

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья
УДК 534.121.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003162
EDN: OXVENZ

Свободные линейные колебания вязкоупругой сферической оболочки с наполнителем

М. М. Мирсаидов¹, И. И. Сафаров², М. Х. Тешаев³, Н. Р. Элибоев²✉

¹Национальный исследовательский университет
«Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Узбекистан

²Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан

³Бухарский филиал Института математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан
E-mail: mirsaidov1948@mail.ru, safarov54@mail.ru, muhsin_5@mail.ru, ✉nurali_e@mail.ru

Поступила в редакцию 21.11.2024, принята к публикации 19.01.2025,
опубликована онлайн 29.01.2025, опубликована 31.07.2025

Аннотация. Цель. Тонкие многослойные оболочки широко применяются в авиастроении, судостроении и машиностроении. В последнее время возрос интерес к динамическому расчету оболочечных конструкций под воздействием различных нагрузок. В данной работе изучается действие движущегося нормального внутреннего давления на вязкоупругую цилиндрическую оболочку. Методы. Вязкоупругая среда, заполняющая сферическую оболочку, имеет значительно меньший мгновенный модуль упругости, чем оболочка. Решение представлено для свободных колебаний вязкоупругой системы «оболочка — наполнитель». Построено аналитическое частотное уравнение в виде трансцендентного уравнения, которое решается численно — методом Мюллера. Результаты. Обнаружено, что при некоторых значениях вязкоупругих и плотностных параметров возникают низкочастотные собственные колебания. Эти колебания представляют собой апериодическое движение, так как мнимая часть собственной частоты велика. Для вязкоупругих механических систем выявлена зависимость коэффициентов демпфирования от физико-механических параметров. Заключение. Построена теория и методы расчета комплексных собственных частот колебаний упругой сферической неоднородности в упругой среде. Проведена классификация таких колебаний на радиальные, крутильные и сфероидальные. Задача сводится к нахождению тех частот, при которых система уравнений движения имеет ненулевые решения в классе бесконечно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: сферическая оболочка, наполнитель, колебания, частотное уравнение, коэффициент демпфирования.

Для цитирования: Мирсаидов М. М., Сафаров И. И., Тешаев М. Х., Элибоев Н. Р. Свободные линейные колебания вязкоупругой сферической оболочки с наполнителем // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 485–496. DOI: 10.18500/0869-6632-003162. EDN: OXVENZ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Free linear vibrations of a viscoelastic spherical shell with filler

M. M. Mirsaidov¹, I. I. Safarov², M. Kh. Teshaev³, N. R. Eliboyev²✉

¹The National Research University

«Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers», Uzbekistan

²Tashkent Chemical-Technological Institute, Uzbekistan

³Institute of Mathematics named after V. I. Romanovski AS RUz, Uzbekistan

E-mail: mirsaidov1948@mail.ru, safarov54@mail.ru, muhsin_5@mail.ru, ✉nurali_e@mail.ru

Received 21.11.2024, accepted 19.01.2025, available online 29.01.2025, published 31.07.2025

Abstract. *Purpose.* Thin multilayered shells are widely used in aviation, shipbuilding, and mechanical engineering. Recently, interest in the dynamic analysis of shell structures under various load effects has increased. This study examines the effect of moving normal internal pressure on a viscoelastic cylindrical shell. *Methods.* The viscoelastic medium filling the spherical shell has a significantly lower instantaneous modulus of elasticity than the shell itself. The solution is presented for the free vibrations of the viscoelastic system “shell–filler”. An analytical frequency equation in the form of a transcendental equation is derived and solved numerically using the Müller method. *Results.* It has been found that, at certain values of viscoelastic and density parameters, low-frequency natural vibrations occur. These vibrations represent an aperiodic motion since the imaginary part of the natural frequency is large. For viscoelastic mechanical systems, the dependence of damping coefficients on physical and mechanical parameters has been identified. *Conclusion.* A theory and methods for calculating the complex natural frequencies of vibrations of an elastic spherical inhomogeneity in an elastic medium have been developed. A classification of such vibrations into radial, torsional, and spheroidal modes has been carried out. The problem is reduced to finding those frequencies at which the system of motion equations has nonzero solutions in the class of infinitely differentiable functions.

Keywords: spherical shell, filler, oscillations, frequency equation, damping coefficient.

For citation: Mirsaidov MM, Safarov II, Teshaev MKh, Eliboyev NR. Free linear vibrations of a viscoelastic spherical shell with filler. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):485–496. DOI: 10.18500/0869-6632-003162

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Тонкие слоистые оболочки широко применяются в авиастроении, судостроении, машиностроении и других областях. Поэтому в последнее время значительно возрос интерес к динамическому расчету оболочечных конструкций при воздействии различных нагрузок [1, 2]. Сферические оболочки с наполнителем применяются в промышленности для хранения различных нефтегазовых веществ [3, 4]. Также Земля может быть рассмотрена как сферическая оболочка с многослойным наполнителем [5].

В работах [6, 7] асимптотическими методами исследуются частоты и формы собственных колебаний сферической и цилиндрической оболочек, взаимодействующих с упругими и жидкими средами. В этих работах получены приближенные простые формулы для вычисления частоты. На основе этих формул получены формы собственных колебаний. В работе [8] рассматриваются собственные колебания тонкостенной сферической оболочки с сжимаемой жидкостью. В этой работе также исследовано влияние физических и геометрических параметров на зависимость собственных частот оболочки, проведен качественный анализ частоты в зависимости от параметров.

В работах [9, 10] исследованы резонансные частоты осесимметричных колебаний полого шара с наполнителем. Для описания уравнений колебаний шара и наполнителя использованы трёхмерные уравнения теории упругости. Задача решается в осесимметричном случае с использованием асимптотических выражений специальных функций Бесселя и Неймана.

В данной работе исследуется задача о собственных колебаниях слоистой сферической оболочки, содержащей вязкоупругую среду. Для сферических тел с наполнителем исследователи получили собственные частоты и соответствующие собственные формы численными методами.

Здесь строится точное аналитическое решение задачи. Получено трансцендентное частотное уравнение, представляющее зависимость комплексной частоты оболочки с заполнителем от различных геометрических и физико-механических параметров.

1. Методика

1.1. Постановка задачи и методики решения. Системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающие собственные колебания сферической оболочки, контактирующей со средой. Система уравнений сферической оболочки представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_0}{\partial \psi} - b^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla^2 + 2)w - (1 - \nu) \left(\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \phi} - u + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) - \\ - \int_0^t R_E(t - \tau) \bar{V}(\psi, \phi, \tau) d\tau = -\frac{1 - \nu^2}{h} R^2 \frac{X_1}{E_0}, \\ \frac{1}{\sin \phi} \left[\frac{\partial \Delta_0}{\partial \phi} - b^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla^2 + 2)w \right] + (1 - \nu) \left[\frac{\partial \Delta_1}{\partial \psi} + \vartheta - \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi} - \\ - \int_0^t R_E(t - \tau) \bar{W}(\psi, \phi, \tau) d\tau = -\frac{1 - \nu^2}{h} R^2 \frac{Y}{E_0}, \\ b^2 [\nabla^2 + 1 - \nu] [\Delta_0 - (\nabla^2 + 2)w] - (1 + \nu) \Delta_0 - \\ - \int_0^t R_E(t - \tau) \bar{U}(\psi, \phi, \tau) d\tau = -\frac{1 - \nu^2}{h} R^2 \frac{Z}{E_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0 = \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (u \sin \psi) + \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi} \right] + 2w, \Delta_1 = \frac{1}{2 \sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\vartheta \sin \psi) - \frac{\partial u}{\partial \phi} \right], \\ \nabla^2 = \frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} (\sin \psi \frac{\partial}{\partial \psi}) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \\ \bar{V}(\psi, \phi, \tau) = \frac{\partial \Delta_0}{\partial \psi} - b^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla^2 + 2)w - (1 - \nu) \left(\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial \Delta_1}{\partial \phi} - u + \frac{\partial w}{\partial \psi} \right), \\ \bar{W}(\psi, \phi, \tau) = \frac{1}{\sin \phi} \left[\frac{\partial \Delta_0}{\partial \phi} - b^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\nabla^2 + 2)w \right] + (1 - \nu) \left[\frac{\partial \Delta_1}{\partial \psi} + \vartheta - \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi}, \\ \bar{U}(\psi, \phi, \tau) = b^2 [\nabla^2 + 1 - \nu] [\Delta_0 - (\nabla^2 + 2)w] - (1 + \nu) \Delta_0. \end{aligned}$$

Здесь X, Y, Z — проекции сил инерции и поверхностного усилия на направления r, ϕ, ψ сферической системы координат, E_0 и ν — мгновенный модуль упругости и коэффициент Пуассона, $b^2 = \frac{h^2}{12R^2}$, $R_E(t - \tau)$ — ядро релаксации.

Уравнение движения вязкоупругого заполнителя имеет вид [4, 11–13]:

$$(\lambda_{0c} + 2\mu_{0c}) \text{grad div } \vec{u}_c - \mu_{0c} \text{rot rot } \vec{u}_c - \int_0^t R_{Ec}(t - \tau) \vec{\Delta}_c(r, \theta, \beta, \tau) d\tau = \rho_c \frac{\partial^2 \vec{u}_c}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где ρ_c — плотность заполнителя, $R_{Ec}(t - \tau)$ — ядро релаксации заполнителя, λ_{0c}, μ_{0c} — мгновенные модули упругости, $\vec{u}_c(u_r, u_\phi, u_\psi)$ — вектор перемещений заполнителя, $\vec{\Delta}_c(r, \phi, \psi, \tau) = (\lambda_0 + 2\mu_0) \text{grad div } \vec{u}_c - \mu_{0c} \text{rot rot } \vec{u}_c$. В сферической системе координат β, θ, r уравнения (2) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_c + 2\mu_c)r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial r} - 2\mu_c \left(\frac{\partial \omega_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial \phi} (\omega_\phi \sin \psi) \right) - \\
 & \quad - E_{c0} \int_0^t R_{Ec}(t - \tau) \Delta_r(\vec{r}, \tau) d\tau - \rho_c r \sin \psi \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \\
 & (\lambda_c + 2\mu_c)r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial \phi} - 2\mu_c \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\phi) \right) - \\
 & \quad - E_{c0} \int_0^t R_{Ec}(t - \tau) \Delta_\phi(\vec{r}, \tau) d\tau - \rho_c r \sin \psi \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = 0, \\
 & (\lambda_c + 2\mu_c)r \sin \psi \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} - 2\mu_c \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\phi \sin \psi) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} - \right. \\
 & \quad \left. - E_{c0} \int_0^t R_{Ec}(t - \tau) \Delta_\psi(\vec{r}, \tau) d\tau - \rho_c r \sin \psi \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (u_\psi \sin \psi) + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right), \\
 \omega_\phi &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\psi) \right), \\
 \omega_r &= \frac{1}{2r \sin \psi} \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} - \frac{\partial (u_\phi \sin \psi)}{\partial \phi} \right), \\
 \omega_\psi &= \frac{1}{2r \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (u_\phi \sin \psi) + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right).
 \end{aligned}$$

Уравнения движения оболочки (1) и заполнителя (3) дополняются контактными и граничными условиями. На стыке ($r = R$) заполнителя и оболочки ставятся условия равенства компонент перемещений:

$$u_r = w, \quad u_\phi = \vartheta, \quad u_\psi = u \quad (4)$$

и равенства давлений

$$X = -\sigma_1 - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\sigma_2 - \rho h \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}, \quad Z = -\sigma_3 - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где X, Y, Z — давления со стороны оболочки на заполнитель.

Для решения интегро-дифференциальных уравнений применяется метод замораживания [14, 15]. Тогда из уравнений (1) и (3) получается система дифференциальных уравнений

с комплексными коэффициентами. Решение уравнений колебания вязкоупругой среды (дифференциальные уравнения в частных производных с комплексными коэффициентами) получается

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\mu_l} \left(\mu_l^2 r \chi + \frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r^2} \right), \\ u_\psi &= \frac{1}{\mu_e r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\mu_l r} \frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r \partial \psi}, \\ u_\phi &= \frac{1}{\mu_e r \sin \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\mu_l r \sin \psi} \frac{\partial^2(r\chi)}{\partial r \partial \psi}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi, \bar{\psi}, \chi$ — решения скалярных волновых уравнений [13].

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{2\Gamma_{ep}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \bar{\psi} - \frac{1}{2\Gamma_{es}} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \chi - \frac{1}{2\Gamma_{es}} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

∇^2 — оператор Лапласа в сферической системе координат,

$$\Gamma_{ep} = 1 - \Gamma_{ep}^c(\omega_R) - i\Gamma_{ep}^c(\omega_R), \quad \Gamma_{es} = 1 - \Gamma_{es}^c(\omega_R) - i\Gamma_{es}^c(\omega_R),$$

$\Gamma_{ep}^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau$, $\Gamma_{es}^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$ — соответственно косинус и синус-образы Фурье ядра релаксации материала. Решение скалярного волнового уравнения (7) относительно потенциала φ ищется в виде

$$\varphi = \Gamma(r) \Upsilon(\psi, \phi) e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в первое волновое уравнение (7), получим следующие дифференциальные уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Gamma}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Gamma}{dr} + (\mu_e^2 - \frac{\lambda_l}{r^2}) \Gamma &= 0, \\ \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda_l Y &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mu_e = \omega/c_p$, $\mu_l = \omega/c_s$, λ_l — константа разделения.

Второе дифференциальное уравнение (9) представляет уравнение Лежандра, его решение существует лишь при условии $\lambda_l = n(n+1)$, ($n = 1, 2, \dots$). Частные решения образуются из функций типа присоединенных сферических функций 1-го рода:

$$\Upsilon_{kn}^c = P_n^k(\cos \psi) \cos(k\phi), \quad \Upsilon_{kn}^s = P_n^k(\cos \psi) \sin(k\phi),$$

где k — половина числа узловых меридианов или число узловых межрадиальных плоскостей.

Первое уравнение (9) представляет уравнение Бесселя комплексного аргумента, решение которого имеет следующей вид [3, 4, 16–18]:

$$\Gamma(r) = A_n j_n(\mu_e r) + B_n h_n(\mu_e r), \quad (10)$$

где $j_n(\mu_e r)$ и $h_n(\mu_e r)$ — сферические функции Бесселя и Неймана.

Из условия конечности силовых и кинематических параметров при $r = 0$ функция Неймана превращается в нуль. Тогда решение (10) принимает вид $\Gamma(r) = A_n j_n(\mu_e r)$. Сферические функции Бесселя связаны с цилиндрическими функциями формулой

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z). \quad (11)$$

На основе выше приведённого решения остальные уравнения (7) принимают следующий вид:

$$\varphi = [A_n j_n(\mu_e r)] \Upsilon^c(\psi, \phi) e^{i\omega t}, \quad \bar{\psi} = [B_n j_n(\mu_l r)] \Upsilon^c(\psi, \phi) e^{i\omega t}, \quad \chi = [C_n j_n(\mu_l r)] \Upsilon^c(\psi, \phi) e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Учитывая (4) и (12), получим выражения для компонент вектора перемещений:

$$u_r = a_0 Y^c, \quad u_\psi = a_1 \frac{\partial}{\partial \psi} Y^c - a_2 \frac{k}{\sin \psi} Y^s, \quad u_\phi = a_2 \frac{\partial}{\partial \psi} Y^c - a_1 \frac{k}{\sin \psi} Y^s. \quad (13)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\bar{\mu}_e} \left[A_n \frac{\partial}{\partial r} j_n(\mu_e r) \right] + \frac{N}{\bar{\mu}_l r} [C_n j_n(\mu_l r)], \\ a_1 &= \frac{1}{\bar{\mu}_e r} [A_n j_n(\mu_e r)] + \frac{1}{\bar{\mu}_l r} \left[C_n \frac{\partial}{\partial r} [r j_n(\mu_l r)] \right], \\ a_2 &= [B_n j_n(\mu_l r)], \quad Y^s = \sin k\phi P_n^k(\cos \psi), \quad N = n(n+1). \end{aligned} \quad (14)$$

Для нахождения собственной частоты рассмотренной системы «оболочка — заполнитель» составим частотное уравнение. Для удовлетворения граничных условий (5) нам потребуются выражения на сферической поверхности. Согласно закону Гука,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= b_0 \Upsilon^c(z), \quad \sigma_{r\psi} = b_1 \frac{\partial}{\partial \psi} \Upsilon^c(z) - b_2 \frac{k}{\sin \psi} \Upsilon^s(z), \\ \sigma_{r\phi} &= -b_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \Upsilon^c(z) - b_1 \frac{k}{\sin \psi} \Upsilon^s(z), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= \lambda_{0c} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_0) - N \frac{a_1}{r} \right] + 2\mu_{0c} \frac{\partial a_0}{\partial r}, \\ b_1 &= \mu_{0c} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_1}{r} \right) + \frac{a_0}{r} \right], \\ b_2 &= \mu_{0c} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a_1}{r} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, подставляем найденные перемещения и напряжения в граничные условия (4) и (5), тогда получим следующую систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (N-1+\nu-K(\omega_R)\omega^2)a_1(R) - [b^2(N-2)+\nu+1]a_0(R) + \frac{K(\omega_R)}{\rho h}b_1(R) &= 0, \\ \left[\frac{1}{2}(N-2)(1-\nu) - K(\omega_R) \right] + \frac{K(\omega_R)}{\rho h}b_2(R) &= 0, \\ N[b^2(N-1+\nu)+1+\nu]a_1(R) - [b^2(N-1+\nu)N+2(1+\nu)-K(\omega_R)\omega^2] - \\ &\quad - \frac{K(\omega_R)}{\rho h}b_0(R) = 0, \\ b_1(R_0) &= 0, \\ b_2(R_0) &= 0, \\ b_0(R_0) + \rho_0 R_0 \omega^2 \Delta_n(R_0) a_0(R_0) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $K(\omega_R) = (1-\nu)\rho R/\bar{E}$, $\Delta_n(R_0) = [n - \bar{\mu}_c R_0 j_{n+1}(\bar{\mu} R_0)/j_n(\bar{\mu} R_0)]$.

Однородные алгебраические уравнения (16) позволяют определить комплексные собственные частоты сферической оболочки с заполнителем. Можно выделить два типа колебаний: (a_0, a_1, b_0, b_1) и (a_2, b_2) . Первый из них характеризуется перемещениями без компонент вращения: $A_1, A_2, C_1, C_{20} \neq 0, A_1, A_2, C_1, C_{20} \neq 0$. Соответствующее частотное уравнение получается из 1-го, 3-го, 4-го и 6-го уравнения (16). Чисто радиальным колебаниям сферы соответствуют значения $k = n = 0$. При $k = 0$ и $n = 1$ происходит движение системы как жесткого тела. Случаю $k = 0, n = 2$ соответствует изменение формы из вытянутого сфероида. Частотное уравнение свободных колебаний сферы с вязкоупругим заполнителем получается из (16):

$$\begin{aligned} & [(N - \rho_c^\bullet + \rho_c^{\bullet 2}) - \rho_c^\bullet \mu_l^\bullet \alpha - (1 + \rho_c^\bullet) \mu_e^\bullet \beta - \mu_e^\bullet \mu_l^\bullet \alpha \beta] \lambda^2 + \\ & + [NL_2 + \rho_c^\bullet (L_3(2N - 1) \bar{\chi} E_c^\bullet) - (r_1 + \bar{\chi} E_c^\bullet) \rho_c^\bullet \mu_l^\bullet \alpha + (-L_2 + \rho_c^\bullet (r_n - 2 \bar{\chi} E_c^\bullet)) \mu_e^\bullet \beta - L \mu_l^\bullet \alpha \beta] \lambda + \\ & + NL_1 - L_1 \mu_e^\bullet \beta - L_1 \mu_e^\bullet \mu_l^\bullet \alpha \beta = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{j'_n(\mu_l^\bullet)}{j_n(\mu_l^\bullet)}, \quad \beta = \frac{j'_n(\mu_e^\bullet)}{j_n(\mu_e^\bullet)}, \quad \mu_l^\bullet = \mu_l R, \quad \mu_e^\bullet = \mu_e R, \quad \lambda = k \omega^2, \\ \mu_l &= \frac{\omega}{c_l}, \quad \mu_e = \frac{\omega}{c_e}, \quad k = (1 - \nu^2) \rho R^2 / \bar{E}, \quad \bar{c}_l = \sqrt{\frac{E_{0c}}{2(1 + \nu_c) \rho_c}} \Gamma_k, \\ \bar{c}_l &= \sqrt{\frac{E_{0c}(1 - \nu_c)}{2(1 + \nu_c) \rho_c}} \Gamma_k, \quad E_c^\bullet = \frac{\bar{E}_c}{\bar{E} h_\bullet}, \quad \rho_c^\bullet = \frac{\rho_c}{\rho h_\bullet}, \quad h_\bullet = \frac{h}{R}, \quad \bar{\chi} = \frac{1 - \nu^2}{1 + \nu^2}, \\ L_1 &= r_1 r_n - N r_2 r_n + \bar{\chi} \bar{E}_c^\bullet (-r_n - 2r_1 + N r_3 + N r_2) + \bar{\chi}^2 E_c^{\bullet 2} (-2 - N), \\ L_2 &= -r_n - r_1 + 3 \bar{\chi} E_c^\bullet, \quad L_3 = -r_1 - N r_2 - N r_3, \quad r_1 = N - 1 + \nu, \\ r_2 &= b^2 (N - 2) + 1 + \nu, \quad r_3 = b^2 r_1 + 1 + \nu, \quad r_n = b^2 N r_1 + 2(1 + \nu). \end{aligned}$$

ρ — плотность оболочки, ρ_c — плотность заполнителя, h — толщина оболочки, $\bar{E} = E_0 \Gamma_k$, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона оболочки.

При отсутствии заполнителя уравнение (17) принимает следующий вид:

$$(N - \rho_c^\bullet + \rho_c^{\bullet 2}) \lambda_0^2 + (NL_2^0 - L_2^0) \lambda_0 + NL_1^0 = 0, \quad \lambda_0 = k \omega^2 \quad (18)$$

В уравнении (18) коэффициенты зависят от реальной части частоты. Поэтому алгебраическое уравнение (18) для вязкоупругих оболочек и заполнителя превращается в трансцендентное уравнение.

Уравнение (17) решается численно — методом Мюллера.

2. Результаты и анализ

Трансцендентное уравнение решается численно — методом Мюллера [15, 16], а также с использованием программного комплекса «MAPLE-18». Вязкоупругие свойства материала описываются с помощью трехпараметрического ядра релаксации [17]:

$$R_{\mu j}(t) = R_{\lambda j} = \frac{A_j e^{-\beta_j t}}{t^{1-\alpha_j}}, \quad j = 1, 2.$$

При конкретных расчетах приняты следующие параметры материала безграничной вязкоупругой среды [13, 14, 18]: $n = 2, h = 10^4 \text{ m}, \nu_c = 0.40, A = 0.048; \beta = 0.05; \alpha = 0.10, h = 0.00165, \lambda_2 = 6, E_{0c} = 4, \rho = 7.8 \cdot 10^3, \rho = 3.2 \cdot 10^3, E_0 = 40, \nu = 0.25, R = 2 \cdot 10^{-4}$. Корни частотного уравнения (18),

Таблица. Корни частотного уравнения при различных значениях v_c

Table. Roots of the frequency equation at different values of v_c

Номер корня	0	0.25	0.35	0.40
1	0.662	0.816	0.85	0.8733
2	1.8909	1.9285	1.9391	1.9479
3	2.9303	2.9539	2.9606	2.9656
4	3.0485	3.9658	3.9707	3.9744
5	4.959	4.9728	4.9607	4.9776
6	5.966	5.9774	5.0806	5.983

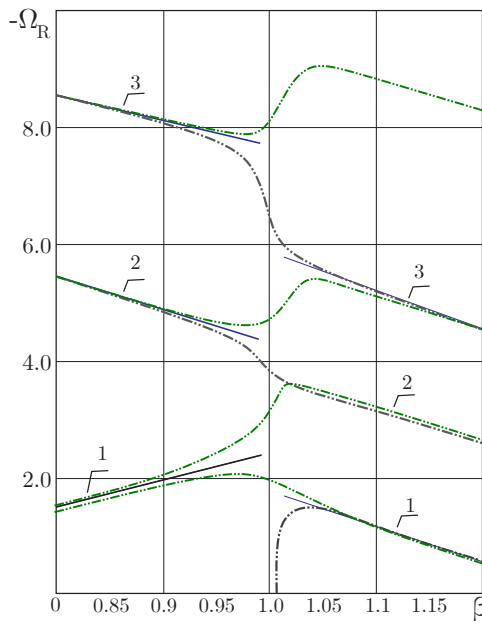


Рис. 1. Изменение собственной частоты крутильных колебаний от отношений скоростей поперечных волн $\beta = \frac{c_{s2}}{c_{s1}}$ при: 1 – $\rho^* = 0.8$, 2 – $\rho^* = 0.85$, 3 – $\rho^* = 0.98$

Fig. 1. Variation of the natural frequency of torsional oscillations from the ratio of transverse wave velocities $\beta = \frac{c_{s2}}{c_{s1}}$ at: 1 – $\rho^* = 0.8$, 2 – $\rho^* = 0.85$, 3 – $\rho^* = 0.98$

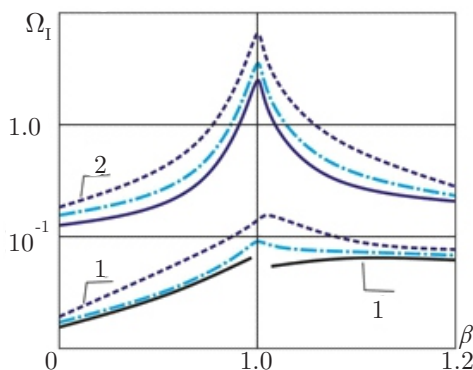


Рис. 2. Зависимость коэффициентов демпфирования от отношений скоростей поперечных волн $\beta = c_{s2}/c_{s1}$

Fig. 2. Dependence of damping coefficients on transverse wave velocity ratios $\beta = c_{s2}/c_{s1}$

описывающие колебания вязкоупругой сферической оболочки, приведены в Таблице. При определении реальных и мнимых частей частоты точность определения метода 10^{-10} .

Также полученные числовые результаты показаны на рис. 1 и рис. 2. На рис. 1 приведено изменение собственной частоты крутильных колебаний от отношений скоростей поперечных волн $\beta = c_{s2}/c_{s1}$ при: 1 – $\rho^* = 0.8$, 2 – $\rho^* = 0.85$, 3 – $\rho^* = 0.98$. Видно, что при $\beta = c_{s2}/c_{s1} = 1$ происходит разрыв в собственных частотах. На рис. 2 приведена зависимость коэффициентов демпфирования от отношений скоростей поперечных волн $\beta = c_{s2}/c_{s1}$. Было обосновано, что управление резонансными явлениями в процессе вибрации может осуществляться за счет рассеивания энергии.

Было обнаружено, что диссипация энергии принципиально различна для диссипативно-однородных и неоднородных механических систем. При расчете напряжений и перемещений по формулам (13), (15) суммирование производилось до тех пор, пока отношение текущего члена к текущей частной сумме не станет меньше 10^{-10} . Для обеспечения сходимости рядов (13) и (15) каждый раз проводился численный эксперимент.

Установлено, что для обеспечения точности расчета при вычислении перемещений и напряжений необходимо удерживать 11–16 членов ряда. В этом случае ошибка округления составляет до 1% : 1 – $\rho_2/\rho_1 = 0.02$, $\bar{C} = 0.5$, $a = 1$; 2 – $\rho_2/\rho_1 = 50$, $\bar{C} = 0.5$, $A1 = 0.01$, $\beta = 0.05$, $\alpha = 0.1$.

Низкочастотные аperiодические колебания быстро затухают со временем. Этот процесс требует глубокого анализа, так как при низкочастотных колебаниях (реальные и мнимые части собственной частоты отличаются от нуля)

могут возникать резонансные явления. Предполагается, что мнимые части собственных частот при аperiодических колебаниях близки к нулю. В этом случае возникают очень большие амплитуды перемещений и напряжений. Если реальные части собственной частоты равны нулю, а мнимые части отличны от нуля и отрицательны, то колебания затухают по экспоненциальному закону. Найденные реальные части собственной частоты описывают резонансные частоты рассматриваемой механической системы, а мнимые части характеризуют затухание колебаний механической системы в целом. Обнаруженное явление имеет большое значение для исследования диссипации энергии в виброзащитных системах.

Заключение

1. Построены теория и методы расчёта комплексных собственных частот колебаний упругих сферических неоднородностей в упругой среде. Проведена классификация таких колебаний на радиальные, крутильные и сфероидальные. Задача сводится к нахождению частот $\Omega = \Omega_R + i\Omega_i$, где Ω_R — реальная, а Ω_i — мнимая часть комплексных собственных частот, при которых системы уравнений движения имеют ненулевое решение в классе бесконечно дифференцируемых функций.
2. Обнаружено, что при некоторых значениях вязкоупругих плотностных параметров возникают низкочастотные собственные колебания. Эти колебания являются, по существу, некоторым аperiодическим движением, поскольку мнимая часть собственной частоты значительна.

Список литературы

1. Пожуев В. И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. № 1. С. 44–48.
2. Safarov I. I., Teshaeв M. Kh. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems // Theor. Appl. Mech. 2024. Vol. 51, no. 1. P. 1–12. DOI: 10.2298/TAM220510007S.
3. Durdiev D. Q., Safarov I. I., Teshaeв M. Kh. Propagation of waves in a fluid in a thin elastic cylindrical shell // WSEAS Transactions on Fluid Mechanics. 2024. Vol. 19. P. 113–119. DOI: 10.37394/232013.2024.19.11.
4. Сафаров И. И., Тешаев М. Х. Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2023. № 83. С. 166–179.
5. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочек и жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 103 с.
6. Украинец В. Н., Гирнис С. Р. Математическое моделирование динамики подкреплённых двухслойными оболочками тоннелей при действии транспортных нагрузок. Павлодар: Кереку, 2018. 116 с.
7. Alekseyeva L. A., Ukrainets V. N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // Int. Appl. Mech. 2009. Vol. 45. P. 981–990. DOI: 10.1007/s10778-010-0238-z.
8. Быков А. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н., Шестаков А. П. Ударно-волновой метод контроля процесса устранения трещин в железобетонных конструкциях // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 35–41.
9. Сафаров И. И., Тешаев М. Х. Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 63–73. DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
10. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.

11. *Fedorov A. Yu., Matveenko V. P., Shardakov I. N.* Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials // International Journal of Civil Engineering and Technology. 2018. Vol. 9, no. 8. P. 1062–1075.
12. *Amabili M.* Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // J. Sound Vib. 1996. Vol. 191, no. 5. P. 757–780. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0154.
13. *Karimov K., Turakhodjaev N., Akhmedov A., Chorshanbiev Sh.* Mathematical model for producing machine parts // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 264, no. 7. P. 04078. DOI: 10.1051/e3sconf/202126404078.
14. *Mirsaidov M. M., Sultanov T. Z.* Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures // Soil Mech. Found. Eng. 2013. Vol. 49. P. 250–256. DOI: 10.1007/s11204-013-9198-8.
15. *Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
16. *Fedorov A. Yu., Matveenko V. P., Shardakov I. N.* Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials // International Journal of Civil Engineering and Technology. 2018. Vol. 9, no. 8. P. 1062–1075.
17. *Быков А. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н., Шестаков А. П.* Ударно-волновой метод контроля процесса устранения трещин в железобетонных конструкциях // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 35–41.
18. *Karimov K., Akhmedov A., Karimova A.* Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2612. P. 030014. DOI: 10.1063/5.0116891.

References

1. Pozhuev VI. Action of a mobile load on a cylindrical shell in an elastic medium. Construction Mechanics and Design of Structures. 1978;(1):44–48.
2. Safarov II, Teshaeв MKh. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems. Theor. Appl. Mech. 2024;51(1):1–12. DOI: 10.2298/TAM220510007S.
3. Durdiyev DQ, Safarov II, Teshaeв MKh. Propagation of waves in a fluid in a thin elastic cylindrical shell. WSEAS Transactions on Fluid Mechanics. 2024;19:113–119. DOI: 10.37394/232013.2024.19.11.
4. Safarov II, Teshaeв MKh. Nonstationary motions of spherical shells in a viscoelastic medium. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2023;83:166–179.
5. Gontkevich VS. Natural Oscillations of Shells and Fluids. Kyiv: Naukova Dumka; 1964. 103 p.
6. Ukrainets VN, Girnis SN. Mathematical Modeling of the Dynamics of Tunnels Reinforced with Two-Layer Shells under the Action of Transport Loads. Pavlodar: Kereku; 2018. 116 p.
7. Alekseyeva LA, Ukrainets VN. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads. Int. Appl. Mech. 2009;45:981–990. DOI: 10.1007/s10778-010-0238-z.
8. Bykov AA, Matveenko VP, Shardakov IN, Shestakov AP. Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures. Mech. Solids. 2017;52:378–383. DOI: 10.3103/S0025654417040033.
9. Safarov II, Teshaeв MK. Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1):63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021.
10. Adamov AA, Matveenko VP, Trufanov NA, Shardakov IN. Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: UB RAS; 2003. 411 p.

11. Fedorov AYu, Matveenkov VP, Shardakov IN. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials. *International Journal of Civil Engineering and Technology*. 2018;9(8):1062–1075.
12. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *J. Sound Vib.* 1996;191(5): 757–780. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0154.
13. Karimov K, Turakhodjaev N, Akhmedov A, Chorshanbiev Sh. Mathematical model for producing machine parts. *E3S Web of Conferences*. 2021;264(7):04078. DOI: 10.1051/e3sconf/202126404078.
14. Mirsaidov MM, Sultanov TZ. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures. *Soil Mech. Found. Eng.* 2013;49:250–256. DOI: 10.1007/s11204-013-9198-8.
15. Adamov AA, Matveenkov VP, Trufanov NA, Shardakov IN. *Methods of Applied Viscoelasticity*. Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; 2003. 411 p.
16. Fedorov AYu, Matveenkov VP, Shardakov IN. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials. *International Journal of Civil Engineering and Technology*. 2018;9(8):1062–1075.
17. Bykov AA, Matveenkov VP, Shardakov IN, Shestakov AP. Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures. *Mech. Solids*. 2017;52(4):378–383. DOI: 10.18500/0869-6632-00316210.3103/S0025654417040033.
18. Karimov K, Akhmedov A, Karimova A. Development of mathematical model, classification, and structures of controlled friction and vibration mechanisms. *AIP Conference Proceedings*. 2023;2612:030014. DOI: 10.1063/5.0116891.



Мирсаидов Мирзиёд Мирсаидович — родился в Юкориичирчикском районе Ташкентской области Узбекской ССР (1948). Окончил Ташкентский политехнический институт по специальности «Инженер-механик» (1971) и Ташкентский государственный университет по специальности «Математик» (1986). Доктор технических наук (1987), профессор (1991), академик Академии наук Республики Узбекистан (2017). Заведующий кафедрой механики и компьютерного моделирования Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства». Научный руководитель 30 кандидатских (PhD) и 6 докторских (DSc) диссертаций. Автор более 200 научных работ в отечественных и зарубежных научных журналах, более 250 — в сборниках материалов зарубежных и республиканских научных конференций, более 15 монографий, 9 учебников и 14 учебных пособий.

Узбекистан, Ташкент 100000, ул. Кари Ниязи, 39
 Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт
 инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»
 E-mail: mirsaidov1948@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-8907-7869
 AuthorID (eLibrary.Ru): 980333



Сафаров Исмоил Иброхимович — родился в Вабкентском районе Бухарской области Узбекистана (1954). Окончил Ташкентский государственный университет (1977). Доктор физико-математических (1991), профессор (1995). Заведующий кафедрой высшей математики Ташкентского химико-технологического института. Научный руководитель 25 кандидатских (PhD) и 4 докторских (DSc) диссертаций. Победитель республиканского конкурса «Лучший научный руководитель года» (2004). Научные интересы: теория вязкоупругости, теория распространения волн, теория колебаний, теория устойчивости. Автор более 150 научных работ в отечественных и зарубежных научных журналах, более 200 — в сборниках материалов зарубежных и республиканских научных конференций, 20 монографий, 3 учебников и 4 учебных пособий.

Узбекистан, Ташкент 100011, улица Навои, 32
 Ташкентский химико-технологический институт
 E-mail: safarov54@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-0983-8451
 AuthorID (eLibrary.Ru): 820536



Тешаев Мухсин Худойбердиевич — родился в селе Гончи Каганского района Бухарской области Узбекистана (1961). Окончил Ташкентский государственный университет по специальности «Механика» (1983). Доктор физико-математических наук (2019). Работает в Бухарском отделении института Математики имени В. И. Романовского в должности главного научного сотрудника. Научный руководитель 7 кандидатских (PhD) диссертаций. Область научных интересов: теоретическая механика, а также механика деформируемого твердого тела. Автор более 120 научных работ в отечественных и зарубежных научных журналах, более 150 — в сборниках материалов зарубежных и республиканских научных конференций, 12 монографий, 1 учебника и 1 учебного пособия.

Узбекистан, Бухара 705018, улица М. Икбол, 11
Бухарское отделение Института Математики имени В. И. Романовского АН Р Уз
E-mail: muhsin_5@mail.ru
ORCID: 0000-0003-1893-7902
AuthorID (eLibrary.Ru): 587439



Элибоев Нурали Ражабалиевич — родился в Нуротинском районе Навоийской области Узбекистана (1990). Окончил факультет механики и математики Национального университета Узбекистана по направлению «Математика» (2016). С 2016 года работает на кафедре высшей математики Ташкентского химико-технологического института, с 2021 года — в должности старшего преподавателя. Научные интересы — механика деформируемых твёрдых тел. Автор научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, Ташкент 100011, улица Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт
E-mail: nurali_e@mail.ru
ORCID: 0009-0009-2429-9514