



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья
УДК 517.91

DOI: 10.18500/0869-6632-003144
EDN: ATHCRQ

Периодические режимы в гибридной динамической системе «хищник–жертва» с учетом миграции и внутривидовой конкуренции

А. Н. Кириллов, А. М. Сазонов✉

Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, Россия

E-mail: krllv1812@yandex.ru, ✉sazon-tb@mail.ru

Поступила в редакцию 15.04.2024, принята к публикации 1.08.2024,

опубликована онлайн 3.12.2024, опубликована 31.03.2025

Аннотация. Целью работы является построение и анализ гибридной модели, описывающей динамику биосообщества участка с переменной структурой межвидовых взаимодействий. Изменение структуры взаимодействия видов вызвано миграцией хищника из участка в случае недостатка пищевых ресурсов и колонизацией (возможно, реколонизацией) участка в случае достаточного их количества. **Методы.** Модель представляет собой трехмерную нелинейную гибридную систему, состоящую из трех динамических подсистем. Переключение между подсистемами регулируется величиной пищевой привлекательности участка, понятие которой введено ранее одним из авторов. Благодаря использованию пищевой привлекательности система обладает памятью, и изменение структуры межвидового взаимодействия приобретает инерционность, характерную для экологических процессов. **Результаты.** Введены режимы биосообщества участка: взаимодействие видов, миграция хищника и динамика жертвы в отсутствие хищника. Исследована символическая динамика, соответствующая изменению режимов участка. Доказан ряд результатов, дающих условия существования периодических траекторий в гибридной системе и периодических символических последовательностей режимов. Определено бифуркационное для динамики режимов значение параметра, характеризующего потребности хищника в пищевых ресурсах. Приведен численный пример. **Заключение.** На основе полученных условий существования периодических символических последовательностей режимов возможно прогнозирование миграции популяции хищника из участка и его реколонизации. При этом, в частности, становится разрешимой практически важная в экологии задача оценивания временных периодов процесса реколонизации.

Ключевые слова: гибридная система, переменная структура, нелинейная динамика популяций.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РНФ в рамках научного проекта 23-21-00092.

Для цитирования: Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Периодические режимы в гибридной динамической системе «хищник–жертва» с учетом миграции и внутривидовой конкуренции // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 199–218. DOI: 10.18500/0869-6632-003144. EDN: ATHCRQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Periodic regimes in a hybrid dynamical predator-prey system with migration and intraspecific competition

A. N. Kirillov, A. M. Sazonov✉

Karelian Research Centre of the RAS, Petrozavodsk, Russia

E-mail: krllv1812@yandex.ru, ✉sazon-tb@mail.ru

Received 15.04.2024, accepted 1.08.2024, available online 3.12.2024, published 31.03.2025

Abstract. The goal of the paper is to construct and analyze a hybrid model describing patch biocommunity dynamics with variable structure interspecific interactions. Species interaction structure variations are implied by predator's population migration from a patch caused by food resources lack and patch colonization in a case of its sufficient amount. **Methods.** The model is presented by a three dimensional nonlinear hybrid system consisting of three dynamical subsystems. Switchings between subsystems are regulated by a patch food attractivity value the notion of which was introduced by one of the authors. Due to a food attractivity usage the system possesses a memory because of which variations of interactions' structure obtain inertia typical for ecological processes. **Results.** The following regimes of patch biocommunity are introduced: interspecific interaction, predator's migration and prey's dynamics in the absence of predators. Symbolic dynamics corresponding to patch regimes variations is investigated. Results delivering conditions of existence of periodic trajectories in a hybrid system, as well as periodic symbolic regime sequences, are obtained. A bifurcation value of a parameter characterized predator's resource requirements is determined. Numerical example is given. **Conclusion.** On the basis of obtained results concerning periodic symbolic regime sequences, expressed via system parameters relations, it is possible to predict a predator population migration from a patch and its recolonization. Moreover, appears a possibility to estimate time periods of recolonization processes which is an important practical problem in ecology.

Keywords: hybrid system, variable structure, nonlinear population dynamics.

Acknowledgements. This work was supported by RSF, project number 23-21-00092.

For citation: Kirillov AN, Sazonov AM. Periodic regimes in a hybrid dynamical predator-prey system with migration and intraspecific competition. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(2):199–218. DOI: 10.18500/0869-6632-003144

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Рассматривается популяция некоторого вида, хищника, местообитание которой состоит из изолированных участков. Участки содержат ресурс питания, жертву. Популяция хищников мигрирует между участками обитания в целях отыскания оптимальных условий существования. В случае недостатка ресурса питания на участке популяция покидает его. При этом возможна реколонизация участка, если его пищевая привлекательность возрастает до некоторого порога.

Участок в каждый момент времени может находиться в одном из состояний, которые будем называть режимами: взаимодействие «хищник–жертва», миграция хищника, функционирование жертвы в отсутствие хищника. Нас интересуют условия существования этих режимов и перехода между ними. В настоящей задаче будет изучаться динамика режимов, что отличает ее от традиционных задач теории динамических систем.

Описанную (пока неформально) задачу можно отнести к теории метапопуляций [1]. Под метапопуляцией понимают совокупность субпопуляций вида, находящуюся на различных участках (patches), связанных миграционными потоками.

Метапопуляционная динамика представлена в различных исследованиях. В частности, статья [2] посвящена моделированию метапопуляции на основе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), исследуется вопрос глобальной устойчивости методом Ляпунова. В [3] исследована модель метапопуляции *Trypanosoma cruzi*. Качественный анализ модели сконцентрирован на индексе репродукции с целью показать, как миграция и различные способы передачи инфекции определяют устойчивость инфекции, проведено численное исследование устойчивости. В работе [4] представлена модель метапопуляции для изучения малярии, исследуется устойчивость. Статья [5] посвящена исследованию возникающих бифуркаций в модели метапопуляции с двумя конкурирующими видами на основе ОДУ. В [6] исследуется модель метапопуляции в виде ОДУ, показано существование и устойчивость равновесий, получено условие исчезновения популяции. В работе [7] представлена модель метапопуляции дафний в виде ОДУ, исследуется устойчивость и возникновение бифуркаций.

В качестве недостатка описанных моделей можно выделить то, что метапопуляция описывается единственной системой ОДУ, что неидеально подходит для экологических систем со сложной, изменчивой структурой. Для описания систем с изменяющимися типами взаимодействия лучше подходят гибридные системы [8–10], позволяющие явным образом учитывать изменения структуры экологических систем. Таким образом, актуальной задачей в области моделирования метапопуляций является разработка новых моделей в виде гибридных динамических систем. Например, в работе [11] представлена гибридная система типа Филиппова, описывающая динамику метапопуляции с двумя участками, для исследования динамики предрасположенных и зараженных инфекционными заболеваниями. Исследуется устойчивость равновесий.

В настоящей работе предлагается подход к моделированию динамики процессов взаимодействия, миграции и реколонизации участка популяцией хищника на основе гибридной системы или динамической системы с переключениями. В отличие от многих существующих моделей, трудно исследуемых качественно и аналитически, данная модель представляет собой совокупность простых моделей и сценариев переключения между ними. Это позволяет провести достаточно полное исследование нелинейной динамики.

Ценность участка для хищника характеризуется его пищевой привлекательностью, понятие которой введено одним из авторов [12].

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — количественные характеристики популяций жертв и хищника в момент времени t соответственно. Пусть $\lambda > 0$ — пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое хищнику для поддержания его жизненных функций. Тогда величина

$$n(t) = \int_0^t \left(\frac{x(\tau)}{y(\tau)} - \lambda \right) d\tau \quad (1)$$

характеризует накопление избытка или недостатка пищевого ресурса на участке на промежутке $[0, t]$ для популяции хищников. Функция $n : t \rightarrow n(t)$ введена в [12] и называется пищевой привлекательностью участка в момент $t \geq 0$. Величину $n(t)$ можно интерпретировать как память популяции хищников о питательных ресурсах участка на промежутке $[0, t]$.

Динамика биосообщества с памятью, заданной выражением, отличным от (1), рассматривалась в [13], где проводилось исследование устойчивости равновесия по первому приближению. В [14] использовано отношение x/y в модели двумерной динамики «хищник–жертва» с переключениями между двумя подсистемами.

Будем полагать, что условие $n(t) > 0$ характеризует участок как привлекательный для популяции хищника.

1. Модель

Рассмотрим следующую гибридную модель «хищник–жертва» с миграцией хищников, представляющую собой совокупность систем дифференциальных уравнений, каждая из которых задана в соответствующей области, принадлежащей $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Если $n > 0$,

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(kbx - m), \\ \dot{n} = x - \lambda y, \end{cases} \quad (2)$$

где постоянные a, b, m положительны, $0 < k < 1$. Система (2) описывает режим взаимодействия хищников и жертв при достаточной для этого величине пищевой привлекательности $n > 0$. Первые два уравнения представляют собой систему Лотки–Вольтерры, третье получено дифференцированием (1).

Для дальнейшего описания динамики введем функцию $y = \varepsilon^*(x)$:

$$\varepsilon^*(x) = \begin{cases} \frac{x}{\lambda}, & 0 < x < \varepsilon\lambda, \\ \varepsilon, & x \geq \varepsilon\lambda, \end{cases} \quad (3)$$

где $\varepsilon < a/b$.

Если $n \leq 0$ и $y > \varepsilon^*(x)$,

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ \dot{y} = -my, \\ \dot{n} = x - \lambda y. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) описывает процесс миграции или ухода хищника из участка вследствие недостаточной величины пищевой привлекательности ($n < 0$). При этом отсутствует взаимодействие между популяциями хищников и жертв, что типично для миграции.

Если $n < 0$ и $0 < y \leq \varepsilon^*(x)$,

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = -d, \\ \dot{n} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $d > 0$. Система (5) задает режим полного исчезновения популяции хищника из сообщества, настолько быстропротекающий (d достаточно велико), что изменением переменных x, n можно пренебречь.

Если $n < 0$ и $y = 0$,

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cx), \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{n} = x, \end{cases} \quad (6)$$

где $c > 0$. Система (6) описывает динамику популяции жертв в отсутствие хищника. При этом учитывается внутривидовая конкуренция жертв (первое уравнение — логистическое), что естественно при отсутствии хищника, подавляющего популяцию жертв.

Если $n = 0$ и $0 < y \leq \varepsilon^*(x)$,

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = d, \\ \dot{n} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) описывает режим появления хищника в сообществе.

Введем обозначения для режимов, задаваемых приведенными выше системами (подсистемами):

- P_2 — взаимодействие (2),
- P_1 — отсутствие хищника (6),
- P_{21} — миграция хищника (4),
- P_- — уход хищника (5),
- P_+ — появление хищника (7).

Пусть символ $\xi \in \Psi = \{1, 2, 12, -, +\}$.

Представленная работа посвящена изучению динамики символических последовательностей $\{P_\xi\}$, $\xi \in \Psi$. Это мотивируется целью исследования. Нас интересует, как уже отмечалось во Введении, не традиционно изучаемое состояние фазового вектора, характеризующего биосообщество, а состояние структуры взаимодействия видов, присутствующих на участке, условия ухода популяции хищника из участка, условия реколонизации участка хищником, условия периодической реколонизации. Все это позволит прогнозировать состояние биогеоценоза территории. Последовательность $\{P_\xi\}$ является инструментом в таком исследовании.

Замечание 1. Отметим, что в рассматриваемой гибридной системе переходы между основными режимами, а именно, взаимодействия (2) и миграции (4), происходят не мгновенно при нехватке ресурсов, а с учетом предыстории $n(t)$, что придает инерционность изменению режимов. В работе [14], где представлена двумерная гибридная система с двумя подсистемами и иной динамикой, переключение происходит в момент времени t^* такой, что $x(t^*) = \lambda y(t^*)$. Данное обстоятельство делает модель более адекватной реальным экологическим системам, которым свойственна инерционность изменения структуры. Инерционность при переключении между режимами P_2 и P_{21} возникает вследствие того, что переключение происходит не в момент попадания на плоскость $x(t) = \lambda y(t)$, а позже за счет введения переменной $n(t)$.

Пусть $r_\xi(t, M, \lambda)$ — решение системы, задающей режим P_ξ , при постоянном $\lambda > 0$, $r_\xi(0, M, \lambda) = M$, $\tilde{r}_\xi(M, \lambda) = \{r_\xi(t, M, \lambda), t \geq 0\}$ — соответствующая положительная полутраектория.

Под решением гибридной системы (2)–(7) будем понимать, как это принято для систем с переключениями, такую функцию $t \rightarrow r(t, M, \lambda)$, $r(0, M) = M$, что ее ограничение на область, в которой задана соответствующая система, совпадает с решением последней. При этом решение гибридной системы сшивается из решений систем (2)–(7) стандартным образом. Для того чтобы это было возможно, на границах областей, в которых определены подсистемы, их векторные поля не должны быть направлены навстречу друг другу. Тогда будет происходить так называемое прошивание границ траекториями [15], что обеспечит переход к следующей системе. При этом конечная точка для предыдущей системы становится начальной для последующей. Под положительной полутраекторией гибридной системы (2)–(7) будем понимать объединение отрезков (дуг) соответствующих траекторий составляющих ее подсистем.

В дальнейшем будет показано, что достаточным условием, обеспечивающим прошивание траекториями границ областей, в которых заданы подсистемы, является ограниченность сверху параметра λ , то есть выполнение условия

$$\lambda \leq C, \quad (8)$$

где значение положительной постоянной C будет определено. Тогда решения и полутраектории гибридной системы (2)–(7) будут определены корректно.

В настоящей работе рассматривается, если не оговорено особо, случай

$$\lambda > \frac{m}{ak}, \quad (9)$$

причем, как будет показано в дальнейшем, для постоянной C будет выполнено условие $C > \frac{m}{ak}$. Экологически это значит, что для нормальной жизнедеятельности хищнику требуется большое количество жертв, поэтому вследствие выедания особей жертвы хищник вынужден мигрировать в поисках более богатых пищевыми ресурсами участков. Условие (9) соответствует активно мигрирующему хищнику. Случаю $\lambda \leq \frac{m}{ak}$ уделено некоторое внимание в последнем разделе.

Определение 1. Введем названия для представленных ниже последовательностей режимов:

- $P_2 P_{21} P_2$ — частичная миграция;
- $P_2 P_{21} P_- P_1$ — полная миграция;
- $P_2 P_{21} P_- P_1 P_+ P_2 P_{21} P_- P_1$ — полная вторичная миграция.

В названиях последовательностей режимов отражен смысл поведения популяции хищника. Изучим условия существования полной вторичной миграции, смысл которой состоит в том, что популяция хищника, покинув участок, через некоторое время возвращается на него, а затем снова покидает.

Для знакомства с динамикой гибридной системы опишем кратко начальное ее функционирование, предполагая, что все переходы между соответствующими подсистемами возможны.

В дальнейшем полагаем, что популяция хищника в момент времени $t = 0$ появляется на участке, и пусть $M_0 = (x_0, 0, 0)$ — начальная точка. Далее, динамика задается системой (7) (режим P_+), и за конечное (достаточно малое) время фазовая точка переходит в положение M :

$$M = (x_M, y_M, 0) \in \{(x, y, 0) : y = \varepsilon^*(x)\},$$

где $x_M = x_0$, $y_M = \varepsilon^*(x_M)$. Затем начинает функционировать система (2) — режим P_2 , в результате которого фазовая точка вернется на плоскость $n = 0$ (это будет доказано ниже). Далее, из уравнений (4), (6) следует, что фазовая точка в течение конечного времени находится в области $n < 0$ и вдоль траектории системы (4) попадет на плоскость $n = 0$, в область $x < \lambda y$, или — на поверхность $y = \varepsilon^*(x)$. Приведенное описание соответствует последовательности режимов $P_+ P_2 P_{21}$.

Ниже будет проведено исследование возможности существования периодических траекторий в гибридной системе.

2. Инвариантные поверхности

2.1. Инвариантные поверхности для системы (2). Первые два уравнения в (2), как уже было отмечено выше, задают систему Лотки–Вольтерры

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(kbx - m), \end{cases}$$

которую будем обозначать как система $L - V$. Обозначим через $\sigma(z_0)$ траекторию системы $L - V$, проходящую через точку $z_0 = (x_0, y_0)$. Как известно, $\sigma(z_0)$ — замкнутый овал, задаваемый уравнением $f(x, y, z_0) = 0$, где

$$\sigma(z_0) : f(x, y, z_0) = a \ln y - by + m \ln x - kbx - h(x_0, y_0) = 0, \quad (10)$$

где $h(x_0, y_0) = a \ln y_0 - by_0 + m \ln x_0 - kbx_0$.

Замечание 2. Отметим, что условие (9) геометрически соответствует расположению положения равновесия $(\frac{m}{bk}, \frac{a}{b})$ системы $L - V$ над прямой $x = \lambda y$.

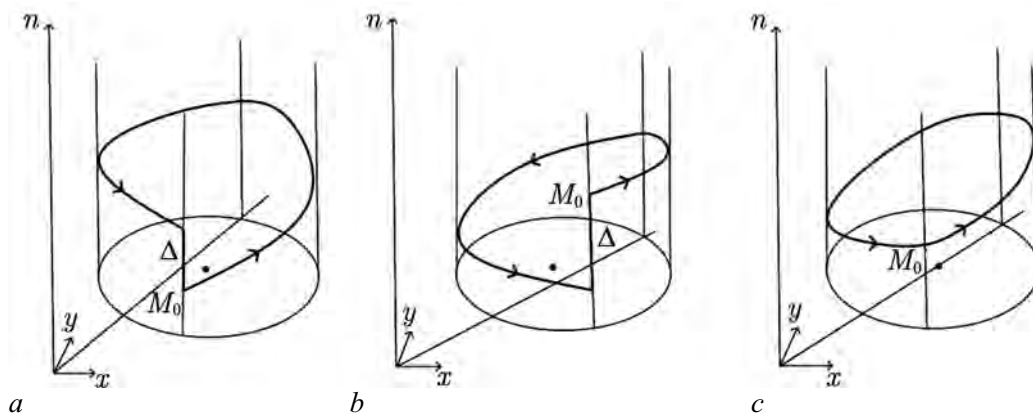


Рис. 1. Значение $\Delta(M_0, \lambda)$: a — при $\lambda < \frac{m}{ak}$; b — при $\lambda > \frac{m}{ak}$; c — при $\lambda = \frac{m}{ak}$

Fig. 1. Value of $\Delta(M_0, \lambda)$: a — if $\lambda < \frac{m}{ak}$; b — if $\lambda > \frac{m}{ak}$; c — if $\lambda = \frac{m}{ak}$

Будем полагать, что овалы $\sigma(z_0)$ вложены в плоскость $n = 0$: $\sigma(z_0) \in \{(x, y, 0)\}$. Точку $M = (x, y, 0)$ будем также обозначать как $z = (x, y)$.

Поскольку в правые части первых двух уравнений системы (2) не входит n , то в пространстве $\mathbb{R}^3$ (без учета ограничения $n > 0$) траектории этой системы принадлежат инвариантным цилиндрическим поверхностям, образующие которых параллельны координатной оси On , направляющие — овалы σ . Обозначим через $C(\sigma)$ цилиндрическую поверхность с направляющей σ . Поскольку система (2) имеет место при $n \geq 0$, то ее траектории принадлежат поверхностям $C(\sigma) \cap \mathbb{R}_+^3$, где $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, n) : x \geq 0, y \geq 0, n \geq 0\}$. Сохраним для этих «получилиндрических» поверхностей обозначение $C(\sigma)$.

Следующий результат характеризует расположение траектории системы (2) на соответствующей поверхности $C(\sigma)$.

Пусть $r_v(t, z_0)$ и $\sigma(z_0)$ — решение и траектория системы $L - V$, $T(\sigma(z_0))$ — период решения $r_v(t, z_0)$, $M_0 = (z_0, n_0)$, $\Delta(t, M_0, \lambda)$ — приращение координатной функции $n(t, M_0, \lambda)$ решения $r_2(t, M_0, \lambda)$ системы (2) на промежутке $[t, t + T(\sigma(z_0))]$, то есть

$$\Delta(t, M_0, \lambda) = n(t + T(\sigma(z_0)), M_0, \lambda) - n(t, M_0, \lambda).$$

В [16] доказано, что $\Delta(t, M_0, \lambda)$ не зависит от t , и если обозначить $\Delta(t, M_0, \lambda) = \Delta(M_0, \lambda)$, то (см. рис. 1)

Лемма 1 (см. [16, с. 103]).

$$\Delta(M_0, \lambda) = \frac{aT(\sigma(z_0))}{b} \left(\frac{m}{ak} - \lambda \right). \quad (11)$$

Величина смещения $\Delta(M_0, \lambda)$ не изменится, если точку M_0 заменить на любую другую точку $M \in \sigma(z_0)$, поскольку в правую часть (11) входит период T , определяемый соответствующим овалом σ .

2.2. Инвариантные плоскости для систем (4), (2).

Лемма 2 (см. [12]). Система (4) имеет линейный интеграл вида

$$mx + a\lambda y - amn = \text{const}. \quad (12)$$

Система (2) имеет линейный интеграл (12) тогда и только тогда, когда $\lambda = \frac{m}{ak}$.

Доказательство. Для доказательства достаточно продифференцировать выражение $mx + a\lambda y - amn$ вдоль решений системы (4), а в случае $\lambda = \frac{m}{ak}$ вдоль решений (2), и убедиться, что соответствующие производные тождественно равны нулям. $\square$

3. Условие корректности модели

Переход от системы (4) к (6) или (2), как нетрудно убедиться, не вызывает сомнений: происходит прошивание траекториями граничных поверхностей $y = \varepsilon^*(x)$ или $n = 0$ соответственно.

При переходе же от (6) к (2) возможно попадание траектории системы (7) на промежуток $(0E)$, где $E = E(\varepsilon) = (\lambda\varepsilon, \varepsilon)$ (см. (3)). Пусть это попадание произойдет в точку $M \in (0E)$. Предположим, что существует овал σ , касающийся промежутка $(0E)$ в точке $Q = \sigma \cap (0E)$. Также предположим, что точка M лежит выше точки Q , то есть $y(Q) < y(M) < \varepsilon$. Тогда при попадании траектории системы (7) в точку M не определено дальнейшее движение, то есть переход к следующей подсистеме. Действительно, точка M не может быть начальной для системы (2), поскольку решение системы (2) из нее непродолжимо: продолжение возможно лишь в область $n < 0$, где оно не определено. В то же время точка M не может быть конечной для системы (4). Таким образом, в описанном случае движение из точки M не определено.

Для преодоления описанного препятствия введем ограничения вида (8), смысл которого состоит в том, чтобы точка касания Q не принадлежала множеству $y < \varepsilon^*(x)$.

Найдем точки касания $Q(\lambda)$ луча $p(\lambda)$ и овала σ . Для ординаты точки касания $Q(\lambda) = (\lambda y, y)$, где $x = \lambda y$, справедливо уравнение

$$\frac{y(kb\lambda y - m)}{\lambda y(a - by)} = \frac{1}{\lambda},$$

откуда получаем

$$y = \frac{a + m}{(1 + \lambda k)b} = y(Q(\lambda)).$$

Легко убедиться как аналитически, так и геометрически в том, что $y(Q(\lambda)) < \frac{a}{b}$ при $\lambda > \frac{m}{ak}$.

Выясним теперь, при каком условии $y(Q(\lambda)) \geq \varepsilon$, где $\varepsilon < \frac{a}{b}$ (см. (3)), то есть

$$\frac{a + m}{(1 + \lambda k)b} \geq \varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\lambda \leq \frac{a + m - b\varepsilon}{bk\varepsilon} \doteq \lambda_\varepsilon. \quad (13)$$

Несложно показать, что при принятом выше условии (13) числитель последней дроби положителен, и также $\frac{m}{ak} < \lambda_\varepsilon$, то есть (13) не противоречит условию (9). Таким образом, для корректности модели (2)–(7) достаточно, чтобы выполнялось условие $\lambda \leq \lambda_\varepsilon$, что вместе с условием (9) приводит к следующему условию, выполнение которого будет предполагаться в дальнейшем

$$\frac{m}{ak} < \lambda \leq \lambda_\varepsilon \quad (14)$$

3.1. Область ухода. Введем следующие обозначения, полагая что $\lambda > 0$:

- конус π

$$\pi = \{(x, y, 0) : x > 0, y > 0\};$$

- луч $p = p(\lambda)$

$$p(\lambda) = \{(x, y, 0) : x = \lambda y, x > 0, y > 0\} \subset \pi;$$

- конусы $p^+(\lambda) \subset \pi$, $p^-(\lambda) \subset \pi$

$$p^+(\lambda) = \{(x, y, 0) : x > \lambda y, x > 0, y > 0\},$$

$$p^-(\lambda) = \{(x, y, 0) : x < \lambda y, x > 0, y > 0\}.$$

Упорядочим точки луча $p(\lambda)$: для точек $M, N \in p(\lambda)$ пишем $M < N$, если для их координат $x(M) < x(N)$, или, что равносильно, $y(M) < y(N)$.

Обозначим через $l(\lambda) \subset p^-$ такую кривую, что траектории системы (4), начинаясь в точках $l(\lambda)$, возвращаются впервые в область p^+ , попадая на луч

$$\delta(\varepsilon, \lambda) = \{(x, y, 0) : y = \frac{a}{b}, x \geq \varepsilon \lambda\}. \quad (15)$$

Лемма 3. Линия $l(\lambda) \subset \pi$ задается уравнением вида

$$x = \frac{\lambda a}{m} \cdot \frac{y - \varepsilon}{\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^{\frac{a}{m}} - 1} \doteq w(y, \lambda) \doteq w(y). \quad (16)$$

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in l(\lambda)$ — начальная точка при $t = t_0$ для системы (4), интегрируя которую, получим

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad y(t) = y_0 e^{-m(t-t_0)}, \quad n(t) = \frac{x_0}{a}(e^{a(t-t_0)} - 1) + \frac{y_0}{m}(e^{-m(t-t_0)} - 1).$$

Пусть при $t = t_1$ фазовая точка впервые возвращается на плоскость $n = 0$ вдоль траектории системы (4). Тогда $n(t_1) = 0$. Исключая $t_1 - t_0$ из приведенных выше равенств, получаем (16). $\square$

Нетрудно показать, что функция $w(y)$ вогнута и монотонно убывает при $a > m$, выпукла и монотонно возрастает при $a < m$.

Определение 2. Линия ухода — это множество

$$L(\lambda) = l(\lambda) \cup (0A], \quad (17)$$

где $(0A] \subset p$ — полуоткрытый промежуток, $A = A(\lambda, \varepsilon) = (\lambda \varepsilon, \varepsilon, 0)$.

Отметим, что линия $L(\lambda)$ разбивает область p^- на два множества:

- область $K_1 = K_1(\lambda)$, ограниченную линией ухода $L(\lambda)$ и координатной осью y ,
- и
- область $K_2 = K_2(\lambda)$, ограниченную лучами $\delta(\varepsilon)$ и

$$[A\infty) = \{(x, y, 0) : x = \lambda y, y \geq \varepsilon\} \subset p.$$

Из области K_1 фазовая точка переходит на поверхность $y = \varepsilon^*(x)$ вдоль траекторий системы (4). Далее, фазовая точка вдоль траекторий системы (6) попадает на плоскость $y = 0$, то есть популяция хищника полностью покидает сообщество. Из области K_2 фазовая точка попадает на плоскость $n = 0$, в область $p^+ \subset \pi$, вдоль траекторий системы (4), и далее действует режим P_2 (2).

Определение 3. Области $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$ называются областями ухода и возврата соответственно.

Имеет место утверждение, которое моментально следует из (16).

Лемма 4. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Тогда $K_1(\lambda_1) \supset K_1(\lambda_2)$ (рис. 2).

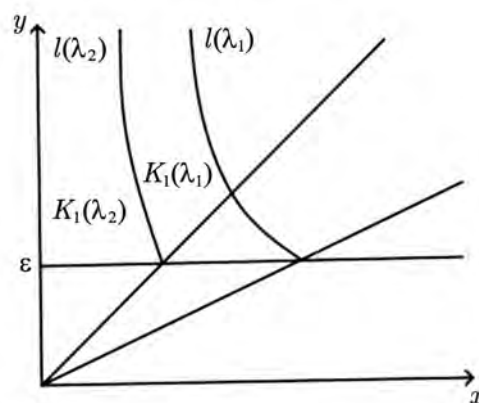


Рис. 2. Области ухода: $K_1(\lambda_1) \supset K_1(\lambda_2)$ при $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Fig. 2. Leaving domains: $K_1(\lambda_1) \supset K_1(\lambda_2)$ if $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

4. Отображение последования $F(z, \lambda)$ и его монотонность

Введем обозначение

$$\lambda^* = \frac{m}{ak}.$$

Лемма 5. При любом $\lambda \geq \lambda^*$ для точек $z \in p^+$ существует отображение Пуанкаре (отображение последования)

$$F_\lambda : p^+(\lambda) \rightarrow p^-(\lambda)$$

вдоль траекторий системы P_2 вида

$$F_\lambda : z \rightarrow F_\lambda(z), \quad (18)$$

где

$$F_\lambda(z) = r_2(t_\lambda(z), z, \lambda) \doteq F(z, \lambda)$$

при условии

$$r_2(t, z, \lambda) \in \mathbb{R}_+^3, \quad \text{если } t \in (0, t_\lambda(z)).$$

Обозначим $t_\lambda(z)$ — момент времени первого попадания фазовой точки траектории $\tilde{r}_2(z, \lambda)$ системы (2) на плоскость $n = 0$, в область p^- , где $z \in p^+$.

Доказательство. При $\lambda = \lambda^*$ существование F_{λ^*} следует из лемм 2 и 1. Отметим, что в этом случае отображение F_{λ^*} определено и для точек $z \in (0P)$, где $p(\lambda^*) \supset (0P)$ — открытый промежуток, $P = (\frac{m}{bk}, \frac{a}{b})$ — положение равновесия системы Лотки–Вольтерры, входящей в (2). В этом случае $F(z, \lambda^*) = z$.

Пусть $\lambda > \lambda^*$. Из (11) следует,

$$\Delta(M, \lambda) = n(T(\sigma(z)), M, \lambda) - n(0, M, \lambda) = n(t + T(\sigma(z)), M, \lambda) < 0,$$

где $M = (z, 0)$. Следовательно, существует единственный момент времени $t_\lambda(z)$ такой, что $n(t_\lambda(z), M, \lambda) = 0$ при условии, что $n(t, M, \lambda) > 0$ для $t \in (0, t_\lambda(z))$. При этом $F(z, \lambda) = r_2(t_\lambda(z), M, \lambda) \in p^-$, что следует из третьего уравнения системы (2). $\square$

Для дальнейших рассуждений упорядочим точки овала σ . Рассмотрим луч $p^* = p(\lambda^*)$ и точки $\{A_1^*, A_2^*\} = p^* \cap \sigma$, где $A_1^* < A_2^*$, $A_1^* = A_1^*(\sigma, \lambda^*)$, $A_2^* = A_2^*(\sigma, \lambda^*)$. Поскольку далее будем использовать в основном точку A_1 , то для краткости обозначим ее как

$$A^* \doteq A_1^*(\sigma, \lambda^*).$$

Введем полярные координаты, полагая началом точку равновесия $P = (\frac{m}{bk}, \frac{a}{b})$ соответствующей системы Лотки–Вольтерры. Пусть луч с началом в точке P и проходящий через точку A^* является полярной осью, которую обозначим через $l(PA^*)$. Полярный угол, как обычно, отсчитывается от $l(PA^*)$ против часовой стрелки. Пусть $PM = \varrho(M)$ — радиус-вектор точки овала, то есть $M \in \sigma$, $\varphi(M)$ — соответствующий полярный угол, для которого полагаем $\varphi(M) \in [0, 2\pi)$. Отсюда $\varphi(A^*) = 0$, $\varphi(A_2^*) = \pi$.

Тогда для точек $M_1, M_2 \in \sigma$ пишем $M_1 < M_2$, если $\varphi(M_1) < \varphi(M_2)$.

Лемма 6. Пусть $\lambda > \lambda^*$. Имеет место монотонность отображения $F(z, \lambda)$ по z и λ в следующем смысле.

1. Если $z_1, z_2 \in \sigma \cap p^+(\lambda)$ и $z_1 < z_2$, то $F(z_1, \lambda) > F(z_2, \lambda)$ (рис. 3, а).
2. Если $\lambda_1 < \lambda_2$ и $z \in \sigma \cap p^+(\lambda_2)$, то $F(z, \lambda_1) > F(z, \lambda_2)$ (рис. 3, б).

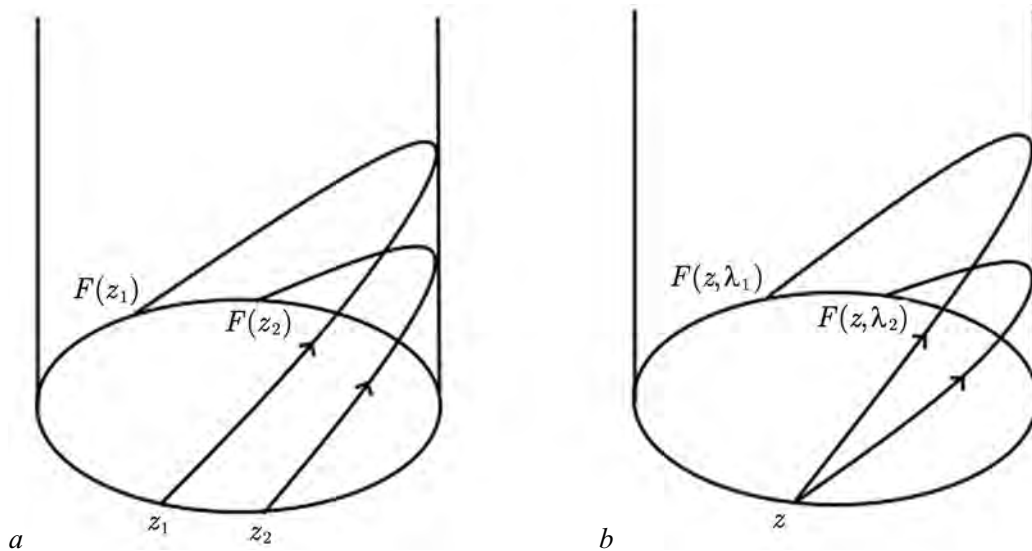


Рис. 3. Монотонность отображения Пуанкаре: a — если $z_1 < z_2$, то $F(z_1, \lambda) > F(z_2, \lambda)$; b — если $\lambda_1 < \lambda_2$, то $F(z, \lambda_1) > F(z, \lambda_2)$

Fig. 3. Monotonicity of Poincaré map: a — if $z_1 < z_2$ then $F(z_1, \lambda) > F(z_2, \lambda)$; b — if $\lambda_1 < \lambda_2$ then $F(z, \lambda_1) > F(z, \lambda_2)$

Доказательство. Первое утверждение следует из единственности траекторий, проходящих через данную точку и принадлежащих общей цилиндрической поверхности $C(\sigma)$.

Из второго условия, $\lambda_1 < \lambda_2$, следует, что $\dot{n}(x, y, \lambda_1) = x - \lambda_1 y > x - \lambda_2 y = \dot{n}(x, y, \lambda_2)$. Отсюда получаем, что для n -координат (координат по оси n) траекторий $\tilde{r}_2(M, \lambda_i) = (x(M, \lambda_i), y(M, \lambda_i), n(M, \lambda_i))$, $M = (x, y, 0) = M(z, 0)$ справедливо неравенство $n(M, \lambda_1) > n(M, \lambda_2)$, откуда следует второе утверждение. $\square$

5. Непрерывность отображения последования $F(M(\lambda), \lambda)$

Введем точку

$$A^*(\varepsilon) = (\lambda^* \varepsilon, \varepsilon, 0)$$

и промежутков $(0, A^*(\varepsilon)) \subset p(\lambda^*)$.

Для краткости для точки $A^*(\varepsilon)$ будем использовать обозначение A^* , что не противоречит тому, что оно использовано выше при введении полярной системы координат, поскольку точка $A^*(\varepsilon)$ — это частный случай точки A^* . Итак, $A^* \doteq A^*(\varepsilon)$.

Пусть точка

$$M^* \in (0, A^*). \quad (19)$$

Овал $\sigma(M^*)$ содержит внутри себя овал $\sigma(A^*)$ и, следовательно, пересекает прямую $l_\varepsilon : y = \varepsilon$ в двух точках, которые обозначим через $M_1^*(\varepsilon), M_2^*(\varepsilon)$:

$$\{M_1^*, M_2^*\} = \sigma(M^*) \cap l_\varepsilon,$$

где $M_1^* < M_2^*$, то есть $x(M_1^*) < x(M_2^*)$. Пусть при $\lambda = \lambda(M_2^*)$

$$M_2^* \in p(\lambda(M_2^*)).$$

Обозначим через A_ε точку пересечения луча $p(\lambda_\varepsilon)$ (λ_ε определено в (13)) и прямой $l_\varepsilon : y = \varepsilon$

$$A_\varepsilon = p(\lambda_\varepsilon) \cap l_\varepsilon.$$

Пусть точка $M_\varepsilon^* \in p(\lambda^*)$ такова, что

$$M_\varepsilon^* = p(\lambda^*) \cap \sigma(A_\varepsilon).$$

Точка M_ε^* может принадлежать промежутку $(0, A^*)$ при некоторых условиях, которые будут сформулированы в нижеследующей лемме.

Введем на прямой l_ε естественный порядок точек $A, B \in l_\varepsilon$: $A < B$ равносильно тому, что $x(A) < x(B)$.

Пусть точка $A_2^* = \sigma(A^*) \cap l_\varepsilon$. Очевидно, $A^* < A_2^*$. Пусть при $\lambda = \lambda_2$

$$A_2^* \in p(\lambda_2).$$

Очевидно, луч $p(\lambda) : x = \lambda y$ имеет с овалом σ не более двух общих точек. Пусть λ таково, что $\sigma \cap p(\lambda) = \{M_1(\lambda, \sigma), M_2(\lambda, \sigma)\}$, где $M_1(\lambda, \sigma) \leq M_2(\lambda, \sigma)$. Введем краткое обозначение для точки $M(\lambda, \sigma)$ такой, что $x(M_1(\lambda, \sigma(M^*))) \leq \varepsilon$, которое будем использовать ниже

$$M(\lambda) \doteq M_1(\lambda, \sigma(M^*)), \quad (20)$$

где $x(M(\lambda)) \leq \varepsilon$.

Введем для краткости обозначение

$$H(\lambda) \doteq F(M(\lambda), \lambda).$$

Лемма 7. Пусть выполнено условие (14).

Если

$$A_\varepsilon \leq A_2^*,$$

то функция $H(\lambda)$ непрерывна при всех $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_\varepsilon)$.

Если

$$A_\varepsilon > A_2^*,$$

то возможны два случая.

1) Пусть $M^* \in (0, M_\varepsilon^*]$. Тогда функция $H(\lambda)$ непрерывна при всех $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_\varepsilon]$.

2) Пусть $M^* \in (M_\varepsilon^*, A^*)$. Введем точку $N^* = \sigma(M^*) \cap l_\varepsilon$, где $N^* > A^*$, и пусть при $\lambda = \lambda(N^*)$ точка $N^* \in p(\lambda(N^*))$. Тогда функция $H(\lambda)$ непрерывна при всех $\lambda \in [\lambda^*, \lambda(N^*))$.

При этом в точках, являющихся границами интервалов изменения λ , имеет место непрерывность справа или слева для левой и правой границ соответственно.

Доказательство. Обе части леммы доказываются одинаково. Докажем первую часть. Пусть $\hat{\lambda}, \lambda \in [\lambda^*, \lambda_\varepsilon)$ и $\lambda > \hat{\lambda}$. Тогда $M(\lambda) > M(\hat{\lambda})$.

Из леммы 6 следует, что

$$H(\hat{\lambda}) = F(M(\hat{\lambda}), \hat{\lambda}) > F(M(\hat{\lambda}), \lambda) > F(M(\lambda), \lambda) = H(\lambda).$$

Докажем непрерывность в точке $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_\varepsilon)$ справа, то есть докажем, что

$$H(\lambda) \rightarrow H(\hat{\lambda}) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \hat{\lambda} + 0. \quad (21)$$

Пусть (21) не выполняется. Тогда в силу монотонности (по φ) и ограниченности $H(\lambda)$ существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow \hat{\lambda} + 0} H(\lambda) \doteq \hat{H}$, где

$$H(\hat{\lambda}) > \hat{H} > H(\lambda). \quad (22)$$

При достаточно малом значении $\lambda - \hat{\lambda} > 0$ имеем

$$M(\hat{\lambda}) < M(\lambda) < F^{-1}(\hat{H}, \hat{\lambda}), \quad (23)$$

где F^{-1} — обратное отображение. Из (22), учитывая изменение порядка образов точек $M(\lambda)$ и $F^{-1}(\hat{H}, \hat{\lambda})$, получаем, что траектории системы (2) с этими начальными точками пересекутся в некоторой точке $M = (x, y, n)$ такой, что $n(\lambda) > n(\hat{\lambda})$ в точке M , где производные $\dot{n}$ вычисляются при соответствующих значениях λ . Тогда из третьего уравнения системы (2) получаем, что $x - \lambda y > x - \hat{\lambda} y$ или $\lambda < \hat{\lambda}$. Полученное противоречие с тем, что $\lambda > \hat{\lambda}$, доказывает непрерывность справа. Непрерывность слева доказывается аналогично. $\square$

Введем обозначение $\widehat{MN}$ для дуги овала σ с концами $M, N \in \sigma$, где $M < N$ в смысле введенного выше порядка точек овала.

Пусть $M^* \in (0, A^*)$ и точка $M_{\min} = M_{\min}(M^*) = \sigma(M^*) \cap l(\lambda^*)$ имеет наименьшую ординату среди всех общих точек овала $\sigma(M^*)$ и линии $l(\lambda^*)$. Существование точки $M_{\min}$ следует из того, что кривая $\sigma(M^*)$ замкнута и точка ее пересечения с прямой $y = \varepsilon$ лежит под кривой $l(\lambda^*)$ (см. рис. 4).

Лемма 8. Пусть выполнено условие (14).

Тогда для любой точки $M^* \in (0, A^*)$ существует $\lambda(M^*)$ такое, что при любом $\lambda \in [\lambda^*, \lambda(M^*)]$

$$H(\lambda) \in K_1(\lambda).$$

Доказательство. Доказательство очевидным образом следует из существования точки $M_{\min}$, введенной перед формулировкой настоящей леммы, и из лемм 7, 4. $\square$

В лемме 8 получено множество точек, в которые приходит популяция хищника и для которых в дальнейшем имеет место миграция и уход из участка. Если при этом приход в участок следовал после предыдущего ухода из него, то имеет место полная вторичная миграция $P_2 P_{21} P_- P_1 P_+ P_2 P_{21} P_- P_1 -$. Отметим, что лемма 8 носит глобальный, а не локальный характер. Так, например, в случае $M^* = M_\varepsilon^*$ существует точка $R^* \in \widehat{M_\varepsilon^* A_\varepsilon}$ и соответствующее $\lambda(R) : R \in p(\lambda(R))$ такие, что прообраз любой точки дуги $\widehat{M_{\min} M_\varepsilon^*}$ при отображении $H(\lambda)$, где $\lambda \in [\lambda^*, \lambda(R)]$, принадлежит дуге $\widehat{M_\varepsilon^* R}$.

На основании этого результата в следующем разделе получим условия периодической полной вторичной миграции.

6. Периодические режимы и траектории

В этом разделе будет проведено исследование существования периодической последовательности режимов вида $\{(P_1 P_2 P_{21})\}$, где опущены режимы P_- , P_+ как не влияющие на периодичность. Такой последовательности соответствует бесконечное повторение полной вторичной миграции, то есть ухода–возврата–ухода–... популяции хищника. Для экологии это означает бесконечное повторение реколонизации участка. Прогнозирование развития биосообщества участка

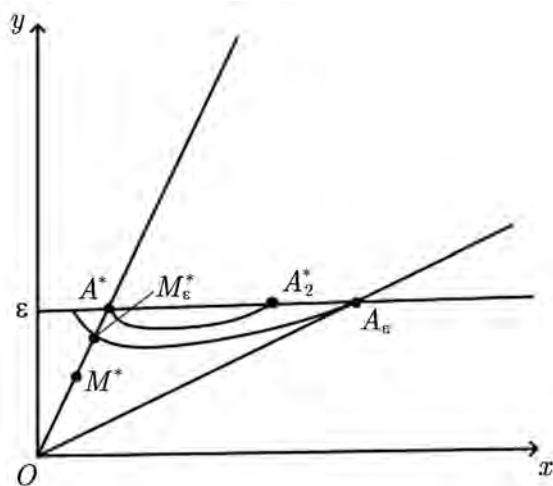


Рис. 4. Расположение точек при $A_2^* < A_\varepsilon$

Fig. 4. Arrangement of points if $A_2^* < A_\varepsilon$

является важной задачей экологии. Более того, будут получены условия существования периодических траекторий гибридной системы (2)–(7), что является непростой задачей, учитывая трехмерность и нелинейность системы с переключениями.

Периодическая траектория гибридной системы (2)–(7), соответствующая полной вторичной миграции, может быть устроена очень сложно. Ниже будут даны достаточные условия существования наиболее простой периодической траектории, которая соответствует последовательному чередованию всех режимов, а именно периодической последовательности вида

$$\{(P_1 P_+ P_2 P_{21} P_-)_i\}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

При этом будет рассмотрен случай, когда фазовая точка возвращается в режим P_2 на интервал $(0, A^*)$. Существование периодических траекторий при возвращении на луч $\delta(\varepsilon, \lambda)$ (см. 15) требует дополнительного исследования, которое будет проведено в дальнейшем.

Определение 4. Будем говорить, что режим P_2 реализуется на цилиндрической поверхности $C(\sigma)$, если траектория (или ее отрезок) системы (2) принадлежит $C(\sigma)$.

Пусть сохраняются обозначения предыдущего раздела

Теорема 1. Пусть выполнено условие (14).

Пусть точка $M^* \in (0, A^*)$, а $\lambda(M^*)$ определено в формулировке леммы 8.

Пусть $\lambda \in [\lambda^*, \lambda(M^*)]$, то есть $x_M = x(M(\lambda)) \in [x(M^*), x(M(\lambda(M^*)))]$.

Пусть $x_0 > 0$, $n_0 < 0$ и выполнены следующие условия

$$x_0 > x_M > \frac{a}{c} \quad (25)$$

или

$$\begin{cases} x_0 < x_M < \frac{a}{c}, \\ x_0 - x_M > an_0, \end{cases} \quad (26)$$

где $c = c(x_M, x_0, n_0)$ является единственным решением уравнения

$$n_0 c = \ln \left| \frac{a - cx_M}{a - cx_0} \right| \doteq \psi(c). \quad (27)$$

Тогда траектория гибридной системы (2)–(7), проходящая через точку $(x_0, n_0, 0)$, замкнута и реализуется на цилиндрической поверхности $C(\sigma(M^*))$ (рис. 5, 6).

Доказательство. Траектория системы (6), проходящая через точку $(x_0, n_0, 0)$, имеет вид

$$n = n_0 + \frac{1}{c} \ln \left| \frac{a - cx}{a - cx_0} \right| \doteq s(x, x_0, n_0), \quad y = 0, \quad (28)$$

что доказывается элементарным интегрированием системы (6). Подставив в (28) $n = 0$, $x = x_M$, получим уравнение (27): $n_0 c = \psi(c)$.

Очевидно, траектория $n = s(x, x_0, n_0)$ из заключения леммы может существовать лишь в двух случаях: $x_0 > x_M > \frac{a}{c}$ или $x_0 < x_M < \frac{a}{c}$.

Проведя на основе элементарных методов математического анализа исследование поведения функции $\psi(c)$, получаем следующие выводы о количестве и расположении решений уравнения (27).

Пусть $x_0 < x_M$ (рис. 7, а). Тогда возможно одно из двух.

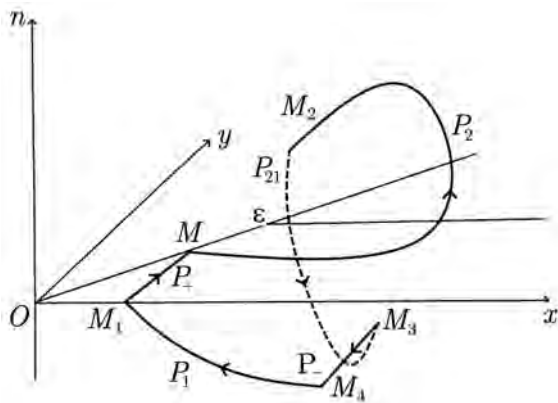


Рис. 5. Периодическая траектория

Fig. 5. Periodic trajectory

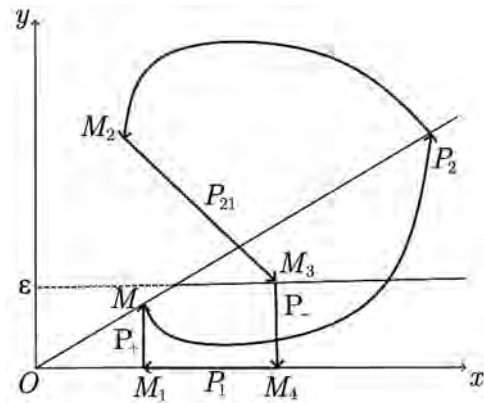


Рис. 6. Периодическая траектория (проекция на π)

Fig. 6. Periodic trajectory (projection onto π)

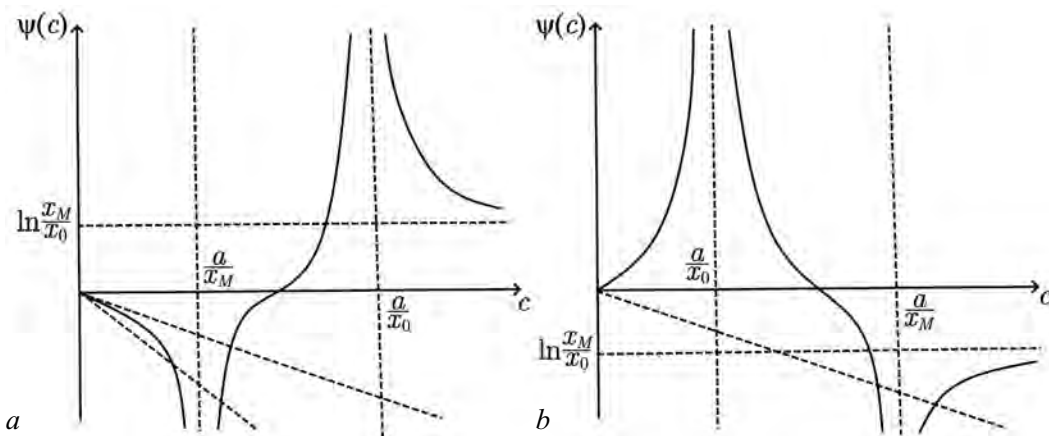


Рис. 7. Поведение $\psi(c)$: а – при $x_0 < x_M$; б – при $x_0 > x_M$

Fig. 7. Behaviour of $\psi(c)$: а – if $x_0 < x_M$; б – if $x_0 > x_M$

а) Существует единственное решение $c < \frac{a}{x_M}$ при условии $\psi'(+0) > n_0$, равносильном неравенству $x_0 - x_M > an_0$. Последнее условие следует, в частности, из того, что $\psi''(c) < 0$ в случае $x_0 < x_M$. Тогда $x_0 < x_M < \frac{a}{c}$ и нетрудно видеть, что траектория $n = s(x, x_0, n_0)$ существует.

б) Существует единственное решение $\frac{a}{x_M} < c < \frac{a}{x_0}$. При этом $x_M > \frac{a}{c}$ и $\frac{a}{x_M}x_0 < \frac{a}{c}$. Тогда требуемая траектория не существует.

Пусть $x_0 > x_M$ (рис. 7, б). Также имеется две возможности.

а) Существует единственное решение $\frac{a}{x_0} < c < \frac{a}{x_M}$. При этом $x_0 > \frac{a}{c}$ и $x_M < \frac{a}{c}$, то есть траектория $n = s(x, x_0, n_0)$ не существует.

б) Существует единственное решение $c > \frac{a}{x_M}$, откуда получаем $x_0 > x_M > \frac{a}{c}$, и траектория $n = s(x, x_0, n_0)$ существует. $\square$

Покажем, как устроена периодическая траектория. Предположим, что в режиме P_1 (система (6)) фазовая точка попадает в точку $M_1 = (x_M, 0, 0)$, а затем – в точку $M = (x_M, y_M, 0)$ вдоль отрезка, определяемого режимом P_+ (система (7)). Происходит переключение на режим P_2 (система (2)).

Пусть M — точка пересечения прямой $x = x_M$ с овалом $\sigma(M^*)$, имеющая меньшую ординату y , то есть $y < \frac{a}{b}$, и при $\lambda = \lambda_M$ луч $p(\lambda_M)$ проходит через точку M . В силу условия $x_M \in [x(M^*), x(M(\lambda_m))]$ теоремы и леммы 8, получаем, что $F(M(\lambda_M), \lambda_M) \doteq M_2 \in K_1$.

Далее, в режиме P_2 (система (2)) фазовая точка попадает на поверхность $y = \varepsilon^*(x)$ в точку M_3 , из которой в режиме P_- (система (5)) переходит в точку $M_4 = (x_0, 0, n_0)$, где $n_0 < 0$.

Далее, если выполняются условия 1, то при соответствующем значении c , определенном в этой же теореме, получаем замкнутую траекторию гибридной системы (2)–(7), которой соответствует периодическая последовательность режимов $\{(P_1 P_+ P_2 P_{21} P_-)\}$.

6.1. Численный эксперимент. Целью проведения численного эксперимента является поиск периодической траектории гибридной системы (случай вторичной миграции).

Зададим следующие значения параметров $a = 1$, $b = 0.5$, $m = 2$, $k = 0.7$, $c = 0.5$, $\lambda = 3.5$, $\varepsilon = 1.5$. Имеем $\frac{m}{ak} = 2.86$. Поскольку мы рассматриваем случай вторичной миграции, выберем в качестве начальной точки $M_0 = (x_0, y_0, n_0) = (3.5, 1, 0) \in (OA)$, для которой начальным режимом будет P_2 до следующего попадания на плоскость π . В результате численного решения системы получим конечную точку $M_1 = (3.71, 3.70, 0)$ режима P_2 рис. 8, а.

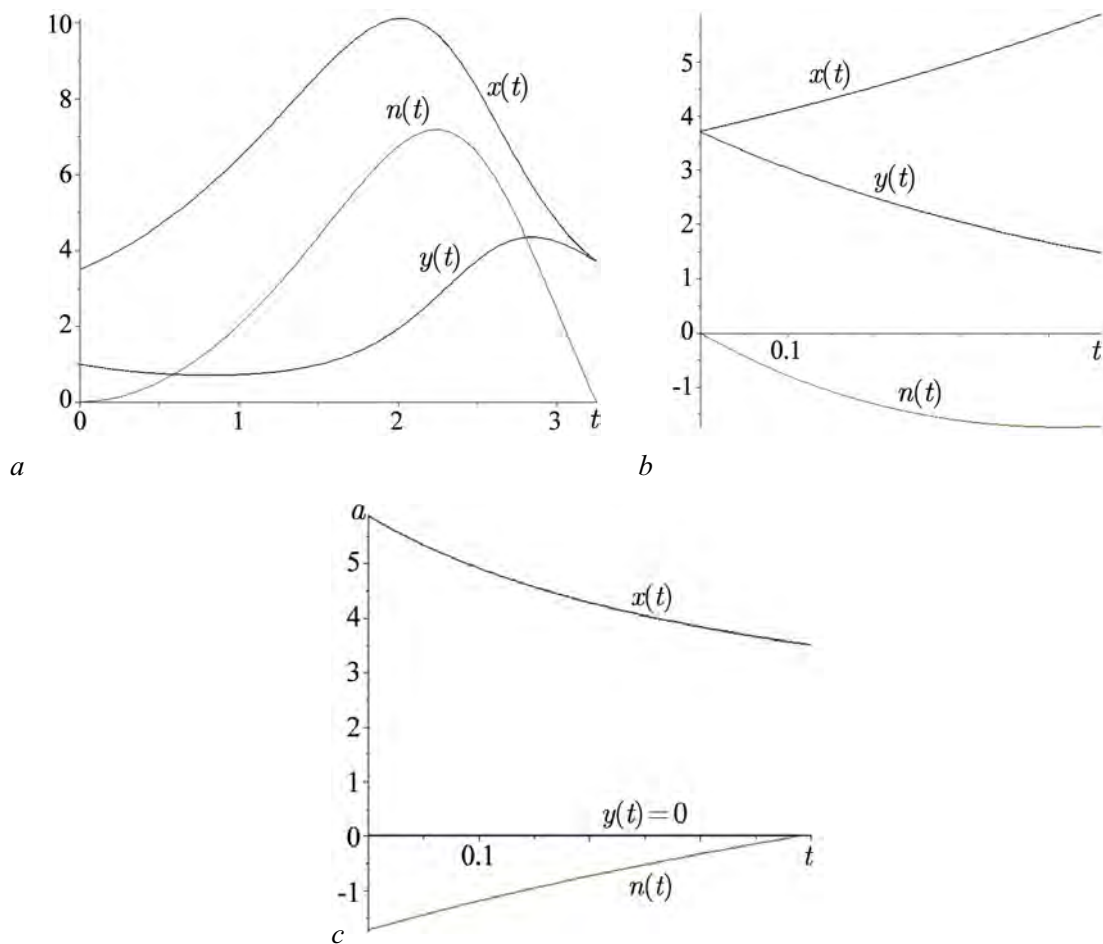


Рис. 8. Численный эксперимент: а — численное решение системы P_2 ; б — численное решение системы P_{21} ; в — численное решение системы P_1

Fig. 8. Numerical simulation: а — numerical solution of the system P_2 ; б — numerical solution of the system P_{21} ; в — numerical solution of the system P_1

Далее происходит переключение к системе P_{21} , действующей до момента достижения либо плоскости π , либо поверхности $y = \varepsilon^*(x)$. Отметим, что в данном эксперименте нас интересует второй случай. В результате численного решения системы получим конечную точку $M_2 = (5.88, 1.48, -1.73)$ режима P_2 рис. 8, b.

В точке M_2 происходит переключение к системе P_- , которую нет смысла решать в силу ее тривиальности. В результате действия P_- получим точку $M_3 = (5.88, 0, -1.73)$, в которой система переключится на режим P_1 , действующий до момента t^* достижения $n(t^*) = 0$. В результате численного решения системы для $c = 0.52$ получим конечную точку $M_4 = (3.50, 0, 0)$ режима P_1 рис. 8, c. Далее произойдет переключение к системе P_+ , в результате действия которой, очевидно, получим точку $(3.50, 1, 0)$, совпадающую с начальной M_0 . Итак, получили замкнутую траекторию для начальной точки M_0 . Результат численного моделирования подтверждает сформулированный ранее в [теореме](#) вывод о существовании периодической траектории в случае вторичной миграции.

7. Бифуркационное значение $\lambda = \frac{m}{ak}$

1) Пусть $\lambda = \frac{m}{ak}$.

Тогда на основании леммы 2 нетрудно получить следующий вывод.

Если при выходе из режима P_1 в режим P_2 фазовая точка попадает в точку $M \in (0, A^*]$, то далее в режиме P_2 точка вернется в положение M . Затем последуют режимы P_- и P_+ . В результате фазовая точка снова попадает в M , и движение повторяется. Таким образом, имеем замкнутую траекторию, соответствующую периодической последовательности режимов $\{(P_-P_2P_+)\}$. Поскольку ε достаточно мало, то приближенно можно считать, что имеем периодическую траекторию в режиме P_2 , а именно, овал, образованный пересечением соответствующей интегральной плоскости и цилиндрической поверхности. При этом устанавливается режим (P_2) .

Если при выходе из режима P_1 в режим P_2 фазовая точка попадает в точку $M \in \delta(\varepsilon, \lambda)$, где луч $\delta(\varepsilon, \lambda)$ определен в (15), то получаем периодическую последовательность режимов $\{(P_-P_2P_{21}P_+)\}$. Как и в предыдущем случае, можно приближенно считать, что имеем периодическую траекторию с той разницей, что теперь она состоит из двух отрезков траекторий систем (2), (4). Это значит, что имеем периодическую последовательность режимов $\{(P_2P_{21})\}$, где опущены символы P_- , P_+ , никак не влияющие на периодичность.

2) Пусть $\lambda < \frac{m}{ak}$. Введем точку $B(\lambda) = (\lambda\varepsilon, \varepsilon)$.

Лемма 9. Пусть $\lambda \in (0, \lambda^*)$ и $M \in (0, B(\lambda))$.

Тогда отображение Пуанкаре $F(M, \lambda)$ не определено.

Доказательство. Доказательство следует из того, что $\Delta(M, \lambda) > 0$ (см. (11)). □

Из данной леммы следует, что после попадания фазовой точки из режима P_- на промежуток $(0, B(\lambda))$ устанавливается без дальнейшего изменения режим P_2 .

Таким образом, можно сделать вывод, что значение параметра $\lambda = \lambda^* = \frac{m}{ak}$ является бифуркационным в смысле символьной динамики режимов P_ξ . При этом данный вывод относится только к тому случаю, когда фазовая точка после режима P_- попадает на интервал $(0, B(\lambda))$. Тем самым выделяется область фазового пространства, для которой можно говорить о бифуркационном значении λ .

Замечание 3. В представленном исследовании рассматривался только случай попадания фазовой точки из режима P_- на интервал $(0, B(\varepsilon))$, где $B(\varepsilon) = (\lambda\varepsilon, \varepsilon)$. Этот интервал принадлежит линии $y = \varepsilon^*(x)$, введенной в (3). При этом случай $\lambda < \frac{m}{ak}$ не добавил исследованию сложности. Случай попадания на другую часть этой линии, а именно на луч $\delta(\varepsilon, \lambda)$ (см. (15)), требует особого исследования. При этом случай $\lambda < \frac{m}{ak}$ значительно усложняет исследование. Изучение этого варианта задачи проводится.

Заключение

Для моделирования динамики биосообщества с переменной структурой взаимодействия видов предложена модель, являющаяся гибридной трехмерной динамической системой. При этом происходят переключения между пятью подсистемами, каждой из которых соответствует режим функционирования биосообщества участка: взаимодействие видов, миграция хищника и динамика жертвы в отсутствие хищника. Исследована символическая динамика, соответствующая изменению режимов участка. Получены результаты, дающие условия существования периодических траекторий в гибридной системе и периодических последовательностей режимов. Определено бифуркационное значение параметра, характеризующего потребности хищника в пищевых ресурсах. Приведены численные примеры. Исследование требует продолжения для рассмотрения не представленных в нем случаев поведения траекторий в зависимости от областей поверхностей переключения, на которые они попадают.

Список литературы

1. Metapopulation Biology: Ecology, Genetics, and Evolution / ed. by I. A. Hanski, M. E. Gilpin. New York: Academic Press, 1997. 512 p. DOI: 10.1016/B978-0-12-323445-2.X5000-7.
2. Dang Q. A., Hoang M. T. Complete global stability of a metapopulation model and its dynamically consistent discrete models // Qual. Theory Dyn. Syst. 2019. Vol. 18. P. 461–475. DOI: 10.1007/s12346-018-0295-y.
3. Crawford B., Kribs-Zaleta C. A metapopulation model for sylvatic T. cruzi transmission with vector migration // Mathematical Biosciences and Engineering. 2014. Vol. 11, iss. 3. P. 471–509. DOI: 10.3934/mbe.2014.11.471.
4. Arino J., Ducrot A., Zongo P. A metapopulation model for malaria with transmission-blocking partial immunity in hosts // J. Mathematical Biology. 2012. Vol. 64. P. 423–448. DOI: 10.1007/s00285-011-0418-4.
5. Feng Z., Swihart R., Yi Y., Zhu H. Coexistence in a metapopulation model with explicit local dynamics // Mathematical Biosciences and Engineering. 2004. Vol. 1, iss. 1. P. 131–145. DOI: 10.3934/mbe.2004.1.131.
6. Xu D., Feng Z., Allen L. J. S., Swihart R. K. A spatially structured metapopulation model with patch dynamics // Journal of Theoretical Biology. 2006. Vol. 239, iss. 4. P. 469–481. DOI: 10.1016/j.jtbi.2005.08.012.
7. Diekmann O., Gyllenberg M., Metz J. A. J., Nakaoka S., de Roos A. M. Daphnia revisited: local stability and bifurcation theory for physiologically structured population models explained by way of an example // J. Mathematical Biology. 2010. Vol. 61. P. 277–318. DOI: 10.1007/s00285-009-0299-y.
8. Matveev A. S., Savkin A. V. Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems. Boston: Birkhauser, 2000. 348 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1364-2.
9. Liberzon D. Switching in Systems and Control. Boston: Birkhauser, 2003. 233 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0017-8.
10. Кириллов А. Н. Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 3. С. 23–28.
11. Bolzoni L., Della Marca R., Groppi M., Gragnani A. Dynamics of a metapopulation epidemic model with localized culling // Discrete and Continuous Dynamical Systems - B. 2020. Vol. 25, iss. 6. P. 2307–2330. DOI: 10.3934/dcdsb.2020036.
12. Кириллов А. Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 26, № 2. С. 318–336.

13. Gökçe A. The influence of past in a population system involving intraspecific competition and Allee effect // *The European Physical Journal Plus*. 2022. Vol. 137, no. 200. P. 1–11. DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02425-z.
14. Chen X., Huang L. A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 428, iss. 2. P. 817–837. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045.
15. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
16. Кириллов А. Н., Иванова А. С. Периодический и квазипериодический процессы управления в задаче сохранения видового состава биосообщества // *Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии*. 2015. № 10. С. 99–106. DOI: 10.17076/mat148.

References

1. Hanski IA, Gilpin ME (eds.) *Metapopulation Biology: Ecology, Genetics, and Evolution*. New York: Academic Press, 1997. 512 p. DOI: 10.1016/B978-0-12-323445-2.X5000-7.
2. Dang QA, Hoang MT. Complete global stability of a metapopulation model and its dynamically consistent discrete models. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2019;18:461–475. DOI: 10.1007/s12346-018-0295-y.
3. Crawford B, Kribs-Zaleta C. A metapopulation model for sylvatic *T. cruzi* transmission with vector migration. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2014;11(3):471–509. DOI: 10.3934/mbe.2014.11.471.
4. Arino J, Ducrot A, Zongo P. A metapopulation model for malaria with transmission-blocking partial immunity in hosts *J. Mathematical Biology*. 2012;64:423–448. DOI: 10.1007/s00285-011-0418-4.
5. Feng Z, Swihart R, Yi Y, Zhu H. Coexistence in a metapopulation model with explicit local dynamics. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2004;1(1):131–145. DOI: 10.3934/mbe.2004.1.131.
6. Xu D, Feng Z, Allen LJS, Swihart RK. A spatially structured metapopulation model with patch dynamics. *Journal of Theoretical Biology*. 2006;239(4):469–481. DOI: 10.1016/j.jtbi.2005.08.012.
7. Diekmann O, Gyllenberg M, Metz JAJ, Nakaoka S, de Roos AM. *Daphnia revisited: local stability and bifurcation theory for physiologically structured population models explained by way of an example* *J. Mathematical Biology*. 2010;61:277–318. DOI: 10.1007/s00285-009-0299-y.
8. Matveev AS., Savkin AV. *Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems*. Boston: Birkhauser, 2000. 348 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1364-2.
9. Liberzon D. *Switching in systems and control*. Boston: Birkhauser, 2003. 233 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0017-8.
10. Kirillov AN. Dynamical systems with variable structure and dimension. *Journal of Instrument Engineering*. 2009;52(3):23–28. (in Russian).
11. Bolzoni L, Della Marca R, Groppi M, Gagnani A. Dynamics of a metapopulation epidemic model with localized culling. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2020;25(6):2307–2330. DOI: 10.3934/dcdsb.2020036.
12. Kirillov AN. Ecological systems with variable dimension. *Surveys on Applied and Industrial Mathematics*. 1999;26(2):318–336. (in Russian).
13. Gökçe A. The influence of past in a population system involving intraspecific competition and Allee effect. *The European Physical Journal Plus*. 2022;137(200):1–11. DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02425-z.

14. Chen X, Huang L. A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015;428(2):817–837. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045.
15. Filippov AF. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. M.: Nauka; 1985. 225 p. (in Russian).
16. Kirillov AN, Ivanova AS Periodic and quasiperiodic control processes in the biocommunity species composition preserving problem. *Transactions of Karelian Research Centre of RAS. Mathematical Modeling and Information Technologies*. 2015;10:99–106 (in Russian). DOI: 10.17076/mat148.



Кириллов Александр Николаевич — родился в Ленинграде (1954). Окончил факультет ПМ-ПУ Ленинградского государственного университета. Доктор физико-математических наук (2010, ПетрГУ). С 2010 года работает в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра в должности ведущего научного сотрудника. Научные интересы — динамические системы, математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Опубликовал свыше 120 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
 ФИЦ Карельский научный центр РАН
 E-mail: krllv1812@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-3356-1846
 AuthorID (eLibrary.Ru): 617068



Сазонов Александр Михайлович — родился в Петрозаводске (1993). Окончил Институт математики и информационных технологий Петрозаводского государственного университета по направлению «Математика» (2017). Кандидат физико-математических наук (2021, ПетрГУ). С 2021 года работает в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы — динамические системы, математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Опубликовал более 12 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
 ФИЦ Карельский научный центр РАН
 E-mail: azon-tb@mail.ru
 ORCID: 0009-0006-4385-5422
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1123344