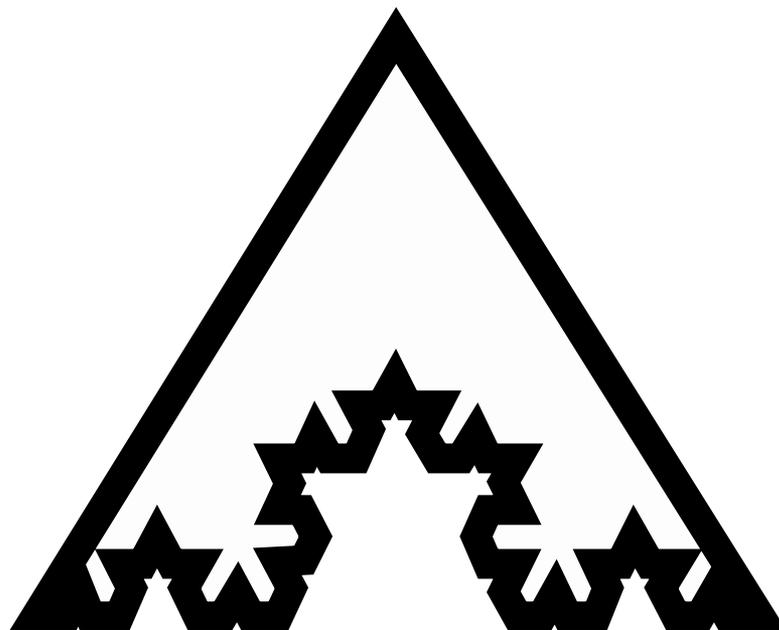


Трикладная Нелинейная Динамика



Нелинейные дни в Саратове для молодых

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном
исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН
(Санкт-Петербург, Россия)

В. А. Вакорин, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
(Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени
святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета
имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
(Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы
им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)

А. С. Пиковский, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

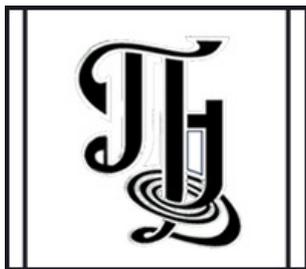
А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова
РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

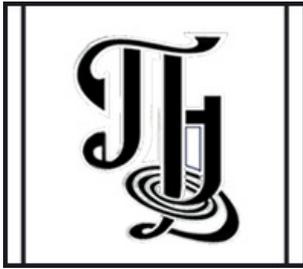
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 15.09.2023
Вышел в свет 29.09.2023
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 15,11 (16,25)
Тираж 100 экз. Заказ № 110-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru)

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 15.09.2023. Published 29.09.2023
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 15,11 (16,25)
Edition of 100 copies. Order No. 110-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Сысоев И. В. Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2023 547

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ
ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

Крылосова Д. А., Кузнецов А. П., Седова Ю. В., Станкевич Н. В. Автоколебательные системы с управляемой фазой внешнего воздействия 549

Илларионова Е. Д., Москаленко О. И. Мультистабильность вблизи границы индуцированной шумом синхронизации в ансамблях несвязанных хаотических систем 566

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Волкова С. А., Вытовтов К. А., Барабанова Е. А., Хахомов С. А., Коваленко Д. Л., Иванов М. Г. Аналитический метод исследования поведения оптической волны в нелинейной среде с периодически расположенными нанопленками 575

Вахлаева А. М., Ишбулатов Ю. М., Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Математическая модель фотоплетизмограммы для тестирования методов анализа сигналов биологической природы 586

Ростунцова А. А., Рыскин Н. М. Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов 597

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Vershinina O. S., Ivanchenko M. V. Mutual synchronization of oscillations in a system of coupled evolutionary games [*Вершинина О. С., Иванченко М. В.* Взаимная синхронизация колебаний в системе связанных эволюционных игр] 610

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Елисов М. В. Самоорганизационная динамика концентрации носителей зарядов в полупроводниках при их инжекции 622

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Назариков С. И. Математическая модель для выявления эпилептических приступов на записи ЭЭГ 628

Емельянова Е. П., Сельский А. О. Разметка стадий быстрого и медленного сна с помощью рекуррентного анализа 643

Журавлев М. О., Акимова А. С., Панина О. С., Киселев А. Р. Колебательные характеристики в электрической активности головного мозга новорожденных и их корреляция с различным возрастом гестации 650

Власенко Д. В., Заикин А. А., Захаров Д. Г. Классификация мозговой активности при помощи синоптических сетей 661

PERSONALIA

Памяти Максима Игоревича Балакина 670

C O N T E N T S

EDITORIAL

Sysoev I. V. Nonlinear days in Saratov for young scientists – 2023 547

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.
QUANTUM CHAOS

Krylosova D. A., Kuznetsov A. P., Sedova Yu. V., Stankevich N. V. Self-oscillating systems with controlled phase of external force..... 549

Illarionova E. D., Moskalenko O. I. Multistability near the boundary of noise-induced synchronization in ensembles of uncoupled chaotic systems 566

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Volkova S. A., Vytovtov K. A., Barabanova E. A., Khakhomov S. A., Kovalenko D. L., Ivanov M. G. Analytical method of optical wave behavior studying in nonlinear medium with periodically arranged conducting nanofilms 575

Vakhlaeva A. M., Ishbulatov Yu. M., Karavaev A. S., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Mathematical model of the photoplethysmogram for testing methods of biological signals analysis 586

Rostuntsova A. A., Ryskin N. M. Study of character of modulation instability in cyclotron resonance interaction of an electromagnetic wave with a counterpropagating rectilinear electron beam..... 597

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

Vershinina O. S., Ivanchenko M. V. Mutual synchronization of oscillations in a system of coupled evolutionary games..... 610

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Elisov M. V. Self-organization dynamics of charge carrier concentration in semiconductors due to the charge injection 622

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Nazarikov S. I. Mathematical model for epileptic seizures detection on an EEG recording 628

Emelyanova E. P., Selskii A. O. Marking stages of REM and non-REM sleep using recurrent analysis 643

Zhuravlev M. O., Akimova A. S., Panina O. S., Kiselev A. R. Oscillatory characteristics in the brain activity of the newborns and their correlation with different gestational ages ... 650

Vlasenko D. V., Zaikin A. A., Zakharov D. G. Classification of brain activity using synolitic networks 661

PERSONALIA

To the memory of Maksim I. Balakin 670



Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2023

И. В. Сысоев

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию 10.09.2023, опубликована 29.09.2023

Для цитирования: Сысоев И. В. Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2023 // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 547–548. DOI: 10.18500/0869-6632-003066. EDN: ZKWQDT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

В спортивных состязаниях подтвердить титул часто оказывается гораздо труднее, чем завоевать его впервые. Вот и мы, проводя в 2023-м очередную, XXX по счёту школу-конференцию «Нелинейные дни в Саратове для молодых», тоже переживали, удастся ли повторить успех, достигнутый двумя годами ранее, когда мы поставили себе задачу возродить школу, вдохнуть в неё новую жизнь. Следует признать, что результат даже превзошёл наши ожидания: нам удалось примерно в полтора раза увеличить число как лекторов, так и докладчиков — молодых исследователей, существенно расширив географию — с четырёх до двенадцати городов-участников (см. [рисунок](#)). Конференция прошла в том же формате, что и два года назад: с разделением на лекции ведущих учёных и доклады молодёжи, в «Точке кипения» СГУ и без параллельных секций, но увеличившееся число докладов заставило нас растянуть сроки — теперь конференция полноценно растянулась на пять дней, стартовав в 11 утра понедельника и завершившись в шестом часу вечера в пятницу, причём зал заседаний был полон до самого конца. В какой-то момент при формировании программы у оргкомитета даже возникли панические мысли, что не удастся уместить всю программу в отведённое время, но нашлись скрытые резервы за счёт сдвига начала и окончания мероприятия и увеличения числа докладов в день культурной программы, так что всё обошлось.

Все мы живём в материальном мире и любая деятельность требует ресурсов. Тут надо признать, что фактически Саратовский университет провёл всё мероприятие на своих площадках силами штатных сотрудников, а подавляющее число гостей, включая лекторов, были вынуждены

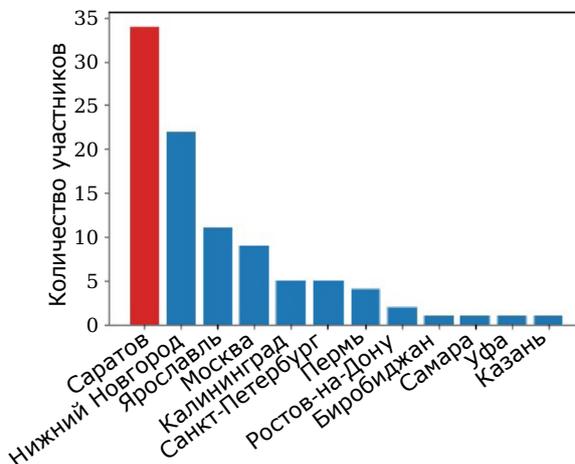
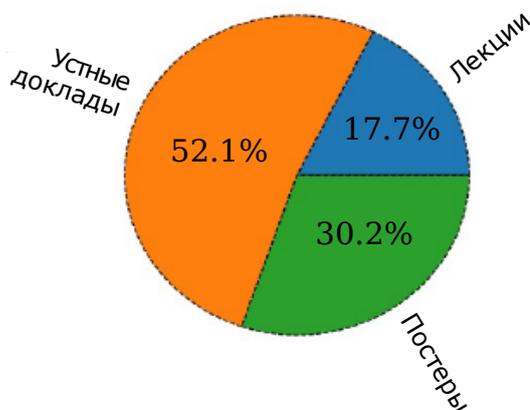
Статистика конференции



Мы послушали 18 лекций,
48 устных и 23 стендовых доклада



К нам приехало 62 участника
из 11 городов России



Распределение участников конференции по городам и докладов по форме исполнения

оплачивать свои командировочные расходы сами (чтобы хоть как-то сгладить эту проблему, оргвзнос был отменён для всех участников). К сожалению, финансирование научных мероприятий в России фактически возможно только за счёт внутренних средств научных и образовательных организаций, поскольку единственный оставшийся научный фонд — РНФ — прямо заявил, что это не входит в его уставную деятельность. А собственных средств всегда не хватает, что делает крайне сложнодостижимыми привычные ещё несколько лет назад форматы в виде санатория и тем более парохода.

Школа-конференция была задумана, в первую очередь, как инструмент неформального общения между исследователями. В этом смысле она на наш взгляд удалась: многие участники узнали друг о друге впервые, другие восстановили старые, ещё оставшиеся от учителей связи, кто-то просто открыл для себя мир нелинейной динамики в России. Поэтому несмотря на то, что чисто образовательный формат, свойственный предметным школам 1970-х, был давно уже утерян, конференция всё же осталась школой — местом, где люди изучают окружающий мир.

Как и в прошлый раз, мы просим наших участников не стесняться писать свои отзывы и замечания о конференции на почтовый ящик nonlindays@sgu.ru. В этом году, ориентируясь на запросы наших участников, мы сделали экскурсию в Парк покорителей космоса на месте приземления Ю. А. Гагарина, а также сделали всем электронные приглашения и сертификаты в личном кабинете участника. Мы очень признательны всем нашим участникам, потому что конференция — это, в первую очередь, люди. В этом году мы привлекли в качестве лекторов многих постоянных авторов журнала «Прикладная нелинейная динамика» из самых известных научных школ по нелинейной динамике в России: в Нижнем Новгороде, Саратове, Ярославле, Перми, Москве, при этом не пренебрегая участниками из других мест, в том числе новых для нас. Ну и традиционно, ряд работ исследователей, доложенных на конференции и не опубликованных ранее, увидит свет вместе с тематическим номером нашего журнала — этим номером.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003057
EDN: WILGFO

Автоколебательные системы с управляемой фазой внешнего воздействия

Д. А. Крылосова², А. П. Кузнецов¹, Ю. В. Седова¹, Н. В. Станкевич^{1,2}✉

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия

E-mail: krylosovadarina@gmail.com, kuzalexp@yandex.ru, sedovayv@yandex.ru, ✉ stankevichnv@mail.ru

Поступила в редакцию 2.06.2023, принята к публикации 10.08.2023,

опубликована онлайн 12.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящей работы состоит в исследовании автоколебательных систем при адаптивном внешнем воздействии. Имеется в виду ситуация, когда фаза внешнего воздействия дополнительным образом зависит от динамической переменной осциллятора. **Методы.** Используются методы карт динамических режимов и карт ляпуновских показателей, а также построение фазовых портретов и стробоскопических сечений. **Результаты.** В обзорном плане излагаются результаты для случая линейного затухающего осциллятора. Исследованы два случая автоколебательных систем — осциллятор ван дер Поля и автономный квазипериодический генератор с размерностью фазового пространства, равной трем. Описаны картины характерных динамических режимов. Описаны сценарии развития многомерного хаоса. Даны иллюстрации влияния управляющего параметра, отвечающего за степень зависимости фазы от переменной осциллятора, на динамику системы при разных частотах воздействия. **Заключение.** Введение зависимости фазы от динамической переменной приводит к расширению языков субгармонических резонансов, слабо выраженных в классическом осцилляторе ван дер Поля. Особенно это заметно для четных резонансов периодов 2 и 4. Для генератора квазипериодических колебаний в неавтономном случае наблюдаются трехчастотные торы, их области начинают доминировать при возрастании параметра адаптивности, вытесняя языки резонансных двухчастотных торов. Обнаружена разновидность многомерного хаоса, характеризующегося близким к нулю дополнительным показателем Ляпунова, показана возможность развития гиперхаоса в результате разрушения двухчастотного тора.

Ключевые слова: неавтономный осциллятор, фаза, осциллятор ван дер Поля, квазипериодичность, хаос.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

Для цитирования: Крылосова Д. А., Кузнецов А. П., Седова Ю. В., Станкевич Н. В. Автоколебательные системы с управляемой фазой внешнего воздействия // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 549–565. DOI: 10.18500/0869-6632-003057. EDN: WILGFO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Self-oscillating systems with controlled phase of external force

D. A. Krylosova², A. P. Kuznetsov¹, Yu. V. Sedova¹, N. V. Stankevich^{1,2}✉

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

E-mail: krylosovadarina@gmail.com, kuzalexp@yandex.ru,
sedovayv@yandex.ru, ✉stankevichnv@mail.ru

Received 2.06.2023, accepted 10.08.2023, available online 12.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The purpose of this work is to study self-oscillatory systems under adaptive external action. This refers to the situation when the phase of the external action additionally depends on the dynamical variable of the oscillator. In a review plan, the results are presented for the case of a linear damped oscillator. Two cases of self-oscillatory systems are studied: the van der Pol oscillator and an autonomous quasi-periodic generator with three-dimensional phase space. *Methods.* Methods of charts of dynamical regimes and charts of Lyapunov exponents are used, as well as the construction of phase portraits and stroboscopic sections. *Results.* In a review plan, the results are presented for the case of a linear damped oscillator. Two cases of self-oscillatory systems are studied: the van der Pol oscillator and an autonomous quasi-periodic generator with a three-dimensional phase space. The pictures of characteristic dynamical regimes are described. Scenarios for the development of multidimensional chaos are described. Illustrations are given of the influence of the control parameter, which is responsible for the degree of dependence of the phase on the oscillator variable, on the dynamics of the system at different frequencies of action. *Conclusion.* The taking into account of the dependence of the phase on a dynamical variable leads to an extension of the tongues of subharmonic resonances, which are weakly expressed in the classical van der Pol oscillator. This is especially noticeable for even resonances of periods 2 and 4. For the generator of quasi-periodic oscillations in the non-autonomous case, three-frequency tori are observed, their regions begin to dominate with an increase in the adaptivity parameter, displacing the tongues of resonant two-frequency tori. A variety of multidimensional chaos characterized by an additional Lyapunov exponent close to zero is discovered, the possibility of developing hyperchaos as a result of destruction is shown.

Keywords: non-autonomous oscillator, phase, van der Pol oscillator, quasi-periodicity, chaos.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (Project no. 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

For citation: Krylosova DA, Kuznetsov AP, Sedova YuV, Stankevich NV. Self-oscillating systems with controlled phase of external force. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):549–565. DOI: 10.18500/0869-6632-003057

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В природе и технике часто встречаются ситуации, когда внешнее воздействие на систему зависит не только от времени, но и от состояния самой системы. Это характерный пример наличия обратной связи. Примерами в радиотехнике и задачах коммуникации могут служить системы фазовой автоподстройки частоты [1–5]. В биологии система сердечно-сосудистой регуляции живых организмов при изменении нагрузки увеличивает или уменьшает частоту сердцебиений [6, 7]. Подобные ситуации характерны и для нейродинамики. Они могут быть охарактеризованы как адаптивные свойства системы, когда воздействие на нее управляется динамикой самой системы.

В качестве простейшего предмета для подобного изучения могут выступать колебательные системы при внешнем воздействии в случае, когда фаза воздействия зависит от динамической переменной системы. При этом автономная система, подвергаемая воздействию, может быть разного типа. Логично выбрать ситуации, отвечающие основным видам колебательных процессов. Это может быть простейший затухающий осциллятор, автоколебательная система с периодическим режимом, а также система с квазипериодическими колебаниями. Первый случай был ранее детально рассмотрен в [8–10] и в виде краткого обзора представлен в разделе 1. Следующая

ситуация, которую естественно ввести в рассмотрение — система с периодическими автоколебаниями. Такой случай на примере системы ван дер Поля обсуждается в разделе 2. В разделе 3 рассматривается управляемая система с автономной квазипериодичностью — квазипериодический генератор.

1. Случай затухающего осциллятора

Простейший случай колебательной системы с управляемой фазой внешнего воздействия представляет собой затухающий осциллятор, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = A \sin(pt + kx). \quad (1)$$

Здесь начальная фаза воздействия линейно зависит от динамической переменной x . Система существенно зависит от трех параметров: амплитуды воздействия A , частоты воздействия p , параметра интенсивности управления фазой k . Нормировка в уравнении (1) выбрана так, что собственная частота осциллятора равна единице, α — параметр затухания осциллятора.

Система (1) подробно обсуждалась в [8–10]. Было исследовано устройство плоскостей различных пар параметров [8, 9]. Показано, что зависимость фазы внешнего воздействия от динамической переменной существенно усложняет динамику. Система (1) демонстрирует множество областей колебательных режимов, реализующихся в окрестности частот, кратных резонансной. Обнаружена возможность бифуркаций удвоения периода колебаний и хаоса. В системе также наблюдается мультистабильность. Исследованы и другие случаи зависимости фазы воздействия от переменной, в частности, квадратичной и кубической нелинейности [10]. Обсуждается также еще один случай управления, когда от динамической переменной зависит частота воздействия [9]. Представлена радиоэлектронная экспериментальная реализация на основе колебательного контура с затуханием для случая как управляемой фазы, так и частоты воздействия [9]. Отметим также, что в [11] исследован нелинейный магнитный затухающий осциллятор с нелинейностью типа синуса и линейно зависящей фазой воздействия от угловой переменной.

2. Случай периодических автоколебаний — осциллятор ван дер Поля

Рассмотрим теперь случай, когда возбуждаемая система может генерировать периодические автоколебания. Простейшим примером является осциллятор ван дер Поля [12, 13]:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(pt + kx). \quad (2)$$

Здесь λ — управляющий параметр, отвечающий за отрицательную диссипацию. Остальные параметры те же, что и в (1). Нормировка выбрана так, что собственная частота осциллятора равна единице.

Уравнение (2) приводится к стандартному виду системы трех уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda - x^2)y - x + A \sin(w), \\ \dot{w} &= p + ky. \end{aligned} \quad (3)$$

Обсудим динамику системы (3). На рис. 1, а представлена карта динамических режимов осциллятора ван дер Поля под гармоническим воздействием (то есть случай $k = 0$) на традиционной для неавтономных систем плоскости параметров частота — амплитуда воздействия (p, A)

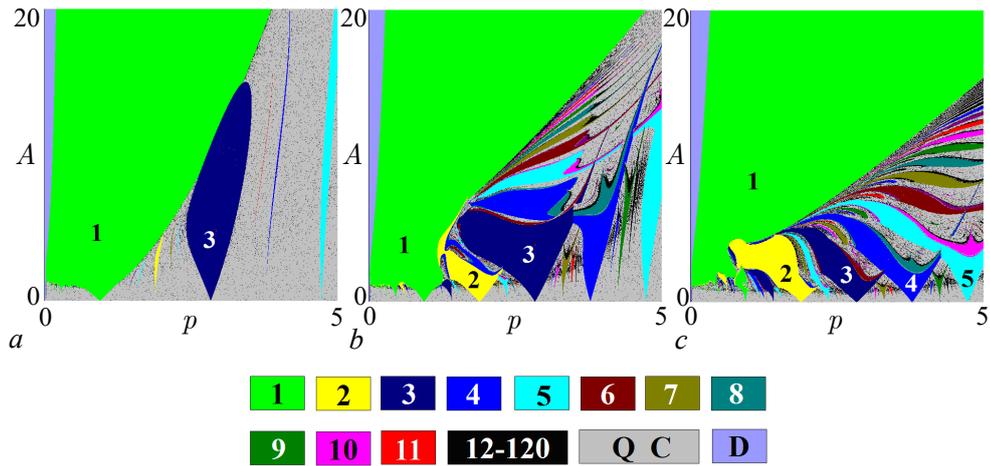


Рис. 1. Карты динамических режимов классического неавтономного осциллятора ван дер Поля (3) для $\lambda = 1$ (a) и с управляемой фазой воздействия для $k = 0.5$ (b) и $k = 1$ (c) (цвет онлайн)

Fig. 1. Charts of dynamical regimes for classical non-autonomous van der Pol oscillator (3) at $\lambda = 1$ (a) and with controlled phase of external force at $k = 0.5$ (b) and $k = 1$ (c) (color online)

для $\lambda = 1$. Такое значение параметра λ удобно тем, что оно является промежуточным между случаями квазигармонического приближения и релаксационных колебаний [12, 13]. Цвет на карте отвечает различным периодам колебаний системы, определяемым в сечении Пуанкаре. Поскольку рассматриваемая система неавтономная, то строилось стробоскопическое сечение. Цветовая палитра и периоды колебаний указаны под рисунком. Непериодические колебания обозначены серым цветом (в данном случае они могут быть квазипериодическими **Q** или хаотическими **C**, этот метод их не различает). Показана также узкая область разбегания траекторий **D**.

На рис. 1, a можно видеть обширную область периода 1, отвечающую основному резонансу. Правее ее располагаются области синхронизации на субгармониках внешней силы (по терминологии [14]). Наиболее выражен язык синхронизации, отвечающий периоду 3, что связано с кубическим характером нелинейности осциллятора ван дер Поля.

Влияние на наблюдаемые режимы зависимости фазы от динамической переменной иллюстрируют рис. 1, b и рис. 1, c, которые относятся к случаям $k = 0.5$ и $k = 1$. Можно видеть, что введение такой зависимости приводит к расширению языков в области синхронизации на субгармониках внешней силы, слабо выраженных в классическом осцилляторе ван дер Поля. Особенно это заметно для четных резонансов периодов 2 и 4. В случае рис. 1, c резонансы с последовательными периодами в области небольших амплитуд воздействия становятся «равноправными».

На рис. 2 показаны увеличенные фрагменты рис. 1, b, иллюстрирующие особенности устройства плоскости параметров. Рис. 2, a представляет увеличенную область между языками периодов 2 и 4. Можно видеть, что при небольших амплитудах воздействия картина стала близка к классическому синус-отображению окружности [15, 16]. Рис. 2, b — область синхронизации на гармониках внешней силы (по терминологии [14]). Она располагается в диапазоне частот, меньших собственной частоты осциллятора. Такие резонансы на карте характеризуются системой языков периода 1 — им отвечает разное число оборотов фазовой траектории, но единственное пересечение с сечением Пуанкаре. Примеры фазовых портретов для разных языков периода 1 для значений параметров, отмеченных точками на карте, представлены на рис. 2, d–g. Хорошо видно увеличение оборотов траектории при уменьшении частоты внешнего сигнала. Между языками периода 1 на рис. 2, b наблюдаются и очень узкие языки других периодов.

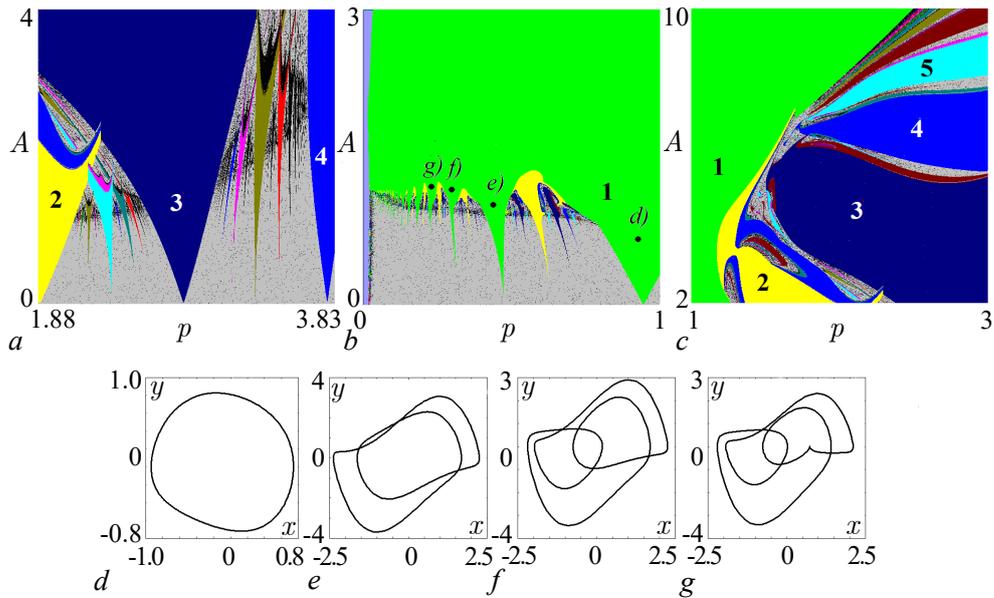


Рис. 2. Увеличенные фрагменты карты динамических режимов неавтономного осциллятора ван дер Поля (3), $\lambda = 1$, $k = 0.5$ (a, b, c). Фазовые портреты, иллюстрирующие синхронизацию на гармониках внешней силы: $p = 0.92$, $A = 0.655$ (d); $p = 0.43$, $A = 1.015$ (e); $p = 0.3$, $A = 1.17$ (f); $p = 0.23$, $A = 1.2$ (g) (цвет онлайн)

Fig. 2. Zoomed fragments of chart of dynamical regime for non-autonomous van der Pol oscillator (3) at $\lambda = 1$, $k = 0.5$ (a, b, c). Phase portraits illustrating synchronization on the harmonics of an external force: $p = 0.92$, $A = 0.655$ (d); $p = 0.43$, $A = 1.015$ (e); $p = 0.3$, $A = 1.17$ (f); $p = 0.23$, $A = 1.2$ (g) (color online)

Фрагмент карты на рис. 2, c иллюстрирует область достаточно больших амплитуд, когда для частот выше собственной вершины резонансных языков разных периодов стягиваются к границе основного резонанса.

Обсудим более детально влияние управляющего параметра k на динамику системы. С этой целью были построены примеры карт динамических режимов на плоскости параметров (k, A) для двух значений частот воздействия: равной собственной частоте осциллятора $p = 1$ (рис. 3, a) и характеризующейся достаточно большой частотной отстройкой $p = 5$ (рис. 3, b).

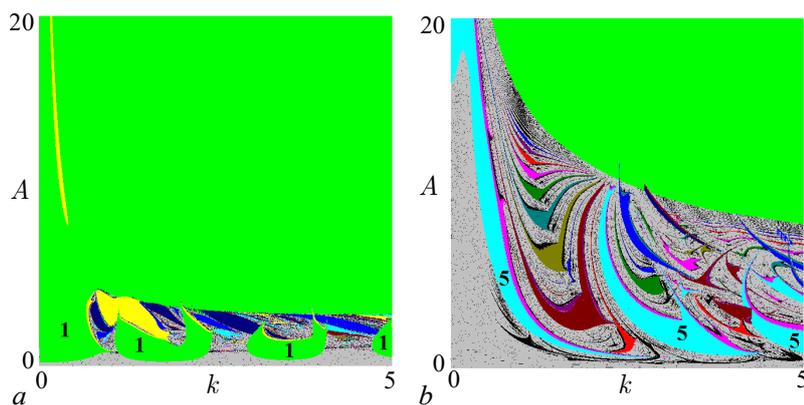


Рис. 3. Карты динамических режимов неавтономного осциллятора ван дер Поля (3) для $p = 1$ (a) и $p = 5$ (b), $\lambda = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Charts of dynamical regime for non-autonomous van der Pol oscillator (3) at $p = 1$ (a) and $p = 5$ (b), $\lambda = 1$ (color online)

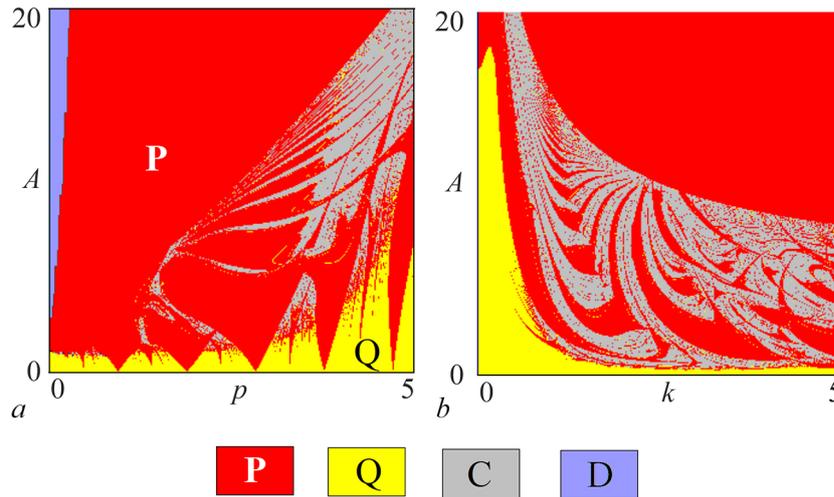


Рис. 4. Карты ляпуновских показателей неавтономного осциллятора ван дер Поля (3) для $k = 0.5$ (a) и $p = 5$ (b), $\lambda = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Charts of Lyapunov exponents for non-autonomous van der Pol oscillator (3) at $k = 0.5$ (a) and $p = 5$ (b), $\lambda = 1$ (color online)

Можно видеть, что при воздействии на резонансной частоте $p = 1$ при небольших амплитудах воздействия возникает система островов периода 1, располагающихся достаточно регулярно вдоль оси k . При больших амплитудах A наблюдается только режим периода 1. В свою очередь для частоты $p = 5$ можно видеть систему островов периода 5. При этом с увеличением амплитуды воздействия наблюдается множество окон самых разных периодов, погруженных в область нерегулярной динамики.

Как мы отмечали, использованный выше метод не различает хаотические и квазипериодические режимы. В рассматриваемой системе, однако, последние возможны (в отличие от случая затухающего осциллятора (1)). Чтобы продемонстрировать это и выявить области локализации данных режимов, были построены примеры карт ляпуновских показателей, показанные на рис. 4. Цвет на картах определялся в соответствии со спектром показателей Ляпунова $\Lambda_{1,2,3}$:

- P** — периодический режим, $\Lambda_1 = 0, \Lambda_{2,3} < 0$;
- Q** — квазипериодический режим, $\Lambda_{1,2} = 0, \Lambda_3 < 0$;
- C** — хаотический режим $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$.

Также отмечена узкая область разбегания траекторий **D**.

3. Случай трехмерной автоколебательной системы с адаптивным внешним воздействием — квазипериодический генератор

Увеличим теперь размерность автономной системы до трех. Это создает возможность усложнения ее динамики. Здесь мы рассмотрим трехмерную систему [17, 18], которая в автономном режиме в зависимости от параметров способна демонстрировать состояние равновесия, периодические и квазипериодические колебания. Если говорить о радиофизике, то подобную систему можно назвать квазипериодическим генератором. Известно несколько примеров таких систем [17–23]. Отметим, что квазипериодические генераторы, возбуждаемые даже простым гармоническим сигналом, мало исследованы. Можно указать работы [22, 24], относящиеся к модифицированному генератору Анищенко–Астахова, но там исследована четырехмерная система,

причем в рамках однопараметрического анализа. В работе [25] исследован вариант генератора без состояний равновесия, но в случае импульсного воздействия.

Исследуемая в рамках данной работы система имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= A \sin(pt + kx), \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \mu \dot{x}^2.\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь λ — управляющий параметр генератора, а ω_0 — частотный параметр. Остальные параметры выбираем аналогично [17, 18]: $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\mu = 0.02$, $\beta = 1/18$, $\lambda = -1$. При таком выборе параметров автономная система (4) может демонстрировать как периодические, так и квазипериодические колебания в зависимости от значения параметра ω_0 . Мы выберем два случая, когда $\omega_0 = 5$ и $\omega_0 = 2\pi$, что отвечает периодическим и квазипериодическим колебаниям автономной системы. Отметим, что зависимость типа режима от параметра ω_0 не позволяет исключить его перенормировкой, как в случае осциллятора ван дер Поля, для которого тип режима не зависит от собственной частоты.

Система (4) приводится к стандартному виду четырех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x + A \sin(w), \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - \mu y, \\ \dot{w} &= p + ky.\end{aligned}\tag{5}$$

При использовании метода карт показателей Ляпунова следует иметь в виду, что поскольку размерность автономной системы увеличилась, то модель (5) будет иметь 4 характеристических показателя Ляпунова $\Lambda_{1,2,3,4}$. Соответственно, возникает возможность новых динамических режимов, так что будем идентифицировать:

- P** — периодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_{2,3,4} < 0$;
- Q2** — двухчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_{1,2} = 0$, $\Lambda_{3,4} < 0$;
- Q3** — трехчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_{1,2,3} = 0$, $\Lambda_4 < 0$;
- C** — хаос $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_{3,4} < 0$;
- C0** — хаос с дополнительным, близким к нулю показателем Ляпунова $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 \approx 0$, $\Lambda_4 < 0$;
- HC** — гиперхаос $\Lambda_{1,2} > 0$, $\Lambda_3 = 0$, $\Lambda_4 < 0$.

3.1. Случай гармонического внешнего воздействия на периодические и квазипериодические колебания. Сначала рассмотрим случай простого гармонического воздействия, когда $k = 0$. На рис. 5 представлены карты показателей Ляпунова для двух значений параметра ω_0 , когда автономная система демонстрирует периодические и квазипериодические автоколебания. В случае возбуждения периодических автоколебаний (рис. 5, а) можно видеть основной язык синхронизации **P**, имеющий острие в точке, отвечающей частоте внешнего воздействия, равной частоте собственных колебаний генератора. Имеются очень узкие языки синхронизации разных периодов, так можно различить резонансы на удвоенной, утроенной и упятеренной частотах. Языки периодических режимов погружены в область двухчастотных квазипериодических колебаний **Q2**. Заметим, что возле основного языка синхронизации при достаточно больших амплитудах сигнала можно обнаружить небольшую область хаотического поведения, которая возникает при перекрытии языков синхронизации на кратных частотах.

В случае воздействия гармоническим сигналом на устойчивый инвариантный тор могут наблюдаться не только двухчастотные **Q2**, но и трехчастотные **Q3** квазипериодические колебания,

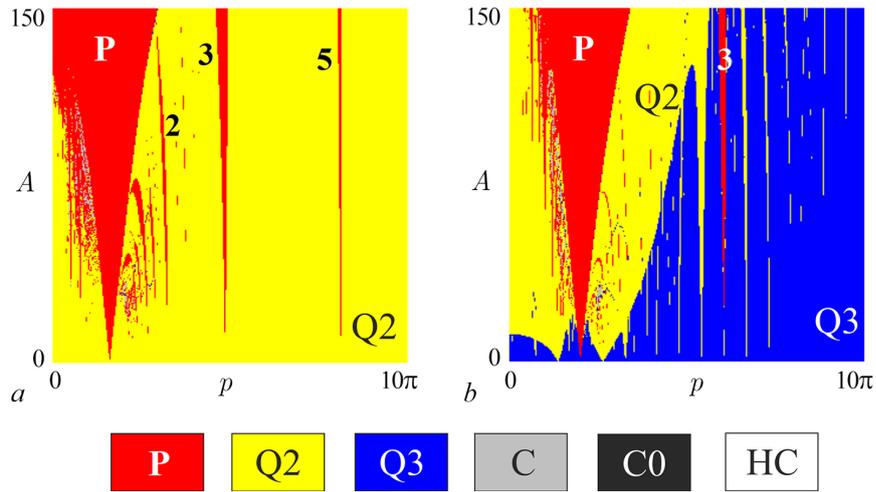


Рис. 5. Карты ляпуновских показателей неавтономного квазипериодического генератора (5) для $k = 0$ и $\omega_0 = 5$ (a), $\omega_0 = 2\pi$ (b). Остальные параметры: $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\mu = 0.02$, $\beta = 1/18$, $\lambda = -1$. Цифрами обозначены периоды циклов в стробоскопическом сечении (цвет онлайн)

Fig. 5. Charts of Lyapunov exponents of a non-autonomous quasi-periodic generator (5) for $k = 0$ and $\omega_0 = 5$ (a), $\omega_0 = 2\pi$ (b). Other parameters: $\varepsilon = 4$, $b = 1$, $\mu = 0.02$, $\beta = 1/18$, $\lambda = -1$. The numbers indicate the periods of cycles in the stroboscopic section (color online)

рис. 5, b. В отличие от рис. 5, a, области двухчастотных торов **Q2** имеют вид языков с остриями, расположенными на оси частоты воздействия. Им отвечают резонансные двухчастотные торы, возникающие на поверхности трехчастотного. Отметим, что внешний сигнал может инициировать периодические колебания **P**, несмотря на то, что автономная система демонстрирует квазипериодический режим. На рис. 5, b наблюдается основной язык синхронизации, а также узкий язык периода 3. Отметим, что хорошо прослеживаются два языка двухчастотной квазипериодичности справа и слева от основного языка синхронизации. Области хаоса возможны возле основного языка синхронизации и занимают малые области в пространстве параметров.

Отметим, что наблюдаемая картина отчасти похожа на возбуждаемые гармоническим сигналом два связанных осциллятора ван дер Поля [26, 27].

3.2. Случай адаптивного внешнего воздействия на периодические колебания. Рассмотрим теперь трансформацию картины режимов в системе (5) при наличии адаптивности внешнего сигнала. Сначала рассмотрим случай $\omega_0 = 5$, когда автономная система демонстрирует периодические автоколебания.

На рис. 6 представлены карта динамических режимов и ляпуновская карта на плоскости период — амплитуда внешнего сигнала (p , A) для значения параметра адаптивности $k = 5$. Хорошо видно, что наличие большой адаптивности приводит к разрушению основного языка синхронизации периода 1. Однако наблюдается развитие языков синхронизации других периодов — выраженными становятся языки периода 3, 4, 5 и т. д. Внутри этих языков на рис. 6, a хорошо прослеживаются бифуркации удвоения периода, например область периода 6 внутри языка периода 3. Внутри языков периода 4 и 5 на карте ляпуновских показателей просматриваются также области квазипериодичности **Q2** (отмечены стрелками на рис. 6, b). Они возникают в результате бифуркации Неймарка–Сакера, что иллюстрируют фазовые портреты в стробоскопическом сечении на рис. 6, c и 6, d. На рис. 6, c показана ситуация, когда на базе предельного цикла периода 4 в результате бифуркации Неймарка–Сакера рождается 4-компонентный двухчастотный инвариантный тор. Черным цветом обозначены неподвижные точки в сечении до порога бифуркации,

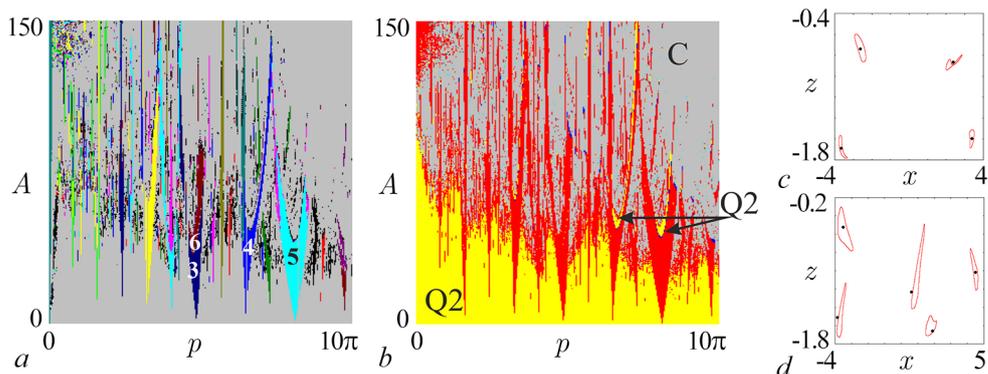


Рис. 6. Карта динамических режимов (a) и карта показателей Ляпунова (b) для генератора квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием (5) в режиме периодических колебаний, $\omega_0 = 5$, для $k = 5$. Примеры стробоскопических сечений, демонстрирующие вторичные бифуркации Неймарка–Сакера внутри языков синхронизации: $c - A = 45, p = 21$ (черный цвет), $A = 50, p = 21$ (красный цвет); $d - A = 46, p = 25$ (черный цвет), $A = 46, p = 25.4$ (красный цвет) (цвет онлайн)

Fig. 6. Chart of dynamical regime (a) and chart of Lyapunov exponents (b) for a quasi-periodic generator with an adaptive external action (5) in the regime of periodic self-oscillations, $\omega_0 = 5$, for $k = 5$. Examples of stroboscopic sections showing secondary Neimark–Sacker bifurcations inside synchronization tongues: $c - A = 45, p = 21$ (black), $A = 50, p = 21$ (red); $d - A = 46, p = 25$ (black), $A = 46, p = 25.4$ (red) (color online)

а красным цветом показаны инвариантные кривые за порогом бифуркации. Значения параметров указаны в подписи к рисунку. Аналогичная бифуркация происходит на базе языка синхронизации периода 5, что иллюстрирует рис. 6, d.

Отметим, что адаптивное воздействие приводит к формированию областей хаоса С, появляющихся в результате перекрытия языков синхронизации. Значительные области хаоса наблюдаются также при больших амплитудах сигнала. Наличие обширных областей хаоса является одним из отличий от случая осциллятора ван дер Поля.

3.3. Случай адаптивного внешнего воздействия на квазипериодические колебания.

Теперь перейдем к случаю, когда $\omega_0 = 2\pi$, и автономная система демонстрирует двухчастотные квазипериодические колебания. На рис. 7 представлен набор карт динамических режимов и карт показателей Ляпунова для данной ситуации при различных значениях параметра k , отвечающего за адаптивность системы (5).

Введение даже малой адаптивности (рис. 7, a, $k = 0.5$) меняет картину таким же образом, как и в случае периодических колебаний: основной язык синхронизации разрушается, при этом ярко выраженным становится язык периода 2. На карте показателей Ляпунова можно видеть, что при малых амплитудах наблюдаются трехчастотные торы Q3, со встроенной системой языков двухчастотных торов на комбинационных частотах. С увеличением амплитуды языки двухчастотных торов перекрываются, образуя однородную область Q2. Внутри языков двухчастотных торов можно обнаружить очень узкие языки периодических колебаний, которые с увеличением амплитуды расширяются и возникают хаотические колебания.

При увеличении параметра адаптивности до значения $k = 1$ (рис. 7, b) язык периода 2 также разрушается, но выраженными становятся языки периодов 4 и 5. Области хаоса расширяются, при этом порог возникновения хаоса по амплитуде A уменьшается.

При больших значениях параметра адаптивности внешнего сигнала $k = 5$ (рис. 7, c) на карте режимов мы видим, что происходит почти полное исчезновение периодических режимов. Лишь очень небольшие острова периодичности наблюдаются внутри области нерегулярных колебаний. На карте показателей Ляпунова при этом при малой амплитуде сохраняются трехчас-

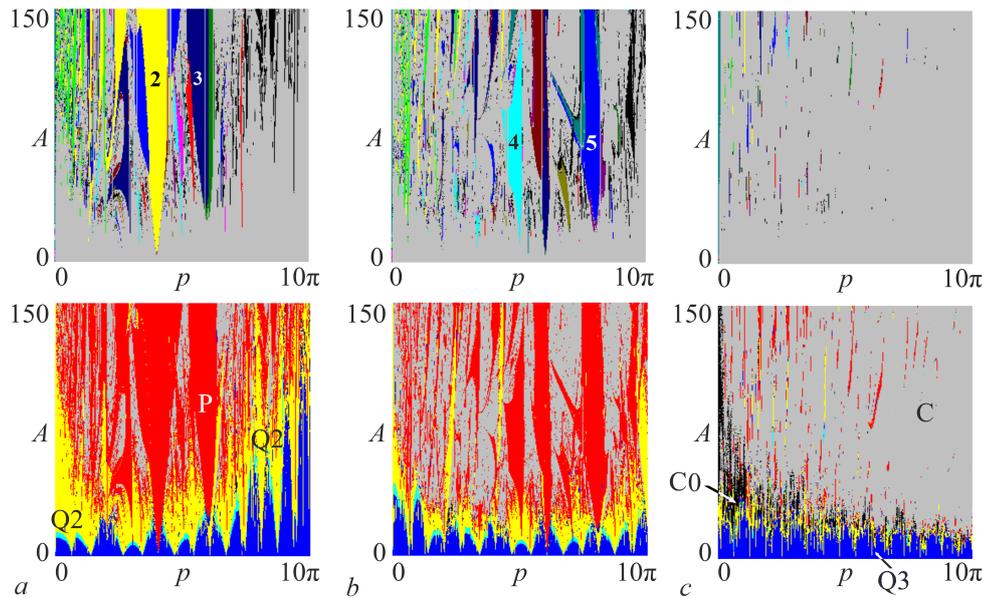


Рис. 7. Набор карт динамических режимов (верхний ряд) и соответствующих карт показателей Ляпунова (нижний ряд) для генератора квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием (5) в режиме квазипериодических колебания, $\omega_0 = 2\pi$. $k = 0.5$ (a); $k = 1$ (b); $k = 5$ (c) (цвет онлайн)

Fig. 7. A set of charts of dynamic regimes (top row) and corresponding charts of Lyapunov exponents (bottom row) for a quasi-periodic generator with an adaptive external action (5) in the quasi-periodic oscillation regime, $\omega_0 = 2\pi$. $k = 0.5$ (a); $k = 1$ (b); $k = 5$ (c) (color online)

тотные торы **Q3**, которые начинают доминировать, вытесняя языки двухчастотных режимов, наблюдавшиеся на рис. 7, a, b.

На рис. 8, a представлены графики показателей Ляпунова в широком диапазоне изменения амплитуды внешнего сигнала для частоты воздействия $p = 5$ и их увеличенные фрагменты, рис. 8, b, c. При малой амплитуде воздействия на рис. 8, a хорошо прослеживается трехчастотная квазипериодичность **Q3**, когда $\Lambda_{1,2,3} = 0$. Ее иллюстрирует рис. 8, d, на котором слева представлен аттрактор соответствующего трехчастотного тора в стробоскопическом сечении (рис. 8, d1) и справа в двойном сечении Пуанкаре (рис. 8, d2). При построении двойного сечения выбирались точки, попадающие в слой $|x| < 10^{-2}$, с дополнительным условием $y > 0$. В двойном сечении можно видеть гладкую замкнутую инвариантную кривую, что и отвечает трехчастотному тору.

С увеличением амплитуды сигнала происходит частичный захват частот и рождается двухчастотный тор. Данный переход происходит в результате седло-узловой квазипериодической бифуркации SNQ типа, описанной в [28], и в момент бифуркации рождается пара: устойчивый и седловой торы. На рис. 8, e представлены однократное и двукратное отображения для данного аттрактора. В стробоскопическом сечении хорошо видно, что инвариантная кривая имеет достаточно сложную форму — она многооборотная, то есть имеет большое число вращения (рис. 8, e1). В двойном сечении Пуанкаре можно видеть 17 неподвижных точек (рис. 8, e2), которые отвечают 17-оборотному двумерному тору.

Дальнейшее увеличение амплитуды воздействия приводит к разрушению двухчастотных торов **Q2** и формированию хаотического аттрактора. Это иллюстрирует увеличенный фрагмент графиков на рис. 8, b. Расчеты показывают, что в этом случае второй показатель, как это обычно принято в численных расчетах, может считаться нулевым (его величина порядка 10^{-5}). В то же время третий показатель Ляпунова имеет очень малое значение по абсолютной величине (порядка 10^{-3}), но при этом он отрицателен. На рис. 8, b соответствующая область обозначена **C0**. Эта особенность динамики представляется интересной, и мы дадим несколько комментариев.

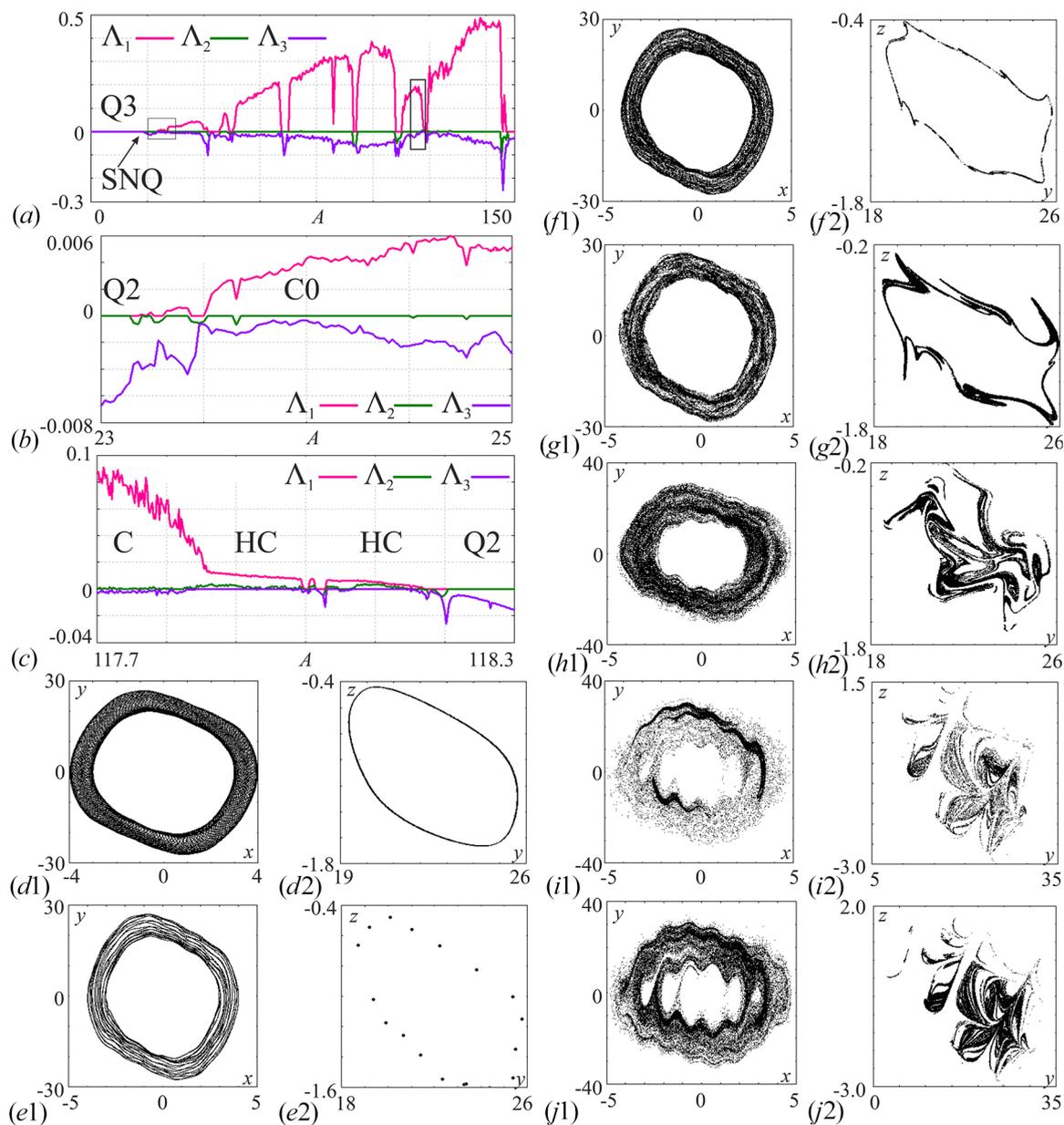


Рис. 8. $a-c$ – Графики показателей Ляпунова в различных масштабах для генератора квазипериодических колебаний с адаптивным внешним воздействием (5) в режиме квазипериодических колебаний, $\omega_0 = 2\pi$, $k = 5$, $p = 5$. SNQ – седло-узловая бифуркация инвариантных торов. Аттракторы системы в стробоскопическом и двойном сечении Пуанкаре: $A = 10$ (d); $A = 23$ (e); $A = 24$ (f); $A = 29$ (g); $A = 60$ (h); $A = 117.8$ (i); $A = 140.0$ (j) (цвет онлайн)

Fig. 8. $a-c$ – Plots of Lyapunov exponents with different scales for a quasi-periodic oscillator with an adaptive external action (5) in the quasi-periodic oscillation regime, $\omega_0 = 2\pi$, $k = 5$, $p = 5$. SNQ is a saddle-node bifurcation of invariant tori. Attractors of the system in the stroboscopic and double Poincaré sections: $A = 10$ (d); $A = 23$ (e); $A = 24$ (f); $A = 29$ (g); $A = 60$ (h); $A = 117.8$ (i); $A = 140.0$ (j) (color online)

В работах [18, 29–34] обсуждалась возможность хаотического аттрактора с двумя (или даже тремя) нулевыми показателями Ляпунова, возникающими в результате разрушения трехчастотного тора или каскада бифуркаций удвоения торов. В то же время строгие результаты отсутствуют, и вопрос является дискуссионным. Поэтому вслед за [18, 33] более аккуратно говорить об «очень близком к нулю» дополнительном показателе. В этом плане представляется интересным рассматриваемый пример аттрактора с близким к нулю, но отрицательным третьим показателем.

Данная особенность связана, скорее всего, с наличием двумерного седлового тора, который возник в результате седло-узловой бифуркации [28]. На рис. 8, *f* представлены стробоскопическое сечение и двойное сечение для хаоса с третьим показателем Ляпунова, близким к нулю. В стробоскопическом сечении аттрактор близок к трехмерному тору (рис. 8, *f1*), однако в двойном сечении мы видим, что инвариантная кривая стала негладкой и начала разрушаться, хотя хорошо просматривается форма изначальной инвариантной кривой (рис. 8, *f2*).

Отметим, что на карте рис. 7, *c* область динамики данного типа показана черным цветом и обозначена **C0**, при этом определялось значение третьего показателя $\Lambda_3 \approx 0$ с порогом для фиксации близкого к нулю значения порядка 10^{-3} . Этот критерий отчасти условный, поскольку зависит от выбранного порога, но позволяет визуализировать область, где наблюдается подобная динамика.

Дальнейшее увеличение амплитудного параметра приводит к разрушению трехчастотного тора и на рис. 8, *g2* в двойном сечении мы видим развитый хаотический аттрактор, который характеризуется одним положительным, одним нулевым и двумя отрицательными показателями Ляпунова. Увеличение амплитуды внешнего сигнала приводит к дальнейшему разрушению трехчастотного тора и на рис. 8, *h1* уже в стробоскопическом сечении мы видим, что аттрактор не похож на тор; двойное сечение демонстрирует сложный хаотический аттрактор.

Для большой амплитуды внешнего сигнала можно также обнаружить область, где два старших показателя Ляпунова — положительные. На рис. 8, *c* представлен увеличенный фрагмент графиков показателей Ляпунова, где отслеживается переход к гиперхаосу НС, когда $\Lambda_{1,2} > 0$. На рис. 8, *i* представлен пример гиперхаотического аттрактора. Интервал, где существует гиперхаос, достаточно мал в пространстве параметров, с дальнейшим увеличением амплитуды реализуется классический хаос. На рис. 8, *j* представлены иллюстрации аттрактора для больших амплитуд внешнего сигнала.

Заключение

Проведено исследование автоколебательных систем с периодическим внешним воздействием, характеризующимся свойством адаптивности, когда фаза воздействия линейно зависит от динамической переменной осциллятора. Рассмотрены особенности поведения автоколебательных автономных систем с двумерным и трехмерным фазовым пространством.

В качестве двумерной модели изучен осциллятор ван дер Поля. Наличие адаптивности воздействия приводит к усложнению картины режимов, так что становятся выраженными языки Арнольда в области синхронизации на субгармониках внешнего сигнала. Внутри языков синхронизации возможны бифуркации удвоения с переходом к хаосу. Увеличение параметра адаптивности приводит к развитию картины, близкой к классическому синус-отображению окружности.

В качестве трехмерной модели изучен генератор автономной квазипериодичности в режиме периодических и квазипериодических автоколебаний. В первом случае внешнее воздействие при наличии адаптивности приводит к тому, что язык основного резонанса периода 1 разрушается, и расширяются языки синхронизации периодов 2, 3 и т. д. Внутри этих языков возможно возникновение квазипериодической динамики за счет бифуркации Неймарка–Сакера, в результате чего происходит формирование многооборотных торов.

В режиме квазипериодических колебаний динамика неавтономной системы становится более богатой. Появляются трехчастотные квазипериодические колебания, образующие область, в которую погружены языки резонансных двухчастотных торов. В случае простого гармонического воздействия возникают периодические режимы периода 1, 3 и др., хотя автономная система демонстрирует квазипериодичность. Наличие адаптивности приводит к разрушению основных мод полной синхронизации. Область трехчастотной квазипериодичности радикально расширяется,

вытесняя языки двухчастотных торов. При этом в небольших областях пространства параметров наблюдается разрушение трехчастотного тора с формированием многомерного хаоса, который в спектре показателей Ляпунова, помимо нулевого, имеет еще один близкий к нулю показатель. Также показана возможность возникновения гиперхаоса в такой системе.

Список литературы

1. *Best R. E.* Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications. 6th ed. New York: McGraw-Hill, 2007. 489 p.
2. *Шалфеев В. Д., Матросов В. В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2013. 366 с.
3. *Kuznetsov N. V., Leonov G. A.* Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops. Cambridge Scientific Publisher, 2014. 218 p.
4. *Kuznetsov N. V., Belyaev Y. V., Styazhkina A. V., Tulaev A. T., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V.* Effects of PLL architecture on MEMS gyroscope performance // Gyroscopy and Navigation. 2022. Vol. 13, no. 1. P. 44–52. DOI: 10.1134/S2075108722010047.
5. *Kuznetsov N. V., Lobachev M. Y., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V., Tavazoei M. S.* The gardner problem on the lock-in range of second-order type 2 phase-locked loops // IEEE Transactions on Automatic Control. 2023. P. 1–15. DOI: 10.1109/TAC.2023.3277896.
6. *Ottesen J. T.* Modelling the dynamical baroreflex-feedback control // Mathematical and Computer Modelling. 2000. Vol. 31, no. 4–5. P. 167–173. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00035-2.
7. *Hall J. E.* Guyton and Hall Textbook of Medical Physiology E-Book. Elsevier Health Sciences, 2015. 1147 p.
8. *Селезнев Е. П., Станкевич Н. В.* Сложная динамика неавтономного осциллятора с управляемой фазой внешнего воздействия // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, № 2. С. 59–62. DOI: 10.21883/PJTF.2019.02.47227.17473.
9. *Krylosova D. A., Seleznev E. P., Stankevich N. V.* Dynamics of non-autonomous oscillator with a controlled phase and frequency of external forcing // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. Vol. 134. P. 109716. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109716.
10. *Krylosova D., Seleznev E., Stankevich N.* The simplest oscillators with adaptive properties // In: 2020 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR). 07–09 September 2020, Innopolis, Russia. IEEE, 2020. P. 140–143. DOI: 10.1109/DCNAIR50402.2020.9216759.
11. *Polczyński K., Bednarek M., Awrejcewicz J.* Magnetic oscillator under excitation with controlled initial phase // In: Awrejcewicz J., Kaźmierczak M., Olejnik P., Mrozowski J. (eds) 16th International Conference Dynamical Systems – Theory and Applications. 6–9 December 2021 Łódź. DSTA, 2021. P. 400–401.
12. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М: Техносфера, 2003. 496 с.
13. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer, 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
14. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
15. *Ding E. J., Hemmer P. C.* Winding numbers for the supercritical sine circle map // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1988. Vol. 32, no 1. P. 153–160. DOI: 10.1016/0167-2789(88)90092-9.
16. *Ivanov N. Y., Kuznetsov S. P.* Complex periodic orbits, renormalization, and scaling for quasiperiodic golden-mean transition to chaos // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63, no. 4. P. 046210. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.046210.

17. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Mosekilde E., Stankevich N. V.* Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space // *The European Physical Journal Special Topics*. 2013. Vol. 222, no. 10. P. 2391–2398. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02023-x.
18. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Shchegoleva N. A., Stankevich N. V.* Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019. Vol. 398. P. 1–12. DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014.
19. *Matsumoto T.* Chaos in electronic circuits // *Proceedings of the IEEE*. 1987. Vol. 75, no. 8. P. 1033–1057. DOI: 10.1109/PROC.1987.13848.
20. *Анищенко В. С., Николаев С. М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // *Письма в ЖТФ*. 2005. Т. 31, № 19. С. 88–94.
21. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73, no. 5. P. 056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
22. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 76, no. 4. P. 046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.046216.
23. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Stankevich N. V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Vol. 15, no. 6. P. 1676–1681. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.06.027.
24. *Кузнецов А. П., Седова Ю. В.* Воздействие гармонического сигнала на генератор квазипериодических колебаний Анищенко–Астахова // *Письма в ЖТФ*. 2022. Т. 48, № 4. С. 48–50. DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52086.18925.
25. *Stankevich N. V., Kuznetsov A. P., Kurths J.* Forced synchronization of quasiperiodic oscillations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 20, no. 1. P. 316–323. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.04.020.
26. *Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Известия вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, № 4. С. 17–32. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-17-32.
27. *Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, № 3. С. 411–425. DOI: 10.20537/nd1103001.
28. *Vitolo R., Broer H., Simó C.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2011. Vol. 16, no. 1–2. P. 154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
29. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // *Nonlinearity*. 2002. Vol. 15, no. 4. P. 1205–1267. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312.
30. *Broer H. W., Simó C., Vitolo R.* Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2010. Vol. 14, no. 3. P. 871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
31. *Stankevich N. V., Shchegoleva N. A., Sataev I. R., Kuznetsov A. P.* Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 15, no. 11. P. 111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
32. *Grines E. A., Kazakov A., Sataev I. R.* On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022. Vol. 32, no. 9. P. 093105. DOI: 10.1063/5.0098163.
33. *Karatetskaia E., Shykhmamedov A., Kazakov A.* Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. Vol. 31, no. 1. P. 011102. DOI: 10.1063/5.0036405.

34. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V. Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023. Vol. 169. P. 113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.

References

1. Best RE. *Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications*. 6th ed. New York: McGraw-Hill; 2007. 489 p.
2. Shalfeev VD, Matrosov VV. *Nonlinear Dynamics of Phase Synchronization Systems*. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Publishing; 2013. 366 p. (in Russian).
3. Kuznetsov NV, Leonov GA. *Nonlinear Mathematical Models of Phase-Locked Loops*. Cambridge Scientific Publisher; 2014. 218 p.
4. Kuznetsov NV, Belyaev YV, Styazhkina AV, Tulaev AT, Yuldashev MV, Yuldashev RV. Effects of PLL architecture on MEMS gyroscope performance. *Gyroscopy and Navigation*. 2022;13(1):44–52. DOI: 10.1134/S2075108722010047.
5. Kuznetsov NV, Lobachev MY, Yuldashev MV, Yuldashev RV, Tavazoei MS. The gardner problem on the lock-in range of second-order type 2 phase-locked loops. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023;1–15. DOI: 10.1109/TAC.2023.3277896.
6. Ottesen JT. Modelling the dynamical baroreflex-feedback control. *Mathematical and Computer Modelling*. 2000;31(4–5):167–173. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00035-2.
7. Hall JE. *Guyton and Hall Textbook of Medical Physiology E-Book*. Elsevier Health Sciences; 2015. 1147 p.
8. Seleznev EP, Stankevich NV. Complex dynamics of a non-autonomous oscillator with a controlled phase of an external force. *Technical Physics Letters*. 2019;45(1):57–60. DOI: 10.1134/S1063785019010334.
9. Krylosova DA, Seleznev EP, Stankevich NV. Dynamics of non-autonomous oscillator with a controlled phase and frequency of external forcing. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;134:109716. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109716.
10. Krylosova D, Seleznev E, Stankevich N. The simplest oscillators with adaptive properties. In: *2020 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR)*. 07-09 September 2020, Innopolis, Russia. IEEE; 2020. P. 140–143. DOI: 10.1109/DCNAIR50402.2020.9216759.
11. Polczyński K, Bednarek M, Awrejcewicz J. Magnetic oscillator under excitation with controlled initial phase. In: *Awrejcewicz J, Kaźmierczak M, Olejnik P, Mrozowski J, editors. 16th International Conference Dynamical Systems – Theory and Applications*. 6-9 December 2021 Łódź. DSTA; 2021. P. 400–401.
12. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. New York: Cambridge University Press; 2001. 412 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
13. Balanov A, Janson N, Postnov D, Sosnovtseva O. *Synchronization: From Simple to Complex*. Berlin: Springer; 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
14. Landa PS. *Self-Oscillations in Systems With a Finite Number of Degrees of Freedom*. Moscow: Nauka; 1980. 360 p. (in Russian).
15. Ding EJ, Hemmer PC. Winding numbers for the supercritical sine circle map. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1988;32(1):153–160. DOI: 10.1016/0167-2789(88)90092-9.
16. Ivankov NY, Kuznetsov SP. Complex periodic orbits, renormalization, and scaling for quasiperiodic golden-mean transition to chaos. *Phys. Rev. E*. 2001;63(4):046210. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.046210.
17. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Mosekilde E, Stankevich NV. Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space. *The European Physical Journal Special Topics*. 2013; 222(10):2391–2398. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02023-x.

18. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Shchegoleva NA, Stankevich NV. Dynamics of coupled generators of quasiperiodic oscillations: Different types of synchronization and other phenomena. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019;398:1–12. DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014.
19. Matsumoto T. Chaos in electronic circuits. *Proceedings of the IEEE*. 1987;75(8):1033–1057. DOI: 10.1109/PROC.1987.13848.
20. Anishchenko VS, Nikolaev SM. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Technical Physics Letters*. 2005;31(10):853–855. DOI: 10.1134/1.2121837.
21. Anishchenko V, Nikolaev S, Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*. 2006;73(5):056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
22. Anishchenko V, Nikolaev S, Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*. 2007;76(4):046216. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.046216.
23. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Stankevich NV. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010;15(6):1676–1681. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.06.027.
24. Kuznetsov AP, Sedova YV, Anishchenko-Astakhov quasiperiodic generator excited by external harmonic force. *Technical Physics Letters*. 2022;48(2):84–86. DOI: 10.21883/TPL.2022.02.52858.18925.
25. Stankevich NV, Kuznetsov AP, Kurths J. Forced synchronization of quasiperiodic oscillations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015;20(1):316–323. DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.04.020.
26. Kuznetsov AP, Sataev IR, Turukina LV. Phase dynamics of periodically driven quasiperiodic self-vibrating oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2010;18(4):17–32 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-17-32.
27. Kuznetsov AP, Sataev IR, Turukina LV. Forced synchronization of two coupled van der Pol self-oscillators. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2011;7(3):411–425 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1103001.
28. Vitolo R, Broer H, Simó C. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2011;16(1–2):154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
29. Broer H, Simó C, Vitolo R. Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. *Nonlinearity*. 2002;15(4):1205–1267. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312.
30. Broer HW, Simó C, Vitolo R. Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2010;14(3):871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
31. Stankevich NV, Shchegoleva NA, Sataev IR, Kuznetsov AP. Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2020;15(11):111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
32. Grines EA, Kazakov A, Sataev IR. On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022;32(9):093105. DOI: 10.1063/5.0098163.
33. Karatetskaia E, Shykhmamedov A, Kazakov A. Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021;31(1):011102. DOI: 10.1063/5.0036405.
34. Kuznetsov AP, Sedova YV, Stankevich NV. Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023;169:113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.



Крылосова Дарина Андреевна — аспирант Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. Научные интересы — радиофизика, нелинейная динамика. Имеет более 20 научных публикаций.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
E-mail: krylosovadarina@inbox.ru
ORCID: 0000-0003-1572-1049
AuthorID (eLibrary.Ru): 1202883



Кузнецов Александр Петрович — родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук (1996), профессор (2002). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Опубликовал более 150 статей в российских и международных научных журналах. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 15 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний», «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны» (сборник задач), «Задачи физических олимпиад» и др. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001).

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: apkuz@rambler.ru
ORCID: 0000-0001-5528-1979
AuthorID (eLibrary.Ru): 509



Седова Юлия Викторовна — родилась в Саратове (1979). Окончила Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (2001). Кандидат физико-математических наук (2004, СГУ). Работает в Саратовском филиале ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН старшим научным сотрудником. Научные интересы — влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Имеет более 40 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: sedovayv@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-7843-646X
AuthorID (eLibrary.Ru): 168897



Станкевич Наталья Владимировна — родилась в Саратове (1985). Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2007). Кандидат физико-математических наук (2011, СГУ), доцент. Работает на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации» СГТУ имени Гагарина Ю. А. (с 2011 года), в настоящее время в должности профессора, и старшим научным сотрудником Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы: нелинейная динамика, многочастотные квазипериодические колебания, многомерный хаос, модели типа Ходжкина–Хаксли, системы с адаптивными свойствами. Имеет более 100 научных публикаций. Член редакционной коллегии журнала «Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering».

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
E-mail: stankevichnv@mail.ru
ORCID: 0000-0002-4781-0567
AuthorID (eLibrary.Ru): 600847



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003061
EDN: KJVJVOV

Мультистабильность вблизи границы индуцированной шумом синхронизации в ансамблях несвязанных хаотических систем

Е. Д. Илларионова, О. И. Москаленко ✉

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: k3524114@yandex.ru, ✉ o.i.moskalenko@gmail.com

Поступила в редакцию 20.06.2023, принята к публикации 13.07.2023,
опубликована онлайн 14.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящей работы — исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы индуцированной шумом синхронизации в хаотических системах с непрерывным и дискретным временем. В качестве объектов исследования выбраны ансамбли осцилляторов Лоренца и логистических отображений, находящиеся под действием общего источника белого шума. Методы. Диагностика синхронизации, индуцированной шумом, осуществлялась при помощи непосредственного сравнения состояний систем, находящихся под действием общего источника шума, и расчета ошибки синхронизации. Для определения наличия мультистабильности вблизи границы этого режима произведен расчет меры мультистабильности и построена ее зависимость от интенсивности шумового воздействия на системы. Кроме того, в фиксированные моменты времени получены бассейны притяжения синхронных и асинхронных режимов для одной из систем, находящихся под действием шума, при фиксированных начальных условиях другой системы. Результатом работы является доказательство наличия мультистабильности вблизи границы синхронизации, индуцированной шумом. Заключение. Показано, что для режима перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом, так же, как и для режима перемежающейся обобщенной синхронизации, характерна мультистабильность, проявляющаяся в данном случае как существование в один и тот же промежуток времени синхронного поведения у одной пары систем, находящихся под действием общего источника шума, в то время как у другой пары наблюдается асинхронное поведение. Обнаруженный эффект характерен как для потоковых систем, так и для дискретных отображений, находящихся под действием общего источника шума. Он может найти применение в информационно-телекоммуникационных системах при совершенствовании способов скрытой передачи информации, основанных на явлении хаотической синхронизации.

Ключевые слова: индуцированная шумом синхронизация, обобщенная синхронизация, мультистабильность, белый шум, перемежаемость.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук (проект № МД-18.2022.1.2).

Для цитирования: Илларионова Е. Д., Москаленко О. И. Мультистабильность вблизи границы индуцированной шумом синхронизации в ансамблях несвязанных хаотических систем // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 566–574. DOI: 10.18500/0869-6632-003061. EDN: KJVJVOV

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Multistability near the boundary of noise-induced synchronization in ensembles of uncoupled chaotic systems

E. D. Illarionova, O. I. Moskalenko✉

Saratov State University, Russia

E-mail: k3524114@yandex.ru, ✉o.i.moskalenko@gmail.com

Received 20.06.2023, accepted 13.07.2023, available online 14.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The aim of this work is to study the possibility of the existence of multistability near the boundary of noise-induced synchronization in chaotic continuous and discrete systems. Ensembles of uncoupled Lorenz systems and logistic maps being under influence of a common source of white noise have been chosen as an object under study. *Methods.* The noise-induced synchronization regime detection has been performed by means of direct comparison of the system states being under influence of the common noise source and by calculation of the synchronization error. To determine the presence of multistability near the boundary of this regime, the multistability measure has been calculated and its dependence on the noise intensity has been obtained. In addition, for fixed moments of time, the basins of attraction of the synchronous and asynchronous regimes have been received for one of the systems driven by noise for fixed initial conditions of the other system. *The result* of the work is a proof of the presence of multistability near the boundary of noise-induced synchronization. *Conclusion.* It is shown that the regime of intermittent noise-induced synchronization, as well as the regime of intermittent generalized synchronization, is characterized by multistability, which manifests itself in this case as the existence in the same time interval of the synchronous behavior in one pair of systems being under influence of a common noise source, whereas in the other pair the asynchronous behavior is observed. The found effect is typical for both flow systems and discrete maps being under influence of a common noise source. It can find an application in the information and telecommunication systems for improvement the methods for secure information transmission based on the phenomenon of chaotic synchronization.

Keywords: noise-induced synchronization, generalized synchronization, multistability, white noise, intermittency.

Acknowledgements. This work was financially supported by the Grant Council of the President of the Russian Federation for the state support of young Russian scientists – doctors of sciences (project N. MD-18.2022.1.2).

For citation: Illarionova ED, Moskalenko OI. Multistability near the boundary of noise-induced synchronization in ensembles of uncoupled chaotic systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):566–574. DOI: 10.18500/0869-6632-003061

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

В современном мире явление синхронизации, принадлежащее к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и хаоса, играет немаловажную роль. Этот феномен широко распространен в природе, науке, технике и обществе, см., например, монографии [1–4] и обзорные статьи [5–9].

Одним из типов хаотического синхронного поведения является режим синхронизации, индуцированной шумом. Он подразумевает установление идентичных колебаний в двух или нескольких несвязанных между собой идентичных по управляющим параметрам хаотических системах за счет воздействия на них общего источника шума [10, 11]. Вблизи границы этого режима имеет место перемежающееся поведение, характеристики которого подчиняются тем же самым закономерностям, что и для режима перемежающейся обобщенной синхронизации [12].

Относительно недавно было установлено, что для режима перемежающейся обобщенной синхронизации характерна мультистабильность, подразумевающая в данном контексте существование в один и тот же промежуток времени синхронного поведения у одной пары систем, находящихся под действием общего хаотического сигнала, в то время как у другой пары наблюдается асинхронное поведение [13, 14]. Так как режимы обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, по своей сути представляют собой один и тот же режим и отличаются только характером внешнего сигнала, воздействующего на системы [15], можно

ожидать, что вблизи границы синхронизации, индуцированной шумом, будет также иметь место мультистабильность.

В настоящей работе впервые исследуется возможность существования мультистабильности вблизи границы синхронизации, индуцированной шумом. В качестве объектов исследования выбраны хаотические системы с непрерывным (осцилляторы Лоренца) и дискретным (логистические отображения) временем, находящиеся под действием общего источника шума.

Осцилляторы Лоренца описываются следующими системами уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sigma(y_i - x_i) + \varepsilon\xi, \\ \dot{y}_i &= rx_i - y_i - x_iz_i + \varepsilon\xi, \\ \dot{z}_i &= -bz_i + x_iy_i + \varepsilon\xi, \end{aligned} \quad (1)$$

где ξ — белый Гауссов шум, идентичный для всех уравнений системы, $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_i(t)\xi_j(t) \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$, $\forall i, j$, ε — интенсивность шумового воздействия, $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — векторы состояний систем, на которые воздействует шум, $i = 1, 2$ в случае классической синхронизации, индуцированной шумом, $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ — управляющие параметры. Решение системы уравнений (1) осуществлялось численно при помощи метода Эйлера, адаптированного для стохастических дифференциальных уравнений, с шагом по времени $h = 0.001$, аналогично тому, как это делалось в работе [10].

Для логистических отображений уравнения имеют следующий вид:

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i, \lambda) + \varepsilon(f(\xi_n, \lambda) - f(x_n^i, \lambda)), \quad (2)$$

где ξ_n — Гауссов шум со средним $\mu = 0.5$ и стандартным отклонением $\sigma = 0.12$, $f(x, \lambda) = \lambda x(1-x)$, $\lambda = 3.75$ — управляющий параметр, $i = 1, 2$ в случае классической синхронизации, индуцированной шумом, ε — интенсивность шумового воздействия.

При выбранных значениях управляющих параметров режим синхронизации, индуцированной шумом, во взаимодействующих системах Лоренца возникает при интенсивности шумового воздействия $\varepsilon = 6.5$, а в логистических отображениях — при $\varepsilon = 0.1625$. Ниже границы этого синхронного режима, как отмечалось выше, имеет место перемежающееся поведение. При этом сигнал, представляющий собой разность между состояниями систем, на которые воздействует шум, выглядит как чередование синхронных (ламинарных) и асинхронных (турбулентных) фаз, причем наличие той или иной фазы поведения в фиксированный момент времени может зависеть от выбора начальных условий анализируемых систем, что свидетельствует о наличии мультистабильности в данном случае. Для доказательства вышесказанного в фиксированные моменты времени были построены бассейны притяжения одной из систем, находящихся под действием шума, при фиксированных начальных условиях другой системы. Такие бассейны притяжения приведены на рис. 1 для систем Лоренца (1) при $\varepsilon = 5.75$ и на рис. 2 — для логистических отображений (2) при $\varepsilon = 0.153$. Синий цвет соответствует фазам синхронного поведения (когда состояния обеих систем, находящихся под действием шума, оказываются идентичными), зеленый — асинхронным фазам поведения. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность. Видно, что для обеих рассмотренных систем в фиксированные моменты времени в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом, имеет место мультистабильность. Важно отметить, что количество синхронных и асинхронных состояний меняется со временем достаточно плавно, подтверждением чего являются зависимости нормированных размеров синхронных и асинхронных кластеров от времени, приведенные на рис. 1, *e* и 2, *d*. Видно, что как для систем Лоренца, так и для логистических отображений оба кластера сосуществуют всегда, при этом размер синхронного кластера оказывается больше, чем асинхронного.

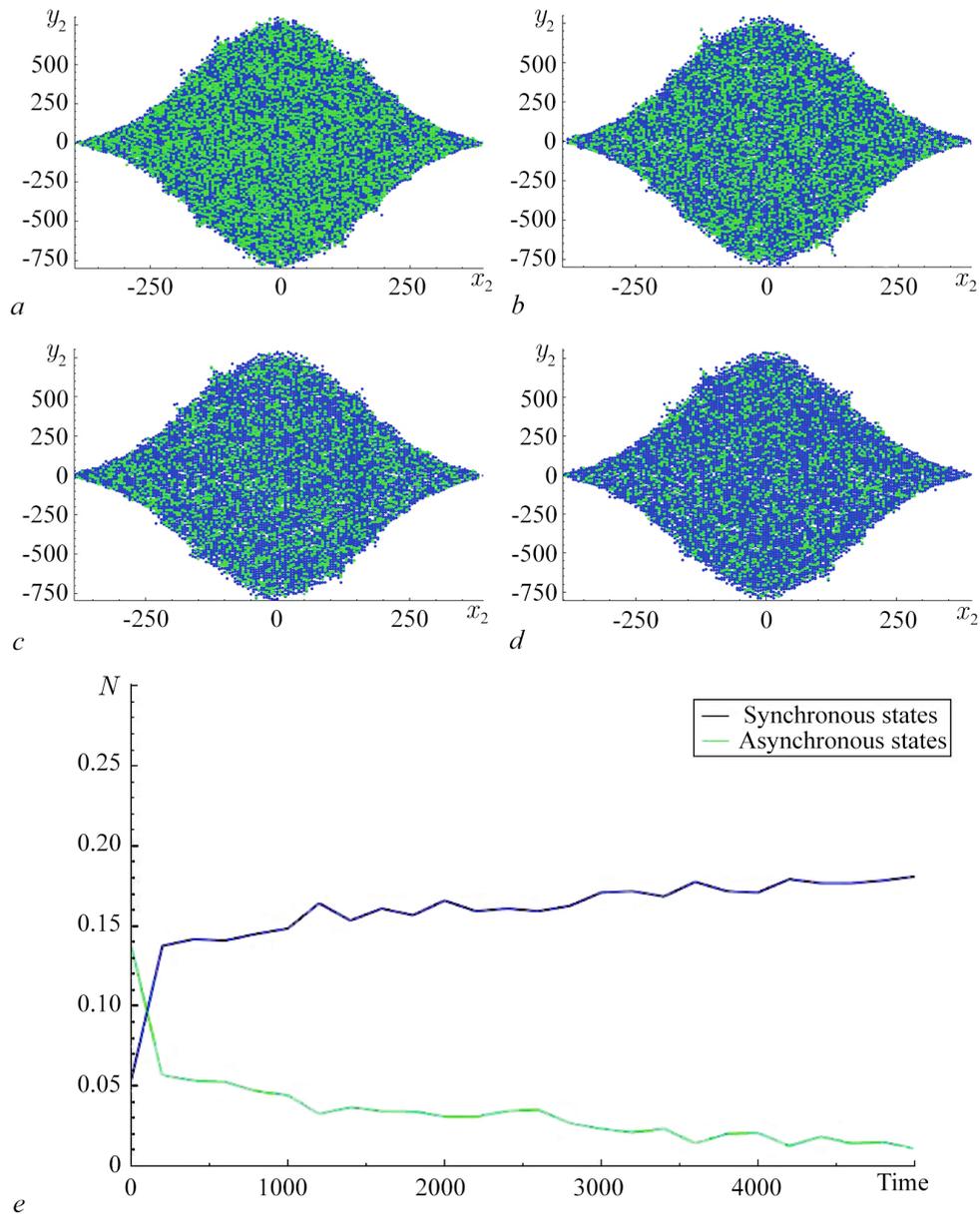


Рис. 1. *a-d* – Бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний одной из систем Лоренца (1), находящихся в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом, при значении интенсивности шума $\varepsilon = 5.75$ на плоскости начальных условий (x_2, y_2) ($z_2 = 1.1$), полученные в различные моменты времени: $t = 1000$ (*a*), 2000 (*b*), 3000 (*c*), 4000 (*d*). Синий цвет соответствует реализации в фиксированный момент времени идентичного поведения систем Лоренца, находящихся под действием общего источника шума, зеленый цвет относится к неидентичному (асинхронному) поведению этих систем. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность. *e* – Временные зависимости нормированных размеров синхронных и асинхронных кластеров, полученные для тех же систем Лоренца при $\varepsilon = 5.75$ (цвет онлайн)

Fig. 1. *a-d* – Basins of attraction of synchronous and asynchronous states of one Lorenz system from (1) being in the intermittent noise-induced synchronization regime for the value of noise intensity $\varepsilon = 5.75$ on the plane of initial conditions (x_2, y_2) ($z_2 = 1.1$) obtained in different moments of time: $t = 1000$ (*a*), 2000 (*b*), 3000 (*c*), 4000 (*d*). Blue color corresponds to the realization for a fixed moment of time the identical behavior in Lorenz systems being under influence of the common noise, green color refers to the nonidentical (asynchronous) behavior of such systems. White color corresponds to the going the representation point to infinity. *e* – Time dependences of the normalized sizes of the synchronous and asynchronous clusters obtained for the same Lorenz systems for $\varepsilon = 5.75$ (color online)

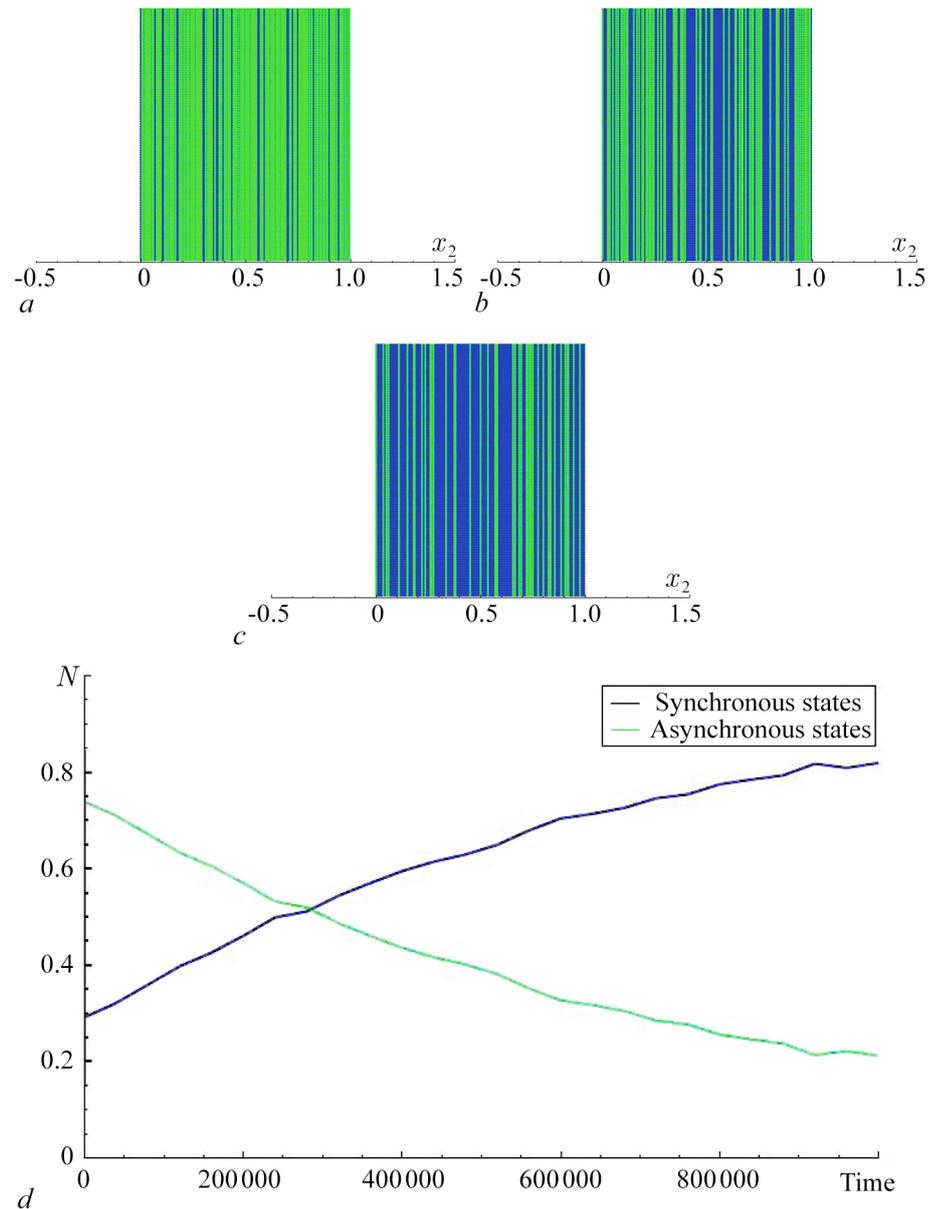


Рис. 2. *a-c* — Линейные бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний одного из логистических отображений (2), находящихся в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом, при значении интенсивности шума $\varepsilon = 0.153$ на линии начальных условий x_2 , полученные в различные моменты времени: $t = 10000$ (*a*), 500000 (*b*), 1000000 (*c*). Синий цвет соответствует реализации в фиксированный момент времени идентичных состояний логистических отображений, находящихся под действием общего источника шума, зеленый цвет относится к неидентичному (асинхронному) поведению этих систем. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность. *d* — Временные зависимости нормированных размеров синхронных и асинхронных кластеров, полученные для тех же логистических отображений при $\varepsilon = 0.153$ (цвет онлайн)

Fig. 2. *a-c* — Linear basins of attraction of synchronous and asynchronous states of one logistic map from (2) being in the intermittent noise-induced synchronization regime for the value of noise intensity $\varepsilon = 0.153$ on the line of initial conditions x_2 obtained in different moments of time: $t = 10000$ (*a*), 500000 (*b*), 1000000 (*c*). Blue color corresponds to the realization for a fixed moment of time the identical states in logistic maps being under influence of the common noise, green color refers to the nonidentical (asynchronous) behavior of such systems. White color corresponds to the going the representation point to infinity. *d* — Time dependences of the normalized sizes of the synchronous and asynchronous clusters obtained for the same logistic maps for $\varepsilon = 0.153$ (color online)

Для количественной характеристики степени мультистабильности по аналогии с работами [13, 14] необходимо перейти от рассмотрения двух систем к ансамблю идентичных по управляющим параметрам систем, стартующих с различных начальных условий, равномерно распределенных по аттракторам взаимодействующих систем, находящихся под действием общего шума. Такие ансамбли описываются системами (1) и (2) при $i = 1, 2 \dots N$, где N – число элементов ансамбля. Для диагностики синхронного режима в данном случае необходимо произвести сравнение состояний систем, находящихся под действием шума, по принципу «каждая с каждой», и для каждой пары взаимодействующих систем в каждый момент времени рассчитать разность их состояний по формуле

$$D = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j, \quad (3)$$

после чего по формуле

$$P_a = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{n}{N(N-1)} \quad (4)$$

(где n – число систем, находящихся в одинаковом состоянии с i -м осциллятором) оценить вероятность обнаружения асинхронного режима. В роли меры мультистабильности в данном случае будет выступать усредненная по времени вероятность обнаружения турбулентной фазы, рассчитанная в соответствии с формулой

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T P_a(t) dt \quad (5)$$

при изменении интенсивности шумового воздействия. Эта мера равна 0, когда все взаимодействующие системы в каждый момент времени находятся в синхронном режиме, и равна 1, когда в каждый момент времени все системы демонстрируют неидентичное поведение [13]. Если же $P \in (0, 1)$ при данном значении интенсивности шумового воздействия во взаимодействующих системах имеет место мультистабильность [13, 14].

На рис. 3, 4 представлены зависимости меры мультистабильности от интенсивности шумового воздействия, полученные для ансамблей из $N = 50$ систем Лоренца (1) и $N = 50$

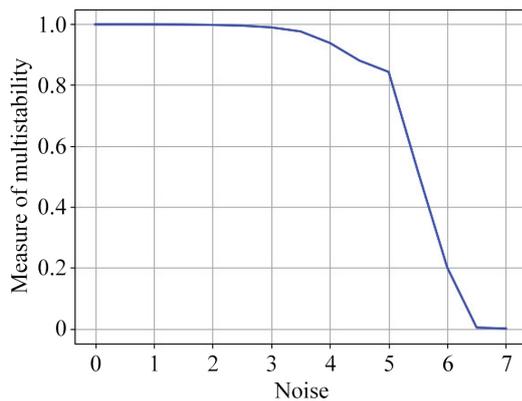


Рис. 3. Зависимость меры мультистабильности P от интенсивности шумового воздействия ε , полученная для ансамбля систем Лоренца (1), находящихся под действием общего источника шума

Fig. 3. Dependence of the multistability measure P on the noise intensity ε obtained for the ensemble of Lorenz systems (1) being under influence of the common noise source

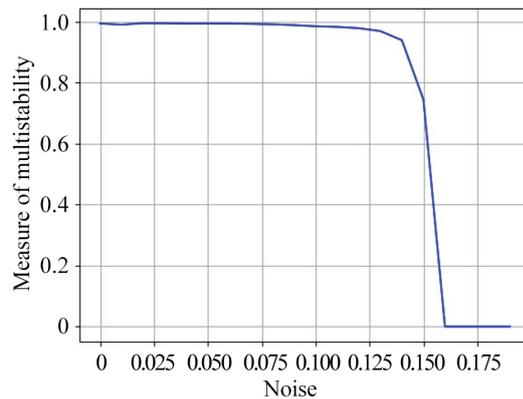


Рис. 4. Зависимость меры мультистабильности P от интенсивности шумового воздействия ε , полученная для ансамбля логистических отображений (2), находящихся под действием общего источника шума

Fig. 4. Dependence of the multistability measure P on the noise intensity ε obtained for the ensemble of logistic maps (2) being under influence of the common noise source

логистических отображений (2), находящихся под действием шума. Из рисунков видно, что по мере увеличения интенсивности шумового воздействия мера мультистабильности в обеих системах почти все время плавно уменьшается от 1 до 0^* , что соответствует переходу от асинхронного состояния к режиму индуцированной шумом синхронизации. Важно отметить, что вблизи границы синхронного режима мера мультистабильности в обоих случаях оказывается положительной, что свидетельствует о наличии мультистабильности в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом.

Таким образом, в настоящей работе на примере систем Лоренца и логистических отображений, находящихся под действием общего источника шума, показано, что для режима перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом, так же, как и для режима перемежающейся обобщенной синхронизации, характерна мультистабильность. Полученные результаты подтверждены при помощи построения карт бассейнов притяжения синхронных и асинхронных режимов и путем расчета меры мультистабильности в зависимости от величины параметра связи. Важно отметить, что несмотря на то, что основные результаты работы получены на модельных системах, можно ожидать, что аналогичные закономерности будут наблюдаться и в реальных радиотехнических системах, что позволит использовать обнаруженный эффект для совершенствования способов скрытой передачи информации, в основе которых лежит явление хаотической синхронизации.

Список литературы

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. New York: Cambridge University Press, 2001. 432 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. *Anishchenko V.S., Astakhov V., Vadivasova T., Neiman A., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 446 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38168-6.
3. *Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O.* Synchronization: From Simple to Complex. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
4. *Boccaletti S., Pisarchik A.N., del Genio C.I., Amann A.* Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 264 p. DOI: 10.1017/9781107297111.
5. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports*. 2002. Vol. 366, no. 1–2. P. 1–101. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Synchronization approach to analysis of biological systems // *Fluctuation and Noise Letters*. 2004. Vol. 4, no. 1. P. L53–L62. DOI: 10.1142/S0219477504001653.
7. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *Успехи физических наук*. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281–1310. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200912c.1281.
8. *Zhang F., Chen G., Li C., Kurths J.* Chaos synchronization in fractional differential systems // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2013. Vol. 371, no. 1990. P. 20120155. DOI: 10.1098/rsta.2012.0155.
9. *Стрелкова Г. И., Анищенко В. С.* Пространственно-временные структуры в ансамблях связанных хаотических систем // *Успехи физических наук*. 2020. Т. 190, № 2. С. 160–178. DOI: 10.3367/UFNr.2019.01.038518.
10. *Toral R., Mirasso C.R., Hernández-García E., Piro O.* Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems // *Chaos*. 2001. Vol. 11, no. 3. P. 665–673. DOI: 10.1063/1.1386397.

*Исключение составляет малая область вблизи $\varepsilon = 0.01$ на рис. 4, где происходит изменение динамики системы.

11. Wang Y, Lai Y.-C., Zheng Z. Route to noise-induced synchronization in an ensemble of uncoupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 81, no. 3. P. 036201. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.036201.
12. Москаленко О. И., Короновский А. А., Шурыгина С. А. Перемежающееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации // *ЖТФ*. 2011. Т. 81, № 9. С. 150–153.
13. Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Selskii A. O., Evstifeev E. V. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems // *Chaos*. 2021. Vol. 31, no. 8. P. 083106. DOI: 10.1063/5.0055302.
14. Москаленко О. И., Евстифеев Е. В. О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора // *Известия вузов. ПНД*. 2022. Т. 30, № 6. С. 676–684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013.
15. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A*. 2006. Vol. 354, no. 5–6. P. 423–427. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.01.079.

References

1. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. New York: Cambridge University Press; 2001. 432 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. Anishchenko VS, Astakhov V, Vadivasova T, Neiman A, Schimansky-Geier L. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; 2007. 446 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38168-6.
3. Balanov A, Janson N, Postnov D, Sosnovtseva O. *Synchronization: From Simple to Complex*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
4. Boccaletti S, Pisarchik AN, del Genio CI, Amann A. *Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks*. Cambridge: Cambridge University Press; 2018. 264 p. DOI: 10.1017/9781107297111.
5. Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, Valladares DL, Zhou CS. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*. 2002;366(1–2):1–101. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
6. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. Synchronization approach to analysis of biological systems. *Fluctuation and Noise Letters*. 2004;4(1):L53–L62. DOI: 10.1142/S0219477504001653.
7. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. On the use of chaotic synchronization for secure communication. *Physics-Uspekhi*. 2009;52(12):1213–1238. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200912c.1281.
8. Zhang F, Chen G, Li C, Kurths J. Chaos synchronization in fractional differential systems. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2013;371(1990):20120155. DOI: 10.1098/rsta.2012.0155.
9. Strelkova GI, Anishchenko VS. Spatio-temporal structures in ensembles of coupled chaotic systems. *Physics-Uspekhi*. 2020;63(2):145–161. DOI: 10.3367/UFNe.2019.01.038518.
10. Toral R, Mirasso CR, Hernández-García E, Piro O. Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems. *Chaos*. 2001;11(3):665–673. DOI: 10.1063/1.1386397.
11. Wang Y, Lai YC, Zheng Z. Route to noise-induced synchronization in an ensemble of uncoupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*. 2010;81(3):036201. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.036201.
12. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Shurygina SA. Intermittent behavior at the boundary of noise-induced synchronization. *Tech. Phys.* 2011;56(9):1396–1372. DOI: 10.1134/S1063784211090143.
13. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Selskii AO, Evstifeev EV. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems. *Chaos*. 2021;31(8):083106. DOI: 10.1063/5.0055302.
14. Moskalenko OI, Evstifeev EV. On existence of multistability near the boundary of generalized

synchronization in unidirectionally coupled systems with complex topology of attractor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):676–684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013.

15. Hramov AE, Koronovskii AA, Moskalenko OI. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? *Phys. Lett. A*. 2006;354(5–6):423–427. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.01.079.



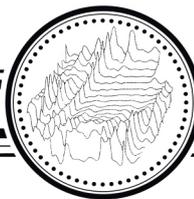
Илларионова Екатерина Дмитриевна — окончила с отличием бакалавриат Института физики СГУ (2022). В настоящее время является магистрантом второго года обучения. Научные интересы — изучение хаотической синхронизации и явлений, происходящих на ее границе, в нелинейных системах; перемежающееся поведение; влияние шума на установление синхронных режимов.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: k3524114@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-1912-863X

Москаленко Ольга Игоревна — родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006). Кандидат физико-математических наук (2008), доктор физико-математических наук (2017), доцент (2012). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов — исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор около 200 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах, нескольких монографий и патентов на изобретения и полезные модели.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5727-5169
AuthorID (eLibrary.Ru): 150252





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182; 535.015

DOI: 10.18500/0869-6632-003058
EDN: DCPOEN

Аналитический метод исследования поведения оптической волны в нелинейной среде с периодически расположенными нанопленками

С. А. Волкова¹, К. А. Вытовтов²✉, Е. А. Барабанова²,
С. А. Хахомов³, Д. Л. Коваленко³, М. Г. Иванов⁴

¹Астраханский государственный технический университет, Россия

²Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

³Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Беларусь

⁴Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Россия

E-mail: s.volkovav@mail.ru, ✉vytovtov_konstan@mail.ru, elizavetaalex@yandex.ru,
khakh@gsu.by, dkov@gsu.by, ivanov.webdesign@yandex.ru

Поступила в редакцию 1.05.2023, принята к публикации 24.05.2023,
опубликована онлайн 21.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования — построение аналитической модели поведения гармонической волны в нелинейной оптической среде с периодически расположенными нанопленками. *Методы.* Представлен модернизированный метод негладкого преобразования аргумента для исключения функций Дирака в правой части нелинейного неоднородного дифференциального уравнения, описывающего поведение линейно поляризованной волны в нелинейной среде с периодически расположенными проводящими нанопленками. Для нахождения приближенного аналитического решения также использовались методы малого параметра, в частности метод усреднения. *Результаты.* Построена полностью аналитическая модель поведения линейно поляризованной гармонической волны в нелинейной оптической среде с периодически расположенными проводящими нанопленками. *Заключение.* Построена математическая модель распространения линейно поляризованной гармонической волны в нелинейной оптической среде с периодически расположенными проводящими нанопленками, основанная на методе негладкого преобразования аргумента. Модель является полностью аналитической, все выражения получены непосредственно из уравнений Максвелла путем тождественных преобразований. Границы ее применимости определяются границами применения волновой теории света.

Ключевые слова: нелинейная оптическая среда, периодическая структура, функция Дирака, негладкое преобразование аргумента, периодические решения.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, № 23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>

Для цитирования: Волкова С. А., Вытовтов К. А., Барабанова Е. А., Хахомов С. А., Коваленко Д. Л., Иванов М. Г. Аналитический метод исследования поведения оптической волны в нелинейной среде с периодически расположенными нанопленками // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 575–585. DOI: 10.18500/0869-6632-003058. EDN: DCPOEN

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Analytical method of optical wave behavior studying in nonlinear medium with periodically arranged conducting nanofilms

S. A. Volkova¹, K. A. Vytovtov²✉, E. A. Barabanova²,
S. A. Khakhomov³, D. L. Kovalenko³, M. G. Ivanov⁴

¹Astrakhan State Technical University, Russia

²V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the RAS, Moscow, Russia

³Francisk Skorina Gomel State University, Belarus

⁴National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Russia

E-mail: s.volkovav@mail.ru, ✉vytovtov_konstan@mail.ru, elizavetaalex@yandex.ru,

khakh@gsu.by, dkov@gsu.by, ivanov.webdesign@yandex.ru

Received 1.05.2023, accepted 24.05.2023, available online 21.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The purpose of this work is to build the analytical model of the behavior of a harmonic wave in a nonlinear optical medium with periodically arranged nanofilms. *Methods.* The modernized method is presented of non-smooth transformation of the argument to eliminate the Dirac functions on the right side of the non-linear inhomogeneous differential equation describing linear polarized wave behavior within a non-linear optical medium with periodically arranged conducting nanofilms. Small parameter methods, in particular, the averaging method, is also used to find an approximate analytical solution. *Results.* The fully analytical model of the behavior of a linear polarized harmonic wave within a nonlinear optical medium with periodically arranged conducting nanofilms is constructed. *Conclusion.* For the case of propagation of a linearly polarized harmonic wave in a nonlinear optical medium with periodically arranged conducting nanofilms, the mathematical model based on the non-smooth argument transformation method is constructed. The model is fully analytical, all expressions are obtained directly from Maxwell's equations by identical transformations. The limits of its applicability are determined by the limits of application of the wave theory of light.

Keywords: nonlinear optical medium, periodic structure, Dirac function, non-smooth argument transformation, solution stability.

Acknowledgements. This work was supported by RSF, № 23-29-00795, <https://rscf.ru/project/23-29-00795/>

For citation: Volkova SA, Vytovtov KA, Barabanova EA, Khakhomov SA, Kovalenko DL, Ivanov MG. Analytical method of optical wave behavior studying in nonlinear medium with periodically arranged conducting nanofilms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):575–585. DOI: 10.18500/0869-6632-003058

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование различных периодических структур в оптике привлекает внимание ученых уже более столетия [1–4]. Исследовались одномерные [5, 6], двумерные [7, 8], трехмерные [9, 10] структуры. С самого начала и до сегодняшнего дня особое внимание привлекают различные линейные слоистые среды, как изотропные [3], так и анизотропные [4]. Основными задачами в данном направлении являются исследования областей прохождения и непрохождения волны (задача устойчивости решений), нахождение решений в областях прохождения, в том числе и периодических решений. С развитием лазерной техники появился интерес и к нелинейным периодическим оптическим структурам [11, 12]. Основные направления исследований — генерация высших гармоник, самофокусировка и т. д. При этом нелинейные среды могут быть использованы в качестве высокодобротных фильтров. С начала XXI столетия актуальным стало изучение различных наноструктур [13, 14], в том числе нанопокрывтий и нанопленок. Теоретическое исследование нанопленок проводится, как правило, с использованием аппарата квантовой оптики. Далее для анализа структур, включающих нанопокрывтия и нанослои, необходимо совместно решать и уравнения Максвелла, и уравнение Шредингера [13–15]. Экспериментальные результаты измерения проводимости нанопленок различной толщины из различных материалов представлены, например, в [16].

Нами рассмотрена одномерная нелинейная структура с периодическим расположением проводящих нанопленок. При этом механизмы формирования токов в проводящих нанопленках учитываются в уравнениях Максвелла в виде δ -функций в рамках нелинейной волновой теории света. Такой подход, очевидно, является упрощенным, однако он существенно облегчает решение задачи анализа оптических устройств на нелинейных структурах, включающих периодически расположенные нанопленки. Авторами построена аналитическая модель с использованием метода негладкого преобразования аргумента, метода усреднения, условий устойчивости Ляпунова. Важным моментом в представляемой модели является исключение δ -функции в исходном волновом уравнении путем преобразования аргумента.

1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается поведение плоской электромагнитной волны в одномерной бесконечной нелинейной диэлектрической среде, описываемой магнитной проницаемостью μ и диэлектрической проницаемостью вида [12]

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 E^2. \quad (1)$$

В структуре расположены проводящие нанопленки с периодом Λ (рис. 1). При этом токи J_x в соседних нанопленках протекают вдоль оси x в противоположных направлениях. Это возможно при подаче внешних напряжений противоположной полярности на соседние пленки. Рассматривается случай распространения линейно поляризованной волны вдоль оси z (см. рис. 1). Здесь z_1^+ , z_1^- — координаты расположения проводящих нанопленок с положительным и отрицательным направлением токов, соответственно.

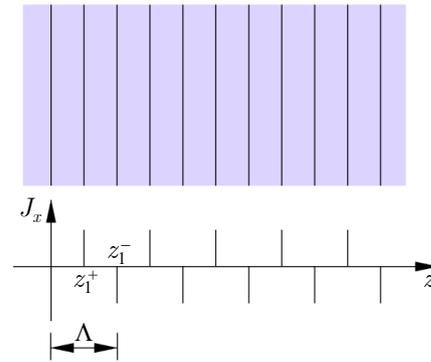


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Geometry of the problem

Целью работы является разработка полностью аналитического математического метода, описывающего поведение плоской гармонической волны в рассматриваемой структуре и позволяющего находить периодические решения в рассматриваемой нелинейной структуре.

2. Волновое уравнение

Решение уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

в случае гармонической линейно поляризованной волны для данной структуры в результате преобразований приводит к нелинейному неоднородному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2} E_x(z) + \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2} |E_x(z)|^2 E_x(z) = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} J_x. \quad (3)$$

Учитывая, что $J_x = \sigma(z)E_x$ — плотность тока, где $\sigma(z)$ — удельная проводимость нелинейной диэлектрической среды или нанопленок в зависимости от координаты z , из (3) получим

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2} E_x(z) + \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2} |E_x(z)|^2 E_x(z) = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma(z) E_x(z). \quad (4)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче нелинейная среда является диэлектрической, то $\sigma(z)$ на интервалах между нанопленками равна нулю. Приближенно считая толщину нанопленок стремящейся к нулю в сравнении с размерами периода структуры, выражение в правой части может быть записано с использованием δ -функции Дирака. Таким образом, для токов, протекающих в положительном направлении оси x , имеем

$$J_x^+ = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{\text{nf}}(z) E_x(z) \delta(z - z_k^+), \quad (5)$$

где z_k^+ — пространственная координата соответствующей нанопленки. Для токов, протекающих в отрицательном направлении оси x , имеем

$$J_x^- = -j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{\text{nf}}(z) E_x(z) \delta(z - z_k^-), \quad (6)$$

где z_k^- — пространственная координата соответствующей нанопленки. Здесь плотности токов одинаковы по абсолютному значению и их амплитуды равны. В результате уравнение для плоской гармонической волны в нелинейной среде с периодически расположенными нанопленками (см. рис. 1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2} E_x(z) + \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2} |E_x(z)|^2 E_x(z) = \\ = j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{\text{nf}}(z) E_x(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)], \end{aligned} \quad (7)$$

где σ_{nf} — удельная проводимость нанопленки. Далее, для удобства решения введем обозначения

$$\begin{aligned} p &= \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu}{c^2}, \\ \varepsilon &= \frac{3\omega^2 \varepsilon_2 \mu}{c^2}, \\ q &= j \frac{4\pi\omega\mu}{c^2} \sigma_{\text{nf}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь ε — малый параметр, поскольку для реальных сред ε_2 имеет порядок $10^{-11} \dots 10^{-20}$, $c \approx 3 \cdot 10^8$. Теперь уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d^2 E_x(z)}{dz^2} + p E_x(z) + \varepsilon |E_x(z)|^2 E_x(z) = -2q E_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)]. \quad (9)$$

3. Решение дифференциального уравнения

В данном разделе представлена полностью аналитическая модель анализа поведения плоской гармонической волны в изотропной нелинейной структуре с периодическим включением проводящих нанопленок. Модель основана на методе негладкого преобразования аргумента и методе усреднения.

3.1. Негладкое преобразование аргумента. В соответствии с предыдущим разделом правая часть уравнение (9) содержит последовательность δ -функций. Это связано с тем фактом, что на одном периоде расположены две нанопленки с противоположным направлением протекания токов. Система решается для равноудаленных нанопленок, то есть для так называемой эквидистантной системы. С математической точки зрения, сложность заключается в негладкости соответствующего динамического процесса.

Моделирование влияния тонких нанопленок (так называемых импульсных воздействий) можно выполнить несколькими способами. Первый способ заключается в использовании обобщенных функций [16]. Однако такой подход требует дополнительных математических обоснований для каждой конкретной системы.

Другой подход заключается в решении задачи на каждом из интервалов между нанопленками с последующей сшивкой решений. Таким образом, вместо одной задачи решают целую последовательность задач [17].

В данной работе для моделирования поведения волны в рассматриваемой структуре использован метод негладкого преобразования аргумента. Этот метод [18–20], с одной стороны, позволяет построить полностью аналитическую математическую модель поведения волны в нелинейной среде, которая содержит δ -функции Дирака, с другой — получить решение на периоде в виде аналитического выражения.

В соответствии с методом решение (9) ищется в виде

$$E_x = X(\tau) + Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \quad (10)$$

где (рис. 2)

$$\tau = \begin{cases} -4z/\Lambda + 1 + 2k, & k\Lambda \leq z \leq (k + 1/2)\Lambda, \\ 4z/\Lambda - 3 - 2k, & (k + 1/2)\Lambda \leq z \leq (k + 1)\Lambda, \end{cases} \quad (11)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Суть метода негладкого преобразования аргумента при замене переменной (10) иллюстрирует рис. 2. В соответствии с методом введена кусочно-линейная функция $\tau(z)$ такая, что вторая производная от нее равнялась последовательности δ -функций в (9):

$$\frac{d^2\tau(z)}{dz^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)]. \quad (12)$$

Возьмем первую производную от функции $E_x(z)$:

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dY(\tau)}{dz} \left(\frac{d\tau}{dz}\right)^2 + Y(\tau) \frac{d^2\tau}{dz^2}. \quad (13)$$

Очевидно, что для равноудаленных нанопленок с противоположным направлением токов [18] $(d\tau/dz)^2 = 1$, тогда

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dY(\tau)}{dz} + Y(\tau) \frac{d^2\tau}{dz^2}. \quad (14)$$

Слагаемое в (14), содержащее δ -функции, исключается за счет граничного условия [19, 20]:

$$\begin{aligned} Y|_{\tau=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ Y|_{\tau=k\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

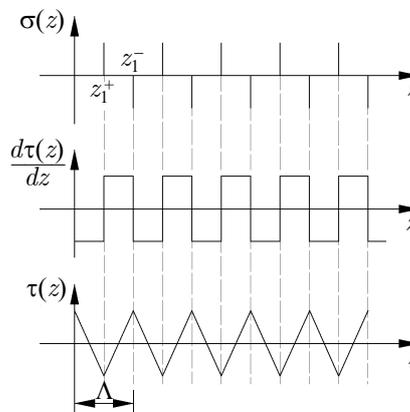


Рис. 2. Негладкое преобразование аргумента
Fig. 2. Non-smooth argument conversion

Тогда первую производную в (14) перепишем в виде

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dY(\tau)}{dz}. \quad (16)$$

С учетом приведенного выше обоснования вторая производная функции $E_x(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} \frac{d^2 \tau}{dz^2} + \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2}. \quad (17)$$

Подставим в (9) выражение (10) и (17) и получим дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \frac{d^2 Y(\tau)}{dz^2} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2} = \\ & = -p \left(X(\tau) + Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right) - \varepsilon \left(X(\tau) + Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right)^3 - \\ & - 2q \left(X(\tau) + Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, мы получили выражение (18), содержащее δ -функции в левой и правой части. Эти сингулярные члены должны быть исключены из (18) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых порядках производных τ . При этом влияние токов в нанопленках проявляется в граничных условиях, рассмотренных ниже.

3.2. Построение периодических решений. Проведем алгебраические преобразования выражения (18) и получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \frac{d^2 Y(\tau)}{dz^2} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2} = -pX(\tau) - pY(\tau) \frac{d\tau}{dz} - \\ & - 2qX(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)] - \\ & - 2qY(\tau) \frac{d\tau}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)] - \\ & - \varepsilon \left(X^3(\tau) + 3X^2(\tau)Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} + 3X(\tau) \left(Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \left(Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Примем в расчет, что в (19) [18]

$$\begin{aligned} & \frac{d\tau}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2} = 0, \\ & \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

и получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} \left(\frac{d\tau}{dz} \right)^2 + \frac{d^2 Y(\tau)}{dz^2} \frac{d\tau}{dz} + \frac{dX(\tau)}{dz} \frac{d^2 \tau}{dz^2} = -pX(\tau) - pY(\tau) \frac{d\tau}{dz} - \\ & - 2qX(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)] - \\ & - 2qY(\tau) \frac{d\tau}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(z - z_k^+) - \delta(z - z_k^-)] - \\ & - \varepsilon \left(X^3(\tau) + 3X^2(\tau)Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} + 3X(\tau) \left(Y(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right)^2 + Y^3(\tau) \frac{d\tau}{dz} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

В соответствии с вышеуказанным приравняем к нулю коэффициенты при τ^0 , $d\tau/dz$, $d^2\tau/dz^2$, получим систему, которая описывает поведение волны в рассматриваемой структуре в общем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(\tau)}{dz^2} + pX(\tau) &= -\varepsilon(3X^2(\tau)Y(\tau) + Y^3(\tau)), \\ \frac{d^2 Y(\tau)}{dz^2} + pY(\tau) &= -\varepsilon(3X(\tau)Y^2(\tau) + X^3(\tau)) \end{aligned} \quad (22)$$

при условии

$$\begin{aligned} Y|_{\tau=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ Y|_{\tau=k\Lambda} &= 0, \\ \left(\frac{dX(\tau)}{dz} + qX(\tau) \right) \Big|_{\tau=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ \left(\frac{dX(\tau)}{dz} + qX(\tau) \right) \Big|_{\tau=k\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

С математической точки зрения уравнения (22), (23) представляют собой краевую задачу для определения функций X и Y . Несмотря на формально сложный вид, основным преимуществом полученной системы (22), (23) является отсутствие в ней сингулярных членов.

Наличие в модели (22), (23) малого параметра ε дает возможность воспользоваться схемой Пуанкаре для построения периодических решений (см., например, [21]). Представим решение в виде разложения по малому параметру нелинейности ε

$$\begin{aligned} X &= X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau) + \varepsilon^2 X_2(\tau) + \dots, \\ Y &= Y_0(\tau) + \varepsilon Y_1(\tau) + \varepsilon^2 Y_2(\tau) + \dots, \\ p &= \gamma^2 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

где $X_0(\tau)$, $X_1(\tau), \dots$; $Y_0(\tau)$, $Y_1(\tau), \dots$ и γ , p_1 , p_2 , ... — функции, подлежащие определению. Такой подход приводит к расщеплению исходного уравнения, описывающего модель, на рекуррентную последовательность краевых задач на промежутке $k\Lambda \leq z \leq (k+1)\Lambda$. Порождающей является линейная ($\varepsilon = 0$) несвязная относительно X , Y -компонент задача на собственные значения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_0(\tau)}{dz^2} + \gamma^2 X_0(\tau) &= 0, \\ \frac{d^2 Y_0(\tau)}{dz^2} + \gamma^2 Y_0(\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_0(\tau)}{dz} + qX_0(\tau) \Big|_{z=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ Y_0(\tau) \Big|_{z=(k+1/2)\Lambda} &= 0, \\ \frac{dX_0(\tau)}{dz} + qX_0(\tau) \Big|_{z=k\Lambda} &= 0, \\ Y_0(\tau) \Big|_{z=k\Lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Решая задачу (25), (26) на собственные значения, определяем искомые функции X_0 и Y_0

$$\begin{aligned} X_{0i} &= A_0 \varphi_i(\tau), \\ Y_{0i} &= C_0 \psi_i(\tau), \end{aligned} \quad (27)$$

где A_0 и C_0 – константы, определяемые начальными условиями. В данном случае $C_0 = -A_0$ при $k\Lambda \leq z \leq (k + 1/2)\Lambda$ и $C_0 = A_0$ при $(k + 1/2)\Lambda \leq z \leq (k + 1)\Lambda$.

В зависимости от значений параметра γ_i существует два различных вида собственных форм колебаний

$$\varphi_i(\tau) = \sqrt{\frac{2}{q^2 + \gamma_i^2}}(q \cos(\gamma_i \tau) + \gamma_i \sin(\gamma_i \tau)), \quad (28)$$

$$\psi_i(\tau) = \sqrt{2} \cos(\gamma_i \tau)$$

для $\gamma_i = i\pi/2$, где $i = 1, 3, 5, \dots$ и

$$\varphi_i(\tau) = -\sqrt{\frac{2}{q^2 + \gamma_i^2}}(q \sin(\gamma_i \tau) - \gamma_i \cos(\gamma_i \tau)), \quad (29)$$

$$\psi_i(\tau) = \sqrt{2} \sin(\gamma_i \tau)$$

для $\gamma_i = i\pi$, где $i = 1, 2, 3, \dots$. Здесь функции $\varphi_i(\tau)$ и $\psi_i(\tau)$ нормированы следующим образом:

$$\langle \varphi_n(\tau), \varphi_m(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \int_{k\Lambda}^{(k+1/2)\Lambda} \varphi_n(z), \varphi_m(\tau) d\tau = \delta_{nm}, \quad (30)$$

$$\langle \psi_n(\tau), \psi_m(\tau) \rangle = \delta_{nm},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $n = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Тогда, после ряда математических преобразований и подстановки (28) и (29) в (27), а затем в (10), получим

$$E_x(z) = -A_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + (i\pi)^2}} \left(\frac{i\pi}{\Lambda} \cos\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) - q \sin\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) \right) - \frac{4}{\Lambda} \sin\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) \right] +$$

$$+ A_0 \sum_{i=2l-1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + (i\pi)^2}} \left(q \cos\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) + \frac{i\pi}{2\Lambda} \sin\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) \right) - \frac{4}{\Lambda} \cos\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) \right] + O(\epsilon) \quad (31)$$

для $k\Lambda \leq z \leq (k + 1/2)\Lambda$. Здесь $l = 1, 2, 3, \dots$.

$$E_x(z) = -A_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + (i\pi)^2}} \left(\frac{i\pi}{\Lambda} \cos\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) - q \sin\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) \right) + \frac{4}{\Lambda} \sin\left(\frac{4i\pi}{\Lambda} z\right) \right] +$$

$$+ A_0 \sum_{i=2l-1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{q^2 + (i\pi)^2}} \left(q \cos\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) + \frac{i\pi}{2\Lambda} \sin\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) \right) + \frac{4}{\Lambda} \cos\left(\frac{2i\pi}{\Lambda} z\right) \right] + O(\epsilon) \quad (32)$$

для $(k + 1/2)\Lambda \leq z \leq (k + 1)\Lambda$. Важно отметить, что решение, полученное в форме (31), (32), не содержит в себе δ -функции Дирака. Выражения (31), (32) представляют собой нулевое приближение решения. Аналогично находятся первое, второе и т. д. приближения в зависимости от требуемой точности решения.

Заключение

В данной работе рассмотрено поведение линейно поляризованной гармонической волны в оптической нелинейной среде при наличии периодически расположенных проводящих нанопленок. Влияние нанопленок на поведение волны учитывается введением δ -функций. Для нахождения периодических решений дифференциального уравнения, описывающего поведение

волны, предложен метод негладкого преобразования, позволяющий находить аналитическое решение для рассматриваемого случая. Преимуществом построенной модели является нахождение аналитического периодического решения на периоде и отсутствие δ -функций в конечных выражениях. Корректность построенной модели подтверждается тем фактом, что она является полностью аналитической, а конечные выражения получены путем тождественных преобразований. Результаты, представленные в данной работе, могут быть использованы при любых параметрах среды и волны в рамках волновой теории света.

Список литературы

1. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Издательство иностранной литературы, 1959. 457 с.
2. Yeh P. Optical Waves in Layered Media. New York: John Wiley & Sons, 1988. 416 p.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.
4. Vyotovtov K. A., Bulgakov A. A. Analytical investigation method for electrodynamic properties of periodic structures with magnetic layers // Telecommunications and Radio Engineering. 2006. Vol. 65, no. 11–15. P. 1307–1321. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v65.i14.60.
5. Vyotovtov K. A. Analytical investigation of stratified isotropic media // Journal of the Optical Society of America A. 2005. Vol. 22, no. 4. P. 689–696. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000689.
6. Kaur S., Saini D., Sappal A. Band gap simulations of one-dimensional photonic crystal // International Journal of Advanced Research in Computer Science and Electronics Engineering. 2012. Vol. 1, no. 2. P. 161–165.
7. Zhu X., Zhang Y., Chandra D., Cheng S.-C., Kikkawa J. M., Yang S. Two-dimensional photonic crystals with anisotropic unit cells imprinted from PDMS membranes under elastic deformation // Proc. SPIE. 2009. Vol. 7223. P. 72231C. DOI: 10.1117/12.809275.
8. Luan P.-G., Ye Z. Two dimensional photonic crystals // arXiv:cond-mat/0105428. arXiv Preprint, 2001. DOI: 10.48550/arXiv.cond-mat/0105428.
9. Chutinan A., Noda S. Highly confined waveguides and waveguide bends in three-dimensional photonic crystal // Appl. Phys. Lett. 1999. Vol. 75, no. 24. P. 3739–3741. DOI: 10.1063/1.125441.
10. Prasad T., Colvin V., Mittleman D. Superprism phenomenon in three-dimensional macroporous polymer photonic crystals // Phys. Rev. B. 2003. Vol. 67, no. 16. P. 165103. DOI: 10.1103/PhysRevB.67.165103.
11. Gupta S. D. Nonlinear optics of stratified media // In: Wolf E. (ed.) Progress in Optics. Vol. 38. Amsterdam: Elsevier, 1998. P. 1–84. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70349-4.
12. Shen Y. R. The Principles of Nonlinear Optics. Chichester: Wiley, 1984. 576 p.
13. Panasyuk G. Y., Schotland J. C., Markel V. A. Quantum theory of the electromagnetic response of metal nanofilms // Phys. Rev. B. 2011. Vol. 84, no. 15. P. 155460. DOI: 10.1103/PhysRevB.84.155460.
14. Антонец И. В., Котов Л. Н., Некипелов С. В., Карнушов Е. Н. Проводящие и отражающие свойства тонких металлических пленок // Журнал технической физики. 2004. Т. 74, № 11. С. 102–106.
15. Andreev A. V., Postnov S. S. Metallic nanofilms optical response description based on self-consistent theory // Journal of Physics: Conference Series. 2008. Vol. 129. P. 012046. DOI: 10.1088/1742-6596/129/1/012046.
16. Матвеев В. А., Плешанов Н. К., Геращенко О. В., Байрамуков В. Ю. Комплексное исследование нанопленок титана, полученных методом магнетронного напыления // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2014. № 10. С. 34–39. DOI: 10.7868/S0207352814100138.
17. Pilipchuk V. N., Volkova S. A., Starushenko G. A. Study of a non-linear oscillator under parametric

- impulsive excitation using a non-smooth temporal transformation // Journal of Sound and Vibration. 1999. Vol. 222, no. 2. P. 307–328. DOI: 10.1006/jsvi.1998.2067.
18. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
 19. *Pilipchuk V. N.* A transformation for vibrating systems based on a non-smooth periodic pair of functions // Doklady AN Ukr. SSR Ser. A. 1988. Vol. 4. P. 37–40.
 20. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter, 2011. 321 p.
 21. *Мусеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.

References

1. Brillouin L, Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux périodiques. Paris: Masson et Dunod; 1956. 348 p.
2. Yeh P. Optical Waves in Layered Media. New York: John Wiley & Sons; 1988. 416 p.
3. Born M, Wolf E. Principles of Optics. 4th edition. New York: Pergamon Press; 1968. 992 p.
4. Vytovtov KA, Bulgakov AA. Analytical investigation method for electrodynamics properties of periodic structures with magnetic layers. Telecommunications and Radio Engineering. 2006; 65(11–15):1307–1321. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v65.i14.60.
5. Vytovtov KA. Analytical investigation of stratified isotropic media. Journal of the Optical Society of America A. 2005;22(4):689–696. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000689.
6. Kaur S, Saini D, Sappal A. Band gap simulations of one-dimensional photonic crystal. International Journal of Advanced Research in Computer Science and Electronics Engineering. 2012; 1(2):161–165.
7. Zhu X, Zhang Y, Chandra D, Cheng SC, Kikkawa JM, Yang S. Two-dimensional photonic crystals with anisotropic unit cells imprinted from PDMS membranes under elastic deformation. Proc. SPIE. 2009;7223:72231C. DOI: 10.1117/12.809275.
8. Luan PG, Ye Z. Two dimensional photonic crystals. arXiv:cond-mat/0105428. arXiv Preprint; 2001. DOI: 10.48550/arXiv.cond-mat/0105428.
9. Chutinan A, Noda S. Highly confined waveguides and waveguide bends in three-dimensional photonic crystal. Appl. Phys. Lett. 1999;75(24):3739–3741. DOI: 10.1063/1.125441.
10. Prasad T, Colvin V, Mittleman D. Superprism phenomenon in three-dimensional macroporous polymer photonic crystals. Phys. Rev. B. 2003;67(16):165103. DOI: 10.1103/PhysRevB.67.165103.
11. Gupta SD. Nonlinear optics of stratified media. In: Wolf E, editor. Progress in Optics. Vol. 38. Amsterdam: Elsevier; 1998. P. 1–84. DOI: 10.1016/S0079-6638(08)70349-4.
12. Shen YR. The Principles of Nonlinear Optics. Chichester: Wiley; 1984. 576 p.
13. Panasyuk GY, Schotland JC, Markel VA. Quantum theory of the electromagnetic response of metal nanofilms. Phys. Rev. B. 2011;84(15):155460. DOI: 10.1103/PhysRevB.84.155460.
14. Antonets IV, Kotov LN, Nekipelov SV, Karpushov EN. Conducting and reflecting properties of thin metal films. Tech. Phys. 2004;49(11):1496–1500. DOI: 10.1134/1.1826197.
15. Andreev AV, Postnov SS. Metallic nanofilms optical response description based on self-consistent theory. Journal of Physics: Conference Series. 2008;129:012046. DOI: 10.1088/1742-6596/129/1/012046.
16. Matveev VA, Pleshanov NK, Gerashchenko OV, Bayramukov VY. Complex study of titanium nano-films prepared by magnetron sputtering. Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques. 2014;8(5):991–996. DOI: 10.1134/S102745101405036X.
17. Pilipchuk VN, Volkova SA, Starushenko GA. Study of a non-linear oscillator under parametric impulsive excitation using a non-smooth temporal transformation. Journal of Sound and Vibration. 1999;222(2):307–328. DOI: 10.1006/jsvi.1998.2067.

18. Vladimirov VS. Generalized Functions in Mathematical Physics. Moscow: Nauka; 1979. 320 p. (in Russian).
19. Pilipchuk VN. A transformation for vibrating systems based on a non-smooth periodic pair of functions. Doklady AN Ukr. SSR Ser. A. 1988;4:37–40.
20. Perestyuk NA, Plotnikov VA, Samoilenko AM, Skripnik NV. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter; 2011. 321 p.
21. Moiseev NN. Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics. Moscow: Nauka; 1969. 380 p. (in Russian).

Волкова Светлана Анатольевна — кандидат физико-математических наук, доцент.

Россия, 414056 Астрахань, ул. Татищева, стр. 16/1
Астраханский государственный технический университет
E-mail: s.volkovav@mail.ru

Вытовтов Константин Анатольевич — доктор технических наук, доцент. Ведущий научный сотрудник Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.

Россия, 117997 Москва, ул. Профсоюзная, 65
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
E-mail: vytovtov_konstan@mail.ru

Барабанова Елизавета Александровна — доктор технических наук, доцент.

Россия, 117997 Москва, ул. Профсоюзная, 65
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
E-mail: elizavetaalex@yandex.ru

Хахомов Сергей Анатольевич — доктор физико-математических наук, доцент.

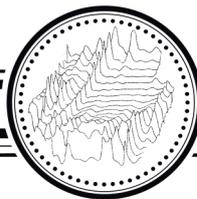
Республика Беларусь, 212027 Могилев, пр-т Шмидта, 3
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: khakh@gsu.by

Коваленко Дмитрий Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент.

Республика Беларусь, 212027 Могилев, пр-т Шмидта, 3
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: dkov@gsu.by

Иванов Михаил Германович — студент Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт».

Россия, 111250 Москва, вн.тер.г. муниципальный округ Лефортово, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
E-mail: ivanov.webdesign@yandex.ru



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003059
EDN: WGKVOM

Математическая модель фотоплетизмограммы для тестирования методов анализа сигналов биологической природы

А. М. Вахлаева[✉], Ю. М. Ишбулатов, А. С. Караваев, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия
E-mail: ✉vakhlaeva.anna@gmail.com, ishbulatov95@mail.ru, karavaevas@gmail.com,
ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.05.2023, принята к публикации 22.06.2023,
опубликована онлайн 19.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящей работы — разработка математической модели сигнала фотоплетизмограммы, предназначенной для тестирования методов введения мгновенных фаз сигналов модуляции. Модель должна воспроизводить статистические и спектральные свойства реального сигнала, а также включать мгновенные фазы сигналов модуляции в явном виде, чтобы обеспечить возможность их использования в качестве эталона. **Методы.** Характерные анакротические и катакротические подъемы пульсовой волны фотоплетизмограммы моделировались суммой двух функций, описывающих плотности асимметричных нормальных распределений. Сигналы модуляции фотоплетизмограммы задавались как гармонические функции от мгновенных фаз, введенных для колебаний очень низкочастотных, низкочастотных и высокочастотных диапазонов реальных фотоплетизмограмм. При сопоставлении спектров мощности модельных и экспериментальных сигналов рассчитывалась плотность мощности в соответствующих частотных диапазонах. **Результаты.** Модель качественно воспроизвела форму колебаний реального сигнала и обеспечила количественное соответствие его спектральным характеристикам с погрешностью менее 1%. **Заключение.** Предложенная математическая модель может быть использована для апробации методов введения мгновенных фаз сигналов модуляции фотоплетизмограммы.

Ключевые слова: математическое моделирование, фотоплетизмограмма, фазовый анализ, спектральный анализ, синхронизация, направленные связи.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН.

Для цитирования: Вахлаева А. М., Ишбулатов Ю. М., Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Математическая модель фотоплетизмограммы для тестирования методов анализа сигналов биологической природы // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 586–596. DOI: 10.18500/0869-6632-003059. EDN: WGKVOM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Mathematical model of the photoplethysmogram for testing methods of biological signals analysis

A. M. Vakhlaeva✉, Yu. M. Ishbulatov, A. S. Karavaev,
V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia
E-mail: ✉vakhlaeva.anna@gmail.com, ishbulatov95@mail.ru, karavaevas@gmail.com,
ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Received 15.05.2023, accepted 22.06.2023, available online 19.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The purpose of this study was to develop a mathematical model of the photoplethysmogram, which can be used to test methods that introduce the instantaneous phases of the modulating signals. The model must reproduce statistical and spectral characteristics of the real photoplethysmogram, and explicitly incorporate the instantaneous phases of the modulating signals, so they can be used as a reference during testing. *Methods.* Anacrotic and catacrotic phases of the photoplethysmogram pulse wave were modeled as a sum of two density distributions for the skew normal distribution. The modulating signals were introduced as harmonic functions taken from the experimental instantaneous phases of the VLF (0.015...0.04 Hz), LF (0.04...0.15 Hz) and HF (0.15...0.4 Hz) oscillations in the real photoplethysmogram. The spectral power in the VLF, LF, and HF frequency ranges was calculated to compare the model and experimental data. *Results.* The model qualitatively reproduces the shape of the experimental photoplethysmogram pulse wave and shows less than 1% error when simulating the spectral properties of the signal. *Conclusion.* The proposed mathematical model can be used to test the methods for introduction of the instantaneous phases of the modulating signals in photoplethysmogram time-series.

Keywords: mathematical modeling, photoplethysmogram, phase analysis, spectral analysis, synchronization, directional coupling.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state task of the Saratov Branch of the Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences.

For citation: Vakhlaeva AM, Ishbulatov YuM, Karavaev AS, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Mathematical model of the photoplethysmogram for testing methods of biological signals analysis. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):586–596. DOI: 10.18500/0869-6632-003059

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Подход к изучению сердечно-сосудистой системы (ССС), основанный на применении методов радиофизики и нелинейной динамики, оказался крайне плодотворным и позволил получить ряд фундаментальных и прикладных результатов. Меры сложности [1], спектральные характеристики [2], а также количественные характеристики направленных связей [3] и синхронизации [4], примененные к анализу сигналов ССС, используются для диагностики и контроля терапии социально значимых заболеваний, включая артериальную гипертензию [2] и диабет [5]. Перечисленные подходы также применяются для диагностики стресса [6, 7], решения задач спортивной медицины [8] и фундаментального изучения динамики взаимодействия различных элементов ССС во время активных экспериментов [9], различных стадий сна [10] и т. д.

При исследовании сигналов ССС многие авторы рассматривают систему автономной регуляции кровообращения в виде ансамбля взаимодействующих автоколебательных систем с запаздыванием в петлях обратной связи. Регистрация фотоплетизмограмм (ФПГ; photoplethysmogram — PPG) — неинвазивный и доступный способ оценить автоколебательную динамику контуров автономной регуляции, включая симпатическую и парасимпатическую регуляцию тонуса сосудов

и симпатическую регуляцию ритма сердца [11]. Широкая доступность носимых коммерческих регистраторов ФПГ дополнительно подстегивает интерес к исследованию этого сигнала [12]. Однако анализ ФПГ, как и анализ любых сигналов биологического происхождения, осложнен их нестационарностью, широкополосным спектральным составом и присутствием цветных шумов. Перечисленные факторы остро ставят проблему тестирования и параметризации методов введения фаз, детектирования фазовой синхронизации, диагностики направленных связей и т. д. Анализ исключительно экспериментальных данных не позволяет однозначно решить перечисленные проблемы. Для экспериментальных данных правильный результат не известен — например, не известна истинная форма временного ряда мгновенной фазы или значения коэффициентов связи. Это не позволяет количественно сопоставить точности оценок, полученных при использовании различных наборов параметров.

Типичным решением перечисленных сложностей является апробация методов на тестовых математических моделях, в разработке которых имеется огромный задел. Существуют классические эталонные системы, а также низкоразмерные модели низкочастотных ритмов ФПГ в виде дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием в петлях обратной связи [13], которые, безусловно, необходимы на начальном этапе апробации методов, но не передают сложный широкополосный спектральный состав реальных данных. Существуют модели, воспроизводящие форму колебаний биологических сигналов [14, 15], применяется подгонка таких моделей под данные конкретных пациентов. Из первых принципов предложены многокомпонентные модели [16], воспроизводящие структуру и сложную динамику ССС и синтезирующие сигналы, качественно соответствующие реальным сигналам в смысле спектральных и статистических характеристик. Однако нами не были обнаружены модели, в которых мгновенные фазы сигналов модуляции сигнала ФПГ и частотной модуляции основного ритма сердца были бы заданы в явном виде и могли бы быть непосредственно извлечены из математической модели. Таким образом, перечисленные модели не могут обеспечить эталонные временные реализации мгновенной разности фаз, необходимые в ходе тестирования и сопоставления различных методов введения фаз. Поэтому целью данной работы являлась разработка имитационной математической модели сигнала ФПГ, в которой мгновенные фазы сигналов модуляции присутствуют в явном виде. Кроме того, необходимым условием было достижение количественного соответствия спектральных и фазовых характеристик модельных и реальных сигналов, а также совпадение формы модельных и экспериментальных временных рядов.

1. Математическая модель

Разработанная математическая модель опирается на подходы, предложенные в работах [14] и [15]. Основной сердечный ритм задавался временем одного прохода отображающей точки по предельному циклу, к которому сходилась фазовая траектория следующей динамической системы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - \omega(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = \alpha y(t) + \omega(t)x(t), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\omega(t) = 2\pi / \left(w_0 + \sum_{i=VLF, LF, HF} k_i^{HRV} \cos(\varphi_i^{HRV}(t)) \right). \quad (2)$$

В формуле (1) $\alpha = 1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, в формуле (2) $\varphi_i^{HRV}(t)$ — мгновенные фазы зарегистрированных в натурном эксперименте колебаний сердечного ритма (Heart Rate Variability — HRV) в VLF (0.015...0.04 Гц), LF (0.04...0.15 Гц) и HF (0.15...0.4 Гц) частотных диапазонах,

ω_0 — собственная частота основного сердечного ритма, k_i^{HRV} — безразмерные коэффициенты, определяющие глубину частотной модуляции в VLF, LF и HF диапазонах. Уравнения (1) и (2) решались методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования 0.004. Форма пульсовой волны ФПГ в рамках отдельного кардиоцикла описывалась выражением:

$$\text{PPG}(t) = \sum_{i=\text{VLF,LF,HF}} k_i^{\text{PPG}} \cos(\varphi_i^{\text{PPG}}(t)) + 2 \sum_{i=\text{An,Cat}} a_i \gamma_i(t) \Gamma_i(t), \quad (3)$$

где $\varphi_i^{\text{PPG}}(t)$ — мгновенные фазы колебаний экспериментальных ФПГ в VLF (0.015...0.04 Гц), LF (0.04...0.15 Гц) и HF (0.15...0.4 Гц) частотных диапазонах. k_i^{PPG} — безразмерные коэффициенты, определяющие глубину модуляции в VLF, LF и HF диапазонах. Выражение под последним знаком суммы представляет собой функцию, передающую форму плотности асимметричного нормального распределения. Сумма двух таких выражений качественно соответствует типичному виду пульсовой волны ФПГ, представляющей собой сумму анакротического и катакротического подъемов. Нижние индексы An и Cat обозначают параметры и выражения, относящиеся, соответственно, к анакротическому и катакротическому подъемам ФПГ. Параметры a_i , где $i = \text{An, Cat}$, определяют высоту анакротического и катакротического подъемов ФПГ. Обозначения $\gamma_i(t)$ и $\Gamma_i(t)$, где $i = \text{An, Cat}$, соответствовали выражениям (4) и (5):

$$\gamma_i(t) = \frac{1}{b_i \sqrt{2\pi}} e^{-\left(s_i \left(\frac{T_n(t)-T_i}{b_i}\right)^2\right)}, \quad (4)$$

$$\Gamma_i(t) = \int \gamma_i(t), \quad (5)$$

в которых s_i , b_i , T_i , где $i = \text{An, Cat}$ — параметры соответственно асимметрии, ширины и положения анакротического $i = \text{An}$ и катакротического $i = \text{Cat}$ подъемов ФПГ, $T_n(t)$ — функция, нелинейно зависящая от времени, прошедшего с начала кардиоцикла, $T(t)$. Время $T(t)$ задавалось тривиальной моделью накопления и сброса $\dot{T}(t) = 1$, где $T(t)$ приводилось к 0, когда мгновенная фаза основного сердечного ритма $\varphi(t)$ достигала 1, данная мгновенная фаза вводилась как $\varphi(t) = \arctg(y(t)/x(t))$. Первые 0.5 с от начала кардиоцикла, которые умещают в себя анакротический и катакротический подъемы, $T_n(t) = T(t)$. После 0.5 с функция $T_n(t)$, в общем случае, линейно нарастала быстрее или медленнее $T(t)$, согласно уравнению (6), и достигала 1 к концу кардиоцикла.

$$\dot{T}_n(t) = \frac{0.5}{T_c - 0.5}, \quad (6)$$

где T_c — длительность текущего кардиоцикла. Уравнение (6) обеспечивало достижение функцией $T_n(t)$ единицы за оставшуюся часть кардиоцикла. Завершающим этапом было сглаживание зависимости $T_n(t)$ фильтром скользящего среднего с шириной окна в 31 отсчет дискретного времени. Введение функции $T_n(t)$ обусловлено необходимостью достижения двух целей: первая — необходимость сохранить постоянство временного интервала между началом кардиоцикла и вершиной анакротического подъема; вторая — удлинение пульсовой волны в случае длительных кардиоциклов и ее сужение в случае коротких циклов. Если переписать уравнение (4) с использованием непосредственно фазы $\varphi(t)$, то пульсовая волна будет удлиняться и укорачиваться в зависимости от длительности кардиоцикла, но в то же время будет изменяться и временной отрезок между началом цикла и анакротическим подъемом. Это приводило бы к возникновению значительных погрешностей при оценке variability ритма сердца как последовательности временных интервалов между анакротическими подъемами пульсовых волн ФПГ, что противоречит экспериментальным наблюдениям, по крайней мере, для пациентов без выраженных патологий [17].

Если переписать выражение (4), используя $T(t)$ вместо $T_n(t)$, длительность пульсовой волны будет оставаться постоянной и перестанет соответствовать длительности кардиоцикла.

При генерации реализаций модели, представленных в разделе «Результаты», использовались мгновенные фазы VLF, LF и HF колебаний из двухчасовых записей RR-интервалов (последовательности временных интервалов между R-зубцами ЭКГ) и сигналов кровенаполнения сосудов пальца, зарегистрированных оптическим датчиком инфракрасного диапазона с активной подсветкой в отраженном свете (ФПГ), пяти здоровых испытуемых в возрасте от 19 лет до 21 года. Колебания VLF, LF и HF диапазонов были извлечены из сигналов ФПГ с использованием прямоугольных полосовых фильтров с полосами пропускания, соответственно, 0.015...0.04 Гц, 0.04...0.15 Гц и 0.15...0.4 Гц. Извлечение колебаний VLF, LF и HF диапазонов из сигналов RR-интервалов производилось аналогичным образом, но перед фильтрацией сигнал интерполировался кубическими β -сплайнами и перевыбирался с частотой дискретизации 250 Гц. Мгновенные фазы затем вводились с использованием преобразования Гильберта.

Параметры математической модели, определяющие форму колебаний сигнала ФПГ в рамках отдельного кардиоцикла, были подобраны таким образом, чтобы достичь качественного соответствия типичной форме экспериментальных сигналов здоровых добровольцев. Параметры k_i^{HRV} , где $i = \text{VLF, LF и HF}$, подбирались отдельно для каждой временной реализации математической модели, сгенерированной с использованием мгновенных фаз VLF, LF и HF колебаний RR-интервалов и ФПГ конкретного здорового добровольца. Параметры подбирались с помощью итерационной процедуры, которая обеспечивала количественное соответствие (с погрешностью менее 1%) между спектральной плотностью мощности в VLF, LF и HF диапазонах экспериментального сигнала RR-интервалов и последовательностью временных интервалов между анакротическими подъемами модельной ФПГ.

Параметры k_i^{PPG} , где $i = \text{VLF, LF и HF}$, подбирались с помощью аналогичной итерационной процедуры, которая обеспечивала количественное соответствие (с погрешностью менее 1%)

Таблица. Параметры математической модели
Table. Parameters of the mathematical model

Параметр	Значение
a_{An}	60
a_{Cat}	10
T_{An}	0.06
T_{Cat}	0.35
b_{An}	0.22
b_{Cat}	0.15
S_{An}	10
S_{Cat}	5
ω_0	1.180 ± 0.188
$k_{\text{VLF}}^{\text{HRV}}$	3.954 ± 1.879
$k_{\text{LF}}^{\text{HRV}}$	4.499 ± 2.652
$k_{\text{HF}}^{\text{HRV}}$	1.250 ± 0.509
$k_{\text{VLF}}^{\text{PPG}}$	0.041 ± 0.014
$k_{\text{LF}}^{\text{PPG}}$	0.024 ± 0.003
$k_{\text{HF}}^{\text{PPG}}$	0.040 ± 0.012

между относительными индексами VLF_n , LF_n и HF_n , оцененными для модельных и экспериментальных сигналов ФПГ. Индексы VLF_n , LF_n и HF_n рассчитывались как спектральная плотность мощности в диапазонах VLF, LF и HF, соответственно, нормированная на мощность в диапазоне $[\omega_0 - 0.1 \text{ Гц}, \omega_0 + 0.1 \text{ Гц}]$, где ω_0 — средняя частота сердечных сокращений, детектированная по максимуму в спектре мощности экспериментального сигнала ФПГ. Данное значение ω_0 использовалось также в системе уравнений (1). Параметры модели перечислены в Таблице. Значения параметров k_i^{HRV} и k_i^{PPG} , которые приводили модели в соответствие данным конкретных пациентов и были уникальны для каждой реализации модели, представлены как среднее значение плюс/минус стандартное отклонение.

Экспериментальные данные регистрировались стандартным сертифицированным полирегистратором ЭЭГА-21/26 «Энцефалан-131-03» (ООО «Медиком-МТД», Таганрог). Полоса пропускания составляла 0.015...100 Гц при частоте

дискретизации 250 Гц и разрешение — 14 бит. Сигнал ЭКГ регистрировался в I стандартном отведении по Эйнтховену (дифференциальный сигнал с запястий двух рук), сигнал ФПГ регистрировался с дистальной фаланги безымянного пальца правой руки. Данные регистрировались в положении лежа, в спокойной обстановке, при постоянной комфортной температуре.

2. Результаты

На рис. 1 представлены временные ряды, спектры мощности и мгновенные фазы сигнала модуляции среднего значения ФПГ для конкретной временной реализации предложенной математической модели и конкретного добровольца, чьи данные использовались при генерации изображенных модельных сигналов.

Из рис. 1, *a* видно, что форма модельной пульсовой волны качественно соответствует экспериментальным данным, модель также передает наличие выраженных низкочастотных трендов. Рис. 1, *b*, *c* демонстрируют хорошее количественное соответствие между спектрами мощности модельного и экспериментального сигналов ФПГ. Математическая модель, по построению, воспроизводит спектральную плотность мощности в VLF, LF и HF диапазонах частот с погрешностью менее 1%. Модель воспроизводит характерный пик в центре LF диапазона на частоте

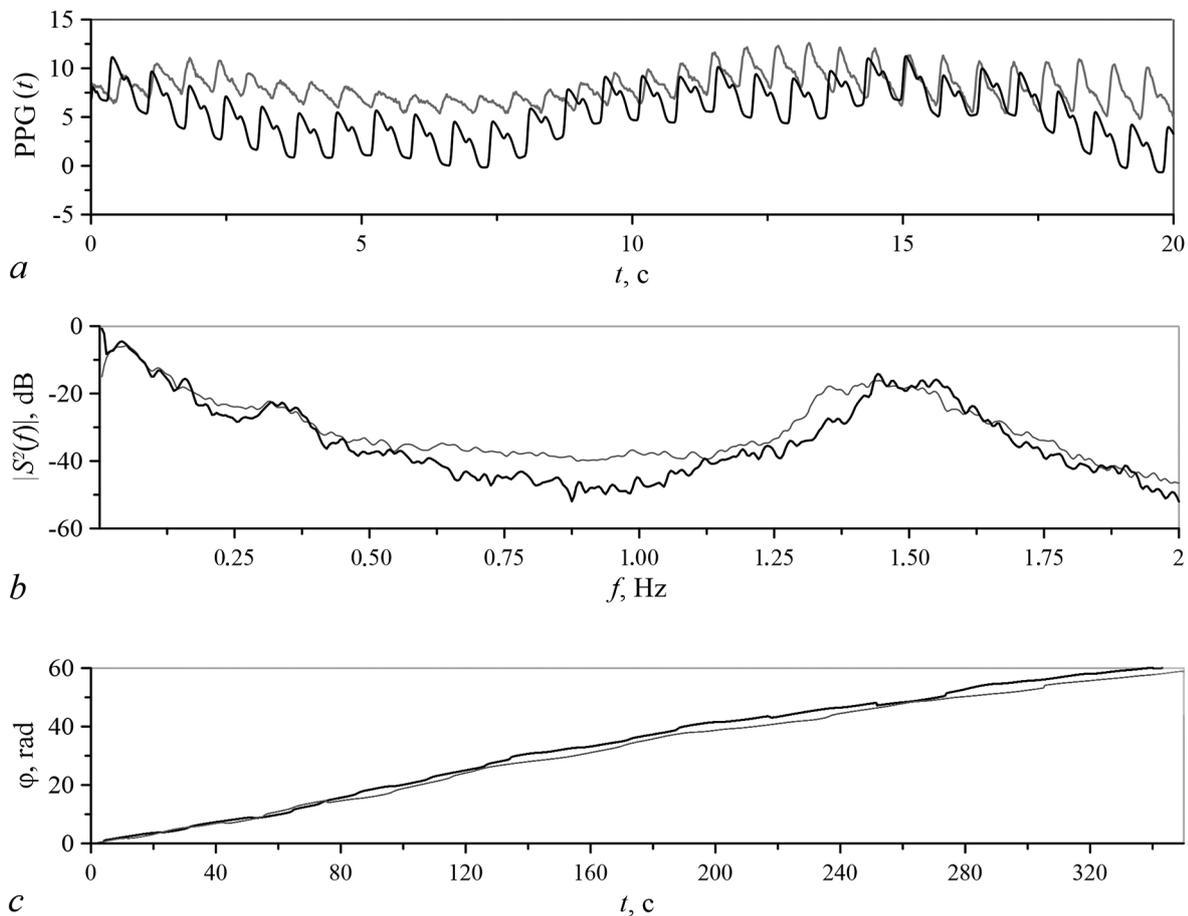


Рис. 1. Временные ряды (*a*), спектры мощности (*b*) и мгновенные фазы (*c*) колебаний низкочастотного LF (0.04...0.15 Гц) диапазона в экспериментальных (серый цвет) и модельных (черный цвет) сигналах ФПГ

Fig. 1. Time series (*a*), power spectra (*b*), and instantaneous phases (*c*) of the LF-oscillations (0.04...0.15 Hz) in the experimental (gray) and model (black) PPG signals

около 0.1 Гц, связанный с модуляцией тонуа артериальных сосудов со стороны симпатического звена системы автономной регуляции кровообращения; пик в HF диапазоне на частоте около 0.3 Гц, связанный с активностью парасимпатического звена системы регуляции и дыханием; пик, соответствующий основному сердечному ритму. Модель передает широкополосный характер реального спектра, а также наличие $1/f$ пьедестала, связанного с шумами центрального происхождения [18]. На рис. 1, с представлены мгновенные фазы LF колебаний среднего значения сигнала ФПГ. Серая сплошная линия соответствует временной реализации переменной $\varphi_{LF}^{PPG}(t)$ из уравнения (3) и, таким образом, эквивалентна истинному сигналу модуляции в данном частотном диапазоне. Черная линия соответствует эмпирической оценке данного сигнала модуляции по временной реализации модели ФПГ. Колебания LF-диапазона выделялись из сигнала ФПГ с использованием прямоугольного полосового фильтра с полосой пропускания 0.04...0.15 Гц, фазы колебаний вводились классическим способом, основанном на преобразовании Гильберта. Из рис. 1, с видно, что средняя скорость нарастания мгновенной фазы $\varphi_{LF}^{PPG}(t)$ и ее оценки совпадают, но сами формы сигналов различаются, что может привести к погрешностям при оценке силы направленных связей и диагностике синхронизации. Предложенная математическая модель позволяет изолировать и количественно оценить роль потенциальных источников погрешностей, наличие которых очевидно из рис. 1, с.

Рис. 2 иллюстрирует случай отключения частотной модуляции основного ритма сердца. На графиках сопоставлены усредненные спектры модельных сигналов ФПГ. Спектр, изображенный серым цветом, был получен для моделей, параметры которых подбирались согласно процедуре, описанной в предыдущем разделе. Спектр, представленный черным цветом, был получен для моделей с теми же параметрами, за исключением параметров k_i^{HRV} , которые были приведены к нулю. Из рис. 2 видно, что пики, соответствующие основному сердечному ритму отдельных испытуемых, стали уже. Также заметно некоторое снижение средней плотности мощности в VLF, LF и HF частотных диапазонах, что свидетельствует о просачивании сигнала частотной модуляции ритма сердца в низкочастотный диапазон сигнала ФПГ и позволяет ожидать, что широкополосная модуляция ритма сердца вносит погрешности при введении мгновенных фаз. Исследование реализаций модели с отключенной частотной модуляцией ритма сердца позволит оценить погрешности введения фаз, обусловленные ошибками параметризации методов и широкополосной природой сигнала модуляции среднего значения ФПГ.

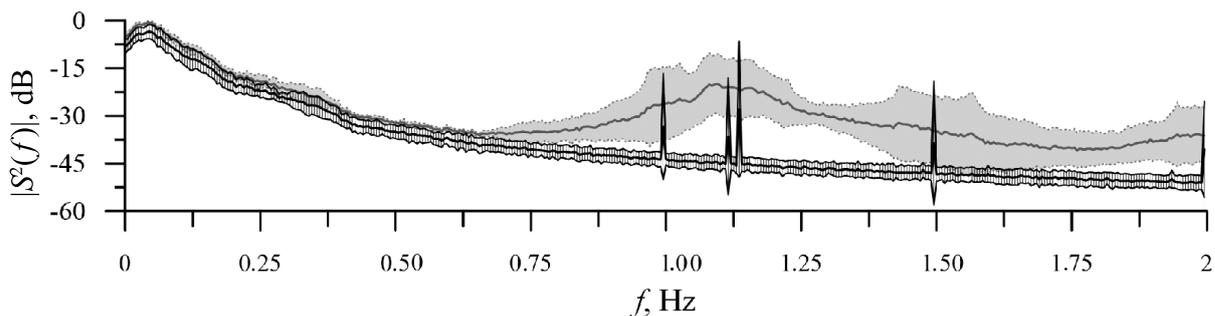


Рис. 2. Серая линия и окружающая ее серая область соответствуют среднему значению и стандартному отклонению мощности в спектрах математических моделей ФПГ, параметры которых соответствовали группе здоровых добровольцев. Черный график с вертикальными черными линиями соответствует среднему значению и стандартному отклонению мощности в спектрах математических моделей ФПГ с отключенной модуляцией основного ритма сердца

Fig. 2. The gray line and its surrounding gray area correspond to the mean value and standard deviation of the model PPG power spectra, with parameters of the model set to simulate healthy individuals. The black plot with vertical black lines corresponds to the mean value and standard deviation of the model PPG power spectra, without the heart rate modulation

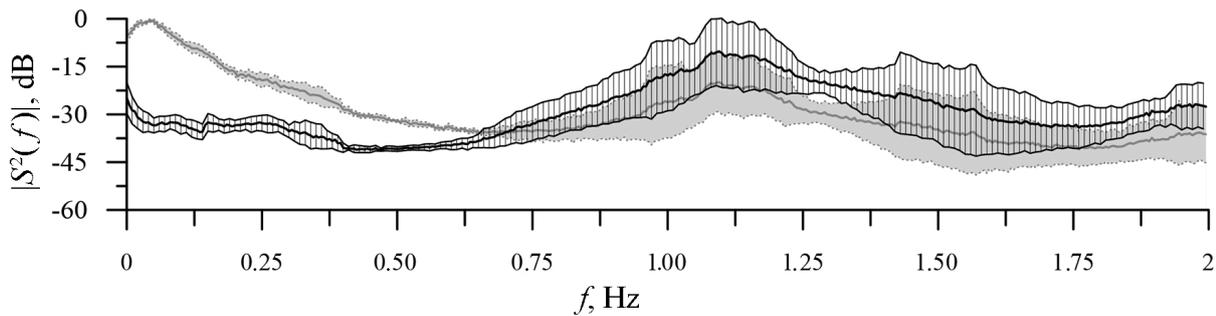


Рис. 3. Серая линия и окружающая ее серая область соответствуют среднему значению и стандартному отклонению мощности в спектрах математических моделей ФПГ, параметры которых соответствовали группе здоровых добровольцев. Черный график с вертикальными черными линиями соответствует среднему значению и стандартному отклонению мощности в спектрах математических моделей ФПГ с отключенной модуляцией среднего значения сигнала фотоплетизмограммы

Fig. 3. The gray line and its surrounding gray area correspond to the mean value and standard deviation of the model PPG power spectra, with parameters of the model set to simulate healthy individuals. The black plot with vertical black lines correspond to the mean value and standard deviation of the model PPG power spectra, without the modulation in the PPG signal

На рис. 3 показан случай с отключенной модуляцией сигнала ФПГ ($k_i^{\text{PPG}} = 0$). Из спектра видно, что в VLF, LF и HF частотных диапазонах остаются спектральные компоненты, обусловленные наличием модуляции основного ритма сердца. Анализ реализации данных математических моделей позволяет количественно исследовать влияние широкополосной модуляции ритма сердца на точность введения мгновенных фаз низкочастотных колебаний ФПГ. Это позволяет определить границы применимости методов анализа и облегчает трактовку результатов.

Заключение

В работе представлена имитационная математическая модель сигнала ФПГ, которая обеспечивает хорошее количественное соответствие временным рядам, мгновенным фазам и спектрам мощности реальных сигналов ФПГ. Модель обладает функционалом добавления частотной модуляции основного сердечного ритма и среднего значения ФПГ колебаниями с частотами внутри VLF, LF и HF диапазонов. Входными данными при этом являются непосредственно мгновенные фазы данных колебаний. Затем сигналы модуляции генерируются как гармонические функции от заданных мгновенных фаз. Таким образом, мгновенные фазы сигналов модуляции присутствуют в модели в явном виде, что позволяет использовать их временные ряды в качестве эталонов при апробации и сопоставлении точности различных методов введения мгновенных фаз по временным рядам. При генерации модели с использованием мгновенных фаз, введенных для VLF, LF и HF колебаний в сигналах ФПГ и RR-интервалах конкретных добровольцев, модель может быть персонализирована под отдельного испытуемого. В данном случае модель обеспечивала количественное соответствие мощностям в VLF, LF и HF диапазонах реальных ФПГ с погрешностью менее 1%.

References

1. Gorshkov O, Ombao H. Multi-chaotic analysis of inter-beat (R-R) intervals in cardiac signals for discrimination between normal and pathological classes. *Entropy (Basel)*. 2021;23(1):112. DOI: 10.3390/e23010112.
2. Fagard RH, Stolarz K, Kuznetsova T, Seidlerova J, Tikhonoff V, Grodzicki T, Nikitin Y, Filipovsky J, Peleska J, Casiglia E, Thijs L, Staessen JA, Kawecka-Jaszcz K. Sympathetic activity, assessed by power spectral analysis of heart rate variability, in white-coat, masked

- and sustained hypertension versus true normotension. *J. Hypertens.* 2007;25(11):2280–2285. DOI: 10.1097/HJH.0b013e3282efc1fe.
3. Borovkova EI, Prokhorov MD, Kiselev AR, Hramkov AN, Mironov SA, Agaltsov MV, Ponomarenko VI, Karavaev AS, Drapkina OM, Penzel T. Directional couplings between the respiration and parasympathetic control of the heart rate during sleep and wakefulness in healthy subjects at different ages. *Front. Netw. Physiol.* 2022;2:942700. DOI: 10.3389/fnetp.2022.942700.
 4. Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Karavaev AS, Kiselev AR, Gridnev VI, Bezruchko BP. Synchronization of low-frequency oscillations in the cardiovascular system: Application to medical diagnostics and treatment. *The European Physical Journal Special Topics.* 2013;222(10):2687–2696. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02048-1.
 5. Lefrandt JD, Smit AJ, Zeebregts CJ, Gans ROB, Hoogenberg KH. Autonomic dysfunction in diabetes: a consequence of cardiovascular damage. *Current Diabetes Reviews.* 2010;6(6):348–358. DOI: 10.2174/157339910793499128.
 6. Dimitriev DA, Saperova EV, Dimitriev AD. State anxiety and nonlinear dynamics of heart rate variability in students. *PLoS ONE.* 2016;11(1):e0146131. DOI: 10.1371/journal.pone.0146131.
 7. Deka B, Deka D. Nonlinear analysis of heart rate variability signals in meditative state: a review and perspective. *BioMedical Engineering OnLine.* 2023;22(1):35. DOI: 10.1186/s12938-023-01100-3.
 8. de Abreu RM, Porta A, Rehder-Santos P, Cairo B, Sakaguchi CA, da Silva CD, Signini ÉF, Milan-Mattos JC, Catai AM. Cardiorespiratory coupling strength in athletes and non-athletes. *Respiratory Physiology & Neurobiology.* 2022;305:103943. DOI: 10.1016/j.resp.2022.103943.
 9. Delliaux S, Ichinose M, Watanabe K, Fujii N, Nishiyasu T. Muscle metaboreflex activation during hypercapnia modifies nonlinear heart rhythm dynamics, increasing the complexity of the sinus node autonomic regulation in humans. *Pflügers Archiv - European Journal of Physiology.* 2023;475(4):527–539. DOI: 10.1007/s00424-022-02780-x.
 10. Karavaev AS, Skazkina VV, Borovkova EI, Prokhorov MD, Hramkov AN, Ponomarenko VI, Runnova AE, Gridnev VI, Kiselev AR, Kuznetsov NV, Chechurin LS, Penzel T. Synchronization of the processes of autonomic control of blood circulation in humans is different in the awake state and in sleep stages. *Front. Neurosci.* 2022;15:791510. DOI: 10.3389/fnins.2021.791510.
 11. Goldstein DS, Benth O, Park MY, Sharabi Y. Low-frequency power of heart rate variability is not a measure of cardiac sympathetic tone but may be a measure of modulation of cardiac autonomic outflows by baroreflexes. *Exp. Physiol.* 2011;96(12):1255–1261. DOI: 10.1113/expphysiol.2010.056259.
 12. Natarajan A, Pantelopoulos A, Emir-Farinas H, Natarajan P. Heart rate variability with photoplethysmography in 8 million individuals: a cross-sectional study. *The Lancet Digital Health.* 2020;2(12):E650–E657. DOI: 10.1016/S2589-7500(20)30246-6.
 13. Ringwood JV, Malpas SC. Slow oscillations in blood pressure via a nonlinear feedback model. *American Journal of Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology.* 2001;280(4):R1105–R1115. DOI: 10.1152/ajpregu.2001.280.4.R1105.
 14. Tang Q, Chen Z, Ward R, Elgendi M. Synthetic photoplethysmogram generation using two Gaussian functions. *Sci. Rep.* 2020;10(1):13883. DOI: 10.1038/s41598-020-69076-x.
 15. McSharry PE, Clifford GD, Tarassenko L, Smith LA. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* 2003;50(3):289–294. DOI: 10.1109/TBME.2003.808805.
 16. Cheng L, Khoo MCK. Modeling the autonomic and metabolic effects of obstructive sleep apnea: a simulation study. *Front. Physiol.* 2012;2:111. DOI: 10.3389/fphys.2011.00111.

17. Mejía-Mejía E, May JM, Torres R, Kyriacou PA. Pulse rate variability in cardiovascular health: a review on its applications and relationship with heart rate variability. *Physiol. Meas.* 2020;41(7):07TR01. DOI: 10.1088/1361-6579/ab998c.
18. Kotani K, Struzik ZR, Takamasu K, Stanley HE, Yamamoto Y. Model for complex heart rate dynamics in health and diseases. *Phys. Rev. E.* 2005;72(4):041904. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.041904.



Вахлаева Анна Михайловна — родилась в Саратове (2001). Студентка 4 курса Института физики направления «Биотехнические системы и технологии». Научные интересы: математическое моделирование, нелинейная динамика и её приложения.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: vakhlaeva.anna@gmail.com



Ишбулатов Юрий Михайлович — родился в Саратове (1994). Окончил с отличием бакалавриат (2015) и магистратуру (2017) СГУ имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Биотехнические системы и технологии». Кандидат физико-математических наук (2021). С 2022 года работает на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии в должности доцента и в лаборатории нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН в должности научного сотрудника. Автор более 20 статей в журналах, индексируемых в WoS и Scopus. Научные интересы: анализ биомедицинских данных методами радиофизики и нелинейной динамики и разработка математических моделей сложных биологических объектов и сигналов.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: ishbulatov95@mail.ru
ORCID: 0000-0003-2871-5465
AuthorID (eLibrary.Ru): 829775



Каравеев Анатолий Сергеевич — родился в Саратове (1981). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2004). Доктор физико-математических наук (2019, СГТУ), доцент (2018). Заведующий кафедрой динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ, старший научный сотрудник отдела продвижения новых кардиологических информационных технологий Саратовского государственного медицинского университета имени В. И. Разумовского, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — радиофизические устройства регистрации и анализа сигналов биологических объектов, разработка программного обеспечения для персональных компьютеров и цифровых сигнальных процессоров. Имеет около 300 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: karavaevas@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4678-3648
AuthorID (eLibrary.Ru): 128455



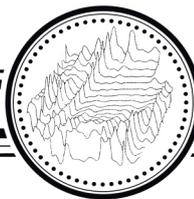
Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Доктор физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1579-6465
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



Прохоров Михаил Дмитриевич — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Доктор физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4069-9410
AuthorID (eLibrary.Ru): 39985



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003067
EDN: ZKVTFL

Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов

А. А. Ростунцова^{1,2,3}✉, Н. М. Рыскин^{1,3}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉rostuncova@mail.ru, ryskinm@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 14.07.2023, принята к публикации 4.09.2023,
опубликована онлайн 19.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. В данной работе рассматривается взаимодействие монохроматической электромагнитной волны со встречным прямолинейным пучком электронов, движущихся в продольном магнитном поле. Цель работы — исследовать условия возникновения модуляционной неустойчивости (МН) в такой системе и определить, при каких параметрах волны МН является абсолютной, а при каких — конвективной. Методы. Теоретический анализ характера МН проводится на основе исследования асимптотической формы неустойчивых возмущений методом перевала. Аналитические результаты также верифицируются при помощи численного моделирования. Результаты. Теоретически определена граница смены характера МН на плоскости параметров входного сигнала (амплитуда — частотная отстройка от циклотронного резонанса). Численное моделирование подтверждает, что с увеличением частоты сигнала режимы автомодуляции, соответствующие абсолютной МН, сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала, что соответствует конвективной МН. Численные результаты совпадают с аналитическими для системы, согласованной на границе. Согласование обеспечивается плавным нарастанием магнитного поля в области влета электронного пучка. Заключение. Определение аналитических условий реализации абсолютной МН представляет практический интерес, поскольку возникающая при этом автомодуляция может приводить к генерации последовательностей импульсов со спектром в виде частотных гребенок.

Ключевые слова: модуляционная неустойчивость, абсолютная/конвективная неустойчивость, нелинейные волны, микроволновые солитоны, циклотронный резонанс.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-12-00291.

Для цитирования: Ростунцова А. А., Рыскин Н. М. Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 597–609. DOI: 10.18500/0869-6632-003067. EDN: ZKVTFL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Study of character of modulation instability in cyclotron resonance interaction of an electromagnetic wave with a counterpropagating rectilinear electron beam

A. A. Rostuntsova^{1,2,3}✉, N. M. Ryskin^{1,3}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

³Saratov State University, Russia

E-mail: ✉rostuncova@mail.ru, ryskinm@info.sgu.ru

Received 14.07.2023, accepted 4.09.2023, available online 19.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. In this paper, the interaction of a monochromatic electromagnetic wave with a counterpropagating electron beam moving in an axial magnetic field is considered. The *purpose* of this study is to investigate the conditions for occurrence of modulation instability (MI) in such a system and to determine at which parameters of the incident wave the MI is absolute or convective. *Methods.* Theoretical analysis of the MI character is carried out by studying the asymptotic form of unstable perturbations using the saddle-point analysis. The analytical results are verified by numerical simulations. *Results.* Theoretically, the boundary of change in the character of MI on the plane of input signal parameters (amplitude and detuning of the frequency from the cyclotron resonance) is determined. Numerical simulations confirm that as the signal frequency increases, the regime of self-modulation, which corresponds to the absolute MI, is replaced by the stationary single-frequency transmission corresponding to the convective MI. The numerical results coincide with the analytical ones for the system, which is matched at the end. The matching is implemented by smooth increasing of the guiding magnetic field in the region of electron beam injection. *Conclusion.* Determining the analytical conditions for the implementation of the absolute MI is of practical interest, since the emerging self-modulation can lead to the generation of trains of pulses with the spectrum in the form of frequency combs.

Keywords: modulation instability, absolute/convective instability, nonlinear waves, microwave solitons, cyclotron resonance.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation under Grant No. 23-12-00291.

For citation: Rostuntsova AA, Ryskin NM. Study of character of modulation instability in cyclotron resonance interaction of an electromagnetic wave with a counterpropagating rectilinear electron beam. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):597–609. DOI: 10.18500/0869-6632-003067

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Одним из фундаментальных эффектов, приводящих к возникновению сложной динамики в нелинейных средах с дисперсией, является модуляционная неустойчивость (МН) [1–6]. МН — это неустойчивость монохроматической волны с несущей частотой ω относительно медленных пространственно-временных модуляций на боковых частотах $\omega \pm \Omega$, $\Omega \ll \omega$. МН может наблюдаться в системах различной природы и играет важную роль в нелинейной оптике, физике плазмы, гидродинамике и др.

При наличии МН гармонический сигнал, распространяющийся в нелинейной среде с дисперсией, обогащается новыми независимыми спектральными компонентами. Вместо стационарного распространения волны наблюдается автомодуляция, то есть осцилляции амплитуды волны, которые могут быть как регулярными, так и хаотическими. Процесс развития МН, как правило, завершается образованием солитонов огибающей. Наиболее известным примером таких солитонов являются солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [2–6].

В среде с конечной протяженностью, возбуждаемой гармоническим сигналом на одной из границ, процесс распространения волны существенным образом зависит от того, является

МН конвективной или абсолютной [6, 7]. В работах [8, 9] исследовались различия между конвективной и абсолютной МН на примере относительно простых модельных систем, которые описываются НУШ или нелинейным уравнением Клейна–Гордона. При конвективной неустойчивости нестационарные возмущения сносятся вдоль системы и покидают ее. Таким образом, после переходного процесса устанавливается режим стационарного распространения волны. Нестационарные режимы автомодуляции наблюдаются только в случае абсолютной МН, когда неустойчивые возмущения непрерывно генерируются по всей длине системы.

В работе [10] нами была исследована МН при циклотронном резонансном взаимодействии электромагнитной волны (ЭМВ) со встречным, изначально прямолинейным потоком электронов, движущихся в продольном магнитном поле. Поток выступает в качестве нелинейной среды, состоящей из неизохронных электронов-осцилляторов. Неизохронность обусловлена релятивистской зависимостью циклотронной частоты от энергии электронов. Когда частота падающей монохроматической ЭМВ находится в пределах полосы циклотронного поглощения, а мощность сигнала достаточно мала, волна затухает и одновременно происходит раскачка поперечных колебаний электронов. Однако с увеличением амплитуды сигнала за счет неизохронности колебаний электронов полоса поглощения смещается в область более низких частот. В результате становится возможным распространение ЭМВ без затухания. При этом за счет развития МН входной сигнал может трансформироваться в последовательность микроволновых солитонов. Отметим, что аналогичный эффект был впервые предсказан в [11], где он был назван нелинейным или солитонным туннелированием (см. также [3]). Применительно к системе, которая рассматривается в данной работе, он был обнаружен и исследован в работах [12–14]. Реализация указанного эффекта в микроволновой электронике представляет очевидный интерес с точки зрения генерации последовательностей коротких микроволновых импульсов со спектром в виде частотных гребенок, что актуально для ряда практических приложений, например, в спектроскопии [15, 16].

Теоретический анализ нелинейных стационарных решений в виде солитонов позволил определить аналитическое условие для амплитуды и частоты падающей ЭМВ, при котором циклотронное поглощение сменяется автомодуляцией, причем найденное условие хорошо согласуется с результатами численного моделирования [10]. Помимо этого, было обнаружено, что с увеличением частоты входного сигнала нестационарный режим автомодуляции сменяется стационарным прохождением волны. В данной работе показано, что этот эффект связан со сменой характера МН с абсолютного на конвективный. Представлены результаты теоретического анализа характера МН, в частности, проведено строгое исследование асимптотической формы неустойчивых возмущений методом перевала. В результате определена аналитическая граница перехода от абсолютной МН к конвективной на плоскости параметров входного сигнала. Теоретические выводы подтверждаются результатами численного моделирования.

1. Модель и основные уравнения

Схема рассматриваемой модели приведена на рис. 1, а. Трубочатый поток электронов, направляемый однородным продольным магнитным полем B_0 , взаимодействует с обратной волной в цилиндрическом волноводе в условиях циклотронного резонанса

$$\omega_r + h_r V_z \approx \omega_H, \quad (1)$$

где ω_r и $h_r = h_r(\omega_r)$ — частота и постоянная распространения волны, соответственно, V_z — продольная скорость электронов, $\omega_H = eB_0/(m_e\gamma)$ — циклотронная частота, e и m — заряд и масса покоя электрона, γ — фактор Лоренца. Электроны, вращающиеся в продольном магнитном поле, являются циклотронными осцилляторами, которые неизохронны в силу релятивистской

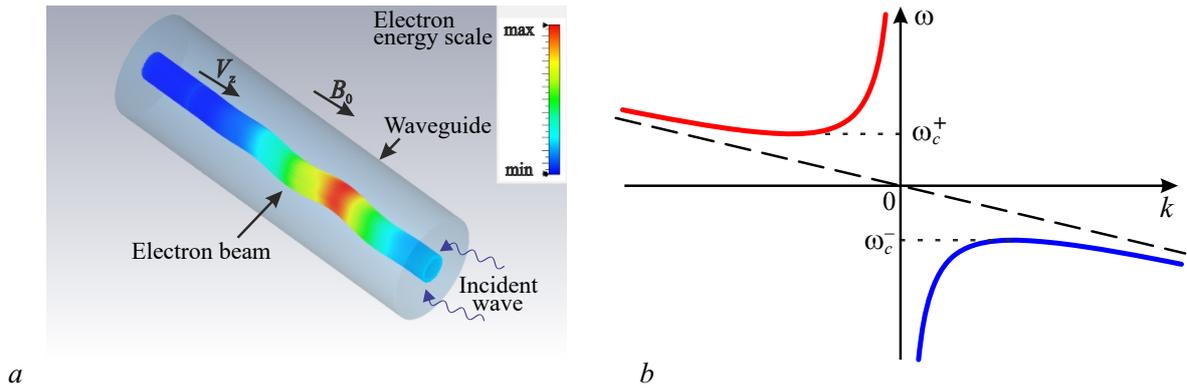


Рис. 1. *a* — схематическая модель резонансного циклотронного взаимодействия излучения со встречным прямолинейным электронным пучком; *b* — дисперсионная диаграмма $\omega(k)$ (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* — scheme of the resonance cyclotron interaction of radiation with a counterpropagating rectilinear electron beam; *b* — dispersion diagram $\omega(k)$ (color online)

зависимости циклотронной частоты вращения от энергии $\omega_H = \omega_H(\gamma)$. Предполагается, что у электронов отсутствует поперечная скорость на входе в пространство взаимодействия. Такой поток формирует пассивную среду из неизохронных циклотронных электронов-осцилляторов в отличие от мазеров на циклотронном резонансе, где в электродинамическую систему встраивается поток вращающихся электронов, являющийся активной средой [17]. ЭМВ, распространяющаяся навстречу потоку невозбужденных электронов-осцилляторов, при выполнении условия (1) начинает поглощаться, вызывая поперечные колебания электронов. С ростом амплитуды этих колебаний условие циклотронного резонанса (1) нарушается, и поглощение насыщается.

Электронно-волновое взаимодействие в рассматриваемой модели описывается системой уравнений, хорошо известной из литературы [10, 12–14]:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} - \frac{\partial a}{\partial Z} = -p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + i|p|^2 p = a. \quad (3)$$

Здесь (2) есть уравнение возбуждения волны электронным пучком, а (3) — уравнение движение электронов в поле волны, усредненное по периоду циклотронных осцилляций. В уравнениях (2), (3) a — нормированная медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля волны, $p = p_x + ip_y$ — нормированный поперечный импульс электронов, $Z \sim z$ и $\tau \sim (t - z/V_z)$ — безразмерные независимые переменные, x, y — поперечные координаты, z — продольная координата, а t — время. Все переменные в (2) являются безразмерными, подробнее см. [10, 12–14]. Поскольку электронный поток при $Z = 0$ обладает нулевой скоростью вращения, имеет место граничное условие

$$p(Z = 0) = 0. \quad (4)$$

На правую границу системы, при $Z = L$, где L — безразмерная длина, подаётся внешний гармонический сигнал, то есть

$$a(Z = L) = A_0 e^{i\omega\tau}, \quad (5)$$

где A_0 и ω — нормированные амплитуда и отстройка частоты сигнала от частоты циклотронного резонанса, соответственно.

2. Нелинейное дисперсионное соотношение

Рассмотрим решения уравнений (2), (3) в виде монохроматической волны с постоянной амплитудой: $a = A_0 e^{i(\omega\tau - kZ)}$, $p = P_0 e^{i(\omega\tau - kZ)}$. В [10] для этих решений было получено нелинейное дисперсионное соотношение

$$(\omega + k) (k - |P_0|^2) = -1, \quad (6)$$

причем комплексные амплитуды волн A_0 и P_0 связаны соотношением

$$|P_0|^2 = |A_0|^2 (\omega + k)^2. \quad (7)$$

Анализ соотношения (6) показывает, что имеется полоса непропускания $\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$, границы которой $\omega_c^\pm = \pm 2 - |A_0|^2$ смещаются в область более низких частот при увеличении амплитуды волны. Качественный вид дисперсионной диаграммы представлен на рис. 1, b. Для волн с $\omega > \omega_c^+$, соответствующих верхней ветви дисперсионной характеристики, выполняется критерий Лайтхилла [2–6]

$$\chi\beta > 0, \quad (8)$$

свидетельствующий о наличии МН. Здесь $\chi = \partial^2\omega/\partial k^2$ – параметр дисперсии групповой скорости, а $\beta = -\partial\omega/\partial|A_0|^2$ – параметр нелинейности. С учётом (6) нетрудно найти выражения для этих параметров:

$$\chi = -\frac{2}{(k - |P_0|^2)^3}, \quad \beta = \frac{1}{(k - |P_0|^2)^4}. \quad (9)$$

Если выбрать частоту входного гармонического сигнала в полосе непропускания и начать увеличивать его амплитуду, то рано или поздно эта частота сравняется с критической ω_c^+ . Вместо циклотронного поглощения станет возможным распространение незатухающих волн (нелинейное туннелирование). Однако анализ нелинейного дисперсионного соотношения проводится для безграничной среды, тогда как рассматриваемая система принципиально ограничена в пространстве, поскольку граничные условия (4), (5) ставятся на разных концах пространства взаимодействия. Как показано в [10], критическое значение частоты, при котором начинается распространение ЭМВ, отличается от ω_c^+ и определяется соотношением

$$\omega = 2 - \frac{1}{2}|A_0|^2. \quad (10)$$

Отметим, что (10) в точности соответствует связи между частотой и амплитудой точного решения в виде солитона [10, 12–14]. Действительно, МН приводит к тому, что туннелирующая волна разбивается на бегущие солитоны огибающей (см. [10]).

3. Анализ характера модуляционной неустойчивости

Чтобы определить характер неустойчивости (абсолютная или конвективная), будем исследовать асимптотическую форму неустойчивых возмущений на бесконечно больших временах [7, 18, 19]. Поскольку МН есть неустойчивость монохроматической волны относительно медленных модуляций с частотами, лежащими в небольшом интервале вблизи несущей частоты, зададим малые возмущения монохроматического решения

$$\begin{aligned} a &= (A_0 + \tilde{a}(Z, \tau)) e^{i(\omega\tau - kZ)}, \\ p &= (P_0 + \tilde{p}(Z, \tau)) e^{i(\omega\tau - kZ)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $|\tilde{a}(Z, \tau)| \ll |A_0|$, $|\tilde{p}(Z, \tau)| \ll |P_0|$, а ω и k связаны дисперсионным соотношением (6). Следуя [6–9], будем искать решение в виде пары сателлитов, равноотстоящих от несущей частоты:

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= a_+ e^{i(\Omega\tau - KZ)} + a_- e^{-i(\Omega\tau - KZ)}, \\ \tilde{p} &= p_+ e^{i(\Omega\tau - KZ)} + p_- e^{-i(\Omega\tau - KZ)}.\end{aligned}\quad (12)$$

После подстановки (11) и (12) в исходные уравнения (2), (3) и линеаризации системы получим дисперсионное соотношение для частоты Ω и волнового числа K малого возмущения. Корни этого уравнения можно записать в явном виде:

$$\Omega(K) = -K + \frac{K(\omega + k)^2}{1 + (\omega + k)^2(K^2 - K_0^2)} \pm \frac{K(\omega + k)^2 \sqrt{(\omega + k)^2(K^2 - K_0^2)}}{1 + (\omega + k)^2(K^2 - K^2)}, \quad (13)$$

где введено обозначение $K_0^2 = 2|P_0|^2/(\omega + k)$. Напомним, что мы рассматриваем верхнюю ветвь дисперсионной характеристики, где имеет место МН (см. рис. 1, b). При этом $(\omega + k) > 0$ и $K_0^2 > 0$.

Если считать K вещественным, в области волновых чисел $K^2 < K_0^2$ корни $\Omega(K)$ будут комплексными. Для инкремента неустойчивости $\lambda = -\text{Im}[\Omega(K)]$ получим следующее выражение:

$$\lambda(K) = |K| \frac{(\omega + k)^3 \sqrt{K_0^2 - K^2}}{1 + (\omega + k)^2(K^2 - K^2)}. \quad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что на верхней ветви дисперсионной характеристики действительно имеет место МН, что соответствует выводам, основанным на критерии Лайтхилла (см. раздел 2). На рис. 2 приведена зависимость инкремента неустойчивости от K и $|P_0|$. Видно, что с ростом амплитуды волны область волновых чисел, в которой имеет место МН, расширяется.

Для более строгого анализа будем считать и Ω , и K комплексными. Следуя [7, 18, 19], представим общее решение для малого возмущения поля в виде интеграла Фурье

$$\tilde{a}(Z, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_K e^{i(\Omega(K)\tau - KZ)} dK. \quad (15)$$

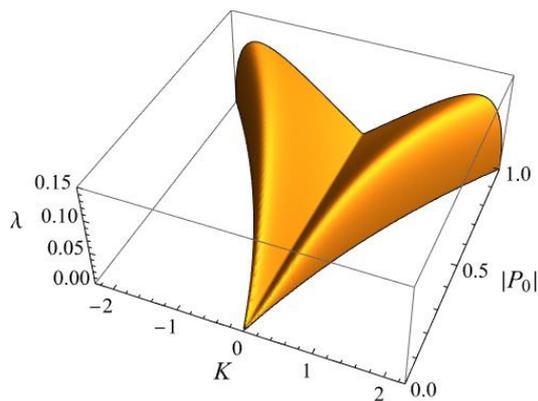


Рис. 2. Инкремент МН $\lambda(K)$ как функция K и $|P_0|$ при $\omega = 2$

Fig. 2. Increment of the MI $\lambda(K)$ as a function of K and $|P_0|$ at $\omega = 2$

Асимптотическая форма интеграла (15) при условии $\tau \rightarrow \infty$ оценивается методом перевала. При этом

$$\tilde{a}(Z, \tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\text{Im}[\Omega(K_s)]\tau}, \quad (16)$$

где K_s — точка перевала или седловая точка, в которой $d\Omega(K_s)/dK - Z/\tau = 0$ [7, 18, 19].

Неустойчивость является абсолютной, если в любой фиксированной точке Z при $\tau \rightarrow \infty$ возмущение неограниченно нарастает во времени. В соответствии с оценкой (16) это условие соответствует неравенству

$$\text{Im}[\Omega(K_s)] < 0. \quad (17)$$

Точка перевала в пределе $Z/\tau \rightarrow 0$ определяется из условия нулевой комплексной групповой скорости

$$\frac{d\Omega}{dK} = 0. \quad (18)$$

При этом контур интегрирования в (15) деформируется таким образом, чтобы проходить через точку перевала по линии наискорейшего спуска.

Уравнение (18) решается численно совместно с дисперсионным соотношением (13). Всего существует 6 точек перевала K_s^i , которым соответствуют корни $\Omega_i(K_s)$, $i = 1, \dots, 6$. Занумеруем их как показано на рис. 3, где приведен пример зависимостей $\text{Re}\Omega_i$ и $\text{Im}\Omega_i$ от несущей частоты ω при некотором фиксированном значении $|P_0|$. Корни обладают симметрией $\Omega_{1,2,3} = -\Omega_{6,5,4}$, что, очевидно, обусловлено выбором возмущения в виде пары симметричных сателлитов (см. (12)).

При любой фиксированной амплитуде $|P_0|$ существует некоторое критическое значение несущей частоты $\omega = \omega_{cr}$, такое, что при $\omega > \omega_{cr}$ все точки перевала K_s лежат на вещественной оси. Соответствующие корни дисперсионного соотношения (13) при этом также являются вещественными, то есть $\text{Im}[\Omega(K_s)] = 0$. Это означает, что при $\omega > \omega_{cr}$ условие (17) не выполняется, следовательно, МН является конвективной.

Когда частота ω становится ниже критического значения, в K -плоскости появляются две пары седловых точек с ненулевой мнимой частью. Соответствующие им корни Ω_i становятся комплексно сопряженными: $\Omega_2 = \Omega_3^*$, $\Omega_4 = \Omega_5^*$ (см. рис. 3). Корни Ω_1, Ω_6 остаются действительными. Очевидно, что в каждой паре комплексно-сопряженных корней для одного из них выполняется условие (17), следовательно МН является абсолютной.

Рис. 4 иллюстрирует изменение положения корней в комплексной плоскости при изменении ω . С уменьшением ω вещественные части комплексных корней уменьшаются по абсолютному значению, а мнимые, наоборот, возрастают. Когда несущая частота становится меньше частоты отсечки ω_c^+ , волна становится затухающей и говорить о МН, очевидно, не имеет смысла.

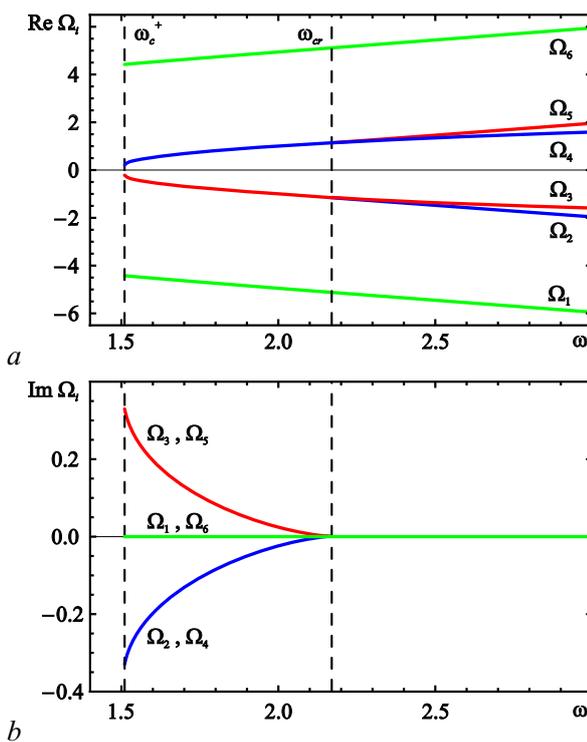


Рис. 3. Зависимости вещественных (a) и мнимых (b) частей корней характеристического уравнения Ω_i от несущей частоты ω при $|P_0| = 0.7$. Критическое значение $\omega_{cr} = 2.18$ соответствует смене характера МН (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependences of the real (a) and imaginary (b) parts of the roots of the characteristic equation Ω_i on the carrier frequency ω at $|P_0| = 0.7$. The critical value $\omega_{cr} = 2.18$ corresponds to the change of the character of MI (color online)

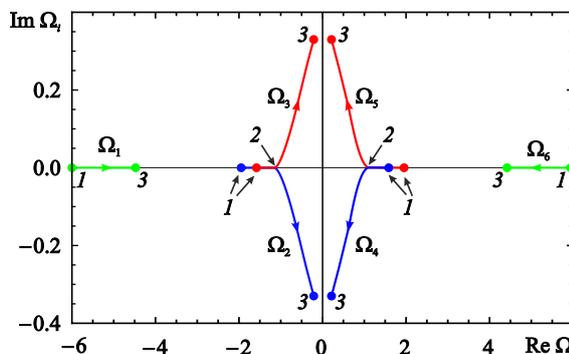


Рис. 4. Изменение положения корней Ω_i в комплексной плоскости при уменьшении частоты от значения $\omega = 3.00$ (точки 1) до частоты отсечки $\omega_c^+ = 1.51$ (точки 3) при $|P_0| = 0.7$. Критическое значение $\omega_{cr} = 2.18$ (точки 2) соответствует смене характера МН (цвет онлайн)

Fig. 4. Positions of the roots Ω_i in the complex plane as the frequency decreases from $\omega = 3.00$ (points 1) to the cutoff frequency $\omega_c^+ = 1.51$ (points 3) at $|P_0| = 0.7$. The critical value $\omega_{cr} = 2.18$ (points 2) corresponds to the change of the character of MI (color online)

4. Численное моделирование

Сопоставим результаты теоретического анализа характера МН с численным моделированием. Уравнения (2), (3) с граничными условиями (4), (5) интегрировались с использованием явной конечно-разностной схемы второго порядка точности по обоим независимым переменным.

На рис. 5 представлено разбиение плоскости параметров $(\omega, |A_0|)$ на области различных динамических режимов. Штриховой линией показана граница полосы непропускания, ниже которой, в области 1, происходит затухание входного сигнала. Эта граница полностью согласуется с теоретической формулой (10). Выше нее, в области 2, распространение волны носит нестационарный характер, то есть наблюдаются режимы автомодуляции. В этой области МН является абсолютной. Отметим, что вблизи границы генерируются близкие к периодическим последовательности бегущих солитонов, однако по мере удаления от границы форма генерируемого сигнала начинает носить сложный, нерегулярный характер (подробнее см. [10]).

В области 3, где МН становится конвективной, по окончании некоторого переходного процесса устанавливается режим стационарного распространения волны. Установившиеся зависимости $|a(Z)|$ и $|p(Z)|$ являются периодическими. Соответствующие аналитические решения были найдены в [10]. Сплошная линия на рис. 5 соответствует аналитической границе смены характера МН. Для ее построения рассчитывались критические значения ω_{cr} при различных амплитудах $|P_0|$ и далее с помощью соотношений (6) и (7) находилась соответствующая зависимость $\omega_{cr}(|A_0|)$. Однако следует заметить, что найденная численно граница смены характера МН достаточно сильно отличается от теоретической. Это, очевидно, объясняется тем, что теоретический анализ в разделе 3 был проведен для безграничной системы, тогда как система с граничными условиями (4) и (5) является принципиально ограниченной и имеет конечную длину L . Отражение волны от левой границы препятствует сносу возмущений вдоль системы в случае конвективной МН.

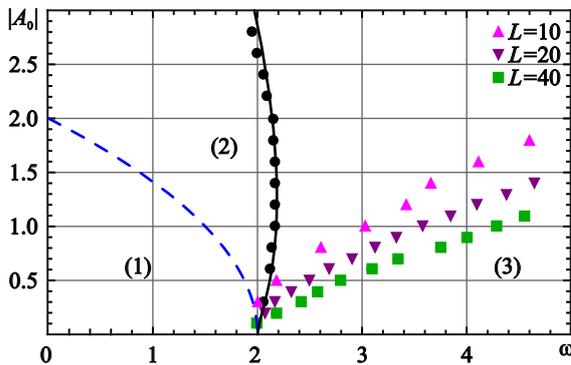


Рис. 5. Области циклотронного поглощения (1), автомодуляции (2) и стационарного распространения сигнала (3) на плоскости параметров $(\omega, |A_0|)$. Штриховая линия – граница непропускания (10). Сплошная линия – теоретическая граница смены характера МН. Треугольники и квадраты – численные границы смены характера МН для несогласованной системы при различной длине L , кружки – для согласованной системы (цвет онлайн)

Fig. 5. Domains of non-transmission (1), self-modulation regimes (2), and steady-state transmission (3) on the $(\omega, |A_0|)$ parameter plane. The dashed line is the boundary of non-transmission (10). The solid line is the theoretical boundary of the change in the nature of MI. Triangles and squares correspond to numerical boundaries of the change in the nature of MI for the unmatched system at different lengths L , circles correspond to the matched system (color online)

Соответственно, граница установления стационарного режима существенно сдвигается в область более высоких частот, причем, чем больше длина системы, тем сильнее выражен этот эффект (см. рис. 5).

Представляет интерес исследование смены характера МН для системы, которая согласована на левой границе, что позволяет избавиться от отражений. Этого можно добиться с помощью плавного изменения магнитного поля вдоль системы. Конкретно в численную модель добавлялся участок согласования длиной $Z_0 < L$, на котором в уравнение движения вводилась зависящая от Z частотная расстройка:

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + i(\Delta(Z) + |p|^2)p = a, \quad (19)$$

которая выбиралась в виде

$$\Delta(Z) = \begin{cases} \Delta_{\max}(Z_0 - Z)^2/Z_0^2, & 0 \leq Z \leq Z_0, \\ 0, & Z_0 \leq Z \leq L. \end{cases} \quad (20)$$

Зависимость (20) моделирует плавное нарастание магнитного поля вдоль направления влета электронов в пространство взаимодействия

в области $0 \leq Z \leq Z_0$. При $Z = Z_0$ магнитное поле достигает значения, соответствующего циклотронному резонансу, и далее остается постоянным. При этом расстройка обращается в нуль.

Моделирование согласованной системы показывает, что при достаточно протяженном участке согласования отражения практически не наблюдаются. Численная граница смены характера МН, показанная на рис. 5 кружками, хорошо согласуется с теоретической, причем результаты моделирования практически не зависят от параметров, входящих в (20). Конкретно представленные результаты получены при $\Delta_{\max} = 2$, $Z_0 = 10$ и $L = 23$, то есть длина однородной части системы равна 13.

Рис. 6 иллюстрирует пространственно-временную динамику поля при различных значениях частоты входного сигнала для несогласованной (a, c, e) и согласованной (b, d, f) системы. Для согласованной системы показан только однородный участок, $Z_0 \leq Z \leq L$. Рисунки 6, a, b

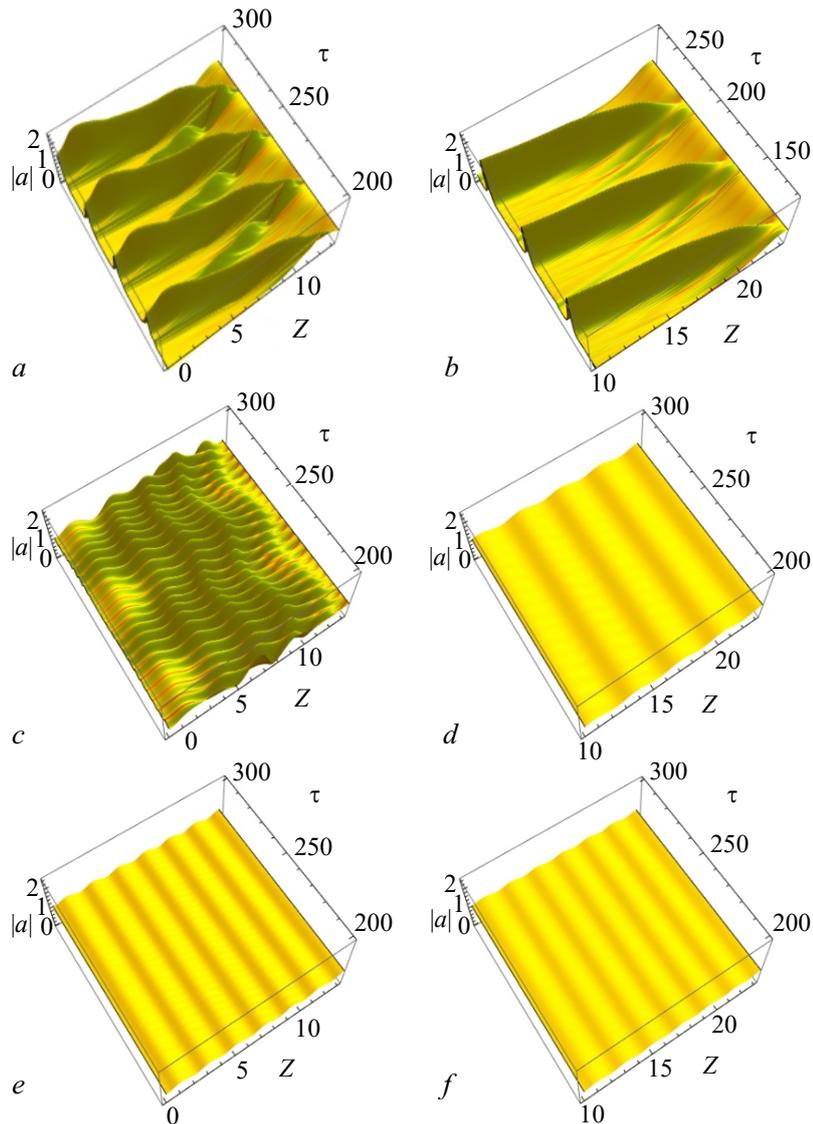


Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы амплитуды поля при $|A_0| = 1.0$ и различных значениях частоты входного сигнала: $\omega = 1.5$ (a, b), 2.5 (c, d), 3.5 (e, f). Рисунки (a, c, e) соответствуют несогласованной системе, (b, d, f) — согласованной (цвет онлайн)

Fig. 6. Spatiotemporal diagrams of the field amplitude at $|A_0| = 1.0$ and different values of the input signal frequencies: $\omega = 1.5$ (a, b), 2.5 (c, d), 3.5 (e, f). Figures (a, c, e) correspond to the unmatched system (color online)

построены при $|A_0| = 1.0$ и $\omega = 1.5$, что соответствует точке, лежащей несколько выше границы пропускания на рис. 5. В обоих случаях развитие МН приводит к генерации периодической последовательности солитонов. Однако в несогласованной системе происходит частичное отражение солитона от левой границы и его распространение в направлении, попутном электронному потоку, что хорошо видно на рис. 6, *a*. В случае согласованной системы (см. рис. 6, *b*) видно, как вблизи правой границы происходит формирование солитонов, которые затем распространяются вдоль системы с постоянной скоростью.

При увеличении частоты до $\omega = 2.5$ мы попадаем в область конвективной МН (см. рис. 5). Однако в несогласованной системе из-за влияния отраженной волны стационарный режим не устанавливается. Образование солитонов при этом не происходит, а колебания амплитуды поля носят сложный, нерегулярный характер (см. рис. 6, *c*). В согласованной системе устанавливается стационарный режим (см. рис. 6, *d*). При этом амплитуда периодически зависит от координаты, что свидетельствует о наличии отраженного сигнала, однако его влияние невелико. Коэффициент стоячей волны (КСВ), который определяется как отношение максимального значения амплитуды к минимальному, равен 1.28.

При $\omega = 3.5$ стационарный режим устанавливается как для согласованной, так и для несогласованной системы (см. рис. 6, *e, f*). В обоих случаях амплитуда периодически зависит от координаты, однако для согласованной системы эта зависимость выражена слабее: для несогласованной системы КСВ равен 1.22, для согласованной — 1.13.

Заключение

В данной работе исследована МН при взаимодействии электромагнитной волны со встречным, изначально прямолинейным потоком электронов в условиях циклотронного резонанса. Нелинейный характер зависимости циклотронной частоты от энергии электронов приводит к сдвигу полосы циклотронного поглощения и проявлению эффекта нелинейного туннелирования при увеличении мощности или частоты падающей волны. Проведен строгий анализ характера МН. Путем анализа асимптотической формы возмущений, вычисленной методом перевала, найдены условия, при которых МН является абсолютной или конвективной, и построена граница смены характера МН на плоскости параметров входного сигнала.

Численное моделирование показывает, что с увеличением частоты входного сигнала нестационарные автомодуляционные режимы, которые соответствуют абсолютной МН, сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала, обусловленным конвективной МН. Однако принципиальное влияние отражений в пространственно-ограниченной системе осложняет сопоставление с теоретическими выводами. Проведено моделирование системы, согласованной на границе, через которую встраивается электронный поток. В этом случае граница смены характера МН хорошо согласуется с теоретической зависимостью, полученной из анализа характера МН. В согласованной системе облегчается генерация периодических последовательностей солитонов. Подобные режимы представляют интерес с точки зрения генерации частотных гребенок в микроволновом диапазоне.

Список литературы

1. Benjamin T. B. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems // Proc. R. Soc. Lond. A. 1967. Vol. 299, no. 1456. P. 59–76. DOI: 10.1098/rspa.1967.0123.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 696 с.
3. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 328 с.
4. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 398 с.

5. Zakharov V. E., Ostrovsky L. A. Modulation instability: The beginning // *Physica D*. 2009. Vol. 238, no. 5. P. 540–548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002.
6. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: URSS, 2021. 312 с.
7. Рыскин Н. М. Колебания и волны в нелинейных активных средах. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2017. 102 с.
8. Балякин А. А., Рыскин Н. М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 30, № 5. С. 6–13.
9. Balyakin A. A., Ryskin N. M. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2004. Vol. 7, no. 1. P. 34–42.
10. Rostuntsova A. A., Ryskin N. M., Zotova I. V., Ginzburg N. S. Modulation instability of an electromagnetic wave interacting with a counterpropagating electron beam under condition of cyclotron resonance absorption // *Phys. Rev. E*. 2022. Vol. 106, no. 1. P. 014214. DOI: 10.1103/PhysRevE.106.014214.
11. Newell A. C. Nonlinear tunnelling // *J. Math. Phys.* 1978. Vol. 19, no. 5. P. 1126–1133. DOI: 10.1063/1.523759.
12. Зотова И. В., Гинзбург Н. С., Железнов И. В., Сергеев А. С. Модуляция интенсивного СВЧ-излучения при резонансном взаимодействии со встречным потоком невозбужденных циклотронных осцилляторов // *Письма в ЖТФ*. 2014. Т. 40, № 12. С. 1–10.
13. Zotova I. V., Ginzburg N. S., Sergeev A. S., Kocharovskaya E. R., Zaslavsky V. Y. Conversion of an electromagnetic wave into a periodic train of solitons under cyclotron resonance interaction with a backward beam of unexcited electron-oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, no. 14. P. 143901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.143901.
14. Гинзбург Н. С., Зотова И. В., Кочаровская Е. Р., Сергеев А. С., Железнов И. В., Заславский В. Ю. Солитоны самоиндуцированной прозрачности и диссипативные солитоны в системах микроволновой электроники // *Известия вузов. Радиофизика*. 2020. Т. 63, № 9. С. 796–824.
15. Benirschke D. J., Han N., Burghoff D. Frequency comb ptychography // *Nat. Commun.* 2021. Vol. 12, no. 1. P. 4244. DOI: 10.1038/s41467-021-24471-4.
16. Hagmann M. J. Scanning frequency comb microscopy—A new method in scanning probe microscopy // *AIP Advances*. 2018. Vol. 8, no. 12. P. 125203. DOI: 10.1063/1.5047440.
17. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике // *Известия вузов. Радиофизика*. 1967. Т. 10, № 9. С. 1414–1453.
18. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Методы теории волн в средах с дисперсией. М.: Физматлит, 2007. 272 с.
19. Barletta A., Celli M. Convective to absolute instability transition in a horizontal porous channel with open upper boundary // *Fluids*. 2017. Vol. 2, no. 2. P. 33. DOI: 10.3390/fluids2020033.

References

1. Benjamin TB. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1967;299(1456):59–76. DOI: 10.1098/rspa.1967.0123.
2. Dodd RK, Eilbeck JC, Gibbon JD, Morris HS. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London: Academic Press; 1982. 630 p.
3. Newell AC. *Solitons in Mathematics and Physics*. Philadelphia: SIAM; 1985. 260 p. DOI: 10.1137/1.9781611970227.
4. Ostrovsky LA, Potapov AI. *Modulated Waves: Theory and Applications*. Baltimore, MD, USA: The Johns Hopkins University Press; 1999. 369 p.

5. Zakharov VE, Ostrovsky LA. Modulation instability: The beginning. *Physica D*. 2009;238(5): 540–548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002.
6. Ryskin NM, Trubetskov DI. *Nonlinear Waves*. Moscow: URSS; 2021. 312 p. (in Russian).
7. Ryskin NM. *Oscillations and Waves in Nonlinear Active Media*. Saratov: Saratov University Publishing; 2017. 102 p. (in Russian).
8. Balyakin AA, Ryskin NM. A change in the character of modulation instability in the vicinity of a critical frequency. *Tech. Phys. Lett.* 2004;30(3):175–177. DOI: 10.1134/1.1707158.
9. Balyakin AA, Ryskin NM. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2004;7(1):34–42.
10. Rostuntsova AA, Ryskin NM, Zotova IV, Ginzburg NS. Modulation instability of an electromagnetic wave interacting with a counterpropagating electron beam under condition of cyclotron resonance absorption. *Phys. Rev. E*. 2022;106(1):014214.
11. Newell AC. Nonlinear tunnelling. *J. Math. Phys.* 1978;19(5):1126–1133. DOI: 10.1063/1.523759.
12. Zotova IV, Ginzburg NS, Zheleznov IV, Sergeev AS. Modulation of high-intensity microwave radiation during its resonant interaction with counterflow of nonexcited cyclotron oscillators. *Tech. Phys. Lett.* 2014;40(6):495–498. DOI: 10.1134/S1063785014060285.
13. Zotova IV, Ginzburg NS, Sergeev AS, Kocharovskaya ER, Zaslavsky VY. Conversion of an electromagnetic wave into a periodic train of solitons under cyclotron resonance interaction with a backward beam of unexcited electron-oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2014;113(14):143901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.143901.
14. Ginzburg NS, Zotova IV, Kocharovskaya ER, Sergeev AS, Zheleznov IV, Zaslavsky VY. Self-induced transparency solitons and dissipative solitons in microwave electronic systems. *Radio-physics and Quantum Electronics*. 2021;63(9–10):716–741. DOI: 10.1007/s11141-021-10092-w.
15. Benirschke DJ, Han N, Burghoff D. Frequency comb pychocopy. *Nat. Commun.* 2021;12(1):4244. DOI: 10.1038/s41467-021-24471-4.
16. Haggmann MJ. Scanning frequency comb microscopy—A new method in scanning probe microscopy. *AIP Advances*. 2018;8(12):125203. DOI: 10.1063/1.5047440.
17. Gaponov AV, Petelin MI, Yulpatov VK. The induced radiation of excited classical oscillators and its use in high-frequency electronics. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1967;10(9–10): 794–813. DOI: 10.1007/BF01031607.
18. Kuzelev MV, Rukhadze AA. *Methods of Wave Theory in Dispersive Media*. Singapore: World Scientific; 2009. 272 p. DOI: 10.1142/7231.
19. Barletta A, Celli M. Convective to absolute instability transition in a horizontal porous channel with open upper boundary. *Fluids*. 2017;2(2):33. DOI: 10.3390/fluids2020033.



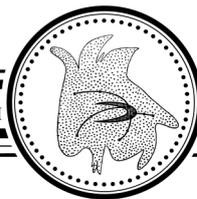
Ростунцова Алёна Александровна — родилась в Саратове (1998). Окончила с отличием магистратуру Института физики СГУ (2021). В настоящее время обучается в аспирантуре СГУ (с 2021). Младший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, вакуумная СВЧ-электроника, генерация коротких микроволновых импульсов.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 603950 Н. Новгород, ул. Ульянова, 46
 Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: rostuncova@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-6795-2108
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1055913



Рыскин Никита Михайлович — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Доктор физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ryskinm@info.sgu.ru
ORCID: 0000-0001-8501-6658
AuthorID (eLibrary.Ru): 29838



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003056

Mutual synchronization of oscillations in a system of coupled evolutionary games

O. S. Vershinina , M. V. Ivanchenko

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: olya.vershinina@itmm.unn.ru, ivanchenko@unn.ru

Received 2.06.2023, accepted 20.07.2023, available online 6.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The purpose of this study is to investigate collective dynamics of coupled communities that evolve according to the population game «Battle of the Sexes». A separate community includes two interacting populations of players of opposite sex, where each player has one of two possible competing behavior strategies. It is necessary to determine the possibility of mutual synchronization of oscillations in the number of players adhering to a particular strategy, build a synchronization region, and also evaluate the dependence of the properties of oscillations on the coupling strength. *Methods.* In this paper, we study the system of evolutionary games «Battle of the Sexes» interacting through migration. To simulate the evolutionary game dynamics we make use of the stochastic Moran process, as well as the Monte Carlo method to sample game trajectories. Mutual synchronization is defined by the appropriately generalized criteria of frequency and phase locking. *Results.* It is shown that the system of coupled evolutionary games «Battle of the Sexes» demonstrates mutual synchronization of oscillations under sufficiently strong coupling. In particular, oscillation frequencies of two communities get adjusted to each other and begin to coincide at some interaction parameter, while the oscillations themselves become almost identical. A similar result was also observed for an ensemble of more than two communities. *Conclusion.* The dependence of the average frequencies of community oscillations on the coupling strength was determined, the adjustment of oscillations with an increase in the coupling strength was demonstrated, thereby showing the possibility of mutual synchronization in the model of coupled evolutionary games «Battle of the Sexes». The region of frequency synchronization was numerically found.

Keywords: evolutionary game theory, game trajectories, stochastic oscillations, mutual synchronization.

Acknowledgements. The authors thank Sergey Denisov (Oslo Metropolitan University) for suggesting the idea of the experiment. The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-32-90202) and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement no. FSWR-2020-0036).

For citation: Vershinina OS, Ivanchenko MV. Mutual synchronization of oscillations in a system of coupled evolutionary games. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5):610–621. DOI: 10.18500/0869-6632-003056

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Взаимная синхронизация колебаний в системе связанных эволюционных игр

О. С. Вершинина[✉], М. В. Иванченко

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: ✉olya.vershinina@itmm.unn.ru, ivanchenko@unn.ru

Поступила в редакцию 2.06.2023, принята к публикации 20.07.2023,
опубликована онлайн 6.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель работы — исследовать коллективную динамику системы связанных сообществ, эволюционирующих по принципу популяционной игры «Битва полов». Отдельное сообщество включает в себя две взаимодействующие популяции игроков противоположного пола, где каждый игрок обладает одной из двух возможных конкурирующих стратегий поведения. Необходимо определить возможность взаимной синхронизации колебаний числа игроков, придерживающихся той или иной стратегии, построить область синхронизации, а также оценить зависимость свойств колебаний от силы связи. **Методы.** В данной работе исследуется система связанных посредством миграции эволюционных игр «Битва полов». Для моделирования эволюционной игровой динамики используется стохастический процесс Морана, а для многократной симуляции отдельных игровых траекторий применяется метод Монте-Карло. Для определения взаимной синхронизации используются критерии захвата частоты и фазы колебаний. **Результаты.** Показано, что в системе связанных эволюционных игр «Битва полов» при достаточно сильной связи наблюдается взаимная синхронизация колебаний. В частности, частоты колебаний двух сообществ подстраиваются и начинают совпадать при некотором параметре взаимодействия, а сами колебания становятся практически идентичными. Подобный результат наблюдался и для ансамбля более чем двух сообществ. **Заключение.** Определена зависимость средних частот колебаний сообществ от силы связи, продемонстрирована подстройка колебаний с увеличением силы связи, тем самым показана возможность взаимной синхронизации в модели связанных эволюционных игр «Битва полов». Численно найдена область частотной синхронизации.

Ключевые слова: эволюционная теория игр, игровые траектории, стохастические колебания, взаимная синхронизация.

Благодарности. Авторы благодарят Сергея Денисова (Oslo Metropolitan University) за предложенную идею эксперимента. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 20-32-90202) и Минобрнауки РФ (соглашение № FSWR-2020-0036).

Для цитирования: Вершинина О. С., Иванченко М. В. Взаимная синхронизация колебаний в системе связанных эволюционных игр // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 610–621. DOI: 10.18500/0869-6632-003056. EDN: WTYVYA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Introduction

Synchronization of oscillations is a well-known phenomenon that has been extensively studied for regular, noisy and chaotic oscillations [1]. It is also ubiquitous in biological systems and populations, to name synchronization of noisy electrosensitive paddlefish cells [2], between activity in remote human brain areas [4], between the human cardiovascular and respiratory systems [3], in the neuronal population model [5], in predator–prey populations [6, 7], and population synchronization in epidemic models [8].

Here we focus on synchronization of evolutionary game oscillations, with the emphasis on a specific and yet not well-understood case when the population dynamics is (i) essentially discrete and oscillations emerge due to discreteness (i.e. the population size is finite, and the mean-field approximation is invalid), and (ii) metastable (i.e. the game fixation occurs on a finite time-scale, so that oscillations are only transient). We consider a system of coupled communities that evolve according to the population game «Battle of the Sexes», where individuals may follow one of several behavioral strategies [9]. In other words, the game models the competition of two strategies for choosing a partner

and raising offspring in two populations of individuals of the same species, but of the opposite sex (males and females) [10].

More precisely, individuals from populations of the opposite sex play against each other. Each player, depending on his strategy and the strategy of its counterpart, receives some payoff reflecting his total costs and benefits. The evolutionary dynamics consists in repeated rounds of play between randomly selected males and females. The interaction of players and the update of the populations composition are described using a stochastic frequency-dependent Moran process [11, 12]. According to this process, the total size of populations is finite and constant, as a result of which the birth of new individuals and the death of existing ones occur at the same moment in time.

When the game «Battle of the Sexes» is played by finite populations, asymptotic equilibrium states are absorbing states (complete dominance of one of the behavioral strategies). Since mutations are not included in the model, once populations enter the state of absorption, they can no longer get out of it, and the evolutionary dynamics is completed. Earlier we showed that the game has a non-trivial transitional dynamics. In particular, it was found that before absorption, stochastic cyclical fluctuations in the number of players adhering to one or another strategy are observed in the model.

Here we describe and study a system of two or more coupled communities (evolutionary games «Battle of the Sexes»). If isolated, such communities generate their own transient oscillations with a frequency determined by the properties of the subsystem. We introduce migration between communities, and in the case of more than two connected games, consider two topologies (chain and ring structures).

1. Methods

1.1. Model of the game «Battle of the Sexes». «Battle of the Sexes» model [10] describes the process of population reproduction by means of a game-theoretic approach. Denote the male population as A and the female population as B . Assume that each population consists of N individuals, and this number is constant in time. In each population, there are players (agents) with one of two behavioral strategies that differ in reproduction and raising offspring. Male categories are defined as «faithful» and «philanderer», and female – «coy» and «fast». The evolutionary dynamics consists in repeated game rounds between the chosen particular male and female. Interacting with each other, the players receive the following payoffs

$$\begin{bmatrix} a_{11} = 1; b_{11} = -1 & a_{12} = -1; b_{12} = 1 \\ a_{21} = -1; b_{21} = 1 & a_{22} = 1; b_{22} = -1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where $a_{ss'}$ is the payoff for a male with $s \in \{1, 2\}$ strategy interacting with a female with $s' \in \{1, 2\}$ strategy. Similarly, the values $b_{ss'}$ determine payments for females. A negative payoff means that the cost to the player exceeds the benefit of the interaction.

At each round of the game, the dynamics is described using the stochastic frequency-dependent Moran process [11, 12], which determines the rules for choosing players and further updating the composition of populations. The Moran process consists of three steps.

1. In each population, a player is selected randomly with a probability proportional to the fitness of the strategies.
2. The chosen pair of players gives birth to two offspring (male and female) that inherit the strategy of the parent of the same gender.
3. Each offspring replaces an randomly dead individual in the corresponding population.

According to the described process, the population size N remains constant throughout the game, so the state of each population after some game round m can be described by the number of players with the first strategy: i males and j females, where $0 \leq i, j \leq N$. Then the state of the game consisting of two populations is given by a pair of values (i, j) .

As mentioned above, the fitness (reproducibility) of strategies affects the probability of a player choice. Fitness is determined in terms of average payoffs. The average payoffs of males with the s strategy and females with the s' strategy are (2) and (3), respectively

$$\pi_s^A(j) = a_{s1} \frac{j}{N} + a_{s2} \frac{N-j}{N}, \quad (2)$$

$$\pi_{s'}^B(i) = b_{1s'} \frac{i}{N} + b_{2s'} \frac{N-i}{N}. \quad (3)$$

The average payoffs of the entire population of males or females are given as

$$\bar{\pi}^A(i, j) = \pi_1^A(j) \frac{i}{N} + \pi_2^A(j) \frac{N-i}{N}. \quad (4)$$

$$\bar{\pi}^B(i, j) = \pi_1^B(i) \frac{j}{N} + \pi_2^B(i) \frac{N-j}{N}. \quad (5)$$

Then, for example, the frequency-dependent probability to choose for reproduction in the population of males of the player with the first strategy

$$P_1^A(i, j) = \frac{i}{N} \cdot \frac{1-w+w\pi_1^A(j)}{1-w+w\bar{\pi}^A(i, j)}, \quad (6)$$

where $1-w+w\pi_1^A(j)$ is the reproductive fitness of male with the first strategy, $1-w$ is the baseline fitness, and the small parameter w is called the selection strength [13]. When $w=0$, the probability of a player choice depends only on the frequency of the strategies. As w increases, the dependence of fitness on average payoffs becomes more and more significant.

Thus, according to the Moran process, an individual with a (currently) more successful strategy (that is, with a strategy that has a larger average payoff) will most likely be selected for the game and further reproduction.

Single game trajectories $i(m), j(m), m=1, 2, 3, \dots$ are determined by simulating the Moran process. For multiple simulation of trajectories, the Monte Carlo approach is used. The game process starts from random initial conditions $i_0, j_0 \in \{1, \dots, N-1\}$ and is considered until absorption or during a limited number of rounds M .

1.2. Determining the frequency and phase of oscillations. Stochastic cyclic oscillations of i and j are observed in the game «Battle of the Sexes» even that the respective mean field equations display a stable stationary state [14]. Such oscillations are transient, until a trajectory hits one of the absorbing boundaries and fixation of strategy happens. At the same time, the considerable duration of transient oscillations allows for defining their frequency and phase.

The mean oscillation period is defined as

$$\langle T \rangle = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \langle T \rangle_r = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \frac{m_{n_r} - m_{1_r}}{n_r - 1}, \quad (7)$$

where $\langle T \rangle_r$ is the mean period of game trajectory r ; m_{1_r} and m_{n_r} are the first and last time that trajectory r crossed the secant line $j^* = N/2$ from top to bottom; n_r is the number of returns of the trajectory r to the secant during the observation time $M = 500N$; R is the number of stochastic trajectories taken for averaging.

The mean oscillation frequency is then calculated as

$$\langle \Omega \rangle = \frac{2\pi}{\langle T \rangle}. \quad (8)$$

The instantaneous phase of oscillations of one game trajectory is determined as

$$\Phi(m) = 2\pi \frac{m - m_k}{m_{k+1} - m_k} + 2\pi k, \quad (9)$$

where $m_k \leq m < m_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ and m_k is the time of the k -th top-down crossing of the secant line $j^* = N/2$.

1.3. System of coupled evolutionary games. We consider a system of coupled communities «Battle of the Sexes» located in the neighboring, but spacially distinct regions and interacting with each other through the migration of players. Now a single round of the game consists of two steps. In the first step, the birth-death Moran process is carried out independently in each community. At the second step, random players migrate between communities.

The coupling strength $0 \leq p \leq 1$ between communities determines probability of player migration. If $p = 0$, then there is no migration and the communities evolve independently. When $p = 1$, then the migration of players between communities occurs on each game round.

At each round, with probability p , only one player can migrate from the population of one community to the corresponding population of another community. We impose an additional condition to keep the population size constant throughout the game: if some player migrates from community C_1 to community C_2 , then some player from community C_2 must migrate to community C_1 .

Both males and females migrate with the same probability p . However, since the migration process is random, for some game round, migration can happen to for one of the populations (males or females only).

We consider non-identical migration-related communities C_1 and C_2 with the same population size N but different selection strength w , and explore 1:1 synchronization. The presence of mutual synchronization is identified by two criteria [1]. First, the region of frequency locking is determined when the difference between the frequencies of two communities is close to zero

$$\langle \Omega_1 \rangle - \langle \Omega_2 \rangle \approx 0. \quad (10)$$

Second criterion, the phase locking condition is checked

$$|\varphi(m)| = |\Phi_1(m) - \Phi_2(m)| < \text{const}, \quad (11)$$

where $\varphi(m)$ is the phase difference (relative phase).

In a stochastic system, the phase difference fluctuates, therefore, the existence of phase synchronization in a statistical sense is indicated by the appearance of a peak in the distribution of the cyclic relative phase

$$\Psi(m) = \varphi(m) \bmod 2\pi. \quad (12)$$

Synchronization can also be characterized by other quantitative measures [15]. Here we calculate the first Fourier mode of the distribution (12):

$$\gamma = \sqrt{\langle \cos \Psi(m) \rangle^2 + \langle \sin \Psi(m) \rangle^2}, \quad (13)$$

where brackets denote averaging over time and over game trajectories. If the phases are not synchronized, then $\gamma = 0$, and in the case of complete synchronization in a system without noise, $\gamma = 1$. In stochastic systems, γ remains close to 1 in the synchronization regime and decreases with loss of synchronization.

We also consider spatially ordered ensembles of more than two coupled «Battle of the Sexes» communities, taking chains with open and periodic boundary conditions. In both cases, the same coupling strength p is established between the communities. Synchronization is assessed through the dependences of the mean frequencies on the coupling strength, more precisely, when they start coinciding.

2. Results

The transitional dynamics of the game «Battle of the Sexes» demonstrates stochastic cyclical oscillations in the number of players with the first strategy around the Nash equilibrium state [14]. An example of oscillations in the game with a population size of $N = 200$ is shown in Fig. 1, *a, b*. Within the framework of evolutionary game theory, the Nash equilibrium can be interpreted as a potential stable point of a dynamic game process [16]. For the considered model, given by the payoff bimatrix (1), the Nash equilibrium state is $(0.5, 0.5)$. In this case the number of players that stick to the first and second strategies is the same in both populations (males and females) and equals $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$.

Fig. 1, *c* shows the quasi-stationary probability density distribution $d(i, j)$, referring to the transient dynamics of the game. The distribution is obtained by multiple sampling of stochastic game trajectories that start from a random point and are simulated during $M = 500N$ rounds. The distribution is non-unimodal and crater-shaped, centered about the Nash equilibrium.

Amplitude, frequency, and lifetime of oscillations depend on the populations size N and the selection strength w . The oscillation frequency increases as the selection strength increases (Fig. 2),

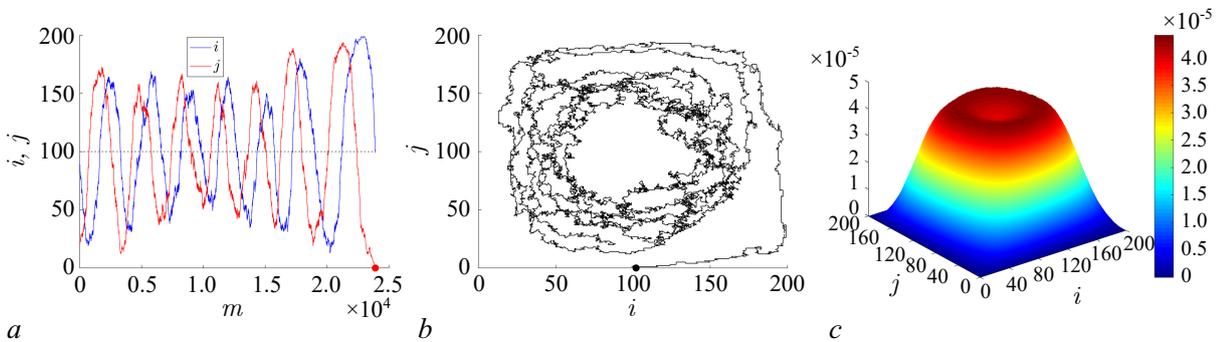


Fig. 1. Transitional dynamics in the game «Battle of the Sexes»: *a* – change in the number of players with the first strategy in the male (i) and female (j) populations over time (m is the number of the game round), the dot denotes the exit of the system to the absorbing boundary; *b* – the game trajectory on the plane of quantities (i, j) ; *c* – quasi-stationary probability density distribution $d(i, j)$; parameters: $N = 200$, $w = 0.3$, $R = 10^5$ (color online)

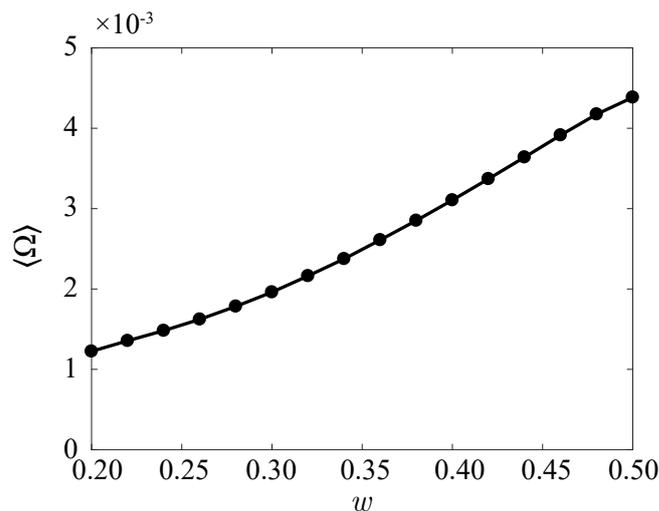


Fig. 2. Dependence of the mean oscillation frequency on the value of the selection strength in the game «Battle of the Sexes»; parameters: $N = 200$, $R = 10^3$

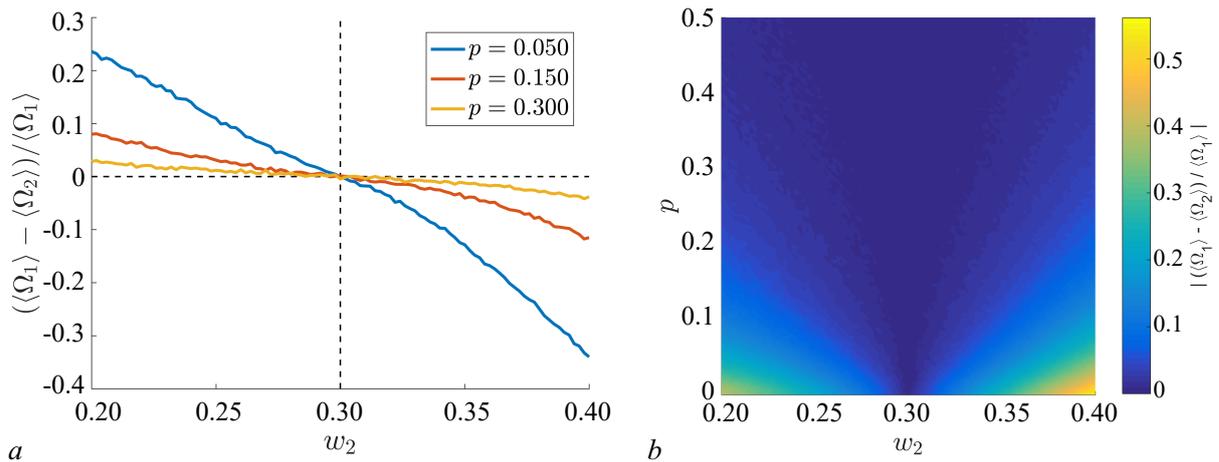


Fig. 3. Frequency synchronization observed in the system of two coupled communities «Battle of the Sexes» C_1 and C_2 : a – the relative difference of the frequencies of C_1 and C_2 as a function of w_2 for a fixed value of $w_1 = 0.3$; b – the synchronization region (Arnold tongue); parameters: $N = 200$, $R = 10^3$ (color online)

for example, in a game with a population size $N = 200$ the mean frequency for $w = 0.3$ is $\langle \Omega \rangle = 0.002$, and for $w = 0.4$ is $\langle \Omega \rangle = 0.003$. The lifetime of oscillations (the number of oscillation periods before absorption) also increases with selection strength.

Next, we address a system of migration-coupled communities that evolve according to the rules of the «Battle of the Sexes» game. We consider two non-identical communities C_1 and C_2 with the same population size ($N_1 = N_2 = 200$) but different selection strength ($w_1 = 0.3$, w_2 varies), which is equivalent to different natural oscillation frequencies. To determine mutual synchronization, we calculated the mean observed frequencies of communities $\langle \Omega_1 \rangle$ and $\langle \Omega_2 \rangle$, and also investigated the difference in instantaneous phases $\varphi(m) = \Phi_1(m) - \Phi_2(m)$.

The resulting relative frequency difference $(\langle \Omega_1 \rangle - \langle \Omega_2 \rangle) / \langle \Omega_1 \rangle$ versus w_2 for different values of the coupling strength p are shown in Fig. 3, a . Its approach to zero corresponds to synchronization (frequency locking). Fig. 3, b shows the synchronization region (Arnold tongue), the absolute value of relative frequency difference is color coded. Much as for the classical synchronization, the frequency locking region increases with the coupling strength.

Next, we investigate the dynamics of phases. The distributions of phase difference between communities are presented in Fig. 4. When the coupling strength is low, the distribution is broad and

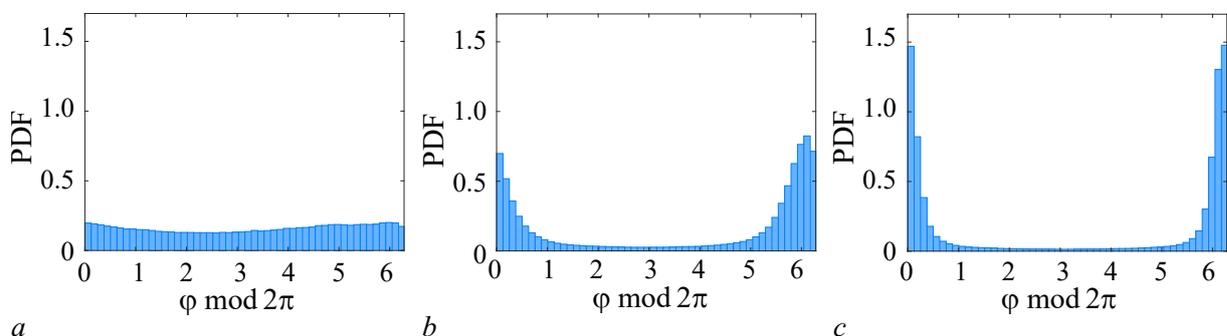


Fig. 4. The distribution of phase difference between two coupled communities «Battle of the Sexes»: a – $p = 0.005$; b – $p = 0.1$; c – $p = 0.5$; parameters: $N = 200$, $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.32$, $R = 10^3$

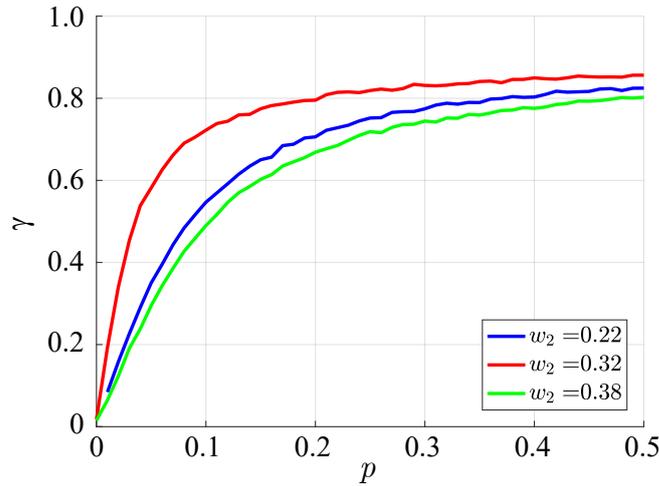


Fig. 5. Dependence of the quantitative measure of phase synchronization (the first Fourier mode of the distribution of the cyclic phase difference) on the coupling strength between two communities «Battle of the Sexes»; parameters: $N = 200$, $w_1 = 0.3$, $R = 10^3$ (color online)

close to uniform (Fig. 4, *a*), typical of desynchronization. With an increase in the coupling strength (Fig. 4, *b*, *c*), it manifests a peak, which indicates phase locking.

To quantify phase synchronization, we calculated the first Fourier mode γ of the distribution of the cyclic phase difference. Different curves in Fig. 5 correspond to different pairs of coupled communities. Index γ is greater for communities with closer values of the selection strength ($w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.32$, red curve), hence closer natural oscillation frequencies. Nevertheless, greater coupling strength ($p > 0.3$) provides a sufficiently high synchronization index ($\gamma > 0.7$) for more different communities ($w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.22$ and $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.38$).

Fig. 6 shows examples of oscillations in the number of males with the first strategy in two coupled communities with $w_1 = 0.3$ and $w_2 = 0.32$. It can be seen that with an increase in the coupling strength between the communities, the oscillations begin to adjust, and with a sufficiently large strength, almost complete synchronization occurs.

While the phase and frequency effects are quite in line with the classical results, the amplitude and lifetime dependences on coupling and synchronization represent the features, specific to the finite size evolutionary game. As specific trajectories demonstrate, the amplitude of oscillations decreases with increasing coupling and the onset of synchronization.

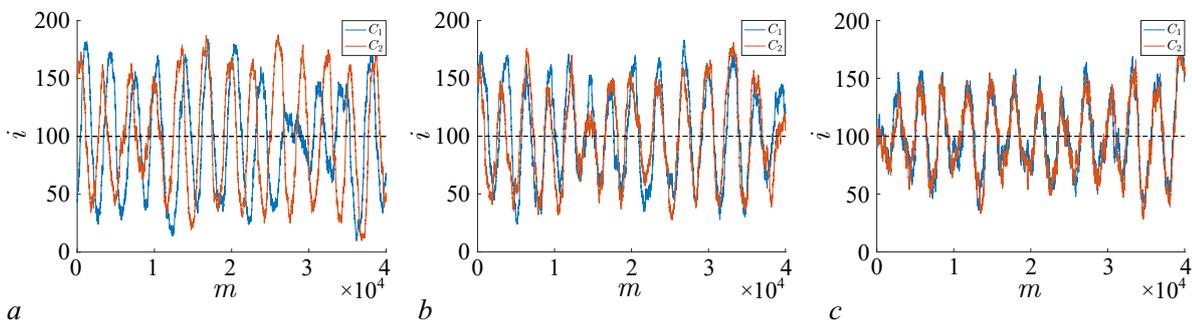


Fig. 6. Change in the number of males with the first strategy in two coupled communities «Battle of the Sexes» over time (m is the number of the game round): $a - p = 0.005$; $b - p = 0.1$; $c - p = 0.5$; parameters: $N = 200$, $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.32$ (color online)

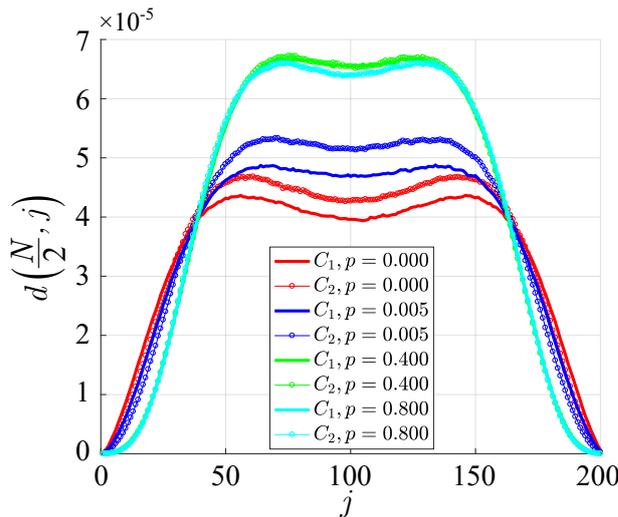


Fig. 7. Quasi-stationary probability density distributions for two coupled communities «Battle of the Sexes»; parameters: $N = 200$, $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.32$, $R = 10^5$ (color online)

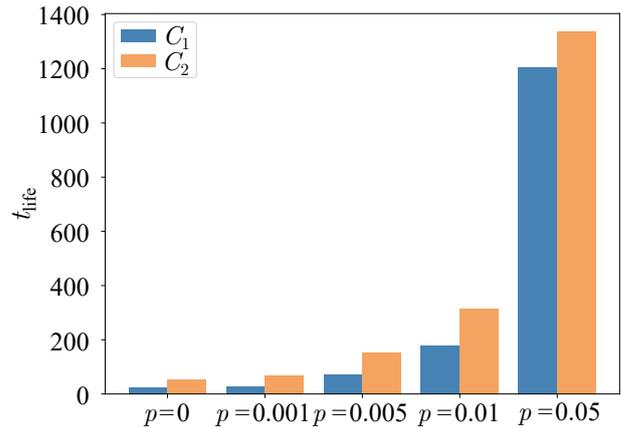


Fig. 8. The lifetime of transient oscillations in the system of two coupled communities «Battle of the Sexes» depending on the coupling strength; parameters: $N = 200$, $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.32$, $R = 10^3$ (color online)

Whereas an analytical description this phenomenon is yet unclear, the numerical results can elucidate it in detail. We constructed quasi-stationary probability density distributions on the set of game states (i, j) for a number of coupling strengths and show its sections at $d(\frac{N}{2}, j)$ in Fig. 7 for two coupled communities with $w_1 = 0.3$ and $w_2 = 0.32$.

First, one observes that the well in the distribution becomes more shallow as the coupling strength increases to $p = 0.005$, although synchronization is not reached yet (cf. also Fig. 6, a). The onset of synchronization at greater p lead to (i) the two distributions becoming almost identical, and (ii) their radius decreases, indicative of a decrease in the oscillation amplitude.

The effect on the lifetime of oscillations is even more dramatic, as it increases in more than an order of magnitude (Fig. 8). Even a low coupling strength ($p = 0.01$), at which synchronization is not yet observed, increases the lifetime of the transient dynamics by about 6 times compared to a system without coupling ($p = 0$). Thus, the spatial migration of individuals protects populations from extinction. It should also be noted that the lifetime depends on the selection strength w , and synchronization effectively favors the quicker fixating community to keep on oscillating longer. Even, if extinction would occur in one of the communities, due to its persistence in the other community both strategies of behavior can coexist for longer time.

Ensembles of more than two coupled communities «Battle of the Sexes» have also been investigated. Arrays with two types of boundary conditions were considered, giving a chain and a ring. In the case of a chain structure, each community (except the first and last) is interacted with two nearest neighbors. The first and last communities are connected to only one neighbor. In the ring structure, one realizes periodic boundary conditions by an additional coupling between the first and the last community.

The results for an ensemble of four communities (C_1 with $w_1 = 0.28$, C_2 with $w_2 = 0.3$, C_3 with $w_3 = 0.32$ and C_4 with $w_4 = 0.34$) are shown in Fig. 9. The figure illustrates the dependence of the mean observed frequencies of communities on the coupling strength, which is the same between each pair of communities.

Notably, even the strongest coupling strength ($p = 0.5$) cannot synchronize all four communities in the chain (Fig. 9, a). In a particular system, a slight coupling allowed communities C_3 and C_4 to adjust their rhythms. A further increase in the coupling value led to the synchronization of the three subsystems (C_2 , C_3 and C_4), but the oscillation frequency of community C_1 remained different.

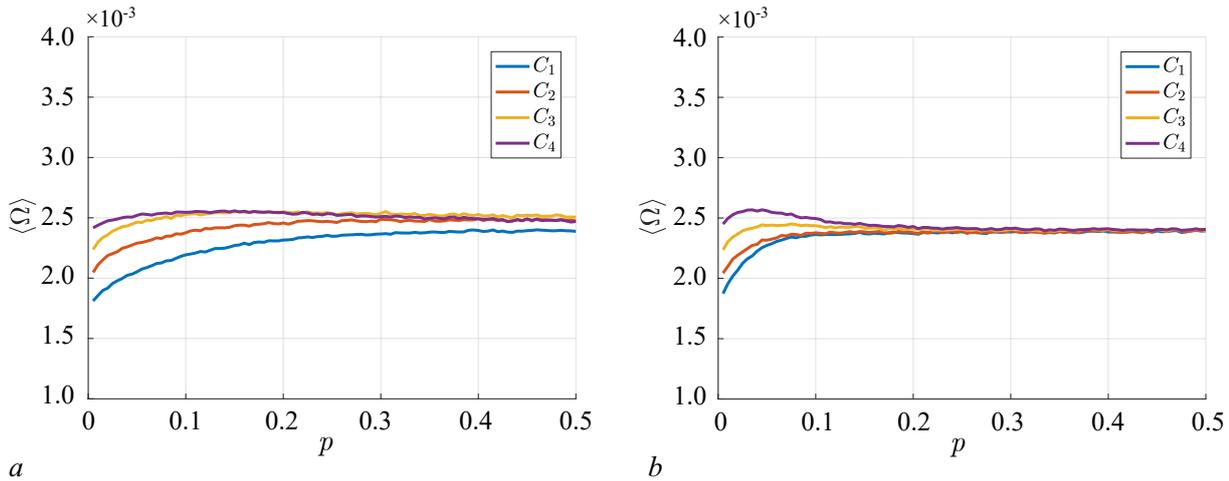


Fig. 9. Dependence of the observed mean frequency of oscillations in the system of four coupled communities «Battle of the Sexes» on the coupling strength: *a* – chain structure; *b* – ring structure; parameters: $N = 200$, $w_1 = 0.28$, $w_2 = 0.3$, $w_3 = 0.32$, $w_4 = 0.34$, $R = 10^3$ (color online)

Converting it to the ring structure makes it possible to overcome this feature (Fig. 9, *b*). In this case, an increase in the coupling strength leads to synchronization of all four communities, despite their initial frequency detunings.

With an increase in the coupling strength in both structures, the phenomenon of cluster synchronization is observed. For example, in a ring structure, four communities are divided into two subgroups, called clusters, so that the communities within one cluster oscillate at the same frequency, but the frequencies of the two clusters differ. In a specific example, clusters C_1 and C_2 are formed, as well as C_3 and C_4 . However, an even greater increase in the coupling strength leads to almost complete synchronization of communities.

Conclusions

We investigated the mutual synchronization of transient oscillations in the system of discrete population evolutionary games, coupled through migration. Beside classical manifestations of synchronization, we demonstrated marked alterations in quasi-stationary distributions, amplitude and lifetime effects.

In particular, for a system of two coupled communities, the frequency and phase locking region was determined. The great coupling strength allows even considerably different communities to be synchronized. A similar result was obtained for an ensemble of more than two coupled subsystems. With an increase in the coupling strength in the ring of mutually connected communities, we observed a transition from cluster synchronization to an almost complete synchronization. Adjustment of rhythms also took place in the chain of coupled communities, however, even the strong coupling strength did not allow all subsystems to oscillate synchronously.

A concluding remark concerns the other types of player migration, that we also addressed in numerics. In particular, we considered the case when the players with a less successful strategy are more likely to migrate. There an increase in the coupling strength between communities leads to a more rapid absorption, leading to the cessation of transient oscillations. In the opposite case, when players with a more successful strategy are more likely to migrate, the results are more similar to those reported in the manuscript for the random player migration. However, it should be noted that the synchronization region, as well as the lifetime of oscillations, become larger than for random migration.

The interaction of population communities through spatial migration can be important from an ecological point of view. Even if, due to random fluctuations, a population from a certain community is on the verge of extinction, the processes of migration and synchronization support the disappearing population. Thus, our results show that synchronization is important for maintaining the stability and coexistence of all phenotypes (game strategies). The conclusions obtained can be used in the study of biological rhythms of real world populations.

References

1. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. New York: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
2. Neiman A, Pei X, Russell D, Wojtenek W, Wilkens L, Moss F, Braun HA, Huber MT, Voigt K. Synchronization of the noisy electrosensitive cells in the paddlefish. *Phys. Rev. Lett.* 1999;82(3): 660–663. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.660.
3. Schäfer C, Rosenblum MG, Abel HH, Kurths J. Synchronization in the human cardiorespiratory system. *Phys. Rev. E.* 1999;60(1):857–870. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.857.
4. Tass P, Rosenblum MG, Weule J, Kurths J, Pikovsky A, Volkman J, Schnitzler A, Freund HJ. Detection of n:m phase locking from noisy data: Application to magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett.* 1998;81(15):3291–3294. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3291.
5. Amiri M, Bahrami F, Janahmadi M. Functional contributions of astrocytes in synchronization of a neuronal network model. *Journal of Theoretical Biology.* 2012;292:60–70. DOI: 10.1016/j.jtbi.2011.09.013.
6. Blasius B, Huppert A, Stone L. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. *Nature.* 1999;399(6734):354–359. DOI: 10.1038/20676.
7. Simonis JL. Demographic stochasticity reduces the synchronizing effect of dispersal in predator–prey metapopulations. *Ecology.* 2012;97(3):1517–1524. DOI: 10.1890/11-0460.1.
8. Shabunin AV. Synchronization of infections spread processes in populations interacting: Modeling by lattices of cellular automata. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2020;28(4):383–396 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-383-396.
9. Smith JM. *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge: Cambridge University Press; 1982. 234 p. DOI: 10.1017/CBO9780511806292.
10. Dawkins R. *The Selfish Gene.* Oxford: Oxford University Press; 1976. 224 p.
11. Nowak MA, Sasaki A, Taylor C, Fudenberg D. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations. *Nature.* 2004;428(6983):646–650. DOI: 10.1038/nature02414.
12. Taylor C, Fudenberg D, Sasaki A, Nowak MA. Evolutionary game dynamics in finite populations. *Bull. Math. Biol.* 2004;66(6):1621–1644. DOI: 10.1016/j.bulm.2004.03.004.
13. Traulsen A, Claussen JC, Hauert C. Coevolutionary dynamics: From finite to infinite populations. *Phys. Rev. Lett.* 2005;95(23):238701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.238701.
14. Vershinina O, Ivanchenko M, Denisov S. Quasi-stationary oscillations in game-driven evolutionary dynamics. *Cybernetics and Physics.* 2019;8(4):307–311. DOI: 10.35470/2226-4116-2019-8-4-307-311.
15. Rosenblum M, Pikovsky A, Kurths J, Schäfer C, Tass PA. Chapter 9 Phase synchronization: From theory to data analysis. In: Moss F, Gielen S, editors. *Handbook of Biological Physics.* Vol. 4. Elsevier Science; 2001. P. 279–321. DOI: 10.1016/S1383-8121(01)80012-9.
16. Holt CA, Roth AE. The Nash equilibrium: a perspective. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 2004;101(12):3999–4002. DOI: 10.1073/pnas.0308738101.



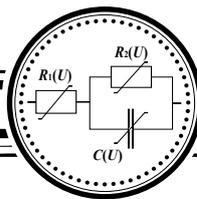
Вершинина Ольга Сергеевна — родилась в Нижегородской области (1995). Окончила с отличием Институт информационных технологий, математики и механики (ИИТММ) Нижегородского государственного университета (ННГУ) им. Н. И. Лобачевского по направлению «Прикладная математика и информатика» (2018). Окончила аспирантуру ИИТММ ННГУ им. Н. И. Лобачевского по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (2022). Младший научный сотрудник кафедры теории управления и динамики систем ИИТММ. Научные интересы — синхронизация, математическое моделирование, эволюционные игры, биоинформатика, машинное обучение.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olya.vershinina@itmm.unn.ru
ORCID: 0000-0002-3917-9592
AuthorID (eLibrary.Ru): 1066882



Иванченко Михаил Васильевич — родился в городе Горьком (1981). Окончил с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (ННГУ) им. Н. И. Лобачевского по направлению «Радиофизика» (2004). Защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук на тему «Делокализация и конкуренция: коллективная динамика осцилляторных ансамблей с нелинейной связью и беспорядком» по специальности «Радиофизика» (2011, Нижний Новгород). Заведующий кафедрой прикладной математики ИИТММ ННГУ, профессор этой кафедры. Научные интересы — нелинейные колебания и волны, хаос, сложные сети, синхронизация, биоинформатика, компьютерные науки.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: ivanchenko@unn.ru
ORCID: 0000-0002-1903-7423
AuthorID (eLibrary.Ru): 128430



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Краткое сообщение
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003064
EDN: ZQFLQI

Самоорганизационная динамика концентрации носителей зарядов в полупроводниках при их инжекции

М. В. Елисов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Россия

E-mail: maksimelisov2003@gmail.com

Поступила в редакцию 2.06.2023, принята к публикации 28.08.2023,

опубликована онлайн 15.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящей работы — исследовать явление самоорганизации динамики концентрации носителей зарядов в полупроводниковых структурах. Исследовать основную модель, дать численную оценку при заданных параметрах и предложить её модификацию. Определить зависимость результатов оценки от управляющего параметра. Рассмотреть динамику при зависимости управляющего параметра от времени. Провести теоретический анализ, численное моделирование и построить графики. **Методы.** В данной работе исследуются возможности и ограничения основной модели генерационно-рекомбинационной динамики в полупроводниках, предложенной ранее другими исследователями. Была предложена и рассмотрена модификация основной модели. **Результаты.** Продемонстрированы различные виды динамики концентрации носителей зарядов. Был проведён теоретический анализ модели. Численное моделирование показало, что при определённых значениях управляющего параметра наблюдаются устойчивые состояния. Были получены численные оценки управляющего параметра, построены фазовые портреты нелинейного уравнения и рассмотрено поведение динамической системы при периодичности управляющего параметра. Расширенная модель показала качественно новое поведение в сравнении с базовой. **Заключение.** Показано, что в полупроводниковых структурах динамика зарядов может демонстрировать различные поведения. Полученные закономерности и оценки согласуются с получаемыми ранее. Полученные результаты могут быть проверены экспериментально и будут полезны при разработке фото- и бета-вольтаических устройств.

Ключевые слова: полупроводники, самоорганизация, нелинейность, нелинейные системы, фазовые портреты, фото- и бета-вольтаические генераторы.

Для цитирования: Елисов М. В. Самоорганизационная динамика концентрации носителей зарядов в полупроводниках при их инжекции // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 622–627. DOI: 10.18500/0869-6632-003064. EDN: ZQFLQI

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Self-organization dynamics of charge carrier concentration in semiconductors due to the charge injection

M. V. Elisov

Samara University, Russia

E-mail: maksimelisov2003@gmail.com

Received 2.06.2023, accepted 28.08.2023, available online 15.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The *purpose* of this study is to investigate the phenomenon of self-organization of the dynamics of charge carriers in semiconductor structures. Investigate the basic model, give a numerical estimate for given parameters and propose its modification. Determine the dependence of the evaluation results on the control parameter. Consider the dynamics when the control parameter depends on time. Carry out theoretical analysis, numerical simulation and build graphs. *Methods.* In this paper, we investigate the possibilities and limitations of the basic model of generation-recombination dynamics in semiconductors, proposed earlier by other researchers. A modification of this model was proposed and considered. *Results.* Various types of charge carrier concentration dynamics are demonstrated. Theoretical analysis of the model was carried out. Numerical simulation has shown that for certain values of the control parameter, stable states are observed. Numerical estimates of the control parameter were obtained, phase portraits of the nonlinear equation were constructed, and the behavior of the dynamical system was considered when the control parameter is periodic. The extended model showed a qualitatively new behavior in comparison with the basic one. *Conclusion.* It is shown that charge dynamics in semiconductor structures can exhibit different behaviors. The patterns and estimates obtained are consistent with those obtained earlier. The results obtained can be verified experimentally and will be useful in the development of photo- and beta-voltaic devices.

Keywords: semiconductors, self-organization, nonlinearity, nonlinear systems, phase portraits, photo- and beta-voltaic generators.

For citation: Elisov MV. Self-organization dynamics of charge carrier concentration in semiconductors due to the charge injection. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5):622–627. DOI: 10.18500/0869-6632-003064

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Полупроводниковый кристалл представляет сложную систему, в которой наблюдаются электрические неустойчивости, такие как срыв тока, переключение между проводящим и непроводящим состояниями или спонтанные колебания тока или напряжения. Подобные явления возникают при переводе полупроводника в неравновесное состояние.

В данной работе исследуются характеры динамики носителей зарядов в полупроводниковых структурах при внешней инжекции. В качестве внешнего воздействия могут выступать, например, фотоны (фотоэлемент), бета-частицы (бета-элемент) [1]. Используемая модель рассматривалась раньше [2–4], но в недостаточной мере. Предыдущие исследователи не изучали модель в случае зависимости управляющего параметра от времени. Также в одном из исследований [4] рассматривалась динамика в полупроводниках, но в условиях воздействия сильного магнитного поля, а коэффициент ударной ионизации рассматривался как константа.

Результаты исследования подобных моделей применимы, в частности, для моделирования фото- и бета-вольтаических устройств. В дальнейшем возможен учёт дополнительных параметров для расширения модели.

Цель настоящего исследования — определить стабильные состояния, а также проверить зависимость результатов оценки концентрации носителей зарядов от параметров: коэффициента ударной ионизации, рекомбинации, концентрации доноров и акцепторов. Рассмотреть динамику в условиях периодической зависимости управляющего параметра.

1. Методика

1.1. Базовое кинетические уравнение. Рассмотрим базовую модель динамики электронов в неравновесном полупроводнике. Она была предложена в работе [3] и рассмотрена в [5]. В ней авторы пренебрегают тепловой ионизацией ловушек и Оже-рекомбинацией, что отвечает полупроводнику в условиях низких температур. Пренебрежение Оже-рекомбинацией мотивировано тем, что это ведёт к упрощению модели. Учёт этого процесса качественно не влияет на модель [3]. В кристаллической решетке полупроводника находятся различные дефекты и примеси, создающие локальные энергетические уровни в запрещенной зоне, поэтому главным процессом рекомбинации является рекомбинация через ловушки. Поверхность полупроводника считается идеальной, следовательно, поверхностная рекомбинация также не учитывается.

$$\frac{dn}{dt} = n[XN_D - T_r(N_t - N_D) - n(X + T_r)], \quad (1)$$

где T_r — константа скорости рекомбинации зона-ловушка, X — коэффициент ударной ионизации, N_D — концентрация доноров, N_t — концентрация ловушек, n — концентрация носителей зарядов, в данном случае электронов. X является управляющим параметром и от него зависит характер фазового портрета и поведение системы.

Критическое значение управляющего параметра:

$$X_{\text{crit}} = (N_t/N_D - 1)T_r.$$

Уравнение всегда имеет решение $n = 0$ (рис. 1), которое устойчиво при $X < X_{\text{crit}}$. При $X > X_{\text{crit}}$ в положительной полуплоскости возникает устойчивое решение (рис. 2).

$$n = \frac{XN_D - T_r(N_t - N_D)}{X + T_r}.$$

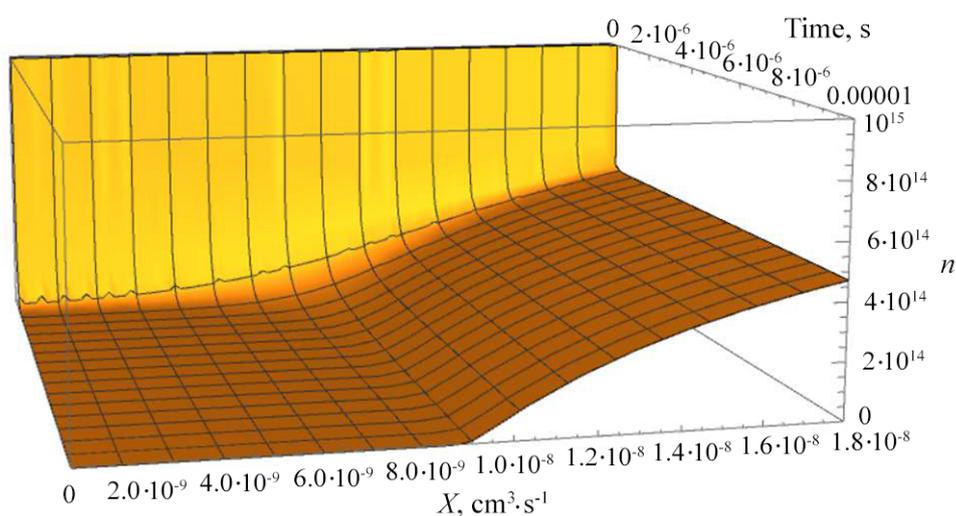


Рис. 1. Зависимость стационарной концентрации электронов n от коэффициента ударной ионизации X (цвет онлайн)

Fig. 1. Dependence of the stationary electron concentration n on the impact ionization coefficient X (color online)

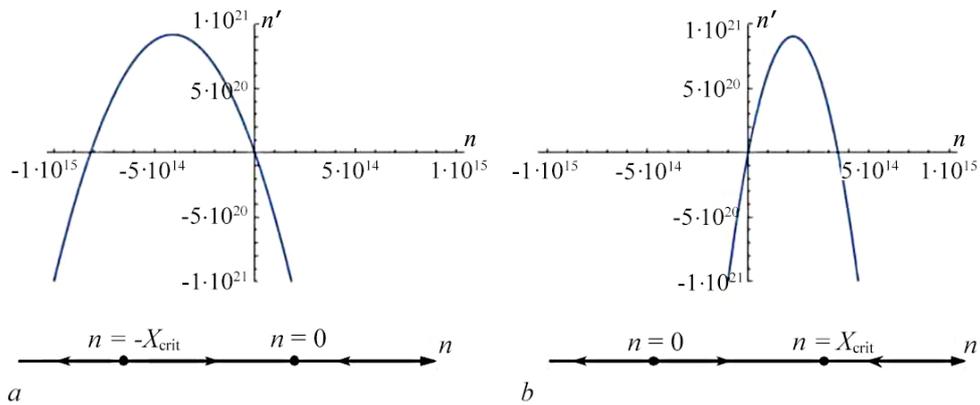


Рис. 2. Фазовые портреты уравнения (1) при $X = 0.5X_{crit}$ (a), $X = 1.9X_{crit}$ (b)

Fig. 2. Phase portraits of the equation (1) for $X = 0.5X_{crit}$ (a), $X = 1.9X_{crit}$ (b)

На рис. 1 изображена зависимость концентрации электронов от X , меняющегося непрерывно от 0 до $2X_{crit}$, что позволяет наблюдать изменение поведения системы при достижении управляющим параметром критического значения. В этом случае равновесная концентрация становится отличной от нуля.

На рис. 2 изображены одномерные фазовые портреты уравнения (1) при разных значениях управляющего параметра. Происходит транскритическая бифуркация, при которой ранее лежавшее в нефизической области (рис. 2, a) пространства решение переходит в физическую область (рис. 2, b). То есть происходит неравновесный фазовый переход второго рода из непроводящего состояния в проводящее.

При численном моделировании были использованы следующие значения: $T_r = 10^{-9} \text{ см}^3\text{с}^{-1}$, $N_D = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $N_t = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, что характерно для кремния при глубине ловушек 0.54 эВ ниже зоны проводимости [3]. Тогда $X_{crit} = 9 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3\text{с}^{-1}$.

1.2. Дополненная модель с функцией $X(t)$. Ранее управляющий параметр X рассматривался как независимая от времени константа, теперь рассмотрим случай его функциональной зависимости от времени t . Коэффициент ударной ионизации X сильно связан со значением приложенного электрического поля E , поэтому на практике функциональная задача X осуществляется через управление E [6]. В данной работе в качестве функции $X(t)$ предлагается следующее выражение:

$$X(t) = X_1 \left(0.5 - 0.5 \sin \left(10^7 \pi t + \frac{\pi}{2} \right) \right) + X_2, \quad (2)$$

где X_1 — отвечает за периодическую часть функции, а X_2 — за независимую от времени стационарную часть. При этом $10^7 \pi$ — угловая частота колебаний, а $\pi/2$ — начальная фаза. Вид зависимости от времени мотивирован желанием рассмотреть модель в условиях гармонических колебаний. Величина коэффициента 10^7 , являющегося частотой, объясняется тем, что переход к равновесному состоянию происходит за микросекунды, и при небольшой частоте изменения $X(t)$ вклад осцилляций будет крайне мал.

При моделировании хорошо проявляется эффект периодичности (рис. 3). Зелёная полоса — верхняя ограничивающая линия, соответствующая $X_1 + X_2$. Оранжевая полоса — нижняя ограничивающая линия, соответствующая X_2 . В случае, когда стационарная часть равна нулю, а периодическая меньше X_{crit} (рис. 3, a), наблюдается общий тренд на уменьшение концентрации до нуля. Если $X_1 + X_2 = X_{crit}$ (рис. 3, b), то верхняя линия ограничения стремится к устойчивому состоянию, а нижняя — к нулю. То есть за период колебаний система успевает от непроводящего

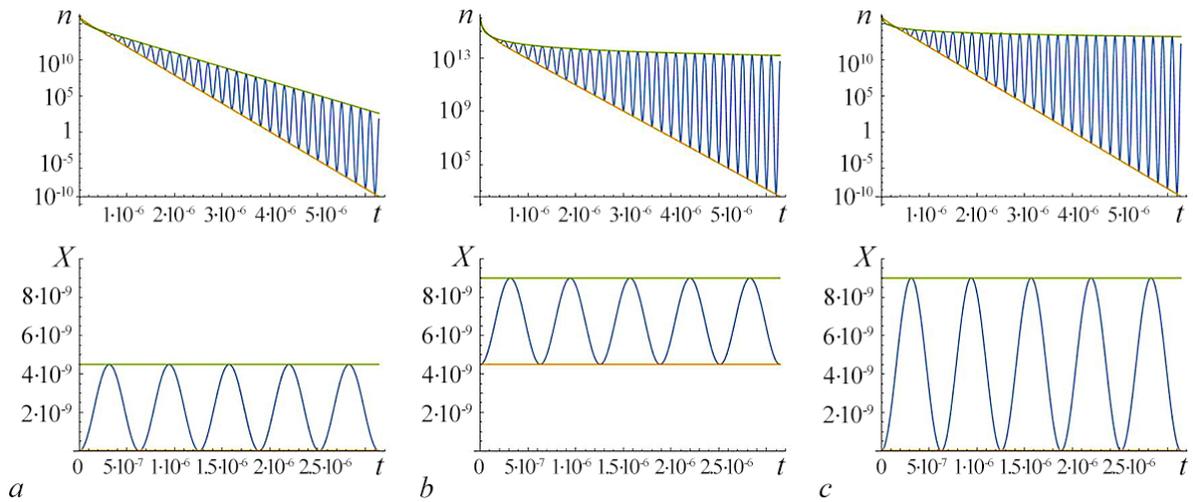


Рис. 3. Сверху — полулогарифмические графики зависимости концентрации n от времени t , внизу — зависимость коэффициента ударной ионизации X от времени t при $X_1 = 0.5X_{crit}, X_2 = 0$ (a), $X_1 = 0.5X_{crit}, X_2 = 0.5X_{crit}$ (b), $X_1 = 1.001X_{crit}, X_2 = 0$ (c)

Fig. 3 Above — semi-logarithmic graphs of the dependence of concentration n on time t , below — impact ionization coefficient $X(t)$ for $X_1 = 0.5X_{crit}, X_2 = 0$ (a), $X_1 = 0.5X_{crit}, X_2 = 0.5X_{crit}$ (b), $X_1 = 1.001X_{crit}, X_2 = 0$ (c)

состояния $n = 0$ дойти до проводящего стационарного состояния. Если $X_1 = X_{crit}$, а $X_2 = 0$ (рис. 3, c), то общее поведение будет схожим со вторым случаем, но время для достижения верхней линии тренда линии стационарного состояния будет больше.

2. Результаты

Был построен график стационарной концентрации электронов от коэффициента ударной ионизации. Проанализировано уравнение (1) основной модели и построены фазовые портреты. Была предложена расширенная модель (2), по которой также были построены графики. Полученные расширенным методом динамики рис. 3 хорошо соотносятся с результатами основной модели рис. 1, при этом имея качественные особенности.

Заключение

Данная модель позволяет рассмотреть различные динамики концентрации. Несмотря на простоту, её анализ даёт достойные к рассмотрению результаты. Также при тех значениях частоты, которые были рассмотрены, метод везде показывал достаточную чувствительность к значению X .

В дальнейшем планируется расширить модель, учесть такие эффекты, как Оже-рекомбинация, тепловая ионизация, влияние дефектов кристаллической решётки и пр., что позволит расширить применимость модели на больший спектр реальных структур и сравнить теоретические данные с экспериментальными.

Также планируется использовать результаты при моделировании фото- и бета-вольтаических устройств [1].

В результате можно сформулировать следующие преимущества метода.

- Простота анализа.
- Широкая возможность модифицирования. Возможность учитывать дополнительные эффекты.
- Возможность экспериментальной проверки.

Список литературы

1. Долгополов М. В., Елисов М. В., Раджапов С. А., Чипура А. С. Модели масштабирования электрических свойств фото- и бета-преобразователей с наногетеропереходами // *Computational Nanotechnology*. 2023. Т. 10, № 1. С. 138–146. DOI: 10.33693/2313-223X-2023-10-1-138-146.
2. Качлишвили З. С., Кезерашвили И. Д. Динамический хаос в полупроводниках с горячими носителями // *Физика и техника полупроводников*. 1990. Т. 24, № 6. С. 1106–1109.
3. Шёлль Э. Самоорганизация в полупроводниках. Неравновесные фазовые переходы в полупроводниках, обусловленные генерационно-рекомбинационными процессами. М.: Мир, 1991. 464 с.
4. Джандиери К. М., Качлишвили З. С., Стрганов А. Б. Динамический хаос в частично освещенном компенсированном полупроводнике в условиях примесного электрического пробоя // *Физика и техника полупроводников*. 2005. Т. 39, № 6. С. 673–680.
5. Елисов М. В. Самоорганизационная динамика в полупроводниковых гетероструктурах при инжекции носителей зарядов // В сб.: *Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2023: материалы XXX Всероссийской научной конференции*. Т. 17. Саратов, 15–19 мая 2023 года. Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 2023. С. 130–131.
6. Грехов И. В., Зазулин С. В., Кардо-Сысоев А. Ф. Ударная ионизация в кремнии в слабых полях // *Физика и техника полупроводников*. 1991. Т. 25, № 5. С. 885–892.

References

1. Dolgoplov MV, Elisov MV, Rajapov SA, Chipura AS. Scaling models of electrical properties of photo- and beta- converters with nano-heterojunctions. *Computational Nanotechnology*. 2023; 10(1):138–146 (in Russian). DOI: 10.33693/2313-223X-2023-10-1-138-146.
2. Kachlishvili ZS, Kezerashvili ID. Dynamic chaos in semiconductors with hot carriers. *Soviet Physics. Semiconductors*. 1990;24(6):1106–1109 (in Russian).
3. Schöll E. Nonequilibrium Phase Transitions in Semiconductors: Self-Organization Induced by Generation and Recombination Processes. Berlin, Heidelberg: Springer; 1987. 313 p. DOI: 10.1007/978-3-642-71927-1.
4. Jandieri KM, Kachlishvili ZS, Stroganov AB. Dynamic chaos in a partially illuminated compensated semiconductor under the conditions of impurity-related breakdown. *Semiconductors*. 2005;39(6): 642–649. DOI: 10.1134/1.1944853.
5. Elisov MV. Self-organizational dynamics in semiconductor heterostructures upon injection of charge carriers. In: *Nonlinear Days in Saratov for Young People — 2023: Materials of the XXX All-Russian Scientific Conference*. Vol. 17. Saratov, May 15–19, 2023. Saratov: Saratov State University; 2023. P. 130–131 (in Russian).
6. Grekhov IV, Zazulin SV, Kardo-Sysoev AF. Impact ionization in silicon in weak fields. *Soviet Physics. Semiconductors*. 1991;25(5):885–892 (in Russian).



Елисов Максим Вячеславович — родился в Самаре (2003). Получает степень бакалавра по направлению «Физика» на кафедре «Общая и теоретическая физика» Самарского национального исследовательского университета имени академика С. П. Королева. Является постоянным участником научных конференций и семинаров. Научные интересы — нелинейная динамика, динамический хаос, математическое моделирование, моделирование полупроводниковых устройств, наноструктуры. Имеет несколько научных публикаций.

Россия, 443086 Самара, ул. Московское шоссе, 34
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева
E-mail: maksimelisov2003@gmail.ru
ORCID: 0009-0001-3097-2703
AuthorID (eLibrary.Ru): 1202766



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003065
EDN: ZMFWFL

Математическая модель для выявления эпилептических приступов на записи ЭЭГ

С. И. Назариков

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Россия
E-mail: snazarikov@gmail.com

*Поступила в редакцию 10.05.2023, принята к публикации 28.08.2023,
опубликована онлайн 19.09.2023, опубликована 29.09.2023*

Аннотация. Цель настоящего исследования — анализ возможности использования сверточных нейронных сетей в качестве модели для выявления эпилептических приступов на реальных данных ЭЭГ. **Методы.** Для частотно-временного анализа используется вейвлет-анализ. Для локализации эпилептических разрядов задача их детектирования была сведена к задаче классификации и использовалась модель нейронной сети архитектуры ResNet18. Были использованы техники для аугментации и балансировки рассматриваемого датасета биомедицинских данных. **Результаты.** Сверточная нейронная сеть может быть успешно применена для выявления эпилептических приступов, предложен метод постобработки результатов первичного детектирования для улучшения качества работы модели. Показано, что разработанная модель демонстрирует высокую точность по сравнению с другими методами, основанными на классических алгоритмах машинного обучения. Значение метрики F1-score достигает 0.44, что является высоким значением при классификации реальных биологических данных. **Заключение.** Представленная модель на основе сверточной нейронной сети для выявления эпилептических приступов на записи ЭЭГ может стать основной в системах поддержки принятия врачебных решений врача-эпилептолога.

Ключевые слова: ЭЭГ, частотно-временной анализ, нейронные сети.

Благодарности. Работа поддержана программой «Приоритет-2030» Балтийского федерального университета им. И. Канта Министерства образования и науки РФ.

Для цитирования: Назариков С. И. Математическая модель для выявления эпилептических приступов на записи ЭЭГ // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 628–642. DOI: 10.18500/0869-6632-003065. EDN: ZMFWFL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Mathematical model for epileptic seizures detection on an EEG recording

S. I. Nazarikov

Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia

E-mail: snazarikov@gmail.com

Received 10.05.2023, accepted 28.08.2023, available online 19.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. Purpose of this study — analysis of the possibility of using convolutional neural networks as a model for detecting epileptic seizures on real EEG data *Methods.* In this paper, wavelet analysis is used for time-frequency analysis. To localize epileptic discharges, the task of detecting them was reduced to the classification task and the ResNet18 architecture of neural network was used. Techniques were used to augment and balance the biomedical data dataset under consideration. Wavelet analysis is used for time-frequency analysis. To localize epileptic discharges, the problem of their detection was reduced to the classification task, and the ResNet18 neural network architecture was used. Techniques were used to augment and balance the considered biomedical dataset. *Results.* Convolutional neural network can be successfully used to detect epileptic seizures, a method of postprocessing the results of primary detection is proposed to improve the quality of the model. It is shown that the developed model demonstrates high accuracy in comparison with other methods based on classical machine learning algorithms. The value of the F_1 -score metric reaches 0.44, which is a high value for classification of the real biological data. *Conclusion.* The presented model based on a convolutional neural network for detecting epileptic seizures on an EEG recording can become the main one in medical decision support systems for epileptologist.

Keywords: EEG, time-frequency analysis, neural networks.

Acknowledgements. This work was supported by the Priority 2030 program of the Immanuel Kant Baltic Federal University of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

For citation: Nazarikov SI. Mathematical model for epileptic seizures detection on an EEG recording. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):628–642. DOI: 10.18500/0869-6632-003065

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Эпилепсия — это хроническое неврологическое расстройство, проявляющееся в форме редких повторяющихся припадков, вызванных аномальной активностью в мозге. Под припадком понимают аномальную активность нейронов в головном мозге, которая может сопровождаться потерей сознания, неконтролируемыми движениями или другими негативными проявлениями. По состоянию на 2016 год более 50 миллионов человек по всему миру страдало эпилепсией [1], однако стоит отметить, что при своевременном выявлении и надлежащем лечении до 70% пациентов достигают состояния ремиссии [2,3]. На сегодняшний день основным диагностическим инструментом при эпилепсии является электроэнцефалография.

Электроэнцефалография (ЭЭГ) — это неинвазивное измерение электрических полей головного мозга, при котором электроды, помещенные на кожу головы, регистрируют потенциалы напряжения, возникающие в результате прохождения тока в нейронах и вокруг них. Наиболее распространенным подходом к анализу ЭЭГ является визуальный анализ, который проводится опытным врачом-эпилептологом. Данный подход является трудоемким и дорогостоящим процессом, так как специалисту необходимо проанализировать огромный объем данных. Например, в некоторых случаях пациент может пробыть в клинике от нескольких суток до нескольких недель для проведения долгосрочного мониторинга, что приведет к необходимости анализа сотен часов записей ЭЭГ [4]. Наличие автоматизированного инструмента для выявления эпилептических приступов на записи ЭЭГ могло бы существенно ускорить процесс скрининга, освободить врача от кропотливой работы, а также предоставить альтернативное мнение. Построение подобных систем поддержки принятия врачебных решений в настоящее время является актуальной и важной научной задачей [5,6].

На сегодняшний день существует большое количество исследований в области анализа ЭЭГ данных, и выявление эпилептических приступов не исключение [7]. В части работ для выявления приступов используются статистические модели [8, 9], но также существует большое число работ, где используются различные алгоритмы машинного обучения [10–12]. Отдельно стоит сказать, что в последние годы активно развивается отрасль глубокого обучения, где нейронные сети показывают лучшие результаты в решении различных задач с использованием данных различных модальностей, включая изображения, тексты и звуковые сигналы. В результате многие исследователи пробуют применять искусственные нейронные сети и к задаче детекции эпилептических приступов [13, 14].

Однако чаще всего исследования и оценка предлагаемых моделей проводится на публично доступных данных, среди которых самыми распространенными используемыми датасетами являются Bonn-Barcelona EEG [15] и CHB-MIT [16], но эти наборы данных имеют определенные недостатки, которые препятствуют получению моделей, готовых к использованию в повседневных условиях неинвазивного мониторинга. Так, например, [15] содержит данные внутричерепных записей ЭЭГ пациентов, страдающих фармакорезистентной фокальной эпилепсией, что сильно отличается от того как проводится современный неинвазивный мониторинг ЭЭГ. Датасет [16], в свою очередь, содержит данные лишь о 23 пациентах младше 22 лет, среди которых 5 мужчин, что может быть недостаточно репрезентативной выборкой, так как известно, что ЭЭГ-данные сильно вариативны от пациента к пациенту [17].

В данной работе исследуется вопрос: может ли подход на основе сверточных нейронных сетей использоваться в качестве модели для выявления эпилептических приступов на реальных данных ЭЭГ записи. Для получения ответа на этот вопрос используется набор данных неинвазивного мониторинга, где все данные были записаны при помощи одного устройства и размечены одним врачом эпилептологом, предоставленные Национальным медико-хирургическим центром имени Н.И. Пирогова (Москва), методы частотного анализа. Для локализации припадков на ЭЭГ используется гибридный подход, где сначала сигнал переводится в частотно-временной домен при помощи непрерывного вейвлет-преобразования и затем используется сверточная нейронная сеть.

1. Методика

Общая схема исследования представлена на рис. 1, где овал использован для обозначения данных на различных стадиях обработки, а прямоугольник отвечает за обозначение этапов работы с данными. Пунктирная линия означает опциональность использования блока. Каждый отдельный шаг будет разобран далее в статье.

1.1. Данные. В работе используются данные, предоставленные Национальным медико-хирургическим центром имени Н. И. Пирогова Министерства здравоохранения Российской Федерации (Москва, Россия). Все медицинские процедуры проводились в Центре в соответствии с Хельсинкской декларацией и медицинскими правилами Центра и были одобрены лечебно-экспертной комиссией. Все пациенты дали письменное информированное согласие перед участием. Набор данных включает анонимизированные данные долгосрочного мониторинга пациентов в отделении неврологии и клинической нейрофизиологии в период с 2017 по 2019 год. Мониторинг проводился во время повседневной деятельности, включая сон и бодрствование. Продолжительность записи варьируется от 8 до 84 часов в зависимости от состояния пациента и количества эпизодов эпилептиформной активности, необходимых для постановки правильного диагноза. Данные содержат записи 83 пациентов с диагнозом фокальная эпилепсия. Эпилептические очаги обнаруживались в лобных, височных или теменных областях левого, правого или обоих полушарий. У каждого пациента за время наблюдения было зафиксировано от одного до пяти эпилептических припадков. Сигналы ЭЭГ регистрировали с частотой дискретизации 128 Гц по 25 каналам согласно международной системе 10–20 [18]. Пример данных изображен на рис. 2.

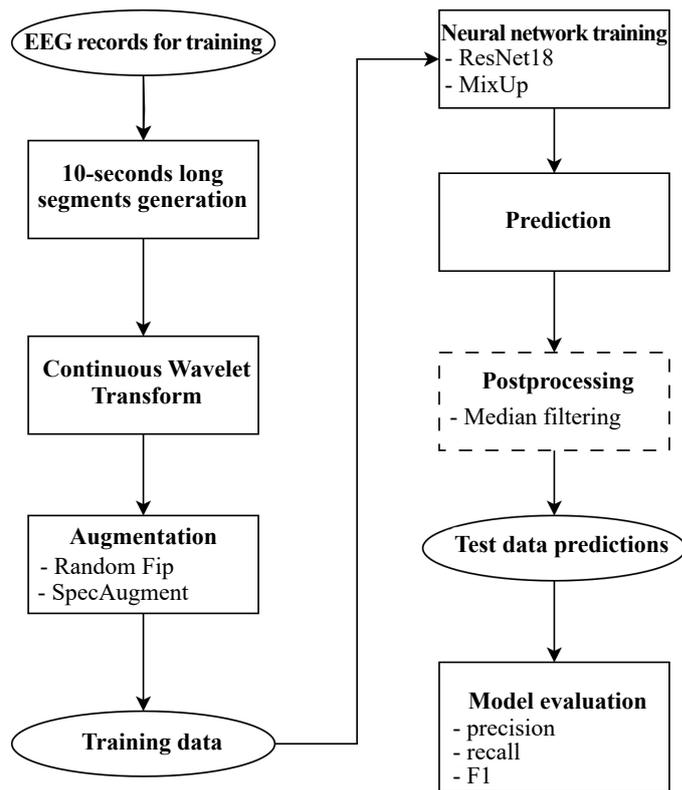


Рис. 1. Схема исследования. Овалом изображаются данные на различных стадиях обработки. Прямоугольным блоком описываются шаги работы с данными. Пунктирная линия означает опциональность использования блока

Fig. 1. Study scheme. The oval represents data at various stages of processing. The rectangular block describes the data processing steps. The dotted line indicates the optional use of the block

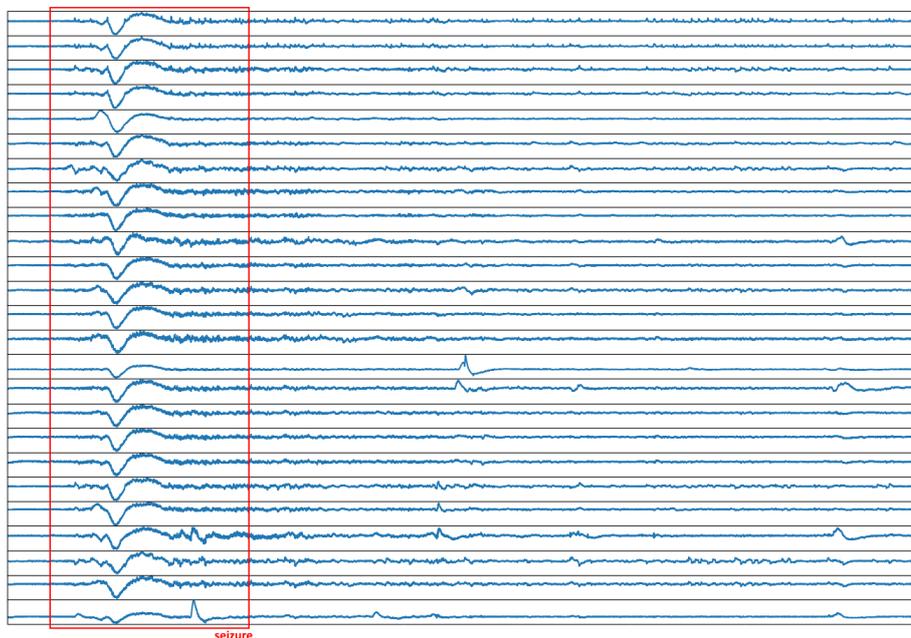


Рис. 2. ЭЭГ запись из используемого датасета, содержащая приступ, который выделен красным цветом (цвет онлайн)

Fig. 2. EEG record from the dataset with a seizure, which is highlighted in red (color online)

1.2. Частотно-временной анализ. Анализ сигналов выполнялся при помощи непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) [19]. НВП выполняет свертку для каждого из 25 ЭЭГ сигналов $x_n(t)$ с базовой функцией $\psi(\eta)$:

$$W_n(f, t_0) = \sqrt{f} \int_{-\infty}^{\infty} x_n(t) \psi^*(f(t - t_0)) dt, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где N — количество каналов в ЭЭГ записи, f — частота, t — время, $W_n(f, t)$ — коэффициенты вейвлет преобразования. Знаком $*$ обозначается комплексно-сопряженная функция. В качестве базовой функции НВП был использован вейвлет Морле:

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \quad (2)$$

где $\omega_0 = 2\pi$ — центральная частота вейвлета, которая описывает его общее поведение, определяемое путем аппроксимации вейвлета синусоидой.

Далее рассматривалась мощность полученного спектра в диапазоне частот 1...40 Гц:

$$\hat{W}_n(f, t) = |W_n(f, t)|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

1.3. Математическая модель. Выявление эпилептических приступов на записи ЭЭГ было сведено к задаче классификации непересекающихся отрезков ЭЭГ записи фиксированной длины (в данной работе — 10 секунд) после вейвлет-преобразования. Данные отрезки могут быть рассмотрены как 25-канальные изображения и, следовательно, задача в общем смысле заключается в классификации изображений. В данной постановке доминирующее положение занимают нейронные сети, которые с момента появления AlexNet [20] в 2012 году занимают лидирующие позиции в различных бенчмарках, таких как ImageNet [21]. Поэтому в качестве математической модели была выбрана нейронная сеть архитектуры ResNet-18 [22], что является стандартным выбором для задачи классификации.

Стоит отметить, что нейронные сети имеют тенденцию сходиться быстрее и стабильнее, когда входные данные нормально распределены с близким к нулю средним значением и ограниченной дисперсией. Однако общее распределение мощности спектра, ввиду того, что многие значения близки к нулю, является асимметричным, близким к экспоненциальному. Поэтому входом для сети была прологарифмированная и нормализованная мощность спектра:

$$\hat{W}_n^{\log}(f, t) = \log(\hat{W}_n(f, t)), \quad (4)$$

$$\hat{W}_n^{\text{norm}}(f, t) = \frac{\hat{W}_n^{\log}(f, t) - \mu(\hat{W}_n^{\log})}{\sigma(\hat{W}_n^{\log})}, \quad (5)$$

где $\mu(X) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} x$ — среднее значение, $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} (x - \mu(X))^2}$ — стандартное отклонение.

Обычно, для того чтобы получить лучшие результаты и ускорить сходимость модели [23], используют предобученные веса соответствующей архитектуры, обученной на задаче классификации на датасете цветных изображений (такие предобученные веса обычно присутствуют во всех современных программных пакетах). Однако проблема состоит в том, что цветные изображения имеют 3 канала, тогда как имеющиеся данные ЭЭГ после вейвлет преобразования — 25 каналов. Для решения этой проблемы была реализована специальная схема инициализации первого сверточного слоя нейронной сети. Каждый фильтр первого сверточного слоя предобученной сети был усреднен вдоль измерения соответствующего канала входного изображения и, затем,

для каждого фильтра соответствующее ему «среднее» было продублировано 25 раз. Данный подход позволил использовать параметры предобученной модели и начать обучение с хорошего начального приближения.

Также стоит отметить, что имеющийся датасет является сильно несбалансированным — более 99% общего времени записи соответствует нормальному состоянию пациента. Поэтому во время обучения сети случайным образом отбиралось равное количество отрезков, содержащих и не содержащих эпилептический приступ. В данной работе для каждого пациента отбиралось 100 отрезков, содержащих нормальную, и 100 отрезков, содержащих эпилептическую активность.

Обучение сети проводилось на данных 34 пациентов, тестирование — на данных 45 пациентов и 4 записи были исключены из рассмотрения, так как в них были выявлены недочеты в разметке на этапе анализа исходных данных. Например, записи двух пациентов имели один приступ продолжительностью 1000 секунд в конце записи, что в несколько раз превосходит максимальную продолжительность приступа во всех оставшихся записях. Ещё 2 записи были исключены из рассмотрения после консультации с врачом из-за значительного числа артефактов при регистрации ЭЭГ.

Параметры обучения модели:

- количество эпох — 10,
- скорость обучения — 0.001,
- размер батча — 4,
- оптимизатор — Adam.

В качестве функции потерь для нейронной сети использовалась бинарная перекрестная энтропия (Binary Cross Entropy, BCE):

$$\text{BCE} = -\frac{1}{N_{\text{data}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{data}}} (y_i \log(x_i) + (1 - y_i) \log(1 - x_i)), \quad (6)$$

где N_{data} — количество примеров для обучения, x_i — предсказание модели, y_i — истинная метка.

1.4. MixUp и аугментации. Для улучшения результатов работы сети использовались техники аугментации и подход MixUp [24]. Подход MixUp позволяет увеличить количество уникальных примеров в датасете, смешивая имеющиеся данные в определенной пропорции, что, в свою очередь, позволяет получить линейное поведение модели в промежутках между обучающими примерами. Это улучшает стабильность сети, так как позволяет использовать для обучения примеры, которые сложно получить в реальной жизни. Также эксперименты показывают, что при использовании MixUp границы принятия линейно переходят от класса к классу [24]. Математически MixUp можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \lambda x_i + (1 - \lambda)x_j, \\ \tilde{y} = \lambda y_i + (1 - \lambda)y_j, \end{cases} \quad (7)$$

где (\tilde{x}, \tilde{y}) — новый пример для обучения, (x_i, y_i) и (x_j, y_j) — два случайных обучающих примера из датасета, λ — значение из бета-распределения, то есть $\lambda \sim \text{B}(\alpha, \alpha)$, $\lambda \in [0, 1]$. В данной работе $\alpha=1$.

Под аугментациями понимаются техники повышения вариативности датасета при помощи преобразований над исходными данными, что позволяет получать более стабильные и точные решения. В данной работе в качестве аугментаций использовались случайное отражение мощности спектра 10-секундного отрезка по времени, а также подход SpecAugment [25] — простой метод аугментации, изначально предложенный для задачи распознавания речи. SpecAugment применяется непосредственно к мощности спектра и заключается в маскировании блоков частотных каналов

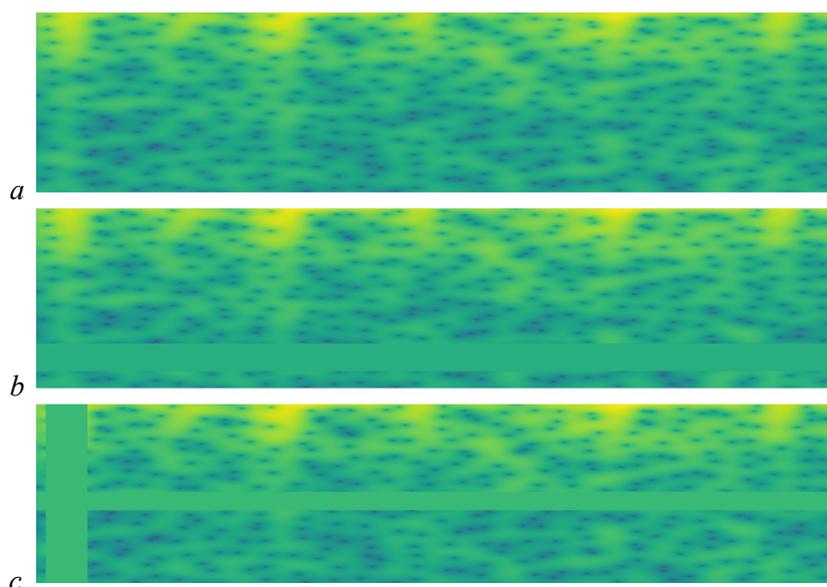


Рис. 3. Пример работы SpecAugment: *a* — оригинал; *b* — маскирование по частоте; *c* — маскирование как по частоте, так и по времени (цвет онлайн)

Fig. 3. Example of SpecAugment. *a* — source; *b* — frequency masking; *c* — time and frequency masking (color online)

и/или маскировании блоков временных каналов, то есть в замене оригинальных значений блока на 0 либо на среднее значение мощности спектра. На рис. 3 изображен пример использования этой аугментации, где оригинальные значения заменяются на среднее. Здесь представлена оригинальная мощность спектра (рис. 3, *a*), мощность спектра с применением маскирования по частоте (рис. 3, *b*) и мощность спектра с применением маскирования как по частоте, так и по времени (рис. 3, *c*).

1.5. Постобработка. На тренировочных данных был подобран порог отнесения отрезка к положительному или отрицательному классу. После получения предсказаний сети было замечено большое количество ложноположительных срабатываний сети лишь на одном последовательном отрезке в 10 секунд. На рис. 4 продемонстрировано это наблюдение: 2 ложноположительных срабатывания, обозначенные розовыми столбцами, каждый из которых, согласно модели, длится

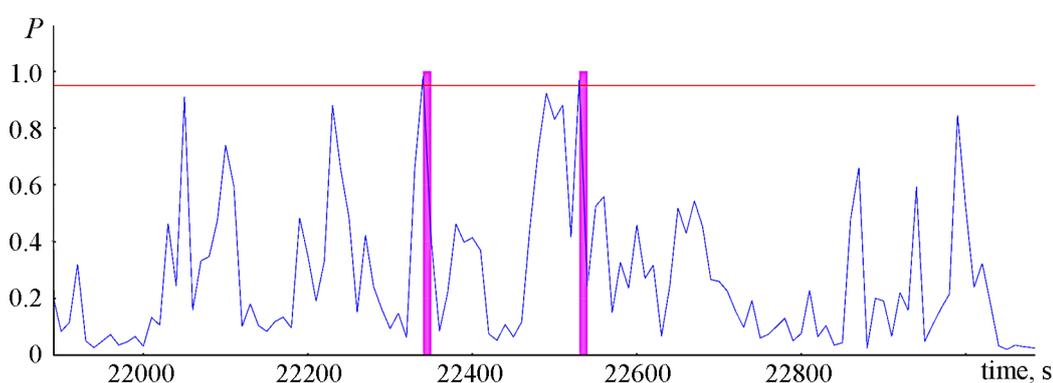


Рис. 4. Зависимость уверенности сети от времени. Красной линией изображен порог классификации, розовые столбцы — одиночные ложноположительные срабатывания на отрезке в 10 секунд (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the network's confidence on time. Red line shows the classification threshold, pink columns are single 10 seconds long false positives (color online)

в течение 10 секунд. Это является серьезной проблемой, так как при реальном использовании такой модели врачу будет необходимо тратить огромное количество времени на просмотр ложных «подозрительных» отрезков, которые на самом деле не содержат аномальной активности.

Для решения проблемы большого количества одиночных ложных срабатываний было рассмотрено распределение продолжительности приступов, изображенное на рис. 5, для построения которого были вычислены продолжительности всех приступов всех пациентов. Из распределения видно, что минимальная продолжительность приступа составляет более 40 секунд, а средняя продолжительность приступа при этом составляет более 100 секунд, поэтому для минимизации количества ложных одиночных срабатываний, было решено применить к полученным предсказаниям модели постобработку. Для этого был использован медианный фильтр с размером ядра $k = 7$, так как такой подход, в отличие от, например, подбора эвристических правил отнесения отрезка к ложноположительному, позволяет сгладить сигнал в целом и получить менее стохастические предсказания.

Для оценки качества работы модели использовались стандартные метрики качества для задачи классификации — *precision* (P), *recall* (R) и F_1 , основанные на ошибках 1 и 2 рода, возникающих при проверке статистических гипотез:

$$P = \frac{TP}{TP + FP}, \quad (8)$$

$$R = \frac{TP}{TP + FN}, \quad (9)$$

$$F_1 = \frac{2 \cdot P \cdot R}{P + R}, \quad (10)$$

где TP — количество истинно положительных предсказаний модели, TN — количество истинно ложных предсказаний модели, FP — количество ложноположительных предсказаний модели, FN — количество ложноотрицательных предсказаний модели.

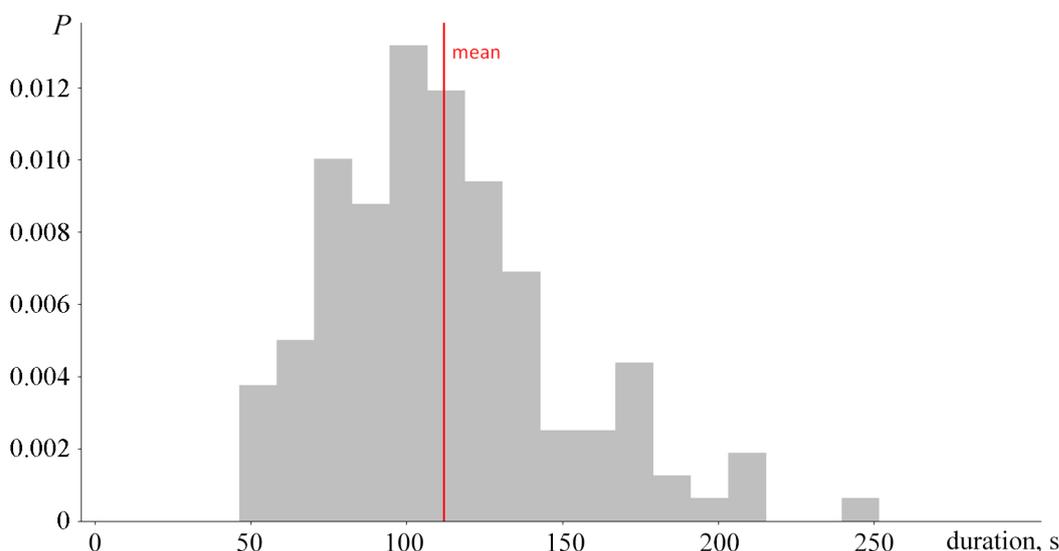


Рис. 5. Оценка плотности распределения продолжительности эпилептических приступов в используемом наборе данных. Красная вертикальная линия — средняя продолжительность приступа (цвет онлайн)

Fig. 5. Estimation of the probability density function (PDF) of the distribution of the duration of epileptic seizures in the data set used. Red vertical line shows average seizure duration (color online)

2. Результаты и обсуждение

В данной работе была предложена модель для выявления эпилептических приступов, основанная на сверточной нейронной сети архитектуры ResNet18. На рис. 6 изображены примеры приступов, которые предложенная модель распознала как истинно положительные (рис. 6, *a, b*) и ложноположительные (рис. 6, *c, d*). Для наглядности и компактности отображения было

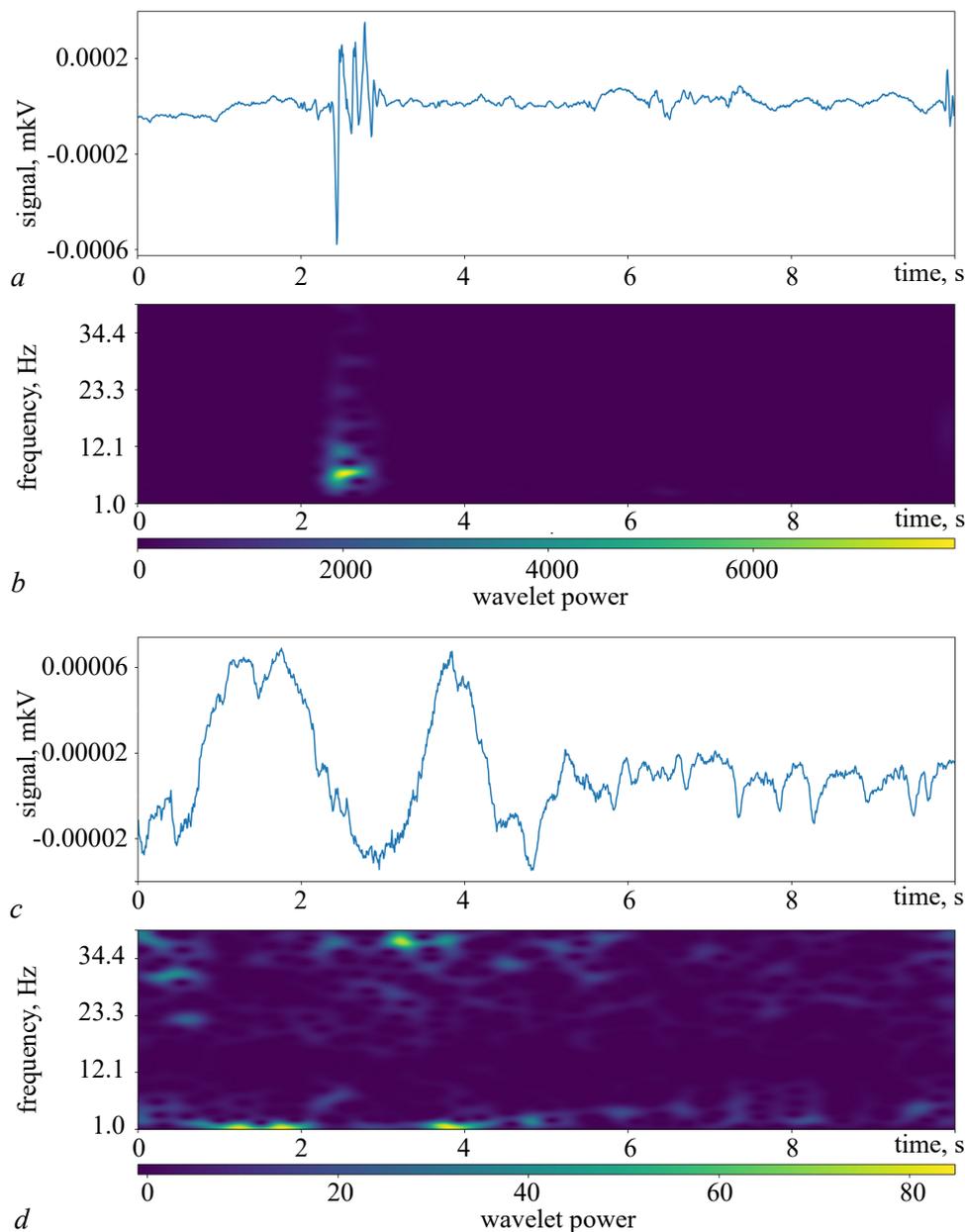


Рис. 6. Пример приступов, которые обнаруживает разработанная модель: *a* – исходный сигнал истинно положительного отрезка; *b* – мощность спектра истинно положительного отрезка; *c* – исходный сигнал ложноположительного отрезка; *d* – мощность спектра ложноположительного отрезка (цвет онлайн)

Fig. 6. An example of seizures that developed model detects: *a* – the original signal of a true positive segment; *b* – the power of the spectrum of a true positive segment; *c* – the original signal of a false positive segment; *d* – the power of the spectrum of a false positive segment (color online)

решено визуализировать исходный сигнал и мощность спектра (формула (3)) после бейзлайн коррекции только для канала Cz, который соответствует центральному электроду, расположенному на срединной сагиттальной плоскости черепа.

Результаты обучения сети на тренировочной и тестовой выборках представлены в табл. 1. Из табл. 1 видно, что при переходе с тренировочного множества на тестовое происходит значительное уменьшение метрики *precision*, а вместе с ней и F_1 . Это объясняется тем, что во время обучения для балансировки датасета случайно выбирались по 100 отрезков нормальной и эпилептической активности, а во время фазы тестирования вся запись разбивается на последовательные 10-секундные отрезки. Учитывая, что средняя продолжительность записи составляет более 12 часов и более 99% записи являются нормальной активностью, то во время тестирования количество отрезков, содержащих нормальную активность, многократно превышает их количество во время тренировки. Следовательно, повышается и количество ложноположительных срабатываний, что и отражается в уменьшении значения метрики *precision*.

Из данных табл. 1 также следует, что медианная фильтрация существенно улучшает результаты работы предложенной модели. Улучшения наиболее заметны в метрике *precision*, что является закономерным результатом, так как медианный фильтр особенно эффективен в борьбе с импульсным шумом, чем и являются одиночные ложные срабатывания модели.

Также для демонстрации эффективности предложенного метода в табл. 2 приведено сравнение с методами, предложенными в [26, 27], которые основаны на классических алгоритмах машинного обучения и используют такой же набор данных.

Предложенная в данной работе модель без применения постобработки достигает значения метрики $F_1 = 0.2495$, что превосходит результат, представленный в [26], где авторы генерируют признаки вручную для последующей классификации с помощью алгоритма случайного леса. Результаты, демонстрируемые нашей моделью, также являются сопоставимыми с результатами, представленными в работе [27], в которой авторы решают задачу выявления приступов, рассматривая её как задачу детекции выбросов, с помощью одноклассового SVM [28]. При добавлении шага постобработки результаты существенно улучшаются и итоговое значение метрики F_1 составляет 0.4382, что превосходит результаты в работах [26, 27] и демонстрирует эффективность предложенного метода.

Другой важной задачей является создание интерфейсов мозг-компьютер для немедицинского прерывания эпилептических приступов [29], которые основаны на предсказании формирования приступа по сигналам ЭЭГ/ЭЖоГ и последующей стимуляции мозга интерфейсом [30, 31]. Предложенная модель может быть эффективна для решения данной задачи, так как

Таблица 1. Результаты обучения предложенной модели
Table 1. Training results of the model

Подмножество данных	<i>precision</i>	<i>recall</i>	F_1
Тренировочное	0.7771	0.7794	0.7782
Тестовое	0.1903	0.7199	0.2495
Тестовое, медиан. фильтр. $k = 7$	0.4196	0.7308	0.4382

Таблица 2. Сравнение моделей
Table 2. Comparison of models

Модель	<i>precision</i>	<i>recall</i>	F_1
Random Forest [26]	0.0533	0.7867	0.0933
One-class SVM [27]	0.1270	0.7697	0.2058
ResNet-18	0.1903	0.7199	0.2495
ResNet-18 медиан. фильтр. $k = 7$	0.4196	0.7308	0.4382

классификация производится по коротким (до 10 с) интервалам. Однако возникает проблема необходимости расчета вейвлет-спектров по всему интервалу частот, что приводит к большим затратам машинного времени. Поэтому для использования алгоритма в реальном времени необходима его дальнейшая оптимизация, в частности, важным является анализ наиболее значимого частотного диапазона, по которому необходимо восстановление вейвлет-спектра.

Заключение

В данной работе была продемонстрирована эффективность использования сверточной нейронной сети для выявления эпилептических приступов на ЭЭГ записи. Для получения качественного решения были использованы техники аугментации и специальная схема обучения. Исходя из результатов, представленных в табл. 2, видно, что предложенная модель, основанная на сверточной нейронной сети архитектуры ResNet18 с медианным фильтром для постобработки, несмотря на небольшой проигрыш по метрике *recall*, в целом превосходит модели на базе классических алгоритмов. Предложенная модель не требует ручной генерации признаков, что является преимуществом по сравнению с классическими подходами. Также можно сказать, что предложенная модель неплохо справляется с выявлением отрезков, содержащих приступ, но в то же время присутствуют проблемы с ложноположительными срабатываниями, что объясняется сложностью исходного сигнала — большой вариативностью как в рамках записи одного пациента, так и между записями нескольких пациентов. Однако стоит отметить, что среди всех приступов всех пациентов модель отметила как минимум один отрезок как эпилептический, а значит, при просмотре врачом таких «подозрительных» отрезков ни один приступ не будет упущен, что является ключевым критерием применимости модели в качестве системы поддержки принятия врачебных решений (СППВР).

Список литературы

1. *Megiddo I., Colson A., Chisholm D., Dua T., Nandi A., Laxminarayan R.* Health and economic benefits of public financing of epilepsy treatment in India: An agent-based simulation model // *Epilepsia*. 2016. Vol. 57, no. 3. P. 464–474. DOI: 10.1111/epi.13294.
2. *Sander J. W.* The use of antiepileptic drugs—principles and practice // *Epilepsia*. 2004. Vol. 45, no. s6. P. 28–34. DOI: 10.1111/j.0013-9580.2004.455005.x.
3. *Ghosh S., Sinha J. K., Khan T., Devaraju K. S., Singh P., Vaibhav K., Gaur P.* Pharmacological and therapeutic approaches in the treatment of epilepsy // *Biomedicines*. 2021. Vol. 9, no. 5. P. 470. DOI: 10.3390/biomedicines9050470.
4. *Tatum W. O., Mani J., Jin K., Halford J. J., Gloss D., Fahoum F., Maillard L., Mothersill I., Beniczky S.* Minimum standards for inpatient long-term video-EEG monitoring: A clinical practice guideline of the international league against epilepsy and international federation of clinical neurophysiology // *Clinical Neurophysiology*. 2022. Vol. 134. P. 111–128. DOI: 10.1016/j.clinph.2021.07.016.
5. *Карпов О. Э., Храмов А. Е.* Информационные технологии, вычислительные системы и искусственный интеллект в медицине. М.: ДПК Пресс, 2022. 480 с.
6. *Sutton R. T., Pincock D., Baumgart D. C., Sadowski D. C., Fedorak R. N., Kroeker K. I.* An overview of clinical decision support systems: benefits, risks, and strategies for success // *npj Digital Medicine*. 2020. Vol. 3. P. 17. DOI: 10.1038/s41746-020-0221-y.
7. *Roy Y., Banville H., Albuquerque I., Gramfort A., Falk T. H., Faubert J.* Deep learning-based electroencephalography analysis: a systematic review // *Journal of Neural Engineering*. 2019. Vol. 16, no. 5. P. 051001. DOI: 10.1088/1741-2552/ab260c.
8. *Chen Z., Lu G., Xie Z., Shang W.* A unified framework and method for EEG-based early

- epileptic seizure detection and epilepsy diagnosis // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 20080–20092. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2969055.
9. *Mousavi S. R., Niknazar M., Vahdat B. V.* Epileptic seizure detection using AR model on EEG signals // In: 2008 Cairo International Biomedical Engineering Conference. 18-20 December 2008, Cairo, Egypt. New York: IEEE, 2009. P. 1–4. DOI: 10.1109/CIBEC.2008.4786067.
 10. *Wang D., Miao D., Xie C.* Best basis-based wavelet packet entropy feature extraction and hierarchical EEG classification for epileptic detection // Expert Systems with Applications. 2011. Vol. 38, no. 11. P. 14314–14320. DOI: 10.1016/j.eswa.2011.05.096.
 11. *Vanabelle P., Handschutter P. D., Tahry R. E., Benjelloun M., Boukhebouze M.* Epileptic seizure detection using EEG signals and extreme gradient boosting // The Journal of Biomedical Research. 2020. Vol. 34, no. 3. P. 228–239. DOI: 10.7555/JBR.33.20190016.
 12. *Karpov O. E., Khoymov M. S., Maksimenko V. A., Grubov V. V., Utyashev N., Andrikov D. A., Kurkin S. A., Hramov A. E.* Evaluation of unsupervised anomaly detection techniques in labelling epileptic seizures on human EEG // Applied Sciences. 2023. Vol. 13, no. 9. P. 5655. DOI: 10.3390/app13095655.
 13. *Zhao W., Zhao W., Wang W., Jiang X., Zhang X., Peng Y., Zhang B., Zhang G.* A novel deep neural network for robust detection of seizures using EEG signals // Computational and Mathematical Methods in Medicine. 2020. Vol. 2020. P. 9689821. DOI: 10.1155/2020/9689821.
 14. *Asif U., Roy S., Tang J., Harrer S.* SeizureNet: Multi-spectral deep feature learning for seizure type classification // In: Kia S. M., Mohy-ud-Din H., Abdulkadir A., Bass C., Habes M., Rondina J. M., Tax C., Wang H., Wolfers T., Rathore S., Ingalthalikal M. (eds) Machine Learning in Clinical Neuroimaging and Radiogenomics in Neuro-oncology. MLCN RNO-AI 2020 2020. Vol. 12449 of Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer, 2020. P. 77–87. DOI: 10.1007/978-3-030-66843-3_8.
 15. *Andrzejak R. G., Schindler K., Rummel C.* Nonrandomness, nonlinear dependence, and nonstationarity of electroencephalographic recordings from epilepsy patients // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86, no. 4. P. 046206. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.046206.
 16. *Shoeb A. H.* Application of Machine Learning to Epileptic Seizure Onset Detection and Treatment. PhD Thesis. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2009. 162 p.
 17. *Hwang S., Park S., Kim D., Lee J., Byun H.* Mitigating inter-subject brain signal variability FOR EEG-based driver fatigue state classification // In: ICASSP 2021 - 2021 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). 06-11 June 2021, Toronto, ON, Canada. New York: IEEE, 2021. P. 990–994. DOI: 10.1109/ICASSP39728.2021.9414613.
 18. *Homan R. W.* The 10-20 electrode system and cerebral location // American Journal of EEG Technology. 1988. Vol. 28, no. 4. P. 269–279. DOI: 10.1080/00029238.1988.11080272.
 19. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V. A., Maximenko V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E.* Wavelets in Neuroscience. Cham: Springer, 2021. 384 p. DOI: 10.1007/978-3-030-75992-6.
 20. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E.* ImageNet classification with deep convolutional neural networks // In: Pereira F., Burges C. J., Bottou L., Weinberger K. Q. (eds) Advances in Neural Information Processing Systems 25. NIPS, 2012. P. 1097–1105.
 21. *Deng J., Dong W., Socher R., Li L.-J., Li K., Fei-Fei L.* ImageNet: A large-scale hierarchical image database // In: 2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 20-25 June 2009, Miami, FL, USA. New York: IEEE, 2009. P. 248–255. DOI: 10.1109/CVPR.2009.5206848.
 22. *He K., Zhang X., Ren S., Sun J.* Deep residual learning for image recognition // In: 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 27-30 June 2016, Las Vegas, NV, USA. New York: IEEE, 2016. P. 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.
 23. *Hendrycks D., Lee K., Mazeika M.* Using pre-training can improve model robustness and

- uncertainty // In: Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning. Vol. 97. Long Beach, California. PMLR, 2019. P. 2712–2721.
24. Zhang H., Cissé M., Dauphin Y. N., Lopez-Paz D. mixup: Beyond empirical risk minimization // In: 6th International Conference on Learning Representations. 30 Apr–3 May 2018, Vancouver, BC, Canada. ICLR (Poster), 2018. P. 1–13.
 25. Park D. S., Chan W., Zhang Y., Chiu C.-C., Zoph B., Cubuk E. D., Le Q. V. SpecAugment: A simple data augmentation method for automatic speech recognition // In: Proc. Interspeech 2019. 15–19 September 2019, Graz, Austria. Interspeech, 2019. P. 2613–2617. DOI: 10.21437/Interspeech.2019-2680.
 26. Karpov O. E., Afinogenov S., Grubov V. V., Maksimenko V., Korchagin S., Utyashev N., Hramov A. E. Detecting epileptic seizures using machine learning and interpretable features of human EEG // The European Physical Journal Special Topics. 2023. Vol. 232, no. 5. P. 673–682. DOI: 10.1140/epjs/s11734-022-00714-3.
 27. Karpov O. E., Grubov V. V., Maksimenko V. A., Kurkin S. A., Smirnov N. M., Utyashev N. P., Andrikov D. A., Shusharina N. N., Hramov A. E. Extreme value theory inspires explainable machine learning approach for seizure detection // Scientific Reports. 2022. Vol. 12, no. 1. P. 11474. DOI: 10.1038/s41598-022-15675-9.
 28. Cortes C., Vapnik V. Support-vector networks // Machine Learning. 1995. Vol. 20, no. 3. P. 273–297. DOI: 10.1007/BF00994018.
 29. Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N. Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // Physics Reports. 2021. Vol. 918. P. 1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
 30. Pisarchik A. N., Maksimenko V. A., Hramov A. E. From novel technology to novel applications: Comment on “An integrated brain-machine interface platform with thousands of channels” by Elon Musk and Neuralink // Journal of Medical Internet Research. 2019. Vol. 21, no. 10. P. e16356. DOI: 10.2196/16356.
 31. Maksimenko V. A., van Heukelum S., Makarov V. V., Kelderhuis J., Lüttjohann A., Koronovskii A. A., Hramov A. E., Luijtelar G. Absence seizure control by a brain computer interface // Scientific Reports. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 2487. DOI: 10.1038/s41598-017-02626-y.

References

1. Megiddo I, Colson A, Chisholm D, Dua T, Nandi A, Laxminarayan R. Health and economic benefits of public financing of epilepsy treatment in India: An agent-based simulation model. *Epilepsia*. 2016;57(3):464–474. DOI: 10.1111/epi.13294.
2. Sander JW. The use of antiepileptic drugs—principles and practice. *Epilepsia*. 2004;45(s6):28–34. DOI: 10.1111/j.0013-9580.2004.455005.x.
3. Ghosh S, Sinha JK, Khan T, Devaraju KS, Singh P, Vaibhav K, Gaur P. Pharmacological and therapeutic approaches in the treatment of epilepsy. *Biomedicines*. 2021;9(5):470. DOI: 10.3390/biomedicines9050470.
4. Tatum WO, Mani J, Jin K, Halford JJ, Gloss D, Fahoum F, Maillard L, Mothersill I, Beniczky S. Minimum standards for inpatient long-term video-EEG monitoring: A clinical practice guideline of the international league against epilepsy and international federation of clinical neurophysiology. *Clinical Neurophysiology*. 2022;134:111–128. DOI: 10.1016/j.clinph.2021.07.016.
5. Karpov OE, Hramov AE. Information Technology, Computing Systems and Artificial Intelligence in Medicine. Moscow: DPK Press; 2022. 480 p. (in Russian).
6. Sutton RT, Pincock D, Baumgart DC, Sadowski DC, Fedorak RN, Kroeker KI. An overview of clinical decision support systems: benefits, risks, and strategies for success. *npj Digital Medicine*. 2020;3:17. DOI: 10.1038/s41746-020-0221-y.

7. Roy Y, Banville H, Albuquerque I, Gramfort A, Falk TH, Faubert J. Deep learning-based electroencephalography analysis: a systematic review. *Journal of Neural Engineering*. 2019;16(5): 051001. DOI: 10.1088/1741-2552/ab260c.
8. Chen Z, Lu G, Xie Z, Shang W. A unified framework and method for EEG-based early epileptic seizure detection and epilepsy diagnosis. *IEEE Access*. 2020;8:20080–20092. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2969055.
9. Mousavi SR, Niknazar M, Vahdat BV. Epileptic seizure detection using AR model on EEG signals. In: 2008 Cairo International Biomedical Engineering Conference. 18-20 December 2008, Cairo, Egypt. New York: IEEE; 2009. P. 1–4. DOI: 10.1109/CIBEC.2008.4786067.
10. Wang D, Miao D, Xie C. Best basis-based wavelet packet entropy feature extraction and hierarchical EEG classification for epileptic detection. *Expert Systems with Applications*. 2011; 38(11):14314–14320. DOI: 10.1016/j.eswa.2011.05.096.
11. Vanabelle P, Handschutter PD, Tahry RE, Benjelloun M, Boukhebouze M. Epileptic seizure detection using EEG signals and extreme gradient boosting. *The Journal of Biomedical Research*. 2020;34(3):228–239. DOI: 10.7555/JBR.33.20190016.
12. Karpov OE, Khoymov MS, Maksimenko VA, Grubov VV, Utyashev N, Andrikov DA, Kurkin SA, Hramov AE. Evaluation of unsupervised anomaly detection techniques in labelling epileptic seizures on human EEG. *Applied Sciences*. 2023;13(9):5655. DOI: 10.3390/app13095655.
13. Zhao W, Zhao W, Wang W, Jiang X, Zhang X, Peng Y, Zhang B, Zhang G. A novel deep neural network for robust detection of seizures using EEG signals. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2020;2020:9689821. DOI: 10.1155/2020/9689821.
14. Asif U, Roy S, Tang J, Harrer S. SeizureNet: Multi-spectral deep feature learning for seizure type classification. In: Kia SM, Mohy-ud-Din H, Abdulkadir A, Bass C, Habes M, Rondina JM, Tax C, Wang H, Wolfers T, Rathore S, Ingalhalikar M, editors. *Machine Learning in Clinical Neuroimaging and Radiogenomics in Neuro-oncology. MLCN RNO-AI 2020*. Vol. 12449 of *Lecture Notes in Computer Science*. Cham: Springer; 2020. P. 77–87. DOI: 10.1007/978-3-030-66843-3_8.
15. Andrzejak RG, Schindler K, Rummel C. Nonrandomness, nonlinear dependence, and nonstationarity of electroencephalographic recordings from epilepsy patients. *Phys. Rev. E*. 2012;86(4):046206. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.046206.
16. Shoeb AH. *Application of Machine Learning to Epileptic Seizure Onset Detection and Treatment*. PhD Thesis. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology; 2009. 162 p.
17. Hwang S, Park S, Kim D, Lee J, Byun H. Mitigating inter-subject brain signal variability FOR EEG-based driver fatigue state classification. In: *ICASSP 2021 - 2021 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. 06-11 June 2021, Toronto, ON, Canada. New York: IEEE; 2021. P. 990–994. DOI: 10.1109/ICASSP39728.2021.9414613.
18. Homan RW. The 10-20 electrode system and cerebral location. *American Journal of EEG Technology*. 1988;28(4):269–279. DOI: 10.1080/00029238.1988.11080272.
19. Hramov AE, Koronovskii AA, Makarov VA, Maximenko VA, Pavlov AN, Sitnikova E. *Wavelets in Neuroscience*. Cham: Springer; 2021. 384 p. DOI: 10.1007/978-3-030-75992-6.
20. Krizhevsky A, Sutskever I, Hinton GE. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. In: Pereira F, Burges CJ, Bottou L, Weinberger KQ, editors. *Advances in Neural Information Processing Systems 25*. NIPS; 2012. P. 1097–1105.
21. Deng J, Dong W, Socher R, Li LJ, Li K, Fei-Fei L. ImageNet: A large-scale hierarchical image database. In: *2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 20-25 June 2009, Miami, FL, USA. New York: IEEE; 2009. P. 248–255. DOI: 10.1109/CVPR.2009.5206848.
22. He K, Zhang X, Ren S, Sun J. Deep residual learning for image recognition. In: *2016 IEEE*

- Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 27-30 June 2016, Las Vegas, NV, USA. New York: IEEE; 2016. P. 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.
23. Hendrycks D, Lee K, Mazeika M. Using pre-training can improve model robustness and uncertainty. In: Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning. Vol. 97. Long Beach, California. PMLR; 2019. P. 2712–2721.
 24. Zhang H, Cissé M, Dauphin YN, Lopez-Paz D. mixup: Beyond empirical risk minimization. In: 6th International Conference on Learning Representations. 30 Apr-3 May 2018, Vancouver, BC, Canada. ICLR (Poster); 2018. P. 1–13.
 25. Park DS, Chan W, Zhang Y, Chiu CC, Zoph B, Cubuk ED, Le QV. SpecAugment: A simple data augmentation method for automatic speech recognition. In: Proc. Interspeech 2019. 15-19 September 2019, Graz, Austria. Interspeech; 2019. P. 2613–2617. DOI: 10.21437/Interspeech.2019-2680.
 26. Karpov OE, Afinogenov S, Grubov VV, Maksimenko V, Korchagin S, Utyashev N, Hramov AE. Detecting epileptic seizures using machine learning and interpretable features of human EEG. The European Physical Journal Special Topics. 2023;232(5):673–682. DOI: 10.1140/epjs/s11734-022-00714-3.
 27. Karpov OE, Grubov VV, Maksimenko VA, Kurkin SA, Smirnov NM, Utyashev NP, Andrikov DA, Shusharina NN, Hramov AE. Extreme value theory inspires explainable machine learning approach for seizure detection. Scientific Reports. 2022;12(1):11474. DOI: 10.1038/s41598-022-15675-9.
 28. Cortes C, Vapnik V. Support-vector networks. Machine Learning. 1995;20(3):273–297. DOI: 10.1007/BF00994018.
 29. Hramov AE, Maksimenko VA, Pisarchik AN. Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. Physics Reports. 2021;918:1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
 30. Pisarchik AN, Maksimenko VA, Hramov AE. From novel technology to novel applications: Comment on “An integrated brain-machine interface platform with thousands of channels” by Elon Musk and Neuralink. Journal of Medical Internet Research. 2019;21(10):e16356. DOI: 10.2196/16356.
 31. Maksimenko VA, van Heukelum S, Makarov VV, Kelderhuis J, Lüttjohann A, Koronovskii AA, Hramov AE, Luijtelaaar G. Absence seizure control by a brain computer interface. Scientific Reports. 2017;7(1):2487. DOI: 10.1038/s41598-017-02626-y.



Назариков Сергей Игоревич — окончил с отличием магистратуру факультета математического обеспечения и администрирования информационных систем Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта (2022). Область научных интересов — компьютерное зрение, глубокое обучение, нейронные сети, машинное обучение, математическое моделирование. Имеет несколько научных публикаций и свидетельств о регистрации программ для ЭВМ.

Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта
E-mail: snazarikov@gmail.com
AuthorID (eLibrary.Ru): 1173572



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Краткое сообщение
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003060
EDN: WGHKJW

Разметка стадий быстрого и медленного сна с помощью рекуррентного анализа

Е. П. Емельянова✉, А. О. Сельский

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ✉meretari@yandex.ru, selskii@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.05.2023, принята к публикации 13.07.2023,
опубликована онлайн 15.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования — разработать простую методику разметки стадий сна по данным ЭЭГ, полученным из полисомнографических записей. Для проверки работы метода он применен к трем группам испытуемых: условно здоровым, пациентам с болезнью Паркинсона, пациентам с апноэ. **Методы.** Для распознавания стадий сна используется расчет рекуррентного показателя и его последующая оценка. Показано, что стадии быстрого и медленного сна демонстрируют различные значения рекуррентного показателя. **Результаты.** В зависимости от того, в какой диапазон попадает рекуррентный показатель, определялись стадии быстрого и медленного сна для испытуемых по их ночным полисомнографическим записям. Для трех групп испытуемых были рассчитаны средние значения точности метода, которые в среднем превышают 72.5%. **Заключение.** Показано, что на основе рекуррентного анализа возможно создать простой и эффективный метод распознавания стадий сна. Для пациентов с апноэ среднее значение точности метода выше, чем для условно здоровых испытуемых, для которых, в свою очередь, это значение было выше, чем для пациентов с болезнью Паркинсона. Это можно объяснить тем, что изменчивость статистических характеристик рекуррентного показателя по стадиям сна в группе у пациентов с апноэ ниже, а у пациентов с болезнью Паркинсона выше по сравнению с условно здоровыми испытуемыми.

Ключевые слова: рекуррентный анализ, полисомнография, электроэнцефалография, стадии сна, автоматическая разметка.

Благодарности. Работа поддержана Российским научным фондом, проект No 22-72-10061.

Для цитирования: Емельянова Е. П., Сельский А. О. Разметка стадий быстрого и медленного сна с помощью рекуррентного анализа // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 643–649. DOI: 10.18500/0869-6632-003060. EDN: WGHKJW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Marking stages of REM and non-REM sleep using recurrent analysis

E. P. Emelyanova✉, *A. O. Selskii*

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉meretari@yandex.ru, selskii@yandex.ru

Received 10.05.2023, accepted 13.07.2023, available online 15.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The purpose of this study — to develop a simple technique for labeling sleep stages according to EEG data obtained from half-somnography recordings. To test the work of the method, it will be applied to three groups of subjects: conditionally healthy, patients with Parkinson's disease, patients with sleep apnea. **Methods.** In this work, to recognize sleep stages, we use the calculation of a recurrent indicator and its subsequent assessment. It is shown that the stages of REM (Rapid Eye Movement) and non-REM sleep demonstrate different values of the recurrent index. **Results.** Depending on the range in which the recurrent indicator falls, the stages of REM and non-REM sleep were determined for the subjects, according to their nightly polysomnographic records. For three groups of subjects, the average knowledge of the accuracy of the method was calculated, which for all groups exceeded 72.5%. **Conclusion.** It is shown that on the basis of recurrent analysis it is possible to create a simple and effective method for recognizing sleep stages. For patients with apnea, the average accuracy of the method is higher than for apparently healthy subjects, for whom, in turn, this value was higher than for patients with Parkinson's disease. This can be explained by the fact that the variability in the group of statistical characteristics of sleep stages in patients with apnea is lower, and in patients with Parkinson's disease is higher, compared with apparently healthy subjects.

Keywords: recurrent analysis, polysomnography, electroencephalography, sleep stages, automatic markup.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 22-72-10061.

For citation: Emelyanova EP, Selskii AO. Marking stages of REM and non-REM sleep using recurrent analysis. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):643–649. DOI: 10.18500/0869-6632-003060

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В данной работе представлен метод автоматической разметки стадий сна с помощью расчета рекуррентных показателей и их последующего анализа. Проблема автоматизации разметки сна на данный момент остро стоит для специалистов-сомнологов [1]. Из-за большого объема данных эта задача является нетривиальной, особенно с учетом того, что полисомнографические записи делаются обычно две ночи подряд и необходимо проанализировать обе записи [2]. В связи с этим рекуррентный анализ представляется хорошим методом для разметки данных, так как сам метод прост в реализации и не требует большого числа сложных вычислений [3]. Далее, если метод покажет хорошую точность и низкие затраты машинного времени, можно использовать его для быстрой обработки данных ночного сна и выделения стадий сна в реальном времени.

В основе метода лежит расчет рекуррентных показателей в небольших временных окнах. По динамике рекуррентного показателя можно определить стадии наиболее медленного сна и быстрого сна, позволяя записать гипнограмму — графическое представление стадий сна. Апробация метода проводилась на трех группах испытуемых: условно здоровых, пациентах с болезнью Паркинсона и пациентах с ночным апноэ.

Цель настоящего исследования — разработать метод разметки стадий сна, основанный на рекуррентном анализе.

1. Методика

1.1. Описание нейрофизиологического эксперимента. Испытуемые добровольно участвовали в эксперименте на бесплатной основе. Все испытуемые подписали информированное согласие на участие в клиническом исследовании, получили все необходимые разъяснения

по поводу исследования и дали согласие на последующую публикацию результатов исследования. Собранные экспериментальные данные обрабатывались с учетом конфиденциальности и анонимности участников исследования. Все процедуры, выполненные в исследованиях с участием людей, соответствовали Хельсинкской декларации 1964 года и ее более поздним поправкам. Все клинические данные и дизайн клинического исследования были одобрены местным комитетом по этике исследований.

В наше исследование были включены данные 32 испытуемых старше 18 лет, распределенные по трем группам. В группу условно здоровых испытуемых (группа номер 1) вошли практически здоровые участники исследования ($N = 14$, средний возраст 46.7 ± 19.5 лет, медиана возраста 40 лет, соотношение мужчин и женщин 9/5). В группу пациентов с болезнью Паркинсона (группа номер 2) вошли пациенты с этим заболеванием ($N = 8$, средний возраст 57.0 ± 12.3 лет, медиана возраста 56 лет, соотношение мужчин и женщин 5/3). В группу пациентов с апноэ (группа номер 3) вошли лица с ночной дыхательной недостаточностью в форме синдрома обструктивного апноэ сна (ОАС) ($N = 10$, средний возраст 54.0 ± 17.1 лет, медиана возраста 46 лет, соотношение мужчин и женщин 6/4). Каждый испытуемый участвовал в полисомнографическом (ПСГ) исследовании дважды с интервалом в 1–3 ночи в специально оборудованной лаборатории сна. Продолжительность сна составляла 6–9 часов, с 21:30–23:30 до обычного времени пробуждения.

Запись полисомнографии включала электрокардиограмму (ЭКГ), сигналы функции дыхания, окулографию (ОКГ), электромиограмму (ЭМГ) и шесть сигналов электроэнцефалограммы (ЭЭГ), зарегистрированных во время ночного сна. Сигнал ЭКГ регистрировали в стандартном отведении I по Эйнтховену. Респираторные сигналы регистрировали с помощью датчика температуры ороназального потока и датчика храпа. Сигналы ЭМГ регистрировались на подбородке, правом предплечье и левой голени пациента. Сигналы ОКГ включали записи горизонтальных и вертикальных движений глаз.

Сигналы ЭЭГ регистрировали в 6 стандартных отведениях по схеме 10–20. Использовались следующие каналы: O1, O2, T3, T4, Fp1, Fp2. Сигналы ЭЭГ фильтровались с полосой пропускания 0.1...40 Гц и дискретизировались с частотой 500 Гц и $\Delta t = 0.002$ с. Запись каждого канала ЭЭГ можно рассматривать как отдельный одномерный сигнал $x(t_i)$.

Все ПСГ были проверены сертифицированным специалистом по медицине сна с целью стадирования ночного сна. Стадирование сна проводилось по стандартным эпохам (30-секундные отрезки записи). Любой сон начинается со стадии бодрствования, характеризующейся прежде всего альфа-волнами. Если активность альфа-ритма занимает более 50% эпохи, то эту эпоху называют состоянием бодрствования. Наибольшая мощность альфа-ритма наблюдается в затылочных отведениях (O1, O2). Первая стадия (N1 медленного сна) характеризуется уменьшением амплитуды волн и появлением визуально выраженного тета-ритма, наблюдаемого во всех отведениях примерно одинаково. Второй этап (N2) начинается с появления К-комплексов и характерных веретен сна. Третья стадия (N3) сна характеризуется мощной медленноволновой активностью и развитием выраженных дельта-волн. Кроме того, иногда выделяют четвертую стадию сна, характеризующуюся дальнейшим увеличением амплитуды дельта-активности, которая лучше всего визуализируется в лобных отведениях (Fp1, Fp2). Третью и четвертую стадии сна принято рассматривать как единый блок. Быстрый сон характеризуется низкоамплитудной смешанной частотой без К-комплексов и сонных веретен, низким мышечным тонусом подбородка (ЭМГ подбородка образует изолинию) с одновременными быстрыми движениями глазных яблок и так называемыми зеркальными волнами на электроокулографии (ЭОГ).

1.2. Рекуррентный анализ. Одним из методов нелинейной динамики, применяемым для анализа различных данных, является рекуррентный анализ, который позволяет установить взаимосвязи и корреляции между сигналами в сложных распределенных системах [4]. Данный метод нашел применение в широком диапазоне задач обработки сложных сигналов различной

природы [5]. Сам алгоритм расчета отличается простотой [6], что делает его перспективным для работы с большими данными и обработкой сигналов в реальном времени. Рассмотрим сигнал $x(t)$, значения которого известны в моменты времени t_i , где $i = 1, \dots, n$. Для него можно построить рекуррентную матрицу по следующему правилу:

$$R_{i,j} = \theta(\varepsilon - \|x(t_i) - x(t_j)\|), \quad (1)$$

где $R_{i,j}$ — элемент рекуррентной матрицы для сигнала x ; t_i и t_j — моменты времени t ; ε — эмпирически определенное пороговое значение, обеспечивающее необходимую точность метода;

θ — функция Хевисайда, которая принимает нулевое значение для отрицательных аргументов и единичное при неотрицательных. Таким образом, если в момент времени t_j сигнал вернулся в ε -окрестность значения сигнала в момент времени t_i , то в рекуррентной матрице будет 1.

Для оценки количества повторов в сигнале используется рекуррентный показатель, являющийся суммой всех ненулевых значений рекуррентной матрицы, нормированной на ее размер [7]. Такой показатель может быть рассчитан для каждого анализируемого сигнала x по всей длине временного ряда или по небольшому временному фрагменту. Из-за очень большого объема данных в сигналах полисомнографии рекуррентный показатель стоит рассчитывать для относительно небольших временных фрагментов в скользящем временном окне.

Примерная схема расчета показана на рис. 1. Для расчета рекуррентных показателей были использованы временные окна по 60 секунд, что включает 30 000 отсчетов сигнала, с шагом смещения окна в 30 секунд. Это соответствует экспертной разметке стадий сна на гипнограмме и позволяет определить среднее значение рекуррентного показателя для каждой стадии сна.

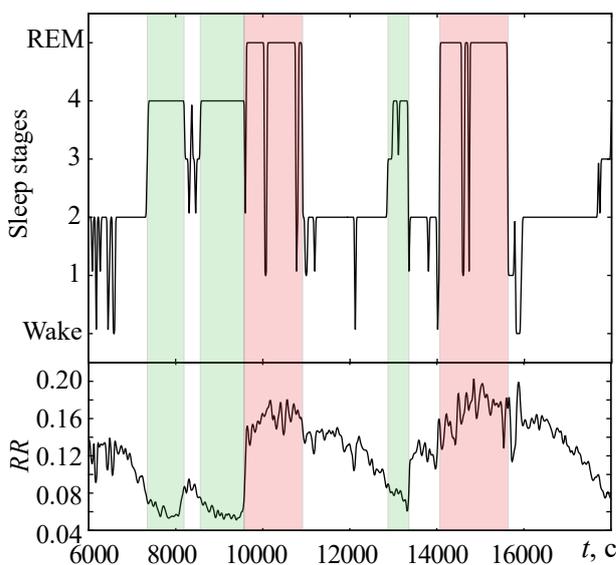


Рис. 1. Гипнограмма для одного из испытуемых, на которой показаны случаи пробуждения, стадии быстрого сна и четыре стадии медленного сна. Ниже приведены значения рекуррентных показателей, рассчитанные в соответствующих временных окнах. Зеленым цветом выделены 3 и 4 стадии сна, красным — стадии быстрого сна (цвет онлайн)

Fig. 1. Hypnogram for one of the subjects, which shows the cases of awakening, stages of REM sleep and four stages of non-REM sleep. Below there are the values of the recurrent indicator calculated in the corresponding time windows. Stages 3 and 4 of sleep are marked in green, stages of REM sleep are marked in red (color online)

1.3. Метод определения стадий сна. Теперь для различных стадий сна возможно провести простой статистический анализ, например такой, как показано на рис. 2. На рисунке приведены разбросы рекуррентного показателя для каждой стадии сна, нормированные на средний рекуррентный показатель по всей полисомнографической записи для всех трех групп испытуемых. Здесь хорошо заметно, что рекуррентные показатели пробуждений, первой и второй стадий сна примерно совпадают со средним по всему сигналу показателем. А вот стадии 3 и 4, а также стадия сна с быстрыми движениями глаз (БДГ) сильно отличаются. Для медленного сна рекуррентный показатель снижается, для быстрого сна увеличивается. Данные получены для тридцати двух человек, каждый из которых проходил полисомнографическое исследование на протяжении двух ночей подряд.

В соответствии с данными на рис. 2 можно предложить довольно простой метод определения стадий быстрого и медленного сна. Хорошо заметно, что стадии медленного сна демонстрируют уменьшение, а быстрого сна — увеличение рекуррентного показателя.

Таким образом, алгоритм разметки быстрых и медленных стадий сна представляет собой следующую последовательность действий.

- i. Поиск максимального и минимального значения рекуррентных показателей для данной гипнограммы.
- ii. Определение значений RR^1 и RR^2 по следующим правилам: $RR^1 = RR_{\min} + 0.3 \cdot (RR_{\max} - RR_{\min})$, $RR^2 = RR_{\max} - 0.4 \cdot (RR_{\max} - RR_{\min})$.
- iii. Определение стадий сна по следующим правилам: если рекуррентный показатель $RR < RR^2$, то отмечаются стадии сна 3 и 4; если $RR > RR^1$, то отмечается стадия БДГ-сна; если $RR^1 < RR < RR^2$, то отмечаются стадии сна 1 и 2.

Данный метод имеет как ряд очевидных преимуществ, так и серьезных недостатков. К преимуществам можно отнести его простоту и скорость вычислений. Это очень важно и для быстрой постобработки данных полисомнографии (из-за их большого объема), и для реализации устройств анализа стадий сна в реальном времени (где быстроедействие расчетов играет решающую роль). Также рекуррентный анализ применим для любых типов сигналов, а значит, возможно использовать один и тот же метод и для обработки ЭЭГ и для анализа ЭКГ-данных, полученных во время одной записи. Если схожий простой способ маркировки стадий сна будет выявлен и для данных, полученных из анализа данных ЭКГ, это сильно упростит возможную диагностику нарушений сна, так как запись ЭКГ-сигнала осуществить значительно проще и дешевле, что очень важно для приборов персонализированной медицины.

К недостаткам метода относится невозможность разделения между собой стадий 1 и 2, а также 3 и 4. Более того, в рамках приведенного алгоритма нет возможности выделить случаи пробуждения, которые очень важны для оценки качества сна. Также важным моментом является выбор правил для определения значений RR^1 и RR^2 , так как необходимо для большей точности метода определять их каждый раз не только для нового испытуемого, но и для каждой его полисомнографической записи. Однако, по понятным причинам, это невозможно в случае использования метода в практических целях для разметки стадий сна. Конкретные значения (0.3 и 0.4) рекуррентных параметров были выбраны по имеющейся подборке полисомнографических записей с гипнограммами, размеченными специалистами, таким образом, чтобы ошибки в определении стадий сна были минимальны. Однако уверенности в том, что данные значения рекуррентных параметров являются универсальными, нет.

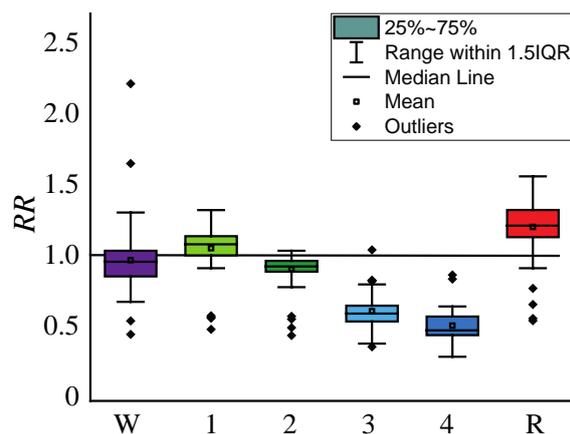


Рис. 2. Статистические закономерности испытуемых для различных стадий сна (цвет онлайн)

Fig. 2. Statistical patterns of subjects for different stages of sleep (color online)

2. Результаты

Для оценки точности метода разметки стадий сна с использованием рекуррентного анализа были использованы данные условно здоровых испытуемых (14 человек), пациентов с болезнью Паркинсона (8 человек) и пациентов с апноэ (10 человек). Точность метода рассчитывалась как отношение числа 30-секундных интервалов, для которых стадия сна определена правильно (по оценке специалиста-сомнолога) к общему числу 30-секундных интервалов в записи. Результаты применения метода на группах испытуемых продемонстрированы в Таблице.

Значения средней точности метода для различных групп испытуемых приняли следующий вид: 72.46% для условно здоровых испытуемых, 67.81% для пациентов с болезнью Паркинсона

Таблица. Точность применения метода разметки стадий сна для трех групп испытуемых с использованием рекуррентного анализа по отношению к гипнограммам, размеченным специалистами

Table. Accuracy of applying the method of marking sleep stages for three groups of subjects using recurrent analysis in relation to hypnograms marked by specialists

№ Group 1	Method accuracy	№ Group 2	Method accuracy	№ Group 3	Method accuracy
1	80.37578288	1	53.49753695	1	63.26742976
2	68.53002070	2	71.57652474	2	89.11088911
3	60.24973985	3	78.33333333	3	92.86442406
4	81.89386056	4	69.50053135	4	79.44214876
5	73.34004024	5	66.88034188	5	74.49392713
6	74.90974729	6	64.94192186	6	83.95061728
7	86.90344062	7	72.40356083	7	80.55842813
8	66.55092593	8	58.21138211	8	70.81632653
9	78.76923077			9	70.67209776
10	75.74819401			10	75.39370079
11	61.87500000				
12	60.81081081				
13	80.74921956				
14	58.49843587				

и 77.902% для пациентов с апноэ. Результаты по точности не являются идеальными, но демонстрируют хороший потенциал для последующей модификации данного метода. Стоит отметить, что наилучшие результаты получены для пациентов с апноэ. Это означает, что для них усредненные характеристики повторения динамики сигналов ЭЭГ различных испытуемых наиболее близки. Для пациентов с болезнью Паркинсона, напротив, точность ниже всего, что говорит об очень большой неустойчивости повторений динамики во время сна.

Заключение

В рамках настоящей работы представлен метод разметки стадий сна, основанный на анализе значений рекуррентных показателей, рассчитанных во временных окнах для полисомнографических записей ЭЭГ. Метод был апробирован на трех группах испытуемых: условно здоровых, пациентах с болезнью Паркинсона и пациентах с ночным апноэ. Метод позволяет проводить быструю разметку и строить гипнограмму, выделяя медленные (1–2 и 3–4) и быстрые (БДГ) стадии сна. Средняя точность метода превышает 72.5%. Полученная точность представляется достаточно хорошим результатом по сравнению с существующими методами автоматической разметки стадий сна, например в [2] точность колеблется в зависимости от числа выделяемых стадий от 65 до 80 процентов. А в работе [8] с использованием нейронных сетей точность немного превышает 80 процентов. Однако необходимо отметить, что предлагаемый в работе метод существенно проще в реализации. Затраченное на построение гипнограммы время редко упоминается в статьях, но с учетом простоты расчета рекуррентных показателей, скорее всего, оно выше, чем для предлагаемого метода. А с учетом длительности полисомнографических записей простота и скорость вычисления становится важным фактором для выбора метода распознавания стадий сна.

Необходимо отметить, что точность метода для условно здоровых испытуемых совпадает со средней по трем группам, для пациентов с болезнью Паркинсона точность метода ниже средней, а для пациентов со случаями ночного апноэ, напротив, выше средней. Данный эффект, скорее всего, связан с тем, что средний разброс рекуррентного показателя для пациентов с болезнью Паркинсона выше, а для пациентов с апноэ ниже, чем для условно здоровых испытуемых.

References

1. Ebrahimi F, Alizadeh I. Automatic sleep staging by cardiorespiratory signals: a systematic review. *Sleep and Breathing*. 2002;26(2):965–981. DOI: 10.1007/s11325-021-02435-8.
2. Mikkelsen KB, Villadsen DB, Otto M, Kidmose P. Automatic sleep staging using ear-EEG. *BioMedical Engineering OnLine*. 2017;16(1):111. DOI: 10.1186/s12938-017-0400-5.
3. Parro VC, Valdo L. Sleep-wake detection using recurrence quantification analysis. *Chaos*. 2018;28(8):085706. DOI: 10.1063/1.5024692.
4. Acharya UR, Sree SV, Swapna G, Martis RJ, Suri JS. Automated EEG analysis of epilepsy: A review. *Knowledge-Based Systems*. 2013;45:147–165. DOI: 10.1016/j.knosys.2013.02.014.
5. Acharya UR, Sree SV, Chattopadhyay S, Yu W, Ang PCA. Application of recurrence quantification analysis for the automated identification of epileptic EEG signals. *International Journal of Neural Systems*. 2011;21(3):199–211. DOI: 10.1142/S0129065711002808.
6. Eckmann JP, Kamphorst SO, Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*. 1987;4(9):973–977. DOI: 10.1209/0295-5075/4/9/004.
7. Ramos AMT, Builes-Jaramillo A, Poveda G, Goswami B, Macau EEN, Kurths J, Marwan N. Recurrence measure of conditional dependence and applications. *Phys. Rev. E*. 2017;95(5):052206. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.052206.
8. Zhu L, Wang C, He Z, Zhang Y. A lightweight automatic sleep staging method for children using single-channel EEG based on edge artificial intelligence. *World Wide Web*. 2022;25(5):1883–1903. DOI: 10.1007/s11280-021-00983-3.



Емельянова Елизавета Петровна — окончила СГУ в 2022 году по направлению «Прикладные математика и физика». Область научных интересов — междисциплинарное направление нейронауки, включающее в себя анализ сложных нелинейных сигналов различной биомедицинской природы и разработка новых методов и подходов к анализу таких сигналов.

Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: meretari@ya.ru
ORCID: 0000-0001-5535-8921
AuthorID (eLibrary.Ru): 1153331



Сельский Антон Олегович — окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2011). Кандидат физико-математических наук (2014). Доцент кафедры «Физика открытых систем» СГУ (с 2017). Область научных интересов — междисциплинарное направление нейронауки, включающее в себя анализ сложных сигналов различной биомедицинской природы и разработка новых методов и подходов к анализу таких сигналов.

Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: selskiiao@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3175-895X
AuthorID (eLibrary.Ru): 643422



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003063
EDN: SOMZPJ

Колебательные характеристики в электрической активности головного мозга новорожденных и их корреляция с различным возрастом гестации

М. О. Журавлев^{1,2}✉, А. С. Акимова¹, О. С. Панина², А. Р. Киселев³

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского, Россия

³Национальный медицинский исследовательский центр терапии и профилактической медицины, Москва, Россия

E-mail: ✉ZhuravlevMO@gmail.com, superlesenok@inbox.ru, Olga.panina.74@mail.ru, antonkis@list.ru

Поступила в редакцию 22.05.2023, принята к публикации 19.08.2023,

опубликована онлайн 19.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования — детекция характерных особенностей колебательной электрической активности головного мозга в раннем постнатальном развитии в зависимости от гестационного возраста новорожденных. **Методы.** Исследование основано на автоматической обработке клинических материалов электроэнцефалографии новорожденных на третьи сутки после рождения. По поведенческим характеристикам грубо оценивались поведенческие периоды сна и бодрствования без детекции различных стадий сна и состояний бодрствования. Обработка многоканальных сигналов электроэнцефалографии велась на основе метода модификации непрерывного вейвлетного преобразования (НВП), позволяющего произвести оценки средних характеристик количества, длительности и энергии колебательных компонент (паттернов), развивающихся в различных частотных диапазонах. **Результаты.** Продемонстрирована парадоксальная картина, описывающая состояния сна и бодрствования у слабо недоношенных новорожденных. Для этой группы детей количество и средняя энергии паттернов, детектируемых в частотных диапазонах от 1 до 20 Гц, во время сна ведёт себя отраженным образом по сравнению с детьми, рожденными в обычный срок. В то же время средняя длительность колебательных паттернов сохраняется неизменной. **Заключение.** В первые дни жизни ребенка возможно выявление достоверных отличий в активности головного мозга новорожденных, слабо отличающихся сроком гестации, во время грубых оценок поведенческих состояний сна/бодрствования. Количественные оценки параметров колебательных НВП паттернов перспективны для использования в качестве основы систем автоматической обработки активности головного мозга новорожденных, дополнительных к оценкам амплитудной электроэнцефалографии. Подобные системы могут быть актуальны для поиска ранних признаков аномалий в развитии центральной нервной системы.

Ключевые слова: непрерывный вейвлетный анализ, автоматическое распознавание, колебательные паттерны, активность мозга, сон, новорожденные.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Проект No. 22-22-00517).

Для цитирования: Журавлев М. О., Акимова А. С., Панина О. С., Киселев А. Р. Колебательные характеристики в электрической активности головного мозга новорожденных и их корреляция с различным возрастом гестации // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 650–660. DOI: 10.18500/0869-6632-003063. EDN: SOMZPJ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Oscillatory characteristics in the brain activity of the newborns and their correlation with different gestational ages

M. O. Zhuravlev^{1,2}✉, A. S. Akimova¹, O. S. Panina², A. R. Kiselev³

¹Saratov State University, Russia

²Saratov State Medical University, Russia

³National Medical Research Center for Therapy and Preventive Medicine, Moscow, Russia

E-mail: ✉ZhuravlevMO@gmail.com, superlesenok@inbox.ru, Olga.panina.74@mail.ru, antonkis@list.ru

Received 22.05.2023, accepted 19.08.2023, available online 19.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. The purpose of this study is to detect the characteristic features of the oscillatory electrical activity of the brain in early postnatal development, depending on the gestational age of newborns. **Methods.** The study is based on automatic processing of clinical data from electroencephalography of newborns on the third day after birth. Behavioral characteristics assessed periods of sleep and wakefulness, without a precise division into stages of sleep and various states of wakefulness. The processing of multichannel electroencephalography signals was carried out on the basis of the method of modifying the continuous wavelet transform (CWT), which makes it possible to estimate the average characteristics of the number, duration and energy of oscillatory components (patterns) developing in different frequency ranges. **Results.** A paradoxical picture has been demonstrated describing the state of sleep and wakefulness in weakly preterm infants. For this group of children, the number and average energy of patterns detected in the frequency ranges from 1 to 20 Hz behave in a reflected way during sleep compared to children born at the usual time. At the same time, the average duration of oscillatory patterns remains unchanged. **Conclusion.** In the first days of a child's life, it is possible to detect significant differences in the activity of the brain of newborns with slightly different gestational age during sleep/wake behavioral states. Quantitative estimates of the parameters of oscillatory CWT patterns are promising for use as the basis for systems for automatic processing of neonatal brain activity, additional to amplitude electroencephalography estimates. Such systems may be relevant for the search for early signs of anomalies in the development of the central nervous system.

Keywords: continuous wavelet analysis, automatic recognition, oscillatory patterns, brain activity, sleep, newborns.

Acknowledgements. The study was conducted with the financial support of the Russian Science Foundation (Project No. 22-22-00517).

For citation: Zhuravlev MO, Akimova AS, Panina OS, Kiselev AR. Oscillatory characteristics in the brain activity of the newborns and their correlation with different gestational ages. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(5): 650–660. DOI: 10.18500/0869-6632-003063

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Сегодня проблема исследования сна человека стоит в ряду наиболее важных тем, объединяющих нейрочёных, физиологов, физиков и специалистов в области информационных технологий [1–3]. Особую роль играет понимание закономерностей изменения функционирования головного мозга при переходе от сна к бодрствованию в самом начале онтогенеза, первые дни жизни человека. Наиболее часто для анализа активности головного мозга используется запись электроэнцефалографии (ЭЭГ), что связано с простотой её регистрации. Фундаментальный интерес к проблеме развития человеческого мозга дополняется необходимостью решения гуманистических задач раннего выявления рисков травм центральной нервной системы (ЦНС) и соответствующего проведения лечебных мероприятий для коррекции неврологических дисфункций.

Сегодня в клинической практике работы с новорожденными анализ ЭЭГ зачастую основан на методе амплитудно-интегрированной ЭЭГ (аЭЭГ), основанном на сжатом одномерном представлении длительной записи двух или более каналов ЭЭГ воедино и позволяющем на базе выявления

типовых трендов быстро и относительно объективно сделать заключение о текущем состоянии церебральной функции и оценить ее динамику. Кроме того, аЭЭГ используется для разработки полностью автоматизированных методов контроля ребенка, например, при оценке созревания мозга [4, 5] и классификации состояний сна [6, 7]. В то же время, использование аЭЭГ, очевидно, является существенным упрощением процессов активности головного мозга, сокращающим всю сложную многочастотную распределенную колебательную динамику электрических потенциалов до усредненной характеристики, получаемой от пространственно распределенных электродных точек. Таким образом, хотя для критических и судорожных состояний недоношенных новорожденных довольно успешно выделены характерные тренды аЭЭГ, маркеры нормальных или слабо патологических процессов развития электрической активности головного мозга в ближайшем периоде после рождения у доношенных и слабо недоношенных детей остаются неизвестными.

Ранее, в работе [8] коллективом оценивались появление и динамика в течение первых недель жизни маркеров глубокого сна у новорожденных различного срока гестации с точки зрения классического частотно-временного анализа на базе непрерывного вейвлетного преобразования (НВП). Использование классического подхода к оценке колебательной динамики ЭЭГ предоставляет значительный объём информации для объективной оценки развития глубокого сна новорожденных, но требует выполнения тщательной предварительной детекции стадий спокойного и активного сна [9–11], что весьма трудоёмко и не всегда осуществимо. В данной работе мы предлагаем использование метода осцилляторных НВП паттернов для исследования ЭЭГ активности новорожденных на основе простой поведенческой оценки состояния ребенка — сон или бодрствование. Изучение количества, длительности и энергии колебательных компонент позволяет наблюдать достоверно отличающиеся характеристики активности головного мозга новорожденных с разным сроком гестации. Использование таких методов может быть перспективно для создания автоматических систем поддержки врачебных решений с целью раннего выявления повреждений развития ЦНС новорожденных.

1. Материалы и методы

1.1. Клинические материалы. Сбор клинических материалов проводился с соблюдением всех этических норм [12], клиническое исследование было одобрено локальным Комитетом по Этике СГМУ имени В. И. Разумовского Минздрава России. Перед началом исследования было получено письменное согласие родителей на проведение мониторинга, последующую математическую обработку данных и публикацию результатов. Сбор материала осуществлен у 28 доношенных и поздних недоношенных новорожденных со сроком гестации более 34 недель. Для всех новорожденных масса тела при рождении превышала 1.5 кг, роды проходили естественно, исключая случаи кесаревых сечений. Также были исключены дети с наличием тяжелой генетической патологии, диагностированным травматическим поражением ЦНС, внутрижелудочковыми кровотечениями 3 степени с прорывом в вещество мозга. Все новорожденные были разделены на группы # 1 ($N_1 = 15$) и # 2 ($N_2 = 13$) со сроками гестации 38–41 и 34–36 недель, соответственно.

Каждый ребенок прошёл поверхностную и безболезненную процедуру функционального мониторинга через 48–52 часа после рождения. Два затылочных ЭЭГ сигнала O1, O2 регистрировались с помощью электроэнцефалографа «Энцефалан-ЭЭГР-19/26» («Медиком МТД», РФ) с частотой дискретизации 250 Гц согласно схеме «10–20». Сигналы ЭЭГ фильтровались полосовым фильтром с точками отсечки 1–20 Гц. Длительность мониторинга составила 160–180 минут, и вся продолжительность была разделена на две стадии — бодрствование и сон — в соответствии с активностью ребенка согласно оценке неонатолога.

1.2. Нелинейные методы обработки биомедицинских сигналов. Для изучения частотно-временных характеристик электроэнцефалографии был использован метод колебательных паттернов, основанный на классическом НВП, разработанный и апробированный ранее в работах [13, 14]. НВП $W(f, t)$ рассчитывалось для каждого канала ЭЭГ $x(t)$ на основе морле-базиса с параметром $\Omega_0 = 2\pi$:

$$W(f, t) = \sqrt{f} \cdot \int_{t-4/f}^{t+4/f} x(t) \cdot \left(\sqrt{f} \cdot \pi^{1/4} \cdot e^{j\omega_0 f(t-t_0)} \cdot e^{\frac{f(t-t_0)^2}{2}} \right) \cdot dt. \quad (1)$$

(1) Для каждого канала ЭЭГ рассчитывалась мощность энергии $E(f, t)$ для диапазона частот [1; 20] Гц, согласно

$$E(f, t) = W(f, t)^2. \quad (2)$$

(2) Производилась процедура классического скелетонного метода [15, 16], согласно которому для каждого момента времени t_s можно выделить множество m_s точек f_1, \dots, f_{m_s} , в которых функция $E(f_s, t_s)$ (2) демонстрирует локальные максимумы. В результате обработки всей поверхности $E(f, t)$ в определённом диапазоне частот на протяжении всего временного интервала $[t_0; t_{\text{end}}]$ регистрации сигнала $x(t)$ формируется многомерный массив скелетонов

$$\text{extr}(E(f, t)) = \{(t_0; f_1; E(f_1, t_0)), (t_0; f_2; E(f_2, t_0)), \dots, (t_0; f_{m_0}; E(f_{m_0}, t_0)), \dots, \\ \dots, (t_s; f_{m_s}; E(f_{m_s}, t_s)), \dots, (t_{\text{end}}; f_{m_{\text{end}}}; E(f_{m_{\text{end}}}, t_{\text{end}}))\}. \quad (3)$$

Для каждого момента времени t_s порядковый номер $\{1, \dots, m_s\}$ скелетонов характеризует только порядковый номер экстремумов, который не связан с величиной амплитуды $E(f, t)$. Однако информация о величине колебательной энергии E сохраняется в массиве $\text{extr}(E(f, t))$ (3) для каждой точки поверхности (t, f) . Метод оценки колебательных паттернов основан на особой сортировке массивов данных скелетонов $\text{extr}(E(f, t))$ (3).

(3) На каждом шаге по времени $[t_n; t_{n+1}]$ для каждой частоты f_j проверялось условие

$$|f_j^n - f_j^{n+1}| < \sigma, \quad (4)$$

где f_j^n — это множество частот, в которых существуют локальные максимумы $E(f_j, t_n)$ на временном шаге t_n ; f_j^{n+1} — частоты, в которых на следующем временном шаге t_{n+1} реализуются максимумы $E(f_j, t_{n+1})$; σ — константа. Выбор порогового значения константы σ производился с целью минимизации потери информации о частотных закономерностях, существующих в анализируемом сигнале. Определение конкретной величины σ основывалось на частоте дискретизации исходного ЭЭГ сигнала $x(t)$, превышая данную на 1–2 порядка, и на шаге дискретизации по частоте Δf , используемого при расчетах НВП, согласно [13] $\Delta f < \sigma$. В рамках данной работы значения данных констант были следующими: $\Delta f = 0.1$, $\sigma = 0.4$.

Обозначив частоты $f_{(a1)^n}$ и $f_{(a2)^{n+1}}$ как $(a1)$ и $(a2)$, соответственно, заметим, что если для некоторых частот $(a1)$ и $(a2)$ выполнялось условие (4), то активность на этих частотах на временном интервале $[t_n; t_{n+1}]$ рассматривалась как развитие единого колебательного паттерна во времени. Далее, для частоты $(a2)$ снова проводился анализ данного условия на следующем временном шаге t_{n+2} . Если условие выполняется, то развитие идентифицированного паттерна продолжалось дальше с определенной частотой $(a3)$ на временном шаге t_{n+3} .

Описанные выше действия циклически повторялись до момента, когда условие (4) становилось неверным, вследствие чего идентифицированный колебательный паттерн считался прекратившим свое существование в анализируемом сигнале. Каждый идентифицированный колебательный паттерн P , $P(f, t) = \{(a1), t_n), ((a2), t_{n+1}), \dots, ((am), t_{n+m})\}$, где m — продолжительность существования паттерна, описывался средней частотой f_{md}

$$f_{md} = \sum_{i=1}^m (ai) / m, \quad (5)$$

и длительностью жизни T

$$T = t_{n+m} - t_n = m\Delta t, \quad (6)$$

где Δt — шаг дискретизации анализируемого сигнала. Если длительность жизни T идентифицированного колебательного паттерна P не превышала периода колебания, который соответствует средней частоте f_{md} , то есть выполнялось условие $T < (f_{md})^{-1}$, то такой колебательный паттерн рассматривался как случайная шумовая помеха и/или артефакт численных расчётов и не учитывался при дальнейшем анализе сигнала $x(t)$.

(4) В работе [17] показано, что для идентифицированного колебательного паттерна P можно ввести дополнительный параметр средней энергетической характеристики. Для этого необходимо произвести оценку сохранённой величины энергии $E_{i,j}$ для каждой точки (f_i, t_j) , представляющей часть детектированных паттернов P . В каждый момент времени t_j формировался массив всех величин энергий $\{E_{1,j}, \dots, E_{k,j}, \dots\}$, где k менялось от 1 до r , то есть количества всех частот, наблюдающихся для момента времени t_j на рассчитанной поверхности паттернов P . В массиве $\{E_{1,j}, \dots, E_{k,j}, \dots, E_{r,j}\}$ находилось максимальное значение энергии $E_{max,j}$ и проводилась нормировка:

$$\begin{aligned} \{\langle E_{1,j} \rangle, \dots, \langle E_{k,j} \rangle, \dots, \langle E_{r,j} \rangle\} = \\ = \{E_{1,j} / E_{max,j}, \dots, E_{k,j} / E_{max,j}, \dots, E_{r,j} / E_{max,j}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Нормировка (7) выполнялась отдельно для каждого момента времени, что позволяло при численных расчетах использовать методы параллельных вычислений. Далее, для всех точек $(f, t)_p$, составляющих один паттерн P длительностью m , рассчитывалась средняя энергетическая характеристика E паттерна

$$E = \sum_{p=1}^m \langle E(f, t)_p \rangle / m. \quad (8)$$

Таким образом, каждый колебательный паттерн характеризуется тремя параметрами: средней частотой — f_{md} (соотношение (5)), временем жизни или длительностью — T (соотношение (6)), и средней энергией E (соотношение (8)). На рис. 1 продемонстрирован пример зависимостей от времени t количества N , средних длительности T и энергии E для паттернов, рассчитанных по сигналу ЭЭГ одного из новорожденных во всем частотном диапазоне [1; 20].

Весь частотный диапазон был разделен на 10 интервалов по 2 Гц: $\Delta f_1[1; 2]$, $\Delta f_2[2; 4]$, $\Delta f_3[4; 6]$, $\Delta f_4[6; 8]$, $\Delta f_5[8; 10]$, $\Delta f_6[10; 12]$, $\Delta f_7[12; 14]$, $\Delta f_8[14; 16]$, $\Delta f_9[16; 18]$, $\Delta f_{10}[19; 20]$. Для каждого интервала частот проводилась статистическая оценка характеристик количества N , средней длительности T и энергии E колебательных паттернов, идентифицированных в состояниях сна и бодрствования двух групп новорожденных.

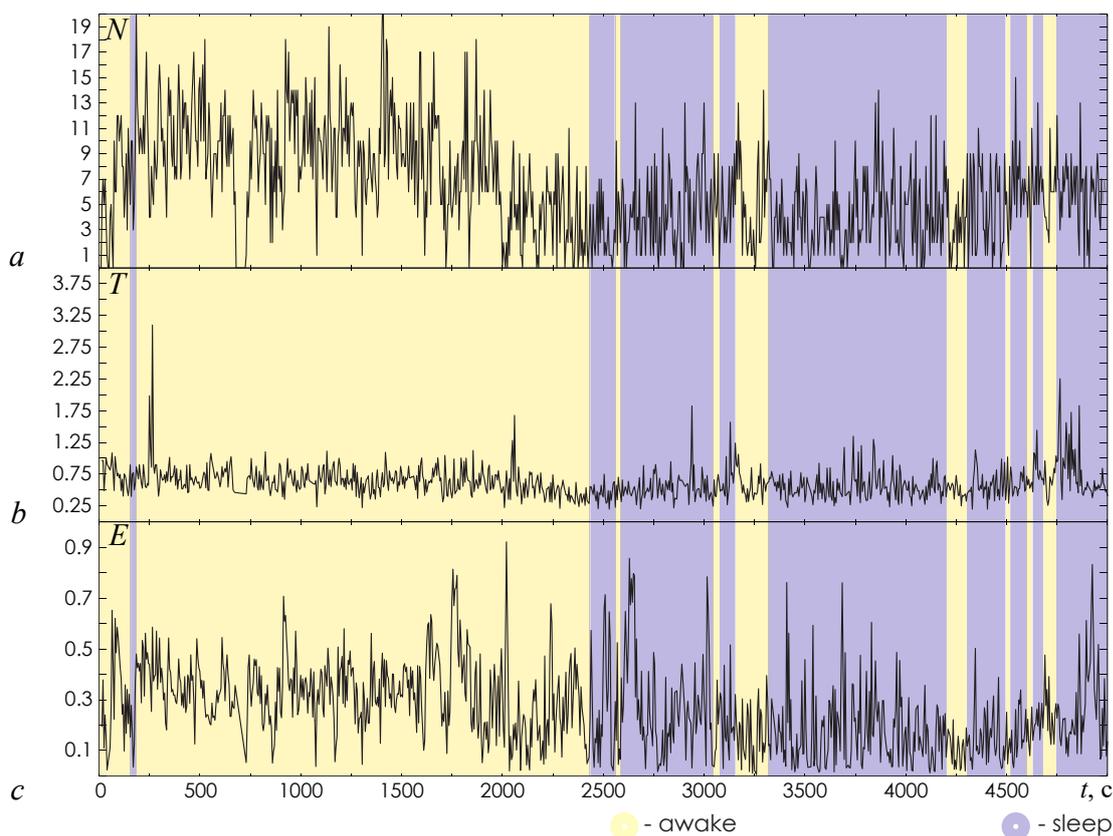


Рис. 1. Зависимости от времени t количества N (a), средних длительности T (b) и энергии E (c) для паттернов, рассчитанных по сигналу ЭЭГ, зарегистрированному в канале O1 при мониторинге ребенка #12 из группы #1. Жёлтым и сиреневым фоном показаны стадии бодрствования и сна, соответственно (цвет онлайн)

Fig. 1. Dependences on time t of the amount N (a), average duration T (b) and energy E (c) for patterns calculated from the EEG signal registered in the channel O1 when monitoring a baby #12 from group #1. The yellow and purple backgrounds colors correspond the awake and sleep stages, respectively (color online)

2. Результаты

На рис. 2 представлены статистические оценки количественных характеристик N , E и T колебательных НВП паттернов для частотных интервалов $\Delta f_1 - \Delta f_{10}$.

Колебательные характеристики ЭЭГ в состояниях сна и бодрствования у #1 и #2 групп новорожденных существенно различаются. В целом, динамика в левом (O1) и правом (O2) полушариях является весьма схожей, однако более показательной оказывается оценка колебательной структуры в левом полушарии, то есть канала O1 (левый столбец на рис. 2). В то же время сравнение структуры активности во время сна и бодрствования для #1 и #2 групп демонстрирует существенные различия. Для количества N паттернов особенно показательны диапазоны частот Δf_1 и Δf_2 (рис. 2, a, b). Доношенные новорожденные демонстрируют снижение количества паттернов N во время бодрствования и повышение этой характеристики во время сна, а во второй группе происходит обратный процесс — рост количества низкочастотных паттернов во время бодрствования. Энергия в Δf_1 и Δf_2 диапазонах во время бодрствования ребёнка парадоксальным образом превышает таковую во время сна (рис. 2, c, d).

Следующие частотные диапазоны Δf_3 и Δf_4 характеризуются стабильностью характеристик количества и энергии паттернов во время всех состояний группы #1 и бодрствования группы #2.

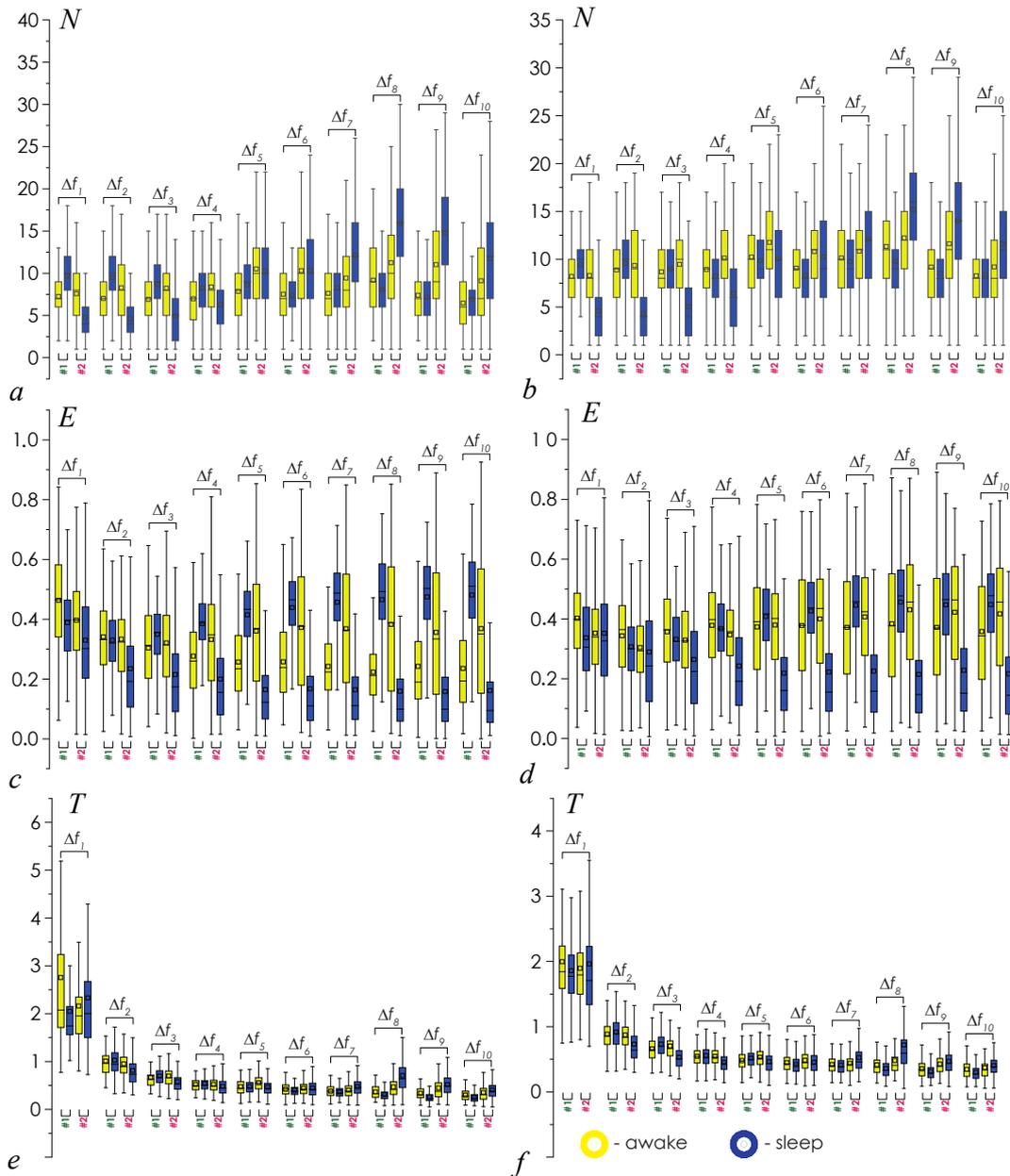


Рис. 2. Статистические диаграммы количества N , длительности T и энергии E НВП паттернов в диапазонах $\Delta f_1 \dots \Delta f_{10}$, оцениваемые по ЭЭГ, зарегистрированным в каналах O1 и O2 у двух групп новорожденных: a и b — оценки N для каналов O2 и O1, записанных в #1 и #2 группах новорожденных, соответственно; c , d , e , f — аналогичные диаграммы T и E . На диаграммах представлены: первый и третий квартили (25–75%, внутри прямоугольника), медиана и среднее (поперечная линия и точка внутри прямоугольника, соответственно), 1.5 межквартильный размах (показан «усами»), и выбросы, представленные звездочками. Жёлтым цветом показаны характеристики для состояния бодрствования, а синим цветом — для состояния сна. Группы новорожденных #1 и #2 показаны на каждой диаграмме и выделены зеленым (группа #1) и красным цветом (группа #2) (цвет онлайн)

Fig. 2. The diagrams of pattern's numbers N , duration T and energy E in ranges $\Delta f_1 \dots \Delta f_{10}$, calculated on EEG channels O1 and O2 for two groups of newborn: a and b — N estimations for O2 and O1 channels recorded in #1 and #2 groups of newborns, respectively; c , d , e , f — similar diagrams for the evaluation of T and E . The diagrams depict the following statistical characteristics of numerical indicators: the first and the third quartiles (25–75 %, inside the box); the median and the mean (transverse line and point inside the box, respectively); 1.5 interquartile range (shown by whiskers); and outliers represented by asterisks. The yellow color shows the characteristics for the waking state, and the blue color for the sleep state. The neonatal groups #1 and #2 are shown in each diagram and highlighted in green (group #1) and red (group #2) (color online)

В то же время состояние сна для слабо недоношенных новорожденных существенно «проседает» по данным характеристикам выделяемых колебательных паттернов. При дальнейшем повышении частоты в левом полушарии (канал O1) сохраняется схожая структура колебательной активности в области энергии E (рис. 2, *c*). Активность мозга во время сна и бодрствования новорожденных #1 группы демонстрируют кластеры внутри облака значений активности мозга во время бодрствования #2 группы слабо недоношенных новорожденных, а ЭЭГ, регистрируемые во время сна для группы #2, демонстрируют значительное снижение энергии колебательных паттернов в диапазоне [4; 20] Гц.

Для наиболее высокочастотных из рассматриваемых интервалов $\Delta f_8 \dots \Delta f_{10}$ снова наблюдается парадоксальная картина. У слабо недоношенных детей количество N колебательных паттернов высоких частот превосходит таковое для бодрствования и, одновременно, существенно больше, чем у новорожденных #1 группы. В то же время, оценка энергии E паттернов демонстрирует противоположные процессы во время сна новорожденных разных групп. В первой группе энергия увеличивается, а во второй — снижается.

Отметим, что оценка продолжительности T паттернов во всех частотных диапазонах не позволяет выделить особенности развития состояний сна и бодрствования новорожденных различных сроков гестации (рис. 2, *e, f*). В некоторой степени перспективным исключением является лишь колебательный диапазон Δf_8 , в котором значительно возрастает средняя длительность детектированных паттернов новорожденных #2 группы во время сна.

Выполненный анализ является детальным отображением нелинейных процессов динамики колебательных компонент с основными частотами, принадлежащими к различным частотным интервалам $\Delta f_1 \dots \Delta f_{10}$. Обычно используемая оценка интегральной энергии НВП, приходящейся на определенный диапазон частот, демонстрирует средние характеристики, не отражающие всех внутренних процессов развития конкретных паттернов.

Заключение

Исследование колебательной структуры затылочной ЭЭГ новорожденных со сроками гестации 38–41 и 34–36 недели продемонстрировало существенные различия в формировании паттернов, детектируемых на основе НВП. Использование разработанной модификации позволило выделить перспективные количественные характеристики паттернов для левого канала O1, а именно среднюю энергию E и количество N паттернов во время поведенческих состояний сна и бодрствования новорожденных в частотных диапазонах $\Delta f_1 \dots \Delta f_{10}$. Дальнейшее развитие этого подхода будет направлено на разработку системы автоматической диагностики изменений характеристик активности головного мозга у доношенных новорожденных в следствие различных патологических процессов родов и/или постнатальных нарушений, а также изучение их влияния на неврологическое развитие ребенка.

Список литературы

1. *Massimini M., Huber R., Ferrarelli F., Hill S., Tononi G.* The sleep slow oscillation as a traveling wave // *J. Neurosci.* 2004. Vol. 24, no. 31. P. 6862–6870. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1318-04.2004.
2. *Габдракипова А. А., Черватюк М. И., Мищенко А. Н.* Сон как маркер здоровья // *European Research.* 2017. № 7(30). С. 69–71.
3. *Loddo G., Calandra-Buonaura G., Sambati L., Giannini G., Cecere A., Cortelli P., Provini F.* The treatment of sleep disorders in Parkinson's disease: From research to clinical practice // *Front. Neurol.* 2017. Vol. 8. P. 42. DOI: 10.3389/fneur.2017.00042.
4. *Stevenson N. J., Oberdorfer L., Koolen N., O'Toole J. M., Werther T., Klebermass-Schrehof K.,*

- Vanhatalo S.* Functional maturation in preterm infants measured by serial recording of cortical activity // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, no. 1. P. 12969. DOI: 10.1038/s41598-017-13537-3.
5. *O'Toole J. M., Boylan G. B., Vanhatalo S., Stevenson N. J.* Estimating functional brain maturity in very and extremely preterm neonates using automated analysis of the electroencephalogram // *Clin. Neurophysiol.* 2016. Vol. 127, no. 8. P. 2910–2918. DOI: 10.1016/j.clinph.2016.02.024.
 6. *Koolen N., Oberdorfer L., Rona Z., Giordano V., Werther T., Klebermass-Schrehof K., Stevenson N., Vanhatalo S.* Automated classification of neonatal sleep states using EEG // *Clin. Neurophysiol.* 2017. Vol. 128, no. 6. P. 1100–1108. DOI: 10.1016/j.clinph.2017.02.025.
 7. *Pillay K., Dereymaeker A., Jansen K., Naulaers G., Van Huffel S., De Vos M.* Automated EEG sleep staging in the term-age baby using a generative modelling approach // *J. Neural Eng.* 2018. Vol. 15, no. 3. P. 036004. DOI: 10.1088/1741-2552/aaab73.
 8. *Kiselev A. R., Drapkina O. M., Novikov M. Y., Panina O. S., Chernenkov Y. V., Zhuravlev M. O., Runnova A. E.* Examining time-frequency mechanisms of full-fledged deep sleep development in newborns of different gestational age in the first days of their postnatal development // *Sci. Rep.* 2022. Vol. 12, no. 1. P. 21593. DOI: 10.1038/s41598-022-26111-3.
 9. *Heraghty J. L., Hilliard T. N., Henderson A. J., Fleming P. J.* The physiology of sleep in infants // *Arch. Dis. Child.* 2008. Vol. 93, no. 11. P. 982–985. DOI: 10.1136/adc.2006.113290.
 10. *Scher M. S., Loparo K. A.* Neonatal EEG/sleep state analyses: a complex phenotype of developmental neural plasticity // *Dev. Neurosci.* 2009. Vol. 31, no. 4. P. 259–275. DOI: 10.1159/000216537.
 11. *Villa M. P., Calcagnini G., Pagani J., Paggi B., Massa F., Ronchetti R.* Effects of sleep stage and age on short-term heart rate variability during sleep in healthy infants and children // *Chest.* 2000. Vol. 117, no. 2. P. 460–466. DOI: 10.1378/chest.117.2.460.
 12. *Anders T. F., Keener M. A., Kraemer H.* Sleep-wake state organization, neonatal assessment and development in premature infants during the first year of life. II // *Sleep.* 1985. Vol. 8, no. 3. P. 193–206. DOI: 10.1093/sleep/8.3.193.
 13. *Runnova A., Zhuravlev M., Ukolov R., Blokhina I., Dubrovski A., Lezhnev N., Sitnikova E., Saranceva E., Kiselev A., Karavaev A., Selskii A., Semyachkina-Glushkovskaya O., Penzel T., Jurgen Kurths J.* Modified wavelet analysis of ECoG-pattern as promising tool for detection of the blood–brain barrier leakage // *Sci. Rep.* 2021. Vol. 11, no. 1. P. 18505. DOI: 10.1038/s41598-021-97427-9.
 14. *Sergeev K., Runnova A., Zhuravlev M., Kolokolov O., Akimova N., Kiselev A., Titova A., Slepnev A., Semenova N., Penzel T.* Wavelet skeletons in sleep EEG-monitoring as biomarkers of early diagnostics of mild cognitive impairment // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 7. P. 073110. DOI: 10.1063/5.0055441.
 15. *Runnova A. E., Zhuravlev M. O., Pysarchik A. N., Khramova M. V., Grubov V. V.* The study of cognitive processes in the brain EEG during the perception of bistable images using wavelet skeleton // In: *Proc. SPIE. Vol. 10063. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics XIV.* 3 March 2017, San Francisco, California, United States. SPIE, 2017. P. 1006319. DOI: 10.1117/12.2250403.
 16. *Maksimenko V. A., Runnova A. E., Zhuravlev M. O., Makarov V. V., Nedayvozov V., Grubov V. V., Pchelintceva S. V., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Visual perception affected by motivation and alertness controlled by a noninvasive brain-computer interface // *PLoS ONE.* 2017. Vol. 12, no. 12. P. e0188700. DOI: 10.1371/journal.pone.0188700.
 17. *Simonyan M., Fisun A., Afanaseva G., Glushkovskaya-Semyachkina O., Blokhina I., Selskii A., Zhuravlev M., Runnova A.* Oscillatory wavelet-patterns in complex data: mutual estimation of frequencies and energy dynamics // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2023. Vol. 232, no. 5. P. 595–603. DOI: 10.1140/epjs/s11734-022-00737-w.

References

1. Massimini M, Huber R, Ferrarelli F, Hill S, Tononi G. The sleep slow oscillation as a traveling wave. *J. Neurosci.* 2004;24(31):6862–6870. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1318-04.2004.
2. Gabdrakipova AA, Chervatyuk MI, Mishchenko AN. Sleep as a marker of health. *European Research.* 2017;(7(30)):69–71 (in Russian).
3. Loddo G, Calandra-Buonaura G, Sambati L, Giannini G, Cecere A, Cortelli P, Provini F. The treatment of sleep disorders in Parkinson's disease: From research to clinical practice. *Front. Neurol.* 2017;8:42. DOI: 10.3389/fneur.2017.00042.
4. Stevenson NJ, Oberdorfer L, Koolen N, O'Toole JM, Werther T, Klebermass-Schrehof K, Vanhatalo S. Functional maturation in preterm infants measured by serial recording of cortical activity. *Sci. Rep.* 2017;7(1):12969. DOI: 10.1038/s41598-017-13537-3.
5. O'Toole JM, Boylan GB, Vanhatalo S, Stevenson NJ. Estimating functional brain maturity in very and extremely preterm neonates using automated analysis of the electroencephalogram. *Clin. Neurophysiol.* 2016;127(8):2910–2918. DOI: 10.1016/j.clinph.2016.02.024.
6. Koolen N, Oberdorfer L, Rona Z, Giordano V, Werther T, Klebermass-Schrehof K, Stevenson N, Vanhatalo S. Automated classification of neonatal sleep states using EEG. *Clin. Neurophysiol.* 2017;128(6):1100–1108. DOI: 10.1016/j.clinph.2017.02.025.
7. Pillay K, Dereymaeker A, Jansen K, Naulaers G, Van Huffel S, De Vos M. Automated EEG sleep staging in the term-age baby using a generative modelling approach. *J. Neural Eng.* 2018;15(3):036004. DOI: 10.1088/1741-2552/aaab73.
8. Kiselev AR, Drapkina OM, Novikov MY, Panina OS, Chernenkov YV, Zhuravlev MO, Runnova AE. Examining time-frequency mechanisms of full-fledged deep sleep development in newborns of different gestational age in the first days of their postnatal development. *Sci. Rep.* 2022;12(1):21593. DOI: 10.1038/s41598-022-26111-3.
9. Heraghty JL, Hilliard TN, Henderson AJ, Fleming PJ. The physiology of sleep in infants. *Arch. Dis. Child.* 2008;93(11):982–985. DOI: 10.1136/adc.2006.113290.
10. Scher MS, Loparo KA. Neonatal EEG/sleep state analyses: a complex phenotype of developmental neural plasticity. *Dev. Neurosci.* 2009;31(4):259–275. DOI: 10.1159/000216537.
11. Villa MP, Calcagnini G, Pagani J, Paggi B, Massa F, Ronchetti R. Effects of sleep stage and age on short-term heart rate variability during sleep in healthy infants and children. *Chest.* 2000;117(2):460–466. DOI: 10.1378/chest.117.2.460.
12. Anders TF, Keener MA, Kraemer H. Sleep-wake state organization, neonatal assessment and development in premature infants during the first year of life. II. *Sleep.* 1985;8(3):193–206. DOI: 10.1093/sleep/8.3.193.
13. Runnova A, Zhuravlev M, Ukolov R, Blokhina I, Dubrovski A, Lezhnev N, Sitnikova E, Saranceva E, Kiselev A, Karavaev A, Selskii A, Semyachkina-Glushkovskaya O, Penzel T, Jurgen Kurths J. Modified wavelet analysis of ECoG-pattern as promising tool for detection of the blood–brain barrier leakage. *Sci. Rep.* 2021;11(1):18505. DOI: 10.1038/s41598-021-97427-9.
14. Sergeev K, Runnova A, Zhuravlev M, Kolokolov O, Akimova N, Kiselev A, Titova A, Slepnev A, Semenova N, Penzel T. Wavelet skeletons in sleep EEG-monitoring as biomarkers of early diagnostics of mild cognitive impairment. *Chaos.* 2021;31(7):073110. DOI: 10.1063/5.0055441.
15. Runnova AE, Zhuravlev MO, Pysarchik AN, Khramova MV, Grubov VV. The study of cognitive processes in the brain EEG during the perception of bistable images using wavelet skeleton. In: *Proc. SPIE. Vol. 10063. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics XIV.* 3 March 2017, San Francisco, California, United States. SPIE; 2017. P. 1006319. DOI: 10.1117/12.2250403.
16. Maksimenko VA, Runnova AE, Zhuravlev MO, Makarov VV, Nedayvozov V, Grubov VV, Pchelintceva SV, Hramov AE, Pisarchik AN. Visual perception affected by motivation and alertness controlled by a noninvasive brain-computer interface. *PLoS ONE.* 2017;12(12):e0188700. DOI: 10.1371/journal.pone.0188700.

17. Simonyan M, Fisun A, Afanaseva G, Glushkovskaya-Semyachkina O, Blokhina I, Selskii A, Zhuravlev M, Runnova A. Oscillatory wavelet-patterns in complex data: mutual estimation of frequencies and energy dynamics. Eur. Phys. J. Spec. Top. 2023;232(5):595–603. DOI: 10.1140/epjs/s11734-022-00737-w.



Журавлев Максим Олегович — окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (2011). Кандидат физико-математических наук (2014). С 2016 года работает на кафедре «Физика открытых систем» СГУ в должности доцента. Область научных интересов — междисциплинарное направление нейронауки, включающее в себя анализ сложных сигналов различной биомедицинской природы и разработка новых методов и подходов к анализу таких сигналов.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ZhuravlevMO@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8620-1609
AuthorID (eLibrary.Ru): 672581



Акимова Аlesia Сергеевна — окончила с отличием бакалавриат факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Радиофизика» (2016) и магистратуру СГУ (2018). С 2015 года работает в СГУ.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: superlesenok@inbox.ru



Панина Ольга Сергеевна — окончила Дальневосточный государственный медицинский университет (1997). Кандидат медицинских наук (2007). Работает доцентом кафедры госпитальной педиатрии и неонатологии Саратовского государственного медицинского университета имени В. И. Разумовского. Область научных интересов — неонатология, ранняя диагностика развития патологических процессов центральной нервной системы новорожденных и разработка методов эффективной доказательной их реабилитации.

Россия, 410012 Саратов, ул. Большая Казачья, 112
Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского
E-mail: Olga.panina.74@mail.ru
ORCID: 0000-0003-3387-4321
AuthorID (eLibrary.Ru): 574646



Киселев Антон Робертович — окончил Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского (2004). Доктор медицинских наук (2011). Руководитель отдела координации фундаментальной научной деятельности Национального медицинского исследовательского центра терапии и профилактической медицины. Член Российского и Европейского кардиологических обществ, обладатель множества наград и премий в области медицины и информационных технологий. Научные интересы — физиология сердечно-сосудистой системы, клиническая кардиология, анализ открытых систем.

Россия, 101990 Москва, Петроверигский пер., 10, стр. 3
Национальный медицинский исследовательский центр
терапии и профилактической медицины
E-mail: antonkis@list.ru
ORCID: 0000-0003-3967-3950
AuthorID (eLibrary.Ru): 156156



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003062
EDN: RUEQPM

Классификация мозговой активности при помощи синоптических сетей

Д. В. Власенко¹✉, А. А. Заикин^{2,3}, Д. Г. Захаров¹

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

²Университетский колледж Лондона, Великобритания

³Первый Московский государственный медицинский университет имени И. М. Сеченова, Россия

E-mail: ✉ vlasenko.daniil.vl@gmail.com, alexey.zaikin@ucl.ac.uk, dzakh76@gmail.com

Поступила в редакцию 17.05.2023, принята к публикации 10.07.2023,

опубликована онлайн 21.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. Поскольку мозг — это чрезвычайно сложная гиперсеть взаимодействующих между собой макроскопических подсетей, проведение полномасштабного анализа его активности представляется труднейшей задачей. Тем не менее эту задачу можно существенно упростить, анализируя соответствие различных паттернов макроскопической активности мозга, например, на снимках функциональной магнитно-резонансной томографии (фМРТ), выполнению тех или иных когнитивных задач или патологическим состояниям. *Цель* данной работы — предложить и протестировать метод представления данных фМРТ в виде графов, которые отражают в себе полезную для последующей классификации информацию о взаимосвязях активности областей мозга. *Методы.* В данной работе исследуется возможность применения синоптических сетей в анализе мозговой активности. В частности, был предложен метод построения графа, вершины которого отражают значения вокселей фМРТ, а ребра и веса ребер отражают взаимосвязи между вокселями фМРТ. *Результаты и Заключение.* На основе классификации фМРТ данных по характеристикам графов была показана эффективность метода на основе синоптических сетей в выявлении и передаче важной для классификации информации при построении графов.

Ключевые слова: когнитивные процессы, функциональная магнитно-резонансная томография, синоптические сети, графы, классификация, машинное обучение.

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ с использованием суперкомпьютерного комплекса НИУ ВШЭ.

Для цитирования: Власенко Д. В., Заикин А. А., Захаров Д. Г. Классификация мозговой активности при помощи синоптических сетей // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 661–669. DOI: 10.18500/0869-6632-003062. EDN: RUEQPM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Classification of brain activity using synolitic networks

D. V. Vlasenko¹✉, A. A. Zaikin^{2,3}, D. G. Zakharov¹

¹National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

²University College London, UK

³Sechenov First Moscow State Medical University, Russia

E-mail: ✉vlasenko.daniil.vl@gmail.com, alexey.zaikin@ucl.ac.uk, dzakh76@gmail.com

Received 17.05.2023, accepted 10.07.2023, available online 21.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. Because the brain is an extremely complex hypernet of interacting macroscopic subnetworks, full-scale analysis of brain activity is a daunting task. Nevertheless, this task can be greatly simplified by analysing the correspondence between various patterns of macroscopic brain activity, for example, through functional magnetic resonance imaging (fMRI) scans, and the performance of particular cognitive tasks or pathological states. The *purpose* of this work is to present and validate a methodology of representing fMRI data in the form of graphs that effectively convey valuable insights into the interconnectedness of brain region activity for subsequent classification purposes. *Methods.* This paper explores the application of synolitic networks in the analysis of brain activity. We propose a method for constructing a graph, the vertices of which reflect fMRI voxels' values, and the edges and edge weights reflect the relationships between fMRI voxels. *Results and Conclusion.* Based on the classification of fMRI data by graph properties, the effectiveness of the method in conveying important information for classification in the construction of graphs was shown.

Keywords: cognitive processes, functional magnetic resonance imaging, synolitic networks, graphs, classification, machine learning.

Acknowledgements. This article is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the National Research University HSE using the supercomputer complex of the National Research University HSE.

For citation: Vlasenko DV, Zaikin AA, Zakharov DG. Classification of brain activity using synolitic networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):661–669. DOI: 10.18500/0869-6632-003062

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Функциональная магнитно-резонансная томография или фМРТ — разновидность магнитно-резонансной томографии, которая проводится с целью измерения изменений в токе крови, вызванных нейронной активностью головного мозга [1]. В основе этого метода лежит предположение, что мозговой кровоток и активность нейронов связаны между собой: при увеличении активности нейронов приток крови к содержащей их области увеличивается, при падении — уменьшается. Таким образом, фМРТ позволяет определить активацию макроскопических областей головного мозга (с примерным линейным размером в несколько миллиметров) во время его функционирования под влиянием различных факторов и при различных патологических состояниях. На сегодняшний день это один из самых используемых инструментов исследования когнитивных процессов в мозге и активно развивающихся и общепринятых методов нейровизуализации (см., например, [2]). Так, при нейровизуализации изображение строится в виде сетки точек (вокселей) в объеме, которое затем преобразуется в свернутое двумерное многообразие в трехмерном пространстве [3], что позволяет отразить активность различных отделов головного мозга.

Поскольку мозг — это чрезвычайно сложная гиперсеть взаимодействующих между собой макроскопических подсетей, проведение полномасштабного анализа его активности представляется труднейшей задачей. Тем не менее эту задачу можно существенно упростить, анализируя соответствие различных паттернов макроскопической активности мозга, например, на снимках фМРТ,

выполнению тех или иных когнитивных задач или патологическим состояниям. В частности, один из действенных методов исследования функциональной роли областей мозга основывается на построении модели классификации между двумя разными режимами мозговой активности и оценки того, как сильно изменяется точность классификации при использовании доступных или недоступных данных об активности конкретной области мозга для модели [4]. При решении подобных задач наиболее эффективными оказываются графовые нейронные сети [4, 5]. Для построения графов таких сетей в вершинах отражают отобранные признаки данных, а веса ребер показывают взаимосвязи между признаками. К настоящему моменту в задачах классификации мозговой активности уже используются методы представления фМРТ данных в виде графов (см., например, работы [4, 6, 7]). Но для отражения взаимосвязей между областями мозга в таких графах используют довольно простые классические методы, например, линейную корреляцию Пирсона или частную корреляцию [4, 7]. Несмотря на то, что эти методы выявляют скоррелированность признаков, такая корреляция, сама по себе, не несет полезной информации для классификации. В этой статье мы предлагаем устранить этот недостаток и доработать методы репрезентации данных. Таким образом, цель нашей работы — предложить и протестировать метод представления фМРТ данных в виде графов, которые отражали бы значимую для последующей классификации информацию о взаимосвязях между областями мозга. Этот метод мы назвали синолитическим, так как он был вдохновлен синолитическими сетями, позволяющими применять методы анализа графов к многомерным сложным данным [8]. Здесь мы рассматриваем простейший случай, при котором будем различать только два режима мозга, или другими словами, когда стоит задача бинарной классификации. Такая классификация может проводиться как на основе характеристик [6] графов, так и на основе их топологии [4]. В этой работе мы концентрируемся на классификации на основе характеристик графов.

1. Методы

1.1. Векторизация фМРТ данных. Результатом сканирования мозга испытуемого, после предварительной обработки данных, является состоящее из вокселей объемное трехмерное изображение, изменяющееся во времени. Воксель — элемент объемного растрового изображения, аналог пикселя в двухмерном изображении. Значение вокселя фМРТ в конкретный момент времени отражает объем крови (уровень оксигенации) в данной области мозга.

Множество данных фМРТ будем обозначать Ω , а множество режимов мозговой активности — $\Sigma = \{I, II\}$. Пусть $(\Omega, \tilde{\Sigma}) = \{(\omega_n, \sigma_n)\}_n$ — конечная выборка из (Ω, Σ) , необходимая для построения и обучения метода. Представим снимок фМРТ $\omega \in \Omega$ в памяти компьютера как четырехмерный массив a действительных неотрицательных чисел, где первые три индекса x, y, z фиксируют положение вокселя фМРТ, а четвертый индекс t фиксирует время. Таким образом, через a_{xyzt} обозначается воксель с индексами x, y, z в момент времени t , а через a_{xyz} — все значения вокселя с индексами x, y, z . Далее, в случае необходимости индексации вокселей одним числом, полагаем, что все воксели в пространстве проиндексированы в порядке их представления в изображении.

1.2. Метод представления фМРТ данных в виде графа. Каждая вершина в графе отражает воксель в фМРТ данных, ребра между вершинами и веса ребер отражают взаимосвязи между вокселями. На основе массива a построим граф $g = (V, E, R, W)$, где $V = \{v_i\}_i$ — множество вершин, $E = \{e_{ij}\}_{ij}$ — множество неориентированных ребер, $R = \{r_i\}_i$ — множество значений вершин, $W = \{w_{ij}\}_{ij}$ — множество весов ребер, v_i — вершина, отражающая воксель i , e_{ij} — ребро, отражающее связь между вокселями i и j , r_i — значение вершины v_i , w_{ij} — вес ребра e_{ij} .

Как было сказано выше, вершина v_i соответствует вокселю i , и у нее есть значение r_i . Фактически, в нашем случае, воксель i — это временной ряд с множеством значений. Для вычисления r_i в методе используется статистика T , которая преобразовывает все значения вокселя в одно число. Таким образом, можно ввести новый трехмерный массив $a^T = T(a)$, то есть для $\forall x, y, z$ $a_{xyz}^T = T(a_{xyz})$. Значения массива a^T и используются в качестве значений вершин R . Сама статистика T выбирается исходя из результатов тестирования метода. Например, это может быть среднее значение временного ряда или разница квантилей разного уровня.

Поскольку веса ребер отражают взаимосвязи между вокселями при разных режимах работы мозга, одной из наиболее важных задач является метод вычисления значения весов ребер W . Определим w_{ij} как

$$w_{ij} = P(\sigma = II|r_i, r_j) - P(\sigma = I|r_i, r_j). \quad (1)$$

Другими словами, вес ребра w_{ij} равен разнице вероятностей режимов работы мозга при условии значений инцидентных ребру вершин. При этом веса ребер могут принимать значения только от -1 до 1 . Соответственно, если вес ребра — отрицательный ($w_{ij} < 0$), то ребро e_{ij} несет в себе информацию о том, что наиболее вероятным является режим мозга I. Если вес ребра — положительный ($w_{ij} > 0$), то данное ребро несет в себе информацию о том, что наиболее вероятным является режим II. Чем больше абсолютное значение веса ребра $|w_{ij}|$, тем больше информации для классификации несет в себе ребро e_{ij} . Соответственно, чем ближе к нулю абсолютное значение веса ребра $|w_{ij}|$, тем меньше информации оно несет.

На практике для вычисления таких вероятностей мы будем использовать вероятностные классификаторы $Cl_{ij} : \{\sigma|(r_i, r_j), \{(r_i^n, r_j^n)\}_n, \{\sigma_n\}_n\} \rightarrow [0, 1]$, которые обучаются на имеющейся выборке $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma})$. Перепишем формулу (1) так:

$$w_{ij} = Cl_{ij}(\sigma = II|(r_i, r_j), \{(r_i^n, r_j^n)\}_n, \{\sigma_n\}_n) - Cl_{ij}(\sigma = I|(r_i, r_j), \{(r_i^n, r_j^n)\}_n, \{\sigma_n\}_n). \quad (2)$$

Таким образом, для каждого ребра e_{ij} требуется обучить свой вероятностный классификатор Cl_{ij} для последующего вычисления весов ребер W . Выбор типа классификаторов $\{Cl_{ij}\}_{ij}$ мы обсуждаем в разделе 2.2.

1.2.1. Топология графа. Выбрав метод вычисления значений вершин R и значений весов ребер W , перейдем к описанию топологии графа. Как правило, при построении синоптических сетей строится полный граф, что позволяет учитывать взаимодействия между всеми элементами сети. В случае данных фМРТ вершин в графе оказывается слишком много. Это в свою очередь приводит к большому количеству ребер при построении полного графа, и метод требует огромной вычислительной мощности. Например, при разрешении фМРТ $100 \times 100 \times 100$ вокселей, в полном графе будет $1\,000\,000$ вершин и $499\,999\,500\,000$ ребер. При этом для каждого ребра e_{ij} необходимо обучать свой классификатор Cl_{ij} .

Вместо полного графа мы предлагаем построить граф-сетку, то есть такой граф, в котором ребра связывают соседние воксели. Два вокселя считаются соседними, если у них есть общая сторона, ребро или угол. То есть внутренний воксель (xyz) связан с вокселями из множества $\{(\hat{x}\hat{y}\hat{z}) : \hat{x} \in \{x-1, x, x+1\}, \hat{y} \in \{y-1, y, y+1\}, \hat{z} \in \{z-1, z, z+1\}, (\hat{x}\hat{y}\hat{z}) \neq (xyz)\}$. При такой топологии графа ресурсные затраты сокращаются с $O(n^2)$ до $O(n)$, где n — число вокселей.

Поскольку в фМРТ изображается не только мозг, но и пространство вокруг головы испытуемого, следует удалить из графа ребра, которые инцидентны с вершинами, значения которых ниже порогового значения r . Такие ребра не несут полезной информации для классификации, так как связаны с вершинами, ассоциированными с вокселями, находящимися вне мозга. Также из

графа следует удалить ребра, абсолютное значение веса которых ниже порогового значения w . Ребра, в которых $|w| \approx 0$, могут появиться только в двух случаях. В первом случае они могут быть связаны с вершинами, ассоциированными с вокселями, которые неактивны ни в одном из двух режимов мозговой активности. Во втором — они могут быть связаны с вершинами, ассоциированными с вокселями, которые в равной степени принимают участие в работе мозга в обоих режимах, поэтому связывающие их ребра не несут полезной информации для классификации. Таким образом, из графа g удаляются ребра из множества $\{e_{ij} : r_i < r | r_j < r | |w_{ij}| < w\}_{ij}$. Параметр r выбирается исходя из того, какое значение аппарат фМРТ присваивает вокселям вне мозга. Как правило, это положительное близкое к нулю число. Параметр w влияет на значимость ребер, которые остаются в графе g . Чем больше w , тем больше ребер будет удалено.

В результате этих процедур у каждого внутреннего вокселя остается не более 26 соседей. Соответственно степени вершин в графе не больше 26.

1.3. Классификация на основе характеристик графа. После построения графа g вычисляются его характеристики $\{f_u\}_u = \{F_u(g)\}_u$. Таким образом, от графа остается последовательность чисел $\{f_u\}_u$. В качестве характеристик графа $\{F_u(g)\}_u$ могут выступать среднее весов ребер, дисперсия весов ребер, количество компонент связности и так далее. На основе характеристик $\{f_u\}_u$ происходит итоговая классификация фМРТ данных ω с помощью классификатора Cl , который был обучен на выборке $\{\{f_u^n\}_u\}_n$.

Характеристики $\{F_u(g)\}_u$ выбираются по результатам работы метода на тренировочной выборке. Выбор характеристик $\{F_u(g)\}_u$ и типа классификатора Cl мы обсудим в разделе 2.2.

2. Результаты

2.1. Данные. Метод был протестирован на данных исследования [9], при котором данные фМРТ регистрировались во время просмотра испытуемыми изображений объектов (эксперимент с наблюдением) или воображения объектов с закрытыми глазами (эксперимент с воображением). В эксперименте с наблюдением использовались 1200 изображений из 150 категорий объектов (по 8 изображений на каждую категорию). Каждое изображение демонстрировалось испытуемому один раз. Для каждого испытуемого было проведено 24 цикла фМРТ сканирования. Все изображения были взяты из ImageNet (<http://www.image-net.org>, выпуск осень 2011), крупномасштабной базы данных изображений. Во время эксперимента с наблюдением испытуемые выполняли задание на повторение изображения в обратном порядке (по 5 попыток в каждом цикле), демонстрировалось 55 изображений в цикле. В эксперименте с воображением испытуемые должны были визуально представлять последовательность из 25 объектов. Каждый объект принадлежал одной из 50 категорий. Для каждого испытуемого было проведено 20 циклов фМРТ сканирования.

Фактически, в рамках данного эксперимента можно выделить два режима, в которых функционирует мозг испытуемого. Первый режим наблюдается, когда испытуемому последовательно показывают 55 блоков, 50 из которых — это различные между собой изображения, 5 — повторяют предшествующую картинку. Если испытуемый видит повторную картинку, он должен нажать на кнопку. Во втором режиме мозг испытуемого находится, когда его просят последовательно представить 25 объектов. После представления каждого объекта испытуемого просят оценить по пятибалльной шкале степень ясности образа, который он представил, с помощью нажатия соответствующих кнопок. В рамках данной работы мы оцениваем эффективность нашего метода по классификации двух режимов мозга по фМРТ: при эксперименте с наблюдением и эксперименте с воображением.

Таблица 1. Выборка, разделение на тренировочную и тестовую части. Режим зрительного восприятия обозначен как «seen», режим представления — как «imagined»
 Table 1. Sample, division into training and test parts. The visual mode is marked as “seen”, the imagined mode is marked as “imagined”

	seen		imagined		
	training	test	training	test	
sub-01	17	7	14	6	44
sub-02	17	7	14	6	44
sub-03	17	7	14	6	44
sub-04	17	7	14	6	44
sub-05	16	8	14	6	44
	84	36	70	30	220
	120		100		

В сборе данных участвовало 5 испытуемых, у каждого было просканировано в разные дни 44 фМРТ в двух режимах, из которых 24 в режиме зрительного восприятия и 20 в режиме представления. Последовательности изображений и объектов у одного и того же испытуемого были различны между собой. Выборка была разделена таким образом, что 30% выборки каждого режима для каждого индивида попадает в тестовую часть и 70% в обучающую. В табл. 1 представлена информация о выборке фМРТ и о ее разделении на тестовую и обучающую части.

Особенностью данных является то, что они получены для 5 испытуемых, и для каждого из них они разбиты на тестовую и тренировочную части. Такой подход не позволяет утверждать, что эффективность метода была протестирована на независимых данных. Однако он позволяет проверить, возможно ли предсказать поведение человека, на котором метод обучался.

Оригинальный размер вокселя в фМРТ данных был $3 \times 3 \times 3$ мм³, для уменьшения затрат вычислительных ресурсов и сглаживания индивидуальных особенностей строения мозга качество фМРТ данных было понижено до $10 \times 10 \times 10$ мм³.

2.2. Выбор и настройка параметров. В качестве статистики T для вычисления a^T были протестированы следующие статистики: среднее значение временного ряда, медианное значение временного ряда, минимальное значение временного ряда, максимальное значение временного ряда, разница максимального и минимального значений временного ряда, квантиль временного ряда уровня 10%, квантиль временного ряда уровня 90%, разница квантилей временного ряда уровней 90% и 10%. Лучший результат Метода был получен, когда в качестве статистики T выбиралось медианное значение.

В качестве классификаторов $\{Cl_{ij}\}_{ij}$ для подсчета весов ребер W были использованы вероятностные классификаторы из библиотеки scikit-learn [10]. В их основе лежит метод опорных векторов с радиально-базисным ядром со стандартными для этого метода параметрами. Классификатор Cl для итоговой классификации на основе характеристик графов был также взят из библиотеки scikit-learn. Он построен на базе метода опорных векторов с радиально-базисным ядром со стандартными для этого метода параметрами.

В качестве характеристик графов $\{F_u(g)\}_u$ выбраны среднее значение весов ребер, квантиль весов ребер уровня 10%, квантиль весов ребер уровня 90% и стандартное отклонение весов ребер. Графики распределений этих характеристик для всей выборки, когда T — медианное значение вокселя, $r = 1$, $w = 0$, представлены на рис. 1. Как можно заметить, распределения характеристик при разных режимах мозговой активности отличаются друг от друга смещением, что должно привести к успешной классификации.

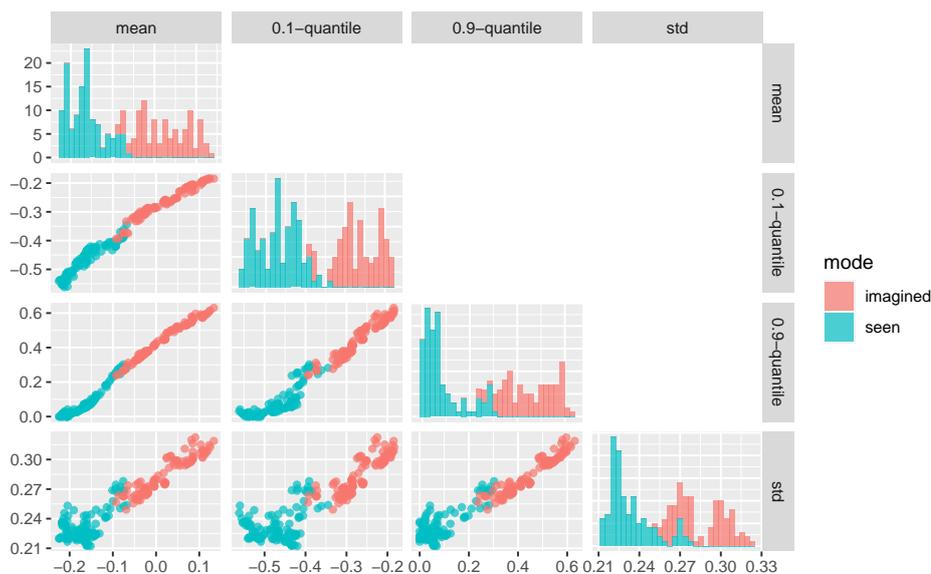


Рис. 1. Распределения характеристик графов для всей выборки фМРТ, когда в качестве статистики T было выбрано медианное значение вокселя ($r = 1, w = 0$). Режим зрительного восприятия обозначен как «seen», режим представления — как «imagined» (цвет онлайн)

Fig. 1. Distributions of the properties of graphs for the entire fMRI sample when T is the median value of voxel ($r = 1, w = 0$). The visual mode is marked as “seen”, the imagined mode is marked as “imagined” (color online)

2.3. Точность классификации. Точность метода при всех описанных выше различных способах вычисления a^T оказалась очень высокой: она не опускалась ниже 90%. Лучший результат классификации был получен, когда статистика T была выбрана как медианное значение временного ряда ($r = 1, w = 0.2$, матрица классификации представлена в табл. 2). В этом случае точность составила 98.5%. Это позволяет рекомендовать данную статистику для использования в последующих исследованиях.

Таблица 2. Матрица классификации для случая, когда в качестве статистики T было выбрано медианное значение вокселя ($r = 1, w = 0.2$). Режим зрительного восприятия обозначен как «seen», режим представления — как «imagined»

Table 2. The classification matrix for the case when the median voxel value was chosen as function T ($r = 1, w = 0.2$). The visual mode is marked as “seen”, the imagined mode is marked as “imagined”

	seen	imagined
seen	36	0
imagined	1	29

Заключение

В данной работе реализован и протестирован метод представления фМРТ данных в виде синоптических графов. Классификация на основе характеристик графа показала высокую точность, из чего можно сделать вывод об эффективности метода в передаче важной для классификации информации при построении графов. Также была продемонстрирована эффективность синоптических сетей в анализе данных о мозге, и предложен новый метод вычисления связности областей мозга, который, в отличие от классических методов подсчета корреляции, несет полезную для последующей классификации информацию. Фактически мы показали, что классификация может проводиться уже на основе одних только весов ребер. Наилучшие результаты были достигнуты при использовании статистики T в виде медианного значения временного ряда.

Дальнейшее развитие метода предполагает предшествующую классификации кластеризацию вокселей и связывание вершин не с вокселями, а с множествами соседних вокселей. Также есть возможность сохранять большее количество информации, которую несет в себе временной ряд a_{xyz} . Для этого в методе предполагается использовать не одну функцию T при вычислении значений вершин R , а множество функций $\{T_k\}_k$. Тогда вершина в графе будет содержать в себе несколько значений, что должно привести к улучшению получаемых результатов.

References

1. Ogawa S, Lee TM, Kay AR, Tank DW. Brain magnetic resonance imaging with contrast dependent on blood oxygenation. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1990;87(24):9868–9872. DOI: 10.1073/pnas.87.24.9868.
2. Singleton MJ. Functional magnetic resonance imaging. Yale J. Biol. Med. 2009;82(4):233.
3. Gao JS, Huth AG, Lescroart MD, Gallant JL. Pycortex: an interactive surface visualizer for fMRI. Frontiers in Neuroinformatics. 2015;9:23. DOI: 10.3389/fninf.2015.00023.
4. Li X, Dvornek NC, Zhou Y, Zhuang J, Ventola P, Duncan JS. Graph neural network for interpreting task-fMRI biomarkers. In: Shen D, Liu T, Peters TM, Staib LH, Essert C, Zhou S, Yap PT, Khan A, editors. Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention – MICCAI 2019. MICCAI 2019. Vol. 11678 of Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer; 2019. P. 485–493. DOI: 10.1007/978-3-030-32254-0_54.
5. Saueressig C, Berkley A, Munbodh R, Singh R. A joint graph and image convolution network for automatic brain tumor segmentation. In: Crimi A, Bakas S, editors. Brainlesion: Glioma, Multiple Sclerosis, Stroke and Traumatic Brain Injuries. BrainLes 2021. Vol. 12962 of Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer; 2022. P. 356–365. DOI: 10.1007/978-3-031-08999-2_30.
6. Anderson A, Cohen MS. Decreased small-world functional network connectivity and clustering across resting state networks in schizophrenia: an fMRI classification tutorial. Frontiers in Human Neuroscience. 2013;7:520. DOI: 10.3389/fnhum.2013.00520.
7. Kim BH, Ye JC. Understanding graph isomorphism network for rs-fMRI functional connectivity analysis. Frontiers in Neuroscience. 2020;14:630. DOI: 10.3389/fnins.2020.00630.
8. Nazarenko T, Whitwell HJ, Blyuss O, Zaikin A. Parenclitic and synolytic networks revisited. Frontiers in Genetics. 2021;12:733783. DOI: 10.3389/fgene.2021.733783.
9. Horikawa T, Kamitani Y. Generic Object Decoding (fMRI on ImageNet) [Electronic resource]. OpenNeuro. 2019. No. ds001246. DOI: 10.18112/openneuro.ds001246.v1.2.1.
10. Pedregosa F, Varoquaux G, Gramfort A, Michel V, Thirion B, Grisel O, Blondel M, Prettenhofer P, Weiss R, Dubourg V, Vanderplas J, Passos A, Cournapeau D, Brucher M, Perrot M, Duchesnay É. Scikit-learn: Machine learning in Python. Journal of Machine Learning Research. 2011;12(85): 2825–2830.



Власенко Даниил Владимирович — родился в Краснодаре (2001). Окончил математико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного университета (2023) по направлению «Прикладная математика и информатика», кафедра статистического моделирования. Стажер-исследователь Центра биоэлектрических интерфейсов НИУ ВШЭ. Научные интересы — анализ данных, статистика, наука о сетях, математическое моделирование, нейронауки.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
Центр биоэлектрических интерфейсов НИУ «Высшая школа экономики»
E-mail: vlasenko.daniil.vl@gmail.com
ORCID: 0009-0002-4867-2896

Заикин Алексей Анатольевич — родился в Москве (1973). С отличием окончил физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова (1995). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по направлениям радиофизика и акустика (1998). Профессор системной медицины и прикладной математики Института женского здоровья и математического факультета Университетского колледжа Лондона (Великобритания), заместитель директора Центра анализа сложных систем Первого Московского государственного медицинского университета имени И. М. Сеченова. Область научных интересов: вычислительная и системная медицина, системная биология, теоретическая биофизика, прикладная математика, статистическая физика, нелинейная динамика и стохастическое моделирование в биологии. Имеет более 160 научных публикаций.

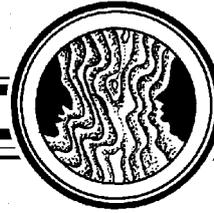


Gower Street London, WC1E 6BT, UK
Institute for Women's Health and Dep. of Mathematics University College London
Россия, 119991 Москва, ул. Трубецкая, д. 8, стр. 2
Центр анализа сложных систем, Первый Московский государственный
медицинский университет имени И. М. Сеченова
E-mail: alexey.zaikin@ucl.ac.uk
ORCID: 0000-0001-7540-1130
AuthorID (eLibrary.Ru): 29322

Захаров Денис Геннадьевич — родился в Нижнем Новгороде (1976), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1999). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по направлению радиофизика (2005). Более 20 лет работал в Институте прикладной физики РАН. В настоящее время является ведущим научным сотрудником Института когнитивных нейронаук НИУ «Высшая школа экономики». Область научных интересов — теория нелинейных колебаний и волн, нелинейная динамика, моделирование активности спайковых нейронных сетей и когнитивных процессов. Имеет более 100 научных публикаций.



Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
Институт когнитивных нейронаук НИУ «Высшая школа экономики»
E-mail: dgzakharov@hse.ru
ORCID: 0000-0003-4367-8965
AuthorID (eLibrary.Ru): 42103



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Персоналии

DOI: 10.18500/0869-6632-003068
EDN: ZKQHQI

Памяти Максима Игоревича Балакина

15 ноября 1988 — 17 сентября 2023

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

Поступила в редакцию 17.09.2023, опубликована 29.09.2023

Для цитирования: Памяти Максима Игоревича Балакина // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 670–671.
DOI: 10.18500/0869-6632-003068. EDN: ZKQHQI

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).



17 сентября 2023 года от нас ушёл Максим Игоревич Балакин, заведующий кафедрой «Радиоэлектроника и телекоммуникации» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. 15 ноября ему исполнилось бы всего 35 лет. Это невосполнимая утрата для коллектива кафедры, Института электронной техники и приборостроения и всего СГТУ в целом.

Максим Игоревич в 2011 году окончил физический факультет СГУ имени Н. Г. Чернышевского по специальности «Радиофизика». Затем обучался в аспирантуре и работал ассистентом на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации». В 2015 году успешно защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» под руководством Астахова В. В. После чего продолжил работу на кафедре уже в роли доцента. В 2020 году возглавил кафедру «Радиоэлектроника и телекоммуникации».



Максим Игоревич обладал фундаментальными знаниями, компетентностью, невероятной работоспособностью, ответственностью. Талантливый ученый, обладатель грантов Российского фонда фундаментальных исследований. Он внес огромный личный вклад в развитие технической науки и подготовку высококвалифицированных специалистов.

Максим Игоревич был уникальным заведующим — все три года, что он руководил кафедрой РТ, он работал на своих подчинённых гораздо больше, чем они на него, подобно Железному дровосеку из сказки Волкова. Как мы помним, Дровосека не раз приходилось чинить, но даже после самых тяжёлых ранений достаточно его было разобрать, смазать машинным маслом и собрать заново. К нашему горю Максима Игоревича так починить не получится. Да, в душе он был железным человеком, все новости воспринимавшим спокойно и выдержанно, но его сердце было самым обычным любящим и волнующимся, а не шёлковым, как в сказке. Сегодня оно не выдержало.

Целеустремленный, добрый и светлый человек, профессионал, навсегда останется в сердцах тех, кто с ним был знаком и работал.

*Сотрудники Института электронной техники
и приборостроения СГТУ имени Гагарина Ю. А.*

Журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» скорбит вместе со всеми, потеряв постоянного талантливого автора, внимательного читателя и безотказного рецензента.

*Сотрудники редакции журнала «Известия вузов.
Прикладная нелинейная динамика»*



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 73498

Оформить подписку на печатную версию можно
в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru)

Журнал выходит 6 раз в год

Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (andjournal.sgu.ru)

Все статьи журнала публикуются на условиях лицензии
CC-BY 4.0 (Creative Commons Attribution 4.0 International
License)

Адрес редакции (редакционно-издательский отдел):

410012 Саратов, ул. Большая Казачья, 112А, ауд. 301

Тел.: +7 (909) 3367208 (зав. редакцией)

E-mail: andjournal@sgu.ru

Website: andjournal.sgu.ru

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

V. A. Vakorin, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Pkovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)



ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >