

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 531.383

DOI: 10.18500/0869-6632-003161  
EDN: NZBNWT

## **Нелинейная динамика цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа при разном числе электростатических датчиков управления**

*A. A. Маслов, Д. А. Маслов<sup>✉</sup>*

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия  
E-mail: [Maslov954@yandex.ru](mailto:Maslov954@yandex.ru), [MaslovDmA@mpei.ru](mailto:MaslovDmA@mpei.ru)

*Поступила в редакцию 18.10.2024, принята к публикации 15.01.2025,  
опубликована онлайн 29.01.2025, опубликована 31.07.2025*

**Аннотация.** Цель данного исследования — выявить различие в нелинейностях математических моделей динамики и нелинейных эффектах динамики цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа при использовании разного количества электростатических датчиков управления. **Методы.** В данной работе рассматривается нелинейность колебаний резонатора как следствие действия электростатических сил датчиков управления при учёте конечного отношения малого прогиба резонатора к малому зазору электростатического датчика. Для построения приближённых математических моделей используется теорема Тихонова о предельном переходе, а также учитывается малый параметр, сингулярно входящий в систему дифференциальных уравнений. Уравнения динамики резонатора осредняются по методу Крылова–Боголюбова. **Результаты.** Определено отличие нелинейных слагаемых в уравнениях динамики резонатора при использовании восьми и шестнадцати датчиков управления. Установлено, что нелинейные эффекты проявляются сильнее в случае гироскопа с шестнадцатью датчиками управления: больше угловая скорость дрейфа и смещение резонансного пика амплитудно-частотной характеристики, чем в случае с восьмью датчиками управления. Показано, что в случае схемы с восьмью датчиками управления угловая скорость дрейфа имеет переменное значение, а также содержит малую некомпенсируемую составляющую. **Заключение.** Построены математические модели динамики цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, которые учитывают нелинейности, вызванные возбуждением колебаний восьмью и шестнадцатью электростатическими датчиками управления. Показано отличие нелинейных эффектов динамики резонатора волнового твердотельного гироскопа при использовании разного числа датчиков управления: угловой скорости дрейфа и смещения резонансного пика амплитудно-частотной характеристики. Сделаны выводы о применении схемы с восьмью датчиками управления.

**Ключевые слова:** волновой твердотельный гироскоп, математическая модель, электростатические датчики, цилиндрический резонатор, нелинейные колебания, угловая скорость дрейфа.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00546).

**Для цитирования:** Маслов А. А., Маслов Д. А. Нелинейная динамика цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа при разном числе электростатических датчиков управления // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 466–484. DOI: 10.18500/0869-6632-003161. EDN: NZBNWT

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Nonlinear dynamics for cylindrical resonator of wave solid-state gyroscope with different number of electrostatic control sensors

A. A. Maslov, D. A. Maslov<sup>✉</sup>

National Research University “MPEI”, Moscow, Russia

E-mail: Maslov954@yandex.ru, <sup>✉</sup>MaslovDmA@mpei.ru

Received 18.10.2024, accepted 15.01.2025, available online 29.01.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The purpose of this work is to determine differences in the nonlinearities of mathematical models of dynamics and nonlinear effects of dynamics for the cylindrical resonator of wave solid-state gyroscope using a different number of electrostatic control sensors. *Methods.* In this article resonator oscillations nonlinearity caused by finite ratio of the small deflection of the resonator to the small gap of the electrostatic sensor is considered. To construct approximate mathematical models Tikhonov’s theorem on the passage to the limit is used and a small parameter singularly included in the system of differential equations is also taken into account. The equations of resonator dynamics are averaged by using the Krylov–Bogolyubov method. *Results.* The difference between the nonlinear terms in the equations of resonator dynamics with eight and sixteen control sensors is determined. It is found that nonlinear effects are more pronounced in the case of the gyroscope with sixteen control sensors. The angular drift velocity and the displacement of the resonant peak of the amplitude-frequency response are greater than in the case of eight control sensors. It is shown that in the case of eight control sensors, the angular drift velocity has a variable value and also contains a small uncompensated component. *Conclusion.* Mathematical models of the dynamics for the cylindrical resonator of wave solid-state gyroscope taking into account the nonlinearities caused by the excitation of oscillations by eight and sixteen electrostatic control sensors are deduced. The difference between the nonlinear effects of the resonator dynamics for wave solid-state gyroscope with different number of control sensors is shown. The angular drift velocity and the displacement of the resonant peak of the amplitude-frequency response are obtained. Conclusions about the applicability of gyroscope with eight control sensors are discussed.

**Keywords:** wave solid-state gyroscope, mathematical model, electrostatic sensors, cylindrical resonator, nonlinear oscillations, angular drift velocity.

**Acknowledgements.** This work was supported by the grant of Russian Science Foundation (project No. 23-21-00546).

**For citation:** Maslov AA, Maslov DA. Nonlinear dynamics for cylindrical resonator of wave solid-state gyroscope with different number of electrostatic control sensors. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4):466–484. DOI: 10.18500/0869-6632-003161

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

В настоящее время актуальной задачей является повышение точности навигационных приборов, включая волновые твердотельные гироскопы (ВТГ), с помощью построения более точных математических моделей динамики их чувствительных элементов [1–4]. Учёт нелинейности колебаний в математических моделях динамики резонаторов ВТГ позволяет не только повысить точность прибора с помощью методов компенсации, но и исследовать ряд нелинейных эффектов, которые имеют место в динамике ВТГ и не могут быть исследованы в рамках линейных математических моделей.

Основы теории ВТГ заложены в работах Д. М. Климова и В. Ф. Журавлёва [5–10]. В [6, 9] показано, что погрешность, вызванная нелинейными свойствами колебательной системы, присуща всем ВТГ, а исследование динамики может проводиться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. При этом указано, что для исследования нелинейности требуется учёт специфики конкретной колебательной системы. В работах [11, 12] отмечено, что при экспериментальных исследованиях динамики вибрационных гироскопов с электростатическими датчиками управления были обнаружены явления, характерные для нелинейных

систем, например, срыв колебаний резонатора. Однако исследованию специфики нелинейности, вызванной электростатическими датчиками управления, уделяется мало внимания.

В данной статье исследуются нелинейные колебания, вызванные электростатическими датчиками управления, выводятся и сравниваются нелинейные математические модели с восьмью и шестнадцатью датчиками управления, обобщаются результаты предшествующих работ по исследованию нелинейных эффектов динамики ВТГ [13–15], в которых рассматривались ВТГ только с шестнадцатью датчиками управления.

В статье рассматривается ВТГ с цилиндрическим резонатором. Данный выбор объясняется тем, что в настоящее время интенсивно проводятся работы по улучшению качества изготовления и балансировки цилиндрических резонаторов из плавленого кварца [16–20], которые отличаются от полусферических простотой изготовления и достаточно высокой добротностью. Результаты, полученные для ВТГ с цилиндрическим резонатором, могут быть обобщены на ВТГ с другими типами резонаторов: кольцевым и полусферическим.

## 1. Математические модели с учётом нелинейности колебаний, вызванной датчиками управления

**1.1. Математические модели при произвольном числе датчиков управления.** Будем рассматривать волновой твердотельный гироскоп с цилиндрическим резонатором, один край которого свободен, а другой жёстко прикреплен к основанию прибора. Резонатор изготавливается из кварцевого стекла с нанесением на его поверхность металлического покрытия. Колебания цилиндрического резонатора возбуждаются системой электростатических датчиков управления, которые представляют собой конденсаторы, образованные металлизированной поверхностью резонатора и электродами управления, расположенными вблизи свободной кромки резонатора. Математическая модель динамики цилиндрического резонатора для данного типа волнового твердотельного гироскопа подробно выводится в работе [14]. В общем виде для произвольного числа датчиков управления математическая модель имеет вид

$$\ddot{f} + \omega^2 f = -\gamma \dot{f} + 2v \dot{g} + \frac{1}{2md^2 C_0} \sum_{j=1}^n q_j^2 \cos 2\theta_j, \quad (1)$$

$$\ddot{g} + \omega^2 g = -\gamma \dot{g} - 2v \dot{f} + \frac{1}{2md^2 C_0} \sum_{j=1}^n q_j^2 \sin 2\theta_j,$$

$$R_e C_0 \dot{q}_j + q_j (1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j) = U_j u_0 C_0, \quad j = 1 \dots n. \quad (2)$$

где, в соответствии с [14], обозначены:  $f(t)$ ,  $g(t)$  — обобщённые координаты второй формы колебаний цилиндрического резонатора, нормализованные зазором  $d$  между электродом управления и недеформированным резонатором;  $\omega$  — характеристическая частота собственных колебаний;  $\gamma$  характеризует демпфирование колебаний;  $v$  характеризует угловую скорость вращения гироскопа;  $m$  — приведённая масса цилиндрического резонатора;  $C_0$  — ёмкость конденсаторов при недеформированном резонаторе;  $q_j(t)$  — заряд  $j$ -го конденсатора, образованного резонатором и  $j$ -м электродом управления;  $\theta_j = 2\pi(j-1)/n$  — угол расположения  $j$ -го электрода,  $j = 1 \dots n$ ,  $n$  — число электродов управления;  $R_e$  — электрическое сопротивление цепи управления колебаниями;  $U_j(t)$  — напряжение на  $j$ -м электроде,  $j = 1 \dots n$ , которое нормализовано величиной постоянного опорного напряжения  $u_0$ . Точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ .

Перейдём в уравнениях (1), (2) к безразмерному времени  $\tau = \omega t$  и нормализованным величиной  $Q_0 = C_0 u_0$  зарядам  $Q_j = q_j/(C_0 u_0)$ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f + \tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} - \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} - \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n Q_j^2 \cos 2\theta_j &= 0, \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g + \tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} + \tilde{v} \frac{df}{d\tau} - \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n Q_j^2 \sin 2\theta_j &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{dQ_j}{d\tau} + Q_j (1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j) = U_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (4)$$

где  $\eta = \frac{C_0^2 u_0^2}{2md^2 \omega^2}$ ,  $\varepsilon = R_e C_0 \omega$  — безразмерные малые параметры, а также обозначены безразмерные малые величины  $\tilde{\gamma} = \gamma/\omega$ ,  $\tilde{v} = v/\omega$ . Заметим, что малый параметр  $\varepsilon = R_e C_0 \omega$  характеризует отношение активного и реактивного (емкостного) сопротивлений цепи управления колебаниями и для электростатических датчиков крайне мал, например,  $\varepsilon \approx 10^{-8}$  при  $R_e \approx 1 \text{ Ом}$ ,  $C_0 \approx 10^{-12} \text{ Ф}$ ,  $\omega \approx 10^4 \text{ с}^{-1}$ .

Присутствие малого параметра  $\varepsilon$  при производных указывает, что уравнения (4) являются сингулярно возмущёнными, а вся система уравнений (3), (4) относится к классу тихоновских систем дифференциальных уравнений. В [14] показано применение теоремы Тихонова о предельном переходе, которая гарантирует приближение решения уравнений (3) решением уравнений

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f = -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \cos 2\theta_j}{(1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j)^2}, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 g}{d\tau^2} + g = -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \frac{\eta}{8} \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \sin 2\theta_j}{(1 - f \cos 2\theta_j - g \sin 2\theta_j)^2}. \quad (6)$$

Однако можно построить уточнённое приближение к решению уравнений (1), которое учитывает малый параметр  $\varepsilon$ , характеризующий параметры электрической цепи управления. Аналогично [15] воспользуемся для переменных  $Q_j$ ,  $j = 1 \dots n$ , приближением первого порядка по  $\varepsilon$  и запишем математическую модель динамики резонатора, учитывающую параметры электрической цепи управления:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f = -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \frac{\eta}{8} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \cos 2\theta_j}{(1 - w_j)^2} - \right. \\ \left. - 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{U_j \cos 2\theta_j}{(1 - w_j)^3} \frac{dU_j}{d\tau} - 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \cos 2\theta_j}{(1 - w_j)^4} \left( \frac{df}{d\tau} \cos 2\theta_j + \frac{dg}{d\tau} \sin 2\theta_j \right) \right],\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 g}{d\tau^2} + g = -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \frac{\eta}{8} \left[ \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \sin 2\theta_j}{(1 - w_j)^2} - \right. \\ \left. - 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{U_j \sin 2\theta_j}{(1 - w_j)^3} \frac{dU_j}{d\tau} - 2\varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{U_j^2 \sin 2\theta_j}{(1 - w_j)^4} \left( \frac{df}{d\tau} \cos 2\theta_j + \frac{dg}{d\tau} \sin 2\theta_j \right) \right],\end{aligned}\quad (8)$$

где для сокращения записи обозначен прогиб резонатора  $w_j = f \cos 2\theta_j + g \sin 2\theta_j$ .

Очевидно, что (5), (6) следуют из (7), (8) при  $\varepsilon = 0$ . Представленные математические модели будем использовать для исследования нелинейности колебаний резонатора, вызванной электростатическими датчиками управления при разном количестве датчиков управления.

**1.2. Нелинейная математическая модель динамики резонатора ВТГ при использовании восемьми датчиков управления.** Рассмотрим часто встречающийся в конструкциях ВТГ случай, при котором напряжения  $U_j$  между  $j$ -м электродом датчика управления и резонатором,  $j = 1 \dots n$ , подаются на восемь,  $n = 8$ , датчиков управления, неизменно ориентированных относительно основания ВТГ,  $\theta_j = (j - 1)\pi/4$ :

$$\begin{aligned} U_1 &= U_5 = 1 + u_A = 1 - u_1 \sin \mu\tau + u_2 \cos \mu\tau, \\ U_3 &= U_7 = 1 - u_A = 1 + u_1 \sin \mu\tau - u_2 \cos \mu\tau, \\ U_2 &= U_6 = 1 + u_B = 1 - u_3 \sin \mu\tau + u_4 \cos \mu\tau, \\ U_4 &= U_8 = 1 - u_B = 1 + u_3 \sin \mu\tau - u_4 \cos \mu\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $u_1, u_2, u_3, u_4$  – нормализованные по отношению к опорному напряжению  $u_0$  амплитуды управляющих напряжений,  $|u_i| < 1$ ,  $i = 1 \dots 4$ ;  $u_A(\tau), u_B(\tau)$  – нормализованные управляющие напряжения, подаваемые соответственно на группу электродов № 1, 3, 5, 7 и на смещённую относительно них на угол  $45^\circ$  группу электродов № 2, 4, 6, 8. Введена величина  $\mu = \omega_0/\omega = = (\omega + \lambda)/\omega$ , где  $\omega_0$  – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора, близкая к  $\omega$ ,  $\lambda$  – частотная настройка,  $|\lambda| \ll \omega$ .

Сигналы управления (9) реализуют подачу разности потенциалов  $u_0(1 + u)$  и  $u_0(1 - u)$  на датчики, расположенные ортогонально, которая применяется для линеаризации силы электростатического датчика, пропорциональной квадрату напряжения на электроде:

$$u_0^2(1 + u)^2 - u_0^2(1 - u)^2 = 4u_0^2u. \quad (10)$$

Полученное выражение (10) линейно относительно нормализованного управляющего напряжения  $u$ . Таким образом реализуется широко применяемая в ВТГ «пуш–пульная» (“push–pull”) схема управления [6]. Поскольку электростатическая сила обратно пропорциональна квадрату величины зазора между электродом управления и металлизированной поверхностью резонатора, покажем, что при учёте конечного отношения прогиба резонатора к зазору электростатического датчика нарушается линеаризация “push–pull”. Несмотря на конечность отношения прогиба к зазору, величина прогиба является малой, что обосновывает одновременное использование при выводе уравнений динамики резонатора линейной теории оболочек и учёт нелинейности силового воздействия датчика управления. Силовое воздействие двух ортогонально расположенных датчиков управления пропорционально выражению, которое может быть разложено в ряд по нормализованному величиной зазора прогибу  $|w| < 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_0^2(1 + u)^2}{(1 - w)^2} - \frac{u_0^2(1 - u)^2}{(1 + w)^2} &= \\ = u_0^2(1 + u)^2 (1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \dots) - u_0^2(1 - u)^2 (1 - 2w + 3w^2 - 4w^3 + \dots) &= \\ = 4u_0^2u (1 + 3w^2 + 5w^4 + \dots) + 4u_0^2 (1 + u^2) (w + 2w^3 + 3w^5 + \dots) &= \\ = 4u_0^2 (u + w + u^2w + 3uw^2 + 2w^3 + 2u^2w^3 + \dots). \quad (11) & \end{aligned}$$

Таким образом, при учёте прогиба  $w$  схема линеаризации “push–pull” нарушается. Пренебрегая прогибом в случае его малости, получим из (11) линейное выражение относительно управляющего напряжения, соответствующее линеаризации “push–pull” (10).

Для преобразования сумм в (7), (8) будем использовать также разложения в ряд

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\tilde{w})^2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\tilde{w}^k = 1 + 2\tilde{w} + 3\tilde{w}^2 + 4\tilde{w}^3 + \dots, \\ \frac{1}{(1-\tilde{w})^3} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\tilde{w}^k = 1 + 3\tilde{w} + 6\tilde{w}^2 + 10\tilde{w}^3 + \dots, \\ \frac{1}{(1-\tilde{w})^4} &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)(k+1)\tilde{w}^k = 1 + 4\tilde{w} + 10\tilde{w}^2 + 20\tilde{w}^3 + \dots\end{aligned}\quad (12)$$

Используя в (7), (8) закон подачи напряжения (9), приближение (11), разложения в ряд (12) и пренебрегая нелинейными слагаемыми выше третьей степени, получаем при  $n = 8$  датчиках управления следующие уравнения динамики резонатора:

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \eta \left( f + 2f^3 - \varepsilon (1 + 10f^2) \frac{df}{d\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + 3f^2 - 8\varepsilon f \frac{df}{d\tau} \right) u_A - \varepsilon (1 + 6f^2) u'_A \right), \\ \frac{d^2g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \eta \left( g + 2g^3 - \varepsilon (1 + 10g^2) \frac{dg}{d\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + 3g^2 - 8\varepsilon g \frac{dg}{d\tau} \right) u_B - \varepsilon (1 + 6g^2) u'_B \right).\end{aligned}\quad (13)$$

При выводе (13) и далее пренебрегаем в силу малости слагаемыми, содержащими  $u_A^2$  и  $u_B^2$ . Такие слагаемые характеризуют параметрическое возбуждение колебаний резонатора, сопутствующее вынужденным колебаниям [14]. Устойчивость колебаний при данном сопутствующем параметрическом возбуждении исследовалась в [21].

Для исследования нелинейных эффектов динамики понадобятся осреднённые уравнения динамики резонатора ВТГ. Сначала рассмотрим (13) в случае  $\varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \eta (f + 2f^3 + (1 + 3f^2) u_A), \\ \frac{d^2g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \eta (g + 2g^3 + (1 + 3g^2) u_B).\end{aligned}\quad (14)$$

И проведём осреднение системы уравнений (14) по методу Крылова–Боголюбова [22].

С помощью замены переменных

$$x_1 = f, \quad x_2 = \frac{df}{d\tau}, \quad x_3 = g, \quad x_4 = \frac{dg}{d\tau} \quad (15)$$

сведём (14) к нормальной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -x_1 - \tilde{\gamma}x_2 + \tilde{v}x_4 + \eta (x_1 + 2x_1^3 + (1 + 3x_1^2) u_A), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= -x_3 - \tilde{\gamma}x_4 - \tilde{v}x_2 + \eta (x_3 + 2x_3^3 + (1 + 3x_3^2) u_B). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 \sin \mu \tau + q_1 \cos \mu \tau, \quad x_2 = \mu (p_1 \cos \mu \tau - q_1 \sin \mu \tau), \\ x_3 &= p_2 \sin \mu \tau + q_2 \cos \mu \tau, \quad x_4 = \mu (p_2 \cos \mu \tau - q_2 \sin \mu \tau), \end{aligned} \quad (17)$$

выводим из (16) разрешённую относительно производных систему дифференциальных уравнений, которую сокращённо записываем в векторно-матричной форме

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = F(\mathbf{z}, \tau), \quad (18)$$

где  $\mathbf{z}(\tau) = (q_1(\tau), p_1(\tau), q_2(\tau), p_2(\tau))^T$ , функция  $F(\mathbf{z}, \tau)$  периодична по  $\tau$  с периодом  $2\pi/\mu$ . Проводя осреднение (18) по явно входящему безразмерному времени  $\tau$ , придём к системе, решение которой даёт приближение к решению (18), обоснованное методом осреднения Крылова–Боголюбова [22]:

$$\frac{d\bar{\mathbf{z}}}{d\tau} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{z}}). \quad (19)$$

Далее опустим обозначение осреднённого решения и запишем (19) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-2p_1\mu - q_1\tilde{\gamma} + q_2\tilde{v} + \eta (3k_1 + (1 + k_5) u_1 + 3k_9 u_2)], \\ \frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} [2q_1\mu - p_1\tilde{\gamma} + p_2\tilde{v} + \eta (3k_2 + (1 + k_6) u_2 + 3k_9 u_1)], \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-2p_2\mu - q_2\tilde{\gamma} - q_1\tilde{v} + \eta (3k_3 + (1 + k_7) u_3 + 3k_{10} u_4)], \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} [2q_2\mu - p_2\tilde{\gamma} - p_1\tilde{v} + \eta (3k_4 + (1 + k_8) u_4 + 3k_{10} u_3)], \end{aligned} \quad (20)$$

где введены обозначения нелинейных слагаемых:

$$\begin{aligned} k_1 &= -p_1 (q_1^2 + p_1^2) / 2, \quad k_2 = q_1 (q_1^2 + p_1^2) / 2, \\ k_3 &= -p_2 (q_2^2 + p_2^2) / 2, \quad k_4 = q_2 (q_2^2 + p_2^2) / 2, \end{aligned} \quad (21)$$

а также нелинейностей при управляющих напряжениях:

$$\begin{aligned} k_5 &= 3 (3p_1^2 + q_1^2) / 4, \quad k_6 = 3 (p_1^2 + 3q_1^2) / 4, \quad k_7 = 3 (3p_2^2 + q_2^2) / 4, \\ k_8 &= 3 (p_2^2 + 3q_2^2) / 4, \quad k_9 = -q_1 p_1 / 2, \quad k_{10} = -q_2 p_2 / 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Проводя осреднение уравнений (13) по методу Крылова–Боголюбова при  $\varepsilon \neq 0$  и отсутствии управляющих воздействий  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  аналогично описанному выше алгоритму (15)–(19), получим осреднённую систему

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-q_1\tilde{\gamma} + q_2\tilde{v} + \eta(3k_1 - 5\varepsilon k_2)], \\ \frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-p_1\tilde{\gamma} + p_2\tilde{v} + \eta(3k_2 + 5\varepsilon k_1)], \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-q_2\tilde{\gamma} - q_1\tilde{v} + \eta(3k_3 - 5\varepsilon k_4)], \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-p_2\tilde{\gamma} - p_1\tilde{v} + \eta(3k_4 + 5\varepsilon k_3)],\end{aligned}\tag{23}$$

которую будем далее использовать для исследования угловой скорости дрейфа ВТГ.

**1.3. Нелинейная математическая модель динамики резонатора ВТГ при использовании шестнадцати датчиков управления.** Рассмотрим случай, при котором напряжения  $U_j$  между  $j$ -м электродом датчика управления и резонатором,  $j = 1, \dots, n$ , подаются на шестнадцать,  $n = 16$ , датчиков управления, неизменно ориентированных относительно основания ВТГ,  $\theta_j = (j-1)\pi/8$ :

$$\begin{aligned}U_1 &= U_9 = 1 + u_A = 1 - u_1 \sin \mu\tau + u_2 \cos \mu\tau, \\ U_5 &= U_{13} = 1 - u_A = 1 + u_1 \sin \mu\tau - u_2 \cos \mu\tau, \\ U_3 &= U_{11} = 1 + u_B = 1 - u_3 \sin \mu\tau + u_4 \cos \mu\tau, \\ U_7 &= U_{15} = 1 - u_B = 1 + u_3 \sin \mu\tau - u_4 \cos \mu\tau,\end{aligned}\tag{24}$$

где  $u_A(t)$ ,  $u_B(t)$  — нормализованные управляющие напряжения, подаваемые соответственно на группу электродов № 1, 5, 9, 13 и смешённую относительно них на угол  $45^\circ$  группу электродов № 3, 7, 11, 15. На промежуточных электродах (с чётными номерами) разность потенциалов задаётся равной опорному напряжению  $u_0$ . Остальные обозначения введены так же, как в (9).

Используя в (7), (8) закон подачи напряжения (24), приближение (11), разложения в ряд (12) и пренебрегая нелинейными слагаемыми выше третьей степени, получаем при  $n = 16$  датчиках управления следующие уравнения динамики резонатора [15]:

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \eta \left( 2f + 3(f^2 + g^2) f + \left( 1 + 3f^2 - 8\varepsilon f \frac{df}{d\tau} \right) u_A \right) - \\ &\quad - \varepsilon \eta \left( 2 \frac{df}{d\tau} + 5(f^2 + g^2) \frac{df}{d\tau} + 10 \left( f \frac{df}{d\tau} + g \frac{dg}{d\tau} \right) f + (1 + 6f^2) u'_A \right), \\ \frac{d^2g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \eta \left( 2g + 3(f^2 + g^2) g + \left( 1 + 3g^2 - 8\varepsilon g \frac{dg}{d\tau} \right) u_B \right) - \\ &\quad - \varepsilon \eta \left( 2 \frac{dg}{d\tau} + 5(f^2 + g^2) \frac{dg}{d\tau} + 10 \left( f \frac{df}{d\tau} + g \frac{dg}{d\tau} \right) g + (1 + 6g^2) u'_B \right).\end{aligned}\tag{25}$$

Сначала рассмотрим (25) в случае  $\varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + \eta (2f + 3(f^2 + g^2) f + (1 + 3f^2) u_A), \\ \frac{d^2g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + \eta (2g + 3(f^2 + g^2) g + (1 + 3g^2) u_B),\end{aligned}\tag{26}$$

и выпишем соответствующие (26) осреднённые уравнения динамики резонатора ВТГ:

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -2p_1\mu - q_1\tilde{\gamma} + q_2\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_1 + (1 + k_5)u_1 + 3k_9u_2 \right) \right], \\ \frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ 2q_1\mu - p_1\tilde{\gamma} + p_2\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_2 + (1 + k_6)u_2 + 3k_9u_1 \right) \right], \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -2p_2\mu - q_2\tilde{\gamma} - q_1\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_3 + (1 + k_7)u_3 + 3k_{10}u_4 \right) \right], \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ 2q_2\mu - p_2\tilde{\gamma} - p_1\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_4 + (1 + k_8)u_4 + 3k_{10}u_3 \right) \right],\end{aligned}\tag{27}$$

где введены аналогично [14] обозначения нелинейных слагаемых:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= -p_1E - q_2X, \quad \tilde{k}_2 = q_1E - p_2X, \quad \tilde{k}_3 = -p_2E + q_1X, \quad \tilde{k}_4 = q_2E + p_1X, \\ E &= 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)/4, \quad X = (p_2q_1 - p_1q_2)/2,\end{aligned}\tag{28}$$

нелинейности при управляющих напряжениях имеют вид (22).

Более подробно случай  $n = 16$  электростатических датчиков управления при  $\varepsilon = 0$  исследовался в [14], а при  $\varepsilon \neq 0$  — в [15].

При  $\varepsilon \neq 0$  и отсутствии управляющих воздействий  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  можно получить осреднённую систему [15]:

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -q_1\tilde{\gamma} + q_2\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_1 - 5\varepsilon\tilde{k}_2 \right) \right], \\ \frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -p_1\tilde{\gamma} + p_2\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_2 + 5\varepsilon\tilde{k}_1 \right) \right], \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -q_2\tilde{\gamma} - q_1\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_3 - 5\varepsilon\tilde{k}_4 \right) \right], \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -p_2\tilde{\gamma} - p_1\tilde{v} + \eta \left( 3\tilde{k}_4 + 5\varepsilon\tilde{k}_3 \right) \right],\end{aligned}\tag{29}$$

которую будем далее использовать для исследования угловой скорости дрейфа ВТГ.

Также заметим по уравнениям (20) и (25), что отличие наблюдается только для кубических нелинейностей, нелинейности при управляющих напряжениях одинаковы как при использовании восьми, так и шестнадцати электродов управления.

## 2. Исследование нелинейных эффектов динамики резонатора ВТГ

В данном разделе выведем нелинейные эффекты динамики цилиндрического резонатора с восьмью датчиками управления и полученные результаты сравним с результатами, полученными ранее в [14] и [15] для ВТГ с шестнадцатью электростатическими датчиками управления.

**2.1. Угловая скорость дрейфа.** Рассмотрим влияние нелинейности, вызванной подачей на датчики управления опорного напряжения, на угловую скорость дрейфа гироскопа. Пусть на электроды управления подаётся только постоянное опорное напряжение  $U_0 \neq 0$ , а управляющие напряжения  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ .

Исследование дрейфа ВТГ будем проводить с помощью переменных, называемых элементами орбиты [9]:  $r(\tau)$  и  $k(\tau)$  — амплитуды основной и квадратурной волн колебаний,  $\theta(\tau)$  — угол прецессии,  $\chi(\tau)$  — временная фаза,

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos(\tau + \chi) \cos 2\theta - k \sin(\tau + \chi) \sin 2\theta, \\ x_3 &= r \cos(\tau + \chi) \sin 2\theta + k \sin(\tau + \chi) \cos 2\theta.\end{aligned}\tag{30}$$

Уравнения (23) получены в результате осреднения уравнений динамики резонатора ВТГ с  $n = 8$  датчиками управления (13) при  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ . Чтобы перейти от  $q_1(\tau)$ ,  $p_1(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$  к  $r(\tau)$ ,  $k(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$ ,  $\chi(\tau)$ , будем использовать замену переменных [23]:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \cos 2\theta \cos \chi - k \sin 2\theta \sin \chi, & p_1 &= -r \cos 2\theta \sin \chi - k \sin 2\theta \cos \chi, \\ q_2 &= r \sin 2\theta \cos \chi + k \cos 2\theta \sin \chi, & p_2 &= -r \sin 2\theta \sin \chi + k \cos 2\theta \cos \chi. \end{aligned} \quad (31)$$

В результате выполненных преобразований получаем систему

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}r - \varepsilon\eta \left(1 + \frac{5}{8}(k^2 + 3r^2)\right)r + \frac{1}{16}\eta(r^2 - k^2)(3k \sin 8\theta - 5\varepsilon r \cos 8\theta), \quad (32)$$

$$\frac{dk}{d\tau} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}k - \varepsilon\eta \left(1 + \frac{5}{8}(3k^2 + r^2)\right)k - \frac{1}{16}\eta(r^2 - k^2)(3r \sin 8\theta - 5\varepsilon k \cos 8\theta), \quad (33)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{4}\tilde{v} + \frac{3}{16}\eta kr(1 + \cos 8\theta) + \frac{5}{32}\varepsilon\eta(k^2 + r^2)\sin 8\theta, \quad (34)$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{3}{16}\eta(r^2 + k^2)(3 + \cos 8\theta) - 10\varepsilon\eta kr \sin 8\theta. \quad (35)$$

В уравнениях (32)–(35) все величины оказываются зависимыми от угла прецессии  $\theta$ , что является следствием использования восьми датчиков управления. Поэтому уравнения (32)–(35) не допускают столь простого анализа, как для случая  $n = 16$  электростатических датчиков управления [15].

Используя замену переменных (31), из (29) мы получаем систему уравнений в новых переменных для случая  $n = 16$  датчиков управления:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}r - \varepsilon\eta \left(1 + \frac{5}{8}(k^2 + 3r^2)\right)r, \quad (36)$$

$$\frac{dk}{d\tau} = -\frac{\tilde{\gamma}}{2}k - \varepsilon\eta \left(1 + \frac{5}{8}(3k^2 + r^2)\right)k, \quad (37)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{4}\tilde{v} + \frac{3}{8}\eta kr, \quad (38)$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{9}{8}\eta(r^2 + k^2). \quad (39)$$

Уравнения (36), (37) указывают на то, что амплитуда колебаний уменьшается в результате демпфирования. Уравнение (39) указывает на незначительное изменение частоты колебаний. Из (38) следует, что угловая скорость дрейфа ВТГ задаётся формулой

$$\dot{\theta}_* = \frac{3}{8}\eta kr. \quad (40)$$

Из (36)–(39) следует, что учёт параметров электрической цепи управления при нелинейных колебаниях резонатора в случае  $n = 16$  датчиков управления оказывает незначительное влияние на демпфирование колебаний и не вносит изменений в угловую скорость дрейфа гироскопа. Таким образом, в случае ВТГ с  $n = 16$  датчиками управления имеется формула (38), которая делает возможность определения и учёта угловой скорости дрейфа ВТГ, а также применения классической методики силовой компенсации, когда амплитуду колебаний  $r$  поддерживают постоянной, а  $k$  стремятся уменьшить до нуля [9].

Вернёмся к анализу случая  $n = 8$  датчиков управления. В уравнениях (32)–(35), несмотря на их нелинейность, можно аналогично заметить, что уравнения (32), (33) указывают на уменьшение амплитуды колебаний в результате демпфирования. Уравнение (35) указывает на незначительное изменение частоты колебаний. Наибольший интерес представляет уравнение (34), из которого следует оценка угловой скорости дрейфа ВТГ:

$$-\frac{5}{32}\varepsilon\eta(k^2 + r^2) \leq \frac{d\theta_*}{dt} \leq \frac{3}{8}\eta kr + \frac{5}{32}\varepsilon\eta(k^2 + r^2). \quad (41)$$

Согласно (41), угловая скорость дрейфа ВТГ оценивается двумя принципиально разными слагаемыми. Одно из них зависит прямо пропорционально от амплитуд основной и квадратурной волн колебаний  $r, k$ . Соответственно, при силовой компенсации угловой скорости дрейфа, когда  $r$  поддерживают постоянной, а  $k$  стремится уменьшить до нуля [9], данное слагаемое, содержащее произведение  $kr$ , сводится к нулю. Однако при таком стандартном способе компенсации не будет компенсироваться угловая скорость дрейфа, оцениваемая слагаемым в (41), содержащим  $k^2 + r^2$ .

Пусть квадратура  $k$  полностью скомпенсирована,  $k = 0$ . Тогда дадим оценку модуля угловой скорости дрейфа:

$$\left| \frac{d\theta_*}{dt} \right| \leq \frac{5}{32}\varepsilon\eta r^2. \quad (42)$$

Таким образом, формулы (41), (42) устанавливают наличие неустранимого дрейфа ВТГ при использовании схемы ВТГ с восьмью датчиками управления. При этом очевидно, что за счёт высокой степени малости  $\varepsilon$  неустранимая угловая скорость дрейфа крайне мала.

Если пренебречь  $\varepsilon$  в оценке (41) и сравнить её с формулой (40), то получим, что угловая скорость дрейфа ВТГ с восьмью электродами управления оценивается угловой скоростью дрейфа ВТГ с шестнадцатью электродами управления.

Пример. Вычислим угловую скорость дрейфа ВТГ с цилиндрическим кварцевым резонатором, которая вызвана опорным напряжением при использовании  $n = 8$  и  $n = 16$  электростатических датчиков управления.

Резонатор имеет размеры  $R = 20$  мм,  $H = R$ ,  $h = 1$  мм, сделан из кварцевого стекла плотностью  $\rho = 2210$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 73.6$  ГПа. При данных параметрах характерная частота собственных колебаний  $\omega = 20890$  с<sup>-1</sup> [14]. При опорном напряжении  $u_0 = 100$  В и ёмкости  $C_0 = 1.05 \cdot 10^{-12}$  Ф имеем [14]  $\eta = 9 \cdot 10^{-6}$ , а также  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

Считаем, что квадратурная волна полностью скомпенсирована,  $k = 0$ , а амплитуду нормализованной основной волны примем  $r = 0.1$ . Тогда по формуле (42) для ВТГ с  $n = 8$  электростатическими датчиками управления получаем оценку некомпенсируемой угловой скорости дрейфа  $3 \cdot 10^{-12}$  с<sup>-1</sup>, что равняется  $1.2 \cdot 10^{-6}$  °/час. Столь малая оценка угловой скорости дрейфа не имеет значения даже в гироскопах высокой точности, поэтому ВТГ с восьмью электростатическими датчиками управления практически не уступает в точности ВТГ с шестнадцатью датчиками управления (справедливо только для электростатических датчиков управления с экстремально малым параметром  $\varepsilon$ ).

В остальном угловая скорость дрейфа компенсируется при стремлении  $k$  к нулю [9]. Покажем, что данная компенсация необходима: пусть относительные амплитуды нормализованной основной и квадратурной волн колебаний  $r = 0.1$  и  $k = 0.001$  (соответственно 10 мкм и 0.1 мкм), тогда абсолютная величина угловой скорости дрейфа, вычисляемая по формуле (40), равна 1.45 °/час. При использовании в ВТГ восьми датчиков управления, согласно (41), угловая скорость дрейфа имеет переменный характер и оценивается рассчитанным значением 1.45 °/час. Полученное значение является существенным для гироскопов, применяемых в навигационных

системах, что говорит о проявлении нелинейных свойств датчиков управления и необходимости компенсации угловой скорости дрейфа у волновых твердотельных гироскопов.

**2.2. Сдвиг резонансного пика амплитудно-частотной характеристики.** Для исследования амплитудно-частотных характеристик нелинейных колебаний мы рассмотрим следующий режим подачи управляющего напряжения:  $u_1 = u_3 = u_4 = 0$ ,  $u_2 = u$ . Поскольку значение параметра  $\varepsilon$  крайне мало, в данном подразделе мы не будем его учитывать и определим наиболее существенное отличие амплитудно-частотных характеристик колебаний резонатора при использовании  $n = 8$  и  $n = 16$  датчиков управления. Поскольку при  $n = 16$  датчиках управления данное исследование проводилось в [14], здесь будем рассматривать случай  $n = 8$  датчиков управления.

Сначала рассмотрим (14) только с кубической нелинейностью, без учёта нелинейности при управлении:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\tau^2} + f &= -\tilde{\gamma} \frac{df}{d\tau} + \tilde{v} \frac{dg}{d\tau} + 2\eta f^3 + \eta u \cos \mu t, \\ \frac{d^2 g}{d\tau^2} + g &= -\tilde{\gamma} \frac{dg}{d\tau} - \tilde{v} \frac{df}{d\tau} + 2\eta g^3. \end{aligned} \quad (43)$$

Вынужденные колебания резонатора исследуем в медленных переменных  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$ , которые являются амплитудами и фазами колебаний:

$$f = A \sin(\mu\tau + \varphi), \quad g = B \sin(\mu\tau + \psi),$$

поэтому будем использовать замену переменных

$$q_1 = A \sin \varphi, \quad p_1 = A \cos \varphi, \quad q_2 = B \sin \psi, \quad p_2 = B \cos \psi \quad (44)$$

в осреднённой системе с медленными переменными  $q_1(\tau)$ ,  $p_1(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$ ,  $p_2(\tau)$ . Соответствующая система осреднённых уравнений следует из (20) и с помощью замены переменных (44) преобразуется в

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= \frac{1}{2} [-\tilde{\gamma}A + \tilde{v}B \cos(\varphi - \psi) + \eta u \cos \varphi], \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\frac{1}{2A} \left[ 2A\lambda_* + \frac{3}{2}\eta A^3 + \tilde{v}B \sin(\varphi - \psi) + \eta u \sin \varphi \right], \\ \frac{dB}{d\tau} &= -\frac{1}{2} [\tilde{\gamma}B + \tilde{v}A \cos(\varphi - \psi)], \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{1}{2B} \left[ 2B\lambda_* + \frac{3}{2}\eta B^3 + \tilde{v}A \sin(\varphi - \psi) \right], \end{aligned} \quad (45)$$

где частотная настройка  $\lambda_* = \lambda/\omega$ .

Одним из стационарных режимов колебаний является режим [23] с нулевой амплитудой  $B = 0$ . Тогда из (45) следуют уравнения для определения амплитуды  $A$  и фазы колебаний  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} -\tilde{\gamma}A + \eta u \cos \varphi &= 0, \\ A \left( 2\lambda_* + \frac{3}{2}\eta A^2 \right) + \eta u \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Избавляясь от тригонометрических функций в уравнениях (46), получим выражение

$$A^2 \tilde{\gamma}^2 + \left( 2\lambda_* A + \frac{3}{2}\eta A^3 \right)^2 = \eta^2 u^2. \quad (47)$$

Применяя к (47) формулу дифференцирования неявной функции, записываем условие экстремума  $A(\lambda_*)$ :

$$\frac{4A \left( 2\lambda_* A + \frac{3}{2}\eta A^3 \right)}{2A\tilde{\gamma}^2 + \left( 2\lambda_* A + \frac{3}{2}\eta A^3 \right) \left( 2\lambda_* + \frac{9}{2}\eta A^2 \right)} = 0,$$

из которого следует, что  $A(\lambda_*)$  имеет экстремум в точке

$$\lambda_* = -\frac{3}{4}\eta A^2. \quad (48)$$

Подставляя (48) в выражение (47), определяем максимальное значение амплитуды

$$A_{\max} = \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}}, \quad (49)$$

учитывая которое в (48), получаем значение частотной настройки:

$$\lambda_{* \max} = -\frac{3\eta}{4} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2. \quad (50)$$

Таким образом, при описании колебаний резонатора нелинейной математической моделью, учитывающей только кубическую нелинейность, максимальная амплитуда колебаний задаётся формулой (49) и наблюдается сдвиг резонансного пика колебаний влево, согласно формуле (50), что соответствует описанию колебаний с мягкой характеристикой.

Если сравнивать полученные результаты с аналогичным исследованием для случая  $n = 16$  датчиков управления [14], то максимальная амплитуда в обоих случаях равна величине (49), а сдвиг резонансного пика для ВТГ с шестнадцатью электродами управления [14] имеет большее в полтора раза значение

$$\lambda_{* \max} = -\frac{9\eta}{8} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2, \quad (51)$$

чем для ВТГ с восьмью электродами управления (50).

Рассмотрим теперь нелинейную математическую модель, учитывающую не только кубическую нелинейность, но и квадратичную нелинейность при управлении в случае  $n = 8$  датчиков управления. Аналогично описанному выше из (20) с заменой переменных (44) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[ -\tilde{\gamma}A + \tilde{v}B \cos(\varphi - \psi) + \eta u \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \cos \varphi \right], \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= -\frac{1}{2A} \left[ 2A\lambda_* + \frac{3}{2}\eta A^3 + \tilde{v}B \sin(\varphi - \psi) + \eta u \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \sin \varphi \right], \\ \frac{dB}{d\tau} &= -\frac{1}{2} [\tilde{\gamma}B + \tilde{v}A \cos(\varphi - \psi)], \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{1}{2B} \left[ 2B\lambda_* + \frac{3}{2}\eta B^3 + \tilde{v}A \sin(\varphi - \psi) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Рассматриваем стационарный режим колебаний с  $B = 0$  и получаем выражение для резонансной кривой:

$$\begin{aligned} \left( A\tilde{\gamma} \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \right)^2 + \left( A \left( 2\lambda_* A + \frac{3}{2}\eta A^3 \right) \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \right)^2 &= \\ = \left( \eta u \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Таким образом, полученное аналитическое выражение (53) описывает амплитудно-частотные характеристики колебаний с учетом как кубической нелинейности, так и квадратичной нелинейности при управлении.

Применяя к (53) формулу дифференцирования неявной функции, получаем условие экстремума  $A(\lambda_*)$ , из которого следует, что  $A(\lambda_*)$  имеет экстремум в точке  $\lambda_* = -\frac{3}{4}\eta A^2$ . Подставляя полученное значение  $\lambda_*$  в (53), определяем максимальное значение амплитуды:

$$A_{\max} = \frac{2\tilde{\gamma}}{3\eta u} \left( 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2} \right). \quad (54)$$

Если в (54) использовать разложение в ряд Тейлора, принимая ограничение  $\frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} < 1$ , вызванное функционированием без пробоев электростатических датчиков (что справедливо согласно формуле (49)), то придём к уточнению значения максимальной амплитуды (49) за счёт учёта нелинейности при управлении:

$$\begin{aligned} A_{\max} &= \frac{2\tilde{\gamma}}{3\eta u} \left( 1 - \left( 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2 - \frac{9}{8} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^4 - \frac{27}{16} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^6 - \dots \right) \right) = \\ &= \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} + \frac{3}{4} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^3 + \frac{9}{16} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^5 + \dots. \end{aligned} \quad (55)$$

Учитывая уточнённое значение максимальной амплитуды, рассчитываем уточнённое значение частотной настройки:

$$\lambda_{* \max} = \eta - \frac{2\tilde{\gamma}^2}{3u^2\eta} \left( 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2} \right). \quad (56)$$

Чтобы увидеть уточнение резонансной частоты, вызванное учётом квадратичной нелинейности при управлении, и сравнить с (50), разложим (56) в ряд

$$\begin{aligned} \lambda_{* \max} &= \eta - \frac{2\tilde{\gamma}^2}{3u^2\eta} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2 + \frac{9}{8} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^4 + \frac{27}{16} \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^6 + \dots \right) = \\ &= -\frac{3}{4}\eta \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2 - \frac{9}{8}\eta \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^4 - \dots. \end{aligned} \quad (57)$$

Из формул (49), (55) следует увеличение амплитуды колебаний в результате учёта квадратичной нелинейности при управлении, которое приводит, согласно формулам (50), (57), к большему сдвигу резонансного пика мягкой амплитудно-частотной характеристики.

Для ВТГ с шестнадцатью электродами управления в [14] было получено выражение для резонансной кривой

$$\begin{aligned} \left( A\tilde{\gamma} \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \right)^2 + \left( A \left( 2\lambda_* A + \frac{9}{4}\eta A^3 \right) \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \right)^2 &= \\ &= \left( \eta u \left( 1 + \frac{9}{4}A^2 \right) \left( 1 + \frac{3}{4}A^2 \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (58)$$

и выведены соответствующие формулы:

$$A_{\max} = \frac{2\tilde{\gamma}}{3\eta u} \left( 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2} \right), \quad \lambda_{* \max} = \frac{3\eta}{2} - \frac{\tilde{\gamma}^2}{u^2\eta} \left( 1 - \sqrt{1 - 3 \left( \frac{\eta u}{\tilde{\gamma}} \right)^2} \right). \quad (59)$$

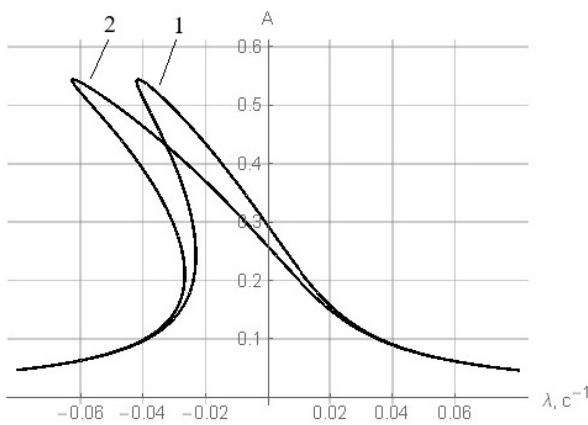


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики: 1 — для гироскопа с восьмью датчиками управления, 2 — для гироскопа с шестнадцатью датчиками управления

Fig. 1. Amplitude-frequency response: 1— for gyroscope with eight control sensors, 2— for gyroscope with sixteen control sensors

По формулам (54) и (56) получаем значения  $A_{\max} = 0.544$  и  $\lambda_{\max} = -0.0415 \text{ c}^{-1}$  для ВТГ с восьмью электродами управления, и, соответственно, по формулам (59)  $A_{\max} = 0.544$  и  $\lambda_{\max} = -0.0623 \text{ c}^{-1}$  для ВТГ с шестнадцатью электродами управления.

**2.3. Обсуждение результатов.** В соответствии с утверждением о необходимости учёта специфики конкретной колебательной системы при исследовании нелинейности колебаний [9], показано, что нелинейность колебаний резонатора ВТГ, вызванная электростатическими датчиками управления, зависит от числа датчиков управления.

Ранее, в [14], исследовалась динамика резонатора ВТГ только с шестнадцатью датчиками управления, и в результате получалась кубическая нелинейность специального вида  $(f^2 + g^2)f$  и  $(f^2 + g^2)g$  в уравнениях (26), характерного для гироскопов класса обобщенного маятника Фуко [9] и выведенная также в [23] для ВТГ при предположении о том, что для материала резонатора справедлив нелинейный закон упругости. Данный вид нелинейности приводил к постоянной угловой скорости дрейфа (40). В [14] данный вид нелинейности, вызванный электростатическими датчиками управления, был назван нелинейным уточнением известного эффекта «отрицательной электростатической жёсткости», что легко может быть замечено по уравнениям (26): в первом уравнении можно сгруппировать слагаемые  $(1 - 2\eta - 3\eta(f^2 + g^2))f$ , а во втором — слагаемые  $(1 - 2\eta - 3\eta(f^2 + g^2))g$ .

В настоящей статье показано, что использование восьми датчиков управления приводит к совершенно иному виду кубической нелинейности  $f^3$  и  $g^3$  в уравнениях (14). Полученная кубическая нелинейность не может быть отнесена к эффекту «отрицательной электростатической жёсткости» и приводит к переменной угловой скорости дрейфа, которую можно только оценить (41). Данное обстоятельство значительно усложняет расчёты угловой скорости и исключает возможность аналитической компенсации угловой скорости дрейфа, но, с другой стороны, не влияет на силовую компенсацию угловой скорости дрейфа, основанную на подавлении квадратурной волны колебаний [9].

Также в данной работе рассмотрен учёт слагаемых, содержащих малый параметр  $\varepsilon$ , характеризующий электрическую цепь управления колебаниями. Показано, что для ВТГ с восьмью

Из (54), (56), (59) следует, что максимальная амплитуда  $A_{\max}$  одинакова как в случае использования восьми, так и шестнадцати электродов управления, а сдвиг резонансного пика для ВТГ с шестнадцатью электродами управления в полтора раза больше, чем для ВТГ с восьмью электродами управления.

*Пример.* Построим амплитудно-частотные характеристики колебаний цилиндрического резонатора ВТГ с восьмью и шестнадцатью электростатическими датчиками управления. Как и в предыдущем числовом примере, бём данные  $\omega = 20890 \text{ c}^{-1}$ ,  $\eta = 9 \cdot 10^{-6}$ ,  $u = 0.1$ , принимаем добротность  $Q = 5 \cdot 10^5$ . Расчёты проводим по формулам (53) и (58). На рис. 1 построены расчитанные по (53) и (58) амплитудно-частотные характеристики, по вертикальной оси откладывается нормализованная амплитуда колебаний  $A$ , по горизонтальной оси — частотная настройка  $\lambda$ .

электростатическими датчиками управления возникает неустранимая угловая скорость дрейфа (42), которая пренебрежимо мала даже для гироскопов высокой точности. При этом в работе [15] было показано полное отсутствие неустранимой угловой скорости дрейфа для ВТГ с шестнадцатью датчиками управления.

В работе [24] показано, что электрическая балансировка резонатора ВТГ с использованием восьми электродов управления, в отличие от ВТГ с шестнадцатью датчиками управления, не позволяет полностью скомпенсировать разночастотность.

С другой стороны, в настоящем исследовании показано, что нелинейные эффекты динамики резонатора в схеме ВТГ с восьмью датчиками управления проявляются слабее, чем в случае ВТГ с шестнадцатью датчиками управления: переменная угловая скорость дрейфа меньше, чем постоянная, возникающая при использовании шестнадцати датчиков управления, а сдвиг резонансного пика амплитудно-частотной характеристики колебаний — в полтора раза меньше. Важно учитывать и практический интерес использования восьми датчиков управления: уменьшение числа датчиков управления в два раза приводит к упрощению конструкции прибора и удешевлению его изготовления.

Таким образом, можно сделать вывод, что ВТГ с восьмью электростатическими датчиками управления имеет преимущество в простоте изготовления и меньшем проявлении нелинейных эффектов динамики резонатора перед ВТГ с шестнадцатью датчиками управления. Однако при разработке ВТГ (в первую очередь высокой точности) необходимо учитывать риски использования схемы ВТГ с восьмью датчиками управления: в данной схеме ВТГ неэффективна электрическая балансировка, представляет значительную сложность расчёт угловой скорости дрейфа из-за её переменного значения и имеется неустранимая угловая скорость дрейфа, которая зависит от малости параметра, характеризующего электрическую цепь управления колебаниями.

## Заключение

Построены нелинейные математические модели динамики цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, которые учитывают нелинейности, вызванные возбуждением колебаний электростатическими датчиками управления при восьми и шестнадцати датчиках управления. Для данных случаев показано отличие нелинейностей в дифференциальных уравнениях, а также различие в нелинейных эффектах динамики резонатора ВТГ: в угловой скорости дрейфа и в смещении резонансного пика амплитудно-частотной характеристики. Нелинейные эффекты проявляются сильнее в случае ВТГ с шестнадцатью датчиками управления, больше угловая скорость дрейфа и смещение резонансного пика амплитудно-частотной характеристики, чем для ВТГ с восьмью датчиками управления. Однако в случае ВТГ с восьмью датчиками управления угловая скорость дрейфа имеет переменное значение, а также содержит малую некомпенсируемую составляющую. Обнаруженные эффекты для схемы ВТГ с восьмью электростатическими датчиками управления представляют теоретическое значение, но не влияют на практическое использование таких ВТГ в связи с одинаковой процедурой силовой компенсации как постоянной, так и переменной угловой скорости дрейфа и высоким порядком малости некомпенсируемой угловой скорости дрейфа.

## Список литературы

1. Переляев С. Е. Обзор и анализ направлений создания бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волновых твердотельных гироскопах // Новости навигации. 2018. № 2. С. 21–27.
2. Переляев С. Е. Современное состояние волновых твердотельных гироскопов. Перспективы

- развития в прикладной гироскопии // В сб.: XXX Юбилейная Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 29–31 мая 2023 г., Санкт-Петербург, Россия. Санкт-Петербург: Электроприбор, 2023. С. 431–435.
3. *Пешехонов В. Г.* Перспективы развития гироскопии // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 2. С. 3–10. DOI: 10.17285/0869-7035.0028.
  4. *Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркульев И. В., Ниналалов И. Г.* Волновые твердотельные гироскопы: обзор публикаций // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31, № 1. С. 3–25.
  5. *Журавлёв В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
  6. *Климов Д. М., Журавлёв В. Ф., Жбанов Ю. К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во «Ким Л.А.», 2017. 194 с.
  7. *Журавлёв В. Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
  8. *Журавлёв В. Ф.* О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 5–11.
  9. *Журавлёв В. Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.
  10. *Журавлёв В. Ф., Линч Д. Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24.
  11. *De S. K., Aluru N. R.* Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures // Journal of Microelectromechanical Systems. 2005. Vol. 15, no. 2. P. 355–369. DOI: 10.1109/JMEMS.2006.872227.
  12. *Rhoads J. F., Shaw S. W., Turner K. L., Moehlis J., DeMartini B. E., Zhang W.* Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 296, iss. 4–5. P. 797–829. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.03.009.
  13. *Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркульев И. В.* Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // Гироскопия и навигация. 2015. № 1. С. 71–80. DOI: 10.18500/0869-6632-00316110.17285/0869-7035.2015.23.1.071-080.
  14. *Маслов Д. А. Меркульев И. В.* Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 88–110. DOI: 10.31857/S0572329921050068.
  15. *Maslov D. A.* Nonlinear dynamics of a wave solid-state gyroscope taking into account the electrical resistance of an oscillation control circuit // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 409–435. DOI: 10.20537/nd230602.
  16. *Лунин Б. С., Басараб М. А., Юрин А. В., Чуманкин Е. А.* Цилиндрический резонатор из кварцевого стекла для недорогих вибрационных гироскопов // В сб.: Юбилейная XXV Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам. 28–30 мая 2018 г., Санкт-Петербург, Россия. Санкт-Петербург: Электроприбор, 2018. С. 204–207.
  17. *Лунин Б. С., Лопатин В. М.* Кварцевое стекло для механических резонаторов с высокой добротностью // Неорганические материалы. 2020. Т. 56, № 3. С. 305–310. DOI: 10.31857/S0002337X20030100.
  18. *Wu X., Xi X., Wu Y., Xiao D.* Cylindrical Vibratory Gyroscope. Singapore: Springer, 2021. 202 p. DOI: 10.1007/978-981-16-2726-2.
  19. *Zeng L., Luo Y., Pan Y., Jia Y., Liu J., Tan Z., Yang K., Luo H.* A 5.86 million quality factor cylindrical resonator with improved structural design based on thermoelastic dissipation analysis // Sensors. 2020. Vol. 20, no. 21. P. 6003. DOI: 10.3390/s20216003.

20. Tao Y., Pan Y., Liu J., Jia Y., Yang K., Luo H. A novel method for estimating and balancing the second harmonic error of cylindrical fused silica resonators // *Micromachines*. 2021. Vol. 12, no. 4. P. 380. DOI: 10.3390/mi12040380.
21. Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркуров И. В. Исследование стационарных режимов колебаний резонатора гироскопа при наличии позиционного и сопутствующего ему параметрического возбуждения // Гироскопия и навигация. 2014. № 2. С. 61–69.
22. Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
23. Меркуров И. В., Подалков В. В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 228 с.
24. Маслов А. А., Маслов Д. А., Меркуров И. В. Электрическая балансировка волнового твердотельного гироскопа с плоскими электродами // В сб.: XXXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 27–29 мая 2024 г., Санкт-Петербург, Россия. Санкт-Петербург: Электроприбор, 2024. С. 244–247.

## References

1. Perelyaev SE. Review and analysis of the lines of development of strapdown inertial navigation systems on the basis of hemispherical resonator gyroscopes. *Navigation News*. 2018;(2):21–27 (in Russian).
2. Perelyaev SE. Current State of Wave Solid-State Gyroscopes. Development Prospects in Applied Gyroscopy. In: Proc. of 30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2023. 29–31 May 2023, Saint Petersburg, Russian Federation. P. 1–4. DOI: 10.23919/ICINS51816.2023.10168310.
3. Peshekhonov VG. The outlook for gyroscopy. *Gyroscopy Navig.* 2020;11(3):193–197. DOI: 10.1134/S2075108720030062.
4. Maslov AA, Maslov DA, Merkuryev IV. Nonlinear effects in the dynamics of HRG with flat electrodes. *Gyroscopy Navig.* 2023;14(4):320–327. DOI: 10.1134/S2075108724700044.
5. Zhuravlev VPh, Klimov DM. Wave Solid-State Gyroscope. M.: Nauka; 1985. 125 p. (in Russian).
6. Zhuravlev VPh, Klimov DM, Zbanov YuK. Quartz Hemispherical Resonator (Wave Solid-State Gyroscope). M.: Kim L.A.; 2017. 194 p. (in Russian).
7. Zhuravlev VPh. Theoretical foundations of solid-state wave gyroscopes. *Mech. Solids*. 1993;28(3):3–15.
8. Zhuravlev VPh. Global evolution of state of the generalized Foucault pendulum. *Mech. Solids*. 1998;33(6):3–8.
9. Zhuravlev VPh. A controlled Foucault pendulum as a model of a class of free gyros. *Mech. Solids*. 1997;32(6):21–28.
10. Zhuravlev VPh, Lynch DD. Electric model of a hemispherical resonator gyro. *Mech. Solids*. 1995;30(5):10–21.
11. De SK, Aluru NR. Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2006;15(2):355–369. DOI: 10.1109/JMEMS.2006.872227.
12. Rhoads JF, Shaw SW, Turner KL, Moehlis J, DeMartini BE, Zhang W. Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators. *Journal of Sound and Vibration*. 2006;296(4-5):797–829. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.03.009.
13. Maslov AA, Maslov DA, Merkuryev IV. Nonlinear effects in dynamics of cylindrical resonator of wave solid-state gyro with electrostatic control system. *Gyroscopy Navig.* 2015;6:224–229. DOI: 10.1134/S2075108715030104.

14. Maslov DA, Merkuryev IV. Impact of nonlinear properties of electrostatic control sensors on the dynamics of a cylindrical resonator of a wave solid-state gyroscope. *Mech. Solids.* 2021;56(6): 960–979. DOI: 10.3103/S002565442106011X.
15. Maslov DA. Nonlinear dynamics of a wave solid-state gyroscope taking into account the electrical resistance of an oscillation control circuit. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023;19(3):409–435. DOI: 10.20537/nd230602.
16. Lunin BS, Basarab MA, Yurin AV, Chumakin EA. Fused quartz cylindrical resonators for lowcost vibration gyroscopes. In: Proc. of 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). 28–30 May 2018, St. Petersburg, Russia. P. 1–4. DOI: 10.23919/ICINS.2018.8405896.
17. Lunin BS, Lopatin VM. Silica glass for high-Q mechanical resonators. *Inorg. Mater.* 2020;56: 292–296. DOI: 10.1134/S0020168520030103.
18. Wu X, Xi X, Wu Y, Xiao D. Cylindrical Vibratory Gyroscope. Singapore: Springer; 2021. 202 p. DOI: 10.1007/978-981-16-2726-2.
19. Zeng L, Luo Y, Pan Y, Jia Y, Liu J, Tan Z, Yang K, Luo H. Million quality factor cylindrical resonator with improved structural design based on thermoelastic dissipation analysis. *Sensors.* 2020;20(21):6003. DOI: 10.3390/s20216003.
20. Tao Y, Pan Y, Liu J, Jia Y, Yang K, Luo H. A novel method for estimating and balancing the second harmonic error of cylindrical fused silica resonators. *Micromachines.* 2021;12(4):380. DOI: 10.3390/mi12040380.
21. Maslov AA, Maslov DA, Merkuryev IV. Studying stationary oscillation modes of the gyro resonator in the presence of positional and parametric excitations. *Gyroscopy Navig.* 2014;5: 224–228. DOI: 10.1134/S2075108714040099.
22. Zhuravlev VPh, Klimov DM. Applied Methods in Vibration Theory. M.: Nauka; 1988. 328 p. (in Russian).
23. Merkuryev IV, Podalkov VV. Dynamics of Micromechanical and Wave Solid-State Gyroscopes. M.: Fizmatlit; 2009. 228 p. (in Russian).
24. Maslov AA, Maslov DA, Merkuryev IV. Electrical Balancing of Wave Solid-State Gyroscope with Flat Electrodes. In: Proc. of 31th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. 2024. P. 313–316.

*Маслов Александр Анатольевич* — окончил «МЭИ» (1977). Кандидат технических наук по специальности «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры» (1984). Доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ». Опубликовал более 30 научных работ. Сфера научных интересов: динамика волновых твердотельных гироскопов, нелинейные колебания, идентификация параметров, гироскопические инклинометры.

Россия, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, стр. 1

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: [Maslov954@yandex.ru](mailto:Maslov954@yandex.ru)

AuthorID (eLibrary.Ru): 756992

*Маслов Дмитрий Александрович* — окончил с отличием НИУ «МЭИ» (2015, магистр прикладной математики и информатики). Кандидат технических наук по специальности «Теоретическая механика» (2019). Доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ». Опубликовал более 25 научных работ. Сфера научных интересов: математическое моделирование, асимптотические методы, аналитическая теория возмущений, нелинейные колебания, динамика волновых твердотельных гироскопов.

Россия, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, стр. 1

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

E-mail: [MaslovDmA@mpei.ru](mailto:MaslovDmA@mpei.ru)

ORCID: 0009-0001-6427-2270

AuthorID (eLibrary.Ru): 822799