентное) состояние равновесия  $O_s$ . Так как неголономная модель камня описывается системой, обратимой относительно инволюции  $\vec{\omega} \rightarrow -\vec{\omega}$  и обращения времени [94], то в этой системе также присутствует вполне неустойчивое состояние равновесия  $O_u$ , отвечающее вращению камня вокруг той же оси, но против часовой стрелки. Если в системе, кроме устойчивого состояния равновесия, других аттракторов нет (что бывает при большой энергии камня), то траектории из окрестности неустойчивого равновесия  $O_u$  будут естественно стремиться к устойчивому состоянию равновесия  $O_s$ .

Важно отметить, что помимо устойчивого состояния равновесия, неголономная модель кельтского камня может обладать и другими, как регулярными, так и хаотическими аттракторами. Впервые странные аттракторы в динамике кельтских камней были обнаружены в работе [94]. Исследованию странных аттракторов в этой модели также посвящены работы [17, 22, 95].

Что касается смешанной динамики, то это явление в неголономной модели кельтского камня впервые было обнаружено в работе [17], в которой было показано, что аттрактор системы может пересекаться, но не совпадать с репеллером. На рис. 14, *b*, 14, *c* и 14, *d* изображены фазовые портреты аттрактора  $A$  (синие точки) и репеллера  $R$  (красные точки) в неголономной модели кельтского камня при различных значениях параметров. Когда энергия вращения камня достаточно велика, полный аттрактор системы отделен от полного репеллера, см. рис. 14, *b*. Однако при ее уменьшении аттрактор и репеллер начинают увеличиваться в размерах и в некоторый момент начинают пересекаться — возникает смешанная динамика, см. рис. 14, *c*, в которой можно выделить симметричное подмножество, поведение траекторий на котором практически не отличимо на счете от консервативного, рис. 14, *d*. Отметим также, что в нашей работе [22] были изучены бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики в модели кельтского камня. В частности, показано, что она может возникать взрывным образом в результате столкновения на линии неподвижных точек инволюции простых аттрактора и репеллера — устойчивой и вполне неустойчивой неподвижных точек. Это явление «обратимой перемежаемости» похоже на то, которое мы обсуждали выше для модели Пиковского–Топажа, но, во-первых, оно наблюдается в случае трехмерного отображения, а во-вторых, здесь сливаются только две точки — сток и источник (в модели Пиковского–Топажа сливались 4 точки: сток, источник и два седла).

**3.3. Примеры смешанной динамики, возникающей при столкновении хаотических аттрактора и репеллера.** Выше мы рассмотрели примеры систем, демонстрирующих смешанную динамику, которая возникает либо в результате бифуркаций разрушения консервативности, либо взрывным образом в результате бифуркаций слияния простого аттрактора и простого репеллера. Здесь мы рассмотрим другие возможности, когда смешанная динамика возникает в результате столкновения странного аттрактора со странным репеллером. Если бы указанные аттракторы и репеллеры были цепно-транзитивными, то есть, соответственно, сталкивались бы CRH-аттрактор и CRH-репеллер, то они по теореме 2 из [4] (и как мы объясняли в разделе 2) должны просто объединиться и образовать одно большое множество, обратимое ядро, которое будет одновременно и CRH-аттрактором и CRH-репеллером. На самом деле этого никогда не происходит (было бы очень странно, когда таким образом возникает топологическая консервативная динамика, для которой  $A = R$ ). Реальная картина может получиться, когда сталкиваются квазиаттрактор и квазирепеллер, что также согласуется с другим результатом из [4], по которому образующееся обратимое ядро должно быть окружено счетным множеством диссипативных аттракторов и репеллеров (стоков и источников, например).

В качестве первого примера модели, демонстрирующей смешанную динамику такого типа, рассмотрим неголономную модель волчка Сулова — тяжелого твердого тела, движения которого ограничено неголономной связью  $(\vec{\omega}, \vec{e}) = 0$ , запрещающей какие-либо его вращения вокруг

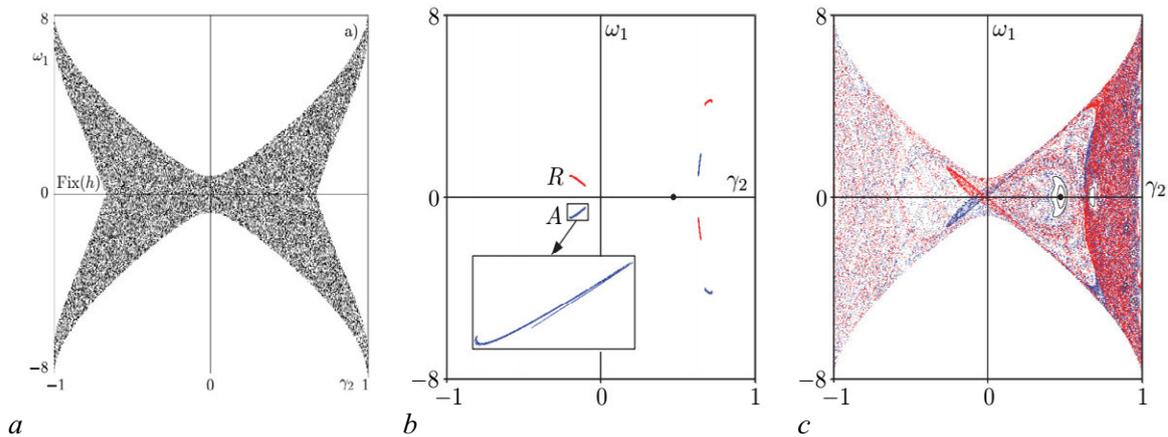


Рис. 15. *a* — Развитый консервативный хаос в модели волчка Суслова; *b* — трехкомпонентные странные аттрактор *A* и репеллер *R* типа Эно симметричны и разделены (показан увеличенный фрагмент компоненты аттрактора); *c* — смешанная динамика после их столкновения — полный аттрактор модели (синие точки) полный репеллер модели (красные точки) почти совпадают, но видно, что они отличаются в некоторых деталях (цвет онлайн)

Fig. 15. *a* — Developed conservative chaos in the Suslov top model; *b* — three-component strange attractor *A* and repeller *R* of Hénon type are symmetric and separated (an enlarged fragment of the attractor component is shown); *c* — mixed dynamics after their collision — the full attractor (blue points) the full repeller (red points) almost coincide, but it can be seen that they differ in some details (color online)

некоторой фиксированной оси  $\vec{e}$ . Существование смешанной динамики в такой модели было установлено в работе [23], в которой, в частности, было показано, как смешанная динамика возникает в результате столкновения симметричных хаотических аттрактора и репеллера. Заметим, что, в частности, такой аттрактор по своим свойствам очень похож на квазиаттрактор в отображении Эно.

Напомним, что аттрактор Эно был найден еще в работе [56] и он является квазиаттрактором двумерного диссипативного отображения (с якобианом меньше 1 по модулю), содержащий седловую неподвижную точку с мультипликаторами  $\lambda$  и  $\gamma$  такими, что  $|\lambda| < 1$  и  $\gamma < -1$  (в ориентируемом случае  $-1 < \lambda < 0$ , в неориентируемом случае  $0 < \lambda < 1$ ). Такой аттрактор содержит целиком неустойчивое многообразие  $W^u(O)$  точки  $O$ , и он может быть представлен либо как замыкание множества  $W^u(O)$ , либо, что эквивалентно, как пролонгация неподвижной точки  $O$ . Также у аттрактора Эно существует поглощающая область, в которой он является максимальным аттрактором, то есть содержит помимо  $W^u(O)$  еще и все устойчивые периодические точки из этой окрестности. Обычно аттракторами Эно называют только аттракторы, которые наблюдаются именно в отображении Эно  $\bar{x} = y$ ,  $\bar{y} = M - bx - y^2$ , которое является квадратичным отображением плоскости с постоянным якобианом  $J = b$ . Однако подобные аттракторы в других случаях мы будем называть аттракторами типа Эно<sup>19</sup>. Такие аттракторы представляют большой интерес, так как часто встречаются в приложениях, в том числе в моделях, которые представлены в этом параграфе.

У модели волчка Суслова, в отличие от неголономной модели кельтского камня, существует три независимых первых интеграла, поэтому исследование ее динамики может быть сведено к изучению трехмерного потока или соответствующего двумерного отображения Пуанкаре на некотором компактном фазовом пространстве. При определенных условиях (в частности, когда один из элементов тензора моментов инерции равен нулю) у системы, описывающей движение волчка Суслова, существует гладкая инвариантная мера [96], и тогда ее динамика полностью консервативна. В частности, на рис. 15, *a* представлен фазовый портрет такой динамики в случае, когда консервативный хаос развит достаточно сильно, и, соответственно, итерации отображения

<sup>19</sup>Заметим, что в английском языке, в зависимости от контекста, существует определенное различие между терминами «the Hénon attractor» (это тот, который был найден в оригинальной работе [56] при  $M = 1.4$  и  $b = -0.3$ ) и «a Hénon attractor», и тем более «Hénon-like attractor». Наш аттрактор в модели Суслова — это «Hénon-like attractor».

Пуанкаре одной случайно выбранной начальной точки более или менее плотно заполняют фазовое пространство.

В общем случае такая инвариантная мера отсутствует, и в фазовом пространстве системы могут существовать как регулярные, так и хаотические аттракторы. При некоторых значениях параметров в системе возникает странный аттрактор типа Эно, содержащий седловую точку периода 3 и симметричный ему странный репеллер типа Эно, рис. 15, *b*. В результате столкновения этих аттрактора и репеллера мгновенно возникает смешанная динамика, рис. 15, *c*, в результате которой аттрактор и репеллер визуально не только объединяются, но и хаос также начинает распространяться далеко по всему фазовому пространству. Распределение этих точек (синих для аттрактора, красных для репеллера — так в [23]) по фазовому пространству показывает, что здесь имеет место явление похожее на перемежаемость, которую можно назвать здесь «обратимой хаотической».

Другой весьма интересный пример системы, в которой смешанная динамика возникает в результате столкновения хаотических аттракторов и репеллеров, был рассмотрен в работе [24]. В этой работе изучалась модель двух точечных вихрей при возмущении их акустической волной. Исследование динамики такой модели проводилось с помощью отображения Пуанкаре двумерного цилиндра. Было показано, что в этой модели существует смешанная динамика, которая возникает в результате опять же столкновения аттракторов и репеллеров типа Эно. Однако таких столкновений должно быть, как показано в [24], как минимум восемь — фазовый портрет итоговой смешанной динамики показан на рис. 16. Здесь обращает внимание тот факт, что итоговая смешанная динамика совсем не похожа на те типы, которые были представлены выше. По сути, здесь наблюдается новый тип такой динамики, которая называется *диссипативной смешанной динамикой*, когда аттрактор и репеллер пересекаются, но распределение положительных и отрицательных итераций даже одной и той же точки на их общем симметричном множестве (обратимом ядре) выглядит чрезвычайно несимметрично. Положительные итерации имеют тенденцию плотно группироваться вблизи «бывшего аттрактора», а отрицательные — вблизи «бывшего репеллера». При этом никакой тенденции для того, чтобы точки аппроксимировали обратимое ядро, здесь не наблюдается и близко (теоретически по теореме из [4] такая тенденция должна существовать, но даже при «неразумном» увеличении времени счета она никак не проявляется). Можно сделать вывод, что в отличие от других рассмотренных в настоящей работе примеров смешанной динамики, в которых консервативность обратимого ядра условно превалирует, здесь существенно превалирует диссипативность сталкивающихся аттракторов и репеллеров, которая и передает сильную асимметрию взаимно сингулярным мерам для положительных и отрицательных итераций.

Еще один пример системы адаптивно связанных фазовых осцилляторов, в которой также возникает смешанная динамика, был рассмотрен в работах А. Емельяновой и В. Некоркина [25, 26]. Эти работы интересны с той точки зрения, что в них был впервые приведен пример системы, не являющейся обратимой по времени, а также тем, что в [26] также впервые был целенаправленно построен фазовый портрет отображения Пуанкаре в ограничении на обратимое ядро системы.

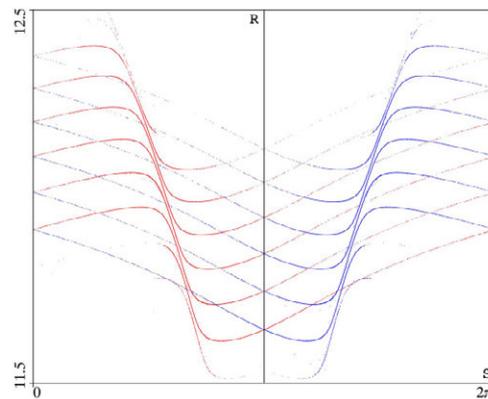


Рис. 16. Пример фазового портрета сильно диссипативной смешанной динамики, возникающей после последовательных столкновений восьми пар симметричных аттракторов и репеллеров типа Эно. Результирующий аттрактор изображен синими точками, репеллер — красными (цвет онлайн)

Fig. 16. An example of a phase portrait of strongly dissipative mixed dynamics arising after successive collisions of eight pairs of symmetric attractors and repellers of Hénon type. The resulting attractor is represented by blue points, the repeller by red ones (color online)

## Список литературы

1. *Аносов Д. В., Бронштейн И. У.* Топологическая динамика // В кн.: Динамические системы–1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 224–227.
2. Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. Динамические системы-9 / Под ред. Аносова Д. В. М.: ВИНТИ, 1991. 247 с.
3. *Gonchenko S. V.* Reversible mixed dynamics: A concept and examples // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2016. Vol. 5, no. 4. P. 365–374. DOI: 10.5890/DNC.2016.12.003.
4. *Гонченко С. В., Тураев Д. В.* О трех типах динамики и понятии аттрактора // Труды МИАН. 2017. Vol. 297. P. 133–157. DOI: 10.1134/S0371968517020078.
5. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН. 1997. Vol. 216. P. 76–125.
6. *Turaev D. V.* Richness of chaos in the absolute Newhouse domain // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2010. P. 1804–1815. DOI: 10.1142/9789814324359\_0122.
7. *Turaev D. V.* Maps close to identity and universal maps in the Newhouse domain // *Communications in Mathematical Physics*. 2015. Vol. 335, no. 3. P. 1235–1277. DOI: 10.1007/s00220-015-2338-4.
8. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps // *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20, no. 2. P. 241–275. DOI: 10.1088/0951-7715/20/2/002.
9. *Turaev D. V.* On dimension of non-local bifurcational problems // *Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6, no. 5. P. 919–948. DOI: 10.1142/S0218127496000515.
10. *Ruelle D.* Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors // *Comm. Math. Phys.* 1981. Vol. 82. P. 137–151. DOI: 10.1007/BF01206949.
11. *Newhouse S.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // *Topology*. 1974. Vol. 13. P. 19–18.
12. *Afraimovich V. S., Shilnikov L. P.* Strange attractors and quaiattractors // In.: G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph (eds) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Boston: Pitmen, 1983. P. 1–34.
13. *Tedeschini-Lalli L., Yorke J. A.* How often do simple dynamical processes have infinitely many coexisting sinks? // *Commun. Math. Phys.* 1986. Vol. 106. P. 635–657. DOI: 10.1007/BF01463400.
14. *Lai Y. C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic // *Nonlinearity*. 1993. Vol. 6, no. 5. P. 779–797.
15. *Pikovsky A., Topaj D.* Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // *Physica D*. 2002. Vol. 170. P. 118–130.
16. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. V.* On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Topaj system of coupled rotator // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2017. Vol. 350. P. 45–57. DOI: 10.1016/j.physd.2017.02.002.
17. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013. Vol. 18, no. 5. P. 521–538. DOI: 10.1134/S1560354713050055.
18. *Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lazo J. T., Sten'kin O.* Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // *Nonlinearity*. 2013. Vol. 26. P. 1–33.
19. *Гонченко С. В., Гонченко М. С., Синицкий И. О.* О смешанной динамике двумерных обратимых диффеоморфизмов с симметричными негрубыми гетероклиническими контурами // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2020. Т. 84, № 1. С. 27–59. DOI: 10.1070/IM8786.
20. *Kazakov A. O.* Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013. Vol. 18, no. 5. P. 508–520. DOI: 10.1134/S1560354713050043.
21. *Kuznetsov S. P.* Regular and chaotic motions of the Chaplygin sleigh with periodically switched location of nonholonomic constraint // *EPL (Europhysics Letters)*. 2017. Vol. 118, no. 1. P. 10007. DOI: 10.1209/0295-5075/118/10007.

22. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Самылина Е. А. Хаотическая динамика и мультистабильность в неголономной модели кельтского камня // Известия вузов. Радиофизика. 2018. Vol. 61, no. 10. P. 867–882.
23. Kazakov A. O. On the appearance of mixed dynamics as a result of collision of strange attractors and repellers in reversible systems // Radiophysics and Quantum Electronics. 2019. Vol. 61, no. 8–9. P. 650–658. DOI: 10.1007/s11141-019-09925-6.
24. Kazakov A. O. Merger of a Henon-like attractor with a Henon-like repeller in a model of vortex dynamics // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. Vol. 30, no. 1. P. 011105. DOI: /10.1063/1.5144144.
25. Emelianova A. A., Nekorkin V. I., On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2019. Vol. 29, no. 11. P. 111102. DOI: 10.1063/1.5130994.
26. Emelianova A. A., Nekorkin V. I., The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. Vol. 30, no. 5. P. 051105. DOI: 10.1063/5.0009525.
27. Ariel G., Schiff J. Conservative, dissipative and super-diffusive behavior of a particle propelled in a regular flow // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2020. Vol. 411. P. 132584. DOI: 10.1016/j.physd.2020.132584.
28. Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. Vol. 30, no. 7. P. 073114. DOI: 10.1063/5.0007230.
29. Гонченко С. В., Гонченко А. С., Казаков А. О. Три типа аттракторов и смешанная динамика неголономных моделей движения твердого тела // В кн.: Дифференциальные уравнения и динамические системы: сб. статей. Сер. Труды МИАН. Т. 308. М.: МИАН, 2020. P. 135–151. DOI: 10.4213/tm4053.
30. Гонченко С. В. Три формы динамического хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 2020. Т. 63, № 9. С. 840–862.
31. Гонченко С. В., Гонченко А. С., Морозов К. Е. Третий тип динамики и гомоклинические траектории Пуанкаре // Известия вузов. Радиофизика. 2023. Т. 66, № 9. С. 767–796. DOI: 10.52452/00213462-2023-66-09-767.
32. Conley C. C. Isolated Invariant Sets and the Morse Index. Regional conference series in mathematics, vol. 38. American Mathematical Soc, 1978. 89 p. DOI: 10.1090/cbms/038.
33. Hurley M. Attractors: persistency, and density of their basins // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 269, no. 1. P. 247–271. DOI: 10.1090/S0002-9947-1982-0637037-7.
34. Galias Z., Tucker W. Is the Hénon attractor chaotic? // Chaos. 2015. Vol. 25, iss. 3. 033102. DOI: 10.1063/1.4913945.
35. Tucker W. A rigorous ode solver and Smale's 14th problem // Foundations of Computational Mathematics. 2002. Vol. 2. P. 53–117. DOI: 10.1007/s002080010018.
36. Delshams A., Gonchenko M., Gonchenko S. V., Lazaro J. T. Mixed dynamics of 2-dimensional reversible maps with a symmetric couple of quadratic homoclinic tangencies // Discrete Continuous Dyn. Sys. A. 2018. Vol. 38, no. 9. P. 4483–4507. DOI: 10.3934/dcds.2018196.
37. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сборник. 1998. Vol. 189, no. 2. С. 137–160. DOI: 10.4213/sm300.
38. Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system // Nonlinearity. 2021. Vol. 34, no. 4. P. 2018–2047. DOI: 10.1088/1361-6544/abc794.
39. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. Часть 1 // Матем. сб. 1972. Т. 88, № 4. С. 475–492.
40. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. Часть 2 // Матем. сб. 1973. Т. 90, № 1. С. 139–156.
41. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике // Москва-Ижевск, 2013. 488 с.

42. *Tucker W.* The Lorenz attractor exists // *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics*. 1999. Vol. 328, № 12. P. 1197–1202. DOI: 10.1016/S0764-4442(99)80439-X.
43. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // *ДАН СССР*. 1977. Т. 234, № 2. С. 336–339.
44. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца // *Труды ММО*. 1982. Т. 44. С. 150–212.
45. *Lorenz E.* Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963. Vol. 20, no. 2. P. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.C.
46. *Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D.* Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // *Int. J. of Bifurcation and chaos*. 2005. Vol. 15, no. 11. P. 3493–3508. DOI: 10.1142/S0218127405014180.
47. *Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Ovsyannikov I. I., Turaev D. V.* Examples of Lorenz-like attractors in Henon-like maps // *Math. Model. Nat. Phen.* 2013. Vol. 8, no. 5. P. 48–70.
48. *Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A., Samylyna E.* On discrete Lorenz-like attractors // *Chaos*. 2021. Vol. 31, iss. 2. P. 023117. DOI: 10.1063/5.0037621.
49. *Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная Динамика*. 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
50. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D.* Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *Int. J. Bif. and Chaos*. 2014. Vol. 24, no. 8. 25 p. DOI: 10.1142/S0218127414400057.
51. *Gonchenko S., Karatetskaia E., Kazakov A., Kruglov V.* Conjoined Lorenz twins — a new pseudohyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows // *Chaos*. 2022. Vol. 32. P. 121107. DOI: 10.1063/5.0123426.
52. *Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R.* The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014. Vol. 19. P. 718–733. DOI: 10.1134/S1560354714060094.
53. *Гонченко С. В.* Об устойчивых периодических движениях в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // *Мат. заметки*. 1983. Т. 33, вып. 5. С. 745–755.
54. *Gonchenko S. V., Simo C., Vieiro A.* Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight // *Nonlinearity*. 2013. Vol. 26, no. 3. P. 621–678. DOI: 0.1088/0951-7715/26/3/621.
55. *Гонченко С. В.* О двухпараметрическом семействе систем, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой // В кн.: *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*. Горький, 1985. С. 55–72.
56. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69–77. DOI: 10.1007/BF01608556.
57. *Benediks M., Carleson L.* Dynamics of the Henon Map // *Ann. Math.* 1991. Vol. 133. P. 73–169. DOI: 10.2307/2944326.
58. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // *Докл. Росс. Акад. Наук*. 1993. Т. 329, № 4. С. 404–407.
59. *Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Shilnikov L. P.* On homoclinic origin of Henon-like maps // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2010. Vol. 15, no. 4–5. P. 462–481. DOI: 10.1134/S1560354710040052.
60. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
61. *Biragov V. S.* Bifurcations in a two-parameter family of conservative mappings that are close to the Hénon mapping // *Methods of the qualitative theory of differential equations*. 1987. P. 10–24.
62. *Simó C., Vieiro A.* Resonant zones, inner and outer splitting in generic and low order resonances of area preserving maps // *Nonlinearity*. 2009. Vol. 22, no. 5. P. 1191–1245. DOI: 10.1088/0951-7715/22/5/012.

63. *Milnor J.* On the concept of attractor // *Comm. Math. Phys.* 1985. Vol. 99. P. 177–195. DOI: 10.1007/BF01212280.
64. *Минков С. С.* Толстые аттракторы и косые произведения: диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2016. 61 с.
65. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // *Доклады Академии Наук.* 2008. Т. 418, № 1.
66. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D.* Elements of contemporary theory of dynamical chaos: A tutorial. Part I. Pseudohyperbolic attractors // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2018. Vol. 28, no. 11. P. 1830036. DOI: 10.1142/S0218127418300367.
67. *Гонченко С. В., Лэмб Й. С. В., Риос И., Тураев Д.* Аттракторы и репеллеры в окрестности эллиптических точек обратимых систем // *Доклады РАН.* 2014. Vol. 454. P. 375–378. DOI: 10.7868/S0869565214040045.
68. *Newhouse S.* Nondensity of axiom  $A(a)$  on  $S^2$  // *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.* 1970. Vol. 14. С. 191–202.
69. *Newhouse S.* The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // *Publ. Math. IHES.* 1979. Vol. 50. P. 101–152. DOI: 10.1007/BF02684771.
70. *Guckenheimer J., Williams R. F.* Structural stability of Lorenz attractors // *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 1979. Vol. 50. P. 59–72. DOI: 10.1007/BF02684769.
71. *Malkin M. I.* Rotation intervals and dynamics of Lorenz-like maps // In: *Methods of qualitative theory of diff. eq. Gorki,* 1985. С. 122–139.
72. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *ДАН СССР.* 1991. Т. 320, № 2. С. 269–272.
73. *Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V.* On models with non-rough Poincare homoclinic curves // *Physica D.* 1993. Vol. 62, no. 1–4. P. 1–14. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90268-6.
74. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Докл. Росс. Акад. Наук.* 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
75. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D.* On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions // *Nonlinearity.* 2008. Vol. 21, no. 5. P. 923–972. DOI: 10.1088/0951-7715/21/5/003.
76. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* Об инвариантах  $\Omega$ -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией // *Укр. мат. журнал.* 1990. Т. 42, № 2. С. 153–159.
77. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Известия Росс. Акад. Наук, серия математическая.* 1992. Т. 56, № 6. С. 1165–1197.
78. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // *Итоги науки и техники, современная математика и ее приложения; тематические обзоры.* 1999. Т. 67. С. 69–128.
79. *Palis J., Viana M.* High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks // *Ann. Math.* 1994. Vol. 140. P. 91–136.
80. *Romero N.* Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions // *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* 1995. Vol. 15. P. 735–757.
81. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits // *Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 1. P. 15–31. DOI: 10.1063/1.166154.
82. *Гонченко С. В., Гонченко В. С.* О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями // *Труды МИАН.* 2004. Т. 244. С. 87–114.
83. *Гаврилов Н. К.* О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур // *Мат. заметки.* 1973. Т. 14, № 5. С. 687–697.
84. *Гонченко С. В.* Модули  $\Omega$ -сопряженности двумерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром. *Мат. сборник.* 1996. Т. 187, no. 9. С. 3–24. DOI: 10.4213/sm155.
85. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Stenkin O. V.* On Newhouse regions with infinitely many stable

- and unstable invariant tori // Proc. Int. Conf. Progress in Nonlinear Science dedicated to 100th Anniversary of A. A. Andronov, July 2–6; “Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics”, vol. 1. Nizhni Novgorod, 2002. P. 80–102.
86. Гонченко С. В. Динамические системы с гомоклиническими касаниями, омега-модули и бифуркации: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Н. Новгород, 2004. 300 с.
  87. Гонченко С. В., Стенькин О. В., Шильников Л. П. О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 1. С. 3–25.
  88. Dmitriev A. S., Komlev Yu. A., Turaev D. V. Bifurcation phenomena in the 1:1 resonant horn for the forced van Der Pol-Duffing equation // Int. J. Bifurcation Chaos. 1992. Vol. 2, no. 1. P. 93–100. DOI: 10.1142/S0218127492000094.
  89. Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Physica D. 1998. Vol. 112. P. 1–39.
  90. Rom-Kedar V., Wiggins S. Transport in two-dimensional maps // Arch. Ration. Mech. Anal. 1990. Vol. 109, no. 3. P. 239–298.
  91. Haragus M., Iooss G. Reversible bifurcations // In: Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems. London: Universitext, Springer, 2011.
  92. Lerman L. M., Turaev D. V. Breakdown of symmetry in reversible systems // Reg. Chaotic Dyn. 2012. Vol. 17, no. 3–4. P. 318–336. DOI: 10.1134/S1560354712030082.
  93. Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // Nonlinearity. 2004. Vol. 17, no. 4. P. 1217–1244. DOI: 10.1088/0951-7715/17/4/005.
  94. Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Успехи физических наук. 2003. Vol. 173, no. 4, 407–418. DOI: 10.3367/UFNr.0173.200304d.0407.
  95. Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголомомной механике кельтского камня // Нелинейная динамика. 2012. Vol. 8, no. 4. С. 735–762.
  96. Kozlov V. V. On the theory of integration of the equations of nonholonomic mechanics // Uspekhi Mekh. 1985. Vol. 8, no. 3. P. 85–107. DOI: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000203.
  97. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O. Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: reversal and strange attractors // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20, no. 5. P. 605–626.

## References

1. Anosov DV, Bronshtein IU. Smooth dynamical systems. Dynamical systems – 1, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. Moscow: VINITI; 1985. P. 204–229.
2. Dynamical systems – 9, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. Moscow: VINITI; 1991. 248 p.
3. Gonchenko SV. Reversible mixed dynamics: A concept and examples. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016;5(4):365–374. DOI: 10.5890/DNC.2016.12.003.
4. Gonchenko SV, Turaev DV. On three types of dynamics and concept of attractor. Proc. Steklov Math. Inst. 2017;297:116–137. DOI: 10.1134/S0081543817040071.
5. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. On Newhouse regions for two-dimensional diffeomorphisms close to diffeomorphism with non-rough heteroclinic contour. Proc. Steklov Math. Inst. 1997;216:76–125.
6. Turaev DV. Richness of chaos in the absolute Newhouse domain. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 2010:1804–1815. DOI: 10.1142/9789814324359\_0122.
7. Turaev DV. Maps close to identity and universal maps in the Newhouse domain. Communications in Mathematical Physics. 2015;335(3):1235–1277. DOI: 10.1007/s00220-015-2338-4.
8. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev DV. Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in

- conservative and dissipative two-dimensional maps. *Nonlinearity*. 2007;20(2):241-275. DOI: 10.1088/0951-7715/20/2/002.
9. Turaev DV. On dimension of non-local bifurcational problems. *Bifurcation and Chaos*. 1996;6(5): 919–948. DOI: 10.1142/S0218127496000515.
  10. Ruelle D. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors. *Comm. Math. Phys.* 1981;82:137–151. DOI: 10.1007/BF01206949.
  11. Newhouse S. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology*. 1974;13:19–18.
  12. Afraimovich VS, Shilnikov LP. Strange attractors and quaiattractors. In: Barenblatt GI, Iooss G, Joseph DD. (eds) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Boston: Pitmen; 1983. P. 1–34.
  13. Tedeschini-Lalli L, Yorke JA. How often do simple dynamical processes have infinitely many coexisting sinks? *Commun. Math. Phys.* 1986;106:635–657. DOI: 10.1007/BF01463400.
  14. Lai YC, Grebogi C, Yorke JA, Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic. *Nonlinearity*. 1993;6(5):779–797.
  15. Pikovsky A, Topaj D. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices. *Physica D*. 2002;170: 118–130.
  16. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev DV. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Topaj system of coupled rotators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2017;350:45–57. DOI: 10.1016/j.physd.2017.02.002.
  17. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013;18(5):521–538. DOI: 10.1134/S1560354713050055.
  18. Delshams A, Gonchenko SV, Gonchenko VS, Lazaro JT, Sten'kin O. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps. *Nonlinearity*. 2013;26: 1–33.
  19. Gonchenko SV, Gonchenko MS, Sinitzky IO. On mixed dynamics of two-dimensional reversible diffeomorphisms with symmetric non-transversal heteroclinic cycles. *Izv. RAN. Ser. Mat.* 2020; 84(1):23–51. DOI: 10.1070/IM8786.
  20. Kazakov AO. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013;18(5):508–520. DOI: 10.1134/S1560354 713050043.
  21. Kuznetsov SP. Regular and chaotic motions of the Chaplygin sleigh with periodically switched location of nonholonomic constraint. *EPL (Europhysics Letters)*. 2017;118(1):10007. DOI: 10.1209/0295-5075/118/10007.
  22. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Samylina EA. Chaotic dynamics and multistability in nonholonomic model of Celtic stone. *Izvestia of universities. Radiophysics*. 2018;61(10): 867-882.
  23. Kazakov AO. On the appearance of mixed dynamics as a result of collision of strange attractors and repellers in reversible systems. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2019;61(8–9):650–658. DOI: 10.1007/s11141-019-09925-6.
  24. Kazakov AO. Merger of a Henon-like attractor with a Henon-like repeller in a model of vortex dynamics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020;30(1):011105. DOI: /10.1063/1.5144144.
  25. Emelianova AA, Nekorkin VI. On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(11):111102. DOI: 10.1063/1.5130994.
  26. Emelianova AA, Nekorkin VI. The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020;30(5):051105. DOI: 10.1063/5.0009525.
  27. Ariel G, Schiff J. Conservative, dissipative and super-diffusive behavior of a particle propelled in a regular flow. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2020:132584.

28. Chigarev V, Kazakov A, Pikovsky A. Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020;30(7):073114. DOI: 10.1063/5.0007230.
29. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO. Three types of attractors and mixed dynamics of nonholonomic models of rigid body motion. *Proc. Steklov Inst. Math*. 2020;308:125–140. DOI: 10.1134/S0081543820010101.
30. Gonchenko SV. Three Forms of Dynamical Chaos. *Radiophys Quantum El*. 2021;63:756–775.
31. Gonchenko SV, Gonchenko AS, Morozov KE. The third type of dynamics and Poincaré homoclinic trajectories. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2024;66(9):693–719. DOI: 10.1007/s11141-024-10329-4.
32. Conley CC. Isolated Invariant Sets and the Morse Index. *Regional conference series in mathematics*, vol. 38. American Mathematical Soc.; 1978. 89 p. DOI: 10.1090/cbms/038.
33. Hurley M. Attractors: persistency, and density of their basins. *Trans. Amer. Math. Soc*. 1982;269(1):247–271. DOI: 10.1090/S0002-9947-1982-0637037-7.
34. Galias Z, Tucker W. Is the Hénon attractor chaotic? *Chaos*. 2015;25(3):033102. DOI: 10.1063/1.4913945.
35. Tucker W. A rigorous ode solver and Smale’s 14th problem. *Foundations of Computational Mathematics*. 2002;2:53–117. DOI: 10.1007/s002080010018.
36. Delshams A, Gonchenko M, Gonchenko SV, Lazaro JT. Mixed dynamics of 2-dimensional reversible maps with a symmetric couple of quadratic homoclinic tangencies. *Discrete Continuous Dyn. Sys. A*. 2018;38(9):4483–4507. DOI: 10.3934/dcds.2018196.
37. Turaev DV, Shilnikov LP. An example of a wild strange attractor. *Math. Sb*. 1998;189(2):291–314. DOI: 10.1070/sm1998v189n02ABEH000300.
38. Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system. *Nonlinearity*. 2021;34(4):2018–2047. DOI: 10.1088/1361-6544/abc794.
39. Gavrilov NK, Shilnikov LP. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 1. *Math.USSR Sb*. 1972;17:467–485 DOI: 10.1070/SM1972v017n04ABEH001597.
40. Gavrilov NK, Shilnikov LP. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 2. *Math.USSR Sb*. 1973;19(1):139–156 DOI: 10.1070/SM1973v019n01ABEH001741.
41. Kuznetsov SP. *Dynamical chaos and hyperbolic attractors. From mathematics to physics*. Moscow-Izhevsk; 2013. 488 p.
42. Tucker W. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences-Series I-Mathematics*. 1999;328(12):1197–1202. DOI: 10.1016/S0764-4442(99)80439-X.
43. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. The origin and structure of the Lorenz attractor. *Sov. Phys. Dokl*. 1977;22:253–255.
44. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type. *Trans. Mosc. Math. Soc*. 1982;44:153–216.
45. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963;20(2):130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.C.
46. Gonchenko S, Ovsyannikov I, Simo C, Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors. *Int. J. of Bifurcation and chaos*. 2005;15(11):3493–3508. DOI: 10.1142/S0218127405014180.
47. Gonchenko SV, Gonchenko AS, Ovsyannikov II, Turaev DV. Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps. *Math. Model. Nat. Phen*. 2013;8(5):48–70.
48. Gonchenko S, Gonchenko A, Kazakov A, Samylyna E. On discrete Lorenz-like attractors. *Chaos*. 2021;31:023117. DOI: 10.1063/5.0037621.
49. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Shilnikov LP. Towards scenarios for emergence of chaos in three-dimensional maps. *Rus. Nonlinear Dynamics*. 2012;8(1):3–28.

50. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *Int. J. Bif. and Chaos*. 2014;24(8). DOI: 10.1142/S0218127414400057.
51. Gonchenko S, Karatetskaia E, Kazakov A, Kruglov V. Conjoined Lorenz twins - a new pseudo-hyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows. *Chaos*. 2022;32:121107. DOI: 10.1063/5.0123426.
52. Borisov AV, Kazakov AO, Sataev IR. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014;19:718–733. DOI: 10.1134/S1560354714060094.
53. Gonchenko SV. On stable periodic motions in systems close to systems with a non-rough homoclinic curve. *Mathematical notes*. 1983;33(5):745–755. DOI: 10.1007/BF01158287.
54. Gonchenko SV, Simo C, Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight. *Nonlinearity*. 2013;26(3):621–678. DOI: 10.1088/0951-7715/26/3/621.
55. Gonchenko SV. On a two parameter family of systems close to a system with a nontransversal Poincaré homoclinic curve. I. *Selecta Math. Sovietica*. 1990, 10.
56. Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* 1976;50:69–77. DOI: 10.1007/BF01608556.
57. Benediks M, Carleson L. Dynamics of the Hénon Map. *Ann. Math.* 1991;133:73–169.
58. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. On the existence of Newhouse domains in a neighborhood of systems with a structurally unstable Poincaré homoclinic curve (the higher-dimensional case). *Dokl. Math.* 1993;47(2):268–273.
59. Gonchenko SV, Gonchenko VS, Shilnikov LP. On homoclinic origin of Henon-like maps. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2010;15(4–5):462–481. DOI: 10.1134/S1560354710040052.
60. Arnold VI. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer; 1988.
61. Biragov VS. Bifurcations in a two-parameter family of conservative mappings that are close to the Hénon mapping. *Selecta Math. Soviet.* 1990;9(3):273–282.
62. Simó C, Vieiro A. Resonant zones, inner and outer splitting in generic and low order resonances of area preserving maps. *Nonlinearity*. 2009;22(5):1191–1245. DOI: 10.1088/0951-7715/22/5/012.
63. Milnor J. On the concept of attractor. *Comm. Math. Phys.* 1985;99:177–195. DOI: 10.1007/BF01212280.
64. Minkov SS. Thick attractors and skew products. PhD thesis math. and phys., 2016. 61 p.
65. Turaev DV, Shilnikov LP. Pseudohyperbolicity and the problem on periodic perturbation of Lorenz-like attractors. *Dokl. Math. RAN*. 2008;418(1).
66. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Kozlov AD. Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I. Pseudohyperbolic Attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2018;28(11):1830036. DOI: 10.1142/S0218127418300367.
67. Gonchenko SV, Lamb JSW, Rios I, Turaev D. Attractors and repellers near elliptic points of reversible systems. *Dokl. Math. RAN*. 2014;454:375–378. DOI: 10.7868/S0869565214040045.
68. Newhouse S. Nondensity of axiom  $A(a)$  on  $S^2$ . *Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math.* 1970;14:191–202.
69. Newhouse S. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES*. 1979;50:101–152. DOI: 10.1007/BF02684771.
70. Guckenheimer J, Williams RF. Structural stability of Lorenz attractors. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 1979;50:59–72. DOI: 10.1007/BF02684769.
71. Malkin MI. Rotation intervals and dynamics of Lorenz-like maps. In: *Methods of qualitative theory of diff. eq. Gorki*; 1985. P. 122–139 (in Russian).
72. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. On models with non-rough Poincaré homoclinic curves. *Sov. Math. Docl.* 1991;320(2):269–272.
73. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev DV. On models with non-rough Poincaré homoclinic curves. *Physica D*. 1993;62(1–4):1–14. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90268-6.

74. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. Dynamical phenomena in multidimensional systems with non-rough Poincare homoclinic curv. *Docl. RAN.* 1993;330(2):144–147.
75. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev D. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. *Nonlinearity.* 2008;21(5):923–972.
76. Gonchenko SV, Shilnikov LP. On invariants of  $\Omega$ -conjugacy of diffeomorphisms with a nontransversal homoclinic orbit. *Ukr. Math. J.* 1990;42(2):153–159.
77. Gonchenko SV, Shilnikov LP. On moduli of systems with a non-rough Poincare homoclinic curve. *Izv. RAN, ser. math.* 1992;56(6):1165–1197.
78. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. Homoclinic tangencies of an arbitrary order in Newhouse domains. *J. Math. Sci.* 2001;105:1738–1778. DOI: 10.1023/A:1011359428672.
79. Palis J, Viana M. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks. *Ann. Math.* 1994;140:91–136.
80. Romero N. Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions. *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* 1995;15:735–757.
81. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev DV. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits. *Chaos.* 1996;6(1):15–31. DOI: 10.1063/1.166154.
82. Gonchenko SV, Gonchenko VS. On bifurcations of birth of closed invariant curves in the case of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies. *Proc. Steklov Math. Inst.* 2004;244:87–114.
83. Gavrilov NK. On three-dimensional dynamical systems with a non-rough homoclinic contour. *Mat. Notes.* 1973;14(5):953–957. DOI: 10.1007/BF01462256.
84. Gonchenko SV. Moduli of  $\Omega$ -conjugacyes for two-dimensional diffeomorphisms with non-rough heteroclinic contour. *Math. Sb.* 1996;187(9):1261–1281.
85. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Stenkin OV. On Newhouse regions with infinitely many stable and unstable invariant tori. *Proc. Int. Conf. “Progress in Nonlinear Science” dedicated to 100th Anniversary of A. A. Andronov, July 2–6; v. 1 “Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics”.* Nizhni Novgorod; 2002. P. 80–102.
86. Gonchenko SV. Dynamical systems with homoclinic tangency, omega-moduli and bifurcations. *Thesis of Doctor of Phys. and Math. Sci., N. Novgorod, 2004.* 300 p.
87. Gonchenko SV, Stenkin OV., Shilnikov LP. On the existence of a countable set of stable and unstable invariant tori for systems from Newhouse domains with heteroclinic tangencies. *Rus. Nonlinear Dynamics.* 2006;2(1):3–25.
88. Dmitriev AS, Komlev YuA, Turaev DV. Bifurcation phenomena in the 1:1 resonant horn for the forced van Der Pol-Duffing equation. *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1992;2(1):93–100. DOI: 10.1142/S0218127492000094.
89. Lamb JSW, Roberts JAG. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. *Physica D.* 1998;112:1–39.
90. Rom-Kedar V, Wiggins S. Transport in two-dimensional maps, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1990;109(3):239–298.
91. Haragus M, Iooss G. Reversible Bifurcations. In: *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems.* London: Springer; 2011.
92. Lerman LM, Turaev DV. Breakdown of symmetry in reversible systems. *Reg. Chaotic Dyn.* 2012;17(3–4):318–336. DOI: 10.1134/S1560354712030082.
93. Lamb JSW, Stenkin OV. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits. *Nonlinearity.* 2004;17:1217–1244.
94. Borisov AV, Mamaev IS. Strange attractors in dynamics of Celtic stones. *Advances in Physical Sciences.* 2003;173(4):407–418. DOI: 10.1070/pu2003v046n04abeh001306.
95. Kuznetsov SP, Zhalnin AYu, Sataev IR, Sedova YuV. Phenomena of nonlinear dynamics of dissipative systems in the nonholonomic mechanics of Celtic stone. *Rus. Nonlinear dynamics.* 2012;84:735–762.

96. Kozlov VV. On the Theory of Integration of the Equations of Nonholonomic Mechanics. *Uspekhi Mekh.* 1985;8(3):85–107. DOI: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000203.
97. Bizyaev IA, Borisov AV, Kazakov AO. Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: reversal and strange attractors. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2015;5:605–626.



*Гонченко Сергей Владимирович* — родился в Горьком (1953). Окончил Горьковский государственный университет имени Н. И. Лобачевского (1975). Доктор физико-математических наук (2004, ГГУ). Автор монографии «Гомоклинические касания» (в соавторстве с Л. П. Шильниковым). Опубликовал более 150 научных статей по направлениям, указанным выше. Федеральный профессор в области математики. Работает в ННГУ заведующим лабораторией динамических и управляемых систем (с 2011).

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Национальный исследовательский Нижегородский университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru  
 ORCID: 0000-0003-2573-6009  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 5569



*Гонченко Александр Сергеевич* — родился в 1987 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2010) и аспирантуру ННГУ (2012). Кандидат физико-математических наук (2013, ННГУ). Работает в ННГУ старшим научным сотрудником лаборатории динамических и управляемых систем и в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» старшим научным сотрудником в международной лаборатории динамических систем и приложений. Опубликовал около 25 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский университет им. Н. И. Лобачевского  
 Россия, 603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 НИУ «Высшая школа экономики»  
 E-mail: agonchenko@mail.ru  
 ORCID: 0000-0003-0505-9725



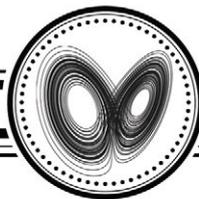
*Казаков Алексей Олегович* — родился в 1987 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2010). Доктор физико-математических наук (2021, НИУ ВШЭ). Работает главным научным сотрудником в лаборатории динамических систем и приложений, профессором на кафедре фундаментальной математики НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Его научные интересы связаны с исследованиями динамического хаоса, бифуркаций и странных аттракторов. Автор более 50 научных работ в ведущих российских и международных журналах.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: kazakovdz@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0003-0002-6553  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 826649



*Самылина Евгения Александровна* — родилась в 1996 году. Окончила Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2019). Работает младшим научным сотрудником в международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Научные интересы лежат в области исследования динамического хаоса, анализа бифуркаций и странных аттракторов.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: samylina\_evgeniya@mail.ru  
 ORCID: 0000-0001-8537-8851  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1048032



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.9:534.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003136  
EDN: NYSYYX

## О неконсервативных возмущениях трёхмерных интегрируемых систем

*К. Е. Морозов*

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия  
E-mail: ✉ kirill.morozov@itmm.unn.ru

*Поступила в редакцию 23.05.2024, принята к публикации 7.07.2024,  
опубликована онлайн 31.10.2024, опубликована 29.11.2024*

**Аннотация.** В настоящее время достаточно полно изучены неконсервативные возмущения двумерных нелинейных гамильтоновых систем. *Цель* исследования — обобщение этой теории на трёхмерный случай, когда невозмущенная система является нелинейной, интегрируемой и имеет область, заполненную замкнутыми фазовыми траекториями. В данной работе рассматриваются автономные возмущения и основное внимание уделяется задаче о предельных циклах. *Методы.* Исследование основано на построении специальных координат, в которых переменные разделены на две медленные и одну быструю, и в первом приближении по малому параметру уравнения для медленных переменных отделяются. *Результаты.* Показано, что гиперболические состояния равновесия укороченной системы определяют замкнутые фазовые траектории, в окрестности которых под действием возмущения появляются циклы. *Заключение.* Таким образом, задача сводится к исследованию «порождающей» системы двух алгебраических или трансцендентных уравнений аналогично порождающему уравнению Пуанкаре–Понтрягина для двумерных систем. В качестве примеров рассматриваются трёхмерная система типа ван дер Поля и система Лоренца в случае больших чисел Рэлея.

**Ключевые слова:** усреднение, предельные циклы, трёхмерные системы, порождающая функция.

**Благодарности.** Теоретическая часть работы выполнена при поддержке гранта FSWR–2020–0036 (Раздел 1). Практическая часть выполнена при поддержке гранта РФФ № 24–11–00339 (Раздел 2). Автор также выражает признательность Морозову А. Д. за конструктивные обсуждения.

**Для цитирования:** Морозов К. Е. О неконсервативных возмущениях трёхмерных интегрируемых систем // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 766–780. DOI: 10.18500/0869-6632-003136. EDN: NYSYYX

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## On non-conservative perturbations of three-dimensional integrable systems

K. E. Morozov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉kirill.morozov@itmm.unn.ru

Received 23.05.2024, accepted 7.07.2024, available online 31.10.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** At present, non-conservative perturbations of two-dimensional nonlinear Hamiltonian systems have been studied quite fully. The *purpose* of the study is to generalize this theory to the three-dimensional case, when the unperturbed system is nonlinear, integrable and has a region filled with closed phase trajectories. In this paper, autonomous perturbations are considered and the main attention is paid to the problem of limit cycles. *Methods.* The study is based on the construction of special coordinates in which the variables are divided into two slow and one fast, and in the first approximation with respect to a small parameter the equations for the slow variables are separated. *Results.* It is shown that hyperbolic equilibrium states of a truncated system determine closed phase trajectories, in the vicinity of which cycles appear under the perturbation. *Conclusion.* Thus, the problem is reduced to the study of solutions of the “generating” system of two algebraic or transcendental equations, similar to the generating Poincaré–Pontryagin equation for two-dimensional systems. As examples, we consider a three-dimensional van der Pol type system and the Lorentz system in the case of large Rayleigh numbers.

**Keywords:** averaging, limit cycles, three-dimensional systems, the generating function.

**Acknowledgements.** The theoretical part of the work was supported by the grant FSWR-2020-0036 (Section 1). The practical part of the work was supported by the grant of the RSF № 24-11-00339 (Section 2). As well, the author is grateful to Morozov A. D. for the fruitful discussions.

**For citation:** Morozov KE. On non-conservative perturbations of three-dimensional integrable systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(6):766–780. DOI: 10.18500/0869-6632-003136

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Теория нелинейного резонанса в гамильтоновых и близких к ним системах составляет важный раздел теории колебаний. В настоящее время наиболее полно изучены неконсервативные возмущения двумерных гамильтоновых систем. Для систем с  $3/2$  степенями свободы основы этой теории заложены А. Д. Морозовым и Л. П. Шильниковым в работе [1]. Дальнейшее развитие продолжено в работах А. Д. Морозова и его учеников: изучены резонансы различных типов (в том числе вырожденные), вопросы, связанные с синхронизацией колебаний в резонансной зоне, а также основные примеры (см. монографию [2] и ссылки в ней). В работах [3–7] результаты о системах с  $3/2$  степенями свободы обобщены на случай квазипериодических возмущений. Как показывают исследования [1–7], при изучении резонансов в системах, близких к гамильтоновым, важную роль играет задача о предельных циклах в автономных системах такого вида. Эта задача решена Л. С. Понтрягиным в заметке [8], где даны достаточные условия рождения предельного цикла из замкнутой фазовой траектории невозмущённой системы.

Представляет интерес обобщение теории неконсервативных возмущений на трёхмерный случай, когда невозмущённая система является нелинейной, интегрируемой и имеет область, заполненную замкнутыми фазовыми траекториями. В данной работе мы обратимся к автономным системам и обсудим применение принципа усреднения к решению задачи о предельных циклах. Обобщая методику, связанную с построением порождающего уравнения Пуанкаре–Понтрягина (см. [8], также [9]), мы получаем «порождающую» систему двух алгебраических или трансцендентных уравнений, простые решения которой определяют предельные циклы исходной системы<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>О непосредственном применении метода малого параметра Пуанкаре для анализа предельных циклов в некоторых трёхмерных системах, близких к интегрируемым, см. [10].

Как и в двумерном случае, задача о предельных циклах играет важную роль при исследовании неавтономных (периодических или квазипериодических) возмущений трёхмерных интегрируемых систем.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon f_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon f_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon f_3(x, y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$  — параметр,  $H, f_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) — достаточно гладкие (например, аналитические) функции в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}^3$ . Предположим, что возмущение неконсервативное:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0, \quad (x, y, z) \in G.$$

При  $\varepsilon = 0$  система (1) интегрируема. Первые интегралы  $z = c$ ,  $H(x, y, z) = h$  определяют два однопараметрических семейства поверхностей в  $\mathbb{R}^3$ . Предположим, что при каждом  $c \in (c^-, c^+)$  и каждом  $h \in (h^-, h^+)$  поверхности из этих семейств пересекаются по замкнутым фазовым траекториям<sup>2</sup>, и обозначим через  $D$  область (полноторий), состоящую из этих траекторий. Пусть  $D \subset G$  и, кроме того,  $D$  отделена от сепаратрисных поверхностей и состояний равновесия. Основной целью работы является анализ поведения решений системы (1) в области  $D$ .

Трёхмерные интегрируемые системы общего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z), \end{aligned}$$

при некоторых условиях могут быть приведены к виду системы (1) при  $\varepsilon = 0$ . Так, если  $H_1(x, y, z) = c_1$  — первый интеграл и  $\frac{\partial H_1}{\partial z} \neq 0$  в окрестности замкнутой траектории, то, делая замену  $\tilde{z} = H_1(x, y, z)$ , придём в этой окрестности к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{P}(x, y, \tilde{z}), \\ \dot{y} &= \tilde{Q}(x, y, \tilde{z}), \\ \dot{\tilde{z}} &= 0. \end{aligned}$$

При соответствующем  $\tilde{z} = \text{const}$  система первых двух уравнений имеет область, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми. В этой области она консервативна в смысле существования интегрального инварианта, но необязательно имеет гамильтонову форму [9]. Тем не менее с помощью гладкой взаимно-однозначной замены переменных эта система приводится к такой форме (см. [11], стр. 35, Теорема 6)<sup>3</sup>.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 выводится усреднённая система первого приближения и обосновывается связь между её состояниями равновесия и предельными циклами системы (1). В разделе 2 приведённый метод применяется для анализа предельных циклов в двух примерах — трёхмерной системе типа ван дер Поля и системе Лоренца. Обсуждение и выводы приводятся в Заключение.

<sup>2</sup>Из теоремы о неявной функции следует, что если в системе (1) при  $\varepsilon = 0$  существует хотя бы одна замкнутая фазовая траектория, то существует и некоторое двухпараметрическое семейство таких траекторий.

<sup>3</sup>См. также пример в разделе 2.2.

## 1. Усреднение. Предельные циклы

Обратимся к системе (1) при  $\varepsilon = 0$ . Подставляя  $z = c \in (c^-, c^+)$  в первые два уравнения, приходим к гамильтоновой системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y, c)}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y, c)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

По предположению, система (2) имеет кольцевую область  $G_c$ , заполненную замкнутыми кривыми  $H(x, y, c) = h \in (h^-, h^+)$  и отделённую от сепаратрис и состояний равновесия. В этой области перейдём от переменных  $(x, y)$  к переменным «действие–угол»  $(I, \theta)$  с помощью канонического преобразования:

$$x = X(\theta, I, c), \quad y = Y(\theta, I, c). \quad (3)$$

В переменных  $(I, \theta)$  гамильтониан  $\tilde{H} = \tilde{H}(I, c)$  не зависит от  $\theta$ , и уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0, \\ \dot{\theta} &= \omega(I, c). \end{aligned}$$

Здесь  $\omega(I, c) = \partial \tilde{H}(I, c) / \partial I$  — частота колебаний на замкнутых кривых. Например, если  $H(x, y, c) = y^2/2 + U(x, c)$ , то  $\omega(I, c) = 2\pi/T(I, c)$ , где

$$T(I, c) = \sqrt{2} \int_{x_1(I, c)}^{x_2(I, c)} \frac{dx}{\sqrt{h(I) - U(x, c)}},$$

а  $x_1 < x_2$  — вещественные корни уравнения  $h - U(x, c) = 0$ .

Пусть теперь  $\varepsilon \neq 0$ . Сделаем в (1) замену

$$x = X(\theta, I, z), \quad y = Y(\theta, I, z),$$

где  $X, Y$  — те же функции, что и в (3). Система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon B_1(\theta, I, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon B_2(\theta, I, z), \\ \dot{\theta} &= \omega(I, z) + \varepsilon B_3(\theta, I, z), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(\theta, I, z) &= X'_\theta \tilde{f}_2 - Y'_\theta \tilde{f}_1 + \tilde{f}_3(X'_z Y'_\theta - X'_\theta Y'_z), \quad B_2(\theta, I, z) = \tilde{f}_3, \\ B_3(\theta, I, z) &= -X'_I \tilde{f}_2 + Y'_I \tilde{f}_1 + \tilde{f}_3(X'_I Y'_z - X'_z Y'_I), \\ \tilde{f}_i(\theta, I, z) &= \tilde{f}_i(X(\theta, I, z), Y(\theta, I, z), z), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$B_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) суть достаточно гладкие функции своих аргументов,  $2\pi$ -периодические по  $\theta$ . Фазовым пространством системы (4) является полноторий  $(I(h^-), I(h^+)) \times (c^-, c^+) \times S^1$ . Предположим, что в рассматриваемой области функции  $B_s$  и  $\omega$  ограничены вместе с производными до второго порядка включительно. При каждом  $(I, z) \in (I(h^-), I(h^+)) \times (c^-, c^+)$  разложим функции  $B_s$  в равномерно сходящиеся по  $\theta \in [0, 2\pi]$  ряды Фурье:

$$B_s(\theta, I, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{sk}(I, z) \exp(ik\theta), \quad s = 1, 2, 3.$$

Введём в системе (4) новые переменные  $(w_1, w_2, v)$  по формулам

$$\begin{aligned} I &= w_1 + \frac{\varepsilon}{i\omega} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_{1k} \exp(ikv), \\ z &= w_2 + \frac{\varepsilon}{i\omega} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_{2k} \exp(ikv), \\ \theta &= v + \frac{\varepsilon}{i\omega} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_{3k} \exp(ikv) - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} (\omega'_I B_{1k} + \omega'_z B_{2k}) \exp(ikv), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\omega, \omega'_I, \omega'_z, B_{sk}$  вычислены при  $(w_1, w_2)$ . Заметим, что в области  $D$  выполнено неравенство  $\omega \geq \omega_* > 0$ , поэтому в замене (5) нет «малого знаменателя» и входящие в замену ряды сходятся равномерно по  $v$ . Кроме того, несложно показать, что при достаточно малом  $\varepsilon$  данная замена обратима. В результате придём к системе

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \varepsilon B_{10}(w_1, w_2) + \varepsilon^2 S_1(v, w_1, w_2), \\ \dot{w}_2 &= \varepsilon B_{20}(w_1, w_2) + \varepsilon^2 S_2(v, w_1, w_2), \\ \dot{v} &= \omega(w_1, w_2) + \varepsilon B_{30}(w_1, w_2) + \varepsilon^2 S_3(v, w_1, w_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где функции  $S_i$  достаточно гладкие и  $2\pi$ -периодические по  $v$ , а  $B_{s0}$  определяются по формулам

$$B_{s0}(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_s(\theta, w_1, w_2) d\theta, \quad s = 1, 2, 3.$$

Таким образом, замена (5) позволяет в первом приближении по  $\varepsilon$  исключить циклическую переменную из уравнений движения (4). Если теперь в системе (6) пренебречь членами порядка  $\sim \varepsilon^2$ , то получим систему, в которой первые два уравнения отделяются:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \varepsilon B_{10}(u_1, u_2), \\ \dot{u}_2 &= \varepsilon B_{20}(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) получается из системы (4) усреднением двух первых уравнений по быстрой переменной  $\theta$ , поэтому будем её называть *усреднённой системой* (первого приближения). Известно (см., например, [12]), что при  $0 < t < 1/\varepsilon$  разность между усреднёнными переменными  $(u_1, u_2)$  и исходными переменными  $(I, z)$ , совпадающими при  $t = 0$ , имеет порядок  $\sim \varepsilon$ :  $|I - u_1| < M\varepsilon, |z - u_2| < M\varepsilon, M > 0$ . Действительно, правые части системы (7) и первых двух уравнений системы (6) различаются на величину порядка  $\sim \varepsilon^2$ . За время  $t \sim 1/\varepsilon$  разница между соответствующими решениями станет порядка  $\sim \varepsilon$ . Кроме того, как следует из замены (5), разница между  $(I, z)$  и  $(w_1, w_2)$  также имеет порядок  $\sim \varepsilon$ , поэтому и разница между  $(I, z)$  и  $(u_1, u_2)$  будет иметь тот же порядок (строгие оценки могут быть получены с использованием леммы Гронуолла, см. [12, 13]). Пусть теперь система (7) имеет гиперболическое равновесие  $(u_{10}, u_{20})$ . Тогда система (6), если в ней отбросить слагаемые порядка  $\sim \varepsilon^2$ , имеет гиперболическое периодическое решение с частотой  $\omega(u_{10}, u_{20}) + \varepsilon B_{30}(u_{10}, u_{20})$ , которое является грубым (см., например, [14]). Однако добавки порядка  $\sim \varepsilon^2$  не являются сколь угодно малыми по отношению к системе, где они отброшены, а при  $\varepsilon = 0$  система не имеет грубых решений, поэтому нельзя формально использовать свойство грубости для обоснования сохранения периодического решения<sup>4</sup>. Тем не менее это решение сохраняется. Действительно, выбирая в (6) переменную  $v$

<sup>4</sup>Для иллюстрации можно привести простой одномерный пример:  $\dot{x} = x^2 + \varepsilon x + \varepsilon^2$ . Если отбросить слагаемое порядка  $\sim \varepsilon^2$ , есть два гиперболических состояния равновесия — устойчивое и неустойчивое (система грубая), но при учете этого слагаемого состояний равновесия нет.

в качестве нового времени, придём к системе в стандартной форме метода усреднения. Тогда, применяя первую теорему Боголюбова [13], получаем, что существует гиперболическое периодическое решение с периодом  $2\pi$  по  $v$ , по  $t$  период равен  $2\pi/\omega_0$ , где  $\omega_0 = \omega(u_{10}, u_{20}) + O(\varepsilon)$ . В фазовом пространстве системы (1) образом указанного решения является предельный цикл  $L_\varepsilon$ , причем  $L_\varepsilon \rightarrow L_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $L_0$  — фазовая кривая невозмущённой системы (системы (1) при  $\varepsilon = 0$ ), определяемая значениями первых интегралов  $I = u_{10}, z = u_{20}$ . Устойчивость цикла определяется устойчивостью состояния равновесия. По аналогии с порождающим уравнением Пуанкаре–Понтрягина в двумерном случае, будем называть систему уравнений

$$B_{s0}(u_1, u_2) = 0, \quad s = 1, 2,$$

которая определяет предельные циклы системы (1) в области  $D$ , порождающей.

Таким образом, приходим к теореме.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия

$$B_{s0}(u_{10}, u_{20}) = 0, \quad s = 1, 2, \quad (8)$$

$$\Delta \neq 0, \quad \sigma \neq 0, \quad (9)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial(B_{01}, B_{02})}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \sigma = \frac{\partial B_{10}}{\partial u_1} + \frac{\partial B_{20}}{\partial u_2} \text{ при } u_1 = u_{10}, u_2 = u_{20}.$$

Тогда существует  $\varepsilon_* > 0$  такое, что при всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ : 1) система (1) имеет в  $O(\varepsilon)$ -окрестности невозмущённой фазовой кривой  $L_0$ , определяемой значениями первых интегралов  $I = u_{10}, z = u_{20}$ , единственный предельный цикл  $L_\varepsilon$ ; 2)  $L_\varepsilon \rightarrow L_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; 3) цикл  $L_\varepsilon$  асимптотически (орбитально) устойчив, если  $\sigma < 0, \Delta > 0$ , и неустойчив в противном случае.

Действительно, условия (8) означают, что  $(u_{10}, u_{20})$  является состоянием равновесия системы (7). Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0.$$

Условия (9) означают, что корни этого уравнения имеют отличные от нуля вещественные части и равновесие  $(u_{10}, u_{20})$  является гиперболическим. Отсюда получаем утверждения 1 и 2. Применяя критерий Раусса–Гурвица, убеждаемся в 3.

В условиях теоремы первым приближением предельного цикла является невозмущённая фазовая кривая  $x = X(\omega(u_{10}, u_{20})t, u_{10}, u_{20}), y = Y(\omega(u_{10}, u_{20})t, u_{10}, u_{20}), z = u_{20}$ . Если подставить  $w_1 = u_{10}, w_2 = u_{20}, v = (\omega(u_{10}, u_{20}) + \varepsilon B_{30}(u_{10}, u_{20}))t$  в формулы (5), то мы получим так называемое «улучшенное» первое приближение, удовлетворяющее системе (4) с точностью до членов порядка  $\sim \varepsilon^2$ . С помощью подходящей замены координат можно исключить из уравнений движения циклическую переменную до любого фиксированного порядка по  $\varepsilon$  и получить «усреднённую» систему высшего приближения, но эти замены громоздки, поэтому на практике обычно ограничиваются усреднённой системой первого или второго<sup>5</sup> приближения.

Прежде чем переходить к примерам, отметим, что сама усреднённая система (7) может иметь предельный цикл. Можно показать, что если данный цикл является гиперболическим, то в системе (1) ему соответствует двумерный инвариантный тор, устойчивость которого совпадает с устойчивостью цикла (см. вторую теорему Боголюбова [13], см. также [15]). Достаточным условием отсутствия инвариантного тора в системе (1) является знакопостоянство её дивергенции.

<sup>5</sup>Если состояние равновесия  $(u_{10}, u_{20})$  усреднённой системы первого приближения имеет комплексно-сопряжённые собственные числа, то система второго приближения может быть полезна для определения устойчивости предельного цикла.

## 2. Примеры

### 2.1. Система типа ван дер Поля. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (1 + z^2)x &= \varepsilon(\alpha - x^2)\dot{x}, \\ \dot{z} &= \varepsilon f(x, \dot{x}, z), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\alpha$  — параметры. Эта система является примером системы с автоматическим регулированием,  $z$  — управляющий параметр, функция  $f$  описывает обратную связь. Например, положим  $f = x^2 - \beta \dot{x}^2$ , где  $\beta$  — параметр. Перепишем (10) в виде системы трёх уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -(1 + z^2)x + \varepsilon(\alpha - x^2)y, \\ \dot{z} &= \varepsilon(x^2 - \beta y^2). \end{aligned} \quad (11)$$

При  $\varepsilon = 0$  система (11) имеет два первых интеграла:  $z = c$ ,  $H(x, y, z) = y^2/2 + (1 + z^2)x^2/2 = h$ . Поверхности  $z = c$  и  $H(x, y, z) = h$ ,  $h > 0$  пересекаются по замкнутым траекториям в виде эллипса  $y^2/(2h(1+c^2)) + x^2/(2h) = 1$ , ось  $z$  заполнена неизолрованными равновесиями. Отметим, что при  $\varepsilon = 0$  и фиксированном  $z = c$  первые два уравнения системы (11) образуют линейный осциллятор с собственной частотой  $\omega(c) = \sqrt{c^2 + 1}$ , но трёхмерная система (11) нелинейная даже при  $\varepsilon = 0$ .

Пусть теперь  $\varepsilon \neq 0$ . Сделаем замену:

$$\begin{aligned} x &= X(\theta, I, z) \equiv \sqrt{2I}/(1 + z^2)^{1/4} \sin \theta, \\ y &= Y(\theta, I, z) \equiv \sqrt{2I}(1 + z^2)^{1/4} \cos \theta. \end{aligned}$$

Получим систему вида (4), в которой

$$\begin{aligned} B_1 &= 2I \cos^2 \theta \left( \alpha - \frac{2I}{\sqrt{1 + z^2}} \sin^2 \theta \right) - \frac{2I^2 z \cos 2\theta (\sin^2 \theta - \beta(1 + z^2) \cos^2 \theta)}{(1 + z^2)^{3/2}}, \\ B_2 &= \frac{2I}{\sqrt{1 + z^2}} (\sin^2 \theta - \beta(1 + z^2) \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Усреднённая система первого приближения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \varepsilon u_1 \left( \alpha - \frac{u_1}{2(1 + u_2^2)^{3/2}} (1 - (1 + \beta)u_2 + u_2^2 - \beta u_2^3) \right), \\ \dot{u}_2 &= \varepsilon \frac{u_1}{\sqrt{1 + u_2^2}} (1 - \beta - \beta u_2^2). \end{aligned} \quad (12)$$

При выполнении одного из неравенств  $\alpha \leq 0$ ,  $\beta < 0$  или  $\beta > 1$  система (12) не имеет состояний равновесия в области  $u_1 > 0$ . При  $\alpha \leq 0$  имеем  $\dot{u}_1 < 0$  и траектории исходной системы (11) стремятся к неизолрованным равновесиям, расположенным на оси  $z$ . Кроме того,  $\dot{u}_2 > 0$  при  $\beta < 0$ ,  $\alpha > 0$  и  $\dot{u}_2 < 0$  при  $\beta > 1$ ,  $\alpha > 0$ , поэтому при этих значениях в системе (11) наблюдается «дрейф» траекторий вдоль оси  $z$ . При  $\beta = 1$ ,  $\alpha > 0$  в усреднённой системе (12) образуется сложное состояние равновесия (седло–узел), которое при  $\beta < 1$  распадается на узел  $O_1 \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\beta(\sqrt{\beta} - \sqrt{1-\beta})^2}}, \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \right)$  и седло  $O_2 \left( \frac{2\alpha}{\sqrt{\beta(\sqrt{\beta} + \sqrt{1-\beta})^2}}, -\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \right)$ . Эти равновесия существуют при  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\beta \neq 0.5$ . При  $\beta = 0.5$  существует единственная седловая точка  $O_2$ , а при  $\beta = 0$

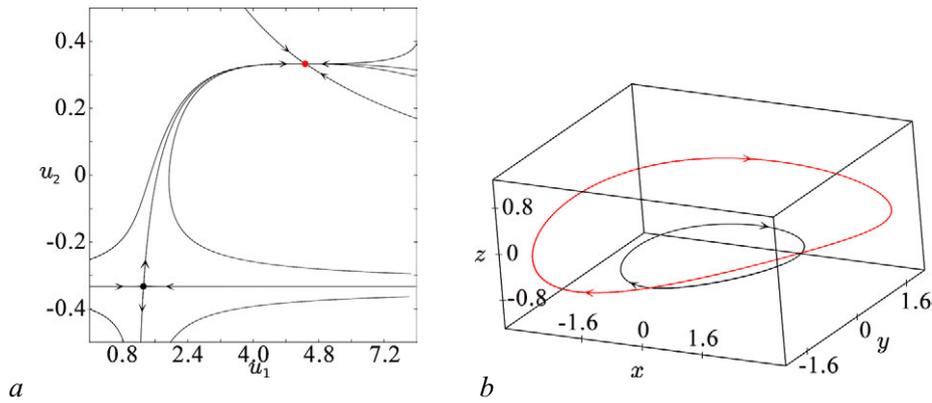


Рис. 1. *a* – Фазовый портрет системы (12) при  $\alpha = 1, \beta = 0.9$ ; *b* – предельные циклы системы (11) при  $\varepsilon = 0.05, \alpha = 1, \beta = 0.9$  (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* – The phase portrait of system (12) at  $\alpha = 1, \beta = 0.9$ ; *b* – limit cycles of system (11) at  $\varepsilon = 0.05, \alpha = 1, \beta = 0.9$  (color online)

оба равновесия «уходят на бесконечность». В системе (11) точке  $O_1$  отвечает асимптотически устойчивый предельный цикл, а  $O_2$  – седловой. При  $0 < \varepsilon \ll 1$  предельные циклы близки к эллипсам  $\beta y^2/(2h) + x^2/(2h) = 1, h = \frac{2\alpha}{\beta(\sqrt{\beta} \pm \sqrt{1-\beta})^2}$ , расположенным в плоскостях  $z = \pm \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}$ , а число  $\omega_0 = 1/\sqrt{\beta}$  является асимптотическим приближением частоты колебаний на циклах. На рис. 1, *a* показан фазовый портрет усреднённой системы (12) с двумя состояниями равновесия, а на рис. 1, *b* изображены предельные циклы в системе (11) (устойчивый предельный цикл выделен красным).

## 2.2. Система Лоренца. Рассмотрим систему Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -zx + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (13)$$

где  $\sigma > 0$  – число Прандтля,  $r > 0$  – относительное число Рэлея,  $0 \leq b < 4$  – параметр. Как указал В. И. Юдович [16] (см. также [17, 18]), с помощью замены переменных и времени

$$x \rightarrow \sqrt{2\sigma(r-1)}x, \quad z \rightarrow (r-1)(z+x^2), \quad t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$$

система приводится к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (z-1)x + x^3 &= -\varepsilon\gamma\dot{x}, \\ \dot{z} &= \varepsilon(-az + \beta x^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\varepsilon = 1/\sqrt{r-1}$ ,  $a = b/\sqrt{\sigma}$ ,  $\beta = (2\sigma - b)/\sqrt{\sigma}$ ,  $\gamma = (\sigma + 1)/\sqrt{\sigma}$  – параметры. Очевидно, что

$$a > 0, \quad \gamma = \frac{\beta + a}{2} + \frac{2}{\beta + a} \geq 2, \quad a + \beta = 2\sqrt{\sigma} > 0.$$

Рассмотрим случай, когда  $r \gg 1$ . Тогда  $0 < \varepsilon \ll 1$  и система (14) близка к интегрируемой:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (z-1)x + x^3 &= 0, \\ \dot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из последнего уравнения системы (15) получаем  $z = q = \text{const}$ . Тем самым приходим к уравнению Дуффинга

$$\ddot{x} + (q-1)x + x^3 = 0. \quad (16)$$

Фазовый портрет этого уравнения качественно различается при  $q < 1$  и при  $q > 1$ . При  $q > 1$  уравнение (16) имеет в начале координат единственное состояние равновесия типа центр, окруженное замкнутыми фазовыми кривыми

$$\dot{x}^2/2 + (q - 1)x^2/2 + x^4/4 = h, \quad h > 0. \quad (17)$$

При  $q < 1$  состояние равновесия  $(0, 0)$  становится седловым и появляется ещё два центра  $(0, \pm\sqrt{1 - q})$ . Сепаратрисы седла  $(0, 0)$  образуют две симметричные гомоклинические траектории (гомоклиническую «восьмёрку»). Замкнутым фазовым кривым, лежащим внутри «восьмёрки», отвечают значения  $h$ , удовлетворяющие неравенству  $-(1 - q)^2/4 < h < 0$ , а вне «восьмёрки» — неравенству  $h > 0$ . Гомоклинические траектории отвечают уровню гамильтониана  $h = 0$ . Решение на замкнутых фазовых кривых определяется через эллиптические функции Якоби по известным формулам:

$$X(\theta, k, q) = \pm \sqrt{\frac{2(1 - q)}{2 - k^2}} \operatorname{dn}(\mathbf{K}\theta/\pi), \quad k^2 = \frac{2\sqrt{4h + (1 - q)^2}}{1 - q + \sqrt{4h + (1 - q)^2}}, \quad (18)$$

при  $q < 1, -(1 - q)^2/4 < h < 0$  (Случай А);

$$X(\theta, k, q) = \sqrt{\frac{2(q - 1)k^2}{1 - 2k^2}} \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\theta/\pi), \quad k^2 = \frac{1 - q + \sqrt{4h + (1 - q)^2}}{2\sqrt{4h + (1 - q)^2}}, \quad (19)$$

при  $q < 1, h > 0$  и  $q > 1, h > 0$  (Случай Б).

Здесь  $\mathbf{K}(k), \mathbf{E}(k)$  — полные эллиптические интегралы I и II рода,  $k$  — их модуль,  $\theta = \omega t$  — угловая координата,  $\omega = \omega(k, q)$  — собственная частота. В Случае А значения  $k^2$  принадлежат интервалу  $(0, 1)$ , а в Случае Б — интервалу  $(0.5, 1)$  при  $q < 1$  и интервалу  $(0, 0.5)$  при  $q > 1$ . Собственная частота  $\omega(k, q)$  находится следующим образом:

$$\omega = \frac{\pi}{\mathbf{K}(k)} \sqrt{\frac{1 - q}{2 - k^2}}$$

— в Случае А,

$$\omega = \frac{\pi}{2\mathbf{K}(k)} \sqrt{\frac{1 - q}{2k^2 - 1}}$$

— в Случае Б.

Пусть теперь  $\varepsilon \neq 0$ . Для рассматриваемых значений параметров система (14) имеет три состояния равновесия:  $O(0, 0, 0)$  с собственными числами  $\lambda_{1,2} = -\varepsilon\gamma/2 \pm \sqrt{1 + (\varepsilon\gamma/2)^2}$ ,  $\lambda_3 = -\varepsilon a$  и  $O^\pm(\pm\sqrt{a/(a + \beta)}, 0, \beta/(a + \beta))$  с собственными числами  $\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon(\beta - \gamma)}{2} \pm i\sqrt{\frac{2a}{a + \beta}} + o(\varepsilon)$ ,  $\lambda_3 = -\varepsilon(\beta + a) + o(\varepsilon)$ . Точка  $O$  является седло-узлом с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразием, а  $O^\pm$  являются фокусами, асимптотически устойчивыми при  $\beta > \gamma$ .

Перейдём от переменных  $x, \dot{x}, z$  к переменным  $\theta, I, z$ . Получим систему вида (4), в которой

$$B_1 = (-az + \beta X^2)(X'_z Y'_\theta - X'_\theta Y'_z) - \gamma Y X'_\theta, \\ B_2 = -az + \beta X^2,$$

а функция  $X(\theta, k(I), z)$  определяется формулой (18) для Случая А и формулой (19) для Случая Б,  $Y = \omega X'_\theta$ . Из первого интеграла (17) находим  $X'_\theta = \pm 1/\omega \sqrt{2h + (1 - z)X^2 - X^4/2}$ , а из уравнения (16)  $X''_{\theta^2} = 1/\omega^2((1 - z)X - X^3)$ . Используя эти выражения, получаем  $X'_z Y'_\theta - X'_\theta Y'_z = X^2/(2\omega)$ . Поскольку правые части полученной системы зависят от  $I$  неявно, то удобнее перейти от переменной  $I$  к переменной  $k$ . Для этого необходима производная  $\frac{\partial I}{\partial k}$ . Очевидно,

$\frac{\partial I}{\partial k} = \frac{\partial I}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial k} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial h}{\partial k}$ , где функция  $h = h(k, z)$  находится путём обращения в (18) и (19) формулы для  $k^2$ , в которой вместо  $q$  следует подставить  $z$ . Усредняя полученную систему по  $\theta$  и сохраняя для наглядности прежние обозначения для усреднённых переменных, придём к системе первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \varepsilon \left( -az \int_0^{2\pi} X^2 d\theta + \beta \int_0^{2\pi} X^4 d\theta - 2\gamma \int_0^{2\pi} Y^2 d\theta \right) / (4\pi h'_k), \\ \dot{z} &= \varepsilon \left( -az + \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} X^2 d\theta \right). \end{aligned}$$

Используя (17) и (16), находим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} X^4 d\theta &= \frac{8}{3} \pi h(k, z) + \frac{4}{3} (1-z) \int_0^{2\pi} X^2 d\theta, \\ \int_0^{2\pi} Y^2 d\theta &= \frac{8}{3} \pi h(k, z) + \frac{1}{3} (1-z) \int_0^{2\pi} X^2 d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление правых частей усреднённой системы сводится к нахождению интеграла  $\int_0^{2\pi} X^2 d\theta$ . Вычисляя этот интеграл, приходим к усреднённой системе

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \varepsilon \frac{(2-k^2)^2}{3k^3} \left( \left( \frac{-3az}{2(1-z)} + 2\beta - \gamma \right) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + (\beta - 2\gamma) \frac{k^2 - 1}{2 - k^2} \right), \\ \dot{z} &= \varepsilon \left( -az + \frac{2\beta(1-z)}{2 - k^2} \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

– в Случае А,

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \varepsilon \frac{(2k^2 - 1)^2}{3k} \left( \left( \frac{3az}{2(1-z)} + \gamma - 2\beta \right) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + \frac{k^2 - 1}{2k^2 - 1} \left( \frac{3az(2k^2 - 1)}{2(1-z)} - \beta(3k^2 - 2) - \gamma \right) \right), \\ \dot{z} &= \varepsilon \left( -az + \frac{2\beta(1-z)}{2k^2 - 1} \left( k^2 - 1 + \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} \right) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

– в Случае Б.

Из того факта, что система Лоренца (13) диссипативна (дивергенция системы (13) равна  $-\sigma - b - 1 < 0$ ), следует, что она не может иметь двумерных инвариантных торов. Усреднённые системы (20) и (21) не имеют предельных циклов, и задача сводится к исследованию их состояний равновесия. Приравнявая к нулю правые части системы (20), получаем порождающее уравнение для циклов в области  $z < 1, -(1-z)^2/4 < h < 0$ :

$$\left( -3\beta \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + (2\beta - \gamma)(2 - k^2) \right) \mathbf{E} + (\beta - 2\gamma)(k^2 - 1)\mathbf{K} = 0, \quad k^2 \in (0, 1).$$

Для каждого корня  $k$  соответствующее значение  $z$  находится по формуле  $z = (2\beta\mathbf{E}) / (a(2 - k^2)\mathbf{K} + 2\beta\mathbf{E})$ . Для циклов в областях  $z < 1, h > 0$  и  $z > 1, h > 0$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} &\left( 3\beta \left( \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + k^2 - 1 \right) + (\gamma - 2\beta)(2k^2 - 1) \right) \mathbf{E} + \\ &+ \left( 3\beta \left( \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + k^2 - 1 \right) - \beta(3k^2 - 2) - \gamma \right) (k^2 - 1)\mathbf{K} = 0, \end{aligned}$$

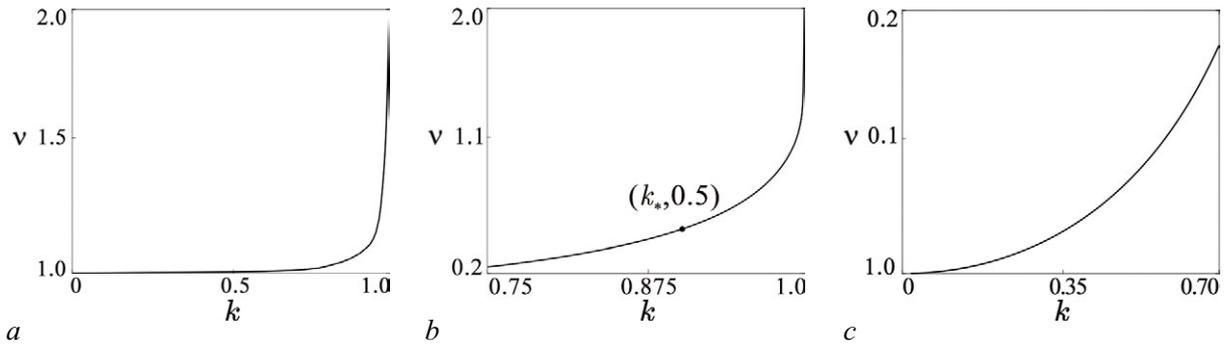


Рис. 2. Графики  $v = v(k)$  для областей:  $z < 1, -(1-z)^2/4 < h < 0$  (a);  $z < 1, h > 0$  (b);  $z > 1, h > 0$  (c)

Fig. 2. The graphs of  $v = v(k)$  for the regions:  $z < 1, -(1-z)^2/4 < h < 0$  (a);  $z < 1, h > 0$  (b);  $z > 1, h > 0$  (c)

где  $k^2 \in (0.5, 1)$  для области  $z < 1, h > 0$  и  $k^2 \in (0, 0.5)$  для области  $z > 1$ . Для  $z$  имеем формулу  $z = 2\beta((k^2 - 1)\mathbf{K} + \mathbf{E}) / ((a(2k^2 - 1) + 2\beta(k^2 - 1))\mathbf{K} + 2\beta\mathbf{E})$ .

Выражая из полученных уравнений отношение  $v = \gamma/\beta$  как однозначную функцию  $k$  и изменяя  $k$  в соответствующих пределах, находим значения параметра  $v$ , при которых в системе (14) появляются предельные циклы. Для Случая А имеем

$$v(k) = \frac{2(2 - k^2)\mathbf{E} + (k^2 - 1)\mathbf{K} - 3\mathbf{E}^2/\mathbf{K}}{(2 - k^2)\mathbf{E} + 2(k^2 - 1)\mathbf{K}};$$

для Случая Б

$$v(k) = \frac{(3\mathbf{E}/\mathbf{K} + k^2 + 1)\mathbf{E} + (-3\mathbf{E}/\mathbf{K} + 1)(k^2 - 1)\mathbf{K}}{(2k^2 - 1)\mathbf{E} - (k^2 - 1)\mathbf{K}}.$$

На рис. 2 приведены графики функций  $v = v(k)$  для каждой из рассматриваемых областей. Из анализа этих функций следуют следующие выводы о предельных циклах системы (14).

1. В области  $z < 1, -(1-z)^2/4 < h < 0$  при  $1 < v < 2$  (в исходных параметрах  $(2b + 1)/3 < \sigma < b + 1$ ) существует пара симметричных предельных циклов, каждый из которых охватывает один из устойчивых фокусов  $O^\pm$ . Соответствующее состояние равновесия усреднённой системы является седлом, поэтому эти циклы неустойчивы (седловые), см. рис. 3, a.

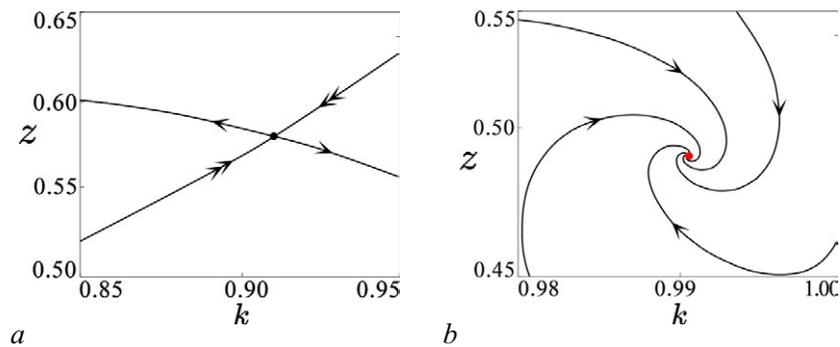


Рис. 3. Состояние равновесия усреднённой системы (20) при  $r = 1000, b = 2.6, \sigma = 3.4$  (a); состояние равновесия усреднённой системы (21) при  $r = 1000, b = 2.6, \sigma = 3.4$  (b)

Fig. 3. The equilibrium state of averaged system (20) at  $r = 1000, b = 2.6, \sigma = 3.4$  (a); the equilibrium state of averaged system (21) at  $r = 1000, b = 2.6, \sigma = 3.4$  (b)

При  $\nu \rightarrow 1$  ( $\sigma \rightarrow b + 1$ ) циклы влипают в фокусы  $O^\pm$  (жёсткая бифуркация Андронова–Хопфа). В другом предельном случае при  $\nu \rightarrow 2$  ( $\sigma \rightarrow (2b + 1)/3$ ) циклы влипают в симметричные гомоклинические петли  $h = 0, z = 0$  и затем исчезают.

2. В области  $z < 1, h > 0$  при  $0.5 < \nu < 2$  ( $\sigma > (2b + 1)/3$ ) существует единственный асимптотически устойчивый предельный цикл, охватывающий оба фокуса. Фазовый портрет усреднённой системы (21) в окрестности устойчивого состояния равновесия показан на рис. 3,  $b$ . Неравенство  $\nu > 0.5$  следует из условий на параметры  $\nu = \frac{\sigma+1}{2(\sigma-b/2)} > 0.5$ , причём  $\nu \rightarrow 0.5$  при  $\sigma \rightarrow +\infty$ . Отметим, что при  $\sigma \rightarrow +\infty$  соответствующее циклу значение  $k$  стремится к  $k_* \approx 0.91$ . При  $\nu \rightarrow 2$  ( $\sigma \rightarrow (2b + 1)/3$ ) цикл влипает в сепаратрисные петли  $h = 0, z = 0$ .

3. В области  $z > 1$  (при этом  $h > 0$ ) выполнено неравенство  $0 < \nu(k) < 0.5$ , поэтому для рассматриваемых значений параметров циклов в этой области нет.

Предельные циклы системы Лоренца при  $b = 2.6, \sigma = 3.3, r = 500$  изображены на рис. 4, где красным цветом выделен устойчивый цикл, а чёрным – седловые.

Значение  $\sigma = (2b + 1)/3$  – асимптотическое при  $r \rightarrow +\infty$  значение, соответствующее образованию двух симметричных гомоклинических петель в системе (13). Если  $r$  фиксировано, то при их разрушении, кроме двух седловых предельных циклов внутри «восьмёрки», появляется инвариантное множество со сложной динамикой, содержащее счётное множество седловых циклов, не обнаруживаемых методом усреднения<sup>6</sup>. Эта бифуркация играет важную роль в появлении аттрактора Лоренца [19]. Значение  $\sigma = b + 1$  – асимптотическое при  $r \rightarrow +\infty$  значение, соответствующее стягиванию седловых предельных циклов в устойчивые фокусы (обратная бифуркация Андронова–Хопфа). При фиксированном  $r$  эта бифуркация может приводить к жесткому режиму возбуждения стохастичности [19]. Отметим также, что при фиксированных значениях  $\sigma, b$  и увеличении  $r$  аттрактор Лоренца вырождается в квазиаттрактор, а затем – в устойчивый предельный цикл, который и обнаруживается методом усреднения. Как показывают компьютерные вычисления, при обратном изменении  $r$  с данным циклом происходит каскад бифуркаций удвоения (см. рис. 5).

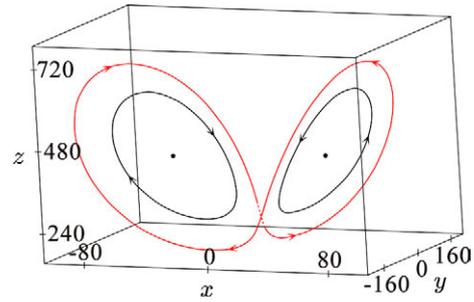


Рис. 4. Предельные циклы системы (13) при  $b = 2.6, \sigma = 3.3, r = 500$ . Красным цветом выделен орбитально устойчивый цикл, чёрным – седловые (цвет онлайн)

Fig. 4. The limit cycles of system (13) at  $b = 2.6, \sigma = 3.3, r = 500$ . The stable cycle is highlighted in red, the saddle ones are highlighted in black (color online)

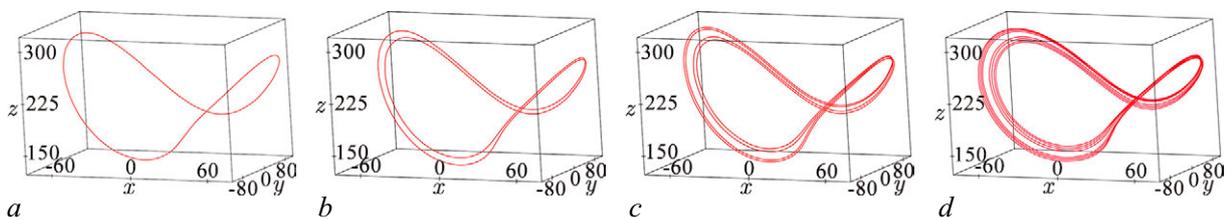


Рис. 5. Устойчивый предельный цикл системы (13) при  $b = 2.6, \sigma = 10$  и  $r = 250$  (a),  $r = 230$  (b),  $r = 222$  (c),  $r = 220.4$  (d)

Fig. 5 The stable limit cycle of system (13) at  $b = 2.6, \sigma = 10$  and  $r = 250$  (a),  $r = 230$  (b),  $r = 222$  (c),  $r = 220.4$  (d)

<sup>6</sup>Это подчеркивает неприменимость метода усреднения в окрестности сепаратрисной поверхности.

## Заключение

В работе рассматриваются неконсервативные автономные возмущения трёхмерных интегрируемых систем. Основное внимание уделяется применению метода усреднения для анализа предельных циклов. Показано, что гиперболические состояния равновесия усреднённой системы первого приближения определяют замкнутые фазовые траектории невозмущённой системы, в окрестности которых под действием возмущения появляются циклы. Таким образом, рассматриваемая задача приводит к исследованию порождающей системы двух алгебраических или трансцендентных уравнений по аналогии с порождающим уравнением Пуанкаре–Понтрягина для двумерных систем, близких к гамильтоновым. В статье рассматриваются два примера — трёхмерная система типа ван дер Поля и система Лоренца. Для примеров проведён анализ предельных циклов описанным в работе методом: вычислены усреднённые системы и исследованы их состояния равновесия. Построены соответствующие фазовые портреты.

## Список литературы

1. Морозов А. Д., Шильников Л. П. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // ПММ. 1983. Т. 47, № 3. С. 385–395. DOI: 10.1016/0021-8928(83)90058-8.
2. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 420 с.
3. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasiperiodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems // Differential Equations. 2017. Vol. 53, no. 12. P. 1607–1615. DOI: 10.1134/S0012266117120047.
4. Morozov A. D., Morozov K. E. Global dynamics of systems close to Hamiltonian ones under nonconservative quasi-periodic perturbation // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, no. 2. P. 187–198. DOI: 10.20537/nd190208.
5. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasi-periodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems with nonmonotone rotation // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 6, no. 255. P. 741–752. DOI: 10.1007/s10958-021-05411-5.
6. Morozov A. D., Morozov K. E. Synchronization of quasi-periodic oscillations in nearly Hamiltonian systems: The degenerate case // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 8. P. 083109. DOI: 10.1063/5.0055262.
7. Morozov A. D., Morozov K. E. Degenerate resonances and synchronization in nearly Hamiltonian systems under quasi-periodic perturbations // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27, no. 5. P. 572–585. DOI: 10.1134/S1560354722050057.
8. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4, № 9. С. 883–885.
9. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М: Наука, 1967. 488 с.
10. Жевакин С. А. Об отыскании предельных циклов в системах, близких к некоторым нелинейным // ПММ. 1951. Т. 15, № 2. С. 237–244.
11. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. общ. 1963. Т. 12. С. 3–52.
12. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с. DOI: 10.1007/978-1-4757-2063-1.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.
14. Аносов Д. В. Грубые системы // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.

15. Hale J. K. Ordinary differential equations. N.Y.: R. E. Krieger Pub. Co., 1980. 361 p.
16. Юдович В. И. Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Рэлея // Деп. в ВИНТИ. 1978. № 2611-78. С. 2–8.
17. Robbins K. A. Periodic solutions and bifurcation structure at high R in the Lorenz model // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1979. Vol. 36, no. 3. P. 457–472. DOI: 10.1137/0136035.
18. Покровский Л. А. Решение системы уравнений Лоренца в асимптотическом пределе большого числа Рэлея. I. Система Лоренца в простейшей квантовой модели лазера и приложение к ней метода усреднения // Теоретическая и математическая физика. 1985. Т. 62, № 2, С. 272–290. DOI: 10.1007/BF01033529.
19. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. ММО. 1982. Т. 44, С. 150–212.

## References

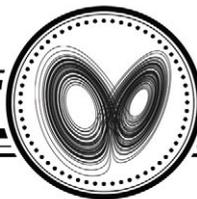
1. Morozov AD, Shilnikov LP. On nonconservative periodic systems similar to two-dimensional Hamiltonian ones. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984; 47(3):327–334. DOI: 10.1016/0021-8928(83)90058-8.
2. Morozov AD. Resonances, Cycles and Chaos in Quasi-Conservative Systems. Moscow-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics; 2005. 420 p. (in Russian).
3. Morozov AD, Morozov KE. Quasiperiodic Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems. Differential Equations. 2017; 53(12):1607–1615. DOI: 10.1134/S0012266117120047.
4. Morozov AD, Morozov KE. Global dynamics of systems close to Hamiltonian ones under nonconservative quasi-periodic perturbation. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019; 15(2):87–198. DOI: 10.20537/nd190208.
5. Morozov AD, Morozov KE. Quasi-periodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems with nonmonotone rotation. Journal of Mathematical Sciences. 2021; 6(255):741–752. DOI: 10.1007/s10958-021-05411-5.
6. Morozov AD, Morozov KE. Synchronization of quasi-periodic oscillations in nearly Hamiltonian systems: The degenerate case. Chaos. 2021; 31(8): 083109. DOI: 10.1063/5.0055262.
7. Morozov AD, Morozov KE. Degenerate resonances and synchronization in nearly Hamiltonian systems under quasi-periodic perturbations. Regular and Chaotic Dynamics. 2022;27(5):572–585. DOI: 10.1134/S1560354722050057.
8. Pontryagin LS. On dynamical systems close to Hamiltonian. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1934; 4(9):883–885. (in Russian).
9. Andronov AA, Leontovoch EA, Gordon II, Maier AG. Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane. M: Nauka, 1967. 482 p.
10. Zhevakin SA. On finding limit cycles in systems close to particular nonlinear ones. Journal of Applied Mathematics and Mechanic. 1951; 15(2):237–244. (in Russian).
11. Melnikov VK. On the stability of a center for time-periodic perturbations. Tr. Mosk. Mat. Obs. 1963;12:3–52. (in Russian).
12. Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics. NY: Springer New York; 1989. 520 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-2063-1.
13. Bogolubov NN, Mitropolskiy YA. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Delhi: Hindustan Publishing Corp.; New York: Gordon and Breach Science Publishers; 1961, 537 p.
14. Anosov DV. Structurally stable systems. Tr. MIAN USSR. 1985;169:59–93. (in Russian).
15. Hale JK. Ordinary differential equations. N.Y.: R. E. Krieger Pub. Co.; 1980. 361 p.

16. Udovich VI. Asymptotics of limit cycles of the Lorenz system at large Rayleigh numbers. VINTI. 1978;2611-78:2–8. (in Russian).
17. Robbins KA. Periodic solutions and bifurcation structure at high R in the Lorenz model. SIAM Journal on Applied Mathematics. 1979;36(3):457–472. DOI: 10.1137/0136035.
18. Покровский Л. А. Solution of the system of Lorenz equations in the asymptotic limit of large Rayleigh numbers. I. The Lorenz system in the simplest quantum laser model and application to it of the method of averaging. Theoretical and mathematical physics. 1985;62(2):272–290. DOI: 10.1007/BF01033529.
19. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type Tr. Mosk. Math. Soc. 1983;2:153–216.



*Морозов Кирилл Евгеньевич* — родился в Нижнем Новгороде (1994). Окончил с отличием Институт информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки» (2018). Кандидат физико-математических наук (2020, ННГУ). С 2020 года работает на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, с 2023 года — в должности доцента. Научные интересы — динамические системы, близкие к интегрируемым; теория бифуркаций; теория динамического хаоса. Опубликовал свыше 20 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603000 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: kirill.morozov@itmm.unn.ru  
ORCID: 0000-0001-9089-6813  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1066884



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003135  
EDN: NITFSM

## Квазинормальные формы для систем двух уравнений с большим запаздыванием

С. А. Кащенко✉, А. О. Толбей

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия

E-mail: ✉kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 15.06.2024, принята к публикации 1.08.2024,  
опубликована онлайн 31.10.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Рассматривается система двух уравнений с запаздыванием. Основной целью исследования является изучение локальной динамики этой системы в предположении, что параметр запаздывания является достаточно большим. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что они имеют бесконечную размерность. **Методы.** Исследования основаны на применении специальных методов бесконечномерной нормализации. Классические методы, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм, оказываются непосредственно неприменимы. **Результаты.** В качестве основных результатов построены специальные нелинейные краевые задачи, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной системы в окрестности состояния равновесия.

**Ключевые слова:** динамика, устойчивость, запаздывание, квазинормальные формы, сингулярные возмущения.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

**Для цитирования:** Кащенко С. А., Толбей А. О. Квазинормальные формы для систем двух уравнений с большим запаздыванием // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 781–795. DOI: 10.18500/0869-6632-003135. EDN: NITFSM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Quasinormal forms for systems of two equations with large delay

*S. A. Kashchenko*<sup>✉</sup>, *A. O. Tolbey*

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia

E-mail: ✉kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Received 15.06.2024, accepted 1.08.2024, available online 31.10.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** A system of two equations with delay is considered. The *purpose* of this work is to study the local dynamics of this system under the assumption that the delay parameter is sufficiently large. Critical cases in the problem of stability of an equilibrium state are identified and it is shown that they have infinite dimension. *Methods.* The research is based on the use of special methods of infinite-dimensional normalization. Classical methods based on the application of the theory of invariant integral manifolds and normal forms turn out to be directly inapplicable. *Results.* As the main results, special nonlinear boundary value problems are constructed, which play the role of normal forms. Their nonlocal dynamics determine the behavior of all solutions of the original system in the vicinity of the equilibrium state.

**Keywords:** dynamics, stability, delay, quasinormal forms, singular perturbations.

**Acknowledgements.** The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 21-71-30011, <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

**For citation:** Kashchenko SA, Tolbey AO. Quasinormal forms for systems of two equations with large delay. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(6):781–795. DOI: 10.18500/0869-6632-003135

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Рассматривается нелинейная система из двух дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{u} = Au + bBu(t - T) + F(u(t - T)) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $A$  и  $B$  —  $2 \times 2$  матрицы, запаздывание  $T > 0$ ,  $b \geq 0$  — некоторый параметр. Нелинейная вектор-функция  $F(u)$  имеет вид

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u),$$

где вектор-функции  $F_{2,3}$  — линейны по каждому аргументу. В качестве пространства начальных функций фиксируем пространство  $C_{[-T,0]}(\mathbb{R}^2)$ .

Исследуется вопрос о поведении всех решений (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов, заключается в том, что параметр  $T$  является достаточно большим, а значит,

$$0 < \varepsilon = T^{-1} \ll 1. \quad (2)$$

Системы вида (1) изучались в работах многих авторов (см., например, [1–15]). В работах [16–19] рассматривались уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x = \beta x(t - T) + f(x(t - T)), \quad T \gg 1. \quad (3)$$

Результаты из [16–19] будут существенно использоваться.

В (1) удобно произвести замену времени  $t \rightarrow Tt$ . В результате приходим к сингулярно возмущенной системе

$$\varepsilon \dot{u} = Au + bBu(t-1) + F(u(t-1)). \quad (4)$$

Отметим, что вырожденная при  $\varepsilon = 0$  система

$$Au + bBu(t-1) + F(u(t-1)) = 0$$

не дает информации о поведении решений системы (4) при  $t \rightarrow \infty$ . Будут существенно использоваться фундаментальные результаты [20–23] об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений.

Важную роль при изучении локальной динамики системы (4) играет поведение решений линеаризованной (в нуле) системы

$$\varepsilon \dot{u} = Au + bBu(t-1). \quad (5)$$

Поведение решений этой системы полностью определяется расположением корней ее характеристического квазиполинома

$$\det(A + b \exp(-\lambda)B - \varepsilon \lambda I) = 0.$$

Пусть  $A = \{a_{ij}\}^2$ ,  $B = \{b_{ij}\}^2$  и  $a_1 = \det A$ ,  $b_1 = \det B$ . Тогда характеристический квазиполином принимает вид

$$\varepsilon^2 \lambda^2 - \varepsilon a \lambda + a_1 = b^2 b_1 \exp(-2\lambda) + b(\varepsilon \lambda b_2 - b_3) \exp(-\lambda), \quad (6)$$

где

$$b_2 = b_{11} + b_{22}, \quad b_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}.$$

В том случае, когда все корни (6) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , все решения системы (5) и все решения с достаточно малыми начальными условиями системы (4) при малых  $\varepsilon$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если же уравнение (6) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественной частью, то нулевое решение в (5) и (4) неустойчиво и в малой окрестности нуля не может быть аттрактора в (4). Поэтому задача о динамике (4) становится нелокальной.

Рассмотрим вопрос о поведении всех решений (4) из окрестности нулевого состояния равновесия в случаях, близких к критическим, когда у уравнения (6) нет корней с положительной и отделенной от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественной частью, но есть корень, вещественная часть которого стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Будет показано, что в этих случаях бесконечно много корней (6) стремится к мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поэтому критические случаи имеют бесконечную размерность.

Отметим, что известные методы исследования локальной динамики в критических случаях, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий [8, 24, 25], здесь неприменимы. Будут использованы и развиты методы бесконечной нормализации, предложенные в работах [16–19]. В разделе 1 будет исследована линейная система (5), а в разделе 2 будут получены основные результаты: построена специальная нелинейная краевая задача параболического типа — квазинормальная форма. Эта квазинормальная форма играет роль нормализованного для системы (4) уравнения. Нелокальная динамика квазинормальной формы определяет локальную структуру решений системы (4). В разделе 3 будут рассмотрены примеры.

Введем еще одно предположение. Пусть все собственные значения матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части. Тем самым

$$a = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{и} \quad a_1 = \det A > 0. \quad (7)$$

При достаточно малых значениях параметра  $b$  все корни характеристического уравнения (6) тоже имеют отрицательные вещественные части. Поэтому речь пойдет о нахождении такого значения  $b_0$  ( $b_0 > 0$ ), при котором для  $b \in [0, b_0)$  все корни (6) имеют отрицательные вещественные части, а при  $b = b_0$  реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения (5) и (4).

### 1. Линейный анализ

В данном разделе исследуем линейную систему (5) при условии (2). Сначала определим коэффициенты в (5), при которых реализуется критический случай в задаче об устойчивости. Затем найдем асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  всех тех корней (6), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Дополнительно предполагаем, что

$$b_1 \neq 0. \quad (8)$$

Случай, когда  $b_1 = 0$ , будет рассмотрен в разделе 3.

Рассмотрим уравнение (6) как квадратичное уравнение относительно величины  $b \exp(-\lambda)$ . Тогда получаем, что

$$b \exp(-\lambda) = R^\pm(\varepsilon\lambda), \quad (9)$$

где

$$R^\pm(\varepsilon\lambda) = (2b_1)^{-1} [b_3 - \varepsilon\lambda b_2 \pm ((b_3 - \varepsilon\lambda b_2)^2 + 4b_1 \cdot (\varepsilon^2\lambda^2 - a\varepsilon\lambda + a_1))^{1/2}].$$

В (9) положим  $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ , где  $\omega \geq 0$  – вещественное, и пусть

$$R^\pm(i\omega) = \rho^\pm(\omega) \exp(i\Omega^\pm(\omega)), \quad (\rho^\pm(\omega) = |R^\pm(i\omega)|).$$

Наименьшее значение  $\rho^\pm(\omega)$  по всем  $\omega \geq 0$  обозначим через  $\rho_0^\pm$ :

$$\min_{\omega} \rho^\pm(\omega) = \rho^\pm(\omega^\pm) = \rho_0^\pm$$

и

$$\min (\rho^+(\omega^+), \rho^-(\omega^-)) = \rho_0(\omega_0) = \rho_0,$$

где

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega^+, & \text{если } \rho_0^+ \leq \rho_0^-, \\ \omega^-, & \text{если } \rho_0^- \leq \rho_0^+, \end{cases} \quad \rho_0 = \rho_0(\omega_0) = \begin{cases} \rho^+(\omega^+), & \text{если } \rho_0^+ \leq \rho_0^-, \\ \rho^-(\omega^-), & \text{если } \rho_0^- \leq \rho_0^+, \end{cases}$$

$$\Omega_0 = \Omega_0(\omega_0) = \begin{cases} \Omega^+(\omega^+), & \text{если } \rho_0^+ \leq \rho_0^-, \\ \Omega^-(\omega^-), & \text{если } \rho_0^- \leq \rho_0^+. \end{cases}$$

Наконец, через  $R_0(\omega)$  обозначим выражение  $R_0(\omega) = \rho_0(\omega) \exp(i\Omega_0(\omega))$ .

**Лемма 1.** Пусть  $b < \rho_0$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  все корни уравнения (6) имеют отрицательные и отделенные от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественные части.

**Лемма 2.** Пусть  $b > \rho_0$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (6) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественной частью.

Простые, но громоздкие доказательства этих утверждений опустим.

Ниже рассмотрим критический случай, когда выполнены равенства

$$b_0 = \rho_0, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b^0. \quad (10)$$

Найдем асимптотику при  $\varepsilon \rightarrow 0$  всех тех корней  $\lambda_n(\varepsilon), \bar{\lambda}_n(\varepsilon)$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (6), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Введем обозначение. Через  $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$  обозначим такую величину, которая дополняет до целого кратного  $2\pi$  значение  $\omega_0 \varepsilon^{-1}$ . Применяя стандартные методы теории возмущений, приходим к следующему утверждению.

**Лемма 3.** Пусть выполнены равенства (10). Тогда для  $\lambda_n(\varepsilon)$  имеют место асимптотические равенства

$$\lambda_n(\varepsilon) = i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \varepsilon(\theta - \Omega_0 + 2\pi n)) + \varepsilon \lambda_{1n} + \varepsilon^2 \lambda_{2n} + \dots,$$

в которых

$$\lambda_{1n} = -i\Omega'_0(\omega_0)\rho_0[\theta - \Omega_0 + 2\pi n],$$

$$\lambda_{2n} = \left( \frac{1}{2}\rho''_0(\omega_0) - \frac{1}{2}i\Omega''_0(\omega_0)\rho_0 \right) [\theta - \Omega_0 + 2\pi n]^2 - i\Omega'_0(\omega_0)\rho_0[\theta - \Omega_0 + 2\pi n] + b^0 b_0^{-1}.$$

Напомним, что корню  $\lambda_n(\varepsilon)$  уравнения (6) отвечает решение Эйлера  $u_n(t, \varepsilon)$  системы (5)

$$u_n(t, \varepsilon) = g_n(\varepsilon) \exp(\lambda_n(\varepsilon)t),$$

где  $g_n(\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_{1n} + \dots$  — собственный вектор матрицы

$$C_n(\varepsilon) = A + b_0 \exp [i\Omega_0 - \varepsilon \lambda_{1n} - \varepsilon^2 \lambda_{2n} - \dots] B,$$

отвечающий собственному значению  $i\omega_0 + \varepsilon i(\theta - \Omega_0 + 2\pi n) + \varepsilon^2 \lambda_{1n} + \varepsilon^3 \lambda_{2n} + \dots$ :

$$C_n(\varepsilon)g_n(\varepsilon) = [i\omega_0 + \varepsilon i(\theta - \Omega_0 + 2\pi n) + \varepsilon^2 \lambda_{1n} + \dots]g_n(\varepsilon),$$

и для матрицы  $C = C_n(0) = A + b_0 \exp(i\Omega_0)$  имеем равенство

$$Cg_0 = i\omega_0 g_0.$$

Ниже понадобится собственный вектор  $q_0$  матрицы  $C^*$ :

$$C^*q_0 = -i\omega_0 q_0.$$

Удобно этот вектор нормировать так, чтобы  $(g_0, q_0) = 1$ .

Линейная система уравнений (5) тогда имеет совокупность решений с произвольными коэффициентами  $\xi_n$

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n u_n(t, \varepsilon) = E(t, \varepsilon) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp[2\pi n i x + \varepsilon^2(\lambda_{2n} + O(\varepsilon))t] \cdot g_n(\varepsilon) = \\ &= E(t, \varepsilon) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau) g_0 \cdot \exp(2\pi n i x) + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau) (g_{1n} + \varepsilon g_{2n} + \dots) \cdot \exp(2\pi n i x) = \\ &= E(t, \varepsilon) \xi(\tau, x) g_0 + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau) (g_{1n} + \varepsilon g_{2n} + \dots) \cdot \exp(2\pi n i x). \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь  $\tau = \varepsilon^2 t$  — «медленное» время,  $E(t, \varepsilon) = \exp[i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \theta - \Omega_0 - \varepsilon \Omega'_0(\omega_0) \rho_0(\theta - \Omega_0))t]$ ,  $x = (1 - \varepsilon \Omega'_0(\omega_0) \rho_0)t$ ,  $\xi_n(\tau) = \xi_n \exp((\lambda_{2n} + O(\varepsilon))\tau)$  — коэффициенты Фурье 1-периодической по  $x$  функции  $\xi(\tau, x)$ .

Отдельно остановимся на случае, когда  $\omega_0 = 0$ . Тогда  $\theta = 0$ , а  $\Omega_0$  принимает одно из двух значений: либо  $\Omega_0 = 0$ , либо  $\Omega_0 = \pi$ . Отметим еще, что  $\Omega'_0(0) = a \cdot a_1^{-1} \exp(i\Omega_0(0))$ ,  $\Omega''_0(0) = 0$ ,  $\rho'_0(0) = 0$ . Равенство  $\Omega_0 = 0$  имеет место при условии

$$R_0(0) = \rho_0(0) \exp(i\Omega_0(0)) = \rho_0(0) > 0. \quad (12)$$

В этом случае  $E(t, \varepsilon) \equiv 1$  и в выражении (11)  $\xi(\tau, x)$  и  $g_0$  — вещественные:

$$u(t, \varepsilon) = \xi(\tau, x)g_0 + o(\varepsilon), \quad \xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (13)$$

Равенство  $\Omega_0 = \pi$  в случае  $\omega_0 = 0$  получаем при условии

$$R_0(0) = -\rho_0(0) = \rho_0(0) \exp(i\Omega_0(0)). \quad (14)$$

В этой ситуации выражение (11) можно представить в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp[i\pi(2n+1)x + (\lambda_{2n} + O(\varepsilon))\tau]g_n(\varepsilon) = \xi(\tau, x)g_0 + O(\varepsilon), \quad (15)$$

а функция  $\xi(\tau, x)$  содержит только нечетно кратные  $\pi$  гармоники  $\exp(i\pi(2n+1)x)$ . Поэтому и здесь  $E(t, \varepsilon) \equiv 1$ , а функция  $\xi(\tau, x)$  — вещественная и

$$\xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x).$$

На представлениях (11), (13), (15) будет базироваться нелинейный анализ системы (4).

## 2. Построение квазинормальных форм

Сразу отметим, что обоснование приводимых ниже утверждений следует непосредственно из алгоритма построения асимптотики решений исходной краевой задачи. Будем предполагать, что выполнены равенства (10). Отдельно рассмотрим случаи  $\omega_0 = 0$  и  $\omega_0 \neq 0$ .

**2.1. Случай  $\omega_0 = 0$  и  $\Omega_0 = 0$ .** Этот случай самый простой. Основываясь на соотношении (15), решения нелинейной системы (4) ищем в виде

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \xi(\tau, x)g_0 + \varepsilon^4 u_2(\tau, x) + \dots,$$

где  $\xi(\tau, x)$  и  $u_2(\tau, x)$  — неизвестные 1-периодические по  $x$  функции. Подставим это выражение в (4) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При степени  $\varepsilon^2$  получаем верное равенство, а приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon^4$ , приходим к системе уравнений относительно  $u_2$ :

$$(A + b_0 B)u_2 + F_0 = 0,$$

в которой

$$F_0 = b_0 B g_0 \left[ -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \rho''_0(0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a \cdot a_1^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] + b_1^0 B g_0 \xi - F_2(g_0, g_0) \xi^2.$$

Поскольку  $(A + b_0B)g_0 = 0$ , то условие разрешимости этой системы состоит в выполнении равенства (условие ортогональности вектору  $q_0$ )

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \rho_0''(0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a \cdot a_1^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + b_1^0 b_0^{-1} \xi + \alpha \xi^2 = 0, \quad (16)$$

$$\alpha = [b_0(Bg_0, q_0)]^{-1} (F_2(g_0, g_0), q_0)$$

для периодической по  $x$  функции  $\xi(\tau, x)$ :

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (17)$$

Сформулируем итоговый результат.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (8), (9), (10), (12) и пусть краевая задача (16), (17) имеет ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 1]$  решение  $\xi(\tau, x)$ . Тогда функция  $u(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \xi(\tau, x) g_0 + \varepsilon^4 u_2(\tau, x)$  удовлетворяет системе уравнений (4) с точностью до  $O(\varepsilon^4)$ .

Отметим, что динамические свойства краевой задачи (16), (17) простые. Её аттрактором при условии невырожденности  $\alpha \neq 0$  может быть только одно устойчивое состояние равновесия.

**2.2. Случай  $\omega_0 = 0$  и  $\Omega_0 = \pi$ .** Этот случай интереснее предыдущего. Решения нелинейной системы (4) ищем в виде

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x) g_0 + \varepsilon^2 u_2(\tau, x) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x) + \dots, \quad (18)$$

где  $\xi(\tau, x)$  содержит только нечетные гармоники по переменной  $x$ .

Подставим (18) в (4) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При первой степени  $\varepsilon$  получаем верное равенство. На следующем шаге получаем систему для определения  $u_2$ :

$$Au_2 + b_0 B u_2(\tau, x - 1) + \xi^2(\tau, x) F_2(g_0, g_0) = 0.$$

Отметим, что матрица  $A + b_0 B$  обратима, а матрица  $A - b_0 B$  имеет нулевое собственное значение.

Поскольку  $\xi^2(\tau, x)$  является 1-периодической функцией, то и решение  $u_2(\tau, x)$  ищем в виде 1-периодической функции. Поэтому

$$u_2(\tau, x) = u_{20} \xi^2(\tau, x),$$

$$u_{20} = -(A + b_0 B)^{-1} F_2(g_0, g_0).$$

На следующем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^3$ , приходим к системе для определения  $u_3$ :

$$\begin{aligned} & Au_3 + b_0 B u_3(\tau, x - 1) - 2\xi \xi' [b_0 \Omega_0'(0) \rho_0(0) B u_{20} - u_{20}] + \\ & + b_0 B \left[ -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \rho_0''(0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a \cdot a_1^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^0 b_0^{-1} \xi \right] + f^0 \xi^3, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $f^0 = -F_2(g_0, u_{20}) - F_2(u_{20}, g_0) - F_3(g_0, g_0, g_0)$ . Функцию  $u_3$  ищем в виде суммы двух функций  $u_3 = u_{31} + u_{32}$ , первая из которых 1-периодична по  $x$ , а вторая — 1-антипериодична. Поэтому система (19) эквивалентна системе уравнений

$$(A + b_0 B) u_{31} = 2 [u_{20} + b_0 \Omega_0'(0) \rho_0(0) B u_{20}] \xi \xi', \quad (20)$$

$$(A - b_0 B) u_{31} = b_0 B g_0 \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \rho_0''(0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - b^0 b_0^{-1} \xi \right] - f^0 \xi^3. \quad (21)$$

Из (20) сразу находим, что

$$u_{31} = 2(A + b_0B)^{-1} [u_{20} + b_0\Omega'_0(0)\rho_0(0)Bu_{20}] \xi \xi'.$$

Условие разрешимости системы (21) состоит в выполнении условия ортогональности ее правой части вектору  $q_0$ , то есть

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \rho_0''(0) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a \cdot a_1^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^0 b_0^{-1} \xi - [b(Bg_0, q_0)]^{-1} (f^0, q_0) \xi^3. \quad (22)$$

Напомним, что функция  $\xi(\tau, x)$  — 1-антипериодическая:

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv -\xi(\tau, x). \quad (23)$$

Подведем итог.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (8), (9), (10), (14) и пусть краевая задача (22), (23) имеет ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 1]$  решение  $\xi(\tau, x)$ . Тогда функция  $u(t, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau, x) g_0 + \varepsilon^2 u_2(\tau, x) + \varepsilon^3 (u_{31}(\tau, x) + u_{32}(\tau, x))$  удовлетворяет системе уравнений (4) с точностью до  $O(\varepsilon^4)$ .

Таким образом, краевые задачи (16), (17) и (22), (23) являются квазинормальными формами для системы уравнений (4) в критических случаях при  $\omega_0 = 0$ . Отметим, что динамические свойства последней из них богаче. В (22), (23) могут быть, например, устойчивые неоднородные состояния равновесия.

**2.3. Квазинормальные формы при  $\omega_0 \neq 0$ .** Основываясь на асимптотическом представлении (11), решения нелинейной системы уравнений (4) ищем в виде

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon (\xi(\tau, x) E(t, \varepsilon) g_0 + \bar{c}\bar{c}) + \varepsilon^2 (u_{20}(\tau, x) + u_{21}(\tau, x) E^2(t, \varepsilon) + \bar{c}\bar{c}) + \varepsilon^3 (u_{31}(\tau, x) E(t, \varepsilon) + \bar{c}\bar{c} + u_{32}(\tau, x) E^3(t, \varepsilon) + \bar{c}\bar{c}) + \dots \quad (24)$$

Все фигурирующие в (24) функции 1-периодичны по  $x$ . Здесь и ниже через  $\bar{c}\bar{c}$  обозначаем слагаемое, сопряженное к предыдущему.

Подставляя (24) в (4) и совершая стандартные действия, будем последовательно определять коэффициенты в (24). При  $\varepsilon$  в первой степени получаем верное равенство. Собирая коэффициенты при  $\varepsilon^2$ , приходим к системе уравнений для  $u_{20}(\tau, x)$  и  $u_{21}(\tau, x)$ :

$$(A + b_0B)u_{20}(\tau, x) + |\xi(\tau, x)|^2 (F_2(g_0, \bar{g}_0) + F_2(\bar{g}_0, g_0)) = 0, \\ (A - b_0B - 2i\omega_0I)u_{21}(\tau, x) + \xi^2(\tau, x) F_2(g_0, g_0).$$

Отсюда имеем равенства

$$u_{20}(\tau, x) = u_{20}^0 |\xi(\tau, x)|^2, \quad u_{21}(\tau, x) = u_{21}^0 \xi^2(\tau, x), \\ u_{20}^0 = -(A + b_0B)^{-1} [F_2(g_0, \bar{g}_0) + F_2(\bar{g}_0, g_0)], \\ u_{21}^0 = -(A + b_0B - 2i\omega_0I)^{-1} F_2(g_0, g_0).$$

На следующем шаге соберем коэффициенты при  $\varepsilon^3$ . В результате получаем систему уравнений для определения  $u_{31}(\tau, x)$  и  $u_{32}(\tau, x)$ :

$$(A + b_0B - i\omega_0I)u_{31}(\tau, x) = -b_0Bg_0 \left[ -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + A_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_3 \xi \right] - d\xi|\xi|^2, \quad (25)$$

$$(A + b_0B - 3i\omega_0I)u_{32}(\tau, x) + \xi^3(\tau, x)(F_2(u_{21}^0, g_0) + F_2(g_0, u_{21}^0) + F_3(g_0, g_0, g_0)) = 0. \quad (26)$$

В (25) приняты обозначения

$$d = F_2(u_{20}^0, g_0) + F_2(g_0, u_{20}^0) + F_2(u_{21}^0, \bar{g}_0) + F_2(\bar{g}_0, u_{21}^0) + F_3(g_0, g_0, \bar{g}_0) + F_3(g_0, \bar{g}_0, g_0) + F_3(\bar{g}_0, g_0, g_0),$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(\rho_0''(\omega_0) - i\Omega_0''(\omega_0)\rho_0(\omega_0)),$$

$$A_2 = -\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0) - 2iA_1(\theta - \Omega_0(\omega_0)),$$

$$A_3 = b^0b_0^{-1} - i\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0)(\theta - \Omega_0(\omega_0)).$$

Из (26) сразу находим  $u_{32}(\tau, x)$ :

$$u_{32}(\tau, x) = -\xi^3(A + b_0B - 3i\omega_0I)^{-1}(F_2(u_{21}^0, g_0) + F_2(g_0, u_{21}^0) + F_3(g_0, g_0, g_0)).$$

Рассмотрим систему (25). Матрица  $A + b_0B - i\omega_0I$  имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственный вектор  $g_0$ . Поэтому критерий разрешимости (25) состоит в выполнении условия ортогональности правой части (25) вектору  $q_0$ :

$$b_0(Bg_0, q_0) \left[ -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + A_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_3 \xi \right] + (d, q_0)\xi|\xi|^2 = 0.$$

Отсюда окончательно получаем, что выполнено равенство

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = A_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_3 \xi + (d, q_0)[b_0(Bg_0, q_0)]^{-1}\xi|\xi|^2, \quad (27)$$

а для  $\xi(\tau, x)$  выполнены периодические краевые условия

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x). \quad (28)$$

Прежде чем сформулировать основной результат, введем обозначение. Фиксируем произвольно  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ . Через  $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\theta_0)$  будем обозначать такую последовательность, что  $\varepsilon_r(\theta_0) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  и  $\theta(\varepsilon_r(\theta_0)) = \theta_0$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (7), (8), (10) и  $\omega_0 \neq 0$ . Фиксируем произвольно  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ . Пусть  $\xi(\tau, x)$  — ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 1]$  решение краевой задачи (27), (28) при  $\theta = \theta_0$ . Тогда функция

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x)E(t, \varepsilon)g_0 + \bar{c}\bar{c}) + \varepsilon^2(u_{20}(\tau, x) + u_{21}(\tau, x)E^2(t, \varepsilon) + \bar{c}\bar{c}) + \varepsilon^3(u_{31}(\tau, x)E(t, \varepsilon) + \bar{c}\bar{c} + u_{32}(\tau, x)E^3(t, \varepsilon) + \bar{c}\bar{c}) + \dots$$

при  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $x = (1 - \varepsilon\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0))t$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_r(\theta_0)$  удовлетворяет системе уравнений (4) с точностью до  $O(\varepsilon^4)$ .

Это утверждение говорит о том, что при сформулированных условиях краевая задача (27), (28) является квазинормальной формой для системы уравнений (4).

### 3. Примеры

В первых двух примерах сделано упрощающее предположение о том, что

$$b_1 = \det B = 0. \quad (29)$$

В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$b(\varepsilon\lambda b_2 - b_3) \exp(-\lambda) = \varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1. \quad (30)$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда  $b_2 = 0$  и когда  $b_2 \neq 0$ .

**3.1. Случай  $b_1 = 0$  и  $b_2 = 0$ .** Отметим, что при условиях (29) и

$$b_2 = b_{11} + b_{22} = 0$$

оба собственных значения матрицы  $B$  нулевые. Будем предполагать, что выполнено условие невырожденности

$$b_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \neq 0.$$

Равенство (30) тогда принимает вид

$$-b \cdot b_3 \exp(-\lambda) = \varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1. \quad (31)$$

Положим здесь  $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$  ( $\omega \geq 0$ ) и рассмотрим выражение

$$p(\omega) = b \cdot b_3 \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}),$$

где  $p(\omega) = a_1 - \omega^2 - ia\omega = |p(\omega)| \exp(i\Omega(\omega))$ . Из (31) получаем, что  $|p(\omega)| = b \cdot |b_3|$ .

Пусть

$$\min_{\omega} |p(\omega)| = |p(\omega_0)|.$$

Тогда находим, что

$$\omega_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } a^2 \geq 2a_1, \\ (2a_1 - a^2)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2a_1. \end{cases} \quad (32)$$

$$p_0 = |p(\omega_0)| \begin{cases} a_1, & \text{если } a^2 > 2a_1, \\ \frac{a}{2}(4a_1 - a^2)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2a_1. \end{cases}$$

При  $b < p_0|b_3|^{-1}$  все корни (31) имеют отрицательные и отделенные от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественные части, а при  $b > p_0|b_3|^{-1}$  в (31) есть корень с положительной и отделенной от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественной частью. Отметим, что при сформулированных условиях линейная система (5) сводится к уравнению второго порядка с запаздыванием

$$\varepsilon^2\ddot{x} - \varepsilon a\dot{x} + (\det A)x = b\beta x(t-1).$$

Здесь предполагаем, что реализуется критический случай, когда

$$b = b_0 + \varepsilon^2 b^0 \quad \text{и} \quad b_0 = p_0|b_3|^{-1}.$$

Приведем итоговые квазинормальные формы. При условии  $a^2 \geq 2a_1$  имеем  $\rho_0''(0) = 2$ . При  $b_3 < 0$  и  $a \neq 0$  квазинормальной формой является краевая задача (16), (17); решения (4) и решения (16), (17) связаны формулой  $u = \varepsilon^2 \xi^2(\tau, x) + O(\varepsilon^4)$ . При  $b_3 > 0$  квазинормальной формой является краевая задача (22), (23) и её решения и решения (4) связаны формулой (18).

Если  $a^2 < 2a_1$  и  $(d, q_0) \neq 0$ , то квазинормальной формой является краевая задача (27), (28), в которой  $\rho_0(\omega_0) = p_0|b_3|^{-1}$ , а  $p_0$  и  $\omega_0$  определяются в (32). В этом случае решения (27), (28) и (4) связаны асимптотическим равенством (24).

**3.2. Случай  $b_1 = 0$  и  $b_2 \neq 0$ .** При этих условиях только одно собственное значение матрицы  $B$  нулевое. Из уравнения (30) тогда получаем, что

$$b \exp(-\lambda) = (\varepsilon^2 \lambda^2 - \varepsilon a \lambda + a_1)(\varepsilon \lambda b_2 - b_3)^{-1}.$$

Положим здесь  $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$  ( $\omega \geq 0$ ). Тогда

$$b \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = p(\omega)(ib_2\omega - b_3)^{-1}.$$

Критические величины  $p_0$  и  $\omega_0$  определяются из равенства

$$\min_{\omega} (|p(\omega)| \cdot |ib_2\omega - b_3|^{-1}) = p_0 = |p_0(\omega_0)| \cdot |ib_2\omega_0 - b_3|^{-1}.$$

После того как значения  $p_0$  и  $\omega_0$  определены, повторяем изложенный выше алгоритм нахождения коэффициентов квазинормальной формы (27), (28).

В следующих двух примерах выполнено неравенство

$$b_1 = \det B \neq 0.$$

**3.3. Случай  $B = I$ .** Пусть матрица  $A$  имеет пару комплексных собственных значений  $\alpha \pm i\beta$ , где  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ . Тогда корни характеристического уравнения для системы

$$\varepsilon \dot{u} = Au + bu(t-1)$$

удовлетворяют равенствам

$$\varepsilon \lambda = \alpha + i\beta + b \exp(-\lambda),$$

$$\varepsilon \lambda = \alpha - i\beta + b \exp(-\lambda).$$

Положим здесь

$$\lambda = i\omega\varepsilon^{-1} (\omega \geq 0) \text{ и } b = b_0 + \varepsilon^2 b^0.$$

Критические значения для параметров  $\omega_0$  и  $b_0$  определяются из соотношений

$$b \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = i(\omega - \beta) - \alpha,$$

$$b \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = i(\omega + \beta) - \alpha.$$

Отсюда, учитывая, что  $\omega > 0$ ,  $\beta > 0$ , получаем

$$b_0 = \min_{\omega} [(\omega - \beta)^2 + \alpha^2]^{1/2} = |\alpha|, \quad \omega_0 = \beta.$$

Квазинормальная форма в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = & (2b_0^2)^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - (i\theta(2b_0^2)^{-1} + b_0^{-1}) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (i\theta b_0^{-1} - \theta^2(2b_0^2)^{-1} + b^0 b_0^{-1}) \xi + \\ & + (d, q_0)[b_0(Bg_0, q_0)]^{-1} \xi |\xi|^2, \end{aligned}$$

$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x).$$

Связь между решениями этой квазинормальной формы и системы (4) определяется в теореме 3.

**3.4. Случай  $A = B$ .** Пусть матрица  $A$  имеет собственные значения  $\alpha \pm i\beta$ , где  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ . Тогда имеем уравнения

$$\varepsilon\lambda = (\alpha + i\beta)(1 + b \exp(-\lambda)),$$

$$\varepsilon\lambda = (\alpha - i\beta)(1 + b \exp(-\lambda)).$$

Полагая здесь  $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ , приходим к соотношениям

$$b \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = (-\alpha + i(\omega - \beta))(\alpha + i\beta)^{-1},$$

$$b \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = (-\alpha + i(\omega + \beta))(\alpha + i\beta)^{-1}.$$

Для критических значений параметров  $b$ ,  $\omega$  и  $\Omega$  получаем равенства

$$b_0 = \min_{\omega} [(\alpha^2 + (\omega - \beta)^2(\alpha^2 + \beta^2)^{-1})^{1/2}] = |\alpha| \cdot (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2},$$

$$\omega_0 = \beta, \quad \exp(i\Omega_0) = -(\alpha + i\beta)(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.$$

Итоговая квазинормальная форма имеет вид

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - (b_0^{-1} \exp(i\Omega_0)) \frac{\partial \xi}{\partial x} + [b^0 b_0^{-1} - i(\theta - \Omega_0) b_0^{-1}] \xi + (d, q_0) [b_0(Bg_0, q_0)]^{-1} \xi |\xi|^2,$$

$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x).$$

### Выводы

Для системы из двух уравнений с запаздыванием выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что эти критические случаи имеют бесконечную размерность. В каждом из них построены квазинормальные формы, нелокальная динамика которых определяет асимптотическое поведение решений исходной системы в окрестности состояния равновесия. Квазинормальными формами являются краевые задачи типа Гинзбурга — Ландау, исследованию которых посвящены работы многих авторов. Отсюда можно сделать вывод о том, что структура решений в полученных квазинормальных формах, а значит, и в исходной системе, может быть достаточно сложной. Во многих случаях квазинормальные формы содержат «внутренний» параметр  $\theta$ , который бесконечно много раз пробегает значения от 0 до 1 при стремлении к нулю малого параметра. Это говорит о высокой чувствительности динамических свойств исходной системы к изменению ее параметров. В методическом и чисто техническом плане приведенные построения сложнее, чем в случае одного уравнения второго порядка с большим запаздыванием.

Полученные здесь результаты являются основой для рассмотрения уравнений вида (1) произвольной размерности.

### Список литературы

1. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
2. Kashchenko S. A. The dynamics of second-order equations with delayed feedback and a large coefficient of delayed control // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, no. 7/8. P. 811–820. DOI: 10.1134/S1560354716070042.
3. Giacomelli G., Politi A. Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems // Physical review letters. 1996. Vol. 76, no. 15. P. 2686. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.2686.

4. *Wolfrum M., Yanchuk S.* Eckhaus instability in systems with large delay // *Physical review letters*. 2006. Vol. 96, no. 22. P. 220201. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.220201.
5. *Bestehorn M., Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A.* Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2000. Vol. 145, no. 1–2. P. 110–129. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00106-8.
6. *Giacomelli G., Politi A.* Multiple scale analysis of delayed dynamical systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. Vol. 117, no. 1–4. P. 26–42. DOI: 10.1016/S0167-2789(97)00318-7.
7. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // *Physical Review Letters*. 1980. Vol. 45, no. 9. P. 709. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.709.
8. *Hale J. K.* *Theory of Functional Differential Equations*. 2nd ed. New York: Springer, 1977. 626 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
9. *D’Huys O., Vicente R., Erneux T., Danckaert J., Fischer I.* Synchronization properties of network motifs: Influence of coupling delay and symmetry // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2008/12/03. AIP, 2008. Vol. 18, no. 3. P. 037116. DOI: 10.1063/1.2953582.
10. *Van der Sande G., Soriano M. C., Fischer I., Mirasso C.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // *Physical Review E*. 2008. Vol. 77, no. 5. P. 55202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
11. *Klinshov V. V., Nekorkin V. I.* Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2011. Vol. 44, no. 1–3. P. 98–107. DOI: 10.1016/j.chaos.2010.12.007.
12. *Клиньшов В. В., Некоркин В. И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // *Успехи Физических Наук*. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
13. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Nekorkin V.* Jittering waves in rings of pulse oscillators // *Physical Review E*. 2016. Vol. 94, no. 1. P. 012206. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.012206.
14. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D’Huys O., Nekorkin V.* Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96, no. 4. P. 042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
15. *Yanchuk S., Perlikowski P.* Delay and periodicity // *Physical Review E*. APS. 2009. Vol. 79, no. 4. P. 1–9. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.046221.
16. *Кащенко С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // *Дифференциальные уравнения*. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451.
17. *Kashchenko S. A.* Van der Pol equation with a large feedback delay // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 6. P. 1301. DOI: 10.3390/math11061301.
18. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng.* 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
19. *Kashchenko S. A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998. Vol. 38, no. 3. P. 443–451.
20. *Vasil’eva A. B., Butuzov V. F.* *Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations*. Moscow: Nauka, 1973. 272 p.
21. *Butuzov V. F., Nefedov N. N., Omel’chenko O., and Recke L.* Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems // *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*. 2022. Vol. 27, no. 8. P.4255–4283. DOI: 10.3934/dcdsb.2021226.
22. *Nefedov N. N.* Development of methods of asymptotic analysis of transition layers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2021. Vol. 61, no. 12. P. 2068–2087. DOI: 10.1134/S0965542521120095.

23. *Nefedov N. N., Nikulin E. I.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction-diffusion equations in the case of a rapid reaction // *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2018. Vol. 25, no. 1. P. 88–101. DOI: 10.1134/S1061920818010089.
24. *Bruno A. D.* *Local Methods in Nonlinear Differential Equations* / Translated from the Russian by W. Hovingh, C. S. Coleman, Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 348 p.
25. *Hartman P.* *Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2002. 642 p. DOI: 10.1137/1.9780898719222.

## References

1. Sharkovsky AN, Maistrenko YL, Romanenko EY. *Difference Equations and their Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group; 1993. 358 p.
2. Kashchenko SA. The dynamics of second-order equations with delayed feedback and a large coefficient of delayed control. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2016;21(7/8):811–820. DOI: 10.1134/S1560354716070042.
3. Giacomelli G, Politi A. Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems. *Physical review letters*. 1996;76(15):2686. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.2686
4. Wolfrum M, Yanchuk S. Eckhaus instability in systems with large delay. *Physical review letters*. 2006;96(22):220201. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.220201.
5. Bestehorn M, Grigorieva EV, Haken H, Kashchenko SA. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2000;145(1–2):110–129. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00106-8.
6. Giacomelli G, Politi A. Multiple scale analysis of delayed dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998;117(1–4):26–42. DOI: 10.1016/S0167-2789(97)00318-7.
7. Ikeda K, Daido H, Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. *Physical Review Letters*. 1980;45(9):709. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.709.
8. Hale J.K. *Theory of Functional Differential Equations*. 2nd ed. New York: Springer; 1977. 626 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
9. D’Huys O, Vicente R, Erneux T, Danckaert J, Fischer I. Synchronization properties of network motifs: Influence of coupling delay and symmetry. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2008;18(3):37116. DOI: 10.1063/1.2953582.
10. Van der Sande G, Soriano MC, Fischer I, Mirasso C. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators. *Physical Review E*. 2008;77(5):55202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
11. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2011;44(1–3):98–107. DOI: 10.1016/j.chaos.2010.12.007.
12. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. *Physics-Uspekhi*. 2013;56(12):1217–1229. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
13. Klinshov V, Shchapin D, Yanchuk S, Nekorkin V. Jittering waves in rings of pulse oscillators. *Physical Review E*. 2016;94(1):012206. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
14. Klinshov V, Shchapin D, Yanchuk S, Wolfrum M, D’Huys O, Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring. *Physical Review E*. 2017;96:042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
15. Yanchuk S, Perlikowski P. Delay and periodicity. *Physical Review E. APS*. 2009;79(4):1–9. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.046221.
16. Kashchenko SA. Application of the normalization method to the study of the dynamics of a differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative. *Differentsialnye Uravneniya*. 1989;25(8):1448–1451 (in Russian).

17. Kashchenko SA. Van der Pol Equation with a Large Feedback Delay. *Mathematics*. 2023;11(6):1301. DOI: 10.3390/math11061301.
18. Kaschenko SA. Normalization in the systems with small diffusion. *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng.* 1996;6:1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
19. Kashchenko SA. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998;38(3):443–451.
20. Vasil’eva AB, Butuzov VF. *Asymptotic Expansions of the Solutions of Singularly Perturbed Equations*. Moscow: Nauka; 1973. 272 p.
21. Butuzov VF, Nefedov NN, Omel’chenko O, Recke L. Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*. 2022;27(8): 4255–4283. DOI: 10.3934/dcdsb.2021226.
22. Nefedov NN. Development of methods of asymptotic analysis of transition layers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2021;61(12):2068–2087. DOI: 10.1134/S0965542521120095.
23. Nefedov NN, Nikulin EI. Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction-diffusion equations in the case of a rapid reaction. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2018;25(1):88–101. DOI: 10.1134/S1061920818010089.
24. Bruno AD. *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin: Springer-Verlag; 1989. 358 p.
25. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM); 2002. 642 p. DOI: 10.1137/1.9780898719222.

*Кащенко Сергей Александрович* — родился в Ярославле (1953). Окончил Ярославский государственный университет (1975). Доктор физико-математических наук (1989, МГУ). Профессор, директор Объединенного института математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 500 научных работ и 10 монографий. Награжден почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации» (2020) и медалью «За вклад в реализацию государственной политики в области образования и научно-технологического развития» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (2023).



Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова  
 E-mail: [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)  
 ORCID: 0000-0002-8777-4302  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 8238

*Толбей Анна Олеговна* — родилась в Ярославле (1981). Окончила Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова (2003). Кандидат физико-математических наук (2008, ЯрГУ). Работает на кафедре компьютерных сетей Ярославского государственного университета в должности доцента (факультет информатики и вычислительной техники).



Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова  
 E-mail: [a.tolbey@uniyar.ac.ru](mailto:a.tolbey@uniyar.ac.ru)  
 ORCID: 0000-0001-5668-3929  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 982562



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.987, 517.938.5

DOI: 10.18500/0869-6632-003134  
EDN: NDWRDI

## О предельных множествах простейших косых произведений на многомерных клетках

Л. С. Ефремова<sup>1,2</sup>✉, М. А. Шалагин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Россия

E-mail: ✉lefunn@gmail.com, shalaginmatvey@gmail.com

Поступила в редакцию 18.06.2024, принята к публикации 23.09.2024,  
опубликована онлайн 8.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Цель работы состоит в описании двух важнейших типов предельных множеств простейших косых произведений отображений интервала, фазовым пространством каждого из которых является компактная  $n$ -мерная клетка ( $n \geq 2$ ): во-первых, неблуждающего множества и, во-вторых,  $\omega$ -предельных множеств траекторий. **Методы.** Предложен метод исследования неблуждающего множества (новый даже для двумерного случая), основанный на использовании понятия  $C^0$ - $\Omega$ -взрыва в непрерывных отображениях отрезка, и введенного в работе понятия  $C^0$ - $\Omega$ -взрыва в семействе непрерывных отображений в слоях. Для описания  $\omega$ -предельных множеств использована техника специальных рядов, построенных по траектории и содержащих информацию о ее асимптотическом поведении. **Результаты.** Дано полное описание неблуждающего множества непрерывного простейшего косого произведения отображений интервала, то есть непрерывного косого произведения на компактной  $n$ -мерной клетке, множество (наименьших) периодов периодических точек которого ограничено. Результаты, полученные при описании неблуждающего множества, использованы при изучении  $\omega$ -предельных множеств. В работе дано описание топологической структуры  $\omega$ -предельных множеств рассматриваемых отображений. Найдены достаточные условия, при выполнении которых  $\omega$ -предельным множеством траектории является периодическая орбита, а также необходимые условия существования одномерных  $\omega$ -предельных множеств. **Заключение.** Дальнейшее развитие техники  $C^0$ - $\Omega$ -взрыва в семействе отображений в слоях позволит описать структуру неблуждающего множества косых произведений одномерных отображений, в частности, с замкнутым множеством периодических точек, заданных на простейших многообразиях произвольной конечной размерности. Дальнейшее развитие теории специальных, построенных в работе расходящихся рядов позволит перейти к описанию  $\omega$ -предельных множеств произвольной размерности  $d$ , где  $2 \leq d \leq n - 1$ ,  $n \geq 3$ , в простейших косых произведениях.

**Ключевые слова:** косое произведение, неблуждающее множество,  $C^0$ - $\Omega$ -взрыв,  $\omega$ -предельное множество, неподвижная точка, периодическая точка.

**Благодарности.** Исследование поддержано Российским научным фондом, грант № 24-21-00242, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/>.

**Для цитирования:** Ефремова Л. С., Шалагин М. А. О предельных множествах простейших косых произведений на многомерных клетках // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 796–815. DOI: 10.18500/0869-6632-003134. EDN: NDWRDI

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells

L. S. Efremova<sup>1,2</sup>✉, M. A. Shalagin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia

E-mail: ✉lefunn@gmail.com, shalaginmatvey@gmail.com

Received 18.06.2024, accepted 23.09.2024, available online 8.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The purpose of this work is to describe two important types of limit sets of the most simple skew products of interval maps, the phase space of each of which is a compact  $n$ -dimensional cell ( $n \geq 2$ ): firstly, a non-wandering set and, secondly,  $\omega$ -limit sets of trajectories. **Methods.** A method for investigating of a nonwandering set (new even for the two-dimensional case) is proposed, based on the use of the concept of  $C^0$ - $\Omega$ -blow up in continuous closed interval maps, and the concept of  $C^0$ - $\Omega$ -blow up introduced in the work in the family of continuous fibers maps. To describe the  $\omega$ -limit sets, the technique of special series constructed for the trajectory and containing an information about its asymptotic behavior is used. **Results.** A complete description is given of the nonwandering set of the continuous simplest skew product of the interval maps, that is, a continuous skew product on a compact  $n$ -dimensional cell, the set of (least) periods of periodic points of which is bounded. The results obtained in the description of a nonwandering set are used in the study of  $\omega$ -limit sets. The paper describes a topological structure of  $\omega$ -limit sets of the maps under consideration. Sufficient conditions have been found under which the  $\omega$ -limit set of the trajectory is a periodic orbit, as well as the necessary conditions for the existence of one-dimensional  $\omega$ -limit sets. **Conclusion.** Further development of the  $C^0$ - $\Omega$ -blow up technique in the family of maps in fibers will allow us to describe the structure of a nonwandering set of skew products of one-dimensional maps, in particular, with a closed set of periodic points defined on the simplest manifolds of arbitrary finite dimension. Further development of the theory of special divergent series constructed in the work will allow us to proceed to the description of  $\omega$ -limit sets of arbitrary dimension  $d$ , where  $2 \leq d \leq n - 1$ ,  $n \geq 3$ , in the simplest skew products.

**Keywords:** skew product, nonwandering set,  $C^0$ - $\Omega$ -blow up,  $\omega$ -limit set, fixed point, periodic point.

**Acknowledgements.** Research was carried out under support of the Russian Science Foundation (project № 24-21-00242), <https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/>.

**For citation:** Efremova LS, Shalagin MA. On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):796–815. DOI: 10.18500/0869-6632-003134

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

В статье дано описание двух наиболее важных типов предельных множеств некоторых непрерывных косых произведений отображений интервала, фазовое пространство каждого из которых представляет собой компактную  $n$ -мерную клетку ( $n > 2$ ): во-первых, неблуждающего множества и, во-вторых,  $\omega$ -предельных множеств траекторий. Рассматриваемые здесь косые произведения (называемые в дальнейшем простейшими) образуют собственное подмножество семейства косых произведений с замкнутым множеством периодических точек. В случае  $n = 2$  неблуждающее множество непрерывного косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе (и, в частности, с замкнутым множеством периодических точек) детально изучалось в [1] (см. также [2]), а описание  $\omega$ -предельных множеств с исследованием вопросов дифференцируемости простейших отображений приведено в [3]. Обратим внимание и на то, что исчерпывающе полное описание свойств  $\omega$ -предельных множеств непрерывных отображений отрезка в себя имеется в [4–6].

Рассмотрим косое произведение отображений интервала

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \quad (1)$$

с фазовым пространством  $I^n = \prod_{i=1}^n I_j$ , где  $I_j$  – невырожденный отрезок вещественной прямой для каждого  $1 \leq j \leq n$ .

Обозначим через  $SP^0(I^n)(SP^1(I^n))$  пространство всех непрерывных (всех  $C^1$ -гладких) косых произведений (1), наделенное  $C^0$ -нормой ( $C^1$ -нормой), индуцированной стандартной  $C^0$ -нормой ( $C^1$ -нормой) пространства  $C^0(I^n)$  ( $C^1(I^n)$ ) всех непрерывных (всех  $C^1$ -гладких) отображений  $n$ -мерной клетки  $I^n$  в себя.

Будем использовать обозначения

$$f_2(x_1, x_2) = f_{2, x_1}(x_2), \quad \widehat{f}_2 = (f_1, f_{2, x_1}),$$

а при всех  $3 \leq j \leq n$  положим

$$\widehat{x}_{j-1} = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}), \quad f_j(\widehat{x}_{j-1}, x_j) = f_{j, \widehat{x}_{j-1}}(x_j).$$

$$\widehat{f}_j = (f_1, \dots, f_{j, \widehat{x}_{j-1}}), \quad \text{где } \widehat{f}_n \equiv F.$$

Отметим, что отображение  $\widehat{f}_j : I^j \rightarrow I^j$  при любом  $2 \leq j \leq n-1$  также представляет собой косое произведение отображений интервала, фазовым пространством которого является  $j$ -мерная клетка.

Следуя [7], условимся считать, что отображение

$$\widehat{f}_{n-1} : I^{n-1} \rightarrow I^{n-1}, \quad \text{где } \widehat{f}_{n-1} = (f_1, \dots, f_{n-1, \widehat{x}_{n-2}}),$$

есть факторотображение (фактор) косого произведения (1), а отображение

$$f_{n, \widehat{x}_{n-1}} : I_n \rightarrow I_n$$

для любого  $\widehat{x}_{n-1} \in I^{n-1}$  есть отображение в слое над  $\widehat{x}_{n-1}$ .

В силу (1) для любого натурального числа  $k$  и произвольной точки  $(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$  справедливо равенство

$$F^k(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (f_1^k(x_1), f_{2, x_1, k}(x_2), \dots, f_{n, \widehat{x}_{n-1}, k}(x_n)), \quad (2)$$

где  $f_{2, x_1, k}(x_2) = f_{2, f_1^{k-1}(x_1)} \circ \dots \circ f_{2, x_1}(x_2)$ , а для любых  $3 \leq j \leq n$

$$f_{j, \widehat{x}_{j-1}, k}(x_j) = f_{j, \widehat{f}_{j-1}^{k-1}(\widehat{x}_{j-1})} \circ \dots \circ f_{j, \widehat{x}_{j-1}}(x_j). \quad (3)$$

Приведем основные определения, используемые в работе.

**Определение 1.** Простейшим косым произведением, заданным на  $n$ -мерной клетке,  $n \geq 2$ , будем называть непрерывное косое произведение с ограниченным множеством (наименьших) периодов его периодических точек.

Обратим внимание на корректность определения 1: любое непрерывное косое произведение отображений интервала имеет хотя бы неподвижную точку (детальную информацию о сосуществовании периодов периодических точек такого рода отображений см. далее).

**Определение 2.** Точка  $x(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$  называется неблуждающей точкой отображения  $F$ , если для любой окрестности  $U(x)$  точки  $x$  в  $I^n$  существует натуральное число  $k$  такое, что

$$U(x) \cap F^k(U(x)) \neq \emptyset \quad [8, \text{Ch. 0, } \S 0.2].$$

Множество всех неблуждающих точек отображения  $F$  называется *неблуждающим* и обозначается  $\Omega(F)$ .

**Определение 3.** Точка  $x'(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$  называется  $\omega$ -предельной точкой траектории точки  $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$  относительно отображения  $F$ , если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел  $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$  такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} F^{k_m}(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\hat{x}'_{n-1}, x'_n) \quad [8, \text{Ch. 0, } \S 0.2].$$

Множество всех  $\omega$ -предельных точек траектории точки  $x$  относительно  $F$  называется  $\omega$ -предельным и обозначается  $\omega_F(x)$ .

Компактность  $I^n$  влечет за собой выполнение неравенств

$$\Omega(F) \neq \emptyset; \quad \omega_F(x) \neq \emptyset \quad \text{для любого } x \in I^n.$$

Пусть  $pr_{n-1} : I^n \rightarrow I^{n-1}$  есть естественная проекция  $n$ -мерной клетки  $I^n$  на  $(n-1)$ -мерную клетку  $I^{n-1}$ .

Рассматриваемые в работе основные предельные множества непрерывного косога произведения отображений интервала обладают свойством проекции в следующем естественном смысле.

**Лемма 1.** Пусть  $F \in SP^0(I^n)$  ( $n \geq 2$ ). Тогда справедливы следующие равенства:

$$\Omega(\hat{f}_{n-1}) = pr_{n-1}(\Omega(F)) \quad [7];$$

$$\omega_{\hat{f}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}) = pr_{n-1}(\omega_F(x)) \quad \text{для любого } x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n.$$

Второе равенство в формулировке леммы 1 для косога произведения на компактном прямоугольнике в плоскости рассмотрено в [9].

Убедимся в справедливости этого равенства для любого  $n \geq 2$ . Действительно, пусть  $x'(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) \in \omega_F(x)$ , где  $x = (\hat{x}_{n-1}, x_n)$ . Тогда в силу определения 3 и формул (2)–(3) для некоторой строго возрастающей последовательности натуральных чисел  $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$  выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{f}_{n-1}^{k_m}(\hat{x}_{n-1}) &= \hat{x}'_{n-1}, \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} f_{n, \hat{x}_{n-1}, k_m}(x_n) &= x'_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое из равенств (4) означает, что справедливо включение

$$pr_{n-1}(\omega_F(x)) \subseteq \omega_{\hat{f}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}).$$

Покажем, что верно противоположное включение. В самом деле, пусть  $\hat{x}'_{n-1} \in \omega_{\hat{f}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1})$ , где  $\hat{x}_{n-1}$  — произвольная точка из  $I^{n-1}$ . Тогда найдется последовательность натуральных чисел  $k_1 < k_2 < \dots < k_m < \dots$ , для которой удовлетворяется первое из равенств (4). Возьмем произвольно точку  $x_n \in I_n$  и, используя компактность отрезка  $I_n$ , из последовательности точек  $\{f_{n, \hat{x}_{n-1}, k_m}(x_n)\}_{m \geq 1}$  выделим сходящуюся к некоторой точке  $x'_n \in I_n$  подпоследовательность  $\{f_{n, \hat{x}_{n-1}, k_{m_j}}(x_n)\}_{j \geq 1}$ , где  $k_{m_j} < k_{m_{j+1}}$  при любом  $j \geq 1$ . Таким образом, справедливы равенство

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} F^{k_{m_j}}(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\hat{x}'_{n-1}, x'_n)$$

и включение

$$\omega_{\hat{f}_{n-1}}(\hat{x}_{n-1}) \subseteq pr_{n-1}(\omega_F(x)), \quad \text{где } x = (\hat{x}_{n-1}, x_n).$$

Полученное включение вместе с указанным выше противоположным включением доказывает второе равенство в формулировке леммы 1 при любом  $n \geq 2$ .

В дальнейшем нам потребуется следующее классическое свойство  $\omega$ -предельных множеств.

**Характеристическое свойство  $\omega$ -предельных множеств [4, 5].** Пусть  $G : X \rightarrow X$  — непрерывное отображение локально компактного пространства  $X$  в себя, а  $\omega_G(x)$  — произвольное  $\omega$ -предельное множество. Если  $V$  — подмножество  $\omega_G(x)$ , открытое в  $\omega_G(x)$  и не совпадающее с  $\omega_G(x)$ , то замыкание множества  $G(V)$  не содержится в  $V$ .

Важную роль в рассмотрении данной работы играет информация о периодах периодических точек непрерывного косоуго произведения отображений интервала, заданного на  $n$ -мерной клетке ( $n \geq 2$ ).

Сформулируем обобщенную теорему А. Н. Шарковского, доказанную в [10] для косых произведений отображений интервала на компактных клетках произвольной размерности  $n \geq 2$ .

**Обобщенная теорема А. Н. Шарковского.** Пусть отображение  $F \in SP^0(I^n)$  имеет периодическую орбиту периода  $m > 1$ . Тогда  $F$  имеет также и периодическую орбиту каждого периода  $l$ , предшествующего  $m$  ( $l \prec m$ ) в порядке А. Н. Шарковского:

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec \dots \prec 2^2 \cdot 9 \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \prec \dots \\ \prec 2 \cdot 9 \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \dots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3.$$

Обозначим  $\tau(F)$  множество (наименьших) периодов периодических точек отображения  $F \in SP^0(I^n)$ .

Непосредственным следствием обобщенной теоремы А. Н. Шарковского является следующее утверждение.

**Предложение 1.** Множество  $\tau(F)$  простейшего косоуго произведения  $F \in SP^0(I^n)$ ,  $n \geq 2$ , удовлетворяет равенству

$$\tau(F) = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^v\}$$

при некотором  $v$ , где  $0 \leq v < +\infty$ .

В дальнейшем будем использовать обозначение  $M = 2^v$ .

**Предложение 2 ([7]).** Пусть  $F \in SP^0(I^n)$  ( $n \geq 2$ ). Тогда

$$Per(\hat{f}_{n-1}) = pr_{n-1}(Per(F)),$$

и для каждой точки  $\hat{x}_{n-1} \in Per(\hat{f}_{n-1})$ , где  $m(\hat{x}_{n-1})$  — ее (наименьший) период, выполнено

$$Per(f_{n, \hat{x}_{n-1}, m(\hat{x}_{n-1})}) = (Per(F))(\hat{x}_{n-1}).$$

Здесь  $Per(\cdot)$  — множество периодических точек отображения;  $(\cdot)(\hat{x}_{n-1})$  — срез множества слоем над точкой  $\hat{x}_{n-1} \in I^{n-1}$ , то есть

$$(\cdot)(\hat{x}_{n-1}) = \{x_n : (\hat{x}_{n-1}, x_n) \in (\cdot)\}.$$

Более того, для (наименьшего) периода  $m(x)$  любой точки  $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in Per(F)$  справедливо равенство

$$m(x) = m(\hat{x}_{n-1}) \cdot m(x_n),$$

где  $m(x_n)$  — наименьший период точки  $x_n \in Per(f_{n, \hat{x}_{n-1}, m(\hat{x}_{n-1})})$ .

Основные результаты настоящей статьи представлены в разделах 1 и 2.

Так, в разделе 1 приведено описание неблуждающего множества простейших отображений из пространства  $SP^0(I^n)$ ,  $n \geq 2$ .

В разделе 2 рассмотрены вопросы структуры  $\omega$ -предельных множеств простейших косых произведений отображений интервала на многомерных клетках.

## 1. Описание неблуждающего множества простейших косых произведений отображений интервала

Структура неблуждающего множества непрерывных косых произведений с замкнутым множеством периодических точек факторотображения, заданных на компактном прямоугольнике плоскости, изучалась в [1] (см. также [2]). В статье [7] получены некоторые частные результаты по описанию структуры неблуждающего множества простейших косых произведений непрерывных одномерных отображений на многомерных клетках, цилиндрах и торах (если множество периодических точек непусто в случае отображений цилиндров и торов).

В этой части статьи мы приведем завершённые результаты изучения структуры неблуждающего множества простейших отображений из пространства  $SP^0(I^n)$ ,  $n \geq 2$ . Отметим, что предложенный здесь способ доказательства теоремы о неблуждающем множестве является новым и для  $n = 2$ .

По-видимому, первый пример непрерывного косоугольного произведения (не являющегося простейшим) в компактном прямоугольнике плоскости, отображения в слоях над периодическими точками факторотображения которого имеют слабо неблуждающие, но блуждающие точки каждого такого отображения в слое, приведен в статье [11]. В процессе доказательства основной теоремы этой части работы мы исключим существование такого рода точек у отображений в слоях над периодическими точками факторотображения простейшего косоугольного произведения из  $SP^0(I^n)$ . Для этого нам потребуются определения слабо неблуждающих точек и  $\Omega$ -взрыва в непрерывных отображениях отрезка, а также свойства непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

Обозначим  $C^0(J)$  пространство всех непрерывных отображений отрезка  $J$  в себя со стандартной  $C^0$ -нормой равномерной сходимости. База топологии в  $C^0(J)$  задается системой  $\varepsilon$ -шаров  $B_\varepsilon^0(f)$  при всех  $f \in C^0(J)$  и всех  $\varepsilon > 0$ .

Начнем с определения слабо неблуждающей точки непрерывного отображения отрезка (см., например, [12, гл. 1, § 3], [13, гл. 1, § 2]).

**Определение 4.** Точка  $x_* \in J$  называется слабо неблуждающей для отображения  $f \in C^0(J)$ , если для любой окрестности  $U(x_*)$  точки  $x_*$  в  $J$  и любой  $\varepsilon$ -окрестности  $B_\varepsilon^0(f)$  отображения  $f \in C^0(J)$  найдутся отображение  $\varphi \in B_\varepsilon^0(f)$  и натуральное число  $k$  такие, что

$$U(x_*) \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi^k(U(x_*)) \neq \emptyset.$$

Множество слабо неблуждающих точек  $f \in C^0(J)$  обозначим  $\Omega_w(f)$ .

Понятие слабой неблуждаемости точек фазового пространства динамической системы тесно связано с явлением  $C^0$ - $\Omega$ -взрыва.

**Определение 5.** Говорим, что отображение  $f \in C^0(J)$  допускает  $C^0$ - $\Omega$ -взрыв, если существует  $\delta > 0$  такое, что в любой окрестности  $B_\varepsilon^0(f)$  отображения  $f$  в пространстве  $C^0(J)$  найдется отображение  $\varphi$ , для которого

$$\Omega(\varphi) \not\subseteq U_\delta(\Omega(f)).$$

Здесь  $U_\delta(\Omega(f))$  есть  $\delta$ -окрестность в  $J$  неблуждающего множества  $\Omega(f)$  отображения  $f$ .

Важно отметить, что явление  $\Omega$ -взрыва в диффеоморфизмах было обнаружено в первое десятилетие создания гиперболической теории в связи с теоремой об  $\Omega$ -устойчивости диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме  $A$  [14–16]. Существенный вклад в изучение гомоклинического  $\Omega$ -взрыва (в гладких топологиях) внесли Л. П. Шильников и его ученики [17, 18]. Гомоклинический  $\Omega$ -взрыв в  $C^2$ -гладких эндоморфизмах окружности изучался в [19]. Новый сценарий

$C^0$ - $\Omega$ -взрыва в  $C^1$ -гладких простейших косых произведениях отображений интервала, заданных на компактном прямоугольнике плоскости, описан в [20] (см. также [2]).

Следующее утверждение позволяет применять слабо неблуждающие точки, в частности, непрерывных отображений отрезка в себя к описанию  $C^0$ - $\Omega$ -взрыва (см., например, [12, гл. 1, § 3]).

**Предложение 3.** *Отображение  $f \in C^0(J)$  допускает  $C^0$ - $\Omega$ -взрыв в том и только том случае, если*

$$\Omega(f) \neq \Omega_w(f).$$

Сформулируем необходимые результаты о непрерывных отображениях отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

**Предложение 4.** *Отображение  $f \in C^0(J)$  с замкнутым множеством периодических точек обладает следующими свойствами:*

(4.1) *множество (наименьших) периодов периодических точек  $f$  удовлетворяет равенству  $\tau(f) = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^\nu\}$ , где  $0 \leq \nu \leq +\infty$  [21];*

(4.2) *для каждой точки  $x^0 \in \text{Per}(f)$  найдется окрестность  $U(x^0)$  такая, что*

$$U(x^0) \cap f^k(U(x^0)) \neq \emptyset$$

*тогда и только тогда, когда  $k$  кратно (наименьшему) периоду  $m(x^0)$  точки  $x^0$  [22].*

**Предложение 5.** *Для отображения  $f \in C^0(J)$  следующие утверждения эквивалентны:*

(5.1) *множество  $\text{Per}(f)$  замкнуто;*

(5.2) *справедливы равенства*

$$\Omega(f) = \Omega_w(f) = \text{Per}(f) \quad [21, 23];$$

(5.3)  *$\omega$ -предельное множество  $\omega_f(x)$  траектории любой точки  $x \in J$  есть периодическая орбита [21, 24].*

**Предложение 6.** *Для  $C^1$ -гладкого отображения  $f : J \rightarrow J$  следующие утверждения эквивалентны:*

(6.1) *множество  $\text{Per}(f)$  замкнуто;*

(6.2) *множество  $\tau(f)$  ограничено, и  $\tau(f) = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^\nu\}$  при некотором  $\nu, 0 \leq \nu < +\infty$  [25].*

Напомним, что косому произведению  $F \in SP^0(I^n)$  и произвольной его  $k$ -той итерации ( $k \geq 1$ ) соответствует непрерывное функциональное отображение  $\rho_k : I^{n-1} \rightarrow C^0(I_n)$ , называемое  $C^0$ -представлением, такое, что

$$\rho_k(\hat{x}_{n-1}) = f_{n, \hat{x}_{n-1}, k}; \quad \text{при } k = 1 \text{ полагаем } f_{n, \hat{x}_{n-1}, k} = f_{n, \hat{x}_{n-1}}$$

для всех  $\hat{x}_{n-1} \in I^{n-1}$  [8, гл. 0, § 0.3].

При доказательстве теоремы о неблуждающем множестве простейшего отображения  $F \in SP^0(I^n)$  будет использовано и определение  $\Omega$ -взрыва в индивидуальном отображении в слое в терминах свойств вспомогательных многозначных функций, связанных с косым произведением. Определение такого рода функций для косых произведений одномерных отображений с фазовым пространством произвольной размерности не меньшей 3 имеется в [26, 27]. Начнем

с удобного представления всевозможных итераций косо го произведения в виде композиции более простых отображений, одно из которых  $F_k : I^n \rightarrow I^n$  ( $k \geq 1$ ) удовлетворяет равенству

$$F_k(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (id_{I^{n-1}}(\hat{x}_{n-1}), f_{n, \hat{x}_{n-1}, k}(x_n)), \quad (5)$$

а другое  $F_{k,1} : I^n \rightarrow I^n$  — равенству

$$F_{k,1}(\hat{x}_{n-1}, x_n) = (\hat{f}_{n-1}^k(\hat{x}_{n-1}), id_{I_n}(x_n)), \quad (6)$$

где  $id(\cdot)$  — тождественное отображение множества. С использованием отображений, заданных формулами (5)–(6), получаем

$$F^k = F_{k,1} \circ F_k. \quad (7)$$

**Определение 6.** Под вспомогательными функциями для неблуждающего множества отображения  $F \in SP^0(I^n)$ , удовлетворяющего условию  $\hat{f}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1})) = \Omega(\hat{f}_{n-1})$ , мы понимаем многозначные функции  $\Omega_k^F : \Omega(\hat{f}_{n-1}) \rightarrow 2^{I^n}$  такие, что

$$\Omega_k^F(\hat{x}_{n-1}) = \Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}, k}) \text{ для любого } \hat{x}_{n-1} \in \Omega(\hat{f}_{n-1}).$$

Здесь  $2^{I^n}$  означает, как обычно, топологическое пространство всех замкнутых подмножеств отрезка  $I_n$ , наделенное экспоненциальной топологией [28, Ch. 1, § 17, I].

Будем рассматривать расширенные вспомогательные функции  $\Omega_{k,ex}^F$ , которые зададим в какой-либо (определяемой постановкой задачи) окрестности  $\hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$  множества  $\Omega(\hat{f}_{n-1})$  в  $I^{n-1}$ , полагая

$$\Omega_{k,ex}^F(\hat{x}_{n-1}) = \Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}, k}) \text{ для каждого } \hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1})).$$

Обратим внимание на то, что в силу определения 6 вспомогательные функции (как и расширенные вспомогательные функции) определены для отображений  $F_k$  с тождественным фактор-отображением.

Точка  $\hat{x}_{n-1}^* \in \hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$  называется *точкой полунепрерывности сверху* расширенной вспомогательной функции  $\Omega_{k,ex}^F$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности  $U_n^\varepsilon(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k}))$  множества  $\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k})$  в  $I_n$  найдется  $\delta$ -окрестность  $\hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$  точки  $\hat{x}_{n-1}^*$  в  $I^{n-1}$  такая, что для каждого  $\hat{x}_{n-1} \in \hat{U}_{n-1}^\delta(\hat{x}_{n-1}^*)$  выполнено

$$\Omega_{k,ex}^F(\hat{x}_{n-1}) \subset U_n^\varepsilon(\Omega(f_{n, \hat{x}_{n-1}^*, k})) \quad [28, \text{гл. 1, § 17, I}] \quad (8)$$

**Определение 7.** Пусть  $F \in SP^0(I^n)$ . Говорим, что отображение в слое  $f_{n, \hat{x}_{n-1}^*}$  над  $\hat{f}_{n-1}$ -неподвижной точкой  $\hat{x}_{n-1}^*$  допускает  $C^0$ - $\Omega$ -взрыв в семействе отображений в слоях, если существует последовательность расширенных на множество  $\hat{U}_{n-1}(\Omega(\hat{f}_{n-1}))$  вспомогательных функций  $\{\Omega_{k_m,ex}^F\}_{m \geq 1}$  такая, что  $\hat{x}_{n-1}^*$  не является точкой полунепрерывности сверху каждой функции  $\Omega_{k_m,ex}^F$  ( $m \geq 1$ ).

Сформулируем и докажем основной результат этой части статьи.

**Теорема 1.** Для неблуждающего множества  $\Omega(F)$  простейшего косо го произведения  $F \in SP^0(I^n)$  ( $n \geq 2$ ) справедливо равенство

$$\Omega(F) = Per(F). \quad (9)$$

**Доказательство.**

1. Не уменьшая общности рассуждений, будем предполагать, что  $M = 1$ . В противном случае следует перейти к рассмотрению отображения  $F^M$ , так как в силу предложения 2 и утверждения (4.2) предложения 4

$$\Omega(F) = \Omega(F^M).$$

При сделанном предположении  $Per(F) = Fix(F)$ , где  $Fix(\cdot)$  — множество неподвижных точек отображения. Используя предложение 2, получаем отсюда, что  $Per(\widehat{f}_{n-1}) = Fix(\widehat{f}_{n-1})$  и при любом  $\widehat{x}_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$  выполнено  $Per(f_{n, \widehat{x}_{n-1}}) = Fix(f_{n, \widehat{x}_{n-1}})$ .

2. Для доказательства теоремы 1 будем использовать метод математической индукции по размерности  $n$ . Утверждение теоремы 1 справедливо для  $n = 2$  (см., например, [1]). Предположим, что оно верно для  $n - 1$ ,  $n \geq 3$ , и установим его справедливость для  $n$ .

2.1. Покажем сначала, что

$$\Omega(F_{|_{Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n}}) = Fix(F). \quad (10)$$

Если при любом  $\widehat{x}_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$  (здесь  $Fix(\widehat{f}_{n-1}) = \Omega(\widehat{f}_{n-1})$  в силу предположения индукции) верно равенство  $f_{n, \widehat{x}_{n-1}} = id_{I_n}$  (где  $id_{I_n}$  — тождественное отображение отрезка  $I_n$ ), то в силу леммы 1 утверждение теоремы 1 справедливо. Предположим, что для некоторого  $\widehat{x}_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$  имеет место неравенство

$$f_{n, \widehat{x}_{n-1}} \neq id_{I_n}.$$

Возьмем произвольно точку  $x_n \in I_n \setminus Fix(f_{n, \widehat{x}_{n-1}})$ . Воспользуемся утверждением (5.2) предложения 5. Тогда

$$x_n \notin \Omega_w(f_{n, \widehat{x}_{n-1}}).$$

Используя определение 4, получаем отсюда, что существуют окрестность  $U_n^0(x_n)$  точки  $x_n$  в  $I_n$  и  $\varepsilon_0$ -окрестность  $B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \widehat{x}_{n-1}})$  отображения в слое  $f_{n, \widehat{x}_{n-1}}$  такие, что для любого  $f_{n, \widehat{x}'_{n-1}} \in B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \widehat{x}_{n-1}})$ , где  $\widehat{x}'_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$ , и любого  $k \geq 1$  выполнено

$$U_n^0(x_n) \cap \bigcap_{f_{n, \widehat{x}'_{n-1}}}^k (U_n^0(x_n)) = \emptyset.$$

Воспользуемся непрерывностью  $C^0$ -представления  $\rho_1 : I^{n-1} \rightarrow C^0(I_n)$  и по положительному числу  $\varepsilon_0$  укажем положительное число  $\delta_0$  так, что при любых  $\widehat{x}'_{n-1} \in I^{n-1}$  и, в частности, при  $\widehat{x}'_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$  таких, что  $\widehat{x}'_{n-1} \in \widehat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\widehat{x}_{n-1})$ , где  $\widehat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\widehat{x}_{n-1})$  есть  $\delta_0$ -окрестность точки  $\widehat{x}_{n-1}$  в  $I^{n-1}$ , справедливо

$$f_{n, \widehat{x}'_{n-1}} \in B_{\varepsilon_0}^0(f_{n, \widehat{x}_{n-1}}).$$

Пусть

$$U((\widehat{x}_{n-1}, x_n)) = (\widehat{U}_{n-1}^{\delta_0}(\widehat{x}_{n-1}) \times U_n(x_n)) \cap (Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n)$$

есть относительная окрестность точки  $(\widehat{x}_{n-1}, x_n)$  в  $Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n$ . Тогда в силу предыдущего при любых  $k \geq 1$  выполнено

$$U((\widehat{x}_{n-1}, x_n)) \cap \bigcap_{|_{Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n}}^k (U((\widehat{x}_{n-1}, x_n))) = \emptyset.$$

Таким образом, любая точка

$$(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times (I_n \setminus Fix(f_{n, \widehat{x}_{n-1}}))$$

является блуждающей для отображения  $F|_{Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n}$ . Равенство (10) доказано. Отсюда следует также, что если  $I^{n-1} = Fix(\widehat{f}_{n-1})$ , то в рассматриваемом случае доказательство теоремы 1 закончено.

2.2. Пусть

$$I^{n-1} \neq Fix(\widehat{f}_{n-1}).$$

Если для любой точки  $\widehat{x}_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$  выполнено  $Fix(f_n, \widehat{x}_{n-1}) = I_n$ , (то есть  $f_n, \widehat{x}_{n-1} = id_{I_n}$ ), то теорема 1 верна (см. п. 2.1 доказательства).

Предположим, что для некоторой точки  $\widehat{x}_{n-1}^* \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$  справедливо

$$Fix(f_n, \widehat{x}_{n-1}^*) \neq I_n.$$

Если  $\widehat{x}_{n-1}^*$  не является предельной для множества  $I^{n-1} \setminus Fix(\widehat{f}_{n-1})$ , то, применяя рассуждения, приведенные в п. 2.1 доказательства, убеждаемся в том, что все точки множества  $\{\widehat{x}_{n-1}^*\} \times (I_n \setminus Fix(f_n, \widehat{x}_{n-1}^*))$  являются блуждающими для  $F$ .

Рассмотрим случай, когда  $\widehat{x}_{n-1}^* \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$  — предельная точка множества  $I^{n-1} \setminus Fix(\widehat{f}_{n-1})$ . Возьмем произвольно и зафиксируем окрестность  $\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}))$  множества  $Fix(\widehat{f}_{n-1})$  в  $I^{n-1}$ . В силу предложения 5 (см. утверждение (5.2)) отображение в слое  $f_n, \widehat{x}_{n-1}^*$  не допускает  $C^0$ - $\Omega$ -взрыв, в частности, в семействе отображений в слоях над точками множества  $\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}))$ .

Используем отрицание определения 7. Тогда для любой расширенной на множество  $\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}))$  вспомогательной функции  $\Omega_{k, ex}^F$  ( $k \geq 1$ ) точка  $\widehat{x}_{n-1}^*$  является точкой полунепрерывности сверху. Следовательно, для любой  $\varepsilon$ -окрестности  $U_n^\varepsilon(\Omega(f_n, \widehat{x}_{n-1}^*, k))$  множества  $\Omega(f_n, \widehat{x}_{n-1}^*, k)$  в  $I_n$  найдется  $\delta_k$ -окрестность  $\widehat{U}_{n-1}^{\delta_k}(\widehat{x}_{n-1}^*)$  точки  $\widehat{x}_{n-1}^*$  в  $\widehat{U}_{n-1}(\Omega(f_{n-1}))$  такая, что для каждого  $\widehat{x}_{n-1} \in \widehat{U}_{n-1}^{\delta_k}(\widehat{x}_{n-1}^*)$  выполнено включение (8).

Положим

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{k \geq 1} \delta_k(\varepsilon).$$

Покажем, что при любом  $\varepsilon > 0$  справедливо  $\delta(\varepsilon) > 0$ .

Предположим противное. Тогда при некотором  $\varepsilon' > 0$  верно равенство  $\delta(\varepsilon') = 0$ . Будем выбирать максимальные положительные числа  $\delta_k(\varepsilon')$ , для которых удовлетворяется определение полунепрерывности сверху функций  $\Omega_{k, ex}^F$  в точке  $\widehat{x}_{n-1}^*$ . Последнее означает, что для каждого  $\delta_k(\varepsilon')$  найдется  $\delta_{k'}(\varepsilon') < \delta_k(\varepsilon')$  при  $k' > k$  такое, что при некотором  $\widehat{x}_{n-1}(k') \in \widehat{U}_{n-1}^{\delta_k}(\widehat{x}_{n-1}^*) \setminus \widehat{U}_{n-1}^{\delta_{k'}}(\widehat{x}_{n-1}^*)$  верно соотношение

$$\Omega_{k', ex}^F(\widehat{x}_{n-1}(k')) \not\subset U_n^{\varepsilon'}(\Omega(f_n, \widehat{x}_{n-1}, k')). \quad (11)$$

Соотношение (11) вместе с определением 7 и равенством  $\Omega(f_n, \widehat{x}_{n-1}^*) = \Omega(f_n, \widehat{x}_{n-1}^*, k)$  ( $k \geq 1$ ) означает, что отображение  $f_n, \widehat{x}_{n-1}^*$  допускает  $C^0$ - $\Omega$ -взрыв. Последнее противоречит предложению 3 и утверждению (5.2) предложения 5. Таким образом, показано, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует универсальное (не зависящее от  $k$ )  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , для которого удовлетворяется определение полунепрерывности сверху в точке  $\widehat{x}_{n-1}^*$  функций  $\Omega_{k, ex}^F$  при всех  $k \geq 1$ .

Возьмем произвольно точку  $x_n^*$  во множестве  $I_n \setminus Fix(f_n, \widehat{x}_{n-1}^*)$ . Положим

$$\varepsilon_* = \frac{1}{3} d_n(x_n^*, Fix(f_n, \widehat{x}_{n-1}^*)),$$

где  $d_n((\cdot)^*, (\cdot))$  — расстояние от точки до множества на  $I^n$ . Используя свойство полунепрерывности сверху расширенных на  $\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}))$  вспомогательных функций  $\Omega_{k, ex}^F$ , по числу

$\varepsilon_* > 0$  укажем положительное, не зависящее от  $k$  число  $\delta = \delta(\varepsilon_*)$  так, что при любом  $k \geq 1$  и  $\varepsilon = \varepsilon_*$  удовлетворяется включение (8). Воспользуемся формулами (5)–(7). Так как отображение (6) не меняет отображения в слоях  $u$  (5) (и, следовательно,  $u F^k$  при всех натуральных  $k$ ), то в силу выбора  $\varepsilon_*$  получаем отсюда, что

$$\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times U_n^{\varepsilon_*}(x_n^*)) \cap F^k(\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times U_n^{\varepsilon_*}(x_n^*))) = \emptyset$$

при любом  $k \geq 1$ .

Последнее завершает доказательство равенства (9) для отображения  $F \in SP^0(I^n)$  при любых  $n \geq 2$ . Теорема 1 доказана.  $\square$

Непосредственным следствием теоремы 1, предложения 2 и предложения 6 является следующее утверждение.

**Теорема 2.** Для отображения  $F \in SP^1(I^n)$  ( $n \geq 2$ ) следующие утверждения эквивалентны:

(2.1) множество  $Per(F)$  замкнуто;

(2.2) множество  $\tau(F)$  ограничено, и  $\tau(F) = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^v\}$  при некотором  $v$ ,  $0 \leq v < +\infty$ ;

(2.3)  $\Omega(F) = Per(F)$ .

Изучение  $\omega$ -предельных множеств простейших косых произведений непосредственно связано с результатами раздела 1. Начнем со следующего утверждения, являющегося прямым следствием теоремы 1.

**Предложение 7.** Для простейшего отображения  $F \in SP^0(I^n)$  справедливо равенство

$$\bigcup_{x \in I^n} \omega_F(x) = \Omega(F) = Per(F).$$

Приведем важное для дальнейшего рассмотрения следствие теоремы 1, содержащее начальную информацию о структуре  $\omega$ -предельных множеств простейших косых произведений.

**Предложение 8.** Пусть отображение  $F \in SP^0(I^n)$  является простейшим. Тогда  $\omega$ -предельное множество  $\omega_{FM}(x)$  произвольной точки  $x(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$  связно.

Действительно, в противном случае существуют непересекающиеся замкнутые собственные подмножества  $V_1$  и  $V_2$   $\omega$ -предельного множества  $\omega_{FM}(x)$  такие, что

$$\omega_{FM}(x) = V_1 \cup V_2.$$

Так как  $I^n$  — отделимое пространство, то каждое из множеств  $V_1$  и  $V_2$  открыто в  $\omega_{FM}(x)$ . В силу предложения 7 все точки  $\omega_{FM}(x)$  неподвижны для  $F^M$ . Поэтому

$$F^M(V_k) = \overline{F^M(V_k)} = V_k \quad (k = 1, 2).$$

Последнее противоречит характеристическому свойству  $\omega$ -предельных множеств.

## 2. Описание $\omega$ -предельных множеств простейших отображений из $SP^0(I^n)$

В этой части статьи мы ответим на вопрос о том, какую топологическую структуру имеют  $\omega$ -предельные множества простейших отображений из пространства  $SP^0(I^n)$ ,  $n \geq 3$  (случай  $n = 2$  детально рассмотрен в [3]), и, в частности, получим достаточные условия, при выполнении которых  $\omega$ -предельное множество траектории есть периодическая орбита.

Важная часть данного раздела посвящена рассмотрению специальных рядов, построенных по траекториям, сходимость или, наоборот, расходимость которых выделяет различные типы  $\omega$ -предельных множеств, которые реализуются для траекторий простейших косых произведений. Идея использования рядов в исследовании асимптотического поведения траекторий косых произведений восходит к [29] и связана с поставленной в этой работе задачей нахождения движений, занимающих промежуточное положение между простейшими периодическими и сложными гиперболическими движениями.

Используя предложение 8, докажем следующее утверждение, анонсированное в [7]. Напомним, что через  $M$  обозначен наибольший элемент множества  $\tau(F)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $F \in SP^0(I^n)$ ,  $n \geq 2$  – простейшее косое произведение отображений интервала. Тогда для любой точки  $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$  существуют неподвижная точка  $x_1^0$  отображения  $f_1^M$  и отрезки  $I'_2 \subseteq I_2, \dots, I'_n \subseteq I_n$  (возможно, вырожденные) такие, что  $\omega$ -предельное множество  $\omega_{FM}(x)$  траектории точки  $x$  относительно  $F^M$  имеет вид

$$\omega_{FM}(x) = \{x_1^0\} \times \prod_{j=2}^n I'_j, \quad (12)$$

причем  $\omega_{FM}(x)$  состоит из неподвижных точек  $F^M$ .

#### Доказательство.

1. Утверждение теоремы 3 справедливо, если  $n = 2$  (см. [3]). Предположим, что  $n \geq 3$ , и утверждение теоремы 3 верно для  $n - 1$ . Тогда в силу леммы 1 имеем

$$\omega_{\hat{f}_{n-1}^M}(\hat{x}_{n-1}) = pr_{n-1}(\omega_{FM}(x)) = \{x_1^0\} \times \prod_{j=2}^{n-1} I'_j,$$

где  $x_1^0 \in Fix(f_1^M)$ ,  $I'_2, \dots, I'_{n-1}$  – отрезки (возможно, вырожденные), причем  $I'_j \subseteq I_j$ ,  $2 \leq j \leq n - 1$ .

Обозначим через  $L_n \subseteq I_n$  замкнутое множество предельных точек последовательности

$$\{f_{n, \hat{x}_{n-1}, Mk}(x_n)\}_{k \geq 1}.$$

Из предложения 8 следует связность  $L_n$  в  $I_n$ . Тогда  $L_n$  – отрезок в  $I_n$ , возможно вырожденный. Положим  $L_n = I'_n$ . При сделанном предположении имеем:

$$\omega_{FM}(x) = \{x_1^0\} \times \prod_{j=2}^n I'_j.$$

В силу предложения 7 верно включение  $\omega_{FM} \subset Fix(F^M)$ . Теорема 3 доказана.  $\square$

Вопрос существования  $\omega$ -предельных множеств (у простейших косых произведений), представление которых по формуле (12) содержит невырожденные отрезки, решен только лишь в случаях, когда фазовое пространство имеет размерность  $n = 2$  или  $3$  (см., например, [3, 30, 31]). Более того, в статье [31] построен пример простейшего косого произведения, заданного на трехмерном кубе и имеющего двумерное  $\omega$ -предельное множество.

Покажем, что свойство траектории иметь  $\omega$ -предельное множество, представление которого по формуле (12) содержит невырожденные отрезки, связано с расходимостью некоторых специальных рядов, построенных по исследуемой траектории.

**Теорема 4.** Для простейшего отображения  $F \in SP^0(I^n)$  ( $n \geq 2$ ) следующие утверждения эквивалентны:

(4.1) Существует точка  $x(\hat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$  такая, что представление  $\omega$ -предельного множества ее траектории относительно  $F^M$  по формуле (12) содержит невырожденный отрезок  $I'_{j'}$  ( $2 \leq j' \leq n$ );

(4.2) ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{\hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'}) \quad (13)$$

— расходящийся (знакопеременный), где

$$\varphi_{\hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'}) = \begin{cases} f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M}(x_{j'}), & \text{если } p = 1; \\ f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'}) - f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M(p-1)}(x_{j'}), & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

**Доказательство.**

1. Обозначим через  $S'_q$   $q$ -тую ( $q \geq 1$ ) частичную сумму ряда (13), где

$$S'_q = f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'}). \quad (14)$$

Из (14) следует ограниченность последовательности  $\{S'_q\}_{q \geq 1}$ . Поэтому если ряд (13) расходится, то он знакопеременный.

2. Пусть (4.1) верно. Тогда в силу равенства (14) последовательность  $\{S'_q\}_{q \geq 1}$  расходится вместе с рядом (13).

3. Пусть (4.2) верно. Тогда из (14) следует, что  $\{f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'})\}_{p \geq 1}$  — расходящаяся последовательность, содержащая не менее двух предельных точек. Отсюда в силу теоремы 3 множество предельных точек последовательности  $\{f_{j', \hat{x}_{j'-1}, M_p}(x_{j'})\}_{p \geq 1}$  — невырожденный отрезок. Теорема 4 доказана.  $\square$

Корректность следующего определения вытекает из предложения 2 и теоремы 3.

**Определение 8.** Пусть  $F \in SP^0(I^n)$  — простейшее отображение. Точка  $x^0(\hat{x}_{n-1}^0, x_n^0) \in \text{Fix}(F^M)$  называется исключительной неподвижной точкой отображения  $F^M$ , если существует  $j$ ,  $2 \leq j \leq n$ , такое, что срез  $(\text{Fix}(\hat{f}_j))(\hat{x}_{j-1}^0)$  множества  $\text{Fix}(\hat{f}_j)$  слоем над  $\hat{x}_{j-1}^0$  (по поводу среза множества см. Введение) содержит невырожденный отрезок. Здесь  $\hat{f}_n \equiv F$ , а  $\hat{x}_{n-1}^0 = (\hat{x}_{j-1}^0, \dots, x_{n-1}^0)$  при  $j < n$ .

Множество исключительных неподвижных точек простейшего отображения  $F^M \in SP^0(I^n)$  обозначим  $\text{Fix}_e(F^M)$ .

Как следует из теоремы 3,  $\omega$ -предельное множество траектории (относительно простейшего косоуго произведения) произвольной точки  $n$ -мерной клетки ( $n \geq 2$ ) есть либо периодическая орбита, либо орбита периодической  $j$ -мерной грани ( $1 \leq j \leq n - 1$ ). Поэтому следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 3 и определения 8.

**Предложение 9.** Пусть  $F \in SP^0(I^n)$  — простейшее отображение, а  $\text{Fix}_e(F^M) = \emptyset$ . Тогда  $\omega$ -предельное множество  $F$ -траектории произвольной точки из  $I^n$  есть периодическая орбита.

**Следствие 1.** Пусть все периодические точки отображения  $F \in SP^1(I^n)$  являются гиперболическими. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1.1) множество периодических точек  $F$  замкнуто;

(1.2)  $\omega$ -предельное множество  $F$ -траектории произвольной точки из  $I^n$  есть периодическая орбита.

Далее на первом этапе изучения  $\omega$ -предельных множеств простейших косых произведений на многомерных клетках мы рассмотрим лишь нульмерные и одномерные  $\omega$ -предельные множества.

Следующее утверждение представляет собой приспособленный к рассматриваемому случаю вариант леммы Адамара для функции нескольких переменных (ср., например, с [32, гл. 6, § 2], [33, гл. 8, § 6, п. 5]).

**Лемма 2.** Пусть  $F \in SP^0(I^n)$  – простейшее косое произведение ( $n \geq 2$ ), и существует точка  $x^0(\hat{x}_{n-1}^0, x_n^0) \in Fix_e(F^M)$  такая, что наименьшее из чисел  $2 \leq j \leq n$ , при котором срез  $(Fix(F_j^M))(\hat{x}_{j-1}^0)$  содержит невырожденный отрезок, равно  $n$ . Пусть  $I'_n$  – такой отрезок, а функция  $f_{n, \hat{x}_{n-1}}$  дифференцируема по совокупности переменных  $x_1, \dots, x_{n-1}$  на  $\{\hat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n$ .

Тогда существуют непрерывные на  $\{\hat{x}_{n-1}^0\} \times I'_n$  функции

$$\Psi_{n,1}(\hat{x}_{n-1}, x_n), \dots, \Psi_{n,n-1}(\hat{x}_{n-1}, x_n),$$

определенные на  $n$ -мерной клетке  $\prod_{i=1}^{n-1} I_i \times I'_n$ , такие, что справедливо равенство

$$f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n) = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i}(\hat{x}_{n-1}, x_n)(x_i - x_i^0); \quad (15)$$

более того,

$$\Psi_{n,i}(\hat{x}_{n-1}, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{n, \hat{x}_{n-1}}(x_n).$$

Лемма 2 (см. формулу (15)) позволяет преобразовать ряд (13) и, в частности, получить аналитические необходимые условия существования одномерных  $\omega$ -предельных множеств специального вида у простейших отображений (1) на многомерных клетках.

Обозначим через  $W^s(\hat{x}_{n-1}^0, \hat{f}_{n-1}^M)$  устойчивое многообразие неподвижной точки  $\hat{x}_{n-1}^0$  отображения  $\hat{f}_{n-1}^M$ , где

$$W^s(\hat{x}_{n-1}^0, \hat{f}_{n-1}^M) = \{\hat{x}_{n-1} \in I^{n-1} : \lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{f}_{n-1}^{Mk}(\hat{x}_{n-1}) = \hat{x}_{n-1}^0\}.$$

**Теорема 5.** Пусть отображение  $F \in SP^0(I^n)$  является простейшим, причем для  $\omega$ -предельного множества некоторого  $x'(\hat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$  выполнено

$$\omega_{FM}(x') = \{\hat{x}'_{n-1}\} \times I'_n, \quad (16)$$

где  $I'_n$  – невырожденный отрезок. Пусть функция  $f_{n, \hat{x}'_{n-1}}(x_n)$  дифференцируема по совокупности переменных  $x_1, \dots, x_{n-1}$  на отрезке  $\{\hat{x}'_{n-1}\} \times I'_n$ . Тогда

$$\hat{x}'_{n-1} \in W^s(\hat{x}_{n-1}^0, \hat{f}_{n-1}^M) \setminus \{\hat{f}_{n-1}^{-Mk}(\hat{x}'_{n-1})\}_{k \geq 1}, \quad (17)$$

где  $\hat{f}_{n-1}^{-Mk}(\cdot)$  – полный прообраз порядка  $Mk$  точки относительно  $\hat{f}_{n-1}$ , и существует счётное подмножество  $\mathbb{N}(I'_n)$  множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , где

$$\mathbb{N}(I'_n) = \{p \in \mathbb{N} : f_{n, \hat{x}'_{n-1}, Mp}(x'_n), f_{n, \hat{x}'_{n-1}, M(p+1)}(x'_n) \in I'_n\}, \quad (18)$$

такое, что ряд

$$\sum_{p \in \mathbb{N}(I'_n)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i}(\hat{f}_{n-1}^{Mp}(\hat{x}'_{n-1}), f_{n, \hat{x}'_{n-1}, Mp}(x'_n)) (f_{i, \hat{x}'_{i-1}, Mp}(x'_i) - x_i^0) \right) \quad (19)$$

расходится. Здесь  $f_{1, \hat{x}'_0, Mp}(x'_1) \equiv f_1^{Mp}(x'_1)$ .

**Доказательство.**

1. Заметим, что  $\hat{x}'_{n-1} \notin \{\hat{f}_{n-1}^{-Mk}(\hat{x}_{n-1}^0)\}_{k \geq 1}$ . Действительно, в противном случае в силу предложения 5 (см. утверждение (5.2)) множество  $\omega_{FM}(x')$ , так же, как и  $\omega_{FM}((\hat{x}_{n-1}^0, f_n, \hat{x}_{n-1}^0, M_{k_0}(x'_n)))$ , где  $\hat{x}_{n-1}^0 = \hat{f}_{n-1}^{Mk_0}(\hat{x}'_{n-1})$ , есть  $\hat{f}_{n-1}^M$ -неподвижная точка. Последнее противоречит равенству (16).

2. Ряд

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_{n,i}(\hat{f}_{n-1}^{Mp}(\hat{x}'_{n-1}), f_n, \hat{x}'_{n-1}, M_p(x'_n))(f_{i,\hat{x}'_{i-1},M_p}(x'_i) - x_i^0) \right) \quad (20)$$

получен из (13) при  $j' = n$  с использованием формулы (15). Поэтому в силу теоремы 4 при выполнении равенства (16) этот ряд расходится.

3. Положим  $I'_n = [a'_n, b'_n]$ . Во множестве натуральных чисел  $\mathbb{N}$  выделим два подмножества:

$$\mathbb{N}' = \{p : f_n, \hat{x}'_{n-1}, M_p(x'_n) < a'_n\} \text{ и } \mathbb{N}'' = \{p : f_n, \hat{x}'_{n-1}, M_p(x'_n) > b'_n\}.$$

Тогда имеем

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}(I'_n) \cup \mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''.$$

Поэтому если каждое из множеств  $\mathbb{N}'$  и  $\mathbb{N}''$  конечно, то ряд (19) расходится вместе с рядом (20).

Пусть хотя бы одно из множеств  $\mathbb{N}'$  или  $\mathbb{N}''$  счетно. Тогда в силу теоремы 3 последовательность  $\{f_n, \hat{x}'_{n-1}, M_p(x'_n)\}_{p \in \mathbb{N}'}$  или  $\{f_n, \hat{x}'_{n-1}, M_p(x'_n)\}_{p \in \mathbb{N}''}$  сходится к точке  $a'_n$  или  $b'_n$  соответственно. Поэтому удаление из ряда (20) членов с номерами из множества  $\mathbb{N}' \cup \mathbb{N}''$  также приводит к расходящемуся ряду (19). Теорема 5 доказана<sup>1</sup>.  $\square$

Обозначим через  $SP_s(I^n)$  подмножество множества простейших отображений из  $SP^0(I^n)$  со следующими свойствами:

- (i)  $\hat{f}_{n-1} \in SP^1(I^{n-1})$  при  $n \geq 3$  и  $\hat{f}_{n-1} \in C^1(I_{n-1})$  при  $n = 2$ ;
- (ii)  $\frac{\partial}{\partial x_n} f_n, \hat{x}_{n-1}(x_n) \in C^0(I^n)$ ;
- (iii) функция  $f_n, \hat{x}_{n-1}$  дифференцируема по совокупности переменных  $x_1, \dots, x_{n-1}$  на  $I^n$ .

В силу теоремы 2 отображения с замкнутым множеством периодических точек из пространства  $SP^1(I^n)$  образуют собственное подмножество выделенного выше множества  $SP_s(I^n)$ .

**Следствие 2.** Пусть  $F \in SP_s(I^n)$ ,  $x^0(\hat{x}_{n-1}^0, x_n^0) \in \text{Fix}_e(F^M)$ , и наименьшее из чисел  $2 \leq j \leq n$ , при котором срез  $(\text{Fix}(\hat{f}_j^M))(\hat{x}_{j-1}^0)$  содержит невырожденный отрезок, равно  $n$ .

Если ряд (20) сходится, то  $\omega$ -предельное множество траектории точки  $x'(\hat{x}'_{n-1}, x_n) \in I^n$  относительно  $F$  есть периодическая орбита.

**Следствие 3.** Пусть  $F \in SP_s(I^n)$ ,  $x^0(\hat{x}_{n-1}^0, x_n^0) \in \text{Fix}_e(F^M)$ , и наименьшее из чисел  $2 \leq j \leq n$ , при котором срез  $(\text{Fix}(\hat{f}_j^M))(\hat{x}_{j-1}^0)$  содержит невырожденный отрезок, равно  $n$ .

(3.1) Если ряд

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} |\Psi_{n,i}(\hat{f}_{n-1}^{Mp}(\hat{x}'_{n-1}), f_n, \hat{x}'_{n-1}, M_p(x'_n))|$$

сходится, то сходится и ряд (20).

(3.2) Если частные производные  $\frac{\partial}{\partial x_i} f_n, \hat{x}_{n-1}, M_p(x_n)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , ограничены на  $I^n$ , а ряд

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} |f_{i,\hat{x}'_{i-1},M_p}(x'_i) - x_i^0|$$

сходится, то сходится и ряд (20).

<sup>1</sup>Подробные рассуждения (для косо го произведения отображений интервала с двумерным фазовым пространством) приведены в [3].

**Теорема 6.** Пусть  $F \in SP_s(I^n)$ , все периодические точки факторотображения  $\widehat{f}_{n-1}$  являются либо стоками, либо источниками, а частные производные  $\frac{\partial}{\partial x_i} f_{n, \widehat{x}_{n-1}}(x_n)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , ограничены. Тогда  $\omega$ -предельное множество траектории произвольной точки из  $I^n$  есть периодическая орбита.

**Доказательство.** Предположим противное. Допустим, что существует точка  $x'(\widehat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$  такая, что  $\omega$ -предельное множество ее траектории относительно  $F$  представимо в виде (16). Тогда выполнено (17), и  $\widehat{x}_{n-1}^0$  — сток факторотображения  $\widehat{f}_{n-1}^M$  косоугольного произведения  $F^M$ . Используя свойство (i) в определении множества отображений  $SP_s(I^n)$ , получаем отсюда, что найдутся окрестность  $\widehat{U}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}^0) = \prod_{i=1}^{n-1} U_i(x_i^0)$  точки  $\widehat{x}_{n-1}^0$  и число  $0 < q < 1$  такие, что

$$\left| \frac{d}{dx_1} f_1^M(x_1) \right| \leq q \text{ при } x_1 \in U_1(x_1^0);$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} f_{i, \widehat{x}_{i-1}, M}(x_i) \right| \leq q \text{ при } x_i \in U_i(x_i^0), \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad n \geq 3.$$

В силу (17) существует натуральное число  $p_*$  такое, что при всех  $p \geq p_*$  выполнено

$$f_1^{Mp}(x'_1) \in U_1(x_1^0) \text{ и } f_{i, \widehat{x}_{i-1}, Mp}(x'_i) \in U_i(x_i^0), \text{ где } 2 \leq i \leq n-1, \quad n \geq 3.$$

Поэтому из теоремы Лагранжа для функции одного переменного при всех  $p \geq p_*$  и  $1 \leq i \leq n-1$  следует

$$|f_{i, \widehat{x}_{i-1}, Mp}(x'_i) - x_i^0| \leq q^{p-p_*} l_*,$$

где  $l_*$  — наибольшая из длин отрезков  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ . Последнее влечет за собой выполнение условий следствия 3 и сходимость ряда (20). В силу следствия 2 сделанное предположение неверно, и  $\omega$ -предельное множество траектории любой точки из  $I^n$  есть периодическая орбита. Теорема 6 доказана.  $\square$

### Заключение

В данной статье дано полное описание неблуждающего множества непрерывного косоугольного произведения отображений интервала на  $n$ -мерной клетке ( $n \geq 2$ ) в предположении ограниченности множества (наименьших) периодов периодических точек рассматриваемого отображения.

Введено понятие  $C^0$ - $\Omega$ -взрыва в семействе непрерывных отображений в слоях и предложен оригинальный способ исследования неблуждающего множества, основанный на применении как указанного выше понятия, так и понятия  $C^0$ - $\Omega$ -взрыва в пространстве непрерывных отображений отрезка.

Результаты, полученные при описании неблуждающего множества, использованы при изучении  $\omega$ -предельных множеств рассматриваемых простейших косых произведений на многомерных клетках. Здесь дано описание допустимого топологического типа  $\omega$ -предельных множеств рассматриваемых отображений. Найдены достаточные условия, при выполнении которых  $\omega$ -предельным множеством траектории является периодическая орбита; а также необходимые условия существования одномерных  $\omega$ -предельных множеств (последние — в терминах специальных расходящихся рядов). Дальнейшее развитие техники расходящихся рядов позволит перейти к описанию  $\omega$ -предельных множеств вида (12) произвольной размерности  $d$  при  $2 \leq d \leq n-1$ ,  $n \geq 3$ .

## Список литературы

1. *Efremova L. S.* Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map // In: Nonlinear maps and their applications. Springer Proc. Math. Statist., vol. 57. New York: Springer, 2014. P. 39–58. DOI: 10.1007/978-1-4614-9161-3\_6.
2. *Ефремова Л. С.* Динамика косых произведений отображений интервала // Успехи матем. наук. 2017. Т. 72, № 1 С. 107–192. DOI: 10.4213/rm9745.
3. *Ефремова Л. С.* Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейших косых произведений отображений интервала // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 6. С. 93–130. DOI: 10.4213/sm7551.
4. *Шарковский А. Н.* О притягивающих и притягивающихся множествах // Докл. АН СССР 1965. Т. 160, № 5. С. 1036–1038.
5. *Шарковский А. Н.* Аттракторы траекторий и их бассейны. Киев: Наукова Думка, 2013. 320 с.
6. *Blokh A., Bruckner A. M., Humke P. D., Smítal J.* The space of  $\omega$ -limit sets of a continuous map of the interval // Transac. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 348, no 4. P. 1357–1372.
7. *Efremova L. S.* Simplest skew products on  $n$ -dimensional ( $n \geq 2$ ) cells, cylinders and tori // Lobachevskii J. Math. 2022. Vol. 43. P. 1598-1618. DOI: 10.1134/S1995080222100080.
8. *Нутеци З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975. 304 с.
9. *Kolyada S. F.* On dynamics of triangular maps of the square // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1992. Vol. 12, no 4. P. 749–768. DOI: 10.1017/S0143385700007082.
10. *Kloeden P. E.* On Sharkovsky's cycle coexistence ordering // Bull. Austral. Math. Soc. 1979. Vol. 20, no. 2. P. 171–177. DOI: 10.1017/S0004972700010819.
11. *Ефремова Л. С.* О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе // В кн.: Динамические системы и нелинейные явления. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1990. С. 15–25.
12. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. Кишинев: Штиинца, 1984. 291 с.
13. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 278 с.
14. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 6. P. 747–817. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11798-1.
15. *Palis J.*  $\Omega$ -explosions // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 27, no. 1. P. 85–90. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0270400-3.
16. *Hirsch M. W., Pugh C. C.* Stable manifolds and hyperbolic sets // Global analysis (Berkeley, CA, 1968), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 14, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1970. P. 133–163.
17. *Стенькин О. В., Шильников Л. П.* Гомоклинический  $\Omega$ -взрыв и области гиперболичности // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 4. С. 125–144.
18. *Гонченко С. В., Стенькин О. В.* Гомоклинический  $\Omega$ -взрыв: интервалы гиперболичности и их границы // Нелинейная динам. 2011. Т. 7, № 1. С. 3–24.
19. *Ефремова Л. С., Махрова Е. Н.* Одномерные динамические системы // Успехи матем. наук. 2021. Т. 76, № 5. С. 81-146. DOI: 10.4213/rm9998.
20. *Ефремова Л. С.* О  $C^0$ -  $\Omega$ -взрывах в гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек // Вестн. Нижегородского гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 3(1). С. 130–136.
21. *Шарковський О. М.* Неблужаючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе // Допов. АН УРСР. 1964. Т. 7. С. 865–868.
22. *Nitecky Z.* Maps of the interval with closed periodic set // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 85, no. 3. P. 451–456.

23. *Bloch L. S., Coppel W. A.* Dynamics in One Dimension. Lecture Notes in Math., vol. 1513. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 252 p. DOI: 10.1007/BFb0084762.
24. *Шарковский А. Н.* О циклах и структуре непрерывного отображения // Укр. матем. журнал. 1965. Т. 17, № 3. С. 104–111.
25. *Федоренко В. В., Шарковский А. Н.* Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством периодических точек // В кн.: Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений / Под ред. А. Н. Шарковского. Киев: Институт матем. АН УССР, 1980. С. 137–145.
26. *Efremova L. S.*  $C^1$ -Smooth  $\Omega$ -Stable Skew Products and Completely Geometrically Integrable Self-Maps of  $3D$ -Tori, I:  $\Omega$ -Stability // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. Vol. 29, no. 3. P. 491–514.
27. *Efremova L. S.* Skew products and geometrically integrable maps: Results, problems and prospects // New Developments in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. Statist. New York: Springer, 2024 (to appear).
28. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
29. *Аносов Д. В.* Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция. Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1–18.
30. *Balibrea F., Guirao J. L. G., Casado J. I. M.* A triangular map on  $I^2$  whose  $\omega$ -limit sets are all compact interval of  $\{0\} \times I$  // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2002. Vol. 8, no. 4. P. 983–994. DOI: 10.3934/dcds.2002.8.983.
31. *Balibrea F., Guirao J. L. G., Casado J. I. M.* On  $\omega$ -limit sets of triangular maps on the unit cube // J. Difference Equ. Appl. 2003. Vol. 9, no. 3–4. P. 289–304. DOI: 10.1080/1023619021000047734.
32. *Райков Д. А.* Одномерный математический анализ. М.: Высшая школа, 1982. 416 с.
33. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1981. 543 с.

## References

1. Efremova LS. Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map. In: Nonlinear maps and their applications. Springer Proc. Math. Statist., vol. 57. New York: Springer; 2014. P. 39–58. DOI: 10.1007/978-1-4614-9161-3\_6.
2. Efremova LS. Dynamics of skew products of interval maps. Russian Math. Surv. 2017;72(1): 101–178. DOI: 10.4213/rm9745.
3. Efremova LS. Differential properties and attracting sets of a simplest skew product of interval maps. Sbornik: Math. 2010;201(6):873–907. DOI: 10.4213/sm7551.
4. Sharkovsky A. N. On attracting and attracted sets. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1965;160(5):1036–1038 (in Russian).
5. Sharkovsky AN. Attractors of trajectories and their basins. Naukova Dumka: Kiev; 2013. 320 p. (in Russian).
6. Blokh A, Bruckner AM, Humke PD, Smital J. The space of  $\omega$ -limit sets of a continuous map of the interval. Transac. Amer. Math. Soc. 1996;348(4):1357–1372.
7. Efremova LS. Simplest skew products on  $n$ -dimensional ( $n \geq 2$ ) cells, cylinders and tori. Lobachevskii J. Math. 2022;43:1598-1618. DOI: 10.1134/S1995080222100080.
8. Nitecki Z. Differentiable Dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms. Cambridge, MA–London: The M.I.T. Press; 1971.
9. Kolyada SF. On dynamics of triangular maps of the square. Ergodic Theory Dynam. Systems. 1992;12(4):749–768. DOI: 10.1017/S0143385700007082.
10. Kloeden PE. On Sharkovsky’s cycle coexistence ordering. Bull. Austral. Math. Soc. 1979;20(2): 171–177. DOI: 10.1017/S0004972700010819.

11. Efremova LS. On the nonwandering set and the center of triangular mappings with a closed set of periodic points in the base. In: Dynamical systems and nonlinear phenomena. Kiev: Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat.; 1990. P. 15–25 (in Russian).
12. Bronshtein IU. Non-autonomous dynamical systems. Kishinev: Shtiintsa; 1984. 291 p. (in Russian).
13. Sharkovsky AN, Maistrenko YuL, Romanenko EYu. Difference Equations and Their Applications. Math. Appl., vol. 250. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.; 1993. 358 p. DOI: 10.1007/978-94-011-1763-0.
14. Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. 1967;73(6):747–817. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11798-1.
15. Palis J.  $\Omega$ -explosions. Proc. Amer. Math. Soc. 1971;27(1):85–90. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0270400-3.
16. Hirsch MW, Pugh CC. Stable manifolds and hyperbolic sets. Global analysis (Berkeley, CA, 1968), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 14, Amer. Math. Soc. Providence, RI; 1970. P. 133–163.
17. Sten'kin OV, Shilnikov LP. Homoclinic  $\Omega$ -explosion and domains of hyperbolicity. Sb. Math. 1998;189(4):603–622.
18. Gonchenko SV, Sten'kin OV. Homoclinic  $\Omega$ -explosion: hyperbolicity intervals and their boundaries. Nelin. Dinam. 2011;7(1):3–24 (in Russian).
19. Efremova LS, Makhrova EN. One-dimensional dynamical systems. Russian Math. Surv. 2021; 76(5):821–881. DOI: 10.4213/rm9998.
20. Efremova LS. On  $C^0$ - $\Omega$ -blow-ups in  $C^1$ -smooth skew products of interval mappings with a closed set of periodic points // Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. 2012;3(1):130–136 (in Russian).
21. Sharkovsky AN. Nonwandering points and the center of a continuous mapping of the line into itself. Dopovidi Akad. Nauk Ukr. RSR. 1964;7:865–868 (in Ukrainian).
22. Nitecky Z. Maps of the interval with closed periodic set. Proc. Amer. Math. Soc. 1982;85(3): 451–456.
23. Block LS, Coppel WA. Dynamics in One Dimension. Lecture Notes in Math., vol. 1513. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 252 p. DOI: 10.1007/BFb0084762.
24. Sharkovsky AN. On cycles and a structure of a continuous mapping. Ukrain. Mat. Zh. 1965;17: 104–111 (in Russian).
25. Fedorenko VV, Sharkovsky AN. Continuous mappings of an interval with a closed set of periodic points. Investigation of differential and differential-difference equations: Collect. Sci. Works. Kiev, 1980. P. 137–145 (in Russian).
26. Efremova LS.  $C^1$ -Smooth  $\Omega$ -Stable Skew Products and Completely Geometrically Integrable Self-Maps of 3D-Tori, I:  $\Omega$ -Stability // Regular and Chaotic Dynamics. 2024;29(3):491–514.
27. Efremova LS. Skew products and geometrically integrable maps: Results, problems and prospects. New Developments in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. Statist. New York: Springer; 2024 (to appear).
28. Kuratovsky K. Topology. Vol. 1. New York: Acad. Press; 1966. 588 p.
29. Anosov DV. Dynamical systems in the 1960s: the hyperbolic revolution. Mathematical events of the twentieth century. Berlin: Springer-Verlag; 2006. P. 1-17.
30. Balibrea F, Guirao JLG, Casado JIM. A triangular map on  $I^2$  whose  $\omega$ -limit sets are all compact interval of  $\{0\} \times I$ . Discrete Contin. Dyn. Syst. 2002;8(4):983–994. DOI: 10.3934/dcds.2002.8.983.
31. Balibrea F, Guirao JLG, Casado JIM. On  $\omega$ -limit sets of triangular maps on the unit cube. J. Difference Equ. Appl. 2003;9(3-4):289–304. DOI: 10.1080/1023619021000047734.
32. Raikov DA. One-Dimensional Mathematical Analysis. Moscow: Vysshaya Shkola; 1982. 416 p.
33. Zorich VA. Mathematical Analysis, Universitext. Vol. I. Berlin: Springer-Verlag; 2004. 578 p.



*Ефремова Людмила Сергеевна* — окончила механико-математический факультет Горьковского государственного университета (1974). Доктор физико-математических наук (2018), доцент. Работает в должности профессора в Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского и Московском физико-техническом институте (государственном университете). Специалист по теории динамических систем. Автор более 70 научных публикаций.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: lefunn@gmail.com, ludmila.efremova@itmm.unn.ru  
ORCID: 0000-0001-5821-6697  
AuthorID (eLibrary.Ru): 126259



*Шалагин Матвей Андреевич* — студент 4-го курса Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского (специальность «Математика»).

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: shalaginmatvey@gmail.com  
ORCID: 0009-0009-9392-5945  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1260272



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.925 + 517.93

DOI: 10.18500/0869-6632-003133  
EDN: LDKTZM

### Об аттракторах лоренцевского типа в шестимерном обобщении модели Лоренца

Д. М. Сухарев<sup>1</sup>, В. А. Корякин<sup>1,2</sup>, А. О. Казаков<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: dmsukharev@edu.hse.ru, vakoryakin@edu.hse.ru, ✉kazakovdz@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.06.2024, принята к публикации 20.09.2024,

опубликована онлайн 14.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Тема работы — аттракторы лоренцевского типа в многомерных системах. Рассматривается шестимерная модель, описывающая конвекцию в слое жидкости с учетом примесей в атмосфере и жидкости, а также вращения Земли. Основная цель работы — исследование бифуркаций в соответствующей системе и описание сценариев возникновения хаотических аттракторов разного типа. **Результаты.** Показано, что в рассматриваемой системе может возникать как классический аттрактор Лоренца, теория которого была разработана в работах Афраймовича–Быкова–Шильникова, так и аттрактор нового типа, визуально похожий на аттрактор Лоренца, но содержащий при этом симметричную пару состояний равновесия. Установлено, что аттрактор Лоренца в данной системе рождается в результате классического сценария, предложенного Шильниковым. Предложен новый сценарий возникновения аттрактора второго типа в результате бифуркаций аттрактора Лоренца. В работе также обсуждаются гомоклинические и гетероклинические бифуркации, неизбежно возникающие внутри обнаруженных аттракторов, а также их возможная псевдогиперболичность.

**Ключевые слова:** хаотический аттрактор, псевдогиперболичность, аттрактор Лоренца, показатели Ляпунова, гомоклинические бифуркации, гетероклинические бифуркации.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Зеркальные лаборатории НИУ ВШЭ» (разделы 1–3). Раздел 4 и Заключение выполнены при финансовой поддержке гранта РФФ, 23-71-30008.

**Для цитирования:** Сухарев Д. М., Корякин В. А., Казаков А. О. Об аттракторах лоренцевского типа в шестимерном обобщении модели Лоренца // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 816–831. DOI: 10.18500/0869-6632-003133. EDN: LDKTZM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On Lorenz-type attractors in a six-dimensional generalization of the Lorenz model

*D. M. Sukharev*<sup>1</sup>, *V. A. Koryakin*<sup>1,2</sup>, *A. O. Kazakov*<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup>National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: dmsukharev@edu.hse.ru, vakoryakin@edu.hse.ru, ✉kazakovdz@yandex.ru

Received 22.06.2024, accepted 20.09.2024, available online 14.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The topic of the paper — Lorenz-type attractors in multidimensional systems. We consider a six-dimensional model that describes convection in a layer of liquid, taking into account impurities in the atmosphere and liquid, as well as the rotation of the Earth. The main purpose of the work is to study bifurcations in the corresponding system and describe scenarios for the emergence of chaotic attractors of various types. **Results.** It is shown that in the system under consideration, both a classical Lorenz attractor (the theory of which was developed in the works of Afraimovich–Bykov–Shilnikov) and an attractor of a new type, visually similar to the Lorenz attractor, but containing a symmetric pair of equilibrium states, can arise. It has been established that the Lorenz attractor in this system is born as a result of the classical scenario proposed by L. P. Shilnikov. We propose a new scenario for the emergence of an attractor of the second type via bifurcations inside the Lorenz attractor. In the paper we also discuss homoclinic and heteroclinic bifurcations that inevitably arise inside the found attractors, as well as their possible pseudohyperbolicity.

**Keywords:** chaotic attractor, pseudohyperbolicity, Lorenz attractor, Lyapunov exponents, homoclinic bifurcations, heteroclinic bifurcations.

**Acknowledgements.** The work was carried out with the financial support of the project “Mirror Laboratories” HSE University (Sections 1-3). The studies in Section 4 and Conclusion were financially supported by the Russian Science Foundation, grant No. 23-71-30008.

**For citation:** Sukharev DM, Koryakin VA, Kazakov AO. On Lorenz-type attractors in a six-dimensional generalization of the Lorenz model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(6):816–831. DOI: 10.18500/0869-6632-003133

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Аттрактор Лоренца, впервые обнаруженный Э. Лоренцем в 1963 году [1] в системе трех дифференциальных уравнений, является одним из наиболее известных и изученных типов странных аттракторов. Теория аттрактора Лоренца заложена в 70–80-х годах [2–6]. Один из наиболее эффективных способов изучения данного аттрактора связан с построением и анализом геометрической модели — отображения первого возвращения (Пуанкаре) — вблизи пары гомоклинических траекторий (так называемой гомоклинической «восьмерки-бабочки») к седловому состоянию равновесия с одномерным неустойчивым многообразием. Наиболее практичная модель аттрактора Лоренца предложена в работах Афраимовича–Быкова–Шильникова [2, 3]. Авторами этих работ даны достаточные, эффективно проверяемые условия, гарантирующие гиперболичность отображения Пуанкаре и, как следствие, робастность аттрактора Лоренца. Для системы Лоренца выполнение данных условий численно установлено в 1999 году в работе Такера [7]. Таким образом, было доказано, что открытый Лоренцем аттрактор действительно является хаотическим. При этом этот аттрактор не является гиперболическим (структурно устойчивым). Согласно работам [2, 3], в нем плотны гомоклинические траектории к состоянию равновесия, а следовательно, даже сколь угодно малые возмущения системы приводят к бифуркациям.

Гиперболические и лоренцевские (сингулярно-гиперболические) аттракторы входят в более широкий класс псевдогиперболических аттракторов. Согласно работам [8–10], системы с псевдоги-

перболическими аттракторами допускают разложение касательного пространства в прямую сумму двух непрерывно зависящих от точки линейных подпространств: центрального-неустойчивого  $E^{cu}$  и сильно сжимающего  $E^{ss}$ . Дифференциал системы экспоненциально растягивает объемы в подпространстве  $E^{cu}$ , что гарантирует положительность показателя Ляпунова у любой траектории аттрактора, и экспоненциально сжимает любые направления в подпространстве  $E^{ss}$ . При этом разложение на эту пару подпространств является доминантным, то есть любое сжатие в  $E^{ss}$  является более сильным, чем возможные сжатия в  $E^{cu}$ . Это, а также непрерывная зависимость подпространств от точки гарантирует, что максимальный показатель Ляпунова остается положительным у любой траектории аттрактора при малых возмущениях.

В данной работе мы исследуем обобщение классической системы Лоренца, учитывающее примеси (твердые частицы в атмосфере, а также мягкие частицы, растворенные в морской воде) и вращение Земли. Учет новых характеристик в процессе конвекции позволяет получить более физически обоснованную систему, задаваемую шестью уравнениями. Для этой системы мы проводим подробный бифуркационный анализ. Особый интерес связан с исследованием бифуркаций, приводящих к рождению хаотических аттракторов. Одним из основных результатов является обнаружение лоренцевского аттрактора нового типа, когда в аттракторе Лоренца нулевое состояние равновесия претерпевает бифуркацию «вилка», в результате чего оно получает двумерное неустойчивое многообразие и выходит из аттрактора. После этой бифуркации аттрактор содержит два седловых состояния равновесия с одномерными неустойчивыми многообразиями, замыкания которых и образуют этот аттрактор.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 мы сперва приводим классическую систему Лоренца, напоминаем ее физический смысл, после чего даем шестимерное обобщение данной системы, ранее предложенное в работе [11]. В разделе 2 приведены результаты локальных бифуркаций состояний равновесия в шестимерной системе, приведена соответствующая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров. Далее, в разделе 3, мы дополняем эту диаграмму результатами численного бифуркационного анализа с помощью пакета MatCont [12, 13] и результатами построения диаграммы показателей Ляпунова. На полученной карте режимов мы выделяем области существования аттракторов разного типа. Особый интерес связан с обнаружением областей существования аттрактора Лоренца и аттрактора нового типа, содержащего пару седловых состояний равновесия. В разделе 3 мы также приводим результаты однопараметрического бифуркационного анализа, описываем сценарии возникновения аттракторов лоренцевского типа. В частности, мы показываем, что в рассматриваемой шестимерной системе аттрактор Лоренца возникает, как и в системе Лоренца, в результате реализации сценария Шильникова [14]. В данном разделе мы также приводим новый сценарий перехода от аттрактора Лоренца к новому типу аттракторов, содержащему пару седловых состояний равновесия. В разделе 4 мы исследуем гомоклинические бифуркации, возникающие в области существования аттрактора Лоренца, а также гетероклинические бифуркации, возникающие при переходе через границы существования аттрактора Лоренца в область существования аттрактора нового типа. Выводы и обсуждения задач на будущее приведены в Заключение.

## 1. Система Лоренца и ее шестимерное обобщение

Впервые аттрактор Лоренца был обнаружен американским метеорологом Э. Лоренцем в 1963 году в трехмерной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1)$$

Данная система получена как первое нетривиальное приближение для задачи конвекции в плоском слое воды. Здесь первое уравнение описывает движение жидкости по законам Ньютона, второе уравнение задает зависимость температуры от времени в процессе терморегуляции, третье уравнение отражает непрерывность потока среды. Соответственно, параметры в системе Лоренца имеют следующий физический смысл:  $\sigma$  — число Прандтля, этот параметр определяет подобие тепловых процессов в газах и жидкостях;  $r$  — безразмерное число Релея — характеризует поведение жидкости при изменении температуры;  $b$  — геометрический параметр, отвечающий за турбулентность.

Аттрактор Лоренца в системе (1) изображен на рис. 1, *a*. На рис. 1, *b* приведен портрет в момент гомоклинической бифуркации «восьмерка-бабочка», играющей важнейшую роль в теории аттрактора Лоренца [2, 3].

В работе [11] предложено физически обоснованное обобщение системы Лоренца, задаваемое шестью дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) - \sigma(Le)^{-1}w + sv, \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{v} = -x - \sigma v, \\ \dot{w} = -xu + cx - (Le)^{-1}w, \\ \dot{u} = xw - (Le)^{-1}bu. \end{cases} \quad (2)$$

В этой системе, в отличие от трехмерной системы, помимо добавления трех новых переменных, появляются дополнительные параметры:  $c$  — безразмерный показатель, характеризующий

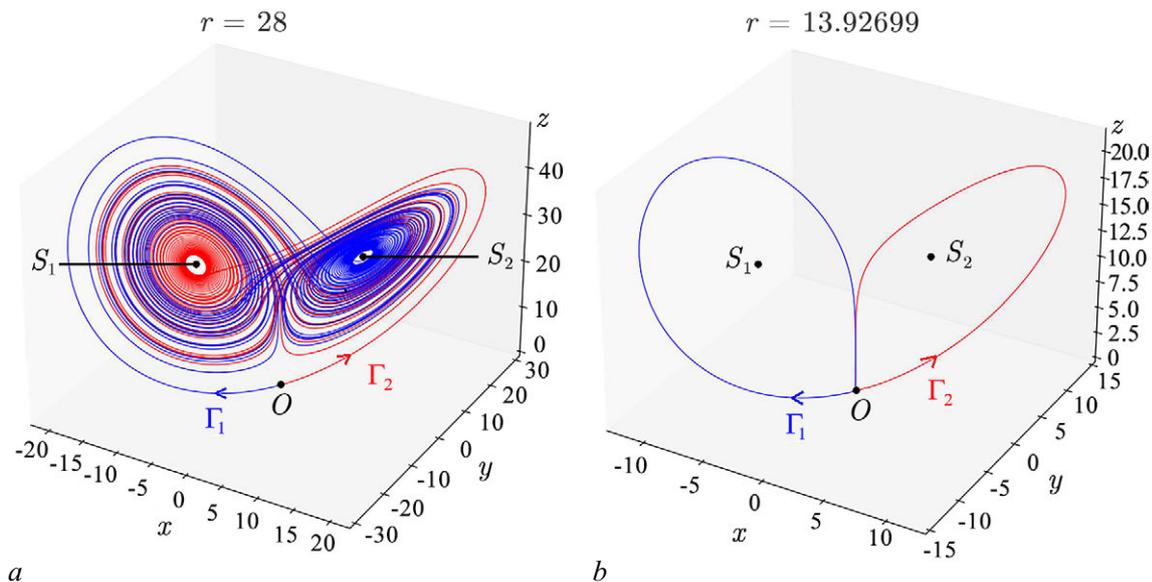


Рис. 1. Поведение неустойчивых сепаратрис  $\Gamma_1, \Gamma_2$  состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  в системе Лоренца ( $b = 8/3, \sigma = 10$ ):  $a - r = 28$ , сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  образуют аттрактор Лоренца;  $b - r \approx 13.927$ , сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  возвращаются в седловое состояние равновесия, образуя гомоклиническую «восьмерку-бабочку».  $S_1, S_2$  — симметричная пара седло-фокусных состояний равновесия (цвет онлайн)

Fig. 1. Behavior of unstable separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  of the equilibrium state  $O(0, 0, 0)$  in the Lorenz system ( $b = 8/3, \sigma = 10$ ):  $a - r = 28$ , separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  form the Lorenz attractor;  $b - r \approx 13.927$ , separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  return to the saddle equilibrium state, forming a homoclinic figure-eight butterfly.  $S_1, S_2$  is a symmetric pair of saddle-focus equilibrium states (color online)

отношение между тепловой и диффузионной энергиями в процессе конвекции;  $Le$  — число Льюиса — безразмерный коэффициент, определяемый отношением массопереноса на показатель теплопроводности;  $s$  — геометрический параметр, описывающий вращение модельной рамки.

Заметим, что при  $(Le)^{-1} = 0$  и  $s = 0$  в шестимерной системе отделяется трехмерная подсистема, совпадающая в системой Лоренца. При занулении параметров  $(Le)^{-1}$  и  $s$  по отдельности в шестимерной системе отделяется четырехмерная и пятимерная подсистемы соответственно.

## 2. Бифуркации состояний равновесия

Система (2), аналогично классической модели Лоренца, обладает симметрией

$$S : x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z, v \rightarrow -v, w \rightarrow -w, u \rightarrow u.$$

В ней всегда существует тривиальное состояние равновесия  $O = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . В зависимости от значений параметров также могут существовать еще два или четыре состояния равновесия.

Для дальнейших исследований мы зафиксируем параметры

$$b = 8/3, c = 20, (Le)^{-1} = 0.1, s = 10 \quad (3)$$

и будем проводить исследования системы (2) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ .

На рис. 2 приведена бифуркационная диаграмма состояний равновесия. На кривой  $SN$  происходит седло-узловая бифуркация, в результате чего справа от этой кривой рождается еще

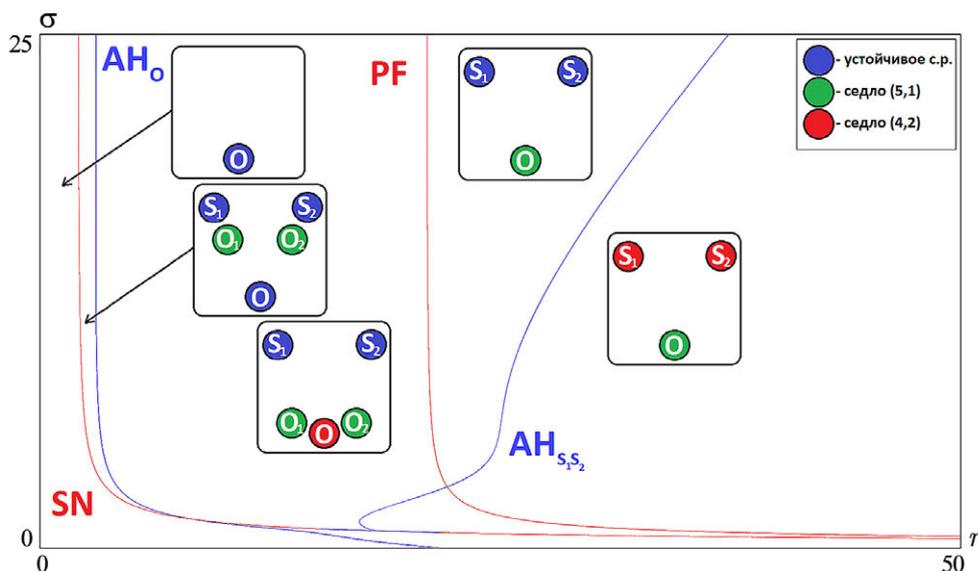


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для системы (2) на плоскости параметров  $(\sigma, r)$ , остальные параметры зафиксированы согласно (3). На приведенных кривых происходят следующие бифуркации:  $SN$  — пара седло-узловых бифуркаций,  $AH_0$  — бифуркация Андронова–Хопфа состояния равновесия  $O$ ,  $PF$  — бифуркация «вилка» для  $O$ ,  $AH_{S_1 S_2}$  — бифуркация Андронова–Хопфа для состояний равновесия  $S_1, S_2$ . Во вставках внутри рисунка указаны конфигурации и тип состояний равновесия (цвет онлайн)

Fig. 2. Bifurcation diagram for system (2) on the parameter plane  $(\sigma, r)$ , other parameters are fixed according to (3). The following bifurcations occur on the depicted curves:  $SN$  — a pair of saddle-node bifurcations,  $AH_0$  — the Andronov–Hopf bifurcation of the equilibrium state  $O$ ,  $PF$  — the pitchfork bifurcation of  $O$ ,  $AH_{S_1 S_2}$  — the Andronov–Hopf bifurcation of the equilibrium states  $S_1, S_2$ . The insets inside the figure indicate the configurations and the type of the equilibrium states (color online)

две пары состояний равновесия:  $S_1$  и  $S_2$  — устойчивые, а также  $O_1$  и  $O_2$  — седла с одномерным неустойчивым многообразием. Состояние равновесия  $O$  является устойчивым слева от кривой  $AH_0$ , на которой оно претерпевает бифуркацию Андронова–Хопфа, в результате чего теряет устойчивость и становится седло-фокусом с двумерным неустойчивым многообразием справа от этой кривой.

Между кривыми  $SN$  и  $AH_0$  в системе три устойчивых состояния равновесия  $O$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  и два седловых состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  с одномерным неустойчивым многообразием. Справа от кривой  $AH_0$  в системе два устойчивых состояния равновесия  $S_1$  и  $S_2$ , два седловых состояния равновесия с одномерным неустойчивым многообразием  $O_1$  и  $O_2$ , а также седловое состояние равновесия с двумерным неустойчивым многообразием  $O$ . Кривая  $PF$  отвечает бифуркации «вилка» равновесия  $O$ . Справа от этой кривой конфигурация состояний равновесия в системе (2) такая же, как в системе Лоренца (1), а именно, существует три состояния равновесия:  $O$  — седло с одномерным неустойчивым многообразием и  $S_1$ ,  $S_2$ . Слева от кривой  $AH_{S_1S_2}$  эти два равновесия устойчивы, а справа — становятся седло-фокусами в результате субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

### 3. Хаотическая динамика и аттракторы лоренцевского типа

Для выявления областей с хаотической динамикой построим диаграмму показателей Ляпунова на плоскости параметров  $(\sigma, r)$ , рис. 3, а. Для удобства на эту диаграмму наложены вышеописанные кривые локальных бифуркаций состояний равновесия. На полученной карте

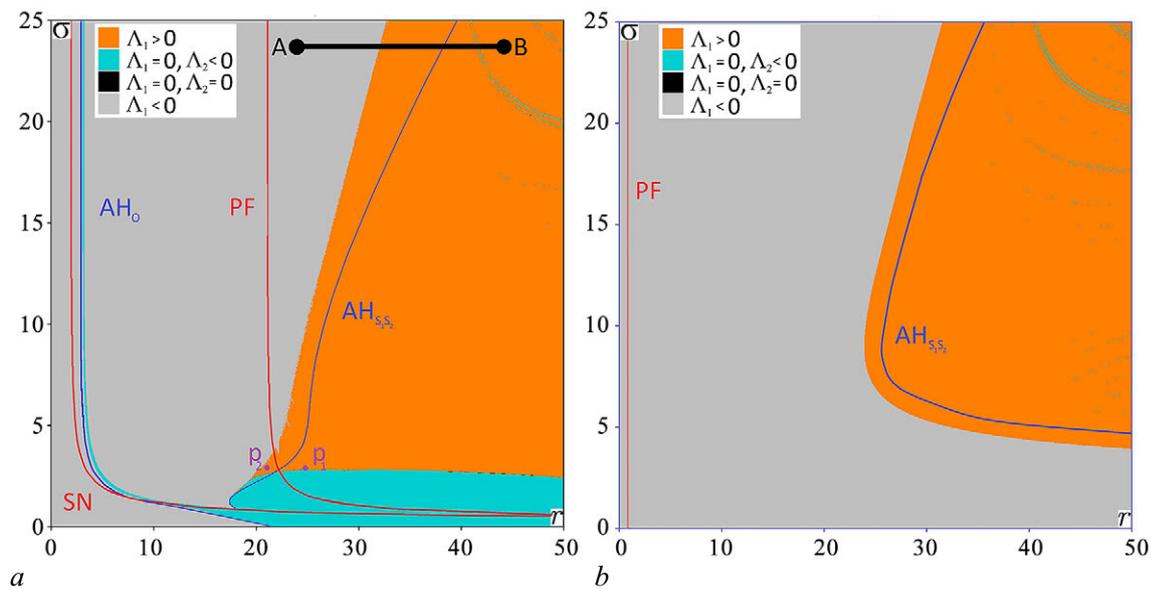


Рис. 3. Карты режимов ( $1000 \times 1000$  точек) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ : а — для системы (2) с параметрами, заданными согласно (3); б — для системы Лоренца (1) при  $b = 8/3$ . Изображенные кривые описаны в подписи к рис. 2, описание цветовой схемы приведено в легенде слева сверху, где  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$  — два старших показателя Ляпунова (цвет онлайн)

Fig. 3. Charts of regimes ( $1000 \times 1000$  points) on the plane of parameters  $(r, \sigma)$ : а — for system (2) with parameters fixed according to (3); б — for the Lorenz system (1) with  $b = 8/3$ . The depicted curves are described in the caption to Fig. 2, the description of the color scheme is given in the legend shown in the top-left inset, where  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$  are two maximal Lyapunov exponents (color online)

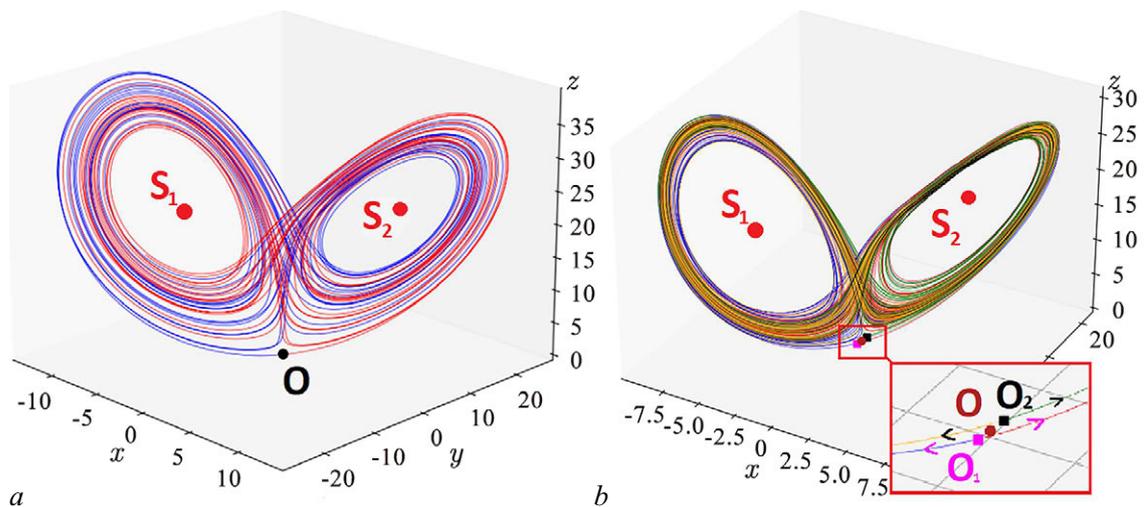


Рис. 4. Аттракторы лоренцевского типа в системе (2) при  $\sigma = 3$  (остальные параметры зафиксированы согласно (3)):  $a - r = 25$  (в точке  $p_1$  на карте режимов – справа от кривой  $PF$ );  $b - r = 21.1$  (в точке  $p_2$  на карте режимов – слева от кривой  $PF$ ). Во вставке на рис.  $b$  изображен увеличенный фрагмент фазового портрета вблизи состояний равновесия  $O, O_1, O_2$ . Разным цветом показаны разные сепаратрисы: синим и красным – сепаратрисы состояний равновесия  $O, O_1$ , желтым и зеленым – сепаратрисы состояния равновесия  $O_2$  (цвет онлайн)

Fig. 4. Lorenz-type attractors in system (2) with  $\sigma = 3$  (other parameters are fixed according to (3)):  $a - r = 25$  (the point  $p_1$  on the chart of dynamical regimes – to the right of the curve  $PF$ );  $b - r = 21.1$  (the point  $p_2$  on the chart of dynamical regimes – to the left of curve  $PF$ ). The inset in Fig.  $b$  shows an enlarged fragment of the phase portrait near the equilibrium states  $O, O_1, O_2$ . Different separatrices are shown in different colors: blue and red – separatrices of the equilibrium states  $O, O_1$ , yellow and green – separatrices of the equilibrium state  $O_2$  (color online)

режимов видно, что большая часть области с хаотической динамикой находится справа от кривой  $PF$ , отвечающей бифуркации «вилка» состояния равновесия  $O$ . Однако небольшой фрагмент области существования хаотического аттрактора также наблюдается слева от кривой  $PF$ , где существует пять состояний равновесия, а состояние равновесия  $O$  имеет двумерное неустойчивое многообразие. Это существенно отличает рассматриваемую шестимерную систему от классической системы Лоренца, где странные аттракторы существуют лишь в той области плоскости параметров  $(r, \sigma)$ , где система имеет три состояния равновесия, и состояние равновесия  $O$  является седлом с одномерным неустойчивым многообразием, см. рис. 3,  $b$ , на котором изображена диаграмма показателей Ляпунова для системы (1).

На рис. 4 приведены фазовые портреты для двух типов странных аттракторов в системе (2). На рис. 4,  $a$  изображен аттрактор в точке  $p_1 : (r, \sigma) = (25, 3)$  – справа от кривой бифуркации «вилка». Данный аттрактор визуально неотличим от классического аттрактора Лоренца (ср. рис. 4,  $a$  и рис. 1,  $a$ ). На рис. 4,  $b$  изображен аттрактор в точке  $p_2 : (r, \sigma) = (21.1, 3)$ , когда седловая точка  $O$  имеет двумерное неустойчивое многообразие и не входит в аттрактор. В данном случае аттрактор содержит симметричную пару состояний равновесия  $O_1, O_2$ . Насколько нам известно, ранее о существовании таких аттракторов не сообщалось.

Отметим, что механизмы разрушения аттракторов лоренцевского типа в результате бифуркации «вилка» симметричного равновесия ранее наблюдались в других системах. Например, в системе Любимова–Закса [16] в результате такой бифуркации седловое состояние равновесия, входящее в аттрактор Ровеллы (аттрактор лоренцевского типа, у которого седловая величина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Напомним, что седловая величина вычисляется как сумма действительных частей пары ближайших к мнимой оси собственных чисел, одно из которых устойчивое, а второе неустойчивое.

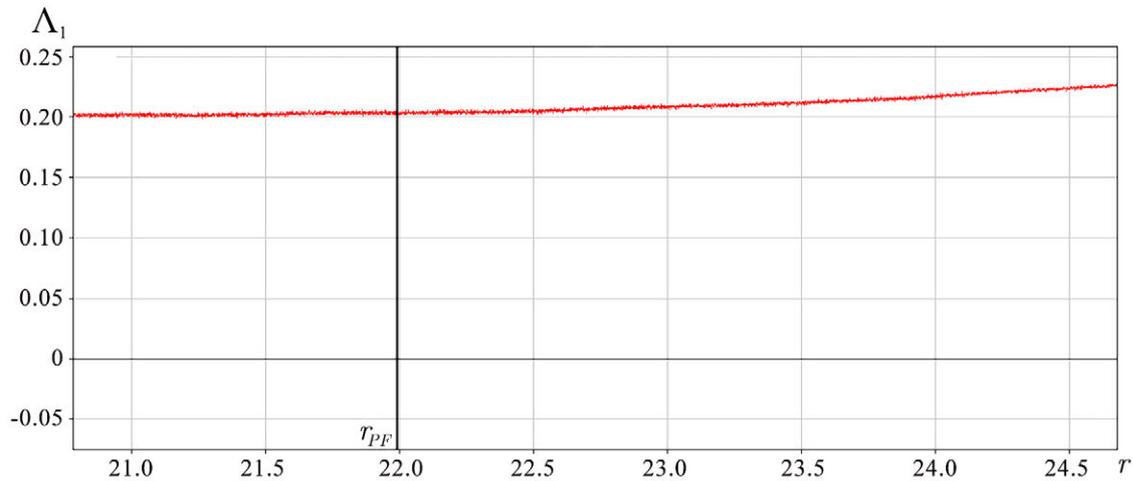


Рис. 5. График зависимости максимального показателя Ляпунова в системе (2), построенный по  $10^4$  точкам вдоль маршрута  $p_1p_2$ :  $\sigma = 3, r \in 20.65, 24.7$ . В точке  $r = r_{PF} \approx 22$  седловое состояние равновесия  $O$ , входящее в аттрактор Лоренца, претерпевает бифуркацию «вилка», что, однако, не сказывается на монотонной зависимости показателя Ляпунова от параметра. Этот эксперимент свидетельствует о возможной псевдогиперболичности исследуемых хаотических аттракторов (цвет онлайн)

Fig. 5. The graph of the maximal Lyapunov exponent in system (2), computed by  $10^4$  points along the route  $p_1p_2$ :  $\sigma = 3, r \in 20.65, 24.7$ . At the point  $r = r_{PF} \approx 22$ , the saddle equilibrium state  $O$ , belonging to the Lorenz attractor, undergoes the pitchfork bifurcation, which, however, does not impact to the monotonic dependence of the Lyapunov exponent on the parameter. This experiment indicates the possible pseudohyperbolicity of the studied chaotic attractors (color online)

является отрицательной [17]), становится устойчивым, и в его окрестности рождается пара седловых состояний равновесия с одномерным неустойчивым многообразием.

В случае системы (2) после бифуркации «вилка», также рождается пара седловых состояний равновесия  $O_1, O_2$  с одномерным неустойчивым многообразием, однако при этом состояние равновесия  $O$  остается неустойчивым, а хаотический аттрактор не разрушается. Более того, максимальный показатель Ляпунова для аттрактора меняется плавно при переходе через кривую бифуркации «вилка»  $PF$  (см. рис. 5). Это говорит о том, что в результате бифуркации «вилка» хаотический аттрактор, содержащий пару состояний равновесия  $O_1, O_2$ , может оставаться псевдогиперболическим.

Далее проследим, как эволюционирует аттрактор в системе (2) вдоль маршрута  $AB$ :  $\sigma = 23, r \in [20, 40]$  (см. рис. 3), проходящего через область, где в рассматриваемой системе, как и в классической системе Лоренца, три состояния равновесия, а равновесие  $O$  — седло с одномерным неустойчивым многообразием.

В начале маршрута неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  равновесия  $O$  стремятся к устойчивым состояниям равновесия  $S_1$  и  $S_2$  соответственно (см. рис. 6, a). При  $r \approx 21.55$  эти сепаратрисы возвращаются обратно в точку  $O$ , то есть наблюдается гомоклиническая бифуркация «восьмерка-бабочка», см. рис. 6, b. После этой бифуркации в системе рождается пара седловых периодических траекторий  $L_1, L_2$ , сепаратриса  $\Gamma_1$  стремится к  $S_2$ , а сепаратриса  $\Gamma_2$  — к  $S_1$ , см. рис. 6, c. Кроме того, вместе с расщеплением гомоклинической бифуркации «восьмерка-бабочка» в системе также рождается нетривиальное гиперболическое множество с одномерным неустойчивым многообразием. При  $r \approx 30.75$  неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ложатся на устойчивые многообразия периодических траекторий  $L_2, L_1$  соответственно (см. рис. 6, d), в результате чего при  $r > 30.75$  в системе рождается аттрактор Лоренца (см. рис. 6, e). Сначала он сосуществует с парой устойчивых состояний равновесия  $S_1, S_2$ . После влипания в них периодических траекторий  $L_1, L_2$

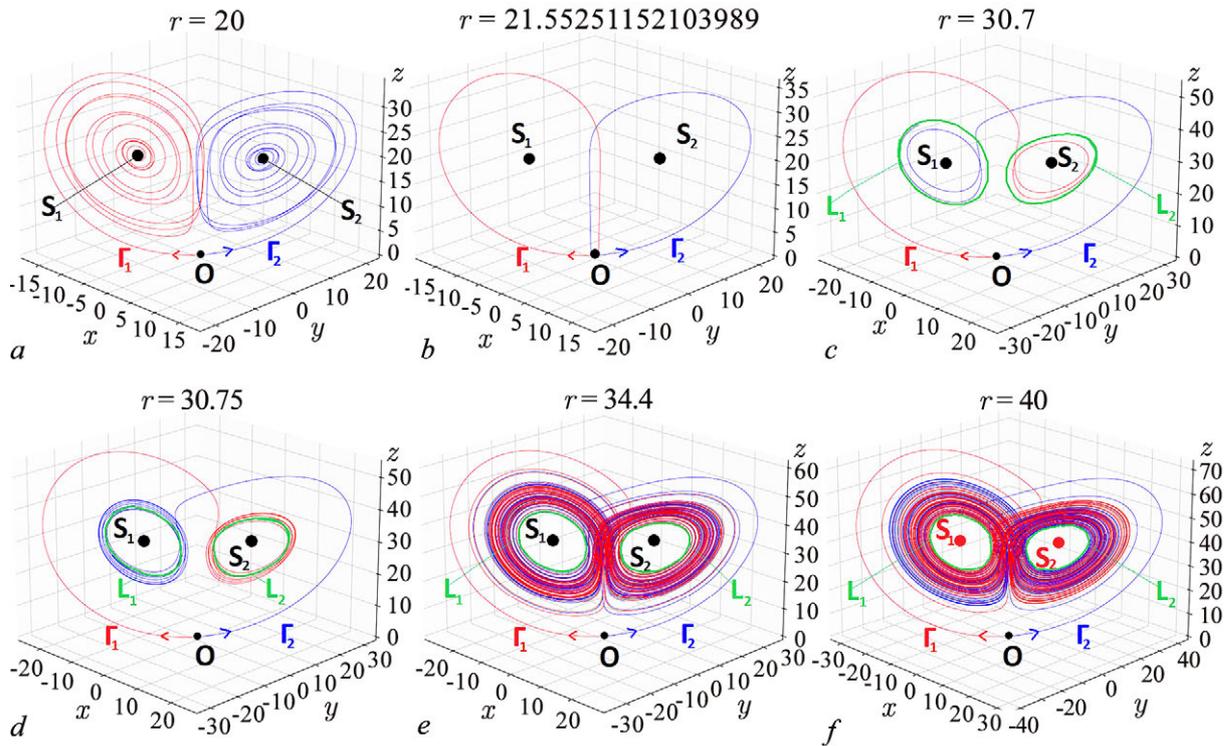


Рис. 6. Поведение неустойчивых сепаратрис  $\Gamma_1, \Gamma_2$  состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  в системе (2) при  $\sigma = 23$  (остальные параметры зафиксированы согласно (3)): *a* — неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  наматываются на устойчивые равновесия  $S_1, S_2$ ; *b* — гомоклиническая «восьмерка-бабочка»; *c* — неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  наматываются на  $S_2, S_1$  соответственно, а из гомоклинической бифуркации рождается пара седловых периодических траекторий и нетривиальное гиперболическое множество; *d* — сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ложатся на устойчивые многообразия периодических траекторий  $L_1, L_2$ ; *e* — аттрактор Лоренца сосуществует с парой устойчивых состояний равновесия  $S_1$  и  $S_2$ ; *f* — после бифуркации Андронова–Хопфа аттрактор Лоренца остается единственным аттрактором в системе (цвет онлайн)

Fig. 6. Behavior of unstable separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  of the equilibrium state  $O(0, 0, 0)$  in system (2) with  $\sigma = 23$  (other parameters are fixed according to (3)): *a* — unstable separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  wind onto stable equilibria  $S_1, S_2$ ; *b* — homoclinic butterfly; *c* — unstable separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  wind onto  $S_2, S_1$ , respectively, and a pair of saddle periodic trajectories and a nontrivial hyperbolic set are born from the homoclinic bifurcation; *d* — the separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  lie on stable manifolds of periodic orbits  $L_1, L_2$ ; *e* — the Lorenz attractor coexists with a pair of stable equilibrium states  $S_1$  and  $S_2$ ; *f* — after the Andronov–Hopf bifurcation, the Lorenz attractor remains the only attractor in the system (color online)

в результате субкритической бифуркации Андронова–Хопфа аттрактор Лоренца остается единственным аттрактором в системе (2), см. рис. 6, *f*. Отметим, что данный сценарий совпадает со сценарием Шильникова, в результате которого образуется аттрактор Лоренца в классической системе Лоренца.

#### 4. О гомоклинических бифуркациях «восьмерка-бабочка»

В данном разделе приведены результаты двухпараметрического анализа гомоклинической бифуркации «восьмерка-бабочка» в шестимерной системе (2). Соответствующие бифуркационные диаграммы построены с помощью так называемого метода нидинг-диаграмм [18–21]. Согласно теории Афраймовича–Быкова–Шильникова [2, 3], гомоклинические петли плотны в области существования аттрактора Лоренца. В работе [18] с помощью метода нидинг-диаграмм этот

эффект был продемонстрирован для системы Лоренца (1), в работе [19] — для системы Шимицу–Мориока, а в работах [20, 21] — для шестимерной модели оптического лазера.

Суть метода нидинг-диаграмм заключается в кодировании поведения одной из неустойчивых сепаратрис состояния равновесия  $O$  (например,  $\Gamma_2(O)$ ), совершающей обороты вокруг состояний равновесия  $S_2$  и  $S_1$ , с помощью последовательности нулей и единиц (в зависимости от того, вокруг какого состояния равновесия совершается очередной оборот) и присвоении каждой такой последовательности уникального цвета. Нидинг-диаграмма — это цветная карта на плоскости параметров. Любое изменение символа в двоичной последовательности (при движении вдоль любого маршрута на плоскости параметров) отвечает возникновению гомоклинической бифуркации «восьмерка-бабочка». За счет выбора контрастной палитры на нидинг-диаграмме удается визуализировать кривые таких бифуркаций.

Результаты работы метода нидинг-диаграмм для системы (2) приведены на рис. 7, а. Здесь мы применяли метод только для построения диаграммы справа от кривой  $PF$ , где симметричное равновесие  $O$  имеет одномерное неустойчивое многообразие. На рис. 7, б, для сравнения, мы воспроизводим результаты построения нидинг-диаграммы для системы Лоренца (1). Из построенных диаграмм можно сделать следующие выводы.

- Нидинг-диаграмма для системы (2) справа от кривой  $PF$  похожа на нидинг-диаграмму для системы Лоренца (1).
- Кривые гомоклинических бифуркаций образуют регулярное слоение в большей части рассматриваемой плоскости параметров. Наличие такого слоения, в сочетании с монотонной положительностью максимального показателя Ляпунова (см. рис. 3, а и рис. 5), является косвенным признаком того, что рассматриваемые аттракторы в шестимерной системе (2), так же как и аттракторы в классической системе Лоренца (1), могут быть псевдогиперболическими.
- В системе (2), как и в системе (1), на нидинг-диаграмме отчетливо видны две сингулярности. Правая сингулярность отвечает так называемой быковской точке [22, 23], отвечающей

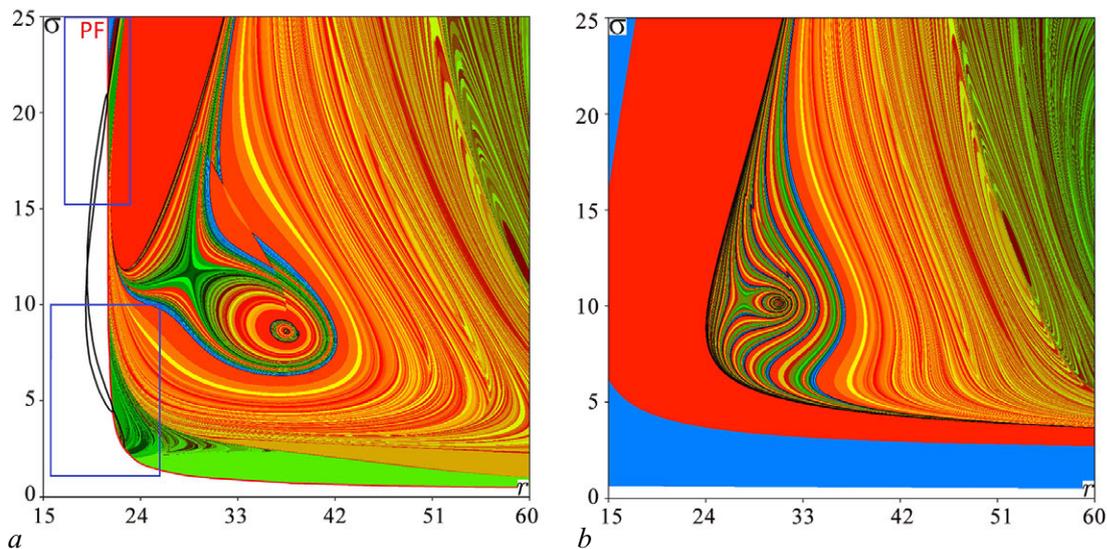


Рис. 7. Нидинг-диаграммы на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ : а — для шестимерной системы (2) при параметрах, заданных согласно (3); б — для системы Лоренца при  $b = 8/3$ . Линии смены цвета на рисунках отвечают гомоклиническим бифуркациям «восьмерка-бабочка», черные кривые найдены с помощью программы MatCont, увеличенные фрагменты, выделенные прямоугольниками, приведены на рис. 9 (цвет онлайн)

Fig. 7. Kneading diagrams on the plane of parameters  $(r, \sigma)$ : а — for the six-dimensional system (2) with parameters fixed according to (3); б — for the Lorenz system with  $b = 8/3$ . The color change curves in the figures correspond to homoclinic “figure-eight-butterfly” bifurcations, the black curves were found using the MatCont package, the enlarged fragments highlighted by rectangles are shown in Fig. 9 (color online)

за возникновение гетероклинического контура, соединяющего состояния равновесия  $O$  и  $S_1$  ( $O$  и  $S_2$ , по симметрии  $S$ ). В системе Лоренца такая точка лежит на границе существования аттрактора Лоренца [23, 24]. Можно предположить, что и в рассматриваемой шестимерной системе (2) справа от этой точки аттрактор не может быть псевдогиперболическим.

Слева от кривой бифуркации «вилка»  $PF$  состояние равновесия  $O$  имеет двумерное неустойчивое многообразие и, как было отмечено выше, выходит из аттрактора. При этом кривые гомоклинических бифуркаций состояния равновесия  $O$ , втыкаясь в кривую  $PF$ , заканчиваются на этой кривой. Таким моментам отвечают гомоклинические бифуркации коразмерности 2 (для системы с симметрией), когда состояние равновесия с парой гомоклинических траекторий имеет нулевое собственное число.

Аналогичная бифуркация рассматривалась ранее. В работах [25, 26] описан случай, когда в результате бифуркации «вилка» симметричного седлового состояния равновесия с парой гомоклинических траекторий рождается устойчивое состояние равновесия и симметричная пара седловых состояний равновесия. Иллюстрации к этой бифуркации приведены на рис. 8. На рис. 8, *a* изображена бифуркационная диаграмма. Здесь кривая  $h$  отвечает существованию у седлового состояния равновесия пары гомоклинических траекторий («восьмерке-бабочке») (см. рис. 8, *b*, а также рис. 1, *b*). На кривой  $PF$  состояние равновесия  $O$  претерпевает бифуркацию «вилка»: слева оно является седловым, а справа — устойчивым, а в его окрестности

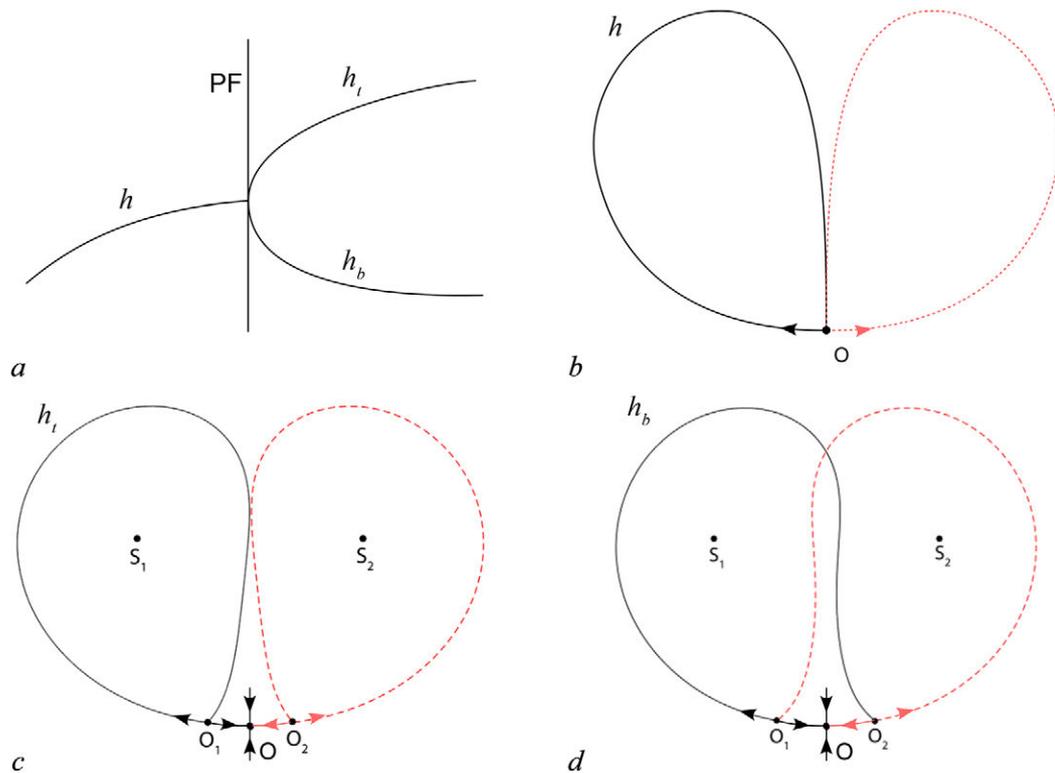


Рис. 8. Бифуркация седлового состояния равновесия с парой гомоклинических траекторий [25, 26]. *a* — Бифуркационная диаграмма:  $h, h_t$  — гомоклинические бифуркации,  $PF$  — бифуркации «вилка»,  $h_b$  — гетероклиническая бифуркация. *b* — Гомоклиническая «восьмерка-бабочка» на кривой  $h$ , *c* — петля сепаратрисы для  $O_1$  ( $O_2$ , по симметрии) на кривой  $h_t$ , *d* — гетероклинический контур между  $O_1$  и  $O_2$  на кривой  $h_b$  (цвет онлайн)

Fig. 8. Bifurcation of a saddle equilibrium state with a pair of homoclinic orbits [25, 26]. *a* — Bifurcation diagram:  $h, h_t$  — homoclinic bifurcations,  $PF$  — pitchfork bifurcations,  $h_b$  — heteroclinic bifurcation. *b* — Homoclinic butterfly occurring on  $h$ , *c* — separatrix loop for  $O_1$  ( $O_2$ , by symmetry) occurring on  $h_t$ , *d* — heteroclinic cycle between  $O_1$  and  $O_2$  occurring on  $h_b$  (color online)

рождается пара седловых состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . В работах [25, 26] показано, что из точки пересечения кривых  $h$  и  $PF$  выходит пара кривых  $h_t$  и  $h_b$ , отвечающих гомоклинической и гетероклинической бифуркации соответственно. На кривой  $h_t$  состояние равновесия  $O_1$  имеет гомоклиническую траекторию (по симметрии,  $O_2$  также имеет гомоклиническую траекторию), см. рис. 8, *c*, а на кривой  $h_b$  возникает гетероклиническая траектория из состояния равновесия  $O_1$  в  $O_2$  (по симметрии, из  $O_2$  в  $O_1$ ), см. рис. 8, *d*. Важно отметить, что во всех случаях вторая пара неустойчивых сепаратрис состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$  всегда стремится к симметричному устойчивому состоянию равновесия  $O$ .

В нашем случае в системе (2) с симметричным седловым состоянием равновесия  $O$  происходит другой тип бифуркации «вилка». После этой бифуркации, как и в описанном выше случае, в окрестности симметричного состояния равновесия  $O$  рождается пара седловых состояний равновесия с одномерным неустойчивым многообразием, однако само равновесие  $O$  становится седлом с двумерным неустойчивым многообразием. Таким образом, ни одна из неустойчивых пар сепаратрис не стремится к  $O$  после бифуркации.

С помощью методов продолжения по параметрам, реализованных в пакете MatCont [12, 13], нам удалось проследить за парами «внешних» неустойчивых сепаратрис состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , рождающихся слева от кривой  $PF$ . Аналогично описанному выше случаю, после соответствующей бифуркации «вилка», кривые гомоклинических бифуркаций «восьмерка-бабочка» раздваиваются на пары кривых, а именно: из каждой точки пересечения этих кривых с кривой  $PF$  налево выходит пара кривых  $h_t^i$  и  $h_b^i$ , отвечающих возникновению гомоклинических и гетероклинических траекторий: на кривой  $h_t^i$  левая (правая) сепаратриса равновесия  $O_1$  ( $O_2$ ) образует гомоклиническую петлю, подобно тому, как изображено на рис. 8, *c*, а на кривой  $h_b^i$  левая (правая) сепаратриса равновесия  $O_1$  ( $O_2$ ) стремится к равновесию  $O_2$  ( $O_1$ ), то есть образуется гетероклинический контур, аналогичный контуру, изображенному на рис. 8, *d*. Результаты бифуркационного анализа изображены на рис. 7 слева от кривой  $PF$ . Увеличенные фрагменты этой диаграммы, выделенные прямоугольниками, приведены на рис. 9. Опишем более подробно полученные результаты.

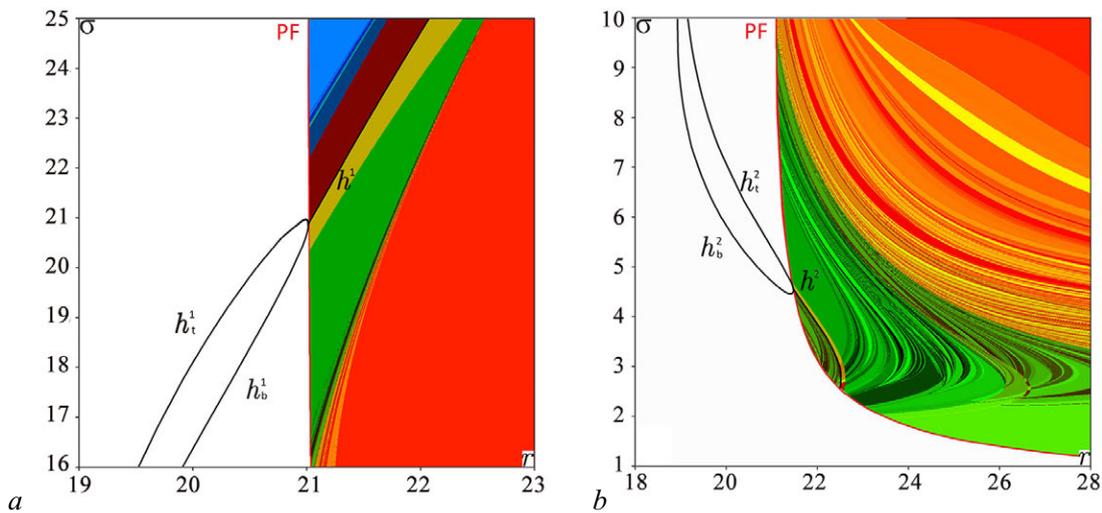


Рис. 9. Увеличенные фрагменты нидинг-диаграммы, выделенные на рис. 7.  $h^1, h^2$  — кривые гомоклинических бифуркаций «восьмерка-бабочка» состояния равновесия  $O$ ;  $h_t^1, h_t^2$  — кривые гомоклинических петель состояния равновесия  $O_1$  ( $O_2$ , по симметрии)  $h_b^1, h_b^2$  — кривые гетероклинических бифуркаций между состояниями равновесия  $O_1$  и  $O_2$  (цвет онлайн)

Fig. 9. Enlarged fragments of the kneading diagram highlighted in Fig. 7.  $h^1, h^2$  — curves of the homoclinic figure-eight bifurcations of the equilibrium state  $O$ ;  $h_t^1, h_t^2$  — curves of the homoclinic loops of the equilibrium state  $O_1$  ( $O_2$ , by symmetry);  $h_b^1, h_b^2$  — curves of the heteroclinic bifurcations between the equilibrium states  $O_1$  and  $O_2$  (color online)

На рис. 9, а, справа от кривой  $PF$ , отмечена одна из кривых, отвечающих гомоклинической «восьмерке-бабочке»,  $h^1$ . Расположение данной кривой на границе желтой и коричневой областей хорошо согласуется с результатами построения нидинг-диаграммы. Из точки  $PF \cap h^1$  налево от кривой  $PF$  выходит пара кривых  $h_t^1$  и  $h_b^1$ , отвечающих возникновению гомо- и гетероклинической бифуркаций, описанных выше. На рис. 9, b отмечена такая же бифуркация в нижней части бифуркационной диаграммы (кривые  $h^2$ ,  $h_t^2$  и  $h_b^2$ ).

### Заключение

В данной работе мы изучили некоторые особенности хаотической динамики в шестимерной системе (2), обобщающей классическую систему Лоренца. В частности, обнаружено два типа странных аттракторов и описаны сценарии их возникновения. К первому типу аттракторов относится классический аттрактор Лоренца. Этот аттрактор содержит симметричное седловое состояние равновесия  $O$  с одномерным неустойчивым многообразием и имеет характерную узнаваемую форму (см. рис. 4, а). Второй тип аттракторов является новым. Он содержит пару седловых состояний равновесия, которые возникают в результате бифуркации «вилка» состояния равновесия  $O$ , которое после этой бифуркации получает двумерное неустойчивое многообразие и выходит из аттрактора (см. рис. 4, b). Оба типа аттракторов могут быть псевдогиперболическими. Мы планируем провести численную проверку их псевдогиперболичности в следующей работе. Еще одна задача на будущее связана с теоретическим исследованием аттрактора нового типа. Мы планируем построить для него геометрическую модель (подобную модели Афраймовича–Быкова–Шильникова для аттрактора Лоренца) и найти условия, при которых этот аттрактор является псевдогиперболическим. В заключение отметим, что все обнаруженные в системе хаотические аттракторы демонстрируют в численных экспериментах лишь один положительный показатель Ляпунова, несмотря на то, что размерность системы позволяет получить аттракторы с несколькими положительными показателями. Таким образом, еще одна задача на будущее связана с исследованием возможности возникновения в рассматриваемой системе гиперхаотических аттракторов.

### Список литературы

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of atmospheric sciences. 1963. Т. 20, № 2. С. 130–141. DOI: 10.18500/0869-6632-00313310.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2.
2. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 336–339.
3. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО. 1982. Т. 44. С. 150–212.
4. Guckenheimer J., Williams R. F. Structural stability of Lorenz attractors // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1979. Vol. 50. P. 59–72. DOI: 10.1007/BF02684769.
5. Marsden J. E., McCracken M., Guckenheimer J. A Strange, Strange Attractor // In: The Hopf Bifurcation and Its Applications. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. New York: Springer, 1976. С. 368–381. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6\_25.
6. Williams R. F. The structure of Lorenz attractors // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1979. Vol. 50. P. 73–99. DOI: 10.1007/BF02684770.
7. Tucker W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. 1999. Vol. 328, no. 12. P. 1197–1202. DOI: 10.1016/s0764-4442(99)80439-x.
8. Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system // Nonlinearity. 2021. Vol. 34(2). P. 1–30.
9. Тuraev Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. Сборник. 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.

10. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418, № 1. С. 23–27.
11. Moon S., Seo J. M., Beom-Soon H., Park J. A physically extended Lorenz system // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2019. Vol. 29, no. 6. P. 063129. DOI: 10.1063/1.5095466.
12. Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
13. De Witte V., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Friedman M. Interactive initialization and continuation of homoclinic and heteroclinic orbits in MATLAB // ACM Trans. Math. Software. 2012. Vol. 38, iss. 3. P. 1–34. DOI: 10.1145/2168773.2168776.
14. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // В кн.: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркации рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 317–335.
15. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // Meccanica. 1980. Vol. 15, iss. 1. P. 9–20.
16. Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. Vol. 9, iss. 1–2. P. 52–64. DOI: 10.1007/BF01237679.
17. Rovella A. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor // Bol. da Soc. Bras. de Matemática Bull. Braz. Math. Soc. 1993. Vol. 24. P. 233–259.
18. Barrio R., Shilnikov A., Shilnikov L. Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22, no. 04. P. 1230016. DOI: 10.1142/S0218127412300169.
19. Xing T., Barrio R., Shilnikov A. Symbolic quest into homoclinic chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, no. 08. P. 1440004. DOI: 10.1142/S0218127414400045.
20. Pusuluri K., Shilnikov A. Homoclinic chaos and its organization in a nonlinear optics model // Physical Review E. 2018. Vol. 98, no. 4. P. 040202. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.040202.
21. Pusuluri K., Meijer H. G. E., Shilnikov A. L. Homoclinic puzzles and chaos in a nonlinear laser model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. Vol. 93. P. 105503.
22. Быков В. В. О структуре окрестности сепаратрисного контура с седлофокусом // В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений / Под ред. Е. А. Леонтович-Андроновой). Горький: ГГУ, 1978. С. 3–32.
23. Вуков В. В. The bifurcations of separatrix contours and chaos // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 62, no. 1–4. P. 290–299.
24. Быков В. В., Шильников А. Л. О границах области существования аттрактора Лоренца // Методы качеств, теории дифференц. уравнений. 1989. С. 151–159.
25. Zaks M. A., Lyubimov V. Anomalously fast convergence of a doubling-type bifurcation chain in systems with two saddle equilibria // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1984. Vol. 87. P. 1696–1699.
26. Zaks M. A., Lyubimov D. V. Bifurcation sequences in the dissipative systems with saddle equilibria // Banach Center Publications. 1989. Vol. 23, no. 1. P. 367–380. DOI: 10.4064/-23-1-367-380.

## References

1. Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. Journal of atmospheric sciences. 1963;20(2):130–141. DOI: 10.18500/0869-6632-00313310.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2.
2. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. On the origin and structure of the Lorenz attractor. Akademiia Nauk SSSR Doklady. 1977;234:336–339 (in Russian).

3. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type. *Trudy Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo*. 1982;44 :150–212 (in Russian).
4. Guckenheimer J, Williams RF. Structural stability of Lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*. 1979;50:59–72.
5. Marsden JE, McCracken M, Guckenheimer J. A Strange, Strange Attractor. In: *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. New York: Springer; 1976. C. 368–381. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6\_25.
6. Williams RF. The structure of Lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*. 1979;50: 73–99. DOI: 10.1007/BF02684770.
7. Tucker W. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*. 1999;328(12):1197–1202. DOI: 10.1016/s0764-4442(99)80439-x.
8. Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system. *Nonlinearity*. 2021;34(2):1–30.
9. Turaev DV, Shilnikov LP. An example of a wild strange attractor. *Sb. Math*. 1998;189:291–314.
10. Turaev DV, Shilnikov LP. Pseudohyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-type attractors. *Doklady Mathematics*. 2008;77(1):17–21. DOI: 10.1134/S1064562408010055.
11. Moon S, Seo JM, Beom-Soon H, Park J. A physically extended Lorenz system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(6):063129. DOI: 10.1063/1.5095466.
12. Dhooge A, Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HGE, Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 2008;14(2):147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
13. De Witte V, Govaerts W, Kuznetsov YA, Friedman M. Interactive initialization and continuation of homoclinic and heteroclinic orbits in MATLAB. *ACM Trans. Math. Software*. 2012;38(3):1–34. DOI: 10.1145/2168773.2168776.
14. Shilnikov LP. Bifurcation theory and the Lorenz model. In: Marsden J., McCracken M. (eds) *Appendix to Russian edition of The Hopf Bifurcation and Its Applications*. M.: Mir; 1980. P. 317–335.
15. Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*. 1980;15(1):9–20.
16. Lyubimov DV, Zaks MA. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1983;9(1–2):52–64.
17. Rovella A. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor. *Bol. da Soc. Bras. de Matemática Bull. Braz. Math. Soc*. 1993;24:233–259. DOI: 10.1007/BF01237679.
18. Barrio R, Shilnikov A, Shilnikov L. Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2012;22(04):1230016. DOI: 10.1142/S0218127412300169.
19. Xing T, Barrio R, Shilnikov A. Symbolic quest into homoclinic chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014;24(08):1440004. DOI: 10.1142/S0218127414400045.
20. Pusuluri K, Shilnikov A. Homoclinic chaos and its organization in a nonlinear optics model. *Physical Review E*. 2018;98(4):040202. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.040202.
21. Pusuluri K, Meijer HGE, Shilnikov AL. Homoclinic puzzles and chaos in a nonlinear laser model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021;93:105503.
22. Bykov VV. On the generation of a non-trivial hyperbolic set from a contour formed by separatrices of saddles. In: *Methods of qualitative theory and bifurcation theory*. Gorky: Gorky Univ. Press; 1978. P. 22–32.
23. Bykov VV. The bifurcations of separatrix contours and chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993;62(1–4):290–299.

24. Bykov VV, Shilnikov AL. On the boundaries of the domain of existence of the Lorenz attractor. *Selecta Mathematica Sovietica*. 1992;11(4):375–382.
25. Zaks MA, Lyubimov V. Anomalously fast convergence of a doubling-type bifurcation chain in systems with two saddle equilibria. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1984;87:1696–1699.
26. Zaks MA, Lyubimov DV. Bifurcation sequences in the dissipative systems with saddle equilibria. *Banach Center Publications*. 1989;23(1):367–380. DOI: 10.4064/-23-1-367-380.



*Сухарев Дмитрий Михайлович* — родился в 1999 году. Окончил Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». В настоящее время обучается в аспирантуре НИУ «Высшая школа экономики» на программе «Математика».

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: dmsukharev@edu.hse.ru



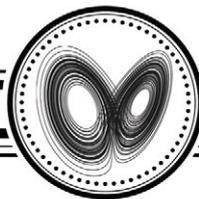
*Корякин Владислав Андреевич* — родился в 2000 году. Окончил бакалавриат Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». В данный момент обучается в магистратуре и работает стажером-исследователем в лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, где занимается разработкой параллельных методов исследования многомерных динамических систем.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: vakoryakin@edu.hse.ru  
 ORCID: 0000-0001-5640-8345



*Казаков Алексей Олегович* — родился в 1987 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2010). Доктор физико-математических наук (2021, НИУ ВШЭ). Работает главным научным сотрудником в лаборатории динамических систем и приложений, профессором на кафедре фундаментальной математики НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Его научные интересы связаны с исследованиями динамического хаоса, бифуркаций и странных аттракторов. Автор более 50 научных работ в ведущих российских и международных журналах.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: kazakovdz@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0003-0002-6553  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 826649



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003140

EDN: UNTBDB

## О дискретных аттракторах Лоренца различных типов

А. С. Гонченко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

E-mail: [✉agonchenko@mail.ru](mailto:agonchenko@mail.ru)

Поступила в редакцию 26.06.2024, принята к публикации 31.07.2024,

опубликована онлайн 25.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Цель настоящей работы — развитие теории дискретных аттракторов лоренцевского типа в случае трехмерных отображений. При этом особое внимание будет уделено стандартным дискретным аттракторам Лоренца, а также дискретным аттракторам Лоренца с осевой симметрией (то есть с симметрией  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ , характерной для потоков с аттракторами Лоренца). Основные *результаты* работы связаны с построением элементов классификации таких аттракторов. Для различных типов дискретных аттракторов Лоренца мы опишем их основные геометрические свойства и свойства динамики, а также представим основные феноменологические бифуркационные сценарии, в которых они возникают. В работе будут также рассмотрены конкретные примеры дискретных аттракторов Лоренца различных типов в трехмерных квадратичных отображениях, таких как трехмерные отображения Эно и квадратичные отображения с осевой симметрией и постоянным якобианом. Для последних будут построены их нормальные формы — универсальные отображения, к которым сводится любое отображение из данного класса с помощью линейных преобразований координат.

**Ключевые слова:** аттрактор Лоренца, бифуркация, трехмерное отображение Эно, глобальная симметрия, бифуркационный сценарий.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-30008). Работа также выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, Соглашение FSWR-2020-0036 (численные эксперименты в разделах 1.4, 2 и 3).

**Для цитирования:** Гонченко А. С. О дискретных аттракторах Лоренца различных типов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 832–857. DOI: 10.18500/0869-6632-003140. EDN: UNTBDB

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On discrete Lorenz attractors of various types

A. S. Gonchenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [agonchenko@mail](mailto:agonchenko@mail)

Received 26.06.2024, accepted 31.07.2024, available online 25.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The purpose of this work is to develop the theory of discrete attractors of Lorenz type in the case of three-dimensional maps. In this case, special attention will be paid to standard discrete Lorenz attractors, as well as discrete Lorenz attractors with axial symmetry (i.e. with symmetry  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$  characteristic of flows with the Lorenz attractors). The main results of the work are related to the construction of elements of classification of such attractors. For various types of discrete Lorenz attractors, we will describe their basic geometric and dynamical properties, and also present the main phenomenological bifurcation scenarios in which they arise. In the work we also consider specific examples of discrete Lorenz attractors of various types in three-dimensional quadratic maps such as three-dimensional Hénon maps and quadratic maps with axial symmetry and constant Jacobian. For the latter, their normal forms will be constructed — universal maps, to which any map from a given class can be reduced by means of linear coordinate transformations.

**Keywords:** Lorenz attractor, bifurcation, three-dimensional Hénon map, global symmetry, bifurcation scenario.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project 23-71-30008). The work was also supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Agreement FSWR-2020-0036 (numerical experiments in Sections 1.4, 2 and 3).

**For citation:** Gonchenko AS, On discrete Lorenz attractors of various types. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):832–857. DOI: 10.18500/0869-6632-003140

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Аттрактор Лоренца, открытый в знаменитой работе Эдварда Лоренца [1] в 1963 году, является, наверное, самым известным из большого семейства странных аттракторов. Как это часто бывает с выдающимися открытиями, он стал известен математическому миру лишь спустя более чем 10 лет после того, как статья [1] была опубликована. Тема оказалась настолько актуальной и интересной, что уже в первых математических работах по аттрактору Лоренца, см., например, [2–5], была получена целая серия фундаментальных результатов об этом новом для того времени феномене динамики. При этом были изучены самые разные ее аспекты: были построены геометрические модели аттракторов Лоренца, в том числе знаменитая модель Афраймовича–Быкова–Шильникова [4, 5], были изучены бифуркационные сценарии их возникновения [6–8] и статистические свойства [9, 10], были найдены инварианты топологической эквивалентности, так называемые нидинг-инварианты [11, 12] и т. п. В целом с точки зрения теории динамических систем аттрактор Лоренца оказался необычайно интересным объектом, который не только внес значительный вклад в эту теорию, но и породил целый ряд новых задач и новых направлений. Так, например, возникла теория сингулярно-гиперболических аттракторов [13, 14], включающая аттракторы Лоренца как ее эталонный случай, а также далеко продвинутая теория псевдогиперболических аттракторов [15, 16], в которой аттракторы Лоренца являются самыми простыми ее представителями — системами без гомоклинических касаний.

И в этой связи к одним из наиболее интересных, на наш взгляд, результатов, полученных в последнее время в этом направлении, можно отнести открытие так называемых *дискретных гомоклинических аттракторов* [17–21]. Этим термином мы обозначаем, прежде всего, странные аттракторы многомерных диффеоморфизмов, которые содержат только одну седловую

неподвижную точку и целиком ее неустойчивое многообразие (вместе со всеми гомоклиническими траекториями). В настоящей работе мы будем рассматривать трехмерные диффеоморфизмы, которые в теории динамических систем имеют как вполне самостоятельный интерес, так и могут выступать в роли отображений Пуанкаре для четырехмерных потоков.

Насколько мы знаем, первые содержательные примеры дискретных гомоклинических аттракторов в случае трехмерных диффеоморфизмов были приведены в работе [17], в которой они были найдены в трехмерных отображениях вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2, \quad (1)$$

где  $M_1, M_2$  и  $B$  — параметры, при этом  $B$  — это якобиан отображения (1). На рис. 1 показаны фазовые портреты некоторых таких аттракторов.

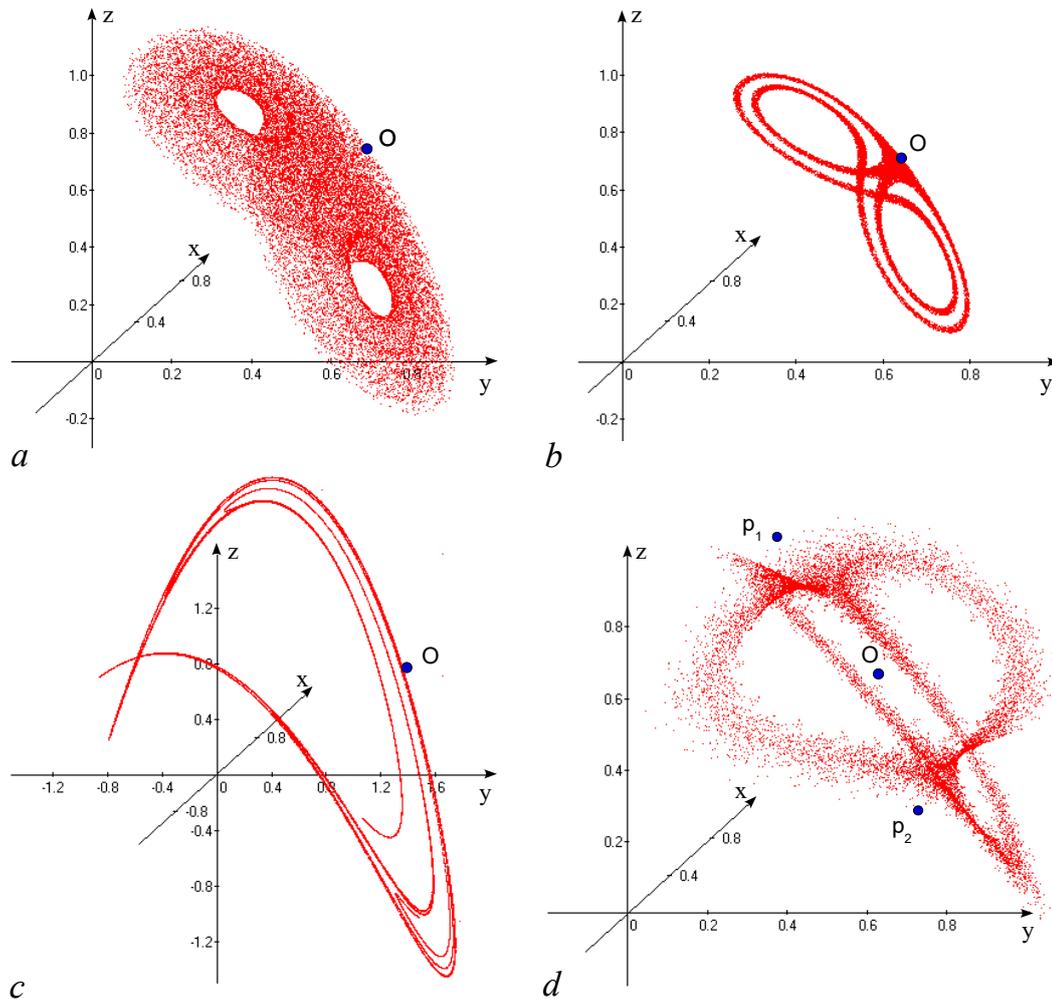


Рис. 1. Примеры гомоклинических аттракторов отображения (1) — по статье [17]. *a-b* — Дискретные аттракторы Лоренца при  $B = 0.7$ ;  $M_1 = 0$  и  $M_2 = 0.85$  (*a*),  $M_2 = 0.815$  (*b*). *c* — Аттрактор типа 2D-аттрактора Эно при  $B = 0.1$ ;  $M_1 = 1.4$ ;  $M_2 = 0.2$ . *d* — Гомоклинический аттрактор периода 2 (содержащий седловую орбиту  $(O_1, O_2)$  периода 2) при  $B = -0.95$ ,  $M_1 = 1.77$ ,  $M_2 = -0.925$  (цвет онлайн)

Fig. 1. Examples of homoclinic attractors for map (1) — by the paper [17]. *a-b* — Discrete Lorenz attractors at  $B = 0.7$ ;  $M_1 = 0$  and  $M_2 = 0.85$  (*a*),  $M_2 = 0.815$  (*b*). *c* — An attractor similar to a 2D Hénon-like attractor at  $B = 0.1$ ;  $M_1 = 1.4$ ;  $M_2 = 0.2$ . *d* — A period-2 homoclinic attractor (containing a saddle orbit  $(O_1, O_2)$  of period 2) at  $B = -0.95$ ,  $M_1 = 1.77$ ,  $M_2 = -0.925$  (color online)

Аттракторы, показанные на рис. 1, *a*, *b*, очень похожи на классические аттракторы Лоренца. Аттрактор на рис. 1, *c* также является дискретным гомоклиническим аттрактором, похожим на двумерный аттрактор Эно. Напомним, что классический аттрактор Эно [22] существует у стандартного двумерного отображения Эно

$$\bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + M_2 z - z^2 \quad (2)$$

при  $M_1 = 1.4$ ,  $M_2 = 0.3$ , у которого якобиан  $J = -M_2$  отрицателен, то есть соответствующее двумерное отображение является неориентируемым. Так как при  $B = 0$  трехмерное отображение (1) превращается в двумерное (2), то неудивительно, что у него при малых  $B > 0$ , когда оно ориентируемо, существует аттрактор, похожий на аттрактор Эно. С другой стороны, аттракторы, показанные на рис. 1, *a*, *b* и *d*, существенно трехмерные. Кроме того, аттрактор рис. 1, *d* является еще и неориентируемым — соответствующее трехмерное отображение имеет якобиан  $B = -0.95 < 0$ .

В настоящей работе мы будем рассматривать дискретные аттракторы лоренцевского типа. Условно говоря, известные на сегодня такие дискретные аттракторы можно разбить на 3 класса. Это (i) стандартные аттракторы Лоренца, (ii) аттракторы Лоренца с осевой симметрией, (iii) аттракторы других типов, например, с несколькими неподвижными точками. Что касается стандартных аттракторов Лоренца, то первые их примеры были найдены еще в работе [17], см. рис. 1, *a*, *b*, а основные элементы их качественной теории были построены в работах [18–20]. Аттракторы с осевой симметрией были открыты в нашей недавней работе [23]. Такие аттракторы, так же как и стандартные, содержат только одну неподвижную точку, но некоторые их типы (например, скрученные (twisted) аттракторы, см. раздел 3) весьма мало похожи на классические аттракторы Лоренца. Некоторые примеры дискретных аттракторов третьего класса были найдены в работах [24, 25], и они по своим геометрическим свойствам похожи на аттракторы Лоренца с несколькими состояниями равновесия. О последних вообще мало что известно, так что некоторые результаты работ [24, 25] о дискретных аттракторах можно рассматривать в качестве определенного продвижения и в теории аттракторов трехмерных потоков.

Содержание работы. В разделе 1 рассматриваются стандартные дискретные аттракторы Лоренца. В подразделе 1.1 приводится их геометрическое определение. В подразделе 1.2 обсуждаются гиперболические свойства дискретных аттракторов Лоренца. Здесь мы кратко напоминаем понятие пседогиперболического аттрактора по Тураеву–Шильникову, а также объясняем его особенности по отношению к дискретным аттракторам Лоренца. В подразделе 1.3 обсуждаются феноменологические сценарии возникновения дискретных аттракторов Лоренца в однопараметрических семействах отображений, а в подразделе 1.4 приводятся примеры таких сценариев для конкретных моделей (трехмерные отображения Эно и модель кельтского камня). Новый класс аттракторов — дискретные аттракторы Лоренца с осевой симметрией — рассматривается в разделе 2. В подразделе 2.1 выделяется универсальный класс осесимметричных квадратичных отображений с постоянным якобианом, для которых также строятся некоторые элементы их алгебраической теории. В подразделе 2.2 рассматриваются дискретные аттракторы классического типа, которые похожи на аттракторы, получаемые при дискретизации по времени потока с аттрактором Лоренца. В разделе 3 обсуждается вопрос о разнообразии дискретных аттракторов лоренцевского типа в случае отображений с осевой симметрией и приводятся некоторые новые типы таких аттракторов, имеющих, в частности, необычные гомоклинические структуры, о которых речь идет в подразделе 3.1.

## 1. Стандартные дискретные аттракторы Лоренца

Первые примеры стандартных дискретных аттракторов Лоренца были приведены в работе [17] для трехмерных отображений Эно вида (1). В нашей работе [18] с Л. П. Шильниковым было показано, что такие аттракторы могут возникать в результате сравнительно простых

бифуркационных сценариев в однопараметрических семействах трехмерных отображений, и поэтому становится неудивительным, что они часто встречаются в различных моделях из приложений. В этом параграфе мы обсудим основные свойства стандартных дискретных аттракторов Лоренца и начнем с их геометрического определения.

**1.1. К определению дискретного аттрактора Лоренца.** Пусть аттрактор  $A$  трехмерного ориентируемого диффеоморфизма  $T$  обладает следующими свойствами.

(i)  $A$  — гомоклинический аттрактор, содержащий седловую неподвижную точку  $O$  с мультипликаторами  $\gamma, \lambda_1, \lambda_2$  такими, что  $\gamma < -1$ ,  $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$  и  $|\lambda_2| < \lambda_1$ .

(ii) Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — неустойчивые сепаратрисы точки  $O$ , то есть связные одномерные компоненты множества  $W^u(O) \setminus O$ . Тогда все точки пересечения сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с диском  $W_{loc}^s(O)$  принадлежат ровно одной половине диска, на которые его разделяет одномерное сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}(O)$ .

(iii) У аттрактора  $A$  существует окрестность — открытая область  $D$ , имеющая форму шара с двумя дырками, в которых лежит седло-фокусная орбита  $(p_1, p_2)$  периода 2 с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Пусть  $L_i \subset D$ ,  $i = 1, 2$ , — замкнутая кривая, которая состоит из двух отрезков: отрезок сепаратрисы  $\Gamma_i$  от точки  $O$  до точки  $h_i$  первого пересечения сепаратрисы  $\Gamma_i$  с  $W_{loc}^s(O)$  и простой дуги на  $W_{loc}^s(O)$ , соединяющей точки  $h_i$  и  $O$ , см. рис. 2. Предполагается, что кривая  $L_i$  гомотопически нестягиваема в  $D$ .

(iv) Седловая величина  $\sigma = |\lambda_1||\gamma|$  точки  $O$  больше 1.

(v) Аттрактор  $A$  является псевдогиперболическим.

Заметим, что область  $D$  является поглощающей областью аттрактора  $A$  в том случае, когда он не имеет лакун. Напомним, что в случае потокового аттрактора Лоренца (тривиальной) лакуной называется открытая область (дырка внутри аттрактора), содержащая седловой предельный цикл, устойчивое многообразие которого не пересекает аттрактор [5]. Соответственно, в случае дискретного аттрактора Лоренца лакуна содержит седловую замкнутую инвариантную кривую с тем же свойством. Отметим, для сравнения, что аттрактор рис. 1,  $a$  не имеет лакун (для него область  $D$  является поглощающей), тогда как аттрактор рис. 1,  $b$  содержит лакуну типа полнотория  $\tau_3$  (для него уже область  $D \setminus \tau_3$  является поглощающей).

Из этих условий первые три относятся больше к геометрии аттрактора  $A$ , который, благодаря условиям (ii)–(iii), будет похож на лоренцевский. Кроме того, условие  $\gamma < -1$  из (i) также гарантирует (внутреннюю) симметрию аттрактора в силу того, что сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  образуют симметричную конфигурацию:  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$  и  $T(\Gamma_2) = \Gamma_1$ .

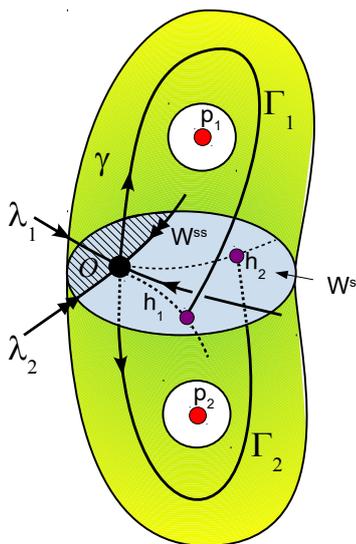


Рис. 2. К определению дискретного аттрактора Лоренца. Неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$  симметричны,  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$  и  $T(\Gamma_2) = \Gamma_1$ , и пересекают диск  $W_{loc}^s(O) \cap D$  только в одной из его половин, на которые его разделяет одномерное сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}(O)$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Towards the definition of the discrete Lorenz attractor. The unstable separatrices  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  of the point  $O$  are symmetric,  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$  and  $T(\Gamma_2) = \Gamma_1$ , and intersect a disk  $W_{loc}^s(O) \cap D$  only in one of its halves, into which the disk is divided by a one-dimensional strongly stable manifold  $W^{ss}(O)$  (color online)

**1.2. О гиперболических свойствах дискретных аттракторов Лоренца.** Условия (iv) и (v) являются условиями «слабой гиперболичности» аттрактора. При этом если условие (iv) не выполнено, то есть  $\sigma < 1$ , то аттрактор  $A$  является заведомо квазиаттрактором<sup>1</sup>, поскольку гомоклинические касания инвариантных многообразий точки  $O$  будут такими, что их бифуркации приводят к возникновению устойчивых периодических траекторий и даже их счетного множества [27, 28]. Если выполнено условие (iv), то указанные гомоклинические касания к точке  $O$  не будут порождать каких-либо устойчивых инвариантных множеств [29]. Однако это еще не гарантирует робастной хаотичности (здесь псевдогиперболичности) аттрактора.

Тем не менее условие (iv) имеет самостоятельный интерес, поскольку оно легко проверяется и является необходимым для выполнения условия (v). Поэтому аттрактор  $A$ , для которого выполнены условия (i)–(iv), будем называть *стандартным дискретным аттрактором Лоренца*. Такими аттракторами являются, например, аттракторы, показанные на рис. 1,  $a$ ,  $b$ . Однако, как показано в [30], аттрактор рис. 1,  $a$  не является псевдогиперболическим в отличие от аттрактора рис. 1,  $b$ . Но оба они являются, конечно, аттракторами лоренцевского типа.

Условия (i)–(iv) легко проверяются, чего нельзя сказать об условии (v), поскольку оно является глобальной характеристикой аттрактора и требует для его проверки специальных методов, см. [30, 31].

Понятие *псевдогиперболического аттрактора* было введено в работах Тураева и Шильникова [15, 16]. По сути оно является некоторым далеко идущим обобщением и ослаблением понятия гиперболического аттрактора. Напомним, что в случае гиперболического множества (аттрактора) требуется существование инвариантных относительно дифференциала  $DT$  отображения  $T$  линейных подпространств  $E^s$  и  $E^u$  с дополнительными размерностями такими, что  $DT$  экспоненциально сжимает и соответственно растягивает все векторы в  $E^s$  и  $E^u$ . В отличие от этого, в случае инвариантного псевдогиперболического множества (аттрактора) требуется непрерывное разложение на подпространства  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$  (сильно устойчивое и центрально неустойчивое) такие, что  $DT$  экспоненциально сжимает все векторы в  $E^{ss}$  и растягивает объемы в  $E^{cu}$ . При этом в  $E^{cu}$  могут существовать и сжатия вдоль некоторых направлений, но все они равномерно слабее, чем любое сжатие в  $E^{ss}$ . Заметим, что условия гиперболичности и псевдогиперболичности являются грубыми, то есть выполняются для всех близких систем. При этом для странных аттракторов они автоматически гарантируют существование положительного максимального показателя Ляпунова у любой траектории аттрактора. Например, для псевдогиперболического аттрактора это является следствием экспоненциального растяжения объемов в  $E^{cu}$ .

Заметим, что в случае псевдогиперболического аттрактора Лоренца трехмерного отображения  $\dim E^{ss} = 1$ ,  $\dim E^{cu} = 2$ . При этом сама неподвижная точка  $O$  также должна быть псевдогиперболической. Для нее  $E^{ss}$  — это собственное направление, отвечающее мультипликатору  $\lambda_2$ , а  $E^{cu}$  — это плоскость, натянутая на собственные вектора, отвечающие мультипликаторам  $\lambda_1$  и  $\gamma$ , и на которой будет иметь место растяжение площадей, если  $\sigma > 1$ .

**1.3. О феноменологических сценариях возникновения стандартных дискретных аттракторов Лоренца.** Одной из наиболее интересных особенностей дискретных гомоклинических аттракторов является то, что они могут возникать в однопараметрических семействах (трехмерных) отображений в результате довольно простых универсальных бифуркационных сценариев [18, 20, 21].<sup>2</sup> Это в полной мере относится и к стандартным дискретным аттракторам

<sup>1</sup>Термин «квазиаттрактор» был введен Афраймовичем и Шильниковым [26] для обозначения аттракторов, кажущихся странными на физическом уровне. Такие аттракторы либо сами, либо сколь угодно близко к ним содержат устойчивые периодические орбиты, которые, однако, не обнаруживаются в экспериментах, поскольку имеют чрезвычайно узкие области притяжения.

<sup>2</sup>Идея построения таких сценариев восходит к работе Шильникова [32], в которой он описал феноменологический сценарий возникновения спирального хаоса в случае трехмерных и многомерных потоков.

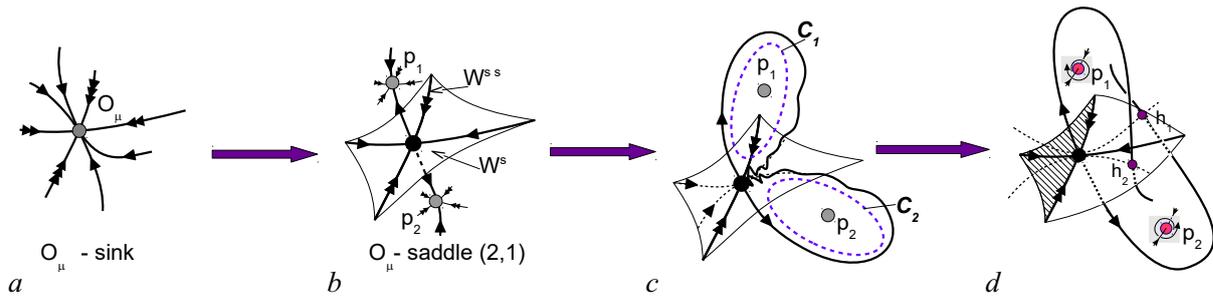


Рис. 3. Иллюстрация основных этапов феноменологического сценария возникновения стандартного дискретного аттрактора Лоренца: (a) — устойчивая неподвижная точка  $O_\mu \rightarrow$  (b) после бифуркации удвоения периода: точка  $O_\mu$  становится седлом типа (2,1), и аттрактором теперь является орбита  $(p_1, p_2)$  периода 2  $(p_1, p_2) \rightarrow$  (c) возникновение гомоклинической структуры (типа «восьмерка-бабочка») у точки  $O_\mu$  и формирование из нее замкнутой инвариантной кривой  $(C_1, C_2)$  периода 2, то есть  $T_\mu(C_1) = C_2$  и  $T_\mu(C_2) = C_1$  (эта кривая является седловой, если  $\sigma > 1$ )  $\rightarrow$  (d) дискретный аттрактор Лоренца становится единственным притягивающим инвариантным множеством, когда орбита  $(p_1, p_2)$  теряет устойчивость (в результате бифуркации Андронова–Хопфа) одним из двух типичных способов, см. опции [sc1] и [sc2] (цвет онлайн)

Fig. 3. Illustration of main stages of the phenomenological scenario of the emergence of standard discrete Lorenz attractor: (a) — a stable fixed point  $O_\mu \rightarrow$  (b) — after a period-doubling bifurcation: the point  $O_\mu$  becomes a saddle of type (2,1), and the attractor is now the orbit of period 2  $(p_1, p_2) \rightarrow$  (c) — the emergence of a homoclinic structure (of the “figure-eight-butterfly” type) at the point  $O_\mu$  and the formation of a closed invariant curve of period 2 from the butterfly, i.e.  $T_\mu(C_1) = C_2$  and  $T_\mu(C_2) = C_1$  (this curve is a saddle if  $\sigma > 1$ )  $\rightarrow$  (d) — the discrete Lorenz attractor becomes the only attracting invariant set when the orbit  $(p_1, p_2)$  loses stability (as a result of the Andronov–Hopf bifurcation) in one of two typical ways, see options [sc1] and [sc2] (color online)

Лоренца. Схематически основные этапы типичного такого сценария показаны на рис. 3 для случая однопараметрического семейства  $T_\mu$  трехмерных ориентируемых отображений.

Этот сценарий начинается с тех значений  $\mu$ , при которых отображение  $T_\mu$  имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку (сток)  $O_\mu$ . Далее, при некотором  $\mu$  точка  $O_\mu$  теряет устойчивость в результате мягкой (суперкритической) бифуркации удвоения периода:  $O_\mu$  становится седлом типа (2,1) и рождается устойчивая орбита  $(p_1, p_2)$  периода 2, которая становится аттрактором. При изменении параметра эта орбита теряет устойчивость, как мы предполагаем, одним из двух следующих типичных способов:

- [sc1] орбита  $(p_1, p_2)$  теряет устойчивость в результате жесткой (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа: седловая инвариантная кривая  $(C_1, C_2)$  влипает в орбиту  $(p_1, p_2)$  и последняя становится седло-фокусной;
- [sc2] устойчивая орбита  $(p_1, p_2)$  претерпевает мягкую (суперкритическую) бифуркацию Андронова–Хопфа, после которой сама орбита становится седло-фокусной и рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая  $(S_1, S_2)$  периода 2, а затем устойчивая кривая  $(S_1, S_2)$  сливается с седловой кривой  $(C_1, C_2)$  и обе исчезают.

Заметим, что инвариантная кривая периода 2  $(C_1, C_2)$  формируется из гомоклинической конфигурации «бабочка» неустойчивых сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O_\mu$  в тот момент, когда инвариантные многообразия точки  $O_\mu$  начинают пересекаться, см. рис. 3, c. Кроме того, что важно, инвариантная кривая  $(C_1, C_2)$  будет седловой при  $\sigma > 1$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup>При  $\sigma < 1$  гомоклиническая бабочка тоже возникает, но из нее может формироваться либо устойчивая инвариантная кривая периода 2, либо симметричная двойной длины устойчивая «восьмерочная» инвариантная кривая. При этом дальнейшее развитие аттрактора может пойти по пути разрушения этих инвариантных кривых и образования квазиаттрактора типа «тор-хаос» по Афраймовичу–Шильникову [26]. По этой причине условие  $\sigma > 1$  является весьма важным для реализации сценариев с аттракторами лоренцевского типа.

**1.4. Примеры сценариев в трехмерных отображениях.** Тот факт, что стандартные дискретные аттракторы Лоренца могут возникать в результате простых и реалистичных бифуркационных сценариев, показывает, что они должны обнаруживаться в различных моделях из приложений. Насколько нам известно, первой такой прикладной моделью была неголомная модель кельтского камня [33].

В качестве первого примера рассмотрим бифуркационные сценарии с дискретным аттрактором Лоренца, наблюдаемые в трехмерном отображении Эно вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = Bx + Cy + Az - z^2, \quad (3)$$

где  $A, B$  и  $C$  – параметры. Это отображение получается из отображения (1), если одну из его неподвижных точек сдвинуть в начало координат. Картинки численно найденных аттракторов отображения (3) с  $B = 0.7$  показаны на рис. 4, на котором также показан фрагмент карты показателей Ляпунова на некоторой области значений параметров  $A$  и  $C$ .

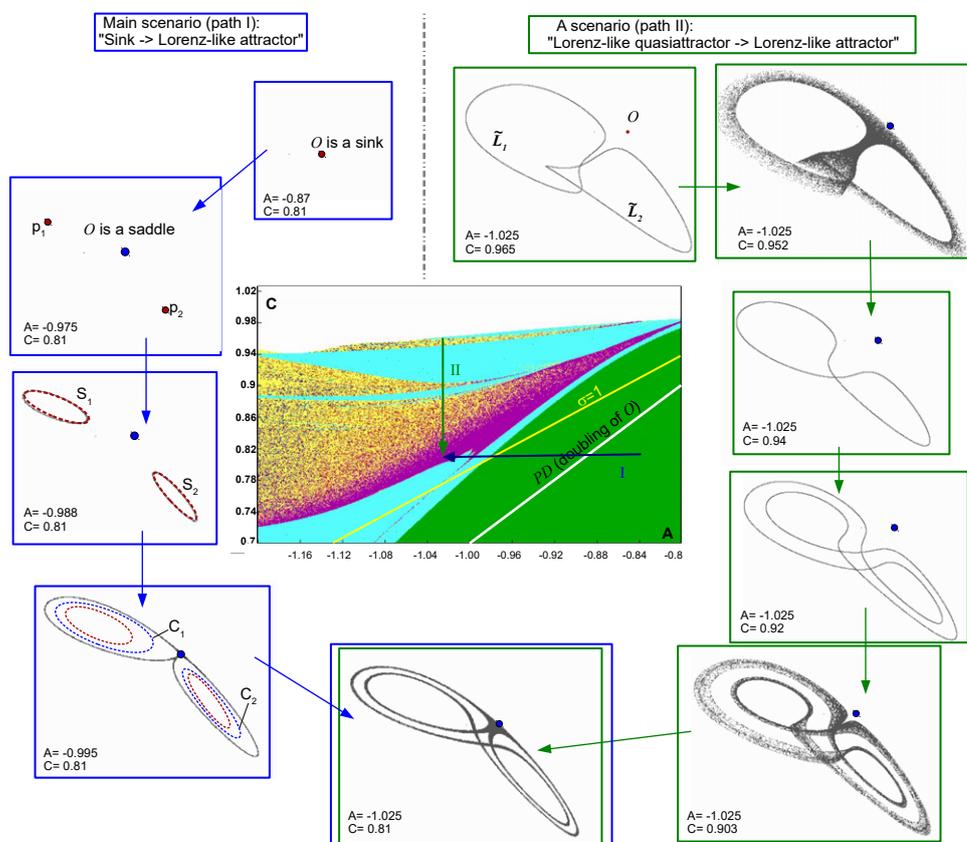


Рис. 4. Картинки численно найденных аттракторов отображения (3) с  $B = 0.7$  при варьировании параметров  $A$  и  $C$  вдоль путей I и II с одной и той же конечной точкой  $A = -1.025; C = 0.81$ . Путь I ( $-1.025 \leq A \leq -0.87; C = 0.81$ ) – это фактически иллюстрация к описанному в подразделе 1.3 основному сценарию возникновения стандартного дискретного аттрактора (с опцией [sc2]). На пути II ( $A = -1.025; 0.81 \leq C \leq 0.952$ ) проиллюстрирован несколько необычный сценарий с началом вблизи лоренцевского квазиаттрактора (показанного при  $A = -1.025; C = 0.952$ ) (цвет онлайн)

Fig. 4. Pictures of numerically found attractors of map (3) with  $B = 0.7$  with varying parameters along paths I and II with the same end point  $A = -1.025; C = 0.81$ . Path I ( $-1.025 \leq A \leq -0.87; C = 0.81$ ) is actually an illustration of the basic scenario of the emergence of standard discrete attractor (with the [sc2] option) described in subsection 1.3. Path II ( $A = -1.025; 0.81 \leq C \leq 0.952$ ) illustrates a somewhat unusual scenario with the beginning near the Lorenz quasi-attractor (shown at  $A = -1.025; C = 0.952$ ) (color online)

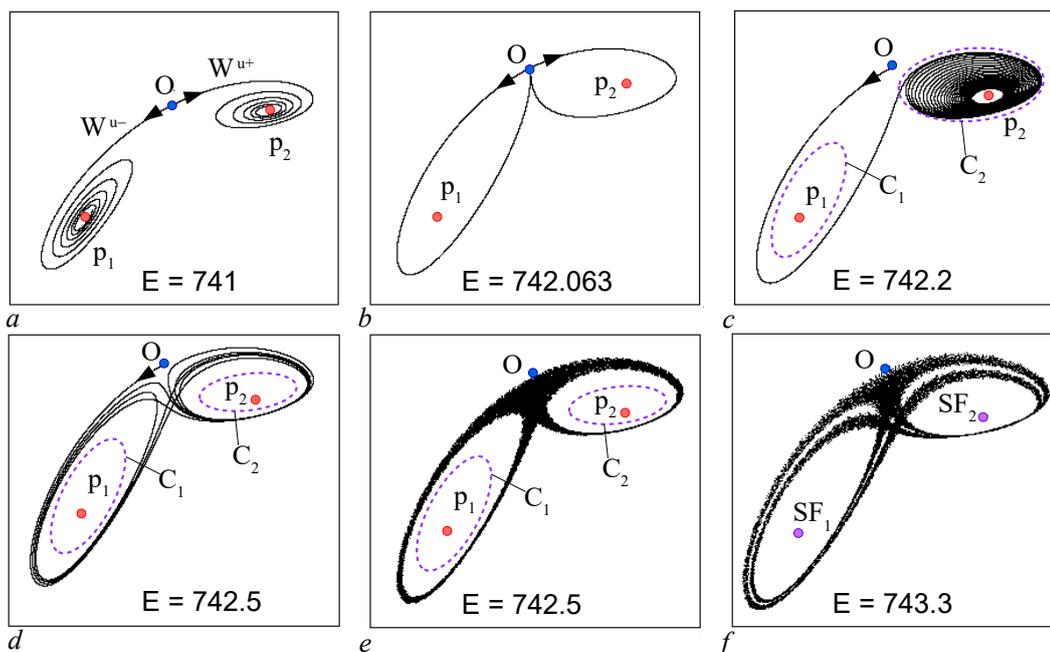


Рис. 5. Пример сценария в модели кельтского камня из [35] при варьировании одного из параметров (энергии  $E$  камня) (цвет онлайн)

Fig. 5. An example of a scenario in the Celtic stone model from [35] when varying one of parameters (the stone energy  $E$ ) (color online)

Здесь мы проследили два маршрута, отмеченные стрелками I и II на диаграмме показателей Ляпунова на плоскости параметров  $(A, C)$ , см. рис. 4. Цвета на этой диаграмме соответствуют следующим устойчивым режимам: зеленый — устойчивая периодическая траектория; бирюзовый — квазипериодическая (замкнутая инвариантная кривая); желтый и пурпурный — странный аттрактор. Желтый цвет отвечает странному аттрактору (квазиаттрактору), отделенному от неподвижной точки  $O$ , а пурпурный — стандартному дискретному аттрактору Лоренца. При этом области с вкраплениями желтых и пурпурных пикселей отвечают, по-видимому, квазиаттракторам лоренцевского типа, а сплошной пурпурный цвет указывает на область существования псевдогиперболического дискретного аттрактора Лоренца [17, 24].

На рис. 4 финальный аттрактор (при  $A = -1.025, C = 0.81$ ) является псевдогиперболическим, однако аттрактор лоренцевского типа в начале сценария II (при  $A = -1.025, C = 0.952$ ) заведомо является квазиаттрактором. При этом он такой, что в нем при варьировании параметров легко обнаруживаются хорошо заметные окна устойчивости, два из которых отмечены. При соответствующих значениях параметров аттрактором в них является либо замкнутая инвариантная кривая периода 2 (при  $A = -1.025, C = 0.965$ ), либо восьмерочная инвариантная кривая (при  $A = -1.025, C = 0.94$ ). Последняя в сценарии II играет важную роль, так как порождает каскад бифуркаций, в том числе бифуркаций удвоения инвариантных кривых<sup>4</sup>, ведущих к формированию псевдогиперболического дискретного аттрактора Лоренца.

Приведем еще один пример сценария, см. рис. 5, наблюдаемый в модели кельтского камня [35], в котором реализуется опция [sc1]: орбита  $(p_1, p_2)$  теряет устойчивость в результате

<sup>4</sup>Более подробно о бифуркациях удвоения инвариантных кривых см. в нашей статье [34]. В частности, там было показано, что такие бифуркации могут быть двух видов: типа «удвоение компонент» и «удвоение длины». В частности, с восьмерочной инвариантной кривой, рис. 4 (при  $A = -1.025, C = 0.94$ ), происходит бифуркация удвоения компонент: она становится седловой, а в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые примерно той же длины, рис. 4 при  $A = -1.025, C = 0.92$ .

жесткой (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа, когда седловая инвариантная кривая  $(C_1, C_2)$  влипает в орбиту  $(p_1, p_2)$ , которая становится седло-фокусной, и дискретный аттрактор Лоренца становится единственным аттрактором в модели<sup>5</sup>.

Интересно, что в указанной модели кельтского камня можно также проследить перестройки в асимптотическом поведении сепаратрис неподвижной точки  $O$  при переходе через очень узкую зону образования гомоклинической бабочки, рис. 5, *a–c*. В случае отображения (1) такую перестройку, даже если она существует, весьма трудно уловить.

## 2. Дискретные аттракторы Лоренца с осевой симметрией

Основные результаты этой статьи относятся к исследованию тех свойств дискретных аттракторов Лоренца, которые делают их похожими на аттракторы трехмерных потоков. Однако между ними существуют принципиальные различия. Прежде всего, это касается особенностей их гомоклинических структур. Аттрактор Лоренца является сингулярно-гиперболическим и не имеет гомоклинических касаний. Дискретный аттрактор Лоренца допускает гомоклинические касания и, соответственно, то отображение, в котором он существует, принадлежит области Ньюхауса [36, 37], то есть открытой области в пространстве динамических систем, в которой плотны системы с гомоклиническими касаниями. Бифуркации аттрактора Лоренца теоретически могут быть изучены полностью, поскольку у него существует ровно один непрерывный инвариант топологической эквивалентности, так называемый нидинг-инвариант [12], который полностью характеризует структуру аттрактора. У отображений с дискретными аттракторами Лоренца таких инвариантов, включая так называемые  $\Omega$ -модули [38, 39], бесконечно много, и поэтому здесь полный бифуркационный анализ невозможен [29, 39, 40].

Есть и еще очевидные различия уже в их геометрических структурах. Так, у аттрактора Лоренца неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  седлового равновесия  $O$  являются инвариантными множествами — это две разные *траектории* потока, а в дырках аттрактора лежат состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . У стандартного дискретного аттрактора Лоренца неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — множества, состоящие из *континуума траекторий*, которые полуинвариантны в том смысле, что  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$  и  $T(\Gamma_2) = \Gamma_1$ , и точки с одной сепаратрисы последовательно прыгают на другую и обратно при итерациях отображения, и, кроме того, в дырках стандартного дискретного аттрактора Лоренца лежит орбита  $(p_1, p_2)$  периода 2.

В связи с этим можно рассмотреть вопрос о существовании у трехмерных отображений таких дискретных аттракторов Лоренца, у которых сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  инвариантны по отдельности, то есть  $T(\Gamma_1) = \Gamma_1$  и  $T(\Gamma_2) = \Gamma_2$ , а в его дырках лежат неподвижные точки. Как показано в работе Шильникова и Тураева [29], подобные аттракторы существуют у трехмерных отображений Пуанкаре в случае периодически возмущенных систем с аттракторами Лоренца. Однако конкретных простых примеров таких отображений до недавнего времени не было известно. В связи с этим в работе [23] была рассмотрена задача, связанная с построением трехмерных отображений, которые были бы одновременно максимально простыми и максимально похожими по динамике и бифуркациям на трехмерные системы лоренцевского типа. Прежде всего, такое отображение  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F(x, y, z)$  должно быть симметричным с *осевой симметрией*  $\{x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z\}$  такой же, как у модели Лоренца, а также должно иметь *постоянный якобиан*  $J$  — аналог того, что система Лоренца имеет постоянную дивергенцию.

<sup>5</sup>Эта бифуркация аналогична бифуркации жесткой потери устойчивости двух симметричных друг другу равновесий в модели Лоренца, после которой мультистабильность исчезает и аттрактор Лоренца становится единственным аттрактором системы.

В результате в работе [23] был выделен достаточно интересный класс осесимметричных трехмерных отображений с постоянным якобианом. Основным интерес здесь представляют простейшие такие отображения — квадратичные, основные элементы теории мы обсудим в следующем параграфе.

**2.1. О трехмерных осесимметричных квадратичных отображениях с постоянным якобианом.** Напомним некоторые определения.

Рассмотрим отображение  $T : R^3 \rightarrow R^3$  общего вида

$$T : \bar{x} = Q_1(x, y, z), \bar{y} = Q_2(x, y, z), \bar{z} = Q_3(x, y, z).$$

Отображение  $T$  обладает осевой симметрией

$$S : x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z, \quad (4)$$

если  $Q_{1,2}(x, y, z) \equiv -Q_{1,2}(-x, -y, z)$ ,  $Q_3(x, y, z) \equiv Q_3(-x, -y, z)$  для всех  $(x, y, z) \in R^3$ . Отображение  $T$  называется распадающимся, если оно может быть представлено в виде прямой суммы отображений меньшей размерности (как, например, отображение  $\bar{x} = x, \bar{y} = y + x, \bar{z} = M + z + y^2$ , в котором координата  $x$  отделяется).

Следующая лемма показывает, какой универсальный вид имеют квадратичные осесимметричные трехмерные отображения с постоянным якобианом.

**Лемма 1.** Пусть  $T : R^3 \rightarrow R^3$  — квадратичное отображение с осевой симметрией и постоянным якобианом. Тогда либо с помощью некоторой линейной замены координат отображение  $T$  может быть приведено к виду

$$T : \bar{x} = y, \bar{y} = v_1x + v_2y + yz, \bar{z} = M + v_3z + \alpha y^2, \quad (5)$$

где  $\alpha = \pm 1$  и  $v_1, v_2, v_3, M$  — параметры (при этом  $M \equiv 0$  при  $v_3 \neq 1$ ), либо  $T$  является распадающимся отображением.

**Доказательство.** Линейное осесимметричное 3D-отображение имеет вид

$$\bar{x} = ax + by, \bar{y} = cx + dy, \bar{z} = M + ez, \quad (6)$$

где  $a, \dots, e$  и  $M$  — некоторые коэффициенты. Предположим, что выполнено условие

$$|b| + |c| \neq 0. \quad (7)$$

Тогда отображение (6) может быть приведено к виду

$$\bar{x} = y, \bar{y} = v_1x + v_2y, \bar{z} = M + v_3z. \quad (8)$$

Для этого, например, если  $b \neq 0$ , введем новую координату  $y_{new} = ax + by$  и положим  $v_1 = bc - ad$ ,  $v_2 = a + d$ ,  $v_3 = e$  (при  $b = 0, c \neq 0$  поменяем  $x$  и  $y$  местами и сделаем то же самое).

Теперь для отображения (8) рассмотрим его осесимметричное квадратичное расширение

$$T_2 : \begin{cases} \bar{x} = y + a_1xz + a_2yz, \\ \bar{y} = v_1x + v_2y + a_3xz + a_4yz, \\ \bar{z} = M + v_3z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4z^2 \end{cases} \quad (9)$$

и найдем условия, при которых это отображение имеет постоянный якобиан.

Для этого вычислим сначала его якобиан при  $x = y = 0$ . Получим

$$J(T_2)_{x=y=0} = \det \begin{pmatrix} a_1 z & 1 + a_2 z & 0 \\ v_1 + a_3 z & v_2 + a_4 z & 0 \\ 0 & 0 & v_3 + 2b_4 z \end{pmatrix},$$

и, таким образом,

$$J(T_2)_{x=y=0} = (v_3 + 2b_4 z) [-v_1 + z(v_2 a_1 - a_3 - v_1 a_2) + z^2(a_1 a_4 - a_2 a_3)].$$

Из условия  $J = \text{const}$  получаем, что  $b_4 = 0$ ,  $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0$ , а также  $v_2 a_1 - a_3 - v_1 a_2 \equiv 0$  для всех  $v_1$  и  $v_2$ . Тогда получаем, что  $a_1 = a_2 = a_3 = b_4 = 0$  и, таким образом, отображение  $T_2$  принимает вид

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + a_4 y z, \quad \bar{z} = M + v_3 z + b_1 x^2 + b_2 x y + b_3 y^2, \quad (10)$$

Это отображение имеет якобиан  $J = -v_1 v_3 + a_4 y(2b_1 x + b_2 y)$ . Он будет константой, если  $a_4 = 0$  или  $b_1 = b_2 = 0$ . Если  $a_4 = 0$ , то координаты  $x$  и  $y$  отделяются в (10). Поэтому предполагаем, что  $b_1 = b_2 = 0$  и, следовательно, отображение  $T_2$  принимает вид

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + a_4 y z, \quad \bar{z} = M + v_3 z + b_3 y^2, \quad (11)$$

в котором мы предполагаем, что  $a_4 b_3 \neq 0$  (при  $a_4 = 0$  отделяются  $x$  и  $y$ , а при  $b_3 = 0$  отделяется  $z$ ).

Введем новые координаты  $x = \beta X, y = \beta Y, z = \gamma Z$ , где  $\beta$  и  $\gamma$  некоторые коэффициенты. Тогда отображение (11) переписывается как

$$\bar{X} = Y, \quad \bar{Y} = v_1 X + v_2 Y + a_4 \gamma Y Z, \quad \bar{Z} = \frac{M}{\gamma} + v_3 Z + b_3 \frac{\beta^2}{\gamma} Y^2. \quad (12)$$

Положим  $a_4 \gamma = 1$ . Тогда  $b_3 \beta^2 \gamma^{-1} = a_4 b_3 \beta^2$ . Положим  $\beta^2 = |a_4 b_3|^{-1}$ , тогда  $a_4 b_3 \beta^2 = \alpha = \text{sign}(a_4 b_3)$ . Это дает нам искомую формулу (5) для отображения  $T_2$ .

Осталось рассмотреть случай, когда условие (7) не выполняется, то есть когда  $b = c = 0$  и исходное отображение  $T_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax + a_1 x z + a_2 y z, & \bar{y} &= dy + a_3 x z + a_4 y z, \\ \bar{z} &= M + ez + b_1 x^2 + b_2 x y + b_3 y^2 + b_4 z^2, \end{aligned} \quad (13)$$

а его якобиан при  $x = y = 0$  будет таким:

$$J_{x=y=0} = (e + 2b_4 z) (ad + (a_1 d + a_4 a)z + (a_1 a_4 - a_2 a_3)z^2).$$

Из условия  $J = \text{const}$  сразу получаем, что  $b_4 = 0$ ,  $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0$ , а также  $a_1 d + a_4 a = 0$  для произвольных  $a$  и  $d$ . Это дает, что  $a_1 = a_4 = 0$  и  $a_2 a_3 = 0$ . Если  $a_2 = 0$ , то, так как  $a_1 = 0$ , уравнение для  $\bar{x}$  принимает вид  $\bar{x} = ax$ , то есть координата  $x$  отделяется. Аналогично при  $a_3 = 0$  отделяется координата  $y$ .  $\square$

Таким образом, в силу леммы 1, по существу наибольший интерес представляют два таких отображения

$$T_- : \bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + y z, \quad \bar{z} = v_3 z - y^2, \quad (14)$$

и

$$T_+ : \bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + y z, \quad \bar{z} = v_3 z + y^2, \quad (15)$$

в которых, в отличие от (5), мы исключили параметр  $M$ . В силу леммы 1 это всегда можно сделать, кроме вырожденного случая  $v_3 = 1$  (когда симметричная неподвижная точка отображения (5) убегает при  $M \neq 0$  на бесконечность). Поэтому отображения (14) и (15) можно рассматривать в качестве универсальных осесимметричных квадратичных отображений с постоянным якобианом.

Отметим, что отображения  $T_-$  и  $T_+$ , конечно, разные, но между ними существует необычная «дуальная» связь, которую отражает следующая лемма.

**Лемма 2.** *Отображение  $T_\alpha^2$  инвариантно относительно следующей замены координат и параметров*

$$y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z, \quad v_2 \rightarrow -v_2, \quad \alpha \rightarrow -\alpha. \quad (16)$$

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $T_\alpha$  в форме (5). Его вторая итерация, отображение  $T_\alpha^2$ , может быть представлена как

$$\begin{aligned} \bar{x} &= v_1 x + v_2 y + yz, \\ \bar{y} &= v_1 y + v_2 \bar{x} + \bar{x}(v_3 z + \alpha y^2), \\ \bar{z} &= v_3(v_3 z + \alpha y^2) + \alpha \bar{x}^2. \end{aligned}$$

Тогда легко видно, что преобразование координат и параметров (16) не меняет вида этого отображения.  $\square$

## 2.2. Дискретные аттракторы Лоренца классического типа в случае отображения $T_-$ .

Лемма (2) показывает, что квадраты отображений  $T_-$  и  $T_+$  демонстрируют совершенно одинаковую динамику, если заменить  $v_2$  на  $-v_2$ . Однако динамика и бифуркации самих отображений  $T_-$  и  $T_+$  при этом являются разными, что показывают их бифуркационные диаграммы рис. 6, которые, в силу леммы (2), симметричны относительно замены  $v_2$  на  $-v_2$ .

Мы будем предполагать везде ниже, что  $0 < v_3 < 1$ . Тогда симметричная неподвижная точка  $O(0, 0, 0)$  отображения  $T_\alpha$  (одновременно для  $T_-$  и  $T_+$ ) будет асимптотически устойчивой при  $(v_1, v_2) \in \Delta_s$ , где

$$\Delta_s = \{(v_1, v_2) \mid v_1 - 1 < v_2 < 1 - v_1, \quad -1 < v_1 < 1\}.$$

Границами треугольника устойчивости  $\Delta_s$  на плоскости  $(v_1, v_2)$  являются три бифуркационные кривые

$$L_{+1} : v_2 = 1 - v_1, \quad -1 < v_1 < 1,$$

$$L_{-1} : v_2 = v_1 - 1, \quad -1 < v_1 < 1,$$

$$L_\varphi : v_1 = -1, \quad -2 < v_2 < 2$$

такие, что у точки  $O$  появляется мультипликатор  $\lambda = +1$  при  $(v_1, v_2) \in L_{+1}$ , мультипликатор  $\lambda = -1$  при  $(v_1, v_2) \in L_{-1}$  и мультипликаторы  $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$  при  $(v_1, v_2) \in L_\varphi$  (третий мультипликатор — это всегда  $\lambda_3 = v_3$ ).

Эти бифуркационные кривые отвечают бифуркациям точки  $O$ , которые будут разными для отображений  $T_-$  и  $T_+$  (кроме разве что бифуркаций через  $L_\varphi$ , которые здесь бесконечно вырожденные и неинтересные).

- Бифуркация на  $L_{+1}$  — это невырожденная симметричная бифуркация «вилка» (pitch-fork), которая является мягкой (суперкритической) для  $T_-$  и жесткой (субкритической) для  $T_+$ . Здесь точка  $O$  при выходе из  $\Delta_s$  теряет устойчивость следующим образом: в случае отображения  $T_-$  она становится седловой и рождается пара симметричных друг другу устойчивых неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$ ; в случае отображения  $T_+$  в устойчивую точку  $O$  влипают пара симметричных седловых неподвижных точек, она становится седловой, и никаких аттракторов здесь уже нет.

- Бифуркация на  $L_{-1}$  — это невырожденная симметричная бифуркация удвоения периода (period-doubling), которая является жесткой для  $T_-$  и мягкой для  $T_+$ . Здесь точка  $O$  при выходе из  $\Delta_s$  теряет устойчивость следующим образом: в случае отображения  $T_-$  в устойчивую точку  $O$  влипают седловая орбита периода 2, точка  $O$  становится седловой, и никаких аттракторов здесь нет; в случае отображения  $T_+$  точка  $O$  становится седловой и рождается устойчивая орбита  $p_1, p_2$  периода 2.
- Заметим, что, в силу леммы 2, бифуркация на  $L_{+1}$  для отображения  $T_-^2$  и бифуркация на  $L_{-1}$  для  $T_+^2$  будут абсолютно одной и той же — это мягкая бифуркация «вилка». Одинаковыми также будут бифуркации на  $L_{-1}$  для  $T_-^2$  и на  $L_{+1}$  для  $T_+^2$  — в обоих случаях это жесткая бифуркация «вилка».

Как видно из рис. 6, развитие хаотической динамики в отображениях  $T_-$  и  $T_+$  происходит по-разному. В частности, в случае отображения  $T_-$  первой бифуркацией потери устойчивости точки  $O$  является бифуркация «вилки», а в случае отображения  $T_+$  — бифуркация удвоения периода.

В случае отображения  $T_-$  точка  $O$  является аттрактором при  $(v_1, v_2) \in \Delta_s$ . При выходе из  $\Delta_s$  через границу  $L_{+1}$  точка  $O$  мягко теряет устойчивость в результате симметричной бифуркации вилки:  $O$  становится седлом и рождается пара симметричных друг другу устойчивых неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$ . При этом у седла  $O$  его неустойчивое многообразие  $W^u(O)$  одномерно и состоит из двух инвариантных сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  таких, что  $\Gamma_1$  стремится к  $O_1$ , а  $\Gamma_2$  к  $O_2$ . При дальнейшем изменении параметров точки  $O_1$  и  $O_2$  одновременно и симметрично претерпевают суперкритическую (мягкую) бифуркацию Андронова–Хопфа на кривой [23]

$$AH_{12}^- : v_2 = 1 - v_1 + \frac{1}{2}(1 + v_1)(1 + v_1 v_3).$$

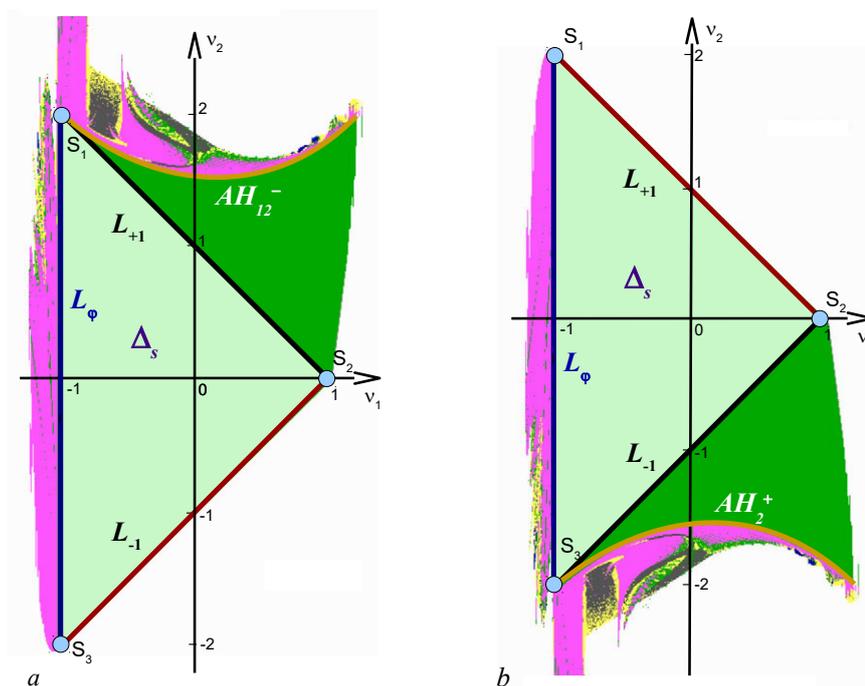


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы на плоскости параметров  $v_1$  и  $v_2$  при фиксированном  $0 < v_3 < 1$  в случаях:  $a$  — отображения  $T_-$ ;  $b$  — отображения  $T_+$ . Здесь также показаны наиболее интересные фрагменты диаграмм показателей Ляпунова при  $v_3 = 0.8$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Bifurcation diagrams on the  $(v_1, v_2)$ -parameter plane for fixed  $0 < v_3 < 1$  in the cases:  $a$  — the map  $T_-$ ;  $b$  — the map  $T_+$ . The most interesting fragments of the diagrams of Lyapunov exponents for  $v_3 = 0.8$  are also shown (color online)

В результате точки  $O_1$  и  $O_2$  становятся седло-фокусами с двумерными неустойчивыми многообразиями, и в их окрестностях рождаются две симметричные друг другу устойчивые инвариантные кривые  $S_1$  и  $S_2$ , при этом сепаратриса  $\Gamma_1$  накручивается на кривую  $S_1$ , а  $\Gamma_2$  — на  $S_2$ . Таким образом, создается вполне подходящая конфигурация траекторий, чтобы в дальнейшем (после потери устойчивости кривых  $S_1$  и  $S_2$ , появления гомоклиник к  $O$  и т. п.) сформировался дискретный аттрактор Лоренца. Однако этот аттрактор должен отличаться от стандартного (см. параграф 1), так как он будет содержать неподвижную точку  $O$ , у которой неустойчивый мультипликатор положительный, а сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$  инвариантны:  $T_-(\Gamma_i) = \Gamma_i$ . Кроме того, в дырках аттрактора будут лежать неподвижные точки — седла-фокусы  $O_1$  и  $O_2$ .

На рис. 7, *a-d* мы иллюстрируем, пожалуй, самый простой вариант сценария в отображении  $T_-$ , приводящий к дискретному аттрактору Лоренца «классического» типа. Здесь мы полагаем  $v_3 = 0.95$ ,  $v_1 = -0.85$  (то есть  $J = -v_1 v_3 = 0.8075$ ) и рассматриваем путь  $v_1 = -0.85$  на плоскости параметров  $(v_1, v_2)$  при изменении  $v_2$ .

Сначала, при  $-1.85 < v_2 < 1.85$ , точка  $O$  устойчива, она претерпевает бифуркацию «вилки» при  $v_2 = 1.85$  и рождаются две симметричные друг другу неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ . Эти точки устойчивы при  $1.85 < v_2 < v_2^{AH} = 1.8644375$ ; при  $v_2 > v_2^{AH}$  они теряют устойчивость и рождается пара устойчивых замкнутых инвариантных кривых  $S_1$  и  $S_2$ , снова симметричных друг другу, рис. 7, *a*. При этом сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$  наматываются на кривые  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, рис. 7, *a*. С ростом  $v_2$  сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  перестраиваются и выходят из области притяжения кривых  $S_1$  и  $S_2$ , в результате чего возникает мультистабильность, рис. 7, *b*, поскольку дискретный аттрактор Лоренца сосуществует с аттракторами  $S_1$  и  $S_2$ . Затем инвариантные кривые

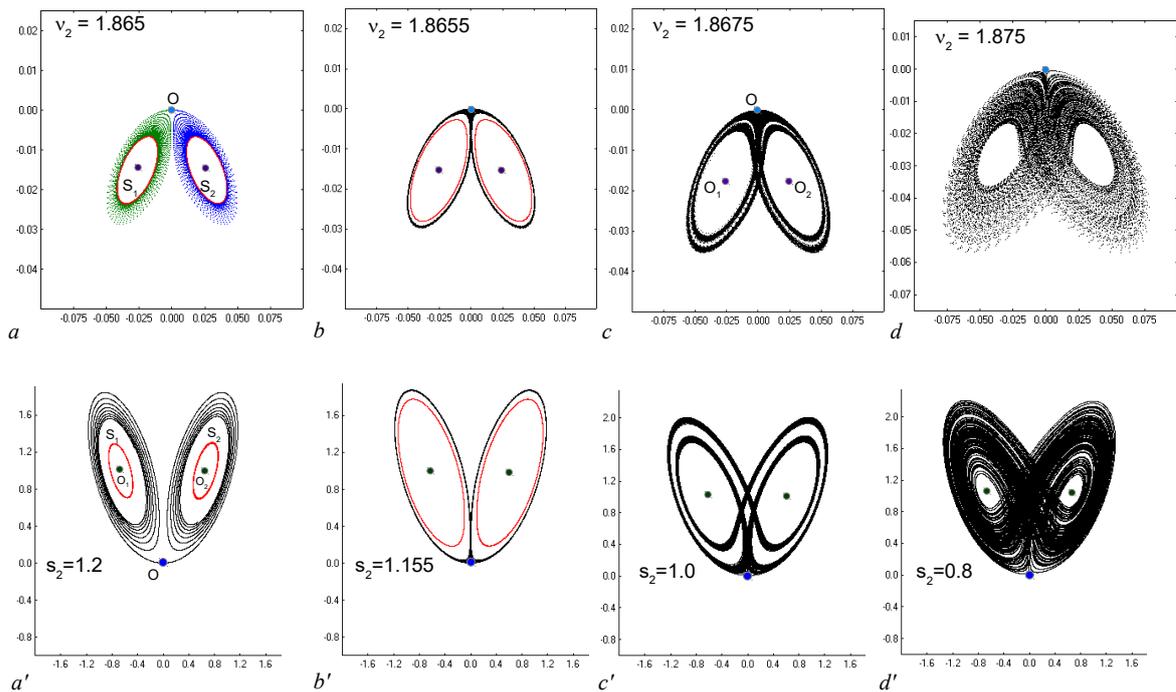


Рис. 7. Верхний ряд: иллюстрация основных этапов формирования дискретного аттрактора Лоренца в отображении  $T_-$  при фиксированных  $v_3 = 0.95$ ,  $v_1 = -0.85$  и при варьировании  $v_2$ . Нижний ряд: иллюстрация основных этапов формирования аттрактора Лоренца в модели Шимицу–Мориока (17) при  $s_2 = 0.45$  и варьировании  $s_1$  (цвет онлайн)

Fig. 7. Top row: illustration of main stages of the formation of discrete Lorenz attractor in map  $T_-$  with fixed  $v_3 = 0.95$ ,  $v_1 = -0.85$  and with varying  $v_2$ . Bottom row: illustration of main stages of the formation of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model (17) at  $s_2 = 0.45$  and varying  $s_1$  (color online)

$S_1$  и  $S_2$  сливаются с некоторыми седловыми инвариантными кривыми и обе исчезают, после чего единственным аттрактором отображения становится дискретный аттрактор Лоренца, рис. 7, с–d.

Мы будем называть такой аттрактор *дискретным аттрактором Лоренца классического типа*. Эти аттракторы очень похожи на классические аттракторы Лоренца, а еще больше — на их дискретизацию по времени. Для сравнения на рис. 7, а'–d' (нижний ряд) показана иллюстрация сценария с аттрактором Лоренца в модели Шимицу–Мориока [41]

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - s_1 y - xz, \quad \dot{z} = -s_2 z + x^2 \quad (17)$$

при  $s_2 = 0.45$  и варьировании  $s_1$ . Здесь видно почти полное совпадение с рис. 7, а–d.

**Замечание 1.** В силу леммы 2 об идентичности динамики отображений  $T_-^2$  и  $T_+^2$  при замене  $v_2 \rightarrow -v_2$  развитие хаоса для отображения  $T_+$  при фиксированных  $v_3 = 0.95, v_1 = -0.85$  и при варьировании  $v_2$  будет похожим (если  $v_2$  поменять на  $-v_2$ ), но начинается с потери устойчивости точки  $O$  в результате бифуркации удвоения периода и последующей бифуркации Андронова–Хопфа устойчивой орбиты  $(p_1, p_2)$  периода 2. В конце сценария получится симметричный стандартный дискретный аттрактор Лоренца.<sup>6</sup>

Всюду ниже для определенности мы будем рассматривать только отображение  $T_-$ .

**2.3. О вложении отображения  $T_-$  в поток Шимицу–Мориока.** Нужно отметить, что система Шимицу–Мориока (17) играет важную роль в математической теории аттракторов Лоренца. Дело в том, что она служит локальной потоковой нормальной формой для ряда бифуркаций состояний равновесия с тремя нулевыми собственными значениями [42]. Поскольку в самой системе (17) существует аттрактор Лоренца для определенных областей значений параметров [43], это дает возможность получить эффективно проверяемые критерии рождения аттрактора Лоренца в результате локальных бифуркаций [17, 19].

Это в полной мере относится и к отображению  $T_-$ . В частности, ниже в разделе 2.3 мы покажем, что для значений параметров, близких к  $v_1 = -1, v_2 = 2, v_3 = 1$ , когда неподвижная точка  $O$  имеет триплет  $(+1, +1, +1)$  мультипликаторов, отображение  $T_-$  может быть аппроксимировано с любой точностью отображением сдвига по траекториям системы Шимицу–Мориока. Из этого следует, по теореме Тураева–Шильникова [16], что отображение  $T_-$  для близких значений параметров будет иметь цепно-транзитивный и псевдогиперболический дискретный аттрактор Лоренца (классического типа).

**Лемма 3.** В пространстве параметров  $(v_1, v_2, v_3)$  существует окрестность в области  $(v_1 < -1, v_2 < 2, v_3 < 1)$ , примыкающая к точке  $M(v_1 = -1, v_2 = 2, v_3 = 1)$ , в которой отображение  $T_-$  вблизи неподвижной точки  $O(0, 0, 0)$  может быть вложено в поток Шимицу–Мориока (17) с тем большей точностью, чем ближе значение параметров к точке  $M$ .

**Доказательство.** Перепишем отображение  $T_-$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} - x &= y - x, \\ \bar{y} - y &= v_1 x + v_2 y - y + yz, \\ \bar{z} - z &= v_3 z - z - y^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Положим, что

$$v_1 = -1 + \varepsilon_1, \quad v_2 = 2 + \varepsilon_2, \quad v_3 = 1 - \varepsilon_3$$

<sup>6</sup>При этом фазовые картинку по сравнению с рис. 7 будут перевернутыми по оси  $z$ , точки  $O_1$  и  $O_2$  будут точками орбиты периода 2 и т. п., см. [23].

и  $\varepsilon_i$  малы. Заметим, что при  $\varepsilon_i = 0, i = 1, 2, 3$  точка  $O(0, 0, 0)$  имеет тройной мультипликатор  $+1$ . Тогда вблизи этой точки для малых  $\varepsilon_i$  можно написать такую потоковую аппроксимацию отображения (18):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x, \\ \dot{y} &= (-1 + \varepsilon_1)x + (1 + \varepsilon_2)y + yz, \\ \dot{z} &= -\varepsilon_3z - y^2.\end{aligned}\tag{19}$$

Введем новую координату  $y_{new} = y - x$ . Когда система (19) переписывается как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)x + \varepsilon_2y + (x + y)z, \\ \dot{z} &= -\varepsilon_3z - (x + y)^2.\end{aligned}\tag{20}$$

Введем новое «быстрое» время  $t \rightarrow \varepsilon t$  с малым  $\varepsilon > 0$ . Тогда система (20) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon}y, \\ \dot{y} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon}x + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}y + \frac{1}{\varepsilon}(x + y)z, \\ \dot{z} &= -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}z - \frac{1}{\varepsilon}(x + y)^2.\end{aligned}\tag{21}$$

Снова введем новую координату  $y_{new} = \frac{1}{\varepsilon}y$ . Тогда система (21) переписывается как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon^2}x + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}y + \frac{1}{\varepsilon^2}(x + \varepsilon y)z, \\ \dot{z} &= -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}z - \frac{1}{\varepsilon}(x + \varepsilon y)^2.\end{aligned}\tag{22}$$

Теперь отнормируем координаты следующим образом:

$$x = \beta X, \quad y = \beta Y, \quad z = \gamma Z$$

и положим

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon^2} = 1, \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} = -s_1, \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} = s_2.$$

Выберем  $s_1$  и  $s_2$  в качестве новых параметров. Тогда система (22) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= X - s_1Y + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(X + \varepsilon Y)Z, \\ \dot{z} &= -s_2z - \frac{\beta^2}{\gamma\varepsilon}(X + \varepsilon Y)^2.\end{aligned}\tag{23}$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно мало, мы возьмем малые нормирующие коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  такими, что

$$\frac{\gamma}{\varepsilon^2} = 1, \quad \frac{\beta^2}{\varepsilon^3} = 1,$$

и удалим члены  $\varepsilon Y$  из (23). Тогда получим такую систему

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= X - s_1Y + XZ, \\ \dot{Z} &= -s_2Z - X^2.\end{aligned}\tag{24}$$

Если теперь сделать замену  $Z \rightarrow -Z$ , то получим в точности систему Шимицу–Мориока (17).  $\square$

### 3. Разнообразие дискретных аттракторов лоренцевского типа в случае отображения $T_-$

В разделе 2 мы дали положительный ответ на вопрос о том, имеет ли отображение  $T_-$  аттракторы, которые с большой точностью имитируют аттракторы, полученные в результате дискретизации по времени аттракторов Лоренца трехмерных потоков. Однако отображение  $T_-$ , так же как и  $T_+$ , может быть неориентируемым (когда  $J = -v_1 v_3 < 0$ ), и тогда, как показано в [23], аттракторы лоренцевского типа здесь всегда весьма необычны: их неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и линия симметрии (ось  $z$ ) будут переплетены неустранимым образом.

В этом параграфе мы продолжим эти исследования и рассмотрим вопрос о существовании дискретных аттракторов Лоренца отображения  $T_-$  как в ориентируемом, так и в неориентируемом случаях, которые вообще не имеют аналогов среди трехмерных потоков. Для этого мы положим, для примера,  $v_3 = 0,8$  и построим на плоскости параметров  $v_1$  и  $v_2$  так называемую диаграмму Ляпунова, наиболее интересный фрагмент которой (на области  $Q : (-1 < v_1 < 0.2; 1.4 < v_2 < 2.3)$ ) показан на рис. 8.

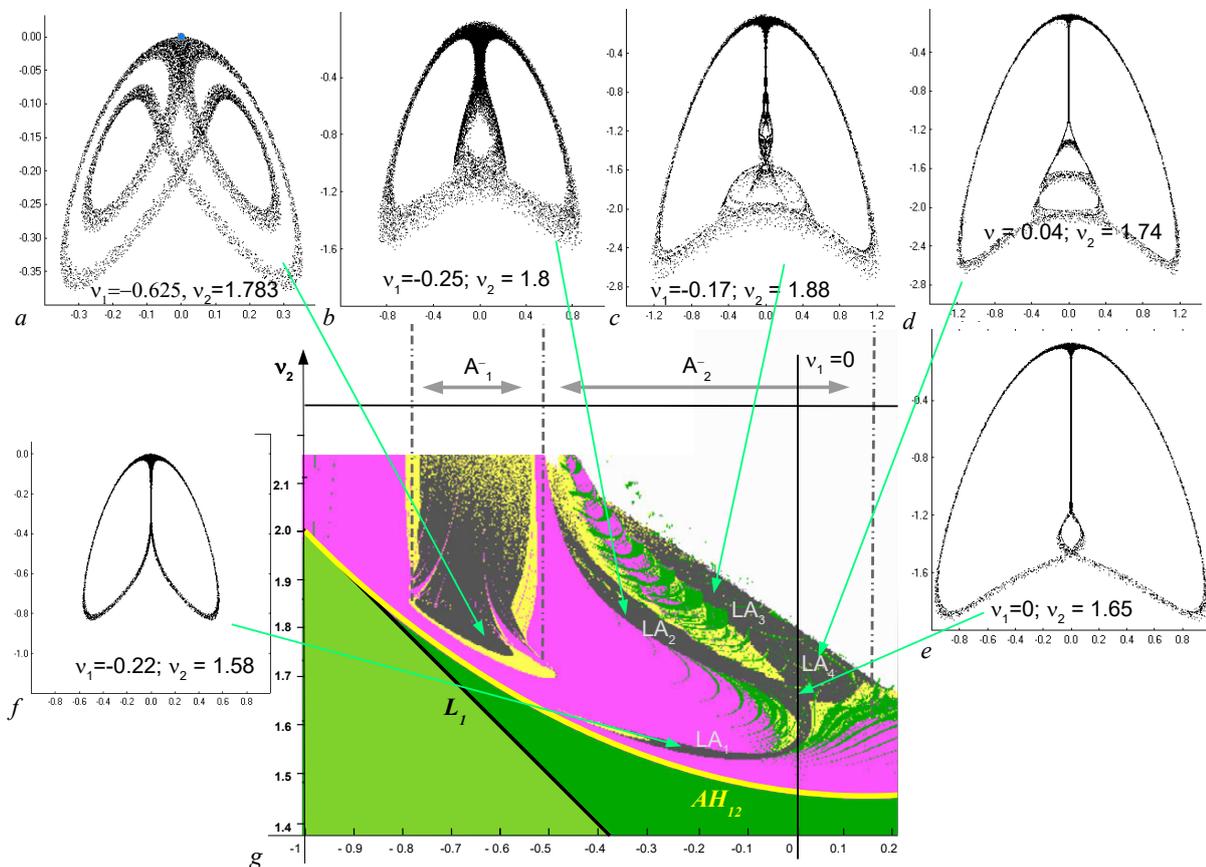


Рис. 8. Диаграмма Ляпунова для отображения  $T_-$  на плоскости параметров  $v_1$  и  $v_2$  при  $v_3 = 0.8$ .  $a-f$  – Фазовые портреты дискретных аттракторов лоренцевского типа при различных значениях параметров  $v_1$  и  $v_2$ . Аттракторы на рис.  $a, b, c$  и  $f$  ориентируемы ( $J = -v_1 v_3 > 0$ ), аттрактор рис.  $d$  неориентируемый ( $J < 0$ ), а на рис.  $e$  показан аттрактор для 3D эндоморфизма ( $J = 0$ ) (цвет онлайн)

Fig. 8. Lyapunov diagram for map  $T_-$  on the  $(v_1, v_2)$ -parameter plane for  $v_3 = 0.8$ .  $a-f$  – Phase portraits of discrete Lorenz-like attractors for different values of parameters  $v_1$  and  $v_2$ . Attractors in Fig.  $a, b, c$  and  $f$  are orientable ( $J = -v_1 v_3 > 0$ ), the attractor in Fig.  $d$  is non-orientable ( $J < 0$ ), and Fig.  $e$  shows the attractor for 3D-endomorphism ( $J = 0$ ) (color online)

О самой диаграмме Ляпунова. Это своеобразная карта-схема на  $Q$ , состоящая из областей разного цвета, характеризующих спектр  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$  показателей Ляпунова на аттракторе. Однако схема на рис. 8 не совсем обычная. При ее построении, следуя [21], мы преследовали основную цель найти гомоклинические странные аттракторы (содержащие неподвижную точку  $O$ ), среди которых должны быть лоренцевские аттракторы. Соответственно, цвета на карте отвечают аттракторам следующих типов:

- почти все орбиты убегают на бесконечность (нет аттракторов) — белый цвет;
- точка  $O$  устойчива — светло-зеленый цвет;
- периодическая орбита ( $\Lambda_1 < 0$ ) — зеленый цвет;
- замкнутая инвариантная орбита (квазипериодический режим,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$ ) — розовый цвет;
- странный гомоклинический аттрактор, содержащий точку  $O$  ( $\Lambda_1 > 0$  и расстояние  $d$  от точек аттрактора до  $O$  не больше 0.001) — темно-серый цвет;
- странный аттрактор с  $\Lambda_1 > 0$  и  $d > 0.001$  — желтый цвет.

Первое, что обращает на себя внимание при взгляде на диаграмму рис. 8, это существование двух разделенных темно-серых зон  $A_1^-$  и  $A_2^-$ . Для значений параметров из зоны  $A_1^-$  якобиан  $J$  отображения  $T_-$  близок к 1, тогда как для достаточно большой зоны  $A_2^-$  якобиан  $J$  принимает сравнительно небольшие положительные, отрицательные и даже нулевые значения.

Заметим, что темно-серая область в зоне  $A_1^-$  отвечает симметричным дискретным аттракторам Лоренца, таким как на рис. 7,  $d$ . Аттракторы из зоны  $A_2^-$ , примеры которых показаны на рис. 8,  $b-e$ , существенно другие. Это лоренцевские аттракторы новых типов, имеющие необычную гомоклиническую структуру (их сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  переплетаются). Более детальный их анализ мы проводим в разделе 3.1.

Заметим, что аттрактор на рис. 8,  $d$  является неориентируемым аттрактором лоренцевского типа. Возможность существования таких аттракторов у отображений общего типа была установлена в работе [21], однако их хороших примеров не было. Такие примеры в случае осесимметричных отображений  $T_\alpha$  были найдены в [23]. Сейчас мы можем проследить, как такие аттракторы могут появляться в трехмерных неориентируемых отображениях с осевой симметрией.

В качестве примера рассмотрим сценарий их появления в отображении  $T_-$  при  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = 0.1$  (здесь  $J = -0.08$ ) и изменении  $v_2$ . Основные этапы сценария при увеличении  $v_2$  показаны на рис. 9. При  $v_2 = 0.9$  неподвижная точка  $O$  претерпевает бифуркацию «вилка», при которой рождаются две симметричные неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ . При  $v_2 = 1.494$  происходит

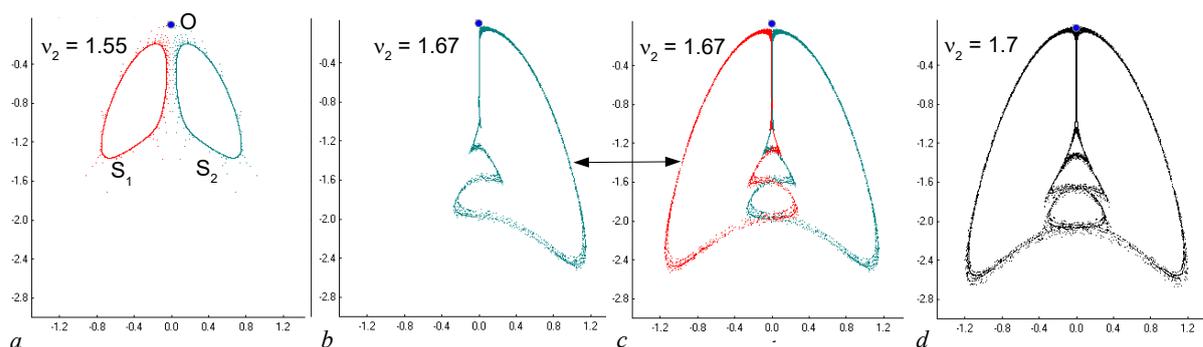


Рис. 9. Иллюстрация основных этапов формирования симметричного неориентируемого дискретного аттрактора Лоренца в отображении  $T_-$  при фиксированных  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = 0.1$  и изменении  $v_2$  (цвет онлайн)

Fig. 9. Illustration of main stages of the formation of a symmetric non-orientable discrete Lorenz attractor in the map  $T_-$  for fixed  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = 0.1$  and varying  $v_2$  (color online)

бифуркация Андронова–Хопфа с точками  $O_1$  и  $O_2$  и рождаются две устойчивые замкнутые инвариантные кривые, рис. 9, *a*. Затем с ростом  $v_2$  эти кривые теряют гладкость, становятся резонансными и разрушаются, рис. 9, *b–c*. В результате появляются два симметричных квазиаттрактора типа «тор–хаос», рис. 9, *c*. Затем эти аттракторы объединяются в один аттрактор лоренцевского типа, рис. 9, *d*. В момент «слияния» аттрактор, очевидно, является квазиаттрактором, но нет причин оставаться таким всегда. В частности, в [23] численно показано, что аттрактор рис. 9, *d* является симметричным неориентируемым псевдогиперболическим дискретным аттрактором Лоренца.

Можно также проследить, как возникают и развиваются ориентируемые аттракторы лоренцевского типа из зоны  $A_2^-$  в случае отображения  $T_-$ . В качестве примера рассмотрим путь  $v_1 = -0.2$  (здесь  $J = 0.16$ ) на диаграмме Ляпунова рис. 8. Иллюстрация основных этапов формирования ориентируемых дискретных аттракторов  $LA_1$ ,  $LA_2$  и  $LA_3$  (существующих для значений параметров из трех соответствующих ветвей темно-серой области в зоне  $A_2^-$ ) показана на рис. 10.

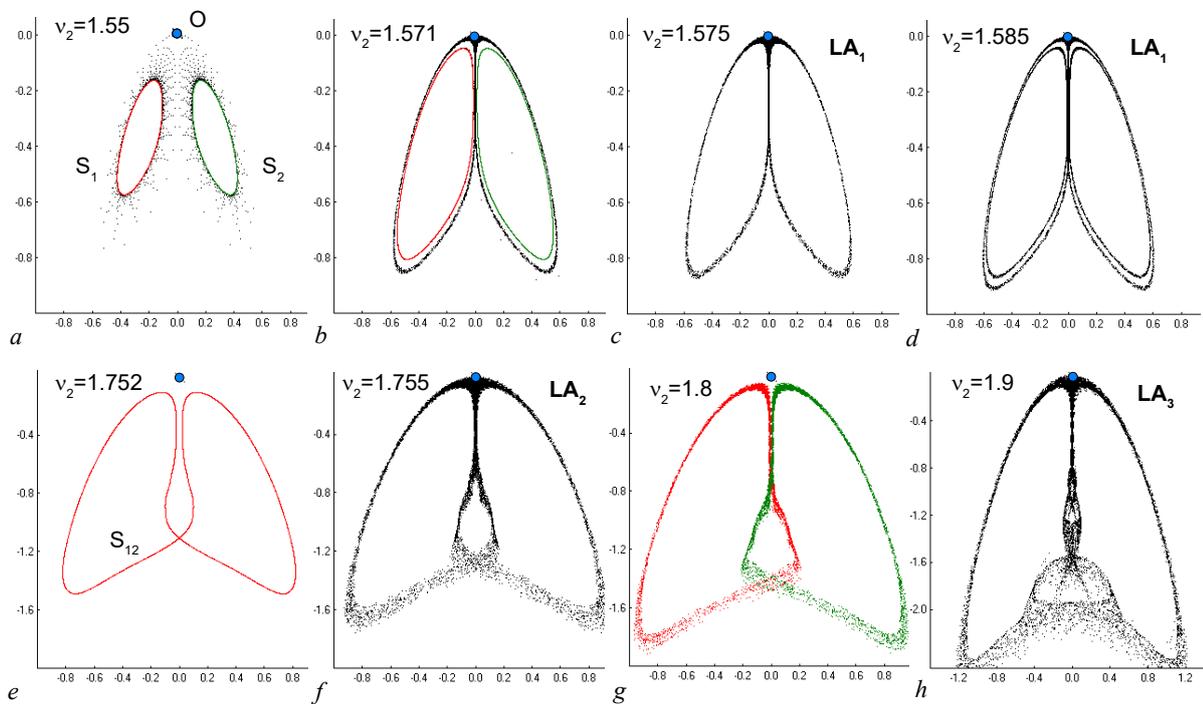


Рис. 10. Иллюстрация основных этапов формирования ориентируемых дискретных аттракторов лоренцевского типа  $LA_1$ ,  $LA_2$  и  $LA_3$  в отображении  $T_-$  при фиксированных  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = -0.2$  и изменении  $v_2$ . *a* – Аттракторы – инвариантные кривые  $S_1$  и  $S_2$ . *b* – Аттракторы  $S_1$  и  $S_2$  сосуществуют с лоренцевским аттрактором  $LA_1$ . *c–d* –  $LA_1$  – единственный аттрактор. *e* – Окно устойчивости: аттрактором является симметричная инвариантная кривая  $S_{12}$ . *f* –  $LA_2$ -аттрактор: проявляется при разрушении кривой  $S_{12}$  (по Афраймовичу–Шильникову [26]) и затем формируется как псевдогиперболический лоренцевский аттрактор. *g* –  $LA_2$ -аттрактор разрушается и образуются два симметричных друг другу квазиаттрактора «тор–хаос». *h* – Эти квазиаттракторы объединяются в один лоренцевский аттрактор  $LA_3$  (цвет онлайн)

Fig. 10. Illustration of main stages of formation of orientable discrete Lorenz-like attractors  $LA_1$ ,  $LA_2$  and  $LA_3$  in the map  $T_-$  for fixed  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = -0.2$  and varying  $v_2$ . *a* – Attractors are invariant curves  $S_1$  and  $S_2$ . *b* – Attractors  $S_1$  and  $S_2$  coexist with the Lorenz attractor  $LA_1$ . *c–d* –  $LA_1$  is the only attractor. *e* – A stability window: the attractor is the symmetric invariant curve  $S_{12}$ . *f* – the  $LA_2$ -attractor: it appears when the curve  $S_{12}$  is destroyed (according to Afraimovich–Shilnikov [26]) and then it is formed as a pseudo-hyperbolic Lorenz-like attractor. *g* –  $LA_2$ -attractor is destroyed and two symmetric quasiattractors «torus-chaos» are formed. *h* – These quasiattractors are combined into one Lorenz-like attractor  $LA_3$  (color online)

**3.1. О гомоклинических структурах 3D-отображений с осевой симметрией.** Как известно, одними из основных бифуркаций, участвующих в формировании дискретных аттракторов Лоренца, являются глобальные бифуркации образования дискретных гомоклинических «восьмерок-бабочек» точки  $O$ . Как показано в работе [23], соответствующие гомоклинические структуры в случае разных дискретных аттракторов Лоренца, например, таких как на рис. 8, будут также разными. Простейшие качественные картинки гомоклинических «восьмерок-бабочек» для разных случаев показаны на рис. 11.

Здесь под гомоклинической «восьмеркой-бабочкой» для отображения с осевой симметрией будем понимать прежде всего конфигурацию, образованную неустойчивыми сепаратрисами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$  по отношению к  $W^s(O)$  и инвариантной оси  $z$ , линией осевой симметрии, целиком лежащей на  $W^s(O)$ . Для диффеоморфизмов с осевой симметрией такие конфигурации являются топологическими инвариантами, так как сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не могут пересекать ось  $z$ .

Гомоклинические структуры для стандартных симметричных аттракторов Лоренца, таких как на рис. 8, *a*, выглядят вполне обычно: на рис. 11, *a* схематически показано, как сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  могут пересекаться с двумерной площадкой  $\Pi_s \subset W_{loc}^s(O)$  в этом случае. Здесь показано два начальных отрезка сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , каждый из которых имеет четыре точки пересечения с  $\Pi_s$ . Эти 8 гомоклинических точек разделены на четыре пары точек:  $\{h_1^1, T(h_1^1)\}$ ,  $\{h_2^1, T(h_2^1)\}$ ,  $\{h_1^2, T(h_1^2)\}$  и  $\{h_2^2, T(h_2^2)\}$ , принадлежащих разным однообходным гомоклиническим орбитам. В случае отображения  $T_-$  две такие орбиты лежат на  $\Gamma_1$  и еще две на  $\Gamma_2$ , рис. 11, *a*. Как видно, в этом случае сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  обязательно симметричны друг другу, а также пересекают площадку  $\Pi_s$  в разных ее половинах, на которые  $\Pi_s$  разделена осью  $z$ .

Отметим также, что на сепаратрисе  $\Gamma_1$  (симметрично на  $\Gamma_2$ ) между двумя ее последовательными точками одной гомоклинической орбиты, например, точками  $h_1^1$  и  $T(h_1^1)$ , обязательно лежит точка  $h_2^1$  другой гомоклинической орбиты. В случае рис. 11, *a* эта точка лежит в той же половине  $\Pi_s$ , что и точки  $h_1^1$  и  $T(h_1^1)$ . Однако можно представить ситуацию, когда точка  $h_2^1$  лежит в другой половине  $\Pi_s$ . Тогда мы получим довольно необычную гомоклиническую структуру, показанную на рис. 11, *b*. В этом случае кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не просто завязываются между собой, но еще каждая из них обвивается вокруг оси  $z$ . Гомоклинические конфигурации такого типа характерны для симметрично ориентируемых лоренцевских аттракторов, таких как аттракторы  $LA_2$  и  $LA_3$  (рис. 10). Поэтому мы будем называть такие осесимметричные аттракторы *скрученными дискретными аттракторами Лоренца*.

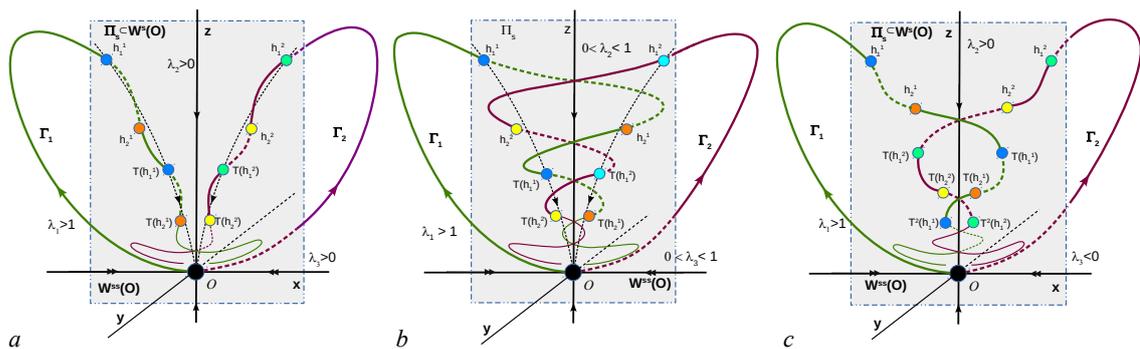


Рис. 11. Иллюстрации симметричных гомоклинических «восьмерок-бабочек» лоренцевского типа в случае, когда точка  $O$  имеет мультипликаторы  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такие, что  $\lambda_1 > 1, |\lambda_{2,3}| < 1, 0 < \lambda_2 < 1$  и  $|\lambda_3| < |\lambda_2| < \lambda_2 < 1$  (как у  $T_-$ ). На рис. *a–b* показаны простейшие типы гомоклинических «восьмерок-бабочек» в ориентируемом случае ( $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ), а на рис. *c* — в неориентируемом случае ( $-1 < \lambda_3 < 0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ) (цвет онлайн)

Fig. 11. Illustrations of symmetric homoclinic “figure-eight butterflies” of Lorenz type in the case when a point has multipliers  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  such that  $\lambda_1 > 1, |\lambda_{2,3}| < 1, 0 < \lambda_2 < 1$  and  $|\lambda_3| < |\lambda_2| < \lambda_2 < 1$  (as for map  $T_-$ ). Figures *a–b* show the simplest types of homoclinic “figure-eight butterflies” for the orientable case ( $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ), and Figure *c* — for the non-orientable case ( $-1 < \lambda_3 < 0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ) (color online)

В неориентируемом случае поведение сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  всегда выглядит несколько необычно. Мы проиллюстрируем это с помощью рис. 11 для случая, когда точка  $O$  имеет мультипликаторы  $\lambda_1 > 1$ ,  $0 < \lambda_2 < 1$ ,  $-1 < \lambda_3 < 0$  и  $|\lambda_3| < |\lambda_2|$ , как для отображения  $T_-$  при  $\nu_1 > 0$ . Очевидно, здесь гомоклинические точки  $h_1^1$  и  $T(h_1^1)$  на  $\Gamma_1$  лежат в разных половинах  $\Pi_s$ , поскольку  $\lambda_3 < 0$ . Тогда конфигурация сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  может получиться такой, как на рис. 11, с (в частности, как показано в [23], такая конфигурация имеет место в случае неориентируемого аттрактора рис. 8). В этом случае сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  оказываются не завязанными друг с другом в отличие от ориентируемого случая. Однако три инвариантные кривые  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и ось  $z$  вместе оказываются топологически переплетенными неустранимым образом.

## Список литературы

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, no. 2. P. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2
2. Guckenheimer J. A strange, strange attractor // In: The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. New York: Springer, 1976. P. 368–381. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6\_25.
3. Williams R. F. The structure of Lorenz attractor // Lecture Notes in Math. 1977. Vol. 615. P. 94–112.
4. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // Докл. АН СССР. 1977. Vol. 234, no. 2. P. 336–339.
5. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО. 1982. Т. 44. P. 150–212.
6. Kaplan J. L., Yorke J. A. Predturbulence: A regime observed in a fluid flow model of Lorenz // Comm. Math. Phys. 1979. Vol. 67, no. 2. P. 93–108. DOI: 10.1007/BF01221359.
7. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // В кн.: Марсен Ж., МакКракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. P. 317–336.
8. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы // Успехи Мат. Наук. 1981. Т. 36, № 4. С. 240.
9. Бунимович Л. А., Синай Я. Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца // Нелинейные Волны. М.: Наука, 1979. С. 212–260.
10. Bunimovich L. Statistical properties of Lorenz attractors // In: G.I. Barenblatt (ed.) Nonlinear Dynamics and Turbulence. Boston: Pitman, 1983. P. 1–22.
11. Rand D. The topological classification of Lorenz attractor // Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. 1978. Vol. 83, no. 3. P. 451–460.
12. Малкин М. И. О топологической сопряженности разрывных отображений интервала // УМЖ. 1980. Т. 32, № 5. С. 610–616.
13. Morales C. A., Pacifico M. J., Pujals E. R. On C1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows // C. R. Acad. Sci. Ser. I Math. 1998. Vol. 326. P. 81–86.
14. Сатаев Е. А. Некоторые свойства сингулярных гиперболических аттракторов // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 1. С. 35–76.
15. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Мат. сб. 1998. Т. 189. С. 291–314.
16. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Доклады РАН. 2008. Т. 776 № 16. С. 17–21.
17. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, no. 11. P. 3493–3508. DOI: 10.1142/S0218127405014180.
18. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса в трехмерных отображениях // Нелинейная Динамика. 2012. Т. 8. С. 3–28.

19. *Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Ovsyannikov I. I., Turaev D. V.* Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2013. Vol. 8, no. 5. P. 48–70. DOI: 10.1051/mmnp/20138504.
20. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D.* Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *Int. J. Bif. and Chaos.* 2014. Vol. 24, no. 8. P. 25.
21. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V.* Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps // *Physica D.* 2016. Vol. 337(4). P. 43–57. DOI: 10.1016/j.physd.2016.07.006.
22. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // In: Hunt BR, Li TY, Kennedy JA, Nusse HE. (eds) *The Theory of Chaotic Attractors.* New York: Springer, 1976. P. 94–102. DOI: 10.1007/978-0-387-21830-4\_8.
23. *Gonchenko S., Gonchenko A.* On discrete Lorenz-like attractors in three-dimensional maps with axial symmetry // *Chaos.* 2023. Vol. 33, no. 12. P. 123104. DOI: 10.1063/5.0172243
24. *Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A., and Samylyna E.* On discrete Lorenz-like attractors // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 2. P. 023117. DOI: 10.1063/5.0037621.
25. *Gonchenko S., Karatetskaia E., Kazakov A., Kruglov V.* Conjoined Lorenz twins — a new pseudohyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows // *Chaos.* 2022. Vol. 32, iss. 12. P. 121107. DOI: 10.1063/5.0123426.
26. *Aframovich V.S., Shilnikov L.P.* Strange attractors and quasiattractors // In: G.I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph (eds) *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* Boston: Pitmen, 1983. P. 1–34.
27. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Докл. Рос. Акад. Наук.* 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
28. *Gonchenko S., Shilnikov L., Turaev D.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits // *Chaos.* 1996. Vol. 6, no. 1. P. 15–31.
29. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions // *Nonlinearity.* 2008. Vol. 21, no. 5. P. 923–972. DOI: 10.1088/0951-7715/21/5/003.
30. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D.* Elements of contemporary theory of dynamical chaos: A tutorial. Part I. Pseudohyperbolic attractors // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2018. Vol. 28, no. 11. P. 1830036. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127418300367>.
31. *Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D.* Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system // *Nonlinearity.* 2021. Vol. 34, no. 4. P. 2018–2047. DOI: 10.18500/0869-6632-00314010.48550/arXiv.1809.07250.
32. *Шильников Л. П.* Теория бифуркаций и турбулентность // В кн.: *Методы качественной теории дифференциальных уравнений.* Горький, 1986. С. 150–163.
33. *Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Kazakov A. O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2013. Vol. 15, no. 5. P. 521–538. DOI: 10.1134/S1560354713050055.
34. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Turaev D.* Doubling of invariant curves and chaos in three-dimensional diffeomorphisms // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no 11. P. 113130. DOI: 10.1063/5.0068692.
35. *Гонченко А. С., Самылина Е. А.* Об области существования дискретного аттрактора Лоренца в неголономной модели кельтского камня // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2019. Т. 62, № 5. С. 412–428.
36. *Newhouse S. E.* The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 1979. Vol. 50. P. 101–151. DOI: 10.1007/BF02684771.
37. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О существовании областей Ньюхауса в окрестности систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // *Докл. Рос. Акад. Наук.* 1993. Т. 329. С. 404–407.

38. Гонченко С. В., Шильников Л. П. Об инвариантах  $\Omega$ -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42, № 2. С. 153-159.
39. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Итоги науки и техники, сер. Современная математика и ее приложения; тематические обзоры. Т. 67. 1999. P. 69-128.
40. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V. On models with non-rough Poincare homoclinic curves // Physica D. 1993. Vol. 62, no. 1–4. P. 1–14. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90268-6.
41. Shimizu T., Morioka N. On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model // Phys. Lett. A. 1980. Vol. 76. P. 201–204. DOI: 10.1016/0375-9601(80)90466-1.
42. Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors // Int. J. of Bifurcation and chaos. 1993. Vol. 3. P. 1123–1139.
43. Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model // Physica D. 1993. Vol. 62. P. 338–346. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90292-9.

## References

1. Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences. 1963;20(2): 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2.
2. Guckenheimer J. A strange, strange attractor. In: The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. New York: Springer, 1976. P. 368–381. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6\_25.
3. Williams RF. The structure of Lorenz attractor. Lecture Notes in Math. 1977;615:94–112.
4. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. The origin and structure of the Lorenz attractor. Sov. Phys. Dokl. 1977;22:253–255.
5. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type. Trans. Mosc. Math. Soc. 1982;44:153–216.
6. Kaplan JL, Yorke JA. Predturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz. Comm. Math. Phys. 1979;67(2):93–108. DOI: 10.1007/BF01221359.
7. Shilnikov LP. Bifurcation theory and the Lorenz model. In: Marsden JE, McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer; 1976. P. 317–336.
8. Shilnikov LP. Bifurcation theory and quasihyperbolic attractors. Usp. Mat. Nauk. 1981;36(4):240.
9. Bunimovich LA, Sinai YaG. Stochasticity of attractor in Lorenz model. Nonlinear Waves. Moscow: Nauka; 1979. P. 212–260.
10. Bunimovich L. Statistical properties of Lorenz attractors. Nonlinear Dynamics and Turbulence / G.I. Barenblatt (ed.) – Boston etc.: Pitman. 1983: 1–22.
11. Rand D. The topological classification of Lorenz attractor. Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. 1978;83(3):451–460.
12. Malkin MI. On topological conjugacy of discontinuous maps of interval. Ukrainian Math. J. 1980;32(5):610–616.
13. Morales CA, Pacifico MJ, Pujals ER. On  $C^1$  robust singular transitive sets for three-dimensional flows. C. R. Acad. Sci. Ser. I Math. 1998;326:81–86.
14. Sataev EA. Some properties of singular hyperbolic attractors. Sb. Math. 2009;200(1):35–76.
15. Turaev DV, Shilnikov LP. An example of a wild strange attractor. Sb. Math. 1998;189:291–314.
16. Turaev DV, Shilnikov LP. Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors. Doklady Mathematics. 2008; 77(1): 17–21.
17. Gonchenko S, Ovsyannikov I, Simo C, Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors. Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005; 15(11): 3493–3508
18. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Shilnikov LP. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps. Rus. J. Nonlinear Dynamics. 2012;8:3-28 (in Russian).

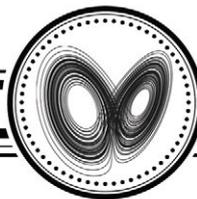
19. Gonchenko SV, Gonchenko AS, Ovsyannikov II, Turaev DV. Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps. *Math. Model. Nat. Phenom.* 2013;8(5):48–70. DOI: 10.1051/mmnp/20138504.
20. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *Int. J. Bif. and Chaos.* 2014;24(8):25.
21. Gonchenko A, Gonchenko S. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps. *Physica D.* 2016;337:43–57.
22. Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. In: Hunt BR, Li TY, Kennedy JA, Nusse HE. (eds) *The Theory of Chaotic Attractors*. New York: Springer, 1976. P. 94–102. DOI: 10.1007/978-0-387-21830-4\_8.
23. Gonchenko S, Gonchenko A. On discrete Lorenz-like attractors in three-dimensional maps with axial symmetry. *Chaos.* 2023;33(12):123104. DOI: 10.1063/5.0172243
24. Gonchenko S, Gonchenko A, Kazakov A, Samylina E. On discrete Lorenz-like attractors. *Chaos.* 2021;31(2):023117. DOI: 10.1063/5.0037621.
25. Gonchenko S, Karatetskaia E, Kazakov A, Kruglov V. Conjoined Lorenz twins - a new pseudohyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows. *Chaos.* 2022;32(12):121107. DOI: 10.1063/5.0123426.
26. Aframovich VS, Shilnikov LP. Strange attractors and quasiattractors. In: GI Barenblatt, G Iooss, DD Joseph (eds) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Boston: Pitmen; 1983. P. 1–34.
27. Gonchenko S, Turaev D, Shilnikov L. Dynamical phenomena in multidimensional systems with nontransversal Poincaré homoclinic orbits. *Rus. Math. Docl.* 1993;330(2):144–147.
28. Gonchenko S, Shilnikov L, Turaev D. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits. *Chaos.* 1996;6(1):15–31.
29. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev DV. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. *Nonlinearity.* 2008;21(5):923–972. DOI: 10.1088/0951-7715/21/5/003.
30. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Kozlov AD. Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I. Pseudohyperbolic Attractors. *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2018;28(11):1830036. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127418300367>.
31. Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system. *Nonlinearity.* 2021;34(4):2018–2047.
32. Shilnikov LP. Bifurcation theory and turbulence. *Selecta Mathematica Sovietica.* 1991;10(1):43–53.
33. Gonchenko SV, Gonchenko AS, Kazakov AO. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2013;18(5):521–538. DOI: 10.1134/S1560354713050055.
34. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Turaev D. Doubling of invariant curves and chaos in three-dimensional diffeomorphisms. *Chaos.* 2021;31(11):113130. DOI: 10.1063/5.0068692.
35. Gonchenko A, Samylina E. On the region of existence of a discrete Lorenz attractor in the nonholonomic model of a Celtic stone. *Radiophys. Quantum Electron.* 2019;62(5):369–384. DOI: 10.1007/s11141-019-09984-9
36. Newhouse SE. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 1979;50:101–151.
37. Gonchenko SV, Turaev DV, and Shilnikov LP. On the existence of Newhouse regions in a neighborhood of systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve (the multidimensional case). *Doklady Akademii Nauk.* 1993;329:404–407.
38. Gonchenko SV, Shilnikov LP. Invariants of  $\Omega$ -conjugacy of diffeomorphisms with a nongeneric homoclinic trajectory. *Ukr. Math. J.* 1990;42:134–140.
39. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. Homoclinic tangencies of an arbitrary order in Newhouse domains. *J. Math. Sci.* 2001;105:1738–1778.

40. Gonchenko SV, Shil'nikov LP, Turaev DV. On models with non-rough Poincare homoclinic curves. *Physica D*. 1993;62(1–4):1–14. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90268-6.
41. Shimizu T, Morioka N. On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model. *Phys. Lett. A*. 1980;76:201–204. DOI: 10.1016/0375-9601(80)90466-1.
42. Shilnikov AL, Shilnikov LP, Turaev DV. Normal forms and Lorenz attractors. *Int. J. of Bifurcation and chaos*. 1993;3:1123–1139.
43. Shilnikov AL. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model. *Physica D*. 1993;62:338–346.



*Гонченко Александр Сергеевич* – родился в 1987 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2010) и аспирантуру ННГУ (2012). Кандидат физико-математических наук (2013, ННГУ). Работает в ННГУ старшим научным сотрудником лаборатории динамических и управляемых систем и в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» старшим научным сотрудником в международной лаборатории динамических систем и приложений. Опубликовал около 25 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский университет им. Н. И. Лобачевского  
Россия, 603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
НИУ «Высшая школа экономики»  
E-mail: agonchenko@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-0505-9725



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.958

DOI: 10.18500/0869-6632-003142  
EDN: XYHFND

## Метод траекторных аттракторов для диссипативных уравнений в частных производных с малым параметром

В. В. Чепыжов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Нижний Новгород, Россия  
E-mail: [✉chep@iitp.ru](mailto:chep@iitp.ru)

Поступила в редакцию 15.08.2024, принята к публикации 29.10.2024,  
опубликована онлайн 20.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — изучение предельного поведения траекторных аттракторов диссипативных уравнений и систем математической физики, зависящих от малого параметра, когда малый параметр стремится к нулю. Основное внимание уделено случаям, когда для предельного уравнения не выполнена или не доказана теорема единственности решения соответствующей начально-краевой задачи. Рассматриваются следующие задачи: аппроксимация 3D-системы Навье–Стокса с помощью  $\alpha$ -модели Лерэ, усреднение комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау в области с густой перфорацией, а также предел нулевой вязкости 2D-системы Навье–Стокса с экмановским трением. **Методы.** В данной работе используется метод траекторных динамических систем и траекторных аттракторов, который особенно эффективен при изучении сложных уравнений с частными производными, для которых не имеет место или не доказана теорема единственности решения соответствующей начально-краевой задачи. **Результаты.** Для всех рассмотренных задач получены предельные уравнения и доказана сходимости по Хаусдорфу траекторных аттракторов исходных уравнений к траекторным аттракторам предельных уравнений в подходящей топологии, когда малый параметр стремится к нулю. **Заключение.** В работе показано, что метод траекторных аттракторов весьма эффективен при исследовании диссипативных уравнений математической физики с малым параметром. Удастся найти предельные уравнения и доказать сходимости траекторных аттракторов изучаемых уравнений к траекторным аттракторам предельных уравнений в соответствующей топологии, когда малый параметр стремится к нулю.

**Ключевые слова:** глобальные аттракторы, траекторные аттракторы, малый параметр, сходимости аттракторов.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 23-71-30008).

**Для цитирования:** Чепыжов В. В. Метод траекторных аттракторов для диссипативных уравнений в частных производных с малым параметром // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 858–877. DOI: 10.18500/0869-6632-003142. EDN: XYHFND

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Trajectory attractors method for dissipative partial differential equations with small parameter

V. V. Chepyzhov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute for Information Transmission Problems RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup>National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉chep@iitp.ru

Received 15.08.2024, accepted 29.10.2024, available online 20.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The purpose of this work is to study the limit behaviour of trajectory attractors for some equations and systems from mathematical physics depending on a small parameter when this small parameter approaches zero. The main attention is given to the cases when, for the limit equation, the uniqueness theorem for a solution of the corresponding initial-value problem does not hold or is not proved. The following problems are considered: approximation of the 3D Navier–Stokes system using the Leray  $\alpha$ -model, homogenization of the complex Ginzburg–Landau equation in a domain with dense perforation, and zero viscosity limit of 2D Navier–Stokes system with Ekman friction. **Methods.** In this paper, the method of trajectory dynamical systems and trajectory attractors is used that is especially effective in the study of complicated partial differential equations for which the uniqueness theorem for a solution of the corresponding initial-value problem does not hold or is not proved. **Results.** For all problems under the consideration, we obtain the limit equations and prove the Hausdorff convergence for trajectory attractors of the initial equations to the trajectory attractors of the limit equations in the appropriate topology when the small parameter tends to zero. **Conclusion.** In the work, we demonstrate that the method of trajectory attractors is highly effective in the study of dissipative equations of mathematical physics with small parameter. We succeed to find the limit equations and to prove the convergence of trajectory attractors of the considered equations to the trajectory attractors of the limit (homogenized) equations in the corresponding topology as small parameter is vanishes.

**Keywords:** global attractors, trajectory attractors, small parameter, convergence of attractors.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project 23-71-30008).

**For citation:** Chepyzhov VV. Trajectory attractors method for dissipative partial differential equations with small parameter. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(6):858–877. DOI: 10.18500/0869-6632-003142

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Многие важные задачи математической физики связаны с изучением решений эволюционных уравнений с частными производными на больших интервалах времени и в пределе, когда время стремится к бесконечности. В последние десятилетия большой прогресс в этой области достигнут применением теории аттракторов бесконечномерных динамических систем. Для многих важных диссипативных уравнений было показано, что долговременное поведение их решений можно описывать с помощью конечномерных глобальных аттракторов (см., монографии [1, 2] и цитируемую в них обширную литературу). Этот подход, ставший классическим, применяется к начально-краевым задачам, обладающим свойством существования и единственности решения в подходящем фазовом пространстве начальных условий задачи. Вместе с тем существует значительный класс сложных задач, для которых можно строить решения, определенные на всей полуоси времени, но теорема единственности или не доказана, или не имеет места. Примером такой задачи является неоднородная 3D-система Навье–Стокса, для которой сформулирована нерешенная «проблема миллениума». Эта система и другие уравнения подобного типа будут рассмотрены в данной статье. Для таких задач также разработаны эффективные методы, позволяющие изучать соответствующие траекторные динамические системы и строить для них траекторные аттракторы. Фазовым пространством для таких уравнений служит все пространство траекторий, то есть функций, зависящих от времени (см. [3, 4]).

Метод траекторных аттракторов является весьма общим, он работает для уравнений и систем, для которых удается построить пространство траекторий (решений) хоть в каком-то слабом смысле. Другая полезная особенность этой теории состоит в том, что позволяет исследовать задачи с малым параметром, который может входить в уравнения весьма сложно и даже сингулярно (например, стоять при старших производных или быть периодом частых пор среды). Проблема, таким образом, состоит в изучении предельного поведения траекторных аттракторов исходных уравнений, когда малый параметр стремится к нулю. При этом мерой близости аттракторов, которые являются подмножествами функциональных банаховых пространств, является полурасстояние по Хаусдорфу в подходящей метрике.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 кратко излагается классическая теория динамических систем и их глобальных аттракторов. Раздел 2 посвящен траекторным динамическим системам и траекторным аттракторам. В разделе 3 строится траекторный аттрактор 3D-системы Навье–Стокса на трехмерном торе. В разделе 4 вводится так называемая  $\alpha$ -модель Лерэ, которая сглаживает и аппроксимирует 3D-систему Навье–Стокса, а число  $\alpha$  является малым параметром, который отвечает за длину шага подсеточной решетки. Известно, что подобные  $\alpha$ -модели хорошо аппроксимируют турбулентные течения в каналах и трубах. Формулируется теорема о сходимости траекторных аттракторов  $\alpha$ -модели Лерэ к траекторному аттрактору точной 3D-системы Навье–Стокса при  $\alpha \rightarrow 0$  в соответствующей метрике. Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау в перфорированной области с малым шагом перфорации  $\varepsilon$  изучается в разделе 5. При этом на границах областей перфорации ставится 3-е граничное условие, имеющее физический смысл, которое также зависит от  $\varepsilon$ . В разделе 6 решается задача усреднения уравнения Гинзбурга–Ландау в области с перфорацией, выписывается усредненное уравнение в области без перфорации и приводится теорема о сходимости траекторных аттракторов уравнения с перфорацией к траекторному аттрактору без перфорации при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Разделы 7 и 8 посвящены исследованию предела нулевой вязкости аттракторов 2D-уравнений Навье–Стокса с экмановским трением на двумерном торе. Доказывается, что в пределе получаются аттракторы 2D-уравнений Эйлера с тем же экмановским трением. Этот результат справедлив как для глобальных аттракторов, так и для траекторных аттракторов этих уравнений.

## 1. Динамические системы и их глобальные аттракторы

Динамической системой называется пара

$$(\mathcal{E}, \{\mathcal{S}(t)\}),$$

где  $\mathcal{E}$  — фазовое пространство и  $\{\mathcal{S}(t), t \geq 0\}$  — семейство отображений

$$\mathcal{S}(t) : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

которое образует *полугруппу*, то есть

$$\mathcal{S}(0) = \text{Id}, \quad \mathcal{S}(t_1) \circ \mathcal{S}(t_2) = \mathcal{S}(t_1 + t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

Здесь  $\text{Id}$  обозначает тождественное отображение. Обычно  $\mathcal{E}$  — это полное метрическое или банахово пространство. Параметр  $t$  называется временем.

Динамические системы естественным образом возникают при изучении *автономных эволюционных уравнений* вида

$$\partial_t u(t) = -F(u), \quad (2)$$

где  $F(u)$  — некоторый нелинейный дифференциальный оператор. Уравнение (2) необходимо дополнить начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0 \in E, \quad (3)$$

где  $E$  — некоторое банахово пространство. Предположим, что при любом  $u_0 \in E$  задача Коши (2), (3) имеет единственное решение  $u(t), t \geq 0$ , такое, что  $u(t) \in E$  при всех  $t \geq 0$ .

Рассмотрим отображения в пространстве  $E, S(t) : E \rightarrow E, t \geq 0$ , которые определяются по формуле

$$S(t)u_0 := u(t), \forall u_0 \in E, t \geq 0, \quad (4)$$

где  $u(t)$  — это решение (2), (3) с начальным условием  $u_0$ . Тогда пара  $(E, \{S(t)\})$  образует динамическую систему.

Мы будем рассматривать диссипативные динамические системы.

**Определение 1.** 1) Множество  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$  называется поглощающим для динамической системы  $(\mathcal{E}, \{S(t)\})$ , если для любого множества  $B \subseteq \mathcal{E}$ , ограниченного в метрике  $\mathcal{E}$ , найдется число  $t_1 = t_1(B)$  такое, что  $S(t) \subseteq \mathcal{P}$  при всех  $t \geq t_1$ .

2) Множество  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$  называется притягивающим для динамической системы  $(\mathcal{E}, \{S(t)\})$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $O_\varepsilon(\mathcal{K})$  является поглощающим для этой динамической системы.

**Определение 2.** Динамическая система  $(\mathcal{E}, \{S(t)\})$  называется диссипативной, если она имеет ограниченное в  $\mathcal{E}$  поглощающее множество.

**Замечание 1.** В классе ограниченных множеств существование притягивающего множества эквивалентно существованию поглощающего множества. Отличие этих понятий проявляется в классе компактных множеств, что существенно, когда фазовое пространство  $\mathcal{E}$  является бесконечномерным. Существуют диссипативные динамические системы, которые имеют компактное притягивающее множество, но у них нет компактного поглощающего множества.

В приложениях ограниченное поглощающее множество часто строится в виде шара в  $\mathcal{E}$  достаточно большого радиуса:

$$\mathcal{P} = B_\rho := \{\|u\|_{\mathcal{E}} \leq \rho\}.$$

**Определение 3.** Множество  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$  называется глобальным аттрактором динамической системы  $(\mathcal{E}, \{S(t)\})$ , если:

- i)  $\mathcal{A}$  компактно в топологии  $\mathcal{E}$ ;
- ii)  $\mathcal{A}$  является притягивающим множеством этой динамической системы;
- iii)  $\mathcal{A}$  строго инвариантно относительно  $\{S(t)\} : S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ , при всех  $t \geq 0$ .

Сформулируем основную теорему о существовании глобального аттрактора диссипативной динамической системы (см. [1, 2]).

**Теорема 1.** Пусть динамическая система  $(\mathcal{E}, \{S(t)\})$  имеет компактно поглощающее (или компактно притягивающее) множество  $\mathcal{P}$ , а полугруппа  $\{S(t)\}$  является непрерывной в топологии  $\mathcal{E}$ , тогда существует глобальный аттрактор  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ .

**Замечание 2.** В этой теореме условие непрерывности полугруппы можно ослабить, заменив его на условие замкнутости (см., например, [5]).

Глобальные аттракторы были построены для большого числа диссипативных динамических систем, порождаемых эволюционными уравнениями в частных производных. При этом использовалось важное ключевое свойство таких задач — однозначная разрешимость задачи Коши (2), (3) в подходящем фазовом пространстве начальных условий (см. [1–3]).

## 2. Траекторные динамические системы и траекторные аттракторы

Существует значительное семейство «некорректных» уравнений и систем математической физики, для которых теоремы единственности соответствующей задачи Коши не доказаны или не имеют места. Самый знаменитый пример — это неоднородная 3D-система Навье–Стокса в ограниченной области с условиями прилипания на границе. Другие примеры: комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с произвольными коэффициентами дисперсии, общие системы реакции–диффузии, диссипативные 2D-уравнения Эйлера, эллиптические системы в цилиндрических областях и многие другие.

Для подобных задач также разработаны эффективные методы, позволяющие строить аттракторы. Один из таких методов, основанный на изучении траекторных динамических систем и траекторных аттракторов, был предложен в работах М. И. Вишика и В. В. Чепыжова [3, 6–8], а также независимо в работах G. Sell [4].

Пусть имеется некоторое семейство  $\{u(s), s \geq 0\}$  глобальных решений (траекторий) уравнения (2), которое мы будем обозначать  $\mathcal{K}^+$  и называть *пространством траекторий*. Здесь переменная времени  $t$ , которая участвует в эволюционном уравнении (2), заменена на переменную  $s$ .

Предполагается, что множество  $\mathcal{K}^+$  лежит в некотором линейном функциональном пространстве

$$\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc} = \{f(s), s \geq 0\}.$$

Более того, при каждом  $M > 0$

$$f(s) \in \mathcal{F}(0, M), \quad \forall f \in \mathcal{F}_+^{loc},$$

где  $\mathcal{F}(0, M) = \mathcal{F}(0, M; E)$  — некоторое банахово пространство, состоящее из функций, значения которых принадлежат (всюду или почти всюду) банахову пространству  $E$ . Примерами таких пространств могут служить пространства  $\mathcal{F}(0, M) = C([0, M]; E)$  и  $\mathcal{F}(0, M) = L_p(0, M; E)$ . Тогда пространства  $\mathcal{F}_+^{loc}$  совпадают с  $C(\mathbb{R}_+; E)$  и  $L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; E)$  соответственно. В приложениях будут также использоваться пересечения или суммы подобных пространств.

Рассмотрим операторы трансляции  $T(h)$ ,  $h \geq 0$ , на пространстве  $\mathcal{F}_+^{loc}$ :

$$T(h)f(s) = f(h + s), \quad h \geq 0.$$

Предположим, что  $T(h)$  отображает  $\mathcal{F}_+^{loc}$  в себя. Тогда операторы  $\{T(h)\}$  образуют *трансляционную полугруппу*:

$$T(0) = \text{Id}, \quad T(h_1) \circ T(h_2) = T(h_1 + h_2), \quad \forall h_1, h_2 \geq 0.$$

Предположим, что  $\mathcal{K}^+$  является трансляционно инвариантным, то есть если  $u(s) \in \mathcal{K}^+$ , то при всех  $h \geq 0$ , функция  $T(h)u(s) = u(h + s) \in \mathcal{K}^+$ .

Это свойство, как правило, выполнено, поскольку уравнение (2) является автономным. Следовательно, полугруппа  $\{T(h)\}$  отображает  $\mathcal{K}^+$  в себя:

$$T(h)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+, \quad \forall h \geq 0.$$

Заменим переменную  $h$  на переменную времени  $t$ , которая была в определении динамической системы (см. (1)), и рассмотрим действие трансляционной полугруппы  $\{T(t)\}$  на пространстве траекторий  $\mathcal{K}^+$ .

Мы построили новую динамическую систему  $(\mathcal{K}^+, \{T(t)\})$ , связанную с автономным уравнением (2).

Задача состоит в изучении глобального аттрактора  $\mathfrak{A}$  этой *траекторной динамической системы*. Такой аттрактор называется *траекторным аттрактором*.

Для описания притяжения к аттрактору необходимо ввести топологию в фазовом пространстве  $\mathcal{K}^+$ , а также объяснить, что называть «ограниченными» множествами в  $\mathcal{K}^+$ .

Предположим, что в пространствах  $\mathcal{F}(0, M)$  задана некоторая хаусдорфова топология  $\Theta(0, M)$  при каждом  $M > 0$ . Например, если  $\mathcal{F}(0, M) = C([0, M]; E)$ , то  $\Theta(0, M)$  — это топология равномерной сходимости на отрезке  $[0, M]$  по норме  $E$ . Если  $\mathcal{F}(0, M) = L_p(0, M; E)$ , то  $\Theta(0, M)$  — это может быть сильная или слабая топология пространства  $L_p(0, M; E)$ .

Затем в пространстве  $\mathcal{F}_+^{loc}$  вводится топология  $\Theta_+^{loc}$ , которая по определению является топологией локальной сходимости в топологии  $\Theta(0, M)$  при каждом  $M > 0$ . Такая топология называется *индуктивным пределом* топологий  $\Theta(0, M)$  при  $M \rightarrow +\infty$ . Эта топология также является хаусдорфовой топологией.

Легко проверяется, что трансляционная полугруппа  $\{T(t)\}$  непрерывна в топологии  $\Theta_+^{loc}$ . Это свойство значительно упрощает построение траекторного аттрактора и изучение его свойств.

Рассмотрим также подпространство  $\mathcal{F}_+^b \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ , состоящее из функций  $f(s)$ ,  $s \geq 0$ , которые имеют конечную норму

$$\|f\|_{\mathcal{F}_+^b} := \sup_{h \geq 0} \|f(\cdot + h)\|_{\mathcal{F}(0,1)}. \quad (5)$$

Эта норма используется для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий  $\mathcal{K}^+$ . Предполагается, что  $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^b$ .

**Определение 4.** Множество  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}^+$  есть траекторный аттрактор, если:

- i)  $\mathcal{A}$  ограничено по норме  $\mathcal{F}_+^b$  и компактно в  $\Theta_+^{loc}$ ;
- ii)  $\mathcal{A}$  является притягивающим множеством в топологии  $\Theta_+^{loc}$ , то есть для любого множества  $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}^+$ , ограниченного в  $\mathcal{F}_+^b$ , и для любой окрестности  $\mathcal{O}(\mathcal{A})$  найдется  $\tau = \tau(\mathcal{B}, \mathcal{O})$  такое, что  $T(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{A})$  при всех  $t \geq \tau$ ;
- iii)  $\mathcal{A}$  строго инвариантно относительно  $\{T(t)\}$ :  $T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$  для любого  $t \geq 0$ .

Сформулируем основную теорему о траекторных аттракторах (см. [3, 7]).

**Теорема 2.** Пусть пространство траекторий  $\mathcal{K}^+$  уравнения (2) имеет притягивающее множество  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}^+$ , которое ограничено в  $\mathcal{F}_+^b$  и компактно в  $\Theta_+^{loc}$ . Тогда трансляционная полугруппа  $\{T(t)\}$  имеет траекторный аттрактор  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ .

Часто в приложениях таким компактным притягивающим множеством в  $\Theta_+^{loc}$  служит поглощающее множество  $\mathcal{P} = \mathcal{K}^+ \cap B_R$ , где  $B_R = \{u \mid \|u\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq R\}$  — шар в  $\mathcal{F}_+^b$  достаточно большого радиуса. В этом случае, если топология  $\Theta_+^{loc}$  построена на основе слабой сходимости, то по известной теореме Урысона о метризуемости компактных множеств, шар  $B_R$  с топологией  $\Theta_+^{loc}$  является полным метрическим пространством (см. [3]). Это упрощает построение траекторного аттрактора.

Кроме того, свойство поглощения шаром  $B_{2R_0}$  часто следует из неравенств вида

$$\|T(t)u\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C(\|u\|_{\mathcal{F}_+^b}) \exp(-\gamma t) + R_0, \quad \forall u \in \mathcal{K}^+ \quad (\gamma > 0), \quad (6)$$

которые в конкретных приложениях доказываются с использованием априорных оценок изучаемых уравнений.

В следующих разделах изучаются траекторные аттракторы эволюционных уравнений, которые зависят от малого параметра  $\varepsilon > 0$ . Мы будем исследовать сходимость этих аттракторов при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к траекторным аттракторам соответствующих предельных уравнений. Будет использовано следующее понятие сходимости множеств по Хаусдорфу.

**Определение 5.** Говорят, что траекторные аттракторы  $\mathcal{A}_\varepsilon$  сходятся к траекторному аттрактору  $\mathcal{A}_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в топологии  $\Theta_+^{loc}$ , если для любой окрестности  $\mathcal{O}(\mathcal{A}_0)$  множества  $\mathcal{A}_0$  в топологии  $\Theta_+^{loc}$  найдется число  $\varepsilon_1 > 0$  такое, что  $\mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}_0)$  при всех  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Мы будем записывать эту сходимость следующим образом:

$$\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{A}_0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad \text{в топологии } \Theta_+^{loc}.$$

### 3. Траекторный аттрактор 3D-системы Навье–Стокса

Рассматривается 3D-система Навье–Стокса на трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$ :

$$\begin{aligned} \partial_t v &= -\nu A v - P(v \cdot \nabla)v + g(x), \quad \nabla \cdot v = 0, \\ x \in \mathbb{T}^3 &:= [\mathbb{R} \bmod 2\pi]^3, \quad t \geq 0; \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\nu > 0$  — коэффициент кинематической вязкости,  $A = -P\Delta$  — оператор Стокса и  $P$  — проектор Лерэ. Здесь  $v = (v^1(x, t), v^2(x, t), v^3(x, t))$  — неизвестное векторное поле и  $g(x) = (g^1(x), g^2(x), g^3(x))$  — известная внешняя сила. Предполагается, что эти функции имеют нулевое среднее:

$$\int_{\mathbb{T}^3} v(x, t) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^3} g(x) dx = 0.$$

Пусть  $\mathcal{V}$  — пространство тригонометрических полиномов с нулевыми дивергенцией и средним. Через  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{R}_+$ , обозначается замыкание  $\mathcal{V}$  в норме  $\|\cdot\|_s$  пространства  $H^s(\mathbb{T}^3)^3$ . Пусть  $H = H^0$ , и пространство  $H^{-s}$ ,  $s \geq 0$ , является сопряженным к  $H^s$ . Норма в  $H$  обозначается  $\|\cdot\|$ .

Пусть внешняя сила  $g \in H$ . В качестве пространства траекторий  $\mathcal{K}^+$  рассмотрим семейство всех слабых решений  $\{v(x, t), t \geq 0\}$  3D-системы Навье–Стокса (7) со следующими свойствами:

- i)  $v(\cdot) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ ;
- ii)  $v(t)$  удовлетворяет энергетическому неравенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \nu \|\nabla v(t)\|^2 \leq (g, v(t))_H. \quad (8)$$

Такие решения называются *решениями Лерэ–Хопфа* (см. [3, 9]).

Заметим, что любое решение  $v(t)$ ,  $t \geq 0$ , задачи Коши для системы НС (7) с начальным условием  $v(0) \in H$ , которое строится по методу приближений Галеркина, принадлежит  $\mathcal{K}^+$ . Значит, пространство траекторий  $\mathcal{K}^+$  не пусто и достаточно широко (см. [3, 9]).

**Замечание 3.** В последние годы появились работы, которые в некоторой степени подтверждают гипотезу о возможной неединственности решений Лерэ–Хопфа 3D-системы Навье–Стокса с одинаковыми начальными данными для некоторых внешних сил. Например, в работе [10] такие решения построены для случая внешних сил специального вида, которые зависят от времени. Это еще раз обосновывает полезность изучения траекторных аттракторов для 3D-системы Навье–Стокса и для других подобных уравнений.

Из системы НС (7) следует, что  $\partial_t v \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1})$  при всех  $v \in \mathcal{K}^+$  (см. [9]). Введем банахово пространство

$$\mathcal{F}_+^b = \left\{ v(\cdot) \mid v \in L_2^b(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H), \partial_t v \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; H^{-1}) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_+^b} = \|v\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+; H^1)} + \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} + \|\partial_t v\|_{L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; H^{-1})}.$$

Напомним, что

$$\|v\|_{L_p^b(\mathbb{R}_+; E)}^p = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|v(s)\|_E^p ds.$$

**Предложение 1.** Пространство  $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^b$ , и для любой траектории  $v(\cdot) \in \mathcal{K}^+$  выполнено следующее неравенство:

$$\|T(h)v(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C_0 \|v(\cdot)\|_{L_\infty(0,1;H)}^2 \exp(-\nu\lambda_1 h) + R_0, \quad \forall h \geq 0, \quad (9)$$

величины  $C_0, R_0$  зависят только от  $\nu, \lambda_1$  и  $\|g\|_0, \lambda_1 = \lambda_1(A)$  – первое собственное значение оператора Стокса  $A$ .

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{F}_+^{\text{loc}} = \left\{ v(\cdot) \mid v \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H), \partial_t v \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}) \right\}.$$

В этом пространстве вводится топология  $\Theta_+^{\text{loc}}$ , порождаемая следующей сходимостью: последовательность  $\{v_n\} \subset \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$  сходится к  $v \in \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$  в  $\Theta_+^{\text{loc}}$ , если  $v_n \rightarrow v$  в  $L_2(0, M; H)$ , то есть

$$\int_0^M \|v_n(t) - v(t)\| dt \rightarrow 0 \quad \forall M > 0.$$

Заметим, топология  $\Theta_+^{\text{loc}}$  метризуема,  $\mathcal{F}_+^b \subset \Theta_+^{\text{loc}}$ , и любой шар

$$B_R = \left\{ v \in \mathcal{F}_+^b \mid \|v\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq R \right\} \text{ в } \mathcal{F}_+^b$$

компактен в пространстве  $\Theta_+^{\text{loc}}$  (см. [3]).

На пространстве траекторий  $\mathcal{K}^+$  3D-системы НС действует трансляционная полугруппа  $\{T(h), h \geq 0\}$ , которая отображает  $\mathcal{K}^+$  в себя:  $T(h)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$  при всех  $h \geq 0$ .

Изучается траекторный аттрактор полугруппы  $\{T(h), h \geq 0\}$  в пространстве  $\mathcal{K}^+$  в топологии  $\Theta_+^{\text{loc}}$ . Ограниченные множества берутся по норме пространства  $\mathcal{F}_+^b$ .

Из неравенства (9) следует, что шар

$$B_{2R_0} = \left\{ v(\cdot) \in \mathcal{F}_+^b \mid \|v\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq 2R_0 \right\}$$

в  $\mathcal{F}_+^b$  является поглощающим множеством полугруппы  $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}^+}$  в топологии  $\Theta_+^{\text{loc}}$ . Напомним, что множество  $B_{2R_0}$  компактно в этой топологии.

**Теорема 3.** 3D-система Навье–Стокса (7) имеет траекторный аттрактор  $\mathfrak{A}$ , который ограничен в  $\mathcal{F}_+^b$  и компактен в  $\Theta_+^{\text{loc}}$ .

Доказательство приведено в [3].

#### 4. Траекторный аттрактор $\alpha$ -модели Лерэ и его предел при $\alpha \rightarrow 0$

Рассматривается следующая сглаженная 3D-система:

$$\partial_t v = -\nu Av - P(u \cdot \nabla)v + g(x), \quad \nabla \cdot v = 0, \quad (10)$$

$$v = u + \alpha^2 Au, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \mathbb{T}^3. \quad (11)$$

Неизвестная функция  $u = (I + \alpha^2 A)^{-1}v$  является «сглаженной» функцией (для  $v$ ). При  $\alpha = 0$  получается точная 3D-система НС. Система (10), (11) называется  $\alpha$ -моделью Лерэ (см. [11–13]). Число  $\alpha \geq 0$  является малым параметром задачи.

Задача Коши для системы (10), (11) с начальным условием  $u(0) \in H^2$  имеет единственное решение (см. [11, 12])

$$u \in L_2(0, M; H^3) \cap L_\infty(0, M; H^2) \text{ и } \partial_t u \in L_2(0, M; H^1), \forall M > 0.$$

Для соответствующей функции  $v = (I + \alpha^2 A)u$  имеем

$$v \in L_2(0, M; H^1) \cap L_\infty(0, M; H) \text{ и } \partial_t v \in L_2(0, M; H^{-1}), \forall M > 0.$$

Энергетическое неравенство (8) становится энергетическим тождеством:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v(t)|^2 + \nu \|v(t)\|^2 = \langle g, v(t) \rangle, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

С помощью энергетического тождества (12) доказывается следующая априорная оценка для решений  $\alpha$ -модели Лерэ.

**Предложение 2.** Если  $u(t)$  – решение  $\alpha$ -модели Лерэ (10), (11), то функция  $v(t) = (I + \alpha^2 A)u(t)$  принадлежит  $\mathcal{F}_+^b$  и

$$\|T(h)v(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C_1 \|v(0)\|^2 \exp(-\nu \lambda_1 t) + R_1. \quad (13)$$

Константы  $C_1, R_1$  не зависят от  $\alpha$ .

Аналогично пространству траекторий  $\mathcal{K}^+$  системы НС определяем пространство траекторий  $\mathcal{K}_\alpha^+$  для  $\alpha$ -модели Лерэ. Пространство  $\mathcal{K}_\alpha^+$  состоит из всех функций

$$\mathcal{K}_\alpha^+ = \{v_\alpha(t) = (I + \alpha^2 A)u_\alpha(t) \mid u_\alpha(0) \in H^2\},$$

где  $u_\alpha(t)$  – это решение  $\alpha$ -модели Лерэ с произвольным начальным условием  $u_\alpha(0) \in H^2$ .

Напомним, что любая траектория из пространства  $\mathcal{K}_\alpha^+$  удовлетворяет энергетическому тождеству (12).

Трансляционная полугруппа  $\{T(h)\}$  действует на  $\mathcal{K}_\alpha^+$ . Из неравенства (13) следует, что  $\mathcal{K}_\alpha^+ \subset \mathcal{F}_+^b$ , и найдется поглощающее множество полугруппы  $\{T(h)\}$  в  $\mathcal{K}_\alpha^+$ , ограниченное в  $\mathcal{F}_+^b$  и компактное в  $\Theta_+^{\text{loc}}$ .

Тогда аналогично разделу 3 устанавливается существование траекторного аттрактора  $\mathfrak{A}_\alpha$  для  $\alpha$ -модели Лерэ при  $\alpha > 0$ , то есть  $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathcal{K}_\alpha^+$ ,  $\mathfrak{A}_\alpha$  ограничен в  $\mathcal{F}_+^b$  и компактен в  $\Theta_+^{\text{loc}}$ ;

$$T(h)\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha \quad \forall h \geq 0,$$

$$\text{dist}_{L_2(0, M; H)}(T(h)B_\alpha, \mathfrak{A}_\alpha) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow +\infty), \quad \forall M > 0,$$

для любого ограниченного (в  $\mathcal{F}_+^b$ ) множества  $B_\alpha \subset \mathcal{K}_\alpha^+$ .

Наконец, из априорной оценки (13) следует, что траекторные аттракторы  $\mathfrak{A}_\alpha$  равномерно (по  $\alpha \in (0, 1]$ ) ограничены в пространстве  $\mathcal{F}_+^b$ .

**Теорема 4.** Траекторные аттракторы  $\mathfrak{A}_\alpha$   $\alpha$ -модели Лерэ сходятся к траекторному аттрактору  $\mathfrak{A}$  3D-системы НС при  $\alpha \rightarrow 0+$  :

$$\mathfrak{A}_\alpha \rightarrow \mathfrak{A} \quad (\alpha \rightarrow 0+) \quad \text{в } \Theta_+^{\text{loc}}, \quad (14)$$

то есть при каждом  $M > 0$

$$\text{dist}_{L_2(0, M; H)}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}) \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow 0+).$$

Эта теорема доказана в [12], а в работе рассмотрены [13] другие  $\alpha$ -модели системы Навье–Стокса, для которых также предложена некоторая классификация в зависимости от силы сходимости траекторных аттракторов при  $\alpha \rightarrow 0$ .

## 5. Уравнение Гинзбурга–Ландау в перфорированной области

Пусть  $G_0$  — область в  $Y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$  такая, что  $\overline{G_0}$  — компактное множество диффеоморфное шару. Для мультииндексов  $j \in \mathbb{Z}^3$  зададим точки и множества:

$$P_\varepsilon^j = \varepsilon j, \quad G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon^3 G_0,$$

где  $\varepsilon > 0$  является малым параметром задачи. Определим область  $\widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{3}\varepsilon\} \subset \Omega$  и множество допустимых мультииндексов

$$\Upsilon_\varepsilon = \left\{ j \in \mathbb{Z}^n : G_\varepsilon^j \cap \overline{\widetilde{\Omega}_\varepsilon} \neq \emptyset \right\}.$$

Заметим, что  $|\Upsilon_\varepsilon| \simeq d\varepsilon^{-3}$ , где  $d > 0$  — некоторая константа.

Пусть ограниченная область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  имеет кусочно-гладкую границу  $\partial\Omega$ . Рассмотрим следующую перфорированную область:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}, \quad \text{где } G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j.$$

Изучается начальная-краевая задача для комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау в перфорированной области  $\Omega_\varepsilon$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = (1 + \alpha i)\Delta u_\varepsilon + R u_\varepsilon - (1 + \beta i)|u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon + g(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t \geq 0 \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \varepsilon^3 b_\varepsilon^j(x)u_\varepsilon = 0, & x \in \partial G_\varepsilon^j, j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in \Omega_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $u = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha, \beta, R$  — вещественные числа, степень  $p \geq 2$ ,  $\nu$  — единичный вектор нормали к границе полостей  $G_\varepsilon^j$ , функция  $g(x) \in L_2(\Omega; \mathbb{C})$ , в 3-м краевом условии стоит коэффициент

$$b_\varepsilon^j(x) = b\left(x, \frac{x - P_\varepsilon^j}{\varepsilon^3}\right),$$

где  $b(x, y) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^3)$ , причем  $0 < b_0 \leq b(x, y) \leq B_0$  для некоторых констант  $b_0, B_0$ , и функция  $b(x, y)$  является 1-периодической по переменной  $y$ .

Обозначим пространства  $\mathbf{H} := L_2(\Omega; \mathbb{C})$  и  $\mathbf{H}_\varepsilon := L_2(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$  с нормами  $\|\cdot\|_0$  и  $\|\cdot\|_{0,\varepsilon}$ , а также  $\mathbf{V} := H_0^1(\Omega; \mathbb{C})$  и  $\mathbf{V}_\varepsilon := H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega; \mathbb{C})$  — пространства функций с нулевым следом на  $\partial\Omega$  и с нормами  $\|v\|_1$  и  $\|v\|_{1,\varepsilon}$ . Аналогично  $\mathbf{L}_p := L_p(\Omega; \mathbb{C})$   $\mathbf{L}_{p,\varepsilon} := L_p(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$  — пространства с нормами  $\|v\|_{\mathbf{L}_p}^p$  и  $\|v\|_{\mathbf{L}_{p,\varepsilon}}^p$ .

Обозначим через  $\mathbf{V}' := H^{-1}(\Omega; \mathbb{C})$  и  $\mathbf{V}'_\varepsilon := H^{-1}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{C})$  пространства, сопряжённые к  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{V}_\varepsilon$ . Напомним, что  $\mathbf{L}_q$  и  $\mathbf{L}_{q,\varepsilon}$  являются сопряжёнными к  $\mathbf{L}_p$  и  $\mathbf{L}_{p,\varepsilon}$ , где  $q = p/(p-1)$ . Чаще всего рассматриваются уравнения ГЛ со степенью  $p = 4$  и тогда  $q = 4/3$ .

Рассматриваются обобщённые решения задачи (15), то есть функции  $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t)$ ,  $x \in \Omega_\varepsilon$ ,  $t \geq 0$ ,

$$u_\varepsilon \in L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_{p,\varepsilon}),$$

удовлетворяющие соответствующему интегральному тождеству. Тогда по теореме вложения Соболева  $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_q(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon^{-r})$ , где  $r = \max\{1, 3(1/2 - 1/p)\}$

**Предложение 3.** При фиксированном  $\varepsilon$  для любой  $U(\cdot) \in \mathbf{H}_\varepsilon$  существует слабое решение  $u(x, t)$  задачи (15) такое, что  $u(x, 0) = U(x)$ . При этом  $u_\varepsilon(x, t) \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$  и выполнено энергетическое тождество.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{0,\varepsilon}^2 + \|\nabla u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{0,\varepsilon}^2 + \|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_{p,\varepsilon}}^p - R \int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x, t)|^2 dx + \\ & + \varepsilon^3 \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\partial G_\varepsilon^j} b_\varepsilon^j(x) u_\varepsilon \cdot \bar{u}_\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{Re}(g(x) \bar{u}_\varepsilon(x, t)) dx \end{aligned}$$

для почти всех  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Аналогичная теорема для системы–реакции в области без перфорации доказана в [3].

Мы будем для краткости опускать индекс  $\varepsilon$  в обозначениях пространств, где это не вызовет разночтений.

Построим траекторный аттрактор для уравнения Гинзбурга–Ландау (15) в области с перфорацией.

Чтобы описать пространство траекторий  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$  задачи (15), определим банаховы пространства

$$\mathcal{F}_{0,M} := L_p(0, M; \mathbf{L}_p) \cap L_2(0, M; \mathbf{V}) \cap L_\infty(0, M; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_q(0, M; \mathbf{H}^{-r}) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{0,M}} := \|v\|_{L_p(0,M;\mathbf{L}_p)} + \|v\|_{L_2(0,M;\mathbf{V})} + \|v\|_{L_\infty(0,M;\mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_q(0,M;\mathbf{H}^{-r})}.$$

Введем пространство

$$\mathcal{F}_+^{loc} = L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \in L_q^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right\}.$$

Напомним, что пространство  $\mathcal{F}_+^{loc} = \mathcal{F}_{\varepsilon,+}^{loc}$  зависит от  $\varepsilon$ .

Обозначим через  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$  семейство всех слабых решений  $u(x, t)$  задачи (15). При любом  $U \in \mathbf{H}$  найдется траектория  $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$  такая, что  $u(x, 0) = U(x)$ . Следовательно, пространство траекторий  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$  задачи (15) не пусто и достаточно обширно (см. [3]).

Рассмотрим трансляционную полугруппу  $\{T(h), h \geq 0\}$ , действующую на пространстве  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ , ( $T(h)u(x, t) = u(x, h + t)$ ). Заметим, что

$$T(h)\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon^+, \quad \forall h \geq 0.$$

Определим метрики  $\rho_{0,M}(\cdot, \cdot)$  в пространствах  $\mathcal{F}_{0,M}$ , используя нормы в этих пространствах:

$$\rho_{0,M}(u, v) = \|u(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathcal{F}_{0,M}}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0,M}.$$

Эти метрики порождают топологию  $\Theta_+^{loc}$  в  $\mathcal{F}_+^{loc}$ , которая является метризуемой. Последовательность  $\{v_n\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$  сходится к  $v \in \mathcal{F}_+^{loc}$  в  $\Theta_+^{loc}$ , если для любого  $M > 0$

$$\begin{aligned} & \|v_n(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_p(0,M;\mathbf{L}_p)} + \|v_n(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(0,M;\mathbf{V})} + \\ & + \|v_n(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_\infty(0,M;\mathbf{H})} + \|\partial_t v_n(\cdot) - \partial_t v(\cdot)\|_{L_q(0,M;\mathbf{H}^{-r})} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий  $\mathcal{K}_\varepsilon^+$  воспользуемся нормой банахова пространства

$$\mathcal{F}_+^b = \mathbf{L}_p^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap L_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_q^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right\},$$

которое является подпространством пространства  $\mathcal{F}_+^{loc}$ .

**Предложение 4.** При фиксированном  $\varepsilon > 0$  задача (15) имеет траекторный аттрактор  $\mathfrak{A}_\varepsilon$  в сильной топологии  $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$ . Множество  $\mathfrak{A}_\varepsilon$  равномерно (по  $\varepsilon \in (0, 1)$ ) ограничено в  $\mathcal{F}_{\varepsilon,+}^b$  и компактно в  $\Theta_{\varepsilon,+}^{loc}$ .

Аналогичное утверждение доказано в [14] для общей системы реакции–диффузии.

## 6. Усреднение уравнения Гинзбурга–Ландау при $\varepsilon \rightarrow 0+$

Изучим предельное поведение траекторных аттракторов  $\mathfrak{A}_\varepsilon$  уравнения Гинзбурга–Ландау (15) при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  и их связь с траекторным аттрактором соответствующего усредненного уравнения в области  $\Omega$  без перфорации, но которое содержит некоторый дополнительный «странный» член.

Чтобы определить этот «странный член» (потенциал предельного уравнения), рассмотрим следующую внешнюю задачу по переменной  $y$ :

$$\begin{cases} -\Delta_y v = 0, & y \in \mathbb{R}^3 \setminus G_0, \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}_y} + b(x, y)v = b(x, y), & y \in \partial G_0, \\ v \rightarrow 0, & |y| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

В этой задаче (фиксированная) переменная  $x$  играет роль медленного параметра. Предельный потенциал  $V(x)$  определяется по формуле

$$V(x) = \int_{\partial G_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} v(x, y) d\sigma_y. \quad (16)$$

Усредненная (предельная) задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \alpha i)\Delta u + Ru - (1 + \beta i)|u|^{p-2}u - V(x)u + g(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u = U(x), & t = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Для любого начального условия  $U(\cdot) \in \mathbf{H}$  задача (17) имеет слабое решение  $u = u(x, t)$ ,  $t \geq 0$ , которое удовлетворяет следующему энергетическому тождеству:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_0^2 + \|\nabla u(\cdot, t)\|_0^2 + \|u(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}_p}^p - R \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \\ + \int_{\Omega} V(x)|u(x, t)|^2 dx = \int_{\Omega} \operatorname{Re}(g(x)\bar{u}(x, t))dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Пространство траекторий  $\bar{\mathcal{K}}^+$  состоит из всех слабых решений задачи (17).

Пространство траекторий  $\overline{\mathcal{K}}^+$  принадлежит пространству

$$\mathcal{F}_{0,+}^{loc} = L_p^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \in L_q^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-1}) \right\},$$

где  $\mathbf{H} := L_2(\Omega)^N$ ,  $\mathbf{V} := H_0^1(\Omega)^N$ , и  $\mathbf{L}_p := \mathbf{L}_p(\Omega)$  не зависят от  $\varepsilon$ . В области  $\Omega$  нет полостей. Вводится, как обычно, пространство

$$\mathcal{F}_{0,+}^b = L_p^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_p) \cap L_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_q^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r}) \right\}$$

для определения ограниченных множеств в  $\overline{\mathcal{K}}^+$ .

**Предложение 5.** Задача (17) имеет траекторный аттрактор  $\overline{\mathfrak{A}}$  в топологии  $\Theta_{0,+}^{loc}$ . Множество  $\overline{\mathfrak{A}}$  ограничено в  $\mathcal{F}_{0,+}^b$  и компактно в  $\Theta_{0,+}^{loc}$ .

Следующая теорема доказывается аналогично основной теореме в [14] для общей системы реакции–диффузии.

**Теорема 5.** Справедливо следующее предельное соотношение в топологии  $\Theta_{0,+}^{loc}$ , которая соответствует предельному уравнению в области без перфорации

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

то есть для любого  $M > 0$  в пространстве  $\mathcal{F}_{0,0,M}$  мы имеем

$$\text{dist}_{\mathcal{F}_{0,0,M}}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

**Замечание 4.** Отметим, что функции из множества  $\mathfrak{A}_\varepsilon$  определены на перфорированных областях  $\Omega_\varepsilon$ . Тем не менее все эти функции можно продолжить внутрь полостей так, чтобы нормы в пространствах  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{L}_p$  (без перфорации) оставались (почти) такими же, что и в пространствах с перфорацией  $\mathbf{H}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{V}_\varepsilon$  и  $\mathbf{L}_{p,\varepsilon}$ . Поэтому в теореме 5 все расстояния измеряются в пространствах без перфорации.

## 7. 2D-системы Навье–Стокса и Эйлера с экмановским трением

Рассматривается 2D-система Навье–Стокса с трением

$$\begin{cases} \partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p + ru = \nu \Delta u + g, \\ u|_{t=0} = u^0, \quad \text{div } u = 0, \end{cases} \quad (18)$$

которая в пределе нулевой вязкости при  $\nu \rightarrow 0^+$  переходит в 2D-систему Эйлера с трением

$$\begin{cases} \partial_t u + (u, \nabla)u + \nabla p + ru = g, \\ u|_{t=0} = u^0, \quad \text{div } u = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Неизвестными являются вектор скорости  $u = u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t))$  и давление  $p = p(x, t)$ . Внешняя сила  $g = g(x) = (g^1(x), g^2(x))$  известна. Коэффициент вязкости  $\nu \geq 0$  является малым параметром задачи.

Системы рассматриваются на торе  $x \in \mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2$  с периодическими граничными условиями. Член  $ru$ , где  $r > 0$ , параметризует экмановское трение, и система (18) становится диссипативной при всех  $\nu \geq 0$ , включая систему (19) при  $\nu = 0$ .

Системы вида (18) и (19) описывают плоские пространственно-периодические течения соответственно вязкой и невязкой жидкости в водоеме над грубым, шершавым дном. Такие уравнения, в частности, используются в математической геофизике при описании крупномасштабных процессов, протекающих в атмосфере или в океане (см. [15]). Член  $-ru$  моделирует основную крупномасштабную диссипацию, которая происходит в планетарном пограничном слое. Член, содержащий вязкость  $\nu$ , отвечает за мелкомасштабную диссипацию.

Изучается поведение аттракторов 2D-системы Навье–Стокса с трением (18) при  $\nu \rightarrow 0^+$ .

Введем пространства Соболева:

$$\mathcal{H}^s := \{u \in H^s(\mathbb{T}^2)^2, \quad \operatorname{div} u = 0\}.$$

Фазовым пространством для систем Навье–Стокса (18) и Эйлера (19) будет служить пространство  $\mathcal{H}^1$  со стандартным скалярным произведением и соболевской нормой:

$$(u, v)_1 := (u, v)_{\mathcal{H}^1} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v), \quad \|u\|_1^2 = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2.$$

**Предложение 6.** Пусть  $u^0, g \in \mathcal{H}^1$ . Тогда при  $\nu > 0$  и при любом  $T > 0$  система (18) имеет единственное решение  $u \in C([0, T], \mathcal{H}^1) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}^2)$  и выполнено следующее уравнение баланса энергии и энтропии:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_1^2 + \nu (\|\nabla u(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2) + r \|u(t)\|_1^2 = (g, u(t))_1. \quad (20)$$

Доказательство вполне аналогично классическому случаю  $r = 0$  (см., например, [1, 2]).

Рассмотрим операторы

$$S(t)u_0 = u(t), \quad t \geq 0, \quad S(t) : \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^1,$$

где  $u(t)$  — решение системы (18) с начальным условием  $u^0$ . Операторы  $\{S(t), t \geq 0\}$  образуют полугруппу в пространстве  $\mathcal{H}^1$ .

Аттракторы для классической 2D-системы Навье–Стокса (без трения, при  $r = 0$ ) были построены в пионерских работах О. А. Ладыженской, М. И. Вишика, А. В. Бабина, Р. Темама (см. [1, 2]). Глобальный аттрактор для двумерной системы Навье–Стокса с трением (18) (при  $r > 0$ ) был построен в работе [16] в фазовом пространстве  $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^2)$ . Для построения аттрактора использовался метод энергетических тождеств из работы [17]. Однако, имея уравнение баланса энергии и энтропии, с помощью метода R.Rosa строится глобальный аттрактор и в фазовом пространстве  $\mathcal{H}^1(\mathbb{T}^2)$ .

**Теорема 6.** Полугруппа  $\{S(t)\}$ , соответствующая системе (18) (при  $r > 0$ ), имеет глобальный аттрактор  $\mathcal{A}_\nu$  в пространстве  $\mathcal{H}^1$ . Глобальные аттракторы  $\mathcal{A}_\nu$  равномерно ограничены в норме  $\mathcal{H}^1$ , причем

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_\nu} \|u\|_1 \leq \frac{\|g\|_1}{r} \quad \forall \nu \geq 0. \quad (21)$$

Следующее неравенство Липшица доказывается с помощью тождества (20).

**Предложение 7.** Для любых  $u_0, u_1 \in \mathcal{H}^1$ ,  $\|u_0\|_1, \|u_1\|_1 \leq R$ , выполнено неравенство

$$\|S(t)u_0 - S(t)u_1\|_1 \leq C(R, t) \|u_0 - u_1\|_1, \quad \forall t \geq 0, \quad (22)$$

где  $C(R, s)$  — монотонно возрастающая функция по аргументам  $R \geq 0$  и  $s \geq 0$ .

Построим теперь траекторный аттрактор для системы (18) и установим его связь с глобальным аттрактором  $\mathcal{A}_v$  этой системы. В качестве пространства траекторий рассмотрим

$$\mathcal{K}_v^+ = \{u(t) = S(t)u_0, t \geq 0 \mid u_0 \in \mathcal{H}^1\},$$

а в качестве объемлющего пространства выберем

$$\mathcal{F}_+^{loc} = C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1),$$

причем топологией  $\Theta_+^{loc}$  в  $\mathcal{F}_+^{loc}$  будет служить топология локальной равномерной сходимости по норме  $\mathcal{H}^1$ , то есть по определению последовательность  $\{v_n(s), s \geq 0\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$  сходится к  $v(s) \in \mathcal{F}_+^{loc}$  в  $\Theta_+^{loc}$ , если для любого  $M > 0$

$$\|v_n(s) - v(s)\|_{C([0, M]; \mathcal{H}^1)} = \max_{s \in [0, M]} \|v_n(s) - v(s)\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

Тогда пространство  $\mathcal{F}_+^b = C^b(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1)$  с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_+^b} = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|v(s)\|_1,$$

которая используется для определения ограниченных множеств в пространстве траекторий  $\mathcal{K}_v^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$  (см. раздел 2).

Следующая теорема вытекает непосредственно из существования глобального аттрактора  $\mathcal{A}_v$  и из неравенства Липшица (22).

**Теорема 7.** *Траекторным аттрактором системы (18) в пространстве траекторий  $\mathcal{K}_v^+$  в топологии  $\Theta_+^{loc}$  служит множество*

$$\mathfrak{A}_v = \{u(t) = S(t), t \geq 0 \mid u_0 \in \mathcal{A}_v\},$$

причем отображение

$$\Phi : \mathcal{A}_v \rightarrow \mathfrak{A}_v, \Phi(u) = S(t)u, t \geq 0,$$

является гомеоморфизмом в соответствующих топологиях пространств  $\mathcal{H}^1$  и  $\Theta_+^{loc}$ .

Рассмотрим теперь систему (19) без вязкости, то есть при  $v = 0$ .

**Предложение 8.** *Пусть  $u^0, g \in \mathcal{H}^1$ . Тогда при любом  $T > 0$  система (19) имеет, по крайней мере, одно решение  $u(t) \in C([0, T]; \mathcal{H}^1)$  и для любого такого решения вещественная функция  $\|u(t)\|_1^2 = \|u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2$  является абсолютно непрерывной по переменной времени  $t$  и выполняется тождество для энергии и энтропии*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_1^2 + r \|u(t)\|_1^2 = (u(t), g)_1. \quad (23)$$

Доказательство существования решения системы (19) достаточно стандартно и использует метод галеркинских приближений (см. [9]). Ключевое тождество (23) доказывается с использованием работы [18] (см. также [19, 20]).

**Замечание 5.** *Отметим, что вопрос о справедливости теоремы единственности для двумерной системы Эйлера в пространстве  $C([0, T]; \mathcal{H}^1)$  при условии, что  $u^0, g \in \mathcal{H}^1$  остается открытым. Замечательная теорема В. Юдовича о единственности решения системы Эйлера доказана для более гладких предположений  $u^0, g \in \mathcal{W}^{1, \infty}$  и в более гладком пространстве  $L^\infty(0, T; \mathcal{W}^{1, \infty})$  (см. [21]).*

Переходя к аттракторам, необходимо сначала обобщить определение глобального аттрактора для систем Навье–Стокса (18) с единственностью на случай системы Эйлера (19), решения которой в классе  $C([0, T]; \mathcal{H}^1)$  могут быть не единственными.

**Определение 6.** Множество  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}^1$  называется (обобщенным) глобальным аттрактором системы (19), если:

- i)  $\mathcal{A}$  компактно в  $\mathcal{H}^1$ ;
- ii)  $\mathcal{A}$  является притягивающим: для любого ограниченного в  $C_b(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1)$  подмножества  $\mathcal{B} = \{u(t), t \geq 0\}$ , состоящего из решений системы (19), выполняется

$$\text{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{B}(t), \mathcal{A}) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty;$$

- iii)  $\mathcal{A}$  минимально по включению среди всех компактных притягивающих множеств.

Здесь  $\mathcal{B}(t)$  — сечение в момент  $t \geq 0$  множества  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B}(t) = \{u(t), u \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{H}^1.$$

Вопрос о построении обобщенного глобального аттрактора  $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{H}^1$  двумерной системы Эйлера с трением (19) на плоскости в сильной топологии  $\mathcal{H}^1$  решен в работе [20], где также существенную роль играло уравнение баланса энергии и энтропии, которое доказывается с использованием методов известной работы [18] про уравнения переноса.

**Теорема 8.** Система (19) имеет обобщенный глобальный аттрактор  $\mathcal{A}_0$  в пространстве  $\mathcal{H}^1$ , причем выполнено неравенство

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_0} \|u\|_1 \leq \frac{\|g\|_1}{r}. \quad (24)$$

Перейдем к построению траекторного аттрактора системы (19). Рассмотрим пространство траекторий  $\mathcal{K}_0^+$ , которое состоит из всех слабых решений  $u(t), t \geq 0$ , этой системы. Пространство  $\mathcal{K}_0^+$  принадлежит  $\mathcal{F}_+^{\text{loc}} = C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1)$  с топологией  $\Theta_+^{\text{loc}}$ , введенной выше для случая  $\nu > 0$ . Как и выше,  $\mathcal{F}_+^b = C^b(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1)$ .

Трансляционная полугруппа  $\{T(h)\}$  действует на  $\mathcal{K}_0^+$ . Из тождества (23) следует, что  $\mathcal{K}_0^+ \subset \mathcal{F}_+^b$  и найдется поглощающее множество полугруппы  $\{T(h)\}$  в  $\mathcal{K}_0^+$ , ограниченное в  $\mathcal{F}_+^b$ , и компактное в соответствующей слабой топологии  $\Theta_+^{\text{loc}, w}$ . Однако у этой полугруппы нет компактного поглощающего множества в сильной топологии  $\Theta_+^{\text{loc}}$ . В этом состояла основная трудность этой задачи. В работе [20] для случая системы на всей плоскости было доказано, что полугруппа  $\{T(h)\}$  в  $\mathcal{K}_0^+$  является асимптотически компактной в топологии  $\Theta_+^{\text{loc}}$  и, следовательно, существует сильный траекторный аттрактор. Аналогично доказывается следующая теорема для 2D-системы Эйлера с трением на торе.

**Теорема 9.** Система (19) имеет траекторный аттрактор  $\mathfrak{A}_0$  в пространстве траекторий  $\mathcal{K}_0^+$  с топологией  $\Theta_+^{\text{loc}}$ , причем выполнено неравенство

$$\sup_{u \in \mathfrak{A}_0} \|u\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq \frac{\|g\|_1}{r}. \quad (25)$$

Кроме того, множество

$$\mathfrak{A}_0(0) = \mathfrak{A}_0|_{t=0} := \{u(0) \mid u \in \mathfrak{A}_0\} \in \mathcal{H}^1$$

является обобщенным глобальным аттрактором этой системы,  $\mathfrak{A}_0 = \mathcal{A}_0$ .

**Замечание 6.** Отметим, что в отличие от случая  $\nu > 0$  мы не можем говорить о гомеоморфности аттракторов  $\mathfrak{A}$  и  $\mathcal{A}_0$ , поскольку для случая  $\nu = 0$  у нас нет естественного отображения вдоль траекторий уравнения в силу отсутствия теоремы единственности решений задачи Коши для системы Эйлера с трением.

## 8. Предел нулевой вязкости

Сформулируем две основные теоремы о пределе нулевой вязкости глобальных и траекторных аттракторов для системы 2D Навье–Стокса с трением.

Итак, для каждого  $\nu > 0$  система Навье–Стокса (18) обладает глобальным аттрактором  $\mathcal{A}_\nu$ , при этом предельная система Эйлера (19) при  $\nu = 0$  также обладает обобщенным глобальным аттрактором  $\mathcal{A}_0$ , причем семейство множеств  $\{\mathcal{A}_\nu\}_{\nu \geq 0}$  равномерно ограничено в  $\mathcal{H}^1$ :

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_\nu} \|u\|_1 \leq \frac{\|g\|_1}{r} \quad \forall \nu \geq 0.$$

Сформулируем первый основной результат.

**Теорема 10.** Пусть  $g \in \mathcal{H}^1$ . Тогда аттракторы  $\mathcal{A}_\nu$  в  $\mathcal{H}^1$  сильно полунепрерывно сверху зависят от  $\nu$  при  $\nu \rightarrow 0^+$ :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \text{dist}_{\mathcal{H}^1}(\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_0) = 0. \quad (26)$$

Аналогичная теорема доказана в работе [22] для систем Навье–Стокса и Эйлера с трением во всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а также в работе [23] для систем в ограниченной области со свободными (stress free) граничными условиями.

Сформулируем второй основной результат.

**Теорема 11.** При выполнении условий теоремы 10 траекторные аттракторы  $\mathfrak{A}_\nu$  2D-системы Навье–Стокса с трением сходятся в топологии  $\Theta_{\pm}^{\text{loc}}$  к траекторному аттрактору  $\mathfrak{A}_0$  2D-системы Эйлера с трением, то есть

$$\text{dist}_{C([0, M]; \mathcal{H}^1)}(\Pi_{0, M} \mathfrak{A}_\nu, \Pi_{0, M} \mathfrak{A}_0) \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow 0).$$

При доказательстве теоремы 11, как и при доказательстве теоремы 10, используется метод энергетических тождеств (см. [17]), при этом сильная локальная сходимость в пространстве  $C([0, M]; \mathcal{H}^1)$  достигается с помощью метода работы [20]. Подробное доказательство здесь не приводится.

### Заключение

В данной работе метод траекторных аттракторов применяется в задачах возмущения диссипативных уравнений с частными производными. Теория траекторных динамических систем и траекторных аттракторов была разработана в совместных работах М. И. Вишика и В. В. Чепыжова. Она особенно полезна при изучении диссипативных нелинейных уравнений математической физики, для которых соответствующая начально-краевая задача имеет глобальное по времени (слабое) решение, но теорема единственности этого решения или не установлена, или не имеет места. Важным примером таких уравнений является трехмерная неоднородная система Навье–Стокса в ограниченной области с условиями прилипания на границе, для которой теорема единственности не доказана. Другой пример это общая система реакции–диффузии, в которой нелинейная функция взаимодействия не удовлетворяет условию Липшица, и, в частности, трехмерное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау. Для таких задач нельзя напрямую применить классическую теорию диссипативных динамических полугрупп, действующих в фазовом пространстве начальных условий задачи, и построить для них глобальный аттрактор. Однако для таких уравнений можно рассмотреть траекторную динамическую систему, построить траекторной аттрактор соответствующей полугруппы трансляций по времени и исследовать его свойства. Этот универсальный подход можно применить для изучения различных типов диссипативных

уравнений, а именно: для общих систем реакции–диффузии, для трехмерной системы Навье–Стокса, для диссипативных волновых уравнений, для нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрических областях и для многих других сложных задач. Особое внимание в статье уделено методу траекторных аттракторов в задачах аппроксимации и сингулярного возмущения в некоторых моделях математической физики, зависящих от малого параметра. В работе рассмотрена  $\alpha$ -модель Лерэ, аппроксимирующая 3D-систему Навье–Стокса, и изучено поведение ее траекторного аттрактора, когда малый параметр  $\alpha$  стремится к нулю. Кроме того, исследовано комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау в перфорированной области, в котором малым параметром  $\varepsilon$  служит шаг перфорации, и усреднение его траекторного аттрактора, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Изучен сильный предел при вязкости  $\nu \rightarrow 0$  аттракторов 2D-систем Навье–Стокса с экмановским трением, когда в пределе при  $\nu = 0$  получается аттрактор 2D-системы Эйлера с трением.

## Список литературы

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
2. *Tetam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd ed. Applied Mathematical Sciences, vol. 68. New York: Springer-Verlag, 1997. 650 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0645-3.
3. *Vishik M. I., Chepyzhov V. V.* Attractors for Equations of Mathematical Physics. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 49. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2002. 364 p. DOI: 10.1090/coll/049.
4. *Sell G. R.* Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations // J. Dyn. Diff. Eq. 1996. Vol. 8, no. 1. P. 1–33. DOI: 10.1007/BF02218613.
5. *Chepyzhov V. V., Conti M., Pata V.* A minimal approach to the theory of global attractors // Discrete and Continuous Dyn. Sys. 2012. Vol. 32, iss. 6. P. 2079–2088. DOI: 10.3934/dcds.2012.32.2079.
6. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Trajectory attractors for evolution equations // C. R. Acad. Sci. Paris. 1995. Vol. 321. Série I. P. 1309–1314.
7. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. Vol. 76, no. 10. P. 913–964. DOI: 10.1016/S0021-7824(97)89978-3.
8. *Вишик М. И., Чепыжов В. В.* Траекторные аттракторы уравнений математической физики // УМН. 2011. Т. 66, № 4. С. 3–102.
9. *Lions J.-L.* Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969. 554 p.
10. *Albritton D., Brue E., Colombo M.* Gluing non-unique Navier-Stokes solutions // Ann. PDE. 2023. Vol. 9, no. 2. P. 17. DOI: 10.1007/s40818-023-00155-8.
11. *Cheskidov A., Holm D. D., Olson E., Titi E. S.* On Leray- $\alpha$  model of turbulence // Proceedings of the Royal Society a Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2005. Vol. 461. P. 629–649. DOI: 10.1098/rspa.2004.1373.
12. *Chepyzhov V. V., Titi E. S., Vishik M. I.* On the convergence of solutions of the Leray- $\alpha$  model to the trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system // Discrete and Continuous Dyn. Sys. 2007. Vol. 17, no. 3. P. 33–52.
13. *Чепыжов В. В.* Об аппроксимации траекторного аттрактора 3D системы Навье–Стокса различными  $\alpha$ -моделями гидродинамики // Матем. сб. 2016. Т. 207, № 4. С. 143–172. DOI: 10.4213/sm8549.
14. *Бекмаганбетов К. А., Чепыжов В. В., Чечкин Г. А.* Об аттракторах уравнений реакции–диффузии в пористой ортотропной среде // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2021. Т. 498. С. 10–15. DOI: 10.31857/S2686954321030036.
15. *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. New York: Springer, 1979. DOI: 10.1007/978-1-4684-0071-7.
16. *Ilyin A. A., Patni K., Zelik S. V.* Upper bounds for the attractor dimension of damped Navier–

- Stokes equations in  $\mathbb{R}^2$  // Discrete and Continuous Dyn. Sys. 2016. Vol. 36. P. 2085–2102. DOI: 10.3934/dcds.2016.36.2085.
17. Rosa R. The global attractor for the 2D Navier–Stokes flow on some unbounded domains // Nonlinear Anal. 1998. Vol. 32, iss. 1. P. 71–85. DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00453-7.
  18. DiPerna R., Lions P. Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory // Invent. Math. 1989. Vol. 98. P. 511–547. DOI: 10.1007/BF01393835.
  19. Boyer F., Fabrie P. Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models. Applied Mathematical Sciences, vol. 183. New York: Springer, 2013. 526 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-5975-0.
  20. Chepyzhov V. V., Ilyin A. A., Zelik S. V. Strong trajectory and global  $W^{1,p}$ -attractors for the damped-driven Euler system in  $\mathbb{R}^2$  // Discrete Contin. Dyn. Syst. B. 2017. Vol. 22, iss. 5. P. 123–155. DOI: 10.3934/dcdsb.2017109.
  21. Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Ж. Выч. Мат. Физ. 1963. Т. 3. С. 1032–1066.
  22. Ильин А. А., Чепыжов В. В. О сильной сходимости аттракторов уравнений Навье–Стокса в пределе исчезающей вязкости // Матем. заметки. 2017. Т. 101, № 4. С. 635–639. DOI: 10.4213/mzm11457.
  23. Chepyzhov V. V., Ilyin A. A., Zelik S. V. Vanishing viscosity limit for global attractors for the damped Navier-Stokes system with stress free boundary conditions // Physica D. 2018. Vol. 376–377. P. 31–38. DOI: 10.1016/j.physd.2017.08.005.

## References

1. Babin AV, Vishik MI. Attractors of Evolution Equations. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.; 1992. 532 p.
2. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd ed. Applied Mathematical Sciences, vol. 68. New York: Springer-Verlag; 1997. 650 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0645-3.
3. Vishik MI, Chepyzhov VV. Attractors for equations of mathematical physics, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 49. Providence, R.I.: American Mathematical Society; 2002. 364 p. DOI: 10.1090/coll/049.
4. Sell GR. Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations. J. Dyn. Diff. Eq. 1996;8(1):1–33. DOI: 10.1007/BF02218613.
5. Chepyzhov VV, Conti M, Pata V. A minimal approach to the theory of global attractors. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2012;32(6):2079–2088. DOI: 10.3934/dcds.2012.32.2079.
6. Chepyzhov VV, Vishik MI. Trajectory attractors for evolution equations. C. R. Acad. Sci. Paris. 1995;321(I):1309–1314.
7. Chepyzhov VV, Vishik MI. Evolution equations and their trajectory attractors. J. Math. Pures Appl. 1997;76(10):913–964. DOI: 10.1016/S0021-7824(97)89978-3.
8. Vishik MI, Chepyzhov VV. Trajectory attractors for equations of mathematical physics. Russian Math. Surveys. 2011;66(4):637–731.
9. Lions J-L. Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars; 1969. 554 p.
10. Albritton D, Brue E, Colombo M. Gluing non-unique Navier-Stokes solutions. Ann. PDE. 2023;9(2):17. DOI: 10.1007/s40818-023-00155-8.
11. Cheskidov A, Holm DD, Olson E., Titi ES. On Leray- $\alpha$  model of turbulence. Proceedings of the Royal Society a Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2005;461:629–649. DOI: 10.1098/rspa.2004.1373.
12. Chepyzhov VV, Titi ES, Vishik MI. On the convergence of solutions of the Leray- $\alpha$  model

- to the trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system. *Discrete and Continuous Dyn. Sys.* 2007;17(3):33–52.
13. Chepyzhov VV. Approximating the trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system using various  $\alpha$ -models of fluid dynamics. *Sb. Math.* 2016;207(4):610–638. DOI: 10.4213/sm8549.
  14. Bekmaganbetov KA, Chepyzhov VV, Chechkin GA. On attractors of reaction–diffusion equations in a porous orthotropic medium. *Dokl. Math.* 2021;103(3):103–107. DOI: 10.1134/S1064562421030030.
  15. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. New York: Springer; 1979. DOI: 10.1007/978-1-4684-0071-7.
  16. Ilyin AA, Patni K, Zelik SV. Upper bounds for the attractor dimension of damped Navier–Stokes equations in  $\mathbb{R}^2$ . *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2016;36:2085–2102. DOI: 10.3934/dcds.2016.36.2085.
  17. Rosa R. The global attractor for the 2D Navier–Stokes flow on some unbounded domains. *Nonlinear Anal.* 1998;32:71–85. DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00453-7.
  18. DiPerna R, Lions P. Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory. *Invent. Math.* 1989;98:511–547. DOI: 10.1007/BF01393835.
  19. Boyer F, Fabrie P. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier–Stokes Equations and Related Models*. Applied Mathematical Sciences, vol. 183. New York: Springer; 2013. 526 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-5975-0.
  20. Chepyzhov VV, Ilyin AA, Zelik SV. Strong trajectory and global  $W^{1,p}$ -attractors for the damped-driven Euler system in  $\mathbb{R}^2$ . *Discrete Contin. Dyn. Syst. B.* 2017;22(5):123–155. DOI: 10.3934/dcdsb.2017109.
  21. Yudovich VI. Non-Stationary flow of an ideal incompressible fluid. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1963;3(6):1407–1456. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90247-7.
  22. Ilyin AA, Chepyzhov VV. On strong convergence of attractors of Navier–Stokes equations in the limit of vanishing viscosity. *Math. Notes.* 2017;101(4):746–750. DOI: 10.1134/S0001434617030336.
  23. Chepyzhov VV, Ilyin AA, Zelik SV. Vanishing viscosity limit for global attractors for the damped Navier–Stokes system with stress free boundary conditions. *Physica D.* 2018;376-377:31-38. DOI: 10.1016/j.physd.2017.08.005.



*Чепыжов Владимир Викторович* — родился в Москве (1962). Окончил с отличием механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. Доктор физико-математических наук (2004, ИППИ РАН). С 1987 года работает в лаборатории № 1 Института проблем передачи информации РАН, с 2012 года в должности главного научного сотрудника. Научные интересы — уравнения с частными производными, бесконечномерные динамические системы, аттракторы, эpsilon-энтропия. Опубликовал свыше 150 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 127051 Москва, Большой Каретный пер., 19 стр.1  
 Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН  
 E-mail: chep@iitp.ru  
 ORCID: 0000-0003-2472-8672  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 5460



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.925 + 517.93

DOI: 10.18500/0869-6632-003137  
EDN: ONIPZY

## Пространственная динамика в семействе дифференциальных уравнений шестого порядка из теории структурообразования

Н. Е. Кулагин<sup>1</sup>, Л. М. Лерман<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт физической химии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

<sup>3</sup>Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия  
E-mail: klgn@yandex.ru, lermanl@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 22.08.2024, принята к публикации 21.10.2024,  
опубликована онлайн 8.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** *Тема работы.* Изучаются ограниченные стационарные (то есть не зависящие от времени) пространственно-одномерные решения квазилинейного параболического уравнения с частными производными, рассматриваемого на всей числовой прямой. Его стационарные решения описываются нелинейным дифференциальным уравнением 6-го порядка, имеющим тип уравнения Эйлера–Лагранжа–Пуассона, и поэтому приводимого к гамильтоновой системе с тремя степенями свободы, которая также обратима относительно двух линейных инволюций. Система имеет три симметричных состояния равновесия, два из которых являются гиперболическими в некоторой области значений параметров. *Цель работы.* В работе мы, комбинируя методы теории динамических систем и численные методы, исследуем поведение траекторий в окрестности симметричного гетероклинического контура, основанного на этих состояниях равновесия, показано существование как простых траекторий (периодических), так и траекторий со сложным поведением. Для этого, в частности, используется теорема о глобальном инвариантном многообразии для гетероклинического контура. Для симметричного состояния равновесия в начале координат найдена область параметров, где оно является седло-фокус-центром, показано существование гомоклинических траекторий этого состояния равновесия, долго-периодических траекторий в их окрестности, а также траекторий со сложным поведением.

**Ключевые слова:** стационарные решения, уравнение Эйлера–Лагранжа–Пуассона, гамильтонова система, состояние равновесия, седло, седло-фокус-центр, гетероклинический контур, гомоклиническая траектория, глобальное центральное многообразие, сложная динамика.

**Благодарности.** Работа Н. Е. Кулагина была поддержана грантом РФФ 22-11-00027 (численные эксперименты). Л. М. Лерман благодарит РФФ за частичную поддержку по гранту 24-11-00339 (теоретические исследования около петли седло-фокус-центра). Авторы благодарят Д. В. Тураева за полезные обсуждения.

**Для цитирования:** Кулагин Н. Е., Лерман Л. М. Пространственная динамика в семействе дифференциальных уравнений шестого порядка из теории структурообразования // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 878–896. DOI: 10.18500/0869-6632-003137. EDN: ONIPZY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Spatial dynamics in the family of sixth-order differential equations from the theory of partial formation

N. E. Kulagin<sup>✉1</sup>, L. M. Lerman<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>A. N. Frumkin Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup>National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>3</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: klg@yandex.ru, lermanl@mm.unn.ru

Received 22.08.2024, accepted 21.10.2024, available online 8.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** *Topic of the paper.* Bounded stationary (i.e. independent in time) spatially one-dimensional solutions of a quasilinear parabolic PDE are studied on the whole real line. Its stationary solutions are described by a nonlinear ODE of the sixth order of the Euler–Lagrange–Poisson type and therefore can be transformed to the Hamiltonian system with three degrees of freedom being in addition reversible with respect two linear involutions. The system has three symmetric equilibria, two of them are hyperbolic in some region of the parameter plane. *Goal of the paper.* In this paper we, combining methods of dynamical systems theory and numerical simulations, investigate the orbit behavior near the symmetric heteroclinic connection based on these equilibria. It was found both simple (periodic) and complicated orbit behavior. To this end we use the theorem on a global center manifold near the heteroclinic connection. For the third symmetric equilibrium at the origin we found the region in the parameter plane where this equilibrium is of the saddle-focus-center type and found the existence of its homoclinic orbits, long-periodic orbits near homoclinic orbits and orbits with complicated structure.

**Keywords:** stationary solutions, Euler–Lagrange–Poisson equation, Hamiltonian system, equilibrium state, saddle, saddle-focus-center, heteroclinic connection, homoclinic orbit, global center invariant manifold, complicated dynamics.

**Acknowledgements.** The work by N. E. Kulagin was supported by the RSF grant 22-11-00027 (simulations). L. M. Lerman acknowledges RSF for a partial support under the grant 24-11-00339 (theoretical studies near the loop of a saddle-focus-center). The authors are thankful to D. V. Turaev for the useful discussions.

**For citation:** Kulagin NE, Lerman LM. Spatial dynamics in the family of sixth-order differential equations from the theory of partial formation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(6):878–896. DOI: 10.18500/0869-6632-003137

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### 1. Уравнение

В работе изучаются ограниченные стационарные (то есть не зависящие от времени) пространственно-одномерные решения квазилинейного уравнения с частными производными параболического типа, рассматриваемого на всей прямой  $\mathbb{R}$ :

$$u_t = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + A \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3. \quad (1)$$

Это уравнение было предложено в качестве модели движения фазового фронта в материалах, где возможен переход от жидкой к твердой фазе, см. например, [1,2]. Его стационарные решения представляют несомненный интерес в связи с возможностью получения пространственных структур различного типа. Периодические стационарные решения этого уравнения в определенной области значений волновых чисел были получены с помощью вариационных методов [3] (см. также [4]). В данной работе мы, комбинируя методы теории динамических систем и численные методы, исследуем стационарные локализованные, периодические решения уравнения (1), а также решения этого уравнения со сложной пространственной структурой. При этом наш основной интерес направлен не на прикладную сторону полученных результатов, хотя она несомненно имеется, а на математические аспекты задачи, поскольку изучение поведения траекторий многомерных гамильтоновых систем (а наша система шестимерна) — задача недостаточно исследованная,

особенно в том, что касается поведения траекторий в окрестностях гомоклинических траекторий и гетероклинических контуров.

Уравнение для стационарных решений

$$\frac{d^6 u}{dx^6} + A \frac{d^4 u}{dx^4} + B \frac{d^2 u}{dx^2} + u - u^3 = 0 \quad (2)$$

имеет тип уравнения Эйлера–Лагранжа–Пуассона [5] и поэтому приводится к гамильтоновой системе с тремя степенями свободы заменой переменных

$$q_1 = u, \quad q_2 = u', \quad q_3 = u'', \quad p_1 = Bu' + Au''' + u^{(V)}, \quad p_2 = -Au'' - u^{(IV)}, \quad p_3 = u''''.$$

Симплектическая 2-форма в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^6$  в этих переменных имеет стандартный вид  $\Omega = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i$ , а гамильтонова система принимает вид

$$\begin{aligned} q_1' &= q_2, & p_1' &= -q_1 + q_1^3, \\ q_2' &= q_3, & p_2' &= -p_1 + Bq_2, \\ q_3' &= p_3, & p_3' &= -p_2 - Aq_3, \end{aligned} \quad (3)$$

гамильтонианом которой является многочлен четвертой степени

$$H = p_1 q_2 + p_2 q_3 + \frac{1}{2} q_1^2 - \frac{1}{2} B q_2^2 + \frac{1}{2} p_3^2 + \frac{1}{2} A q_3^2 - \frac{1}{4} q_1^4.$$

Полученное гамильтоново векторное поле  $v_H$  в  $\mathbb{R}^6$  инвариантно относительно центральной симметрии  $C : (q, p) \mapsto -(q, p)$  и также является обратимым относительно двух линейных инволюций

$$\begin{aligned} L_1 &: (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \rightarrow (q_1, -q_2, q_3, -p_1, p_2, -p_3), \\ L_2 &: (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \rightarrow (-q_1, q_2, -q_3, p_1, -p_2, p_3), \end{aligned}$$

то есть  $L_i v_H = -v \circ L_i$ , где  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ , матрицы, задающие координатное представление инволюций. Эти инволюции являются антисимплектическими, то есть  $L_i^* \Omega = -\Omega$ ,  $L_i^* \Omega(\xi, \eta) = -\Omega(L_i(\xi), L_i(\eta))$  для любых касательных векторов  $\xi, \eta \in T_x \mathbb{R}^6$ .

Состояние равновесия  $O$  системы в начале координат является симметричным относительно обеих инволюций, то есть принадлежит множеству неподвижных точек  $Fix(L_i)$  обеих инволюций, являющихся трехмерными плоскостями  $q_2 = p_1 = p_3 = 0$  (для  $L_1$ ) и  $q_1 = q_3 = p_2 = 0$  (для  $L_2$ ). Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия имеет вид

$$\lambda^6 + A\lambda^4 + B\lambda^2 + 1 = 0. \quad (4)$$

Соответствующее ему кубическое уравнение  $s^3 + As^2 + Bs + 1 = 0$ ,  $s = \lambda^2$  всегда имеет вещественный отрицательный корень, остальные два корня в общем случае могут быть либо действительной, либо комплексно-сопряженной парой. В случае действительной пары возможны два случая: оба корня положительны или оба корня отрицательны. В случае пары положительных корней характеристическое уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней и две пары действительных корней разных знаков. В этом случае состояние равновесия  $O$  называется седло-центром [6]. В случае пары отрицательных действительных корней кубического уравнения характеристическое уравнение имеет три пары чисто мнимых корней, то есть состояние равновесия  $O$  будет эллиптическим.

Ниже нас будет интересовать в основном случай, когда характеристическое уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней  $\pm i\omega$  и комплексную четверку  $\pm \alpha \pm i\beta$ ,  $\omega\alpha\beta \neq 0$ . В этом случае состояние равновесия  $O$  называется седло-фокус-центром [6]. Для кубического уравнения

это означает наличие, кроме одного отрицательного корня, еще пары комплексно-сопряженных корней. Структура траекторий в окрестности такого состояния равновесия будет описана ниже.

Система уравнений (3) имеет еще два состояния равновесия  $P_{\pm}$  с координатами  $q_1 = \pm 1$ , а остальные координаты нулевые, образующие симметричную относительно инволюции  $L_2$  пару. Каждое из этих состояний равновесия симметрично относительно инволюции  $L_1$ , и оба лежат в уровне гамильтониана  $H = 1/4$ . Они переставляются инволюцией  $L_2$ , в них матрица линеаризации имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + A\lambda^4 + B\lambda^2 - 2 = 0.$$

Здесь интересным для нас является случай, когда эти состояния равновесия являются седлами (три пары действительных ненулевых собственных значений  $\pm\lambda_k$ ,  $k = 1 - 3$ ) или седло-фокус-седлами (комплексная четверка и пара ненулевых действительных). Такие состояния равновесия имеют трехмерные устойчивые и неустойчивые многообразия, которые при продолжении могут пересекаться в пятимерном уровне гамильтониана  $H = 1/4$  трансверсально, образуя трансверсальные гомо- и гетероклинические траектории, связывающие состояния равновесия  $P_{\pm}$ . В частности, гетероклинические траектории соответствуют стационарным решениям типа фронта (раздела фаз) для исходного уравнения с частными производными.

В случае существования гетероклинической траектории, ввиду действия инволюции  $L_1$ , вместе с гетероклинической траекторией, идущей от  $P_-$  к  $P_+$ , имеется симметричная ей гетероклиническая траектория, идущая от  $P_+$  к  $P_-$ , то есть образуется симметричный гетероклинический контур, составленный из этих состояний равновесия и симметричной пары гетероклинических траекторий. Сами гетероклинические траектории при этом могут быть как симметричными относительно инволюции  $L_2$ , так и несимметричными. В первом случае контур является инвариантным относительно обеих инволюций и структурно-устойчивым относительно возмущений в классе систем, сохраняющих обе инволюции, а во втором случае его существование означает структурную неустойчивость коразмерности один в классе систем, обратимых относительно инволюции  $L_1$ . Наличие контура в случае, когда ведущее неустойчивое многообразие (см. ниже) двумерно и соответствует паре комплексно-сопряженных корней (седло-фокус в терминологии Шильникова [7]), дает богатую динамику в окрестности такого контура, которая частично была исследована для случая обратимой четырехмерной системы в [8]. Случай одномерного ведущего многообразия соответствует седлу, и здесь в окрестности контура ожидается наличие однопараметрического семейства симметричных относительно  $L_1, L_2$  периодических траекторий, накапливающихся к контуру [9].

Отметим, что для состояния равновесия типа седло-фокус-седло  $\pm\lambda_1, \pm\alpha \pm i\beta, \lambda_1\alpha\beta \neq 0$  имеет место разное локальное поведение траекторий в зависимости от того, какое из направлений является неустойчивым ведущим: двумерное, соответствующее паре комплексно-сопряженных корней с положительными реальными частями, или одномерное, соответствующее действительному положительному корню. При этом, не ограничивая общности, мы считаем, что  $\lambda_1 > 0, \alpha > 0$ . От этого зависит поведение траекторий на локальном неустойчивом  $W^u(P_-)$  (и устойчивом  $W^s(P_-)$ ) многообразии: если  $\lambda_1 < \alpha$  (ведущее многообразие одномерно), то почти все траектории на  $W^u(P_-)$  при  $x \rightarrow -\infty$  стремятся к  $P_-$ , касаясь одномерного ведущего направления, собственного для  $\lambda_1$ , в этом случае неведущее неустойчивое многообразие  $W^{uu}(P_-)$  двумерно, а если  $\lambda_1 > \alpha$ , то неведущее неустойчивое многообразие одномерно, а остальные полутраектории стремятся к состоянию равновесия при  $x \rightarrow -\infty$ , касаясь двумерного ведущего направления, соответствующего паре комплексно-сопряженных корней  $\alpha \pm i\beta$ . Это поведение сильно влияет на поведение траекторий в окрестности гомоклинических траекторий к этому состоянию равновесия или контуру, составленному из таких состояний равновесия и гетероклинических траекторий.

Состояние равновесия типа седло-фокус-центр имеет гладкие двумерные локальные устойчивое и неустойчивое многообразия  $W^s, W^u$ , гладкое двумерное симплектическое центральное

многообразии  $W^c$ , заполненное ляпуновскими периодическими траекториями, а также центрально-устойчивое и центрально-неустойчивое локальные четырехмерные многообразия  $W^{cs}, W^{cu}$ , состоящие из полутраекторий, которые асимптотически стремятся к одной из ляпуновских периодических траекторий при  $x \mapsto \infty$  или  $x \mapsto -\infty$  соответственно. Неустойчивое многообразие  $W^u(O)$  принадлежит пятимерному уровню гамильтониана  $H = H(O) = 0$  и при продолжении вдоль потока системы может пересекать устойчивое многообразие  $W^s(O)$ , образуя тем самым гомоклиническую траекторию  $\Gamma$  седло-фокус-центра  $O$ . Предположим, что такая траектория существует и является симметричной (численные исследования подтверждают этот факт, см. ниже рис. 7). Тогда она пересекает множество  $Fix(L_1)$  в точке  $m$ , отличной от начала координат, и ее траектория инвариантна относительно действия инволюции  $L_1$ . Существование гомоклинической траектории  $\Gamma_1$ , инвариантной относительно инволюции  $L_1$ , приводит к существованию еще одной гомоклинической траектории  $\Gamma_2 = L_2(\Gamma_1)$ . Таким образом, в этой задаче гомоклинические траектории к  $O$  всегда образуют «восьмерки» и даже могут образовывать так называемые сети (*networks*) [10], а значит, возможны гомоклинические и периодические траектории, обходящие одну или обе петли «восьмерки» много раз.

Наличие гомоклинической траектории седло-фокус-центра является явлением коразмерности два в классе гладких гамильтонианов. Действительно, рассмотрим пятимерную секущую  $N$  к гомоклинической траектории в некоторой ее точке  $m$ . Пятимерный уровень гамильтониана  $H = H(O)$  пересекает  $N$  трансверсально по четырехмерному гладкому подмногообразию  $V_0$ , а два двумерных подмногообразия  $W^s, W^u$  пересекают  $V_0$  по двум гладким кривым. Если система общим образом зависит от двух параметров, то в шестимерном пространстве  $V_0 \times \mathbb{R}^2$  получим два трехмерных подмногообразия, полученных продолжением следов  $W^s, W^u$  по параметрам, которые могут пересекаться трансверсально в точке  $m \times \mathbb{R}^2$ .

Гомоклинические траектории к седло-фокус-центру изучались как один из случаев в работе [6], где было доказано, что при некотором условии общего положения в окрестности гомоклинической траектории все ляпуновские периодические траектории (они седловые в соответствующем уровне гамильтониана) имеют каждая по 4 трансверсальных гомоклинических траектории, то есть система имеет сложную динамику на соответствующем уровне гамильтониана. Тем не менее мы хотим показать, что при переходе на близкие некритические уровни гамильтониана система имеет 2-эллиптические периодические траектории, то есть регулярная динамика частично восстанавливается.

## 2. О границе допустимой области

Рассмотрим систему (3) при значениях параметров  $(A, B)$  из области  $G$  плоскости, в которой многочлен

$$f(s) = s^3 + As^2 + Bs + 1,$$

полученный из характеристического многочлена для состояния равновесия  $O$ , имеет один действительный отрицательный корень и пару комплексно-сопряженных корней. Уравнение всегда имеет отрицательный корень, поскольку  $f(0) = 1$  и  $f$  отрицательно при больших по модулю отрицательных  $s$ .

Обозначим через  $g(s)$  производную  $g(s) = f'(s) = 3s^2 + 2As + B$ . Условие монотонности  $g'(s) > 0$  выделяет часть области  $G$ , расположенную выше параболы  $A^2 - 3B = 0$ , включая ее. В дополнительной части, где  $A^2 - 3B > 0$ , уравнение  $g(s) = 0$  имеет два различных действительных корня  $s_1, s_2$ ,  $s_1 < s_2$ , в которых достигаются локальный максимум  $s_1$  и локальный минимум  $s_2$  функции  $f$ . Теперь оставшаяся часть области  $G$  определяется тем условием, что на отрезке  $[s_1, s_2]$  функция  $f(s) \neq 0$ , то есть  $f(s_1)f(s_2) > 0$ . Следовательно, граница области, дополняющей  $G$ , определяется условием  $f(s_1)f(s_2) = 0$ , означаящим, что функция  $f$  и ее производная  $g$  имеют общий корень. Это есть условие существования кратного корня многочлена  $f(s)$ ,

то есть частью границы области  $G$  является связная компонента кривой, соответствующая кратным корням уравнения. Найдем ее. Система уравнений

$$s^3 + As^2 + Bs + 1 = 0, \quad 3s^2 + 2As + B = 0$$

после исключения  $s$  определяет кривую. Поэтому, вычисляя результат этих многочленов, получаем уравнение границы области  $G$ :  $A^2B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 = 0$ . Полученная кривая симметрична относительно диагонали  $A = B$ . Четыре точки на этой кривой легко находятся:  $(-1, -1)$ ,  $(0, b_0) = (0, -3/\sqrt[3]{4}) \approx (0, -1.88988)$ ,  $(b_0, 0)$  и  $(3, 3)$ . В последней точке кривая имеет острие и соответствует трехкратному корню  $\lambda = -1$ .

На границе области  $G$  (красная кривая на рис. 1) уравнение  $f(s) = 0$  имеет три действительных корня: двукратный  $s_{1,2} = \tau$  и, по формуле Виета, отрицательный  $s_3 = -1/\tau^2$ . Следовательно,

$$f(s) = (s - \tau)^2 \left( s + \frac{1}{\tau^2} \right) = s^3 + \left( \frac{1}{\tau^2} - 2\tau \right) s^2 + \left( \tau^2 - \frac{2}{\tau} \right) s + 1,$$

откуда  $A = 1/\tau^2 - 2\tau$ ,  $B = \tau^2 - 2/\tau$ , то есть получаем параметрическое задание кривой. На рис. 1 видно, что вне  $G$  лежит область, ограниченная кривой типа полукубической параболы с острием в точке  $A = 3, B = 3$ , для значений  $(A, B)$  внутри которой кубическое уравнение имеет три отрицательных корня и ее нужно исключить из области  $G$ .

При значении параметров  $(A, B) = (3, 3)$  состояние равновесия  $O$  имеет пару трехкратных собственных значений  $\pm i$  с трехмерной клеткой жордановой нормальной формы. К этой точке примыкает клинообразная область, ограниченная кривой, на которой кубический полином  $f(s)$  имеет простой и двукратный отрицательные корни.

При  $(A, B) = (3, 3)$  в окрестности состояния равновесия  $O$  гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, имеющего пару трехкратных ненулевых собственных значений  $\pm i\omega$  с жордановым  $(3 \times 3)$ -блоком, квадратичную часть его гамильтониана, зависящего общим образом от двух параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , можно привести к следующему виду [11]:

$$H_2 = -(p_1q_2 + p_2q_3) \pm \omega(p_1p_3 + q_1q_3) \mp \frac{\omega}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \frac{\varepsilon_1}{2}q_1^2 + \varepsilon_2p_2q_1.$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет вид (при выборе верхних знаков; при выборе нижних знаков нужно поменять  $\omega \rightarrow -\omega$ )

$$P(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \lambda^6 + (3\omega^2 + \varepsilon_2)\lambda^4 + (3\omega^4 + 3\varepsilon_1\omega + \varepsilon_2^2)\lambda^2 + (\omega^6 - 2\varepsilon_2\omega^4 - \varepsilon_1\omega^3) = 0.$$

Двупараметрическая бифуркация гамильтоновой системы с тремя степенями свободы в окрестности такого состояния равновесия пока не изучена, случай двух степеней свободы и состояния равновесия, имеющего при критическом значении параметров состояние равновесия с парой двукратных ненулевых чисто мнимых собственных значений, достаточно хорошо изучен, и эта бифуркация называется гамильтоновой бифуркацией Хопфа [12–14], а в случае обратимой системы — обратимой бифуркацией Хопфа [15].

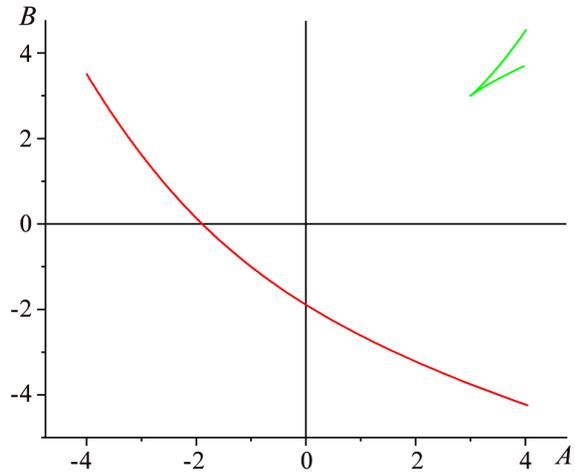


Рис. 1. Область  $G$  на плоскости  $(A, B)$  (цвет онлайн)

Fig. 1. Region  $G$  on the plane  $(A, B)$  (color online)

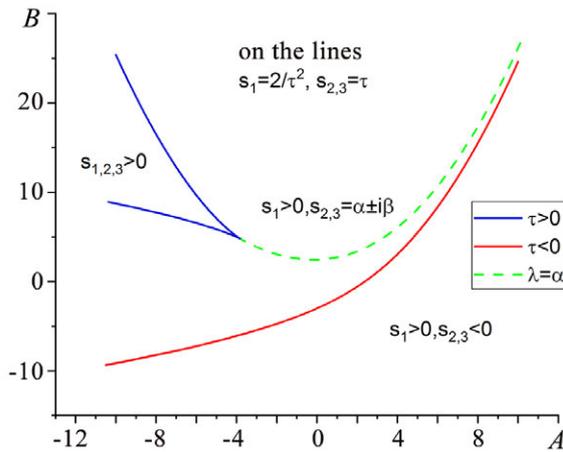


Рис. 2. Бифуркационные кривые для полинома  $Q$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Bifurcation curves for polynomial  $Q$  (color online)

Эта кривая состоит из двух компонент, имеет острие в точке  $A = -3\sqrt[3]{2}, B = 3\sqrt[3]{4}$ , соответствующий тройной корень кубического уравнения равен  $\sqrt[3]{2}$ . В области между двумя компонентами полученной кривой все корни кубического уравнения имеют ненулевые действительные части, то есть оба состояния равновесия  $P_{\pm}$  гиперболичны. Кроме того, важно построить кривую  $\lambda_1 = \alpha$ , при переходе через которую ведущие многообразия меняют размерность (зеленая кривая на рис. 2). Ниже этой кривой ведущее многообразие двумерно, а выше – одномерно.

### 3. Гетероклинические контуры и периодические траектории

В этом разделе мы изучим существование у системы (3) симметричных гетероклинических контуров. Существование таких контуров подтверждается численно (см. рис. 3–4). Именно, удастся найти их как в случае седел, так и в случае седло-фокус-седел.

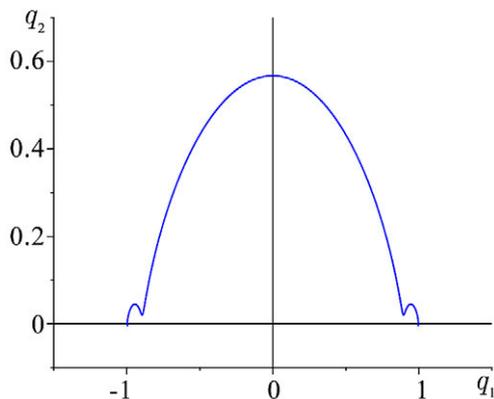


Рис. 3. Проекция на плоскость  $q_1$ – $q_2$  симметричной гетероклинической траектории седло-фокус-седла при двумерном ведущем направлении

Fig. 3. Projection on the plane  $q_1$ – $q_2$  of symmetric heteroclinic orbit of the saddle-focus-saddle when leading direction is two-dimensional

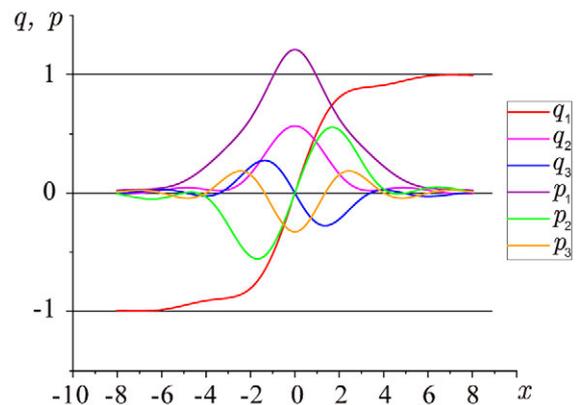


Рис. 4. Развертки симметричной гетероклинической траектории седло-фокус-седла (цвет онлайн)

Fig. 4. Unfoldings of a symmetric heteroclinic orbit of the saddle-focus-center (color online)

Для этого в силу  $L_1$ -симметрии достаточно найти одну гетероклиническую траекторию, вторая будет существовать в силу  $L_1$ -обратимости системы и симметричности состояний равновесия. При рассмотрении этих случаев следует учесть наличие, при некоторых условиях общего положения, инвариантного глобального центрального многообразия в окрестности контура, что сводит рассмотрение динамики системы в окрестности контура к изучению системы либо с одной, либо с двумя степенями свободы в окрестности трансверсального контура, составленного из двух седел или, соответственно, двух седло-фокусов и двух симметрично связанных гетероклинических траекторий к этим состояниям равновесия. Для понимания ситуации напомним соответствующую теорему о существовании глобального центрального многообразия в окрестности гомоклинической траектории к седловому состоянию равновесия [16–19]. Для этого нужно напомнить понятия расширенного неустойчивого многообразия и сильно устойчивого слоения для седлового состояния равновесия векторного поля [19].

Пусть  $v$  — гладкое векторное поле на гладком многообразии  $M$  и  $p$  — его седловое состояние равновесия, то есть  $v(p) = 0$ , и матрица  $A$  линеаризации векторного поля в точке  $p$  имеет спектр собственных значений, состоящий из двух непустых множеств  $\text{Spec}(A) = \sigma_s \cup \sigma_u$ , где собственные значения из  $\sigma_s$  имеют отрицательные реальные части, а собственные значения из  $\sigma_u$  имеют положительные реальные части. Тогда в некоторой окрестности  $U$  этого состояния равновесия имеются два гладких инвариантных подмногообразия  $W^s(p)$ ,  $W^u(p)$ , содержащие те и только те полутраектории, которые стремятся к  $p$  при  $t \rightarrow \infty$  (для  $W^s(p)$ ) и  $t \rightarrow -\infty$  (для  $W^u(p)$ ). Все остальные траектории покидают  $U$  в обе стороны по времени. Во множествах  $\sigma_s$ ,  $\sigma_u$  выделяются так называемые ведущие собственные значения, лежащие ближе остальных к мнимой оси. В общем случае ведущими собственными значениями являются либо простое действительное число, либо пара комплексно-сопряженных собственных значений. Мы предполагаем это выполненным. Тогда оставшая часть множества  $\sigma_s$  (или  $\sigma_u$ ) называется неведущими собственными значениями и обозначается  $\sigma_{ss}$  или соответственно  $\sigma_{uu}$ . В случае гамильтонова векторного поля или обратимого векторного поля и его симметричного состояния равновесия, ввиду симметрии их собственных значений  $\lambda \rightarrow -\lambda$ , разбиения спектра на ведущие и неведущие части для  $\sigma_s$  и  $\sigma_u$  одинаковы.

Неведущие и ведущие части спектра порождают дополнительные инвариантные многообразия в окрестности точки  $p$ . Именно, существует гладкое (той же гладкости, что и правые части системы) инвариантное сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}$ , положительные полутраектории на котором стремятся к  $p$  как  $\exp[-\gamma t]$ , где  $\gamma = \min\{|\text{Re}\lambda_i|, \lambda_i \in \sigma_{ss}\}$ . Более того, на устойчивом многообразии существует гладкое слоение, являющееся инвариантным в следующем смысле: сдвиг слоя вдоль потока системы на одно и то же время дает слой того же слоения. Одним из слоев (неподвижным) этого слоения является сильно устойчивое многообразие.

Ведущая часть спектра  $\sigma_s$  задает ведущее  $C^1$ -гладкое многообразие  $W^l$ -размерности либо единица, либо два, причем все положительные полутраектории из  $W^s$  стремятся к  $p$  таким образом, что направления их касательных векторов стремятся к ведущему направлению (одномерному или двумерному). В окрестности  $U$  также определяется так называемое расширенное неустойчивое инвариантное многообразие  $W^{ue}$  гладкости  $C^{1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , которое содержит  $W^u$ , ведущее многообразие и в точке  $p$  касательное к  $W^{ue}$  пространство является прямой суммой  $T_p W^u \oplus T_p W^l$ . Многообразие  $W^{ue}$ , вообще говоря, неединственно, но все такие многообразия в точках многообразия  $W^u$  имеют одинаковые касательные пространства.

Предположим теперь, что система имеет гомоклиническую траекторию  $\Gamma$  седлового состояния равновесия  $p$ , которая при стремлении к  $p$  не лежит в сильно устойчивом и сильно неустойчивом многообразиях. Кроме того, предположим выполнение следующего условия трансверсальности: *продолженное потоком многообразие  $W^{ue}$  пересекает слои сильно устойчивого слоения трансверсально*. Отметим, что размерности соответствующих подмногообразий дополнены, так что такое предположение есть условие общего типа в классе систем с гомоклинической

траекторий. В этом случае справедлива следующая теорема о глобальном центральном многообразии в окрестности гомоклинической траектории [16–19].

**Теорема 1.** Пусть оба ведущих многообразия (устойчивое и неустойчивое) одномерны и выполнены условия трансверсальности для  $W^{se}$ ,  $W^{ue}$ . Тогда существует такая окрестность  $\mathcal{V}$  гомоклинической петли  $\bar{\Gamma}$ , в которой имеется  $C^{1+\varepsilon}$ -гладкое инвариантное глобальное центральное двумерное подмногообразие  $\mathcal{W}^c$ , содержащее петлю. Все траектории из окрестности  $\mathcal{V}$ , которые не принадлежат  $\mathcal{V}$ , выходят из окрестности в обе стороны по времени. Многообразие  $\mathcal{W}^c$  в точке  $p$  касается двумерного подпространства, натянутого на устойчивое и неустойчивое ведущие подпространства. Если оба ведущих многообразия двумерны и выполнены оба условия трансверсальности, то глобальное центральное многообразие  $\mathcal{W}^c$  четырехмерно, в точке  $p$  оно касается четырехмерного подпространства, являющегося прямой суммой двумерных устойчивых и неустойчивых ведущих подпространств. Все траектории окрестности  $\mathcal{V}$ , не лежащие на  $\mathcal{W}^c$ , покидают окрестность в обе стороны по времени.

Теорема о глобальном центральном многообразии справедлива и в окрестности гетероклинического контура, если соответствующие условия выполнены для каждой гетероклинической траектории, соединяющей смежные пары седел [19].

Теперь вернемся к системе (3) и рассмотрим контур из пары симметричных седел  $P_-, P_+$  и пары связывающих их гетероклинических траекторий  $\Gamma_1, \Gamma_2 = L_1(\Gamma_1)$ . Предположим, что  $\Gamma_1$  симметрична относительно инволюции  $L_2$  и вдоль нее  $W^u(P_-), W^s(P_+)$  пересекаются трансверсально в уровне гамильтониана  $H = 1/4$ .

Предположим, что  $\Gamma_1$  выходит из  $P_-$ , касаясь ведущего неустойчивого многообразия, которое, в зависимости от параметров  $A, B$ , может быть либо одномерным (ведущее собственное значение действительно), либо двумерным (ведущими являются пара комплексно-сопряженных собственных значений с положительными реальными частями). Ввиду симметричности седел относительно инволюции  $L_1$  их перестановочности инволюцией  $L_2$ , оба седла имеют одновременно либо одномерные, либо двумерные ведущие устойчивые и неустойчивые направления, а гетероклиническая траектория  $\Gamma_1$  входит в  $P_+$ , также касаясь ведущего направления, то есть она не лежит на сильно устойчивом слое.

Продолжим потоком инвариантное расширенное локальное неустойчивое многообразие  $W^{ue}(P_-)$  седла  $P_-$ , которое имеет размерность либо четыре, если ведущее направление одномерно, либо пять, если ведущее направление двумерно, а размерность слоев сильно устойчивых слоений будет равна двум в первом случае и единице во втором. Будем считать выполненным условие трансверсальности пересечений  $W^{ue}(P_-)$  со слоями сильно устойчивого слоения и  $W^{se}(P_+)$  со слоями сильно неустойчивого слоения точки  $P_-$ . Тогда эти же условия трансверсальности будут выполняться и для  $\Gamma_2$ . В этом случае в окрестности контура справедлива

**Теорема 2.** Если ведущие направления седла в точке  $P_-$  одномерны, то глобальное центральное двумерное многообразие  $\mathcal{W}^c$ , существующее в окрестности контура, является двумерным симплектическим подмногообразием класса  $C^{1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , и содержит контур из двух седел и однопараметрическое семейство периодических траекторий, накапливающихся к контуру.

Если ведущие направления седла в точке  $P_-$  двумерны, то глобальное центральное инвариантное многообразие, существующее в окрестности контура, является четырехмерным симплектическим подмногообразием класса  $C^{1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ , и содержит контур из двух седло-фокусов и двух трансверсальных гетероклинических траекторий  $\Gamma_1, \Gamma_2 = L_1(\Gamma_1)$  и однопараметрическое семейство периодических траекторий, накапливающихся к контуру. Окрестность контура содержит также гиперболическое инвариантное множество. Простым критерием для обнаружения такой динамики является наличие  $k$ -обходных гомоклинических траекторий седло-фокус-седла при  $k \geq 1$ .

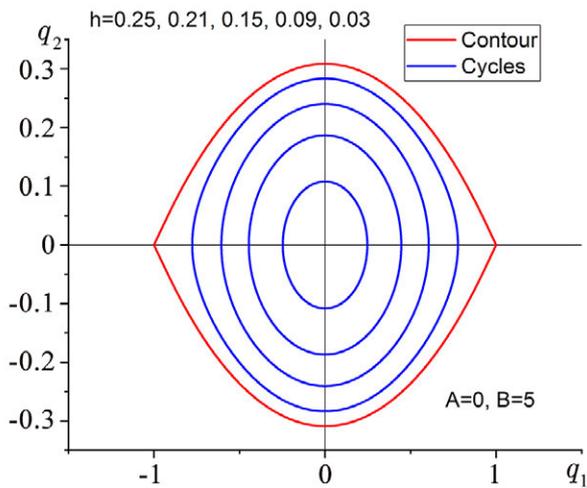


Рис. 5. Гетероклинический контур и примыкающее к нему однопараметрическое семейство периодических траекторий,  $A = 0, B = 5$ , ведущее направление одномерно (цвет онлайн)

Fig. 5. Heteroclinic connection and adjoining one-parametric family of periodic orbits:  $A = 0, B = 5$ , leading direction is one-dimensional (color online)

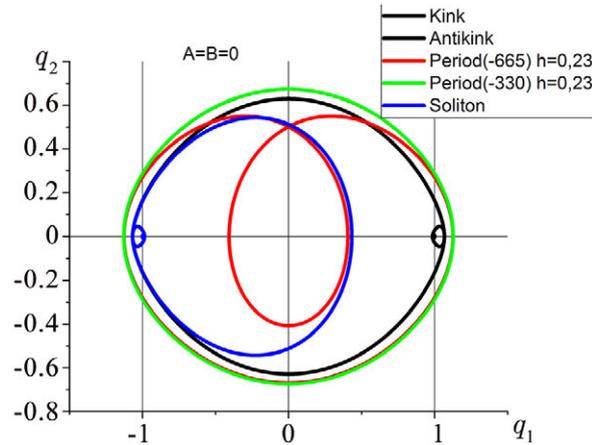


Рис. 6. Гетероклинический контур, гомоклинические и периодические траектории,  $A = 0, B = 0$ , ведущее направление двумерно (цвет онлайн)

Fig. 6. Heteroclinic connection, homoclinic and periodic orbits:  $A = 0, B = 0$ , leading direction is two-dimensional (color online)

Поведение в случае одномерного ведущего неустойчивого направления иллюстрируется рис. 5, где ясно видно однопараметрическое семейство периодических траекторий, параметром является значение гамильтониана  $H = h$ . Интересно отметить и это подтверждается численным счетом, что в рассматриваемой задаче уменьшение значения гамильтониана от  $h = 1/4$  (уровень контура) до нуля — уровня, на котором лежит  $O$ , семейство периодических траекторий около контура сливается с ляпуновским семейством коротко-периодических траекторий около седло-фокус-центра  $O$ .

Численно сложная динамика в случае двумерного ведущего направления подтверждается обнаружением гомоклинических траекторий к каждому из  $P_{\pm}$ , а также наличием достаточно сложных (многообходных) периодических траекторий в окрестности такого контура (см. рис. 6). Частично эти результаты могут быть получены из работы [20], но далеко не все. Дело в том, что недостаточная гладкость многообразия  $\mathcal{W}^c$  не позволяет использовать бифуркационные результаты работы, так как они требуют достаточно большой гладкости. Тем не менее можно гарантировать, что все траектории, целиком лежащие в окрестности  $\mathcal{V}$ , принадлежат многообразию  $\mathcal{W}^c$ .

#### 4. Нормальная форма в окрестности седло-фокус-центра

Для понимания динамики, связанной с окрестностью гомоклинической траектории седло-фокус-центра, рассмотрим гладкую гамильтонову систему  $\dot{X} = I\nabla H$  с тремя степенями свободы, имеющую состояние равновесия  $p$  типа седло-фокус-центр. Это означает, что собственными значениями матрицы линеаризованной системы в состоянии равновесия  $ID^2H(p)$  являются четверка комплексных чисел  $\pm\alpha \pm i\beta$  и пара чисто мнимых  $\pm i\omega$ . Для определенности будем считать, что  $\alpha > 0$  и  $H(p) = 0$ . Такое состояние равновесия является грубым в пространстве гладких гамильтонианов (сохраняется при малых гладких возмущениях гамильтониана).

Локальная структура такого состояния равновесия понятна и вытекает из структуры линеаризованной системы и теоремы о центральном многообразии. Во-первых, имеется гладкое

инвариантное двумерное центральное многообразие  $W^c$ , отвечающее чисто мнимым собственным значениям. Оно является симплектическим и заполнено периодическими траекториями (ляпуновское семейство), каждая из которых лежит на своем уровне гамильтониана  $H = c$ , причем при значениях  $c$  одного знака. Имеются также два гладких локальных подмногообразия размерности четыре: центрально-устойчивое  $W^{cs}$  и центрально-неустойчивое  $W^{cu}$ . Эти многообразия трансверсально пересекаются по центральному многообразию  $W^{cs} \cap W^{cu} = W^c$ . Само  $W^{cs}$  расслоено уровнями  $H = c$  на трехмерные цилиндры, топологически эквивалентные  $S^1 \times D^2$  ( $D^2$  — двумерный диск), являющиеся устойчивыми многообразиями ляпуновских седловых периодических траекторий на  $W^c$ . Соответственно,  $W^{cu}$  расслоено уровнями  $H = c$  на трехмерные цилиндры, топологически эквивалентные  $S^1 \times D^2$ , являющиеся неустойчивыми многообразиями ляпуновских седловых периодических траекторий на  $W^c$ . В пределе  $c \rightarrow 0$  устойчивое многообразие седловой периодической траектории стягивается к  $W^s(p)$  — двумерному устойчивому многообразию состояния равновесия, гладкому диску. Аналогично получаем  $W^u(p)$ . Траектории, не лежащие на  $W^{cs} \cup W^{cu}$ , выходят из окрестности точки  $p$  в обе стороны по времени (напомним, что в нашем случае «время» — это пространственная координата  $x$ ).

Теперь продолжим двумерное многообразие  $W^u(p)$  по траекториям потока. В пятимерном уровне  $H = H(p)$  возможна ситуация, когда  $W^u(p)$  и  $W^s(p)$  пересекаются по некоторой траектории — гомоклинической траектории  $\Gamma$  точки  $p$ . В общем случае это случай коразмерности два: в уровне  $H = H(p)$  на четырехмерной секущей к траектории  $\Gamma$  две гладкие кривые — следы  $W^u(p)$  и  $W^s(p)$  — пересекаются без касания. Поведение траекторий системы в окрестности гомоклинической траектории  $\Gamma$  — интересная, трудная и малоизученная задача. Некоторые результаты здесь были получены в [6], где было доказано следующая теорема.

**Теорема 3.** *При выполнении некоторого условия общего положения на линеаризованную на траектории  $\Gamma$  систему, каждая ляпуновская периодическая траектория  $\gamma_c$ , лежащая в уровне  $H = c$ , имеет 4 трансверсальные гомоклинические траектории Пуанкаре.*

Понятно, что наличие трансверсальных гомоклинических траекторий в уровне  $H = c$  приводит к сложной динамике поведения траекторий в окрестности  $\Gamma$ . Отметим, что эта теорема ничего не говорит о поведении траекторий системы в особом уровне гамильтониана  $H = H(p)$ .

С другой стороны, некоторым аналогом данной задачи является задача об изучении поведения траекторий в окрестности гомоклинической траектории седло-фокуса в системе с двумя степенями свободы, изучавшаяся в работах [21–24]. В частности, в [23, 24] было доказано существование интервалов значений гамильтониана, накапливающихся к значению, соответствующему петле, у которых на соответствующем уровне гамильтониана имеются эллиптические периодические траектории. Возникает аналогичный вопрос о существовании 2-эллиптических периодических траекторий в рассматриваемом случае петли седло-фокус-центра. 2-эллиптичность периодической траектории, лежащей в соответствующем уровне гамильтониана, означает, что ее 4 мультипликатора лежат на единичной окружности. Отметим, что имеющаяся на этот счет теорема Тураева [25] о размерности инвариантных множеств в окрестности сепаратрисных связей не запрещает такое существование, так как в отличие от случая седло-центра здесь нет глобального центрального многообразия размерности четыре в окрестности петли. Наличие такого многообразия не позволяло бы существование 2-эллиптических периодических траекторий в окрестности  $\Gamma$ .

Для изучения поведения траекторий системы в окрестности гомоклинической траектории  $\Gamma$  нужно построить и изучить отображение Пуанкаре на секущих к  $\Gamma$  в окрестности точки  $p$  (локальное, глобальное и их суперпозицию), которое зависит от параметра  $c$  и показать, в частности, справедливость следующей гипотезы: *при выполнении некоторого условия общего положения на систему с гомоклинической траекторией существуют интервалы значений  $c$ , накапливающиеся к нулю, которым соответствуют уровни гамильтониана, содержащие 2-эллиптические периодические траектории системы.*

Если эта гипотеза справедлива, то это бы означало, что, несмотря на сложное поведение системы, в некоторых частях фазового пространства существует регулярная динамика, связанная с существованием КАМ-торов около 2-эллиптических траекторий.

Для начала исследования предположим сначала, что в окрестности точки  $p$  система линейна, то есть определяется квадратичным гамильтонианом

$$H = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2) + \beta(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{\omega}{2}(x_3^2 + y_3^2).$$

Отметим, что в отличие от случая седло-центра и седло-фокуса для аналитических систем с двумя степенями свободы, здесь нет аналога теоремы Мозера об интегрируемой нормальной форме, так как здесь могут быть резонансы вида  $n\beta + m\omega = 0$  (кроме неустраиваемых). В дальнейшем будем предполагать, что отсутствуют так называемые сильные резонансы, то есть нет соотношений  $n\beta + m\omega = 0$  с  $|m| + |n| \leq 4$ . Тогда нормальная форма гамильтониана до членов четвертого порядка включительно выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} H_4 &= \alpha X + \beta Y + \omega R + F(X, Y, R), \\ X &= x_1y_1 + x_2y_2, \quad Y = x_1y_2 - x_2y_1, \quad R = \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2), \end{aligned} \tag{5}$$

где  $F$  — однородный многочлен второй степени по переменным  $X, Y, R$ , и  $H_4$  является интегрируемым гамильтонианом с дополнительными интегралами  $Y, R$ . Мы будем использовать этот локальный вид гамильтониана в дальнейшем.

Поиск 2-эллиптических периодических траекторий в этой задаче не является единственной целью. Изучение других особенностей ее динамики — еще более интересная задача.

В дальнейшем дополнительно предполагается, как это имеет место в случае системы (3), что рассматриваемая гамильтонова система обратима относительно антисимплектической инволюции  $L : M \rightarrow M$ ,  $L^*\omega = -\omega$ . Множество ее неподвижных точек  $Fix(L)$  будем предполагать гладким трехмерным подмногообразием, в случае системы (3) — это трехмерная плоскость. Инволюция переставляет устойчивое и неустойчивое многообразия седло-фокус-центра, а ляпуновские периодические траектории являются симметричными. В такой системе могут существовать симметричные гомоклинические траектории седло-фокус-центра, такая траектория пересекает множество  $Fix(L)$  в одной точке, которая разбивает ее на две симметричные части. Около симметричных гомоклинических траекторий седло-фокус-центра могут существовать симметричные периодические траектории. Такая траектория пересекает множество  $Fix(L)$  ровно в двух точках через полпериода этой траектории. На этом геометрическом свойстве основан поиск таких траекторий.

Предположим, что симметричная гомоклиническая траектория  $\Gamma$  седло-фокус-центра существует. В системе (3) она находится численно (см. рис. 7, 8). Более того, поскольку система обратима относительно двух инволюций, то могут существовать гомоклинические траектории, симметричные относительно одной инволюции, и гомоклинические траектории, инвариантные относительно другой инволюции. В данной системе оба типа таких траекторий были найдены численно (см. рис. 7, 8).

Рассмотрим взаимное расположение множества  $Fix(L)$  и секущей  $N$  в окрестности точки  $m = Fix(L) \cap \Gamma$ . Вектор  $v(m)$  трансверсален  $N$  и, в силу обратимости, является собственным вектором, соответствующим собственному значению  $-1$ , оператора  $DL$  в пространстве  $T_mM$ :  $DLv(m) = -v(L(m)) = -v(m)$ . Вектор  $v(m)$  лежит в касательном пространстве  $T_mV_p$ ,  $V_p = \{H = H(p)\}$ . Секущую  $N$  в окрестности точки  $m$  всегда можно выбрать так, чтобы она была инвариантна относительно действия инволюции  $L$  и содержала достаточно малый диск из  $Fix(L)$ , являющийся окрестностью точки  $m$ . Секущая  $N$  гладко расслоена уровнями  $H = c$

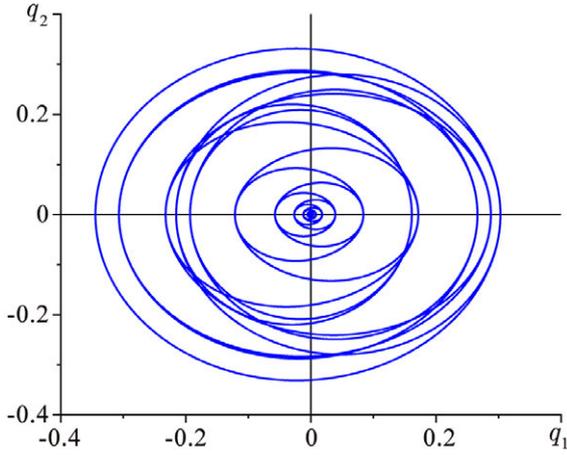


Рис. 7. Проекция  $L_1$ -симметричной гомоклинической траектории седло-фокус-центра на плоскость  $q_1$ - $q_2$  при  $A = 3.088784862$ ,  $B = 3.046013567$

Fig. 7. Projection of a  $L_1$ -symmetric homoclinic orbit of the saddle-focus-center onto the plane  $q_1$ - $q_2$  at  $A = 3.088784862$ ,  $B = 3.046013567$

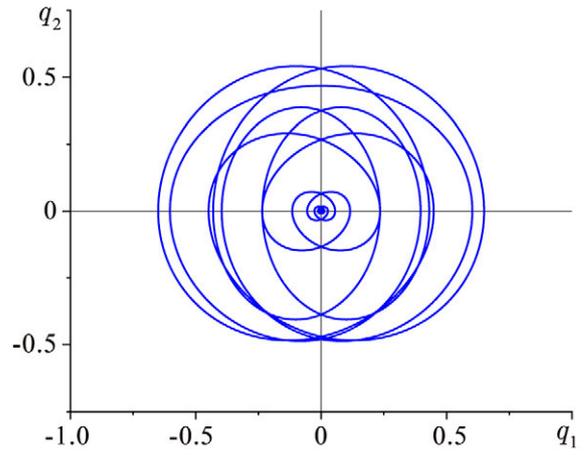


Рис. 8. Проекция  $L_2$ -симметричной гомоклинической траектории седло-фокус-центра на плоскость  $q_1$ - $q_2$  при  $A = 3.2$ ,  $B = 3$

Fig. 8. Projection of a  $L_2$ -symmetric homoclinic orbit of the saddle-focus-center onto the plane  $q_1$ - $q_2$  at  $A = 3.2$ ,  $B = 3$

на четырехмерные диски  $N_c$ , одним из которых является диск  $N_0$ , соответствующий уровню  $V_p$ . Будем также предполагать трансверсальность пересечения подмногообразий  $Fix(L)$  и  $H = c$  в точке  $m$ , а поэтому и при малых  $|c - H(p)|$ . Тогда такое пересечение является двумерным диском и 3-диск  $Fix(L)$  расслоен этими двумерными дисками.

В 4-диске  $N_0$  лежит гладкая кривая  $l_u$  — след неустойчивого многообразия  $W^u(p)$ . Будем предполагать, что пересечение в точке  $m$  этой кривой и 3-мерного диска  $Fix(L)$  происходит без касания, то есть касательный вектор к кривой  $l_u$  не лежит в касательном пространстве к  $Fix(L)$ . По симметрии мы имеем аналогичную гладкую кривую  $l_s = L(l_u)$  — след устойчивого многообразия  $W^s(p)$ , касательный вектор к которой в точке  $m$  также не лежит в касательном пространстве к  $Fix(L)$ . Более того, мы предположим, что пересечение многообразий  $W^u(p)$ ,  $W^s(p)$  вдоль  $\Gamma$  невырожденное, то есть два касательных вектора к  $l_s, l_u$  в точке  $m$  неколлинеарны. Теперь в касательном пространстве  $T_m N$  мы можем натянуть на эту пару векторов двумерную плоскость, которая вместе с касательным пространством к  $Fix(L)$  в точке  $m$  порождает все  $T_m N$ .

## 5. Выбор секущих, локальное и глобальное отображения

Для построения отображения Пуанкаре вблизи гомоклинической траектории выберем две секущие к траектории  $\Gamma$ . В координатах  $(x, y)$  многообразии  $W^s$  есть 2-плоскость  $x_3 = y_3 = x_1 = x_2 = 0$ , а  $W^u$  есть 2-плоскость  $x_3 = y_3 = y_1 = y_2 = 0$ . Подмногообразие  $y_1^2 + y_2^2 = \rho_s^2$ ,  $x_3^2 + y_3^2 \leq \delta_s$ ,  $x_1^2 + x_2^2 \leq \sigma_s^2$  является секущей  $N^s$  к входящему куску  $\Gamma$ . Подмногообразие  $x_1^2 + x_2^2 = \rho_u^2$ ,  $x_3^2 + y_3^2 \leq \delta_s$ ,  $y_1^2 + y_2^2 \leq \sigma_s^2$  является секущей  $N^u$  к выходящему куску  $\Gamma$ . Обе эти секущие гомеоморфны  $S^1 \times D^4$ . Каждая из них гладко расслоена уровнями  $H = c$ .

Для получения локального отображения  $T : N^s \mapsto N^u$  нужно проинтегрировать гамильтонову систему с гамильтонианом (5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\alpha + F_X)x_1 - (\beta + F_Y)x_2, & \dot{y}_1 &= -(\alpha + F_X)y_1 - (\beta + F_Y)y_2, \\ \dot{x}_2 &= (\beta + F_Y)x_2 + (\alpha + F_X)x_1, & \dot{y}_2 &= (\beta + F_Y)y_2 - (\alpha + F_X)y_1, \\ \dot{x}_3 &= (\omega + F_R)y_3, & \dot{y}_3 &= -(\omega + F_R)x_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку  $X, Y, R$  являются локальными интегралами, то есть они постоянны вдоль траекторий потока, то, задавая начальную точку  $(x_0, y_0)$ , можем считать  $X_0, Y_0, R_0$  постоянными и интегрировать систему (6) как линейную с постоянными коэффициентами. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \exp[t(\alpha + F_X^0)][x_1^0 \cos((\beta + F_Y^0)t) - x_2^0 \sin((\beta + F_Y^0)t)], \\
 x_2(t) &= \exp[t(\alpha + F_X^0)][x_1^0 \sin((\beta + F_Y^0)t) + x_2^0 \cos((\beta + F_Y^0)t)], \\
 y_1(t) &= \exp[-t(\alpha + F_X^0)][y_1^0 \cos((\beta + F_Y^0)t) - y_2^0 \sin((\beta + F_Y^0)t)], \\
 y_2(t) &= \exp[-t(\alpha + F_X^0)][y_1^0 \sin((\beta + F_Y^0)t) + y_2^0 \cos((\beta + F_Y^0)t)], \\
 x_3(t) &= x_3^0 \cos((\omega + F_R^0)t) + y_3^0 \sin((\omega + F_R^0)t), \\
 y_3(t) &= -x_3^0 \sin((\omega + F_R^0)t) + y_3^0 \cos((\omega + F_R^0)t).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим точку  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \rho_s \cos \theta, \rho_s \sin \theta, y_3^0)$  на секущей  $N^s$ . Если эта точка не лежит на  $W^{cs}$ , то есть  $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 \neq 0$ , то эта точка достигает секущей  $N^u$  через время

$$t_p = \frac{1}{\alpha + F_X^0} \ln \frac{\rho_u}{\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}.$$

Подставляя это значение вместо  $t$  в оставшиеся четыре соотношения в (7), получаем координаты образа точки при локальном отображении  $T$ .

Теперь будем предполагать, как в нашем случае, что состояние равновесия  $p$  симметрично относительно инволюции  $L$  и гомоклиническая траектория  $\Gamma$  также симметрична. Тогда естественно выбрать секущие  $N^s, N^u$  к  $\Gamma$  симметрично расположенными, то есть  $N^u = L(N^s)$ . В выбранных координатах около точки  $p$  локальное действие инволюции  $L$  можно считать линейным и действующим следующим образом:

$$L(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (-y_2, -y_1, y_3, -x_2, -x_1, x_3).$$

Тогда множество  $Fix(L)$  локально задается как  $x_1 + y_2 = 0, x_2 + y_1 = 0, x_3 = y_3$ , то есть является 3-диском. Для выполнения условия симметрии  $N^u = L(N^s)$  выберем  $\rho_u = \rho_s = \rho, \delta_u = \delta_s = \delta, \sigma_u = \sigma_s = \sigma$ .

Ввиду симметрии гомоклинической траектории  $\Gamma$ , она пересекает множество  $Fix(L)$  в некоторой точке  $m$ . Пусть  $N$  — секущая к  $\Gamma$ . Ее, как сказано выше, можно выбрать таким образом, что она будет инвариантна относительно действия инволюции  $L$  и содержит трехмерный диск  $D_m \subset Fix(L)$ . Секущая  $N$  расслоена уровнями  $H = c$  на гладкие четырехмерные диски  $N_c$ , являющиеся секущими к потоку гамильтоновой системы, ограниченному на этот уровень, один из таких дисков  $N_0$  проходит через точку  $m$ . 3-диск  $D_m$  расслоен уровнями  $H = c$  на двумерные диски  $\Delta_c$ . Диск  $\Delta_0$  содержит точку  $m$ .

Рассмотрим на  $N$  след многообразия  $W^u(p)$ , это гладкая кривая  $l_u$  (отрезок), проходящая через точку  $m$  и лежащая в 4-диске  $N_0$ . Мы предположим, что  $l_u$  не касается диска  $D_m$  в точке  $m$ . В  $N$  также лежит гладкий отрезок  $l_s = L(l_u)$ , проходящий через точку  $m$ , не касающийся  $D_m$  в точке  $m$ . Мы предположим выполнение условия невырожденности  $\Gamma$ , то есть что кривые  $l_u, l_s$  не касаются друг друга в точке  $m$ , то есть касательные векторы к этим кривым в этой точке неколлинеарны. Тогда в четырехмерном касательном пространстве  $T_m N_0$  лежат две двумерные плоскости: одна натянута на пару касательных векторов к  $l_u, l_s$  в точке  $m$ , а вторая плоскость — касательная к 2-диску  $\Delta_0$ . Мы предполагаем, что эти две 2-плоскости трансверсальны, то есть взаимно дополнительные в  $T_m N_0$ . В частности, отсюда следует, что в касательном пространстве  $T_m N$  первая плоскость дополняет касательную 3-плоскость к  $D_m$  в точке  $m$ .

Для поиска симметричных периодических траекторий в окрестности гомоклинической траектории  $\Gamma$  сначала находится прообраз 3-диска  $D_m \subset Fix(L)$  при отображении последования

из окрестности точки  $q = \Gamma \cap N^u$  в окрестность точки  $m \in N$ . Обозначим его  $D_q$ . В касательном пространстве к секущей  $N^u$  в точке  $q$  касательная плоскость к  $D_q$  будет 3-плоскостью, трансверсальная двумерной плоскости, натянутой на пару неколлинеарных векторов, касательных соответственно к следу  $W^u$  и следу  $W^s$  в точке  $q$ . Координатами в  $N^u$  являются угловая координата  $\varphi$ , где  $x_1 = \rho \cos \varphi$ ,  $x_2 = \rho \sin \varphi$ , и координаты  $X, Y, x_3, y_3$ . Секущая  $N^u$  гладко расслоена уровнями  $H = c$ , которые в выбранных координатах на  $N^u$  являются графиками функций

$$X = \alpha^{-1}[c - \beta Y - \omega R + O_2(Y, R, c)].$$

Рассмотрим теперь во множестве  $Fix(L)$  трехмерный диск  $D_p$ , являющийся окрестностью точки  $p$ . В координатах  $(x, y)$  он задается уравнениями  $x_1 = -y_2$ ,  $x_2 = -y_1$ ,  $x_3 = y_3$ , то есть координатами на  $D_p$  являются  $(y_1, y_2, y_3)$ . Функции  $X, Y, R$ , инвариантные относительно потока в  $U$ , в этих координатах имеют вид  $X = -2y_1y_2$ ,  $Y = y_1^2 - y_2^2$ ,  $R = y_3^2$ . Введем на  $D_p$  цилиндрические координаты  $y_1 = \tau \sin \chi$ ,  $y_2 = -\tau \cos \chi$ ,  $y_3 = y_3^0$ . Тогда образом в  $N^u$  при отображении вдоль потока (7) окружности  $\tau = \tau_0 > 0$ ,  $y_3 = y_3^0$  будет параметрически заданная замкнутая кривая

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\beta + F_Y^0}{\alpha + F_X^0} \ln \left( \frac{\rho}{\tau_0} \right) - \chi \pmod{2\pi}, & X &= \tau_0^2 \sin(2\chi), & Y &= -\tau_0^2 \cos(2\chi), \\ x_3 &= \sqrt{2}y_3^0 \cos \left( \frac{\omega + F_R^0}{\alpha + F_X^0} \ln \left( \frac{\rho}{\tau_0} \right) + \pi/4 \right), & y_3 &= \sqrt{2}y_3^0 \sin \left( \frac{\omega + F_R^0}{\alpha + F_X^0} \ln \left( \frac{\rho}{\tau_0} \right) + \pi/4 \right), \end{aligned}$$

параметром на которой является  $\chi \in [0, 2\pi]$ . Меняя  $\tau_0 \in [0, \tau_*]$ ,  $y_3^0 \in [-y_3^*, y_3^*]$ , получаем трехмерное подмногообразие  $S \subset N^u$ , в замыкании которого содержится замкнутая кривая — след  $W^u(p)$ . Через точки пересечения  $S$  с диском  $D_q$  проходят симметричные относительно инволюции  $L$  периодические траектории. Поскольку секущая  $N^u$  пятимерна, а оба множества  $S, D_q$  трехмерны, то пересечение происходит в общем случае вдоль кривых — однопараметрических семейств симметричных периодических траекторий.

Отметим важное свойство полученного трехмерного многообразия в  $N^u$ : при обходе окружности  $\tau = \tau_0, y_3 = y_3^0$  в диске  $D_p$  ее образ в  $N^u$  делает полный оборот по угловой переменной  $\varphi$ . Детальное изучение пересечения в четырехмерной секущей  $N_0^u$  образа множества  $D_q \cap \{H = H(p)\}$  и  $S \cap \{H = H(p)\}$  геометрически весьма сложно и приводит к следующему утверждению.

**Теорема 4.** *При выполнении указанных предположений в окрестности симметричной гомоклинической траектории  $\Gamma$  симметричного седло-фокус-центра  $p$  гладкой обратимой гамильтоновой системы с тремя степенями свободы уровень гамильтониана  $H = H(p)$  содержит счетное множество однообходных симметричных периодических траекторий. Тип этих траекторий зависит от выполнения некоторого неравенства, коэффициентами которого являются реальные части собственных значений состояния равновесия  $p$  и коэффициенты матрицы линеаризации глобального отображения.*

Технические детали доказательства этой теоремы будут изложены в другой работе. Здесь мы только иллюстрируем ее численными результатами.

## 6. Выводы

В работе изучается дифференциальное уравнение шестого порядка типа Эйлера–Лагранжа–Пуассона, описывающее стационарные решения уравнения с частными производными параболического типа из теории фазовых переходов. Это уравнение зависит от двух параметров,

имеющих физический смысл. Фактически исследование ведется для гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, которая получается из уравнения после введения новых переменных. Важно также, что полученная система является еще и обратимой относительно двух различных инволюций, что позволяет находить решения с различными типами симметрии.

Для этой системы исследуются два круга вопросов. Первый касается существования гетероклинических траекторий, связывающих два различных состояния равновесия гиперболического типа, соответствующих двум различным пространственно однородным решениям исходного уравнения. Такие решения как раз описывают переходы из одного состояния в другое, симметричное ему. Вопрос о типах таких решений, их сложности, поведения решений вблизи них является одним из основных для рассматриваемой задачи. Эта задача решается в основном численно, но с привлечением для их поиска методов теории динамических систем. Такие решения находятся и указаны области значений параметров, которым соответствуют решения с простой и сложной структурой, что зависит от типа полученных гетероклинических контуров.

Второй круг вопросов связан с существованием гомоклинических решений к центральному состоянию равновесия, имеющим для некоторой области параметров тип седло-фокус-центр (см. текст выше). Такие решения представляют интерес в связи с тем, что они соответствуют так называемым локализованным решениям исходного уравнения с частными производными и на таких решениях конечным является функционал, вариационная производная которого задает правую часть исходного уравнения с частными производными (уравнение потенциального типа). Кроме того, очень интересна структура решений около гомоклинических решений, поскольку это позволяет получать решения с весьма сложной структурой, используя результаты [6]. В работе различные нетривиальные решения получены с использованием численных методов. Более того, в окрестности гомоклинических траекторий седло-фокус-центра могут существовать так называемые 2-эллиптические траектории, около которых имеются квазипериодические решения, то есть регулярная динамика. Это будет предметом исследования в следующих работах.

## Список литературы

1. *Bates P. W., Fife P. C., Gardner R. A., Jones C. K. R. T.* The existence of traveling wave solutions of a generalized phase-field model // *SIAM J. Math. Anal.* 1997. Vol. 28, no. 1. P. 60–93. DOI: 10.18500/0869-6632-00313710.1137/S0036141095283820.
2. *Caginalp G., Fife P.* Higher-order phase field models and detailed anisotropy // *Phys. Rev. B.* 1986. Vol. 34, iss. 7. P. 4940–4943. DOI: 10.1103/PhysRevB.34.4940.
3. *Tersian S., Shaparova Yu.* Periodic and homoclinic solutions of some semilinear sixth-order differential equations // *J. Math. Analysis Appl.* 2002. Vol. 272, iss. 1. P. 223–239. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00153-1.
4. *Peletier L. A., Troy W. C., Van der Vorst R. C. A. M.* Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation // *Differential Equations.* 1995. Vol. 31, no. 2. P. 301–314.
5. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Неицмадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // В кн.: *Динамические системы. Т. 3. Итоги науки и техники, сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления».* М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. С. 5–290.
6. *Koltsova O. Yu., Lerman L. M.* Families of transverse Poincaré homoclinic orbits in  $2N$ -dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center // *Intern. J. Bifurcation & Chaos.* 1996. Vol. 6, no. 6. P. 991–1006. DOI: 10.1142/S0218127496000540.
7. *Шильников Л. П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // *Матем. сб.* 1970. Т. 81, № 1. С. 92–103.
8. *Kulagin N. E., Lerman L. M., Trifonov K. N.* Twin heteroclinic connections of reversible systems // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2024. Vol. 29, no. 1, 40–64. DOI: 10.1134/S1560354724010040.

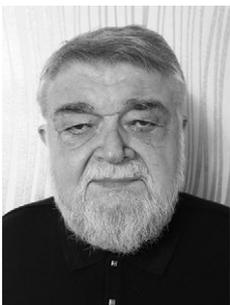
9. *Vanderbauwhede A., Fiedler B.* Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems // *Z. Angew. Math. Phys.* 1992. Vol. 43. P. 292–318. DOI: 10.1007/BF00946632.
10. *Ibañez S., Rodrigues A.* On the dynamics near a homoclinic network to a bifocus: Switching and horseshoes // *Int. J. of Bifurc. and Chaos.* 2015. Vol. 25, no. 11. P. 1530030. DOI: 10.1142/S021812741530030X.
11. *Галин Д. М.* Версальные деформации линейных гамильтоновых систем // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1975. Т. 1. С. 63–74.
12. *Gaivão J. P., Gelfreich V.* Splitting of separatrices for the Hamiltonian-Hopf bifurcation with the Swift–Hohenberg equation as an example // *Nonlinearity.* 2011. Vol. 24, no. 3. P. 677–698. DOI: 10.1088/0951-7715/24/3/002.
13. *Glebsky L. Yu., Lerman L. M.* On small stationary localized solutions for the generalized 1-D Swift-Hohenberg equation // *Chaos: Interdisc. J Nonlin. Sci.* 1995. Vol. 5, no. 2. P. 424–431. DOI: 10.1063/1.166142.
14. *van der Meer J.-C.* The Hamiltonian Hopf Bifurcation. Vol. 1160 of Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 115 p. DOI: 10.1007/BFb0080357.
15. *Iooss G., Pérouéme M. C.* Perturbed homoclinic solutions in reversible 1:1 resonance vector fields // *J. Diff. Equat.* 1993. Vol. 102. P. 62–88.
16. *Homburg A. J.* Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields // *Memoirs of AMS.* 1996. Vol. 121. P. 578. DOI: 10.1090/memo/0578.
17. *Sandstede B.* Center manifolds for homoclinic solutions // *J. Dyn. Differ. Equ.* 2000. Vol. 12, no. 3. P. 449–510. DOI: 10.1023/A:1026412926537.
18. Тураев Д. В., Об одном случае бифуркаций контура, образованного гомоклиническими кривыми седла // В кн.: «Методы качественной теории дифференциальных уравнений» / Под ред. Е. А. Леонтович-Андронов. Горький: Горьковский госуниверситет, 1984. С. 162–175.
19. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Т. 1. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
20. Lerman L. Homo- and heteroclinic orbits, hyperbolic subsets in a one-parameter unfolding of a Hamiltonian system with heteroclinic contour with two saddle-foci // *Regul. & Chaotic Dynamics.* 1997. Vol. 2, no. 3-4. P. 139–155.
21. *Беляков Л. А., Шильников Л. П.* Гомоклинические кривые и сложные уединенные волны // В кн.: «Методы качественной теории дифференциальных уравнений» / Под ред. Е. А. Леонтович-Андронов. Горький: Горьковский госуниверситет, 1985. С. 22–35.
22. *Devaney R.* Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // *J. Diff. Equat.* 1976. Vol. 21. P. 431–439. DOI: 10.1016/0022-0396(76)90130-3.
23. *Lerman L. M.* Complex dynamics and bifurcations in Hamiltonian systems having the transversal homoclinic orbit to a saddle-focus // *Chaos: Interdisc. J. Nonlin. Sci.* 1991. Vol. 1, no. 2. P. 174–180. DOI: 10.1063/1.165859.
24. *Lerman L.* Dynamical phenomena near a saddle-focus homoclinic connection in a Hamiltonian system // *J. Stat. Physics.* 2000. Vol. 101, no. 1–2. P. 357–372. DOI: 10.1023/A:1026411506781.
25. *Turaev D. V.* On dimension of non-local bifurcation problems // *Int. J. Bif. & Chaos.* 1996. Vol. 6, no. 5. P. 919–948. DOI: 10.1142/S0218127496000515.

## References

1. Bates PW, Fife PC, Gardner RA, Jones CKRT. The existence of traveling wave solutions of a generalized phase-field model. *SIAM J. Math. Anal.* 1997;28(1):60–93. DOI: 10.18500/0869-6632-00313710.1137/S0036141095283820.
2. Caginalp G, Fife P. Higher-order phase field models and detailed anisotropy. *Phys. Rev. B.* 1986;34(7):4940–4943. DOI: 10.1103/PhysRevB.34.4940.

3. Tersian S, Shaparova Yu. Periodic and homoclinic solutions of some semilinear sixth-order differential equations. *J. Math. Analysis Appl.* 2002;272(1):223–239. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00153-1.
4. Peletier LA, Troy WC, Van der Vorst RCAM. Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation. *Differential Equations.* 1995;31(2):301–314.
5. Arnol'd VI, Kozlov VV, Neishtadt AI. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. In: *Dynamical systems*, vol. 3, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. “Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.”. Moscow: VINITI; 1985. P. 5–290.
6. Koltsova OYu, Lerman LM. Families of transverse Poincaré homoclinic orbits in  $2N$ -dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center. *Intern. J. Bifurcation & Chaos.* 1996;6(6):991–1006. DOI: 10.1142/S0218127496000540.
7. Shilnikov LP. The structure of extended neighborhood of a rough equilibrium of the saddle-focus. *Math. Sb.* 1970;81(1):92–103.
8. Kulagin NE, Lerman LM, Trifonov KN. Twin heteroclinic connections of reversible systems. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2024;29(1):40–64. DOI: 10.1134/S1560354724010040.
9. Vanderbauwhede A, Fiedler B. Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems. *Z. Angew. Math. Phys.* 1992;43:292–318. DOI: 10.1007/BF00946632.
10. Ibañez S, Rodrigues A. On the dynamics near a homoclinic network to a bifocus: Switching and horseshoes. *Int. J. of Bifurc. and Chaos.* 2015;25(11):1530030. DOI: 10.1142/S021812741530030X.
11. Galin D. M. Versal deformations of linear Hamiltonian systems // *Proc. of Petrovsky seminar.* 1975. Vol. 1. P. 63–74.
12. Gaivão JP, Gelfreich V. Splitting of separatrices for the Hamiltonian-Hopf bifurcation with the Swift–Hohenberg equation as an example. *Nonlinearity.* 2011;24(3):677–698. DOI: 10.1088/0951-7715/24/3/002.
13. Glebsky LYu, Lerman LM. On small stationary localized solutions for the generalized 1-D Swift-Hohenberg equation. *Chaos: Interdisc. J Nonlin. Sci.* 1995;5(2):424–431. DOI: 10.1063/1.166142.
14. van der Meer J-C. The Hamiltonian Hopf Bifurcation. Vol. 1160 of *Lecture Notes in Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag; 1985. 115 p. DOI: 10.1007/BFb0080357.
15. Iooss G, Pérouéme MC. Perturbed homoclinic solutions in reversible 1:1 resonance vector fields. *J. Diff. Equat.* 1993;102:62–88.
16. Homburg AJ. Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields. *Memoirs of AMS.* 1996;121:578. DOI: 10.1090/memo/0578.
17. Sandstede B. Center manifolds for homoclinic solutions. *J. Dyn. Differ. Equ.* 2000;12(3):449–510. DOI: 10.1023/A:1026412926537.
18. Turaev DV. On bifurcation of a contour formed by homoclinic orbits of a saddle. In: Leontovich-Andronov E. A. (ed) “*Methods of qualitative theory of differential equation*”. Gorky: Gorky State University; 1984. P. 162–175.
19. Shilnikov LP, Shilnikov AL, Turaev DV, Chua L. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics.* Vol. 1. Singapoure: World Scientific; 1998.
20. Lerman L. Homo- and heteroclinic orbits, hyperbolic subsets in a one-parameter unfolding of a Hamiltonian system with heteroclinic contour with two saddle-foci. *Regul. & Chaotic Dynamics.* 1997;2(3-4):139–155.
21. Belyakov LA, Shilnikov LP. Homoclinic curves and complex solitary waves. In: Leontovich-Andronov EA, editor. *Methods of qualitative theory of differential equation.* Gorky: Gorky State University; 1985. P. 22–35.
22. Devaney R. Homoclinic orbits in Hamiltonian systems. *J. Diff. Equat.* 1976;21:431–439. DOI: 10.1016/0022-0396(76)90130-3.

23. Lerman LM. Complex dynamics and bifurcations in Hamiltonian systems having the transversal homoclinic orbit to a saddle-focus. *Chaos: Interdisc. J. Nonlin. Sci.* 1991;1(2):174–180. DOI: 10.1063/1.165859.
24. Lerman L. Dynamical phenomena near a saddle-focus homoclinic connection in a Hamiltonian system. *J. Stat. Physics.* 2000;101(1–2):357–372. DOI: 10.1023/A:1026411506781.
25. Turaev DV. On dimension of non-local bifurcation problems. *Int. J. Bif. & Chaos.* 1996;6(5): 919–948. DOI: 10.1142/S0218127496000515.



*Кулагин Николай Евгеньевич* — родился в Кисловодске (1946). Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета. Доктор физико-математических наук (1989). Известный специалист в теории структур в уравнениях магнетизма (уравнения Ландау–Лифшица), теории нелинейных эллиптических уравнений и численных методов исследования таких структур. В настоящее время — ведущий научный сотрудник Института физхимии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН.

Россия, 119071 Москва, Ленинский проспект, 31, корп. 4  
 Институт физической химии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН  
 E-mail: klg@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0002-1511-2772  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 6954



*Лерман Лев Михайлович* — родился в 1944 году. Окончил факультет ВМК Горьковского государственного университета (1968). Доктор физико-математических наук (2000), профессор (2005). Известный специалист по теории динамических систем, теории бифуркаций, теории гамильтоновых систем, теории структур в уравнениях с частными производными эллиптического типа. В настоящее время — главный научный сотрудник Международной лаборатории динамических систем и приложений ВШЭ, профессор кафедры фундаментальной математики ВШЭ (Нижний Новгород).

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: lermanl@mm.unn.ru  
 ORCID: 0000-0002-8913-1888  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 106647



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003139  
EDN: SPCMJJ

## Группы базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана

Н. И. Жукова, К. И. Шеина✉

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Нижний Новгород, Россия

E-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru, ✉kse51091@mail.ru

Поступила в редакцию 11.09.2024, принята к публикации 22.10.2024,  
опубликована онлайн 13.11.2024, опубликована 29.11.2024

Посвящается 90-летию со дня рождения Л. П. Шильникова

**Аннотация.** Цель работы — исследование групп базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана. Картановы слоения образуют категорию, где автоморфизмы сохраняют не только слоение, но и его трансверсальную картанову геометрию. Группой базовых автоморфизмов слоения называется фактор-группа группы всех автоморфизмов этого слоения по нормальной подгруппе слоевых автоморфизмов, относительно которых каждый слой инвариантен. Картановы слоения включают в себя такие обширные классы слоений, как псевдоримановы, лоренцевы, слоения с трансверсальной аффинной связностью. Ограничения на размерность как слоения, так и слоеного многообразия не накладываются. Компактность слоеного многообразия не предполагается. **Методы.** Доказательство структурной теоремы для хаотических картановых слоений основано на применении конструкции слоеного расслоения, обычно используемой в теории слоений с трансверсальными геометриями. **Результаты.** Основным результатом данной работы является теорема о том, что группа базовых автоморфизмов любого хаотического картанова слоения со связностью Эресмана допускает структуру группы Ли и нахождение оценок размерности этой группы. В частности, доказано, что если множество замкнутых слоев счетно, то группа базовых автоморфизмов такого слоения счетна. **Заключение.** В настоящей работе доказан критерий, согласно которому хаотичность картанова слоения типа  $(G, H)$  эквивалентна хаотичности локально свободного действия группы  $H$  на ассоциированном параллелизуемом многообразии. Таким образом, проблема существования хаоса в картановых слоениях со связностью Эресмана сводится к той же проблеме для локально свободных действий группы Ли на параллелизуемых многообразиях.

**Ключевые слова:** слоение, связность Эресмана для слоения, хаотическое слоение, базовый автоморфизм слоения.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 23-71-30008.

**Для цитирования:** Жукова Н. И., Шеина К. И. Группы базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 897–907. DOI: 10.18500/0869-6632-003139. EDN: SPCMJJ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Groups of basic automorphisms of chaotic Cartan foliations with Ehresmann connection

N. I. Zhukova, K. I. Sheina 

National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: nina.i.zhukova@yandex.ru, kse51091@mail.ru

Received 11.09.2024, accepted 22.10.2024, available online 13.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The purpose of the work is to study the groups of basic automorphisms of chaotic Cartan foliations with Ehresmann connection. Cartan foliations form a category where automorphisms preserve not only the foliation, but also its transverse Cartan geometry. The group of basic automorphisms of a foliation is the quotient group of the group of all automorphisms of this foliation by the normal subgroup of leaf automorphisms with respect to which each leaf is invariant. Cartan foliations include such wide classes of foliations as pseudo-Riemannian, Lorentzian, and foliations with transversal affine connection. No restrictions are imposed on the dimension of either the foliation or the foliated manifold. Compactness of the foliated manifold is not assumed. *Methods.* The proof of the structure theorem for chaotic Cartan foliations is based on the application of the foliated bundle construction, commonly used in the theory of foliations with transverse geometries. *Results.* The main result of this paper is the theorem stating that the group of basic automorphisms of any chaotic Cartan foliation with Ehresmann connection admits the structure of a Lie group and finding estimates for the dimension of this group. In particular, it is proved that if the set of closed leaves is countable, then the group of basic automorphisms of such a foliation is countable. *Conclusion.* In this paper, we prove a criterion according to which the chaoticity of a Cartan foliation of type  $(G, H)$  is equivalent to the chaoticity of a locally free action of the group  $H$  on the associated parallelizable manifold. Thus, the problem of the existence of chaos in Cartan foliations with Ehresmann connection reduces to the same problem for locally free actions of a Lie group on parallelizable manifolds.

**Keywords:** foliation, Ehresmann connection for foliation, chaotic foliation, basic automorphism of a foliation.

**Acknowledgements.** This work was supported by RSF, grant No 23-71-30008.

**For citation:** Zhukova NI, Sheina KI. Groups of basic automorphisms of chaotic Cartan foliations with Ehresmann connection. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):897–907. DOI: 10.18500/0869-6632-003139

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Одним из основных объектов, связанных с геометрической структурой на гладком многообразии, является группа автоморфизмов. Среди центральных проблем стоит вопрос, можно ли наделять группы автоморфизмов структурой конечномерной группы Ли [1].

В теории слоений с трансверсально проектируемыми (для краткости трансверсальными) геометриями автоморфизмы понимаются как диффеоморфизмы, отображающие слои на слои и сохраняющие указанную геометрию. Группа всех автоморфизмов слоения  $(M, F)$  с трансверсально проектируемой геометрией  $\xi$  обозначается  $\mathcal{A}^\xi(M, F)$ . Пусть  $\mathcal{A}_L^\xi(M, F)$  — нормальная подгруппа в группе  $\mathcal{A}^\xi(M, F)$ , образованная автоморфизмами, отображающими каждый слой слоения на себя. Факторгруппа  $\mathcal{A}^\xi(M, F)/\mathcal{A}_L^\xi(M, F)$  называется *полной группой базовых автоморфизмов* слоения  $(M, F)$  и обозначается через  $\mathcal{A}_B^\xi(M, F)$ . При исследовании слоений  $(M, F)$  с трансверсально проектируемой геометрией естественно поставить проблему о существовании структуры конечномерной группы Ли на группе  $\mathcal{A}_B^\xi(M, F)$  базовых автоморфизмов слоения  $(M, F)$ .

Как известно [2, Пример 3], группа  $\mathcal{A}_B^\xi(M, F)$  зависит от выбора трансверсальной картановой геометрии  $\xi$ , поэтому она фигурирует в обозначении этой группы.

Лесли [3] был первым, кто решил подобную задачу для гладких слоений на компактных многообразиях. Для слоений с полной трансверсальной проектируемой аффинной связностью эта проблема изучалась Белько [4].

Существование структуры конечномерной группы Ли на группе базовых автоморфизмов полных картановых слоений исследовалось авторами в [2], причем эффективность трансверсальной картановой геометрии не предполагалась.

Пространство слоев  $M/F$  слоения  $(M, F)$  является диффеологическим пространством, а группу базовых автоморфизмов  $A_B(M, F)$  можно рассматривать как подгруппу диффеологической группы Ли  $Diff(M/F)$ . Для слоений Ли с плотными слоями на компактном многообразии диффеологические группы Ли  $Diff(M/F)$  вычисляются Гектором и Масиасом-Виргосом [5].

В данной работе исследуется вопрос существования структуры конечномерной группы Ли на группе базовых автоморфизмов хаотических картановых слоений со связностью Эресмана. Мы предполагаем, что все рассматриваемые картановы слоения моделируются на эффективной картановой геометрии (точные определения приведены в разделе 1). Картанова геометрия рассматривается благодаря ее универсальности. Картановы слоения включают в себя такие обширные классы слоений, как псевдоримановы, лоренцевы, слоения с трансверсальной аффинной связностью и другие.

Понятие связности Эресмана для слоений было введено Блюменталем и Хебдой в [6] как естественное обобщение связности Эресмана для субмерсий (мы напомним о ней в разделе 2.1).

Следуя [7], мы называем слоение  $(M, F)$  хаотическим, если оно транзитивно (то есть имеет плотный слой) и объединение замкнутых слоев всюду плотно в  $M$ . Близкое понятие хаотичности для слоений введено Черчиллем [8]. Оба эти понятия иницированы определением хаоса в смысле Дивани [9]. Чувствительность слоений со связностью Эресмана вводится и исследуется в [10], где показано, что чувствительность таких слоений вытекает из транзитивности слоения и всюду плотности объединения замкнутых слоев.

Для картановых слоений  $(M, F)$  со связностью Эресмана Жуковой [11] введен алгебраический инвариант — структурная алгебра Ли  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$ , который в случае полных римановых слоений совпадает с инвариантом Молино [12].

Применяя конструкцию слоеного расслоения для картанова слоения  $(M, F)$ , обычно используемую в теории слоений с трансверсальной геометрией, мы доказываем структурную теорему для хаотических картановых слоений (теорема 5). Второй пункт теоремы 5 содержит следующее ключевое для данной работы утверждение.

**Теорема 1.** *Если картаново слоение  $(M, F)$  произвольной коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$ , обладающее связностью Эресмана, хаотическое, то его структурная алгебра Ли  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$  равна нулю.*

Применяя структурную теорему 5, мы доказываем следующий критерий, сводящий проблему существования хаоса в картановых слоениях типа  $(G, H)$  к аналогичной задаче для локально свободного действия группы Ли  $H$  на ассоциированном базовом многообразии  $W$  (см. раздел 2.2 для получения более подробной информации).

**Теорема 2.** *Пусть  $(M, F)$  — картаново слоение типа  $(G, H)$  со связностью Эресмана. Тогда для того, чтобы слоение  $(M, F)$  было хаотическим, необходимо и достаточно, чтобы индуцированное действие группы Ли  $H$  на ассоциированном базовом многообразии  $W$  было локально свободным и хаотическим.*

Поскольку ассоциированное базовое многообразие  $W$  параллелизуемо, из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Исследование хаоса в картановых слоениях со связностью Эресмана сводится к изучению хаотичности локально свободных гладких действий групп Ли на параллелизуемых многообразиях.*

Следующее утверждение для полных картановых слоений вытекает из теорем [2, Теоремы 1 и 2]. Наблюдение показывает, что оно верно и в более общем контексте — для картановых слоений со связностью Эресмана. Напомним, что слой слоения называется *собственным*, если он является вложенным подмногообразием слоеного многообразия. Замкнутые слои и, в частности, компактные слои — примеры собственных слоев.

**Теорема 3.** Пусть  $(M, F)$  — картаново слоение, моделируемое на эффективной картановой геометрии  $\xi$  типа  $(G, H)$ , допускающее связность Эресмана. Если структурная алгебра Ли  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$  равна нулю, то:

(1) группа базовых автоморфизмов  $\mathcal{A}_B^\xi(M, F)$  является группой Ли размерности

$$\dim(\mathcal{A}_B^\xi(M, F)) \leq \dim(G), \quad (1)$$

причем структура группы Ли на  $\mathcal{A}_B^\xi(M, F)$  единственная, а оценка (1) точная (то есть достижимая и наилучшая из возможных);

(2) если существует изолированный собственный слой или множество собственных слоев слоения  $(M, F)$  счетно, то

$$\dim(\mathcal{A}_B^\xi(M, F)) \leq \dim(H); \quad (2)$$

(3) если множество собственных слоев счетно и всюду плотно, то группа базовых автоморфизмов  $\mathcal{A}_B^\xi(M, F)$  дискретна.

Следующее утверждение является основным результатом данной работы. Оно является прямым следствием теорем 1 и 3, и ввиду важности сформулировано в виде теоремы.

**Теорема 4.** Пусть  $(M, F)$  — хаотическое картаново слоение со связностью Эресмана с эффективной трансверсальной картановой геометрией  $\xi$  типа  $(G, H)$ . Тогда группа базовых автоморфизмов  $\mathcal{A}_B^\xi(M, F)$  допускает единственную структуру конечномерной группы Ли размерности

$$\dim(\mathcal{A}_B^\xi(M, F)) \leq \dim(G). \quad (3)$$

Более того, если множество замкнутых слоев счетно, то группа базовых автоморфизмов  $\mathcal{A}_B^\xi(M, F)$  этого слоения счетна (конечна или бесконечна).

**Обозначения.** Следуя [13], через  $P(N, H)$  обозначим главное расслоение с проекцией  $P \rightarrow N$  и структурной группой  $H$ . Через  $\mathfrak{X}(M)$  обозначим модуль гладких векторных полей на многообразии  $M$  над алгеброй  $\mathfrak{F}(M)$  гладких функций. Слоение на многообразии  $M$  обозначается либо одной буквой  $F$ , либо парой  $(M, F)$ . Ограничение слоения (или метрики) на подмногообразие обозначается той же буквой, что и исходное слоение (или метрика). Категория слоений, в которых морфизмы отображают слои одного слоения в слои другого слоения, обозначается через  $\mathfrak{F}oI$ . Пусть  $\mathfrak{M}$  — гладкое распределение на многообразии  $M$ , тогда  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X_u \in \mathfrak{M}_u \ \forall u \in M\}$ . Если распределение  $\mathfrak{M}$  интегрируемо и  $\mathfrak{M} = TF$ , то  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$  также обозначается  $\mathfrak{X}_F(M)$ . Везде в этой работе  $I = I_1 = I_2 = [0, 1]$ . Символ  $\cong$  обозначает изоморфизм в соответствующей категории, а  $\oplus$  — символ прямой суммы векторных пространств.

**Предположения.** Гладкость отображений и многообразий предполагает гладкость класса  $C^r$ , где  $r \geq 1$ . Все окрестности предполагаются открытыми.

# 1. Картановы слоения

## 1.1. Задание слоения $N$ -коциклом.

**Определение 1.** Пусть  $M$  — гладкое  $n$ -мерное многообразие, а  $N$  — гладкое  $q$ -мерное, возможно несвязное, многообразие. Напомним, что  $N$ -коциклом на  $M$  называется семейство  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{ij \in J}\}$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\{U_i | i \in J\}$  — открытое покрытие многообразия  $M$  связными подмножествами  $U_i$  из  $M$ , а  $f_i : U_i \rightarrow N$  — субмерсии со связными слоями;
- 2) если  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $i, j \in J$ , то существует такой диффеоморфизм

$$\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j),$$

что выполняется равенство  $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$  на  $U_i \cap U_j$ ;

- 3) если  $V_i \cap V_j \cap V_k \neq \emptyset$ , то  $\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk} = \gamma_{ik} \quad \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k$  и  $\gamma_{ii} = id_{V_i} \quad i, j, k \in J$ .

Два  $N$ -коцикла называются эквивалентными, если существует  $N$ -коцикл, содержащий оба эти коцикла. Пусть  $[\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{ij \in J}]\} — класс эквивалентности  $N$ -коциклов на многообразии  $M$ , содержащий коцикл  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{ij \in J}$ . Класс эквивалентности  $N$ -коциклов задает слоение на многообразии  $M$  следующим образом. Семейство подмножеств  $\Sigma = \{f_i^{-1}(v) | v \in V_i := f_i(U_i) \subset N\}$ , соответствующее всем коциклам из данного класса эквивалентности, образует базу некоторой новой топологии  $\tau$  в  $M$ . Компоненты линейной связности топологического пространства  $(M, \tau)$  образуют разбиение  $F := \{L_\alpha | \alpha \in \mathfrak{J}\}$  многообразия  $M$ . Пара  $(M, F)$  называется слоением коразмерности  $q$ , заданным  $N$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{ij \in J}$ , а  $L_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{J}$ , называются слоями слоения  $(M, F)$ .$

**1.2. Категория картановых геометрий.** Пусть  $G$  и  $H$  группы Ли с алгебрами Ли  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h}$  соответственно, причем  $H$  замкнутая подгруппа в  $G$ .

**Определение 2.** Пусть  $N$  — гладкое многообразие. Главное  $H$ -расслоение  $P(N, H)$  с проекцией  $p : P \rightarrow N$  и  $\mathfrak{g}$ -значной 1-формой  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  называется картановой геометрией на  $N$  типа  $(G, H)$  или типа  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ , если выполнены следующие условия:

- ( $c_1$ ) отображение  $\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g}$  — изоморфизм векторных пространств для любой точки  $u \in P$ ;
- ( $c_2$ )  $\omega(A^*) = A$  для любого  $A \in \mathfrak{h}$ , где  $A^*$  — фундаментальное векторное поле на  $P$ ;
- ( $c_3$ ) форма  $\omega$  является  $H$ -эквивариантной, то есть  $(R_h)^* \omega = Ad_G(h^{-1})\omega$  для любого  $h \in H$ , где  $Ad_G : H \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  — присоединенное представление подгруппы Ли  $H \subset G$  в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ .

При этом  $\mathfrak{g}$ -значная форма  $\omega$  называется картановой связностью. Далее будем обозначать картанову геометрию типа  $(G, H)$  на  $N$  через  $\xi = (P(N, H), \omega)$ . Пара  $(N, \xi)$  называется картановым многообразием.

Пусть  $\xi = (P(N, H), \omega)$  и  $\xi' = (P'(N', H), \omega')$  — две картановых геометрии со структурной группой  $H$ .

**Определение 3.** Гладкое отображение  $\Gamma : P \rightarrow P'$  называется морфизмом  $\xi$  в  $\xi'$ , если выполняются следующие два условия:

- 1)  $\Gamma^* \omega' = \omega$ ;
- 2)  $R_a \circ \Gamma = \Gamma \circ R_a \quad \forall a \in H$ .

Пусть  $\Gamma \in Mor(\xi, \xi')$  и  $p : P \rightarrow N$  и  $p' : P' \rightarrow N'$  — проекции соответствующих  $H$ -расслоений. Тогда равенство  $p' \circ \Gamma = \gamma \circ p$  определяет отображение  $\gamma : N \rightarrow N'$ , которое называется морфизмом картановых многообразий  $(N, \xi)$  и  $(N', \xi')$ .

**Определение 4.** Картанова геометрия  $\xi = (P(N, H), \omega)$  типа  $(G, H)$  называется эффективной, если максимальная нормальная подгруппа  $K$  группы  $G$ , содержащаяся в  $H$ , тривиальна.

Заметим, что для эффективных картановых геометрий проекция  $\gamma : N \rightarrow N'$  задается единственным отображением  $\Gamma : P \rightarrow P'$ , указанным в определении 3.

**1.3. Картаново слоение.** Пусть  $N$  — гладкое  $q$ -мерное многообразие, связность которого не предполагается. Пусть  $(M, F)$  — слоение, заданное  $N$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{ij \in J}\}$ . Предположим, что многообразие  $N$  наделено эффективной картановой геометрией  $\xi = (P(N, H), \omega)$  типа  $(G, H)$  с проекцией  $p : P \rightarrow N$ . На каждом открытом подмножестве  $V \subset N$  индуцирована картанова геометрия  $\xi_V = (P_V(V, H), \omega_V)$  типа  $(G, H)$  такая, что  $P_V := p^{-1}(V)$  и  $\omega_V := \omega|_{P_V}$ .

Если каждый диффеоморфизм  $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$  из указанного выше  $N$ -коцикла является изоморфизмом индуцированных картановых многообразий с геометриями  $\xi_{f_j(U_i \cap U_j)}$  и  $\xi_{f_i(U_i \cap U_j)}$  соответственно, то  $(M, F)$  называется *картановым слоением*, моделируемым на картановой геометрии  $\xi = (P(N, H), \omega)$ , заданным  $(N, \xi)$ -коциклом. При этом  $\xi = (P(N, H), \omega)$  также называется *трансверсальной картановой геометрией* слоения  $(M, F)$ .

## 2. Структурная теорема для хаотических картановых слоений

**2.1. Связность Эресмана для слоения.** Понятие связности Эресмана слоения было введено Р. А. Блюменталь и Дж. Хебда [6] как естественное обобщение концепции связности Эресмана для субмерсий. Мы используем термин *вертикально-горизонтальная гомотопия*, предложенный Р. Германом [14]. Р. А. Блюменталь и Дж. Хебда называют такие отображения «прямоугольниками».

Пусть  $(M, F)$  — слоение произвольной коразмерности  $q$  и  $\mathfrak{M}$  —  $q$ -мерное гладкое распределение на многообразии  $M$ . Распределение  $\mathfrak{M}$  называется *трансверсальным* к слоению  $(M, F)$ , если для любого  $x \in M$  выполняется равенство  $T_x M = T_x F \oplus \mathfrak{M}_x$ . Векторы из  $\mathfrak{M}_x$ ,  $x \in M$ , называются *горизонтальными*. Кусочно-гладкая кривая  $\sigma$  называется *горизонтальной*, если все ее касательные векторы горизонтальны. Другими словами, кусочно-гладкая кривая является горизонтальной, если каждый ее гладкий кусок — интегральная кривая распределения  $\mathfrak{M}$ . Распределение  $TF$ , касательное к слоям слоения  $(M, F)$ , называется *вертикальным*. Говорят, что кривая  $h$  вертикальна, если она лежит в одном слое слоения  $(M, F)$ .

*Вертикально-горизонтальная гомотопия* — это такое кусочно-гладкое отображение  $H : I_1 \times I_2 \rightarrow M$ , где  $I_1 = I_2 = [0, 1]$ , что для любых  $(s, t) \in I_1 \times I_2$  кривая  $H|_{I_1 \times \{t\}}$  — горизонтальна, а кривая  $H|_{\{s\} \times I_2}$  — вертикальна, см. рис. 1.

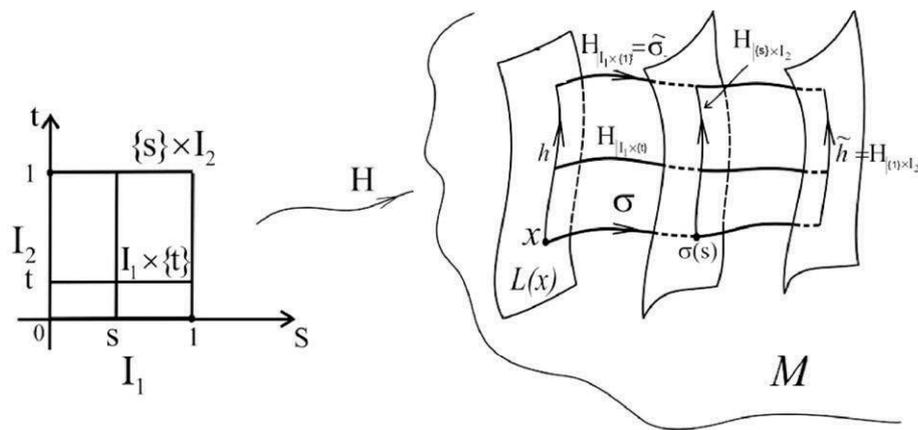


Рис. 1. Вертикально-горизонтальная гомотопия с базой  $(\sigma, h)$

Fig. 1. Vertical-horizontal homotopy with a base  $(\sigma, h)$

Пара кривых  $(H|_{I_1 \times \{0\}}, H|_{\{0\} \times I_2})$  называется базой вертикально-горизонтальной гомотопии  $H$ . Два пути  $(\sigma, h)$  с общим началом  $\sigma(0) = h(0)$ , где  $\sigma$  — горизонтальный путь, а  $h$  — вертикальный, называется допустимой парой путей. Известно, что для любой допустимой пары путей  $(\sigma, h)$  существует не более одной вертикально-горизонтальной гомотопии с базой  $(\sigma, h)$ .

**Определение 5.** Распределение  $\mathfrak{M}$ , трансверсальное слоению  $F$ , называется связностью Эресмана для слоения  $(M, F)$ , если для любой допустимой пары путей  $(\sigma, h)$  существует вертикально-горизонтальная гомотопия с базой  $(\sigma, h)$ .

В случае интегрируемости распределения  $\mathfrak{M}$  связность Эресмана называется интегрируемой.

**Замечание 1.** Как известно [11, Предложение 3],  $\mathfrak{M}$ -полные картановы слоения обладают связностью Эресмана  $\mathfrak{M}$ .

**2.2. Поднятое  $e$ -слоение.** Напомним, что трансверсально параллелизуемым или  $e$ -слоением называется картаново слоение типа  $(G, e)$ . Непустое замкнутое подмножество  $M$  многообразия  $M$  называется минимальным множеством слоения  $(M, F)$ , если каждый слой из  $M$  всюду плотен в  $M$ .

Далее мы будем использовать следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть  $(M, F)$  — картаново слоение со связностью Эресмана, заданное  $(N, \xi)$ -коциклом, где  $\xi = (P(N, H), \omega)$  — эффективная картанова геометрия типа  $(G, H)$  на  $N$ . Тогда существуют главное  $H$ -расслоение с проекцией  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$  и слоением  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , слои которого проектируются посредством  $\pi$  в слои слоения  $(M, F)$ , и  $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма  $\tilde{\omega}$  на  $\mathcal{R}$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- (i)  $\tilde{\omega}(A) = A$  для любого  $A \in \mathfrak{h}$ ;
- (ii)  $(R_a)^*\tilde{\omega} = Ad_G(a^{-1})\tilde{\omega}$  для всех  $a \in H$ ;
- (iii) отображение  $\tilde{\omega}_u : T_u(\mathcal{R}) \rightarrow \mathfrak{g} \quad \forall u \in \mathcal{R}$  сюръективно, причем  $\ker(\tilde{\omega}_u) = E_u$ , где  $E_u = T_u\mathcal{F}$ ;
- (iv) слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  является  $e$ -слоением со связностью Эресмана, причем замыкание каждого его слоя образует минимальное множество.

**Доказательство.** Для произвольного картанова слоения  $(M, F)$  коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$  в [11, Предложение 2] доказано выполнение утверждений (i)–(iii), а также тот факт, что  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  является  $e$ -слоением. При этом существование связности Эресмана для слоения  $(M, F)$  не предполагается.

Предположим теперь, что слоение  $(M, F)$  допускает связность Эресмана  $\mathfrak{M}$ . Тогда нетрудно убедиться в том, что поднятое на  $\mathcal{R}$  распределение

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \pi^*\mathfrak{M} := \{X \in T_u\mathcal{R} \mid \pi_*X \in \mathfrak{M}_{\pi(u)}, u \in \mathcal{R}\}$$

является связностью Эресмана для  $e$ -слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ . Поскольку любое  $e$ -слоение является римановым слоением, к  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  применима теорема 1.1 из [15], из которой вытекает, что замыкание каждого слоя  $e$ -слоения со связностью Эресмана образует минимальное множество. Таким образом, утверждение (iv) доказано.  $\square$

**Определение 6.** Слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  называется поднятым  $e$ -слоением для исходного картанова слоения  $(M, F)$ .

$e$ -слоение  $(M, F)$  с нулевой трансверсальной кривизной называется слоением Ли. Если  $(M, F)$  — слоение Ли типа  $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{o}$ , причем каждый слой всюду плотен в  $M$ , то  $\mathfrak{g}_0$  называется структурной алгеброй этого слоения. Как известно [12],  $\mathfrak{g}_0$  является инвариантом слоения Ли  $(M, F)$  в категории слоений.

**Определение 7.** Для картанова слоения  $(M, F)$  со связностью Эресмана, моделируемого на эффективной картановой геометрии, структурной алгеброй Ли называется структурная алгебра Ли поднятого  $e$ -слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , которая обозначается через  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$  [11].

### 2.3. Структурная теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $(M, F)$  — эффективное картаново слоение типа  $(G, H)$  со связностью Эресмана и  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  — его поднятое  $e$ -слоение. Тогда если  $(M, F)$  — хаотическое слоение, то:

- (1) структурная алгебра Ли  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$  слоения  $(M, F)$  равна нулю;
- (2) слои слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  образуют локально тривиальное расслоение  $\pi_b : \mathcal{R} \rightarrow W$  над гладким параллелизуемым многообразием  $W$ ;
- (3) индуцируется локально свободное действие группы Ли  $H$  на  $W$  и существует гомеоморфизм  $d : M/F \rightarrow W/H$  пространства слоев слоения  $(M, F)$  на пространство орбит группы  $H$ , удовлетворяющее коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{R} & \\
 \pi \swarrow & & \searrow \pi_b \\
 M & & W \\
 r \downarrow & & \downarrow k \\
 M/F & \xrightarrow{d} & W/H,
 \end{array} \quad (*)$$

где  $r : M \rightarrow M/F$  и  $k : W \rightarrow W/H$  — фактор-отображения.

**Доказательство.** Предположим, что картаново слоение  $(M, F)$  со связностью Эресмана  $\mathfrak{M}$  является хаотическим. Рассмотрим проекцию  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$  слоеного расслоения над  $(M, F)$ . Пусть  $\mathcal{V}$  — распределение на  $\mathcal{R}$ , касательное к слоям расслоения  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ . Пусть  $\widetilde{\mathfrak{M}} := \pi^*\mathfrak{M}$ .

(1) Обозначим через  $C$  объединение замкнутых слоев слоения  $(M, F)$ , тогда, согласно определению хаотического слоения,  $\overline{C} = M$ . Возьмем произвольную точку  $x \in C$  и любую точку  $u \in \pi^{-1}(x)$ . Через  $l(U, \mathcal{F}_U)$  обозначается векторное пространство трансверсальных векторных полей в окрестности  $U \subset \mathcal{R}$ , то есть таких гладких векторных полей, которые являются сечениями подрасслоения  $\widetilde{\mathfrak{M}}|_U$  и проектируются относительно слоения  $(U, \mathcal{F}_U)$ . Векторное поле  $Z_U \in l(U, \mathcal{F}_U)$  называется локальным трансверсальным коммутирующим векторным полем, если для любого трансверсального векторного поля  $X \in l(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  сужение  $X|_U$  коммутирует с  $Z_U$ . Множество локальных трансверсальных коммутирующих векторных полей в окрестности  $U \subset \mathcal{R}$  образует подалгебру  $c(U)$  алгебры  $l(U, \mathcal{F}_U)$ .

Пусть  $Z_U \in l(U, \mathcal{F}_U)$  — коммутирующее локальное векторное поле (в указанном выше смысле) в окрестности  $U \subset \mathcal{R}$  точки  $u \in \mathcal{R}$ . Поскольку  $L = L(x) \subset C$  — замкнутый слой слоения  $(M, F)$ , замыкание  $\overline{L}$  слоя  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u)$  слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  удовлетворяет включению  $\overline{L} \subset \pi^{-1}(L)$ . Известно [12, Лемма 4.7], что  $Z_u \in T_u\overline{L}$ . Поэтому  $Z_u \in T_u\mathcal{F} \oplus \mathcal{V}_u$ . Так как  $Z_u \in l(U, \mathcal{F}_U) \subset \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(U)$ , то имеют место равенства  $Z_u \in (T_u\mathcal{F} \oplus \mathcal{V}_u) \cap \widetilde{\mathfrak{M}}_u = \mathcal{V}_u$ .

Из условия  $\overline{C} = M$  следует, что множество  $\{u \in U \mid Z_u \in \mathcal{V}_u\}$  плотно в  $U$ . Поскольку локальное векторное поле  $Z_U$  непрерывно, необходимо, чтобы  $Z_U \in \mathfrak{X}_{\mathcal{V}}(U)$ .

Заметим, что из свойств формы  $\omega$  следует, что

$$\omega[X, Z] = [\omega(Z), \omega(X)]_{\mathfrak{g}} \quad (4)$$

для всех  $Z \in \mathfrak{X}_{\mathcal{V}}(U)$  и  $X \in \mathfrak{X}(U)$ . Поэтому для всех  $Z_U \in c(U)$  и  $X \in l(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  из равенства  $[X_U, Z_U] = 0$  вытекает

$$\omega[X_v, Z_v] = [\omega(X_v), \omega(Z_v)]_{\mathfrak{g}} = 0 \quad (5)$$

во всех точках  $v \in U$ . Отсюда следует, что множество  $\{\omega(Z_v) \in \mathfrak{g} \mid Z_v \in C(U)\}$  — идеал в обеих алгебрах Ли  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{h}$ . Эффективность картанова слоения влечет равенство нулю общего идеала пары алгебр Ли  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Поэтому алгебры Ли  $c_v(U)$  и  $c(U)$  равны нулю. Это означает, что структурная алгебра Ли  $\mathfrak{g}_0$  поднятого  $e$ -слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  равна нулю [12]. Согласно определению 7, отсюда следует, что структурная алгебра Ли  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$  картанова слоения  $(M, F)$  также равна нулю. Таким образом, утверждение (1) доказано.

(2) Так как поднятое  $e$ -слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  имеет равную нулю структурную алгебру Ли, то все его слои — замкнутые подмножества в  $\mathcal{R}$ . Заметим, что это слоение является римановым со связностью Эресмана  $\mathfrak{M}$ . Следовательно, пространство его слоев  $W := \mathcal{R}/\mathcal{F}$  наделяется структурой хаусдорфова гладкого многообразия, относительно которой фактор-отображение  $\pi_b : \mathcal{R} \rightarrow W$  является субмерсией. Поскольку  $\mathfrak{M}$  — связность Эресмана для этой субмерсии, слои слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  образуют локально тривиальное расслоение  $\pi_b : \mathcal{R} \rightarrow W$ . Так как  $e$ -слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  трансверсально параллелизуемо, то на  $W$  индуцируется параллелизация. Это завершает доказательство утверждения (2).

(3) Из [11, Предложение 4. 1] вытекает, что формула

$$R^W : W \times H \rightarrow W : (w, a) \mapsto \pi_b(R_a(u)) \quad \forall (w, a) \in W \times H, u \in \pi_b^{-1}(w) \quad (6)$$

определяет гладкое действие группы  $H$  на многообразии  $W$ . Если  $\mathfrak{g}_0(M, F) = 0$ , то это действие локально свободное.

Пусть  $r : M \rightarrow M/F$  и  $k : W \rightarrow W/H$  — фактор-отображения на пространство слоев и пространство орбит соответственно. Определим отображение  $d : M/F \rightarrow W/H$  следующим образом. Для любого слоя  $L$  положим  $[L] := r(L)$ . Пусть  $L = L(x)$  — слой, проходящий через  $x \in M$ , и  $w \in \pi_b(\pi^{-1}(x))$ . Обозначим через  $H.w$  орбиту точки  $w$  относительно группы  $H$ , действующей на  $W$  посредством  $R^W$ . Пусть  $[H.w] := k(H.w)$ . Положим  $d([L]) := [H.w]$ . Проверка, использующая определение действия  $R^W$ , показывает, что предыдущее равенство корректно определяет отображение  $d : M/F \rightarrow W/H$ , удовлетворяющее коммутативной диаграмме (\*). Нетрудно проверить биективность  $d$ . Поскольку отображения  $r, \pi, \pi_b$  и  $k$  — непрерывны и открыты, из коммутативности диаграммы (\*) вытекает, что  $d$  также непрерывно и открыто. Таким образом,  $d : M/F \rightarrow W/H$  — гомеоморфизм и утверждение (3) доказано.  $\square$

### 3. Критерий хаотичности картанова слоения со связностью Эресмана

**Доказательство теоремы 2.** В [7] введена следующая терминология. Свойство слоения называется трансверсальным, если его можно выразить в терминах пространства слоев этого слоения. Аналогично свойство группы преобразований трансверсально, если его можно сформулировать в терминах пространства орбит.

Предположим сначала, что картаново слоение  $(M, F)$  со связностью Эресмана является хаотическим. В [7] показано, что хаотичность как слоения, так и группы преобразований, является трансверсальным свойством. Согласно структурной теореме 5, для хаотического картанова слоения  $(M, F)$  со связностью Эресмана пространство слоев  $M/F$  гомеоморфно пространству орбит  $W/H$ . Следовательно, из хаотичности слоения  $(M, F)$  вытекает, что ассоциированное действие  $R^W$  группы  $H$  на  $W$  хаотическое.

Докажем обратное. Из [15, Теорема 1.1] вытекает, что для картанова слоения со связностью Эресмана  $(M, F)$  замыкания слоев поднятого  $e$ -слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  со связностью Эресмана образуют локально тривиальное расслоение с проекцией  $\pi_b : \mathcal{R} \rightarrow W$ . Кроме того, определено действие  $R^W$  группы  $H$  на  $W$  по правилу (6). Предположим, что указанное действие группы  $H$  на  $W$  локально свободное и хаотическое. В этом случае все слои слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  замкнуты, поэтому

$\mathfrak{g}_0(M, F) = 0$ . Так как  $\mathfrak{g}_0(M, F) = 0$ , то из теоремы 5 вытекает гомеоморфность пространства орбит  $W/H$  и пространства слоев  $M/F$ . В силу трансверсальности свойства хаотичности как слоения  $(M, F)$ , так и группы  $H$  на  $W$ , отсюда следует, что хаотическое поведение группы Ли  $H$  на многообразии  $W$  влечет хаотическое поведение картанова слоения  $(M, F)$ .

### Список литературы

1. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986. 223 с.
2. Sheina K. I., Zhukova N. I. The groups of basic automorphisms of complete cartan foliations // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39. P. 271–280. DOI: 10.1134/S1995080218020245.
3. Leslie J. A remark on the group of automorphisms of a foliation having a dense leaf // J. Diff. Geom. 1972. Vol. 7, no. 3–4. P. 597–601. DOI: 10.4310/jdg/1214431177.
4. Белько И. В. Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением // Мат. сборник. 1982. Т. 117, № 2. С. 181–195.
5. Hector J., Macias-Virgos E. Diffeological groups // Reseach and Exposition in Math. 2002. Vol. 25. P. 247–260.
6. Blumenthal R. A., Hebda J. J. Ehresmann connection for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. Vol. 33, no. 4. P. 597–611.
7. Bazaikin Y. V., Galaev A. S., Zhukova N. I. Chaos in Cartan foliations // Chaos. 2020. Vol. 30, no. 10, 103116. P. 1–9. DOI: 10.1063/5.0021596.
8. Churchill R. C. On defining chaos in the absence of time. In: Hobill D., Burd A., Coley A. (eds) Deterministic Chaos in General Relativity. NATO Science Series. B 332. Boston: Springer, 1994. P. 107–112. DOI: 10.1007/978-1-4757-9993-4\_6.
9. Devaney R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Menlo Park: The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., 1986. 320 p.
10. Zhukova N. I. Chaotic foliations with Ehresmann connection // Journal of Geometry and Physics. 2024. Vol. 199. 105166. DOI: 10.1016/j.geomphys.2024.105166.
11. Жукова Н. И. Минимальные множества картановых слоений // Труды МИАН. 2007. Т. 256, № 1. С. 115–147. DOI: 10.1134/S0081543807010075.
12. Molino P. Riemannian Foliations. Progress in Mathematics, vol. 73. Boston: Birkhauser, 1988. 339 p.
13. Kobayashi Sh., Nomizu K. Foundations of differential geometry I. New York–London: Interscience publ., 1969.
14. Hermann R. The differential geometry of foliations // Ann. of Math. 1960. Vol. 72. P. 445–457.
15. Жукова Н. И. Структура римановых слоений со связностью Эресмана // Журнал СВМО. 2018. Т. 20, № 4. С. 395–407.

### References

1. Kobayashi Sh. Transformation Groups in Differential Geometry. M.: Nauka; 1986 (in Russian).
2. Sheina KI, Zhukova NI. The Groups of basic automorphisms of complete cartan foliations. Lobachevskii J. Math. 2018;39:271–280. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080218020245>.
3. Leslie J. A Remark on the Group of Automorphisms of a Foliation Having a Dense Leaf. J. Diff. Geom. 1972;7(3–4):597–601. DOI: 10.4310/jdg/1214431177.
4. Bel'ko IV. Affine transformations of a transversal projectable connection on a foliated manifold. Math. USSR-Sb. 1983;45(2):191–204. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1983v045n02ABEH001003>.
5. Hector J, Macias-Virgos E. Diffeological Groups. Reseach and Exposition in Math. 2002;25: 247–260.
6. Blumenthal RA, Hebda JJ. Ehresmann connection for foliations. Indiana Univ. Math. J. 1984;33(4): 597–611.

7. Bazaikin YV, Galaev AS, Zhukova NI. Chaos in Cartan foliations. *Chaos*. 2020;30(10):103116. DOI: 10.1063/5.0021596.
8. Churchill R. C. On defining chaos in the absence of time. In: Hobill D., Burd A., Coley A. (eds) *Deterministic Chaos in General Relativity*. NATO Science Series B, vol. 332. Boston: Springer; 1994. P. 107–112. DOI: 10.1007/978-1-4757-9993-4\_6.
9. Devaney RL. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Menlo Park: The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc; 1986. 320 p.
10. Zhukova NI. Chaotic foliations with Ehresmann connection. *Journal of Geometry and Physics*. 2024;199:105166. DOI: 10.1016/j.geomphys.2024.105166.
11. Zhukova NI. Minimal sets of Cartan foliations. *Proc. Steklov Inst. Math*. 2007;256(1):105–135. DOI: 10.1134/S0081543807010075.
12. Molino P. *Riemannian Foliations*. Progress in Mathematics, vol. 73. Boston: Birkhauser; 1988. 339 p.
13. Kobayashi Sh, Nomizu K. *Foundations of differential geometry I*. Interscience publ. New York-London, 1969.
14. Hermann R. The differential geometry of foliations. *Ann. of Math*. 1960;72:445–457.
15. Zhukova NI. The structure of Riemannian foliations with Ehresmann connection. *Journal of SVMO*. 2018;20(4):395–407.



*Жукова Нина Ивановна* — родилась в городе Горьком (1950). Окончила с отличием Горьковский государственный университет (1972). Доктор физико-математических наук (2015). Главный научный сотрудник, профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Область научных интересов: геометрия и топология слоений, включая слоения с особенностями, геометрические структуры на многообразиях, качественная теория слоений.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 77  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: [nina.i.zhukova@yandex.ru](mailto:nina.i.zhukova@yandex.ru)  
 ORCID: 0000-0002-4553-559X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 2736  
 AuthorID (Scopus): 16308609800



*Шейна Ксения Игоревна* — окончила с отличием Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2015). В настоящее время аспирант кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 77  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: [ksheina@hse.ru](mailto:ksheina@hse.ru)  
 ORCID: 0000-0001-5742-7476  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 829289



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.958:57, 517.956.4

DOI: 10.18500/0869-6632-003141  
EDN: VMCMSE

## Асимптотическое решение для SIS-модели с учётом миграции и диффузии

*А. Э. Рассадин*

Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия  
E-mail: ✉ brat\_ras@list.ru

*Поступила в редакцию 25.06.2024, принята к публикации 4.11.2024,  
опубликована онлайн 20.11.2024, опубликована 29.11.2024*

**Аннотация.** Цель настоящей работы — предложить и исследовать простую и эффективную модель эпидемии в популяции животных, учитывающую миграцию по плоскости как заболевших, так и оставшихся здоровыми особей. В рамках данной модели пространственная миграция популяции описывается введением в её уравнения и диффузионных, и адвективных членов. **Методы.** В данной работе для нахождения асимптотического решения системы уравнений эпидемии применялся метод многих масштабов. Решения вспомогательных линейных уравнений параболического типа, возникающих при проведении этой процедуры, находились с помощью интеграла Пуассона. Упрощение исходной системы уравнений модели производится на основе предположения о постоянстве в начальный момент времени суммы плотностей здоровых и больных особей на односвязной области большого диаметра на плоскости. **Результаты.** Показано, что в этом случае сконструированное для медленно меняющейся начальной плотности больных особей, сосредоточенной внутри этой области на значительном удалении от её границ, асимптотическое решение модели описывает эффект слияния нескольких пространственно-разнесённых небольших вспышек заболевания в одну большую вспышку при миграции всей популяции как целого. В частности, для такой начальной плотности, получающейся функциональным преобразованием гауссоиды, на больших временах формируется круговое «плато» с линейно растущим со временем эффективным радиусом. **Заключение.** Построенное асимптотическое решение предложенной в данной работе модели эпидемии несложно по форме и описывает перенос заболевания на локально плоском участке земной поверхности без применения численных методов. Такое решение удобно при описании миграции большой популяции под воздействием наводнения, лесного пожара, техногенной катастрофы с заражением местности и т. д.

**Ключевые слова:** движущаяся система координат, малый параметр, медленные переменные, логистическая кривая, метод вариации постоянной, задача Коши, уравнение Кардара–Паризи–Жанга, равномерность асимптотического разложения, образование структур.

**Для цитирования:** Рассадин А. Э. Асимптотическое решение для SIS-модели с учётом миграции и диффузии // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 908–920. DOI: 10.18500/0869-6632-003141. EDN: VMCMSE

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## An asymptotic solution for the SIS epidemic model, taking into account migration and diffusion

A. E. Rassadin

National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia  
E-mail: [brat\\_ras@list.ru](mailto:brat_ras@list.ru)

*Received 25.06.2024, accepted 4.11.2024, available online 20.11.2024, published 29.11.2024*

**Abstract.** The purpose of this work is to propose and investigate a simple and effective model of an epidemic in an animal population that takes into account migration along the plane of both diseased and healthy individuals. Within the framework of this model, the spatial migration of a population is described by introducing both diffusion and advective terms into its equations. **Methods.** In this paper, a method of many scales was used to find an asymptotic solution to the system of equations of the epidemic. Solutions of auxiliary linear equations of the parabolic type arising during this procedure were found using the Poisson integral. The simplification of the initial system of equations of the model is based on the assumption that the sum of densities of healthy and sick individuals on a single-connected region of large diameter on the plane is constant at the initial moment of time. **Results.** It is shown that in this case, designed for a slowly changing initial density of sick individuals concentrated inside this area at a considerable distance from its boundaries, the asymptotic solution of the model describes the effect of merging several spatially spaced small outbreaks of the disease into one large outbreak during migration of the entire population as a whole. In particular, for such an initial density obtained by the functional transformation of a Gaussian, a circular plateau is formed over long periods with an effective radius that grows linearly over time. **Conclusion.** The constructed asymptotic solution of the epidemic model proposed in this paper is simple in form and describes the transfer of the disease on a locally flat area of the earth’s surface without the use of numerical methods. This solution is convenient when describing the migration of a sick population under the influence of flooding, forest fire, man-made disaster with contamination of the area, etc.

**Keywords:** moving coordinate system, small parameter, slow variables, the logistic curve, the method of variation of the constant, the Cauchy problem, the Kardar-Parisi-Zhang equation, the uniformity of the asymptotic expansion, formation of structures.

**For citation:** Rassadin AE. An asymptotic solution for the SIS epidemic model, taking into account migration and diffusion. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(6):908–920. DOI: 10.18500/0869-6632-003141

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Уже почти сто лет, начиная с классических работ А. Лотки [1] и В. Вольтерра [2], популяционная динамика служит «полигоном» для приложения идей и методов нелинейной динамики [3, 4].

Важным разделом популяционной динамики является совокупность методов описания мигрирующих популяций (см. [5–7] и ссылки там). Другой, не менее значимый раздел популяционной динамики — математическая эпидемиология [8], описывающая динамику заболевших популяций.

На стыке этих двух разделов популяционной динамики возникает серия задач эпидемиологического характера, посвященных изучению пространственно-временной динамики популяции, в которых рассматриваются заражение особей популяции и распространение болезни как в результате взаимодействия между особями, так и в ходе их миграции [9–11].

Рассмотрим следующую математическую модель для задачи такого рода:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla_x I = D \nabla_x^2 I + \beta S I - \gamma I, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla_x S = D \nabla_x^2 S - \beta S I + \gamma I. \quad (1)$$

В этих уравнениях  $S(\vec{x}, t)$  — плотность здоровых особей (susceptible) в популяции в точке  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  в момент времени  $t$ ;  $I(\vec{x}, t)$  — плотность заболевших особей (infected);

$\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$  — двумерный градиент;  $\vec{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$  — вектор скорости миграции, который может зависеть от времени;  $D$  — коэффициент диффузии популяции;  $\beta$  — скорость распространения заболевания;  $\gamma$  — темп выздоровления.

Кинетическая часть в системе уравнений (1) соответствует кинетической части, предложенной в статье [12] и позднее получившей название SIS-модели [8].

Учёт пространственной миграции заболевшей популяции здесь производится двумя способами: введением в уравнения (1) адвективных членов (как это было сделано в работах [13, 14]) и дополнением уравнений модели диффузионными членами (как в работах [15, 16]). Поскольку в рассматриваемой модели выздоровевшие особи мгновенно становятся здоровыми, минуя попадание в группу иммунных особей, то есть рассматриваемое заболевание предполагается протекающим довольно легко, поэтому коэффициенты диффузии здоровых и заболевших особей можно считать одинаковыми.

Эту нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных необходимо дополнить начальными условиями — начальными плотностями больных  $I_0(\vec{x})$  и здоровых  $S_0(\vec{x})$ :

$$I(\vec{x}, 0) = I_0(\vec{x}), \quad S(\vec{x}, 0) = S_0(\vec{x}), \quad (2)$$

причём обе функции в (2) должны быть неотрицательными при всех  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Далее статья организована следующим образом: в разделе 1 изложена теория нахождения общего асимптотического решения задачи Коши (1)–(2) для случая медленно меняющейся начальной плотности больных в ситуации, когда сумма плотностей здоровых и больных постоянна в достаточно большой области. В разделе 2 приведены примеры асимптотических решений, соответствующие эпидемиологически реалистичным начальным условиям. В Заключение суммированы полученные результаты и намечены перспективы дальнейших исследований.

## 1. Построение асимптотического решения

Исследование задачи Коши (1)–(2) начнём с анализа поведения полной плотности особей в популяции  $N(\vec{x}, t)$ :

$$N(\vec{x}, t) = I(\vec{x}, t) + S(\vec{x}, t). \quad (3)$$

Сложив друг с другом оба уравнения системы (1), получим, что функция (3) удовлетворяет линейному параболическому уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla_x N = D \nabla_x^2 N. \quad (4)$$

Начальное условие к уравнению (4) легко получается из формулы (3):

$$N(\vec{x}, 0) = I_0(\vec{x}) + S_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (5)$$

Введём новую переменную  $\vec{y}$ :

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\xi}(t), \quad \vec{\xi}(t) = \int_0^t \vec{V}(t') dt'. \quad (6)$$

Очевидно, что формула (6) выражает перенос начала координат в точку с радиус-вектором  $\vec{\xi}(t)$  (при  $t = 0$  эти системы координат совпадают, поскольку  $\vec{\xi}(0) = \vec{0}$ ).

В новых координатах уравнение (4) приводится к канонической форме [17] вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \nabla_y^2 N. \quad (7)$$

Уравнение (7) является двумерным уравнением диффузии–теплопроводности с постоянным коэффициентом, значит, решение задачи Коши (4)–(5) даётся следующей модификацией интеграла Пуассона [17]:

$$N(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{(\vec{x} - \vec{\xi}(t) - \vec{\eta})^2}{4Dt}\right] N(\vec{\eta}, 0) d^2\eta. \quad (8)$$

Из выражения (8) легко получается следующая формула:

$$\int_{\mathbb{R}^2} N(\vec{x}, t) d^2x = \int_{\mathbb{R}^2} N(\vec{x}, 0) d^2x. \quad (9)$$

Равенство (9) представляет собой закон сохранения полного числа особей в популяции. Оно непосредственно демонстрирует, что рассматриваемая болезнь является довольно слабой, поскольку из-за неё ни одна особь популяции не умирает. Кроме того, этот закон сохранения иллюстрирует неявное предположение модели (1) о том, что характерное время  $T$  распространения данной инфекции в популяции много меньше характерного времени изменения численности популяции за счёт рождений молодых и смертей старых её особей.

После того, как функция (8) полностью определена, с помощью формулы (3) систему уравнений (1) можно свести к одному уравнению для плотности заболевших особей:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla_x I = D \nabla_x^2 I + \beta (N(\vec{x}, t) - I) I - \gamma I. \quad (10)$$

Однако решать это уравнение ничуть не легче, чем исходную систему (1), поэтому для упрощения уравнения (10) предположим, что начальная плотность популяции равна

$$N(\vec{x}, 0) = N_0 \vartheta(\Lambda - |x_1|) \vartheta(\Lambda - |x_2|), \quad (11)$$

где  $\vartheta(x)$  — функция Хевисайда, то есть в начальный момент времени вся популяция равномерно распределена с постоянной плотностью  $N_0$  внутри квадрата  $Q_\Lambda = [-\Lambda, \Lambda] \times [-\Lambda, \Lambda]$  со стороной  $2\Lambda$ .

Подставляя функцию (11) в интеграл (8), получим общее решение уравнения (4) для этого начального условия:

$$N(\vec{x}, t) = \frac{N_0}{4} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \xi_1(t) + \Lambda}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \xi_1(t) - \Lambda}{2\sqrt{Dt}}\right) \right] \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x_2 - \xi_2(t) + \Lambda}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_2 - \xi_2(t) - \Lambda}{2\sqrt{Dt}}\right) \right], \quad (12)$$

где  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-q^2) dq$  — функция ошибок.

Формула (12) показывает, что вектор  $\vec{\xi}(t)$  определяет перемещение популяции как целого по плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Графики функции (12) в движущейся системе координат (6) для различных моментов времени приведены на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что при  $t \ll \Lambda^2/D$  начальное условие (11) изменяется очень мало, следовательно, при увеличении параметра  $\Lambda$  квадрат  $Q_\Lambda$ , на котором  $N(\vec{x}, t) \approx N_0$ , покрывает всё большую часть плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Это означает, что для всё больших промежутков времени  $t \ll \Lambda^2/D$  на квадрате  $Q_\Lambda$  в переменных (6) уравнение (10) можно заменить следующим уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D \nabla_y^2 I + \beta (N_0 - I) I - \gamma I. \quad (13)$$

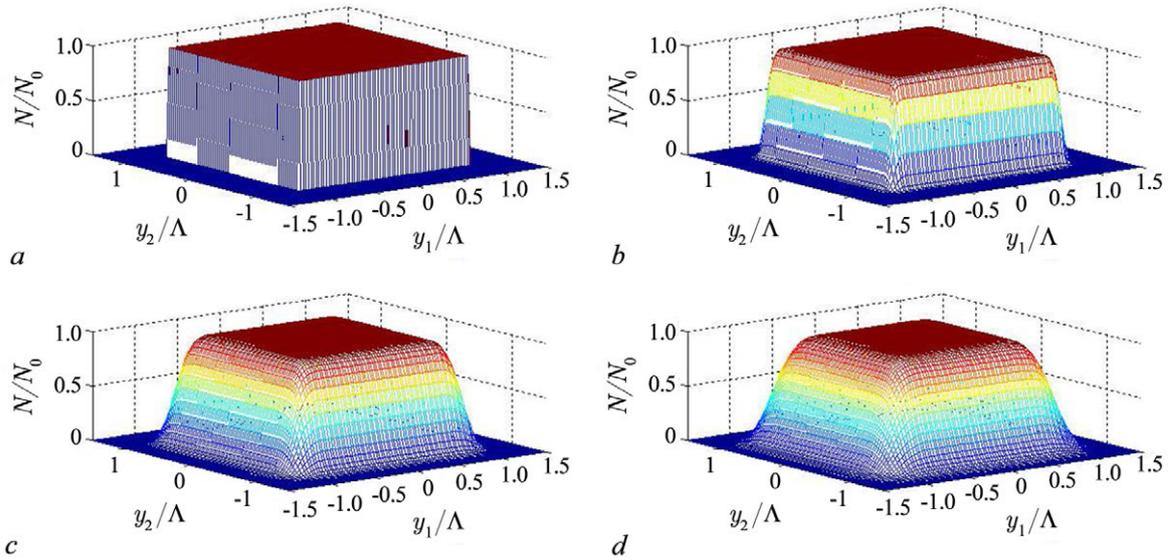


Рис. 1. Пространственно-временная эволюция полной плотности особей популяции:  $a - Dt/\Lambda^2 = 0$ ;  $b - Dt/\Lambda^2 = 0.001$ ;  $c - Dt/\Lambda^2 = 0.005$ ;  $d - Dt/\Lambda^2 = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 1. Spatiotemporal evolution of the total density of individuals in a population:  $a - Dt/\Lambda^2 = 0$ ;  $b - Dt/\Lambda^2 = 0.001$ ;  $c - Dt/\Lambda^2 = 0.005$ ;  $d - Dt/\Lambda^2 = 0.01$  (color online)

Далее, пусть  $N_0 > \gamma/\beta$ , тогда после введения безразмерных переменных

$$u(\vec{z}, \tau) = \frac{I(\vec{x}, t)}{I_m}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \vec{z} = \frac{\vec{y}}{l} \equiv \frac{\vec{x} - \vec{\xi}(t)}{l}, \quad (14)$$

где

$$I_m = N_0 - \gamma/\beta, \quad T = \frac{1}{\beta N_0 - \gamma}, \quad l = \sqrt{\frac{D}{\beta N_0 - \gamma}} \quad (15)$$

— характерные масштабы плотности заболевших особей, времени и пространственных неоднородностей, уравнение (13) переписется в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla_z^2 u + u(1 - u). \quad (16)$$

Это уравнение следует дополнить начальным условием:

$$I_0(\vec{x}) = I_m u_0\left(\frac{\vec{x}}{L}\right), \quad 0 \leq u_0\left(\frac{\vec{x}}{L}\right) \leq 1, \quad (17)$$

где  $L$  — его характерный пространственный масштаб. При этом начальная плотность числа заболевших  $I_0(\vec{x})$  должна быть сосредоточена внутри квадрата  $Q_\Lambda$ , на котором отлична от нуля функция (11), довольно далеко от его границ. Кроме того, необходимо, чтобы было выполнено очевидное неравенство:  $\Lambda \gg L$ .

Уравнение (16) является двумерным обобщением уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова [18]. С помощью метода, описанного в работе [19], для него можно построить широкий класс его асимптотических решений, а именно, если начальная плотность числа заболевших (17) меняется довольно медленно, то есть если характерный пространственный масштаб  $L$  функции (17) много больше характерного пространственного масштаба  $l$  (15) уравнения (13), то можно

ввести малый параметр  $\varepsilon = (l/L)^2 \ll 1$  и искать решение уравнения (16) в виде асимптотического ряда [19]:

$$u(\vec{z}, \tau; \varepsilon) = u^{(0)}(\tau, \theta, \vec{\zeta}) + \varepsilon u^{(1)}(\tau, \theta, \vec{\zeta}) + \dots, \quad (18)$$

где

$$\theta = \varepsilon \tau \equiv \frac{Dt}{L^2}, \quad \vec{\zeta} = \sqrt{\varepsilon} \vec{z} \equiv \frac{\vec{x} - \vec{\xi}(t)}{L} \quad (19)$$

— медленные переменные [19].

Далее, потребуем, чтобы в разложении (18) в нулевом приближении по  $\varepsilon$  выполнялось начальное условие (17), тогда функции  $u^{(0)}(\tau, \theta, \vec{\zeta})$  и  $u^{(1)}(\tau, \theta, \vec{\zeta})$  должны удовлетворять следующим соотношениям [19]:

$$u^{(0)}(0, 0, \vec{\zeta}) = u_0(\vec{\zeta}), \quad u^{(1)}(0, 0, \vec{\zeta}) = 0. \quad (20)$$

Подставляя ряд (18) в уравнение (16) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим, что искомые функции подчиняются обыкновенным дифференциальным уравнениям, в которых медленные переменные (19) являются параметрами

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \tau} = u^{(0)}(1 - u^{(0)}) \quad (21)$$

и

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = (1 - 2u^{(0)})u^{(1)} + \nabla_{\vec{\zeta}}^2 u^{(0)} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \theta}. \quad (22)$$

Точное решение уравнения (21) можно записать в виде

$$u^{(0)}(\tau, \theta, \vec{\zeta}) = f(s), \quad s = \tau + \phi(\vec{\zeta}, \theta), \quad (23)$$

где  $f(s) = [1 + \exp(-s)]^{-1}$  — логистическая функция, а функция  $\phi(\vec{\zeta}, \theta)$  — пока произвольна.

Далее, подстановка функции (23) в уравнение (22) даёт

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = (1 - 2f(s))u^{(1)} + \left( \nabla_{\vec{\zeta}}^2 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) f'(s) + (\nabla_{\vec{\zeta}} \phi)^2 f''(s). \quad (24)$$

Общее решение уравнения (24) легко находится методом вариации постоянной

$$u^{(1)}(\tau, \theta, \vec{\zeta}) = f'(s) \left[ \chi + \left( \nabla_{\vec{\zeta}}^2 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) s + (\nabla_{\vec{\zeta}} \phi)^2 \ln f'(s) \right], \quad (25)$$

где  $\chi = \chi(\vec{\zeta}, \theta)$  — ограниченная функция переменных  $\theta$  и  $\vec{\zeta}$ , также пока произвольная.

Для равномерности асимптотического разложения (18) по  $\varepsilon$  нужно потребовать, чтобы при  $s \rightarrow -\infty$  [19]:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left| \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} \right| = O(1). \quad (26)$$

Требование (26) будет выполнено, если функция  $\phi(\vec{\zeta}, \theta)$  удовлетворяет нелинейному уравнению параболического типа:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = (\nabla_{\vec{\zeta}} \phi)^2 + \nabla_{\vec{\zeta}}^2 \phi. \quad (27)$$

Уравнение (27) — это уравнение Кардара–Париизи–Жанга [20]. Для того чтобы оно имело однозначное решение для всех векторов  $\vec{\zeta} \in \mathbb{R}^2$ , необходимо задать для него начальное условие по медленному времени  $\theta$  [17]. Комбинируя первое из условий (20) и выражение (23) для нулевого приближения, легко получим это условие:

$$\phi(\vec{\zeta}, 0) = \ln \frac{u_0(\vec{\zeta})}{1 - u_0(\vec{\zeta})}. \quad (28)$$

Как хорошо известно [19, 20], заменой  $\phi(\vec{\zeta}, \theta) = \ln \psi(\vec{\zeta}, \theta)$  задача Коши (27)–(28) линеаризуется:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \nabla_{\vec{\zeta}}^2 \psi, \quad \psi(\vec{\zeta}, 0) = \frac{u_0(\vec{\zeta})}{1 - u_0(\vec{\zeta})}. \quad (29)$$

Точное решение задачи Коши (29) находится с помощью интеграла Пуассона [17]:

$$\psi(\vec{\zeta}, \theta) = \frac{1}{4\pi\theta} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{(\vec{\zeta} - \vec{\eta})^2}{4\theta}\right] \psi(\vec{\eta}, 0) d^2\eta. \quad (30)$$

Таким образом, асимптотическое решение уравнения (16) полностью построено:

$$u(\vec{z}, \tau; \varepsilon) \approx \frac{\psi(\sqrt{\varepsilon}\vec{z}, \varepsilon\tau)}{\psi(\sqrt{\varepsilon}\vec{z}, \varepsilon\tau) + \exp(-\tau)}, \quad (31)$$

где  $\psi(\vec{\zeta}, \theta)$  — функция, определяемая интегралом (30).

Переписав функцию (31) в размерных переменных (14), получим асимптотическое решение задачи Коши (13) и (17) для плотности заболевших:

$$I(\vec{x}, t) \approx I_m \frac{\psi[(\vec{x} - \vec{\xi}(t))/L, Dt/L^2]}{\psi[(\vec{x} - \vec{\xi}(t))/L, Dt/L^2] + \exp[-(\beta N_0 - \gamma)t]}. \quad (32)$$

Подчеркнём, что правая часть формулы (32) описывает не только рост профиля плотности заболевших особей со временем, но и его перенос по траектории  $\vec{\xi}(t)$  с мгновенной скоростью  $\vec{V}(t)$ .

## 2. Примеры асимптотических решений

Рассмотрим конкретные примеры применения формулы (31), приводящие к явным выражениям.

Пусть начальное условие для уравнения (16) имеет вид

$$u_0(\vec{\zeta}) = \frac{b_0 \exp(-\vec{\zeta}^2)}{b_0 \exp(-\vec{\zeta}^2) + 1}, \quad (33)$$

где  $b_0$  — положительный параметр.

По функции (33) легко пересчитывается начальное условие для вспомогательного уравнения (29):

$$\psi(\vec{\zeta}, 0) = b_0 \exp(-\vec{\zeta}^2), \quad (34)$$

то есть оно оказывается гауссоидой.

Далее, из вспомогательного начального условия (34) по формуле (30) получаем решение вспомогательного уравнения (29):

$$\psi(\vec{\zeta}, \theta) = \frac{b_0}{1 + 4\theta} \exp\left(-\frac{\vec{\zeta}^2}{1 + 4\theta}\right), \quad (35)$$

а затем из него по формуле (31) получаем асимптотическое решение:

$$u(\vec{z}, \tau; \varepsilon) \approx \frac{b_0 \exp[-\varepsilon \vec{z}^2 / (1 + 4\varepsilon\tau)]}{b_0 \exp[-\varepsilon \vec{z}^2 / (1 + 4\varepsilon\tau)] + (1 + 4\varepsilon\tau) \exp(-\tau)}. \quad (36)$$

Графики правой части выражения (36) в движущейся системе координат при  $b_0 = 0.3$  и  $\varepsilon = 0.01$  для различных моментов времени приведены на рис. 2.

На рис. 2, *a* представлено начальное условие (33) в переменных  $(z_1, z_2)$ . Рис. 2, *b* показывает, как это начальное условие трансформируется к моменту безразмерного времени  $\tau = 4$ . Особо отметим, что за время  $t = \tau / (\beta N_0 - \gamma)$  в «физических» координатах  $(x_1, x_2)$  максимум распределения безразмерной плотности заболевших из начала координат сместился на радиус-вектор  $\vec{\xi}(t)$ . На рис. 2, *c* представлена безразмерная плотность заболевших в момент безразмерного времени  $\tau = 8$ . Из этого рисунка видно, что вблизи точки  $(0, 0)$  уже сформировано круговое «плато», на котором значения функции (36) близки к единице. Рис. 2, *d* демонстрирует график этой функции при  $\tau = 12$ . По сравнению с рис. 2, *c* радиус кругового «плато» на рис. 2, *d* стал больше, а граница перехода от единичного значения безразмерной плотности заболевших к её нулевому значению стала резче.

Несложно оценить, что при  $t \gg L^2/D$  радиус кругового «плато» функции (36) растёт приблизительно линейно со временем по закону  $|\vec{x} - \vec{\xi}(t)| \approx 2\sqrt{D(\beta N_0 - \gamma)}t$ , следовательно, в этом случае внутри «плато» плотность заболевших  $I(\vec{x}, t) \approx I_m$  и плотность здоровых  $S(\vec{x}, t) \approx \gamma/\beta$ , а вне этого «плато» плотность заболевших  $I(\vec{x}, t) \approx 0$  и плотность здоровых  $S(\vec{x}, t) \approx N_0$ .

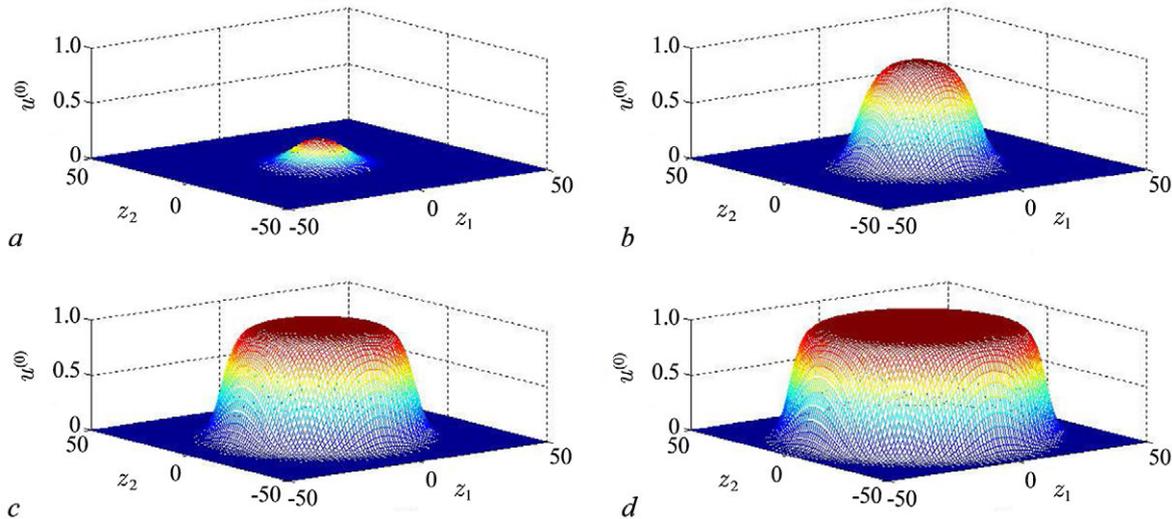


Рис. 2. Пространственно-временная эволюция безразмерной плотности заболевших из начального условия с одним максимумом:  $a - \tau = 0$ ,  $b - \tau = 4$ ,  $c - \tau = 8$ ,  $d - \tau = 12$  (цвет онлайн)

Fig. 2. The spatiotemporal evolution of the dimensionless density of infected from the initial condition with one maximum:  $a - \tau = 0$ ,  $b - \tau = 4$ ,  $c - \tau = 8$ ,  $d - \tau = 12$  (color online)

Пусть теперь начальное условие для уравнения (16) имеет вид

$$u_0(\vec{\zeta}) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i \exp[-(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)^2]}{\sum_{i=1}^m b_i \exp[-(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)^2] + 1}, \quad (37)$$

где  $b_i$  — положительные параметры и  $\vec{\zeta}_i$  — постоянные двумерные векторы ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Пересчитывая по функции (37) начальное условие для вспомогательного уравнения (29), получим, что в этом случае оно является линейной комбинацией гауссоид:

$$\psi(\vec{\zeta}, 0) = \sum_{i=1}^m b_i \exp[-(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)^2]. \quad (38)$$

Далее, в силу линейности вспомогательного уравнения (29) и постоянства его коэффициентов его решение, соответствующее вспомогательному начальному условию, представляется линейной комбинацией функций вида (35):

$$\psi(\vec{\zeta}, \theta) = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{1 + 4\theta} \exp\left[-\frac{(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)^2}{1 + 4\theta}\right]. \quad (39)$$

Наконец, подставляя формулу (39) в выражение (31), получим асимптотическое решение уравнения (16) для начального условия (37):

$$u(\vec{z}, \tau; \varepsilon) \approx \frac{\sum_{i=1}^m b_i \exp[-\varepsilon (\vec{z} - \vec{z}_i)^2 / (1 + 4\varepsilon\tau)]}{\sum_{i=1}^m b_i \exp[-\varepsilon (\vec{z} - \vec{z}_i)^2 / (1 + 4\varepsilon\tau)] + (1 + 4\varepsilon\tau) \exp(-\tau)}, \quad (40)$$

где  $\vec{z}_i$  — постоянные двумерные векторы, связанные с постоянными векторами  $\vec{\zeta}_i$  соотношениями  $\vec{\zeta}_i = \sqrt{\varepsilon} \vec{z}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Выберем  $m = 3$ ,  $b_1 = 0.6$ ,  $b_2 = 0.4$ ,  $b_3 = 0.2$ ,  $\vec{z}_1 = (20, 15)$ ,  $\vec{z}_2 = (-15, 10)$ ,  $\vec{z}_3 = (0, -15)$  и  $\varepsilon = 0.01$ .

Графики правой части выражения (40) в движущейся системе координат при этих значениях параметров для различных моментов времени приведены на рис. 3.

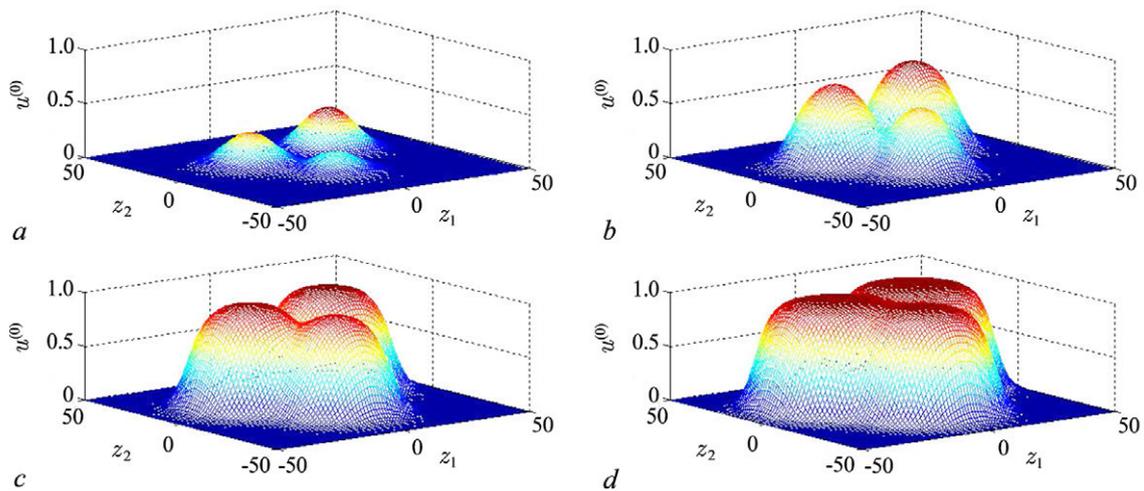


Рис. 3. Пространственно-временная эволюция безразмерной плотности заболевших из начального условия с тремя максимумами:  $a - \tau = 0$ ,  $b - \tau = 2$ ,  $c - \tau = 4$ ,  $d - \tau = 6$  (цвет онлайн)

Fig. 3. The spatiotemporal evolution of the dimensionless density of infected from the initial condition with three maxima:  $a - \tau = 0$ ,  $b - \tau = 2$ ,  $c - \tau = 4$ ,  $d - \tau = 6$  (color online)

На рис. 3, *a* представлено начальное условие (37) в переменных  $(z_1, z_2)$ . У него имеется три максимума. Рис. 3, *b–d* показывают, в какие профили безразмерной плотности заболевших трансформируется это начальное условие при  $\tau = 2$  (рис. 3, *b*),  $\tau = 4$  (рис. 3, *c*) и  $\tau = 6$  (рис. 3, *d*). Из этих рисунков видно, что с течением времени максимумы трёх гауссоид на рис. 3 растут, а сами гауссоиды начинают сливаться друг с другом.

Наконец, при  $\tau \gg 1$  из начального условия на рис. 3, *a* так же, как и в предыдущем примере, образуется «плато», близкое к единице. Однако форма этого «плато» отлична от круговой и определяется взаимным расположением векторов  $\vec{z}_1$ ,  $\vec{z}_2$  и  $\vec{z}_3$ . Впрочем, эффект образования единичного «плато» на больших временах присущ любому начальному условию, что видно непосредственно из формулы (31).

### Заключение

В работе предложена модель распространения эпидемии гипотетической болезни, которая учитывает миграцию заболевшей популяции. С математической точки зрения эта модель представляет собой нелинейную систему (1) из двух уравнений в частных производных параболического типа.

Для случая, когда сумма начальных плотностей заболевших и здоровых особей популяции постоянна на квадрате с большой стороной, а начальная плотность заболевших сосредоточена внутри этого квадрата и меняется медленно по сравнению с характерным пространственным масштабом (15) исходной системы (1), в явном виде построено её асимптотическое решение (32). Это решение описывает эффект слияния нескольких пространственно разнесённых небольших вспышек заболевания в одну большую вспышку.

Перспективой развития данной работы является сравнение полученных приближённых формул (36) и (40) с численными расчётами по исходным уравнениям (1) с начальными условиями (33) и (37) соответственно для оценки точности найденных асимптотических решений.

Интересно также выяснить, как влияет на асимптотическое решение (31) поправка  $u^{(1)}$  первого порядка к нему. Эта величина выписана в формуле (25), однако в неё, помимо известной функции  $\phi(\vec{\zeta}, \theta)$ , входит и неизвестная функция  $\chi(\vec{\zeta}, \theta)$ , ибо второе из условий (20) даёт возможность найти только её начальный профиль  $\chi(\vec{\zeta}, 0)$ . Для того чтобы определить эту функцию, надо получить и решить обыкновенное дифференциальное уравнение по  $\tau$  для поправки  $u^{(2)}(\tau, \theta, \vec{\zeta})$  второго порядка к асимптотическому решению, и после этого из требования её равномерности, аналогичному условию (26), извлечь дифференциальное уравнение в частных производных для искомой функции  $\chi(\vec{\zeta}, \theta)$ .

В заключение отметим, что хотя предложенная модель эпидемии (1)–(2) применима и для мигрирующих по локально плоским участкам поверхности Земли популяций копытных, грызунов и т. д., вообще говоря, очевидно, что развитая в данной работе теория может быть распространена и на популяции, мигрирующие в пространстве  $\mathbb{R}^3$  — в атмосфере (стаи птиц и насекомых) и гидросфере (стаи рыб и планктона).

### Список литературы

1. Lotka A. J. Elements of physical biology. Williams & Wilkins, 1925. 460 p.
2. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. 1926. Vol. 2. P. 31–113.
3. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 181 с.

4. *Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 560 с.
5. *Фрисман В. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П.* Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 1. С. 119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
6. *Белотелов Н. В., Коноваленко И. А.* Моделирование влияния подвижности особей на пространственно-временную динамику популяции на основе компьютерной модели // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8, № 2. С. 297–305. DOI: 10.20537/2076-7633-2016-8-2-297-305.
7. *Кулаков М. П., Фрисман В. Я.* Подходы к исследованию мультистабильности пространственно-временной динамики двухвозрастной популяции // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 6. С. 653–678. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-653-678.
8. *Brauer F., Castillo-Chavez C., Feng Z.* *Mathematical Models in Epidemiology.* Springer Science + Business Media, LLC, part of Springer Nature, 2019. 619 p. DOI: 10.1007/978-1-4939-9828-9.
9. *Kant S., Kumar V.* Stability analysis of predator–prey system with migrating prey and disease infection in both species // *Applied Mathematical Modelling.* 2017. Vol. 42. P. 509–539. DOI: 10.1016/j.apm.2016.10.003.
10. *Шабунин А. В.* SIRS-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяции: Исследование методом вероятностных клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 5–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
11. *Arif M., Abodayeh K., Ejaz A.* On the stability of the diffusive and non-diffusive predator-prey system with consuming resources and disease in prey species // *Mathematical Biosciences and Engineering.* 2023. Vol. 20, no 3. P. 5066–5093. DOI: 10.3934/mbe.2023235.
12. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* Contributions to the mathematical theory of epidemics. II. — The problem of endemicity // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character.* 1932. Vol. 138, no. 834. P. 55–83. DOI: 10.1098/rspa.1932.0171.
13. *Аристов В. В., Строганов А. В., Ястребов А. Д.* Применение модели кинетического типа для изучения пространственного распространения COVID-19 // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13, № 3. С. 611–627. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-611-627.
14. *Бугров В. О., Рассадин А. Э.* Модель распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями // «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»: X Международная научная молодежная школа-семинар имени Е. В. Воскресенского (Саранск, 14–18 июля 2022 г.). С. 40–48.
15. *Bärwolff G.* A local and time resolution of the COVID-19 propagation — a two-dimensional approach for Germany including diffusion phenomena to describe the spatial spread of the COVID-19 pandemic // *Physics.* 2021. Vol. 3. P. 536–548. DOI: 10.3390/physics3030033.
16. *Viguerie A., Veneziani A., Lorenzo G., Baroli D., Aretz-Nellesen N., Patton A., Yankeelov T. E., Reali A., Hughes T. J. R., Auricchio F.* Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study // *Computational Mechanics.* 2020. Vol. 66. P. 1131–1152. DOI: 10.1007/s00466-020-01888-0.
17. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
18. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастом вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Секция А. Математика и механика. 1937. Т. 1, вып. 6. С. 1–26.

19. Берман В. С. Об асимптотическом решении одной нестационарной задачи о распространении фронта химической реакции // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242, № 2. С. 265–267.
20. Kardar M., Parisi G., Zhang Y. C. Dynamical scaling of growing interfaces // Physical Review Letters. 1986. Vol. 56. P. 889–892. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.889.

## References

1. Lotka AJ. Elements of Physical Biology. Williams & Wilkins; 1925. 460 p.
2. Volterra V. Variazioni e Fluttuazioni del Numero d'Individui in Specie Animali Conviventi. Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. 1926;2:31–113.
3. Bazykin AD. Mathematical Biophysics of Interacting Populations. M.: Nauka; 1985. 181 p. (in Russian).
4. Rznichenko GYu. Lectures on Mathematical Models in Biology. M.-Izhevsk: Institute of Computer Research, SPC “Regular and Chaotic Dynamics”; 2010. 560 p. (in Russian).
5. Frisman EYa, Kulakov MP, Revutskaya OL, Zhdanova OL, Neverova GP. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations. Computer Research and Modeling. 2019;11(1):119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
6. Belotelov NV, Konovalenko IA. Modeling the impact of mobility of individuals on space-time dynamics of a population by means of a computer model. Computer Research and Modeling. 2016;8(2):297–305. DOI: 10.20537/2076-7633-2016-8-2-297-305.
7. Kulakov MP, Frisman EYa. Approaches to study of multistability in spatio-temporal dynamics of two-age population. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(6):653–678. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-653-678.
8. Brauer F, Castillo-Chavez C, Feng Z. Mathematical models in epidemiology. Springer Science + Business Media, LLC, part of Springer Nature; 2019. 619 p. DOI: 10.1007/978-1-4939-9828-9.
9. Kant S, Kumar V. Stability analysis of predator–prey system with migrating prey and disease infection in both species. Applied Mathematical Modelling. 2017;42:509–539. DOI: 10.1016/j.apm.2016.10.003.
10. Shabunin AV. SIRS-model with dynamic regulation of the population: Probabilistic cellular automata approach. Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(2):5–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
11. Arif M, Abodayeh K, Ejaz A. On the stability of the diffusive and non-diffusive predator-prey system with consuming resources and disease in prey species. Mathematical Biosciences and Engineering. 2023;20(3):5066–5093. DOI: 10.3934/mbe.2023235.
12. Kermack WO, McKendrick AG. Contributions to the mathematical theory of epidemics. II. — The problem of endemicity. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1932;138(834):55–83. DOI: 10.1098/rspa.1932.0171.
13. Aristov VV, Stroganov AV, Yastrebov AD. Application of the kinetic type model for study of a spatial spread of COVID-19. Computer Research and Modeling. 2021; 13(3):611–627 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-611-627.
14. Bugrov VO, Rassadin AE. The model of the spread of a pandemic with two stable states. Proceedings of the International Scientific Youth School-Seminar “Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software complexes” named after E.V. Voskresensky (Saransk, July 14-18, 2022). Saransk: SVMO Publ.; 2022. P. 40–48. (in Russian).
15. Bärwolff G. A local and time resolution of the COVID-19 propagation — a two-dimensional approach for Germany including diffusion phenomena to describe the spatial spread of the COVID-19 pandemic. Physics. 2021;3:536–548. DOI: 10.3390/physics3030033.
16. Viguerie A, Veneziani A, Lorenzo G, Baroli D, Aretz-Nellesen N, Patton A, Yankeelov TE,

- Reali A, Hughes TJR, Auricchio F. Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study. *Computational Mechanics*. 2020;66:1131–1152. DOI: 10.1007/s00466-020-01888-0.
17. Tikhonov AN, Samarskii AA. *Equations of Mathematical Physics*. M.: Nauka; 1966. 724 p. (in Russian).
  18. Kolmogorov AN, Petrovsky IG, Piskunov NS. 'Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscou Univ. Bull. Math.* 1937;1(6):1–26.
  19. Berman VS. Asymptotic solution of a nonstationary problem on the propagation of the front of chemical reaction. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1978;242(2):265–267. (in Russian).
  20. Kardar M, Parisi G, Zhang YC. Dynamical scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*. 1986;56:889–892. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.889.



*Рассадин Александр Эдуардович* — родился в Горьком (1972). Окончил физический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1994), аспирантуру ННГУ (1997) и магистратуру «Высшей школы экономики» по специальности «Математика» (2022). С 2022 года — аспирант «Высшей школы экономики» на кафедре фундаментальной математики. Научные интересы — теоретическая физика, математическая физика, динамические системы, физика твёрдого тела, радиофизика, радиотехника, математическое моделирование. Опубликовал свыше 70 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: brat\_ras@list.ru  
ORCID: 0000-0001-5644-4012  
AuthorID (eLibrary.Ru): 38363

## EDITOR-IN-CHIEF

*Yu. V. Gulyaev*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

## DEPUTY EDITORS

*I. V. Sysoev*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

## MANAGING EDITOR

*M. V. Sysoeva*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*S. Boccaletti*, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

*A. M. Bykov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*N. S. Ginzburg*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

*N. V. Kuznetsov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

*G. van Luijelaar*, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

*A. Lüttjohann*, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

*G. G. Malinetskii*, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*I. I. Mokhov*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

*A. B. Neiman*, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

*V. I. Nekorkin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Pikovskiy*, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

*V. V. Tuchin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*E. Ya. Frisman*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

*V. A. Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

*V. A. Cherepenin*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >