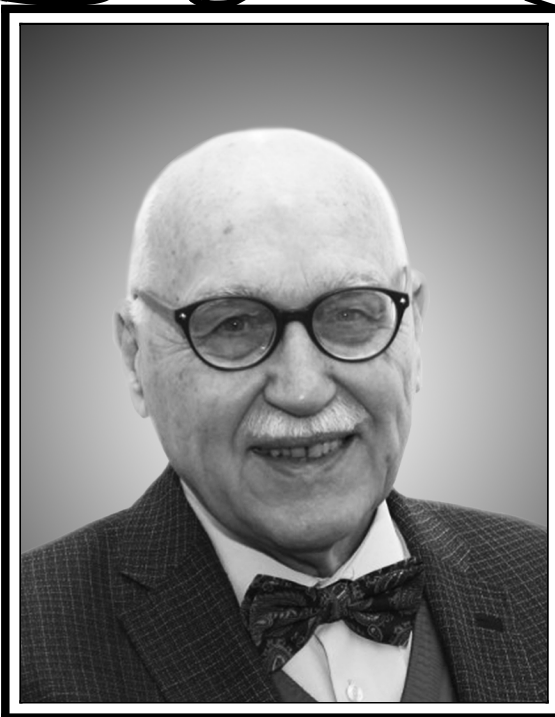


Прикладная Детальная Динамика



2
2024

*80 лет Валерию Викторовичу Тучину
(4 февраля 1944 года)*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. А. Вакорин, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Пиковский, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

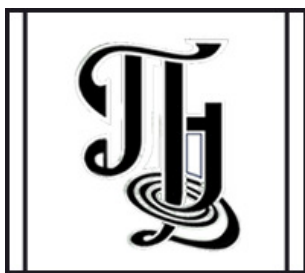
А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Издатель Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

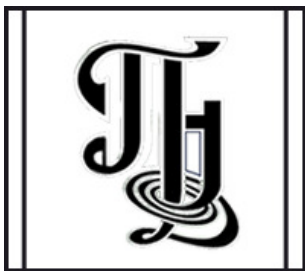
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: А. Р. Нигметулина, А. О. Салахова
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 12.03.2024
Вышел в свет 29.03.2024
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 16,74 (18,0)
Тираж 100 экз. Заказ № 39-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru)

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: A. R. Nigmatulina, A. O. Salakhova
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 12.03.2024. Published 29.03.2024
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 16,74 (18,0)
Edition of 100 copies. Order No. 39-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

<i>Ушаков В. Л.</i> О международной ежегодной научно-технической конференции «Нейроинформатика»	145
---	-----

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

<i>Султанов О. А.</i> Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр–седло.....	147
--	-----

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

<i>Сутягин А. А., Канаков О. И.</i> Механизм обучения коллективного классификатора на основе конкуренции, управляемой обучающими примерами	160
<i>Федотов П. Е., Соколов Н. В.</i> Решение нелинейной задачи одностороннего динамически нагруженного упорного подшипника скольжения	180

НОВое В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

<i>Сенницкий В. Л.</i> Особенности динамики вязкой жидкости со свободной границей при периодических воздействиях.....	197
---	-----

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

<i>Дик О. Е.</i> Анализ синхронизации между временными рядами, полученными от анестезированных крыс во время болевого воздействия	209
<i>Белокопытов А. С., Макарова М. М., Саламатин М. И., Редкозубова О. М.</i> Разработка алгоритма детектирования медленной пик-волновой активности при бессудорожных формах эпилепсии	223
<i>Rybka R. B., Vlasov D. S., Manzhurov A. I., Serenko A. V., Sboev A. G.</i> Spiking neural network with local plasticity and sparse connectivity for audio classification [<i>Рыбка Р. Б., Власов Д. С., Манжуров А. И., Серенко А. В., Сбоев А. Г.</i> Спайковая нейронная сеть с локальной пластичностью и разреженной связью для классификации аудио]	239
<i>Лебедев А. А., Казанцев В. Б., Стасенко С. В.</i> Исследование влияния синаптической пластичности на формирование признакового пространства спайковой нейронной сетью	253
<i>Зеленова В. К.</i> Релейная модель замирающего нейрона	268

C O N T E N T S

EDITORIAL

<i>Ushakov V.L.</i> About the International Annual Scientific and Technical Conference “Neuroinformatics”	145
---	-----

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS. QUANTUM CHAOS

<i>Sultanov O.A.</i> Stochastic stability of an autoresonance model with a center–saddle bifurcation	147
--	-----

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Sutyagin A. A., Kanakov O. I.</i> Learning mechanism for a collective classifier based on competition driven by training examples.....	160
<i>Fedotov P.E., Sokolov N. V.</i> Solving a nonlinear problem for a one-sided dynamically loaded sliding thrust bearing.....	180

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

<i>Sennitskii V.L.</i> Peculiarities of the dynamics of a viscous liquid with a free boundary under periodic influences.....	197
--	-----

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Dick O. E.</i> Synchronization analysis of time series obtained from anesthetized rats during painful action	209
<i>Belokopytov A. S., Makarova M. M., Salamatina M. I., Redkozubova O. M.</i> Development of an algorithm for detecting slow peak-wave activity in non-convulsive forms of epilepsy	223
<i>Rybka R. B., Vlasov D. S., Manzhurov A. I., Serenko A. V., Sboev A. G.</i> Spiking neural network with local plasticity and sparse connectivity for audio classification	239
<i>Lebedev A. A., Kazantsev V. B., Stasenko S. V.</i> Study of the influence of synaptic plasticity on the formation of a feature space by a spiking neural network	253
<i>Zelenova V.K.</i> Relay model of a fading neuron	268



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003101
EDN: RSCOWC

О международной ежегодной научно-технической конференции «Нейроинформатика»

В. Л. Ушаков^{1,2,3}

¹Институт перспективных исследований мозга

Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

³Психиатрическая клиническая больница № 1 им. Н. А. Алексеева

Департамента здравоохранения г. Москвы, Россия

E-mail: ✉ tiuq@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.03.2024, опубликована 29.03.2024

Для цитирования: Ушаков В. Л. О международной ежегодной научно-технической конференции «Нейроинформатика»
// Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 145–146. DOI: 10.18500/0869-6632-003101. EDN: RSCOWC

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Международная конференция «Нейроинформатика» — ежегодный междисциплинарный научный форум, организуемый Российской ассоциацией нейроинформатики (РАСНИ), посвященный теории и применениям искусственных нейронных сетей, проблемам нейробиологии и биофизических систем, искусственному интеллекту, адаптивному поведению и когнитивным исследованиям. Конференция попеременно проходит на базе двух институтов Москвы — Национального исследовательского ядерного университета МИФИ и Национального исследовательского университета МФТИ. В 2023 году проходила юбилейная 25-я конференция «Нейроинформатика». Тематика конференции широка: от теории искусственных нейронных сетей, алгоритмов машинного обучения и эволюционного программирования до нейровизуализации и нейробиологии. Основные темы конференции охватывают теоретические и прикладные исследования в следующих областях: нейробиология и нейробионика — когнитивные исследования, нервная возбудимость, клеточные механизмы, познание и поведение, обучение и память, мотивация и эмоции, биоинформатика, адаптивное поведение и эволюционное моделирование, мозг — компьютерный интерфейс; нейронные сети — нейрокомпьютеры и обучение, нейроморфные вычислительные структуры, биологические основы вычислительной нейробиологии, нейродинамика, нейроинформатика, сети глубокого обучения, нейро-нечеткие системы, гибридные интеллектуальные системы;

машинное обучение — распознавание образов, байесовские сети, методы ядра, генеративные модели, теоретико-информационное обучение, обучение с подкреплением, реляционное обучение, динамические модели, алгоритмы классификации и кластеризации, самоорганизующиеся системы. В рамках конференции проводятся пленарные и секционные заседания, стендовые сессии. Для молодых ученых проводится школа-семинар «Современные проблемы нейроинформатики», основной целью которой является изложение современного состояния и перспектив развития важнейших направлений в теории и практике нейроинформатики и нейробиологии. В последние несколько лет на конференции появился новый тренд — «индустриальный партнер», где специалисты в области нейровычислений/нейроинформатики проводят для молодых ученых мастер-классы по различным приложениям искусственных нейронных сетей и организуют выставку новейших технологических образцов и программного обеспечения по прикладным направлениям: медицина, обработка сигналов, нейроморфные чипы, нейрокомпьютеры, управление, моделирование, робототехника, аппаратная реализация, безопасность, финансы и бизнес, интеллектуальный анализ данных, обработка естественного языка, обработка изображений и компьютерное зрение. На каждой конференции организуется круглый стол по современным проблемам в области нейроинформатики и искусственного интеллекта. В 2023 году он был посвящен актуальной теме «Нейроинформатика сознания». Для молодых ученых организуется конкурс на лучшую научную работу. За прошедшие годы научно-техническая конференция «Нейроинформатика» сложилась как представительный и многоплановый по тематике научный форум, в работе которого принимают участие и известные ученые, и молодые специалисты, аспиранты и студенты. В 2023 году на конференции «Нейроинформатика–2023» было представлено более 140 докладов из более чем 50 организаций. Из них было отобрано несколько работ, по которым подготовлены и опубликованы статьи в данном журнале.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 517.928

DOI: 10.18500/0869-6632-003090
EDN: VEFWUJ

Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр–седло*

О. А. Султанов^{1,2}

¹Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: oasultanov@gmail.com

Поступила в редакцию 10.07.2023, принята к публикации 19.10.2023,
опубликована онлайн 26.01.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Цель настоящего исследования — изучить влияние стохастических возмущений типа белый шум на устойчивость захвата в авторезонанс в осциллирующих системах с переменной амплитудой и частотой накачки, при которых в соответствующей предельной автономной системе имеет место бифуркация центр–седло. Определить зависимость интервалов стохастической устойчивости авторезонанса от интенсивности шума. **Методы.** Существование авторезонансных режимов с растущей амплитудой доказывается путем построения и обоснования асимптотических решений в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами. Устойчивость решений по вероятности относительно шума обосновывается с помощью стохастических функций Ляпунова. **Результаты.** Описаны условия, при которых авторезонансный режим сохраняется и исчезает при прохождении параметров через бифуркационные значения. Найдена зависимость интервалов стохастической устойчивости авторезонанса от степени затухания интенсивности шума. Показано, что для сохранения устойчивости решений при бифуркационных значениях параметров требуются более жесткие ограничения. **Заключение.** На уровне дифференциальных уравнений, описывающих захват в авторезонанс, исследовано влияние затухающих стохастических возмущений на бифуркацию центр–седло. Полученные результаты указывают на возможность использования затухающих осциллирующих возмущений для устойчивого управления нелинейными системами.

Ключевые слова: авторезонанс, асимптотика, устойчивость, бифуркация, стохастическое возмущение.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30002.

Для цитирования: Султанов О. А. Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр–седло // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 147–159. DOI: 10.18500/0869-6632-003090. EDN: VEFWUJ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023».

Stochastic stability of an autoresonance model with a center–saddle bifurcation**O. A. Sultanov*^{1,2}¹Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision
of the Ufa Federal Research Centre of the RAS, Russia²St. Petersburg State University, Russia

E-mail: ✉oasultanov@gmail.com

*Received 10.07.2023, accepted 19.10.2023, available online 26.01.2024,
published 29.03.2024*

Abstract. The purpose of this work is to investigate the effect of stochastic perturbations of the white noise type on the stability of capture into autoresonance in oscillating systems with a variable pumping amplitude and frequency such that a center–saddle bifurcation occurs in the corresponding limiting autonomous system. The another purpose is determine the dependence of the intervals of stochastic stability of the autoresonance on the noise intensity. *Methods.* The existence of autoresonant regimes with increasing amplitude is proved by constructing and justifying asymptotic solutions in the form of power series with constant coefficients. The stability of solutions in terms of probability with respect to noise is substantiated using stochastic Lyapunov functions. *Results.* The conditions are described under which the autoresonant regime is preserved and disappears when the parameters pass through bifurcation values. The dependence of the intervals of stochastic stability of autoresonance on the degree of damping of the noise intensity is found. It is shown that more stringent restrictions are required to preserve the stability of solutions for the bifurcation values of the parameters. *Conclusion.* At the level of differential equations describing capture into autoresonance, the effect of damped stochastic perturbations on the center–saddle bifurcation is studied. The results obtained indicate the possibility of using damped oscillating perturbations for stable control of nonlinear systems.

Keywords: autoresonance, asymptotics, stability, bifurcation, stochastic perturbation.

Acknowledgements. Research is supported by the Russian Science Foundation grant 19-71-30002.

For citation: Sultanov OA. Stochastic stability of an autoresonance model with a center–saddle bifurcation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):147–159. DOI: 10.18500/0869-6632-003090

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В работе рассматривается модельная система дифференциальных уравнений, описывающая захват в авторезонанс в нелинейных осциллирующих системах с малой чирпированной накачкой [1]. Явление авторезонанса, связанное с устойчивой подстройкой фазы системы под фазу накачки и значительным ростом амплитуды колебаний, имеет широкий круг приложений и активно исследуется в последнее время [2]. В работе обсуждается специальный случай, когда амплитуда и частота накачки согласованы таким образом, что при вариации параметров имеет место бифуркация центр–седло для резонансных решений в соответствующей предельной автономной системе. Влияние детерминированных возмущений на такую бифуркацию обсуждалось в [3], где описаны условия, при которых соответствующая бифуркация сохраняется или разрушается. При этом влияние стохастических возмущений не рассматривалось. В настоящей работе исследуются существование и устойчивость авторезонанса относительно стохастических возмущений при прохождении параметров через бифуркационные значения.

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Nonlinear days in Saratov for young scientists – 2023”.

1. Постановка задачи

Рассматривается неавтономная система двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} + \alpha(\tau)\rho &= \beta(\tau) \sin \phi, \\ \left(\frac{d\phi}{d\tau} - \rho^2 + \lambda(\tau) \right) \rho &= \beta(\tau) \cos \phi \end{aligned} \quad (1)$$

с гладкими функциями $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\lambda(\tau)$, определенными при всех $\tau > 0$ и имеющими следующее асимптотическое поведение на бесконечности:

$$\alpha(\tau) \sim \tau^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \tau^{-k}, \quad \beta(\tau) \sim \tau^{b-1} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \tau^{-k}, \quad \lambda(\tau) \sim \tau^{2b} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tau^{-k}, \quad \tau \rightarrow \infty,$$

где $\alpha_k, \beta_k, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_0 = 1$ и $2b \in \mathbb{Z}_+$. Система (1) возникает при изучении явления авторезонанса в широком классе нелинейных осциллирующих систем с малой чирпированной накачкой и слабой диссипацией [1]. Функция $\alpha(\tau)$ связана с диссипацией в системе, $\beta(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ — с амплитудой и частотой возмущения соответственно. Решения системы $\rho(\tau)$ и $\phi(\tau)$ играют роль амплитуды и расстройки фазы нелинейного осциллятора. Интерес представляют решения $\rho(\tau) \rightarrow \infty$ и $\phi(\tau) = \mathcal{O}(1)$ при $\tau \rightarrow \infty$, которые соответствуют синхронизации фазы осциллятора с фазой возмущения и захвату системы в авторезонанс. При этом решения с $\rho(\tau) = \mathcal{O}(1)$ и $|\phi(\tau)| \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$ соответствуют явлению фазового дрейфа и отсутствию авторезонанса. В качестве простейшего примера, приводящего к системе (1), рассмотрим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + U'(x) = -A(t) \frac{dx}{dt} + \tilde{\epsilon} B(t) \cos \Lambda(t), \quad (2)$$

где $A(t) \equiv A_0(1 + \tilde{\epsilon}t)^{-1}$, $B(t) \equiv B_0(1 + \tilde{\epsilon}t)^{b-1}$, $\Lambda(t) \equiv t - \vartheta t^{2b+1}$, $U(x) = x^2/2 - x^4/4 + \mathcal{O}(x^6)$ при $x \rightarrow 0$, $A_0, B_0, \vartheta, \tilde{\epsilon} \in \mathbb{R}_+$. Правая часть уравнения представляет собой возмущение с малыми параметрами $0 < A_0, \tilde{\epsilon} \ll 1$. Заметим, что автономная система, соответствующая (2) с $\tilde{\epsilon} = A_0 = 0$, имеет устойчивое по Ляпунову равновесие $(0, 0)$ типа центр (см., например, [4, §4.1]). При этом решения возмущенного уравнения с $\tilde{\epsilon} \neq 0$, $A_0 \neq 0$ и начальными данными вблизи точки $(0, 0)$, для которых энергия $E(t) \equiv (x'(t))^2/2 + U(x(t))$ значительно увеличивается со временем, а фаза $\Psi(t) = \arctan(x'(t)/x(t))$ подстраивается под фазу возмущения $\Psi(t) - \Lambda(t) = \mathcal{O}(1)$, соответствующие захвату в авторезонанс. Для асимптотического описания таких решений на начальном этапе захвата введем медленную и быструю переменные $\tau = \epsilon B_0 t / (2\kappa)$ и $\zeta = \Lambda(t)$ с $\kappa = (4B_0/3)^{1/3}$. Нетрудно проверить, что подстановка $x(t) = \tilde{\epsilon}^{1/3} \kappa \rho(\tau) \cos(\phi(\tau) - \zeta) + \mathcal{O}(\tilde{\epsilon})$ при $\tilde{\epsilon} \rightarrow 0$ в уравнение (2) и усреднение по быстрой переменной (см., например, [5]) приводят к системе (1) с $\alpha(\tau) \equiv \kappa A(t) B_0^{-1} \tilde{\epsilon}^{-2/3}$, $\beta(\tau) \equiv B(t) B_0^{-1}$ и $\lambda(\tau) \equiv \vartheta(1 + 2b)(2\kappa \tilde{\epsilon}^{-2/3} B_0^{-1})^{2b+1} \tau^{2b}$. Аналогичный переход к системам типа (1) имеет место при изучении авторезонанса в бесконечномерных системах, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных [1]. Отметим, что системы вида (1) возникают, в частности, в задачах по управлению динамикой доменных стенок в ферромагнитных пленках в слабом внешнем магнитном поле [6].

В работе исследуется влияние стохастических возмущений на устойчивость авторезонансных решений системы (1). Возмущенную систему будем рассматривать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} + \alpha(\tau)\rho &= [\beta(\tau) + \epsilon \sigma_1(\tau) \xi_1(\tau)] \sin \phi, \\ \left(\frac{d\phi}{d\tau} - \rho^2 + \lambda(\tau) \right) \rho &= [\beta(\tau) + \epsilon \sigma_1(\tau) \xi_1(\tau)] \cos \phi + \epsilon \sigma_2(\tau) \xi_2(\tau) \rho, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\xi_1(\tau)$ и $\xi_2(\tau)$ — независимые стохастические процессы, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Предполагается, что $\mathbb{E}[\xi_i(\tau)] = 0$ и $\mathbb{E}[\xi_i(\tau)\xi_i(\tau')] = \delta(\tau - \tau')$ для всех $i \in \{1, 2\}$, где $\delta(\tau)$ — δ -функция Дирака. Детерминированные функции $\sigma_1(\tau)$ и $\sigma_2(\tau)$ с параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ используются для контроля интенсивности шума. Положим $\xi_i(\tau) = \dot{W}_i(\tau)$, где $W_1(\tau), W_2(\tau)$ — независимые винеровские процессы. Тогда систему (3) можно рассматривать в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито [7, Гл. 5]. Цель работы — описать условия, при которых захват в авторезонанс сохраняется в возмущенной системе с вероятностью, близкой к единице.

2. Резонансные решения невозмущенной системы

Выделим растущую со временем компоненту в амплитуде и сделаем подстановку

$$\rho(\tau) = \sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-\frac{1}{2}} R(s(\tau)), \quad \phi(\tau) = \Psi(s(\tau)), \quad s(\tau) = \frac{2}{q} \tau^{\frac{q}{2}}, \quad q = 2b + 1 \quad (4)$$

в невозмущенной системе (1). Тогда для новых переменных $R(s), \Psi(s)$ система примет вид

$$\frac{dR}{ds} = F(R, \Psi, s), \quad \frac{d\Psi}{ds} = G(R, \Psi, s), \quad (5)$$

где

$$F(R, \Psi, s(\tau)) \equiv \tau^{-\frac{q-3}{2}} \left(\beta(\tau) \sin \Psi - \alpha(\tau) \sqrt{\lambda(\tau)} - \frac{\lambda'(\tau)}{2\sqrt{\lambda(\tau)}} \right) + \tau^{-\frac{q-2}{2}} \left(\frac{1}{2} \tau^{-1} - \alpha(\tau) \right) R,$$

$$G(R, \Psi, s(\tau)) \equiv 2\tau^{-b} \sqrt{\lambda(\tau)} R + \tau^{-\frac{q}{2}} R^2 + \frac{\beta(\tau) \tau^{-\frac{q-2}{2}} \cos \Psi}{\sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-\frac{1}{2}} R}.$$

Заметим, что

$$\lambda^{\frac{m}{2}} \sim \tau^{bm} \lambda_0^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} \zeta_k^m, \quad \beta \lambda^{-\frac{1}{2}} \sim \lambda_0^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} \gamma_k, \quad \tau^{-\frac{q-3}{2}} \left(\alpha \sqrt{\lambda} + \frac{\lambda'}{2\sqrt{\lambda}} \right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} \mu_k$$

при $\tau \rightarrow \infty$, где $\zeta_k^m, \gamma_k, \mu_k = \text{const}$. В частности, $\zeta_0^m = \gamma_0 = 1, \mu_0 = \sqrt{\lambda_0}(1+b) > 0, \zeta_1^m = m\lambda_1/\lambda_0, \gamma_1 = \beta_1 + \zeta_1^{-1}, \mu_1 = \sqrt{\lambda_0}\alpha_1 + \lambda_1/\sqrt{4\lambda_0}$. Нетрудно проверить, что имеют место асимптотические разложения $F(R, \Psi, s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} s^{-k/q} F_k(R, \Psi), G(R, \Psi, s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} s^{-k/q} G_k(R, \Psi)$ при $s \rightarrow \infty$, где

$$F_k(R, \Psi) \equiv f_{k/2}(\Psi) + R v_{(k-q)/2}, \quad G_k(R, \Psi) \equiv R \eta_{k/2} + g_{k-q}(R, \Psi),$$

$$f_k(\Psi) \equiv (\beta_k \sin \Psi - \mu_k) \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{2k}{q}}, \quad v_k = \left(\frac{1}{2} \delta_{k,0} - \alpha_k \right) \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{2k}{q}-1},$$

$$g_k(R, \Psi) \equiv \delta_{k,0} \frac{2R^2}{q} + \sum_{ql+2(m+n)=k} (-1)^l R^l \cos \Psi \lambda_0^{-\frac{l+1}{2}} \zeta_m^{-l} \gamma_n \left(\frac{2}{q} \right)^{1+\frac{k}{q}}, \quad \eta_k = 2\sqrt{\lambda_0} \zeta_k^1 \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{2k}{q}}.$$

Заметим, что $q \in \mathbb{Z}_+$ и $q \geq 2$. Предполагается, что $f_k(\Psi) \equiv g_k(R, \Psi) \equiv 0$ и $v_k = \eta_k = 0$, если $k \notin \mathbb{N}_0$. Таким образом, система (5) является асимптотически автономной [8]. Соответствующая предельная система

$$\frac{dR}{ds} = \sin \Psi - \mu_0, \quad \frac{d\Psi}{ds} = \sqrt{4\lambda_0} R \quad (6)$$

имеет две неподвижные точки $z_s = (0, \arcsin \mu_0)$ — седло и $z_c = (0, \pi - \arcsin \mu_0)$ — центр, если $\mu_0 \in (0, 1)$. При $\mu_0 = 1$ седло и центр сливаются в вырожденную неподвижную точку $z_0 = (0, 1)$, которая исчезает при $\mu_0 > 1$. Если $\mu_0 > 1$, то все траектории предельной системы оказываются неограниченными.

Заметим, что функции $\tilde{F}(R, \Psi, s) \equiv F(R, \Psi, s) - F_0(R, \Psi)$ и $\tilde{G}(R, \Psi, s) \equiv G(R, \Psi, s) - G_0(R, \Psi)$ играют роль затухающих возмущений системы (6). Нетрудно проверить, что в окрестности седла такие добавки не приводят к качественному изменению поведения траекторий (см., например, [3]). При этом динамика вблизи центра и вырожденной точки зависит от параметров возмущений.

Дадим определение устойчивости резонансных решений с растущей амплитудой, которое будет использоваться ниже.

Определение 1. Решение $\rho_*(\tau)$, $\psi_*(\tau)$ системы (1) называется устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0$ существуют $\delta_0 > 0$ и $\tau_0 > 0$ такие, что при любых ϱ_0 и φ_0 : $|\rho_*(\tau_0) - \varrho_0| + |\psi_*(\tau_0) - \varphi_0| \leq \delta_0$, для решения $\rho(\tau)$, $\psi(\tau)$ системы (1) с начальными данными $\rho(\tau_0) = \varrho_0$, $\psi(\tau_0) = \varphi_0$ имеет место неравенство

$$\sup_{\tau \geq \tau_0} \left\{ \tau^{\frac{1}{2}} |\rho(\tau) - \rho_*(\tau)| + |\psi(\tau) - \psi_*(\tau)| \right\} \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим сначала поведение траекторий вблизи точки z_c . Справедлива

Теорема 1. Пусть $0 < \sqrt{\lambda_0}(1+b) < 1$ и $\alpha_0 > \frac{1}{2} - \frac{4(b+1)}{(2b+1)^2}$. Тогда система (1) имеет устойчивое решение $\rho_c(\tau) \equiv \sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-1/2} R_c(s(\tau))$, $\phi_c(\tau) \equiv \Psi_c(s(\tau))$, где $s(\tau) = (2/q)\tau^{q/2}$,

$$R_c(s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} s^{-\frac{k}{q}} r_k, \quad \Psi_c(s) \sim \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s^{-\frac{k}{q}} \psi_k, \quad s \rightarrow \infty, \quad (7)$$

с коэффициентами $r_k, \psi_k = \text{const}$, $\psi_0 = \pi - \arcsin \mu_0$, $q = 2b + 1$.

Доказательство. Подстановка (7) в систему (5) и группировка выражений при одинаковых степенях s приводят к системе рекуррентных уравнений:

$$\sqrt{4\lambda_0} r_k = \mathcal{A}_k, \quad -\sqrt{1 - \mu_0^2} \psi_k = \mathcal{B}_k, \quad k \geq 1, \quad (8)$$

где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k$ выражаются через $r_1, \psi_1, \dots, r_{k-1}, \psi_{k-1}$. В частности,

$$\mathcal{A}_1 = -G_1(0, \psi_0), \quad \mathcal{A}_2 = -G_2(0, \psi_0) - r_1 \partial_R G_1(0, \psi_0) - \psi_1 \partial_\Psi G_1(0, \psi_0),$$

$$\mathcal{B}_1 = -F_1(0, \psi_0), \quad \mathcal{B}_2 = \mu_0 \psi_1^2 / 2 - F_2(0, \psi_0) - r_1 \partial_R F_1(0, \psi_0) - \psi_1 \partial_\Psi F_1(0, \psi_0).$$

Так как $\lambda_0 \neq 0$ и $0 < \mu_0 < 1$, то система (8) разрешима. Для доказательства существования решения системы (7) определим функции $R_N(s) \equiv \sum_{k=1}^N s^{-k/q} r_k$, $\Psi_N(s) \equiv \psi_0 + \sum_{k=1}^N s^{-k/q} \psi_k$ с некоторым целым $N \in \mathbb{N}$. Из построения вытекает, что

$$R'_N(s) - F(R_N(s), \Psi_N(s), s) = \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}}), \quad \Psi'_N(s) - G(R_N(s), \Psi_N(s), s) = \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}})$$

при $s \rightarrow \infty$. Подстановка $R(s) = R_N(s) + r(s)$, $\Psi(s) = \Psi_N(s) + \psi(s)$ в (5) приводит к системе

$$\frac{dr}{ds} = \mathcal{F}_N(r, \psi, s), \quad \frac{d\psi}{ds} = \mathcal{G}_N(r, \psi, s), \quad (9)$$

где $\mathcal{F}_N(r, \psi, s) \equiv F(R_N(s) + r, \Psi_N(s) + \psi, s) - R'_N(s)$ и $\mathcal{G}_N(r, \psi, s) \equiv G(R_N(s) + r, \Psi_N(s) + \psi, s) - \Psi'_N(s)$. Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{F}_N = \sum_{k=0}^q s^{-\frac{k}{q}} \{f_{k/2}(\psi + \Psi_N) - f_{k/2}(\Psi_N) + \delta_{k,q} v_0 r\} + \mathcal{O}(d) \mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}) + \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}}),$$

$$\mathcal{G}_N = \sum_{k=0}^q s^{-\frac{k}{q}} \{r \eta_{k/2} + \delta_{k,q} (g_0(r + R_N, \psi + \Psi_N) - g_0(R_N, \Psi_N))\} + \mathcal{O}(d) \mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}) + \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}})$$

при $s \rightarrow \infty$ и $d := d(r, \psi) \equiv \sqrt{r^2 + \psi^2} \rightarrow 0$. В качестве функции Ляпунова рассмотрим $V(r, \psi, s) \equiv V_c(r, \psi, s; \Psi_N(s), \vartheta)$, где

$$V_c(r, \psi, s; \Psi_N, \vartheta) = \sum_{k=0}^q s^{-\frac{k}{q}} \left\{ \eta_{k/q} \frac{r^2}{2} - \int_0^\psi f_{k/2}(\phi + \Psi_N) d\phi + \psi f_{k/2}(\Psi_N) \right\} + s^{-1} \vartheta r \psi.$$

Заметим, что $V(r, \psi, s) = (\eta_0 r^2 + \sqrt{1 - \mu_0^2} \psi^2)/2 + \mathcal{O}(d^3) + \mathcal{O}(d^2) \mathcal{O}(s^{-1/q})$ при $s \rightarrow \infty$ и $d \rightarrow 0$, где $\eta_0 = \sqrt{4\lambda_0} > 0$. Производная функции $V(r, \psi, s)$ на траекториях системы (9) имеет следующий вид:

$$\frac{dV}{ds} \Big|_{(9)} = s^{-1} \left(-A_\vartheta r^2 - B_\vartheta \psi^2 + \mathcal{O}(d^3) + \mathcal{O}(s^{-\frac{1}{q}}) \mathcal{O}(d^2) \right) + \mathcal{O}(d) \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}})$$

при $s \rightarrow \infty$ и $d \rightarrow 0$ с параметрами $A_\vartheta = \eta_0(q(2\alpha_0 - 1)/4 - \vartheta)$ и $B_\vartheta = \sqrt{1 - \mu_0^2}(\vartheta + 2\mu_0/\sqrt{q^2\lambda_0})$. Выберем параметр $\vartheta = \vartheta_c$, удовлетворяющий неравенствам $-2\mu_0/\sqrt{q^2\lambda_0} < \vartheta_c < q(2\alpha_0 - 1)/4$, тогда $A_\vartheta > 0$ и $B_\vartheta > 0$. Следовательно, найдутся $d_1 > 0$ и $s_1 > 0$ такие, что

$$m_- d^2 \leq V(r, \psi, s) \leq m_+ d^2, \quad \frac{dV}{ds} \Big|_{(9)} \leq -s^{-1} C d^2 + s^{-\frac{N+1}{q}} D d \quad (10)$$

при $s \geq s_1$ и $d \leq d_1$ с положительными параметрами m_- , m_+ , $C = \min\{A_\vartheta, B_\vartheta\}/2$ и D . Выберем $N \geq q$, тогда для любого $\varepsilon \in (0, d_1)$ найдутся

$$\delta_\varepsilon = \min \left\{ d_1, \frac{2s_\varepsilon^{-1/q}}{C}, \varepsilon \sqrt{\frac{m_-}{2m_+}} \right\}, \quad s_\varepsilon = \max \left\{ s_1, \left(\frac{4}{C\varepsilon} \right)^q \right\}$$

такие, что $dV/ds|_{(9)} = -s^{-1}(Cd^2 - s_\varepsilon^{-1/q} \delta_\varepsilon^{-1} D d^2) \leq -s^{-1} C d^2/2 < 0$ для всех $s \geq s_\varepsilon$ и (r, ψ) таких, что $\delta_\varepsilon \leq d(r, \psi) \leq \varepsilon$. Отсюда и из неравенств $\sup_{d \leq \delta_\varepsilon} V(r, \psi, s) \leq m_+ \delta_\varepsilon^2 \leq m_- \varepsilon^2 = \inf_{d=\varepsilon} V(r, \psi, s)$ для всех $s \geq s_\varepsilon$ следует, что любое решение системы (9) с начальными данными $d(r(s_\varepsilon), \psi(s_\varepsilon)) \leq \delta_\varepsilon$ не покидает ε -окрестность нуля $d(r(s), \psi(s)) \leq \varepsilon$ при $s \geq s_\varepsilon$. Более того, из (10) следует, что $dV/ds|_{(9)} \leq s^{-1-(N+1-q)/q} \varepsilon D$ для всех $s \geq s_\varepsilon$ и $d \leq \varepsilon$. Интегрируя последнее неравенство, мы получаем $d(r(s), \psi(s)) = \mathcal{O}(s^{-(N+1-q)/(2q)})$ при $s \rightarrow \infty$ для любого $N \geq q$. Отсюда вытекает существование устойчивого решения системы (9) с асимптотикой (7). Учитывая подстановку (4), мы получаем доказательство теоремы 1. $\square$

Если $\mu_0 = 1$, система (8) оказывается неразрешимой, и асимптотическое решение в форме (7) вблизи вырожденной точки z_0 не строится. В этом случае в зависимости от параметров возмущений возможно появление либо устойчивого режима с траекториями, стремящимися к равновесию предельной системы (6), либо неустойчивого режима с неограниченно растущими траекториями.

Справедлива

Теорема 2. Пусть $\sqrt{\lambda_0}(b+1) = 1$, $\beta_1 > \mu_1$ и $\alpha_0 > \frac{1}{2} - \frac{4b-1}{(2b+1)^2}$. Тогда система (1) имеет устойчивое решение $\rho_0(\tau) \equiv \sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-1/2}R_0(s(\tau))$, $\phi_0(\tau) \equiv \Psi_0(s(\tau))$, где $s(\tau) = (2/q)\tau^{q/2}$,

$$R_0(s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} s^{-\frac{k}{q}} r_k, \quad \Psi_0(s) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} s^{-\frac{k}{q}} \psi_k, \quad s \rightarrow \infty, \quad (11)$$

с коэффициентами $r_k, \psi_k = \text{const}$, $\psi_1 = \sqrt{2(\beta_1 - \mu_1)}(2/q)^{1/q}$, $q = 2b + 1$.

Доказательство. Подстановка (11) в систему (5) и приравнивание выражений при одинаковых степенях s приводят к уравнению

$$\frac{\psi_1^2}{2} = (\beta_1 - \mu_1) \left(\frac{2}{q} \right)^{\frac{2}{q}}. \quad (12)$$

Остальные коэффициенты r_k, ψ_k определяются из системы уравнений

$$\sqrt{4\lambda_0}r_k = \mathcal{A}_k, \quad -\psi_1\psi_{k+1} = \mathcal{C}_{k+1}, \quad k \geq 1, \quad (13)$$

где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{C}_k$ выражаются через $r_1, \psi_1, \dots, r_{k-1}, \psi_{k-1}$. Например,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= -G_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \mathcal{A}_2 = -G_2\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - r_1\partial_R G_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - \psi_1\partial_\Psi G_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \mathcal{C}_2 &= -\delta_{q,2}v_0r_1, \quad \mathcal{C}_3 = -\frac{\psi_1^4}{24} + \frac{\psi_2^2}{2} + \beta_1\frac{\psi_1^2}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2}{q}} - \delta_{q,3}v_0r_1 + (\mu_2 - \beta_2)\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{4}{q}}. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_0 \neq 0$ и $\beta_1 > \mu_1$, то существует решение системы (12), (13), которое зависит от выбора корня уравнения (12).

Рассмотрим функции $R_N(s) \equiv \sum_{k=1}^N s^{-k/q}r_k$, $\Psi_N(s) \equiv \pi/2 + \sum_{k=1}^N s^{-k/q}\psi_k$. Подстановка $R(s) = R_N(s) + s^{-3/(2q)}r(s)$, $\Psi(s) = \Psi_N(s) + s^{-1/q}\psi(s)$ в (5) приводит к системе (9) с

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(r, \psi, s) &\equiv s^{\frac{3}{2q}} \left(F(R_N(s) + s^{-\frac{3}{2q}}r, \Psi_N(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s) - R'_N(s) \right) + s^{-1}\frac{3r}{2q}, \\ \mathcal{G}_N(r, \psi, s) &\equiv s^{\frac{1}{q}} \left(G(R_N(s) + s^{-\frac{3}{2q}}r, \Psi_N(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s) - \Psi'_N(s) \right) + s^{-1}\frac{\psi}{q}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N &= \sum_{k=0}^{q+2} s^{-\frac{2k-3}{2q}} \left\{ f_{k/2}(s^{-\frac{1}{q}}\psi + \Psi_N) - f_{k/2}(\Psi_N) \right\} + s^{-1} \left(v_0 + \frac{3}{2q} \right) r + \\ &\quad + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}) + \mathcal{O}(s^{-\frac{2N-1}{2q}}) = s^{-\frac{1}{2q}}(-\psi_1\psi + \mathcal{O}(d^2) + \mathcal{O}(s^{-\frac{1}{q}})), \\ \mathcal{G}_N &= \sum_{k=0}^q s^{-\frac{2k+1}{2q}} r\eta_{k/2} + s^{-1+\frac{1}{q}} \left((g_0(s^{-\frac{3}{2q}}r + R_N, s^{-\frac{1}{q}}\psi + \Psi_N) - g_0(R_N, \Psi_N)) \right) + s^{-1}\frac{\psi}{q} + \\ &\quad + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}) + \mathcal{O}(s^{-\frac{N}{q}}) = s^{-\frac{1}{2q}}(\eta_0r + \mathcal{O}(s^{-\frac{1}{q}})) \end{aligned}$$

при $s \rightarrow \infty$ и $d(r, \psi) \rightarrow 0$.

Пусть $\psi_1 > 0$. В этом случае предельная система, соответствующая (9), имеет неподвижную точку типа центр. Рассмотрим функцию Ляпунова для системы (9) в виде $V(r, \psi, s) \equiv V_0(r, \psi, s; \Psi_N(s), \vartheta)$, где ϑ — некоторый параметр и

$$V_0(r, \psi, s, \Psi_N, \vartheta) \equiv \sum_{k=0}^q s^{-\frac{k}{q}} \eta_{k/q} \frac{r^2}{2} - \sum_{k=0}^{q+2} s^{-\frac{k-2}{q}} \left\{ \int_0^\psi f_{k/2}(s^{-\frac{1}{q}} \phi + \Psi_N) d\phi - \psi f_{k/2}(\Psi_N) \right\} + s^{-\frac{2q-1}{2q}} \vartheta r \psi.$$

Заметим, что $V(r, \psi, s) = (\eta_0 r^2 + \psi_1 \psi^2)/2 + \mathcal{O}(d^3) + \mathcal{O}(d^2)\mathcal{O}(s^{-1/q})$ при $s \rightarrow \infty$ и $d \rightarrow 0$, где $\eta_0 = \sqrt{4\lambda_0} > 0$. Производная функции $V(r, \psi, s)$ на траекториях системы (9) имеет вид

$$\frac{dV}{ds} \Big|_{(9)} = s^{-1} \left(-A_\vartheta r^2 - B_\vartheta \psi^2 + \mathcal{O}(d^3) + \mathcal{O}(s^{-\frac{1}{q}})\mathcal{O}(d^2) \right) + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{2N-1}{2q}})$$

при $s \rightarrow \infty$ и $d \rightarrow 0$ с параметрами $A_\vartheta = \eta_0(q(2\alpha_0 - 1)/4 - 3/(2q) - \vartheta)$, $B_\vartheta = \psi_1(2\mu_0/\sqrt{q^2\lambda_0} - q^{-1} + \vartheta)$. Выберем $\vartheta = \vartheta_0$, удовлетворяющий неравенствам $(\sqrt{\lambda_0} - 2)/\sqrt{q^2\lambda_0} < \vartheta_0 < (q^2(2\alpha_0 - 1) - 6)/(4q)$, тогда $A_{\vartheta_0} > 0$ и $B_{\vartheta_0} > 0$. Следовательно, найдутся $d_1 > 0$ и $s_1 > 0$ такие, что $m_- d^2 \leq V(r, \psi, s) \leq m_+ d^2$, $dV/ds|_{(9)} \leq -s^{-1}C d^2 + s^{-2N-1/(2q)} D d$ при $s \geq s_1$ и $d \leq d_1$ с положительными параметрами m_- , m_+ , $C = \min\{A_{\vartheta_0}, B_{\vartheta_0}\}/2$ и D . Выберем $N \geq q + 1$, тогда, повторяя рассуждения теоремы 1, мы получим доказательство теоремы 2. $\square$

Заметим, что выбор отрицательного корня уравнения (12) соответствует неподвижной точке типа седло в предельной системе. В этом случае затухающие возмущения существенно не влияют на поведение близких траекторий и асимптотический режим, соответствующий (11) с $\psi_1 < 0$, оказывается неустойчивым.

Если $\mu_0 = 1$ и $\beta_1 < \mu_1$, то асимптотическое решение в форме (11) не строится. Более того, в этом случае траектории системы (5) ведут себя так же, как и решения предельной системы (6) при $\mu_0 > 1$ и являются неограниченными [3].

3. Стохастическая устойчивость резонансных решений

В настоящем разделе обсуждается устойчивость авторезонансных решений системы (1) относительно стохастических возмущений при $0 < \mu_0 < 1$ и при $\mu_0 = 1$. Известно, что даже малые стохастические возмущения могут приводить к потере устойчивости решений [9, Гл. 10] и появлению новых устойчивых состояний [10]. Опишем условия, при которых гарантируется сохранение устойчивости авторезонанса по вероятности по крайней мере на асимптотически больших временных интервалах.

Заметим, что подстановка (4) приводит систему (3) к следующему виду (см. [7, §8.5]):

$$\begin{aligned} dR &= F(R, \Psi, s) ds + \varepsilon \sigma_{1,1}(R, \Psi, s) dw_1(s), \\ d\Psi &= G(R, \Psi, s) ds + \varepsilon \sigma_{2,1}(R, \Psi, s) dw_1(s) + \varepsilon \sigma_{2,2}(R, \Psi, s) dw_2(s), \end{aligned} \quad (14)$$

где $(w_1(s), w_2(s))$ — некоторый двумерный винеровский процесс,

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}(R, \Psi, s(\tau)) &\equiv \tau^{\frac{4-q}{4}} \sigma_1(\tau) \sin \Psi, \quad \sigma_{2,1}(R, \Psi, s(\tau)) \equiv \frac{\tau^{\frac{2-q}{4}} \sigma_1(\tau) \cos \Psi}{\sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-1/2} R}, \\ \sigma_{2,2}(R, \Psi, s(\tau)) &\equiv \tau^{\frac{2-q}{4}} \sigma_2(\tau). \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что система (14) при $\varepsilon = 0$ и $0 < \mu_0 < 1$ имеет устойчивое решение $R_c(s)$, $\Psi_c(s)$ с асимптотикой (7). Покажем, что решение остается устойчивым относительно стохастических возмущений при $\varepsilon \neq 0$ при определенных ограничениях на класс возмущений $\mathcal{K}_{a_1, a_2} := \{(\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau)) : \sigma_1(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{a_1}), \sigma_2(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{a_2}) \text{ при } \tau \rightarrow \infty\}$. Определим функцию $d(r, \psi) \equiv \sqrt{r^2 + \psi^2}$. Тогда справедлива

Теорема 3. Пусть $0 < \sqrt{\lambda_0}(1+b) < 1$, $\alpha_0 > \frac{1}{2} - \frac{4(b+1)}{(2b+1)^2}$ и $(\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau)) \in \mathcal{K}_{a_1, a_2}$ с параметрами $a_1 \leq -1 + (2b+1)K/4$, $a_2 \leq -1/2 + (2b+1)K/4$, $K \leq 1$. Тогда существует $\tau_0 > 0$ такое, что для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что любое решение $\rho(\tau)$, $\psi(\tau)$ системы (3) с $d(\rho(\tau_0) - \rho_c(\tau_0), \psi(\tau_0) - \psi_c(\tau_0)) \leq \delta_1$ и $0 < \varepsilon < \delta_2$ удовлетворяет оценке

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq \tau - \tau_0 \leq T} d \left(\tau^{\frac{1}{2}} (\rho(\tau) - \rho_c(\tau)), \psi(\tau) - \psi_c(\tau) \right) \geq \varepsilon_2 \right) \leq \varepsilon_1 \quad (15)$$

с параметром $T = \varepsilon^{-1}$ при $0 < K \leq 1$, $T = s(\tau_0)(\exp \varepsilon^{-1} - 1)$ при $K = 0$ и $T = \infty$ при $K < 0$.

Доказательство. Подстановка $R(s) = R_c(s) + r(s)$, $\Psi(s) = \Psi_c(s) + \psi(s)$ в (14) приводит к системе

$$\begin{aligned} dr &= \mathcal{F}(r, \psi, s) ds + \varepsilon \tilde{\sigma}_{1,1}(r, \psi, s) dw_1(s), \\ d\psi &= \mathcal{G}(r, \psi, s) ds + \varepsilon \tilde{\sigma}_{2,1}(r, \psi, s) dw_1(s) + \varepsilon \tilde{\sigma}_{2,2}(r, \psi, s) dw_2(s), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathcal{F}(r, \psi, s) \equiv F(R_c(s) + r, \Psi_c(s) + \psi, s) - F(R_c(s), \Psi_c(s), s)$, $\mathcal{G}(r, \psi, s) \equiv G(R_c(s) + r, \Psi_c(s) + \psi, s) - G(R_c(s), \Psi_c(s), s)$, $\tilde{\sigma}_{i,j}(r, \psi, s) \equiv \sigma_{i,j}(R_c(s) + r, \Psi_c(s) + \psi, s)$ и $(R_c(s), \Psi_c(s))$ — решение системы (5) с асимптотикой (7). Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sum_{k=0}^q s^{-\frac{k}{q}} \{f_{k/2}(\psi + \Psi_c) - f_{k/2}(\Psi_c) + \delta_{k,q} v_0 r\} + \mathcal{O}(d) \mathcal{O}(s^{-1-\frac{1}{q}}), \\ \mathcal{G} &= \sum_{k=0}^q s^{-\frac{k}{q}} \{r \eta_{k/2} + \delta_{k,q} (g_0(r + R_c, \psi + \Psi_c) - g_0(R_c, \Psi_c))\} + \mathcal{O}(d) \mathcal{O}(s^{-1-\frac{1}{q}}), \\ \tilde{\sigma}_{i,j} &= \mathcal{O}(s^{-1+K}) \end{aligned}$$

при $s \rightarrow \infty$ и $d \rightarrow 0$.

Определим оператор

$$\mathcal{L} = \partial_s + \mathcal{F} \partial_r + \mathcal{G} \partial_\psi + \frac{\varepsilon^2}{2} (\tilde{\sigma}_{1,1}^2 \partial_r^2 + 2\tilde{\sigma}_{1,1} \tilde{\sigma}_{2,1} \partial_r \partial_\psi + (\tilde{\sigma}_{2,1}^2 + \tilde{\sigma}_{2,2}^2) \partial_\psi^2),$$

связанный с (16) и играющий ключевую роль при исследовании стохастической устойчивости (см. [11, § 3.6]). Рассмотрим вспомогательную функцию $V(r, \psi, s) \equiv V_c(r, \psi, s; \Psi_c(s), \vartheta_c)$ с параметром ϑ_c , определенным при доказательстве теоремы 1. Заметим, что найдутся $d_0 > 0$ и $s_0 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} m_- d^2(r, \psi) &\leq V(r, \psi, s) \leq m_+ d^2(r, \psi), \\ \mathcal{L}V(r, \psi, s) &\leq -s^{-1} C d^2(r, \psi) + s^{-1+K} \varepsilon^2 M \end{aligned} \quad (17)$$

при $s \geq s_0$ и $d(r, \psi) \leq d_0$ с положительными константами m_-, m_+, C и M . Тогда функцию Ляпунова для системы (16) можно взять в следующем виде [12, 13]: $U(r, \psi, s) \equiv V(r, \psi, s) + \varepsilon^2 M \theta_K(s)$ с

$$\theta_K(s) = \begin{cases} s_0^{-1+K}(\mathcal{T} + s_0 - s), & 0 < K \leq 1, \\ \log(\mathcal{T} + s_0) - \log s, & K = 0, \\ \int_s^{\mathcal{T}+s_0} \zeta^{K-1} d\zeta, & K < 0. \end{cases}$$

Заметим, что

$$U(r, \psi, s) \geq m_- d^2(r, \psi), \quad \mathcal{L}U(r, \psi, s) \leq 0 \quad (18)$$

для всех $(r, \psi, s) \in \mathcal{D}(d_0, s_0, \mathcal{T}) := \{(r, \psi, s) : d \leq d_0, 0 \leq s - s_0 \leq \mathcal{T}\}$. Зафиксируем параметры $\varepsilon_1 \in (0, d_0)$ и $\varepsilon_2 > 0$. Пусть $(r(s), \psi(s))$ — решение системы (16) при $d(r(s_0), \psi(s_0)) \leq \delta_1$ и $0 < \varepsilon < \delta_2$. Обозначим через $s_{\mathcal{D}}$ момент первого выхода траекторий из области $\mathcal{D}(\delta_1, s_0, \mathcal{T})$, и положим $\zeta_s \equiv \min\{s_{\mathcal{D}}, s\}$. Тогда $(r(\zeta_s), \psi(\zeta_s), \zeta_s)$ является процессом, остановленным в момент первого выхода из области $\mathcal{D}(\delta_1, s_0, \mathcal{T})$. Более того, из (18) следует, что $U(r(\zeta_s), \psi(\zeta_s), \zeta_s)$ является неотрицательным супермартингалом [11, § 5.2], и имеют место оценки

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s - s_0 \leq \mathcal{T}} d(r(s), \psi(s)) > \varepsilon_1\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{s \geq s_0} d(r(\zeta_s), \psi(\zeta_s)) > \varepsilon_1\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{s \geq s_0} U(r(\zeta_s), \psi(\zeta_s), \zeta_s) > m_- \varepsilon_1^2\right) \leq \frac{U(r(s_0), \psi(s_0), s_0)}{m_- \varepsilon_1^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Последняя оценка вытекает из неравенства Дуба для супермартингалов. Заметим, что $U(r(s_0), \psi(s_0), s_0) \leq m_+ \delta_1^2 + \varepsilon^2 M \theta_K(s_0)$. Выберем $\delta_1 = \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_2 m_- / (2m_+)}$ и

$$\delta_2 = \begin{cases} m_+ \delta_1^2 M^{-1} s_0^{1-K}, & 0 < K \leq 1, \\ m_+ \delta_1^2 M^{-1}, & K = 1, \\ m_+ \delta_1^2 M^{-1} |K| s_0^{-K}, & K < 0. \end{cases}$$

Отсюда, из (4) и (19) вытекает оценка (15). □

Теорема 4. Пусть $\sqrt{\lambda_0}(1+b) = 1$, $\beta_1 > \mu_1$, $\alpha_0 > \frac{1}{2} - \frac{4b-1}{(2b+1)^2}$ и $(\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau)) \in \mathcal{K}_{a_1, a_2}$ с параметрами $a_1 \leq -7/4 + (2b+1)K/4$, $a_2 \leq -1 + (2b+1)K/4$, $K \leq 1$. Тогда существует $\tau_0 > 0$ такое, что для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдутся $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что любое решение $\rho(\tau), \psi(\tau)$ системы (3) с $d(\rho(\tau_0) - \rho_0(\tau_0), \psi(\tau_0) - \psi_0(\tau_0)) \leq \delta_1$ и $0 < \varepsilon < \delta_2$ удовлетворяет оценке

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq \tau - \tau_0 \leq \mathcal{T}} d\left(\tau^{\frac{5}{4}}(\rho(\tau) - \rho_0(\tau)), \tau^{\frac{1}{2}}(\psi(\tau) - \psi_0(\tau))\right) \geq \varepsilon_2\right) \leq \varepsilon_1$$

с параметром $\mathcal{T} = \varepsilon^{-1}$ при $0 < K \leq 1$, $\mathcal{T} = s(\tau_0)(\exp \varepsilon^{-1} - 1)$ при $K = 0$ и $\mathcal{T} = \infty$ при $K < 0$.

Доказательство. Подстановка $R(s) = R_0(s) + s^{-3/(2q)}r(s)$, $\Psi(s) = \Psi_0(s) + s^{-1/q}\psi(s)$ в (14) при $\mu_0 = 1$ приводит к системе (16) с

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(r, \psi, s) &\equiv s^{\frac{3}{2q}} \left(F \left(R_0(s) + s^{-\frac{3}{2q}}r, \Psi_0(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s \right) - F(R_0(s), \Psi_0(s), s) \right) + s^{-1} \frac{3r}{2q}, \\ \mathcal{G}(r, \psi, s) &\equiv s^{\frac{1}{q}} \left(G \left(R_0(s) + s^{-\frac{3}{2q}}r, \Psi_0(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s \right) - G(R_0(s), \Psi_0(s), s) \right) + s^{-1} \frac{\psi}{q}, \\ \tilde{\sigma}_{1,1}(r, \psi, s) &\equiv s^{\frac{3}{2q}} \sigma_{1,1} \left(R_0(s) + s^{-\frac{3}{2q}}r, \Psi_0(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s \right), \\ \tilde{\sigma}_{2,j}(r, \psi, s) &\equiv s^{\frac{1}{q}} \sigma_{2,j} \left(R_0(s) + s^{-\frac{3}{2q}}r, \Psi_0(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s \right),\end{aligned}$$

где $R_0(s)$, $\Psi_0(s)$ – решение системы (5) при $\mu_0 = 1$ с асимптотикой (11). Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \sum_{k=0}^{q+2} s^{-\frac{2k-3}{2q}} \left\{ f_{k/2}(\Psi_0 + s^{-\frac{1}{q}}\psi) - f_{k/2}(\Psi_0) \right\} + s^{-1} \left(v_0 + \frac{3}{2q} \right) r + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}), \\ \mathcal{G} &= \sum_{k=0}^q s^{-\frac{2k+1}{2q}} r \eta_{k/2} + s^{-\frac{q-1}{q}} \left((g_0(R_0 + s^{-\frac{3}{2q}}r, \Psi_0 + s^{-\frac{1}{q}}\psi) - g_0(R_0, \Psi_0)) \right) + \\ &\quad + s^{-1} \frac{\psi}{q} + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}), \\ \tilde{\sigma}_{i,j} &= \mathcal{O}(s^{-1+K})\end{aligned}$$

при $s \rightarrow \infty$ и $d(r, \psi) \rightarrow 0$. Заметим, что функция $V(r, \psi, s) \equiv V_0(r, \psi, s; \Psi_0(s), \vartheta_0)$ с параметром ϑ_0 , определенным в теореме 2, удовлетворяет (17). В этом случае построение функции Ляпунова для стохастической системы (16) и дальнейшее обоснование проводятся так же, как и в доказательстве теоремы 3. $\square$

Заключение

Таким образом, описаны условия, при которых авторезонансный режим сохраняется и исчезает при прохождении параметров накачки через бифуркационные значения в соответствующей предельной системе. Исследовано влияние затухающих стохастических возмущений и найдена зависимость интервалов стохастической устойчивости авторезонанса от степени затухания интенсивности шума. Показано, что для сохранения устойчивости решений при соответствующих бифуркационных значениях параметров требуются более жесткие ограничения.

Полученные результаты расширяют возможность использования явления авторезонанса для устойчивого управления нелинейной динамикой. Доказана возможность значительного изменения энергии осциллирующих систем с помощью малого чирпированного возмущения при наличии слабой диссипации и шума. В частности, показано, что стохастические возмущения не разрушают захвата в авторезонанс при прохождении параметров накачки через бифуркационные значения.

Список литературы

1. *Калякин Л. А.* Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, № 5(383). С. 3–72. DOI: 10.4213/rm9237.

2. *Friedland L.* Autoresonance in nonlinear systems // Scholarpedia. 2009. Vol. 4, no. 1. P. 5473. DOI: 10.4249/scholarpedia.5473.
3. *Sultanov O. A.* Damped perturbations of systems with center-saddle bifurcation // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2021. Vol. 31, no. 9. P. 2150137. DOI: 10.1142/S0218127421501376.
4. *Khalil H. K.* Nonlinear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002. 750 p.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. 448 с.
6. *Шамсутдинов М. А., Калякин Л. А., Сухоносов А. Л., Харисов А. Т.* Управление квазирелятивистской динамикой доменной стенки в режиме автофазировки // Физика металлов и металловедение. 2010. Т. 110, № 5. С. 451–462.
7. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998. 324 p. DOI: 10.1007/978-3-662-03620-4.
8. *Markus L.* Asymptotically autonomous differential systems // In: Lefschetz S. (ed) Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations (AM-36). Vol. III. Princeton: Princeton University Press, 1956. P. 17–29. DOI: 10.1515/9781400882175-003.
9. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
10. *Sultanov O. A.* Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems subject to multiplicative noise // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32, no. 11. P. 2250164. DOI: 10.1142/S0218127422501644.
11. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 370 с.
12. *Sultanov O.* White noise perturbation of locally stable dynamical systems // Stochastics and Dynamics. 2017. Vol. 17, no. 1. P. 1750002. DOI: 10.1142/S0219493717500022.
13. *Султанов О. А.* Стохастическая устойчивость динамической системы, возмущенной белым шумом // Математические заметки. 2017. Т. 101, № 1. С. 130–139. DOI: 10.4213/mzm11108.

References

1. Kalyakin LA. Asymptotic analysis of autoresonance models. Russian Mathematical Surveys. 2008;63(5):791–857. DOI: 10.1070/RM2008v063n05ABEH004560.
2. Friedland L. Autoresonance in nonlinear systems. Scholarpedia. 2009;4(1):5473. DOI: 10.4249/scholarpedia.5473.
3. Sultanov OA. Damped perturbations of systems with center-saddle bifurcation. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2021;31(9):2150137. DOI: 10.1142/S0218127421501376.
4. Khalil HK. Nonlinear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall; 2002. 750 p.
5. Bogoliubov NN, Mitropolsky YA. Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations. New York: Gordon and Breach; 1961. 537 p.
6. Shamsutdinov MA, Kalyakin LA, Sukhonosov AL, Kharisov AT. Controlling quasi-relativistic dynamics of domain walls in the regime of self-phasing. Phys. Metals Metallogr. 2010;110(5): 430–441. DOI: 10.1134/S0031918X10110037.
7. Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin, Heidelberg: Springer; 1998. 324 p. DOI: 10.1007/978-3-662-03620-4.
8. Markus L. Asymptotically autonomous differential systems. In: Lefschetz S, editor. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations (AM-36). Vol. III. Princeton: Princeton University Press; 1956. P. 17–29. DOI: 10.1515/9781400882175-003.

9. Freidlin MI, Wentzell AD. Random Perturbations of Dynamical Systems. 2nd edition. New York: Springer; 1998. 432 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0611-8.
10. Sultanov OA. Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems subject to multiplicative noise. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022;32(11):2250164. DOI: 10.1142/S0218127422501644.
11. Khasminskii R. Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd edition. Berlin, Heidelberg: Springer; 2012. 342 p. DOI: 10.1007/978-3-642-23280-0.
12. Sultanov O. White noise perturbation of locally stable dynamical systems. Stochastics and Dynamics. 2017;17(1):1750002. DOI: 10.1142/S0219493717500022.
13. Sultanov OA. Stochastic stability of a dynamical system perturbed by white noise. Mathematical Notes. 2017;101(1):149–156. DOI: 10.1134/S0001434617010151.



Султанов Оскар Анварович — родился в Уфе (1990). Окончил с отличием общенаучный факультет Уфимского государственного авиационного технического университета по направлению «Прикладная математика и информатика» (2012). Кандидат физико-математических наук (2015, ИМВЦ УНЦ РАН). С 2015 года работает в отделе дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН в должности старшего научного сотрудника. Научные интересы — нелинейные дифференциальные уравнения, устойчивость, асимптотика, бифуркации, детерминированные и стохастические возмущения. Опубликовал 40 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112
 Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
 E-mail: oasultanov@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-1970-3382
 AuthorID (eLibrary.Ru): 724333



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003089
EDN: WBNLWM

Механизм обучения коллективного классификатора на основе конкуренции, управляемой обучающими примерами

А. А. Сутягин✉, О. И. Канаков

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: ✉alealesutyagin@gmail.com, okanakov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 21.10.2023, принята к публикации 30.11.2023,
опубликована онлайн 12.01.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Цель работы состоит в модификации механизма обучения коллективного классификатора для обеспечения возможности его обучения только за счёт популяционной динамики, без внешнего сортирующего устройства. Коллективный классификатор представляет собой ансамбль неидентичных простых элементов, не имеющих собственной динамики и переменных параметров, обучаемый путём изменения состава ансамбля, что достигалось в предшествующей литературе путём «селекции» элементов ансамбля сортирующим устройством. **Методы.** Модель популяционной динамики коллективного классификатора дополнена «подсистемой обучения», которая управляется последовательностью обучающих примеров и, в свою очередь, управляет силой внутривидовой конкуренции в популяционной динамике. Динамика подсистемы обучения сводится к линейному отображению со случайными параметрами, выражаемыми через обучающие примеры. Решение отображения представляет собой марковский случайный процесс, стремящийся к стационарному, для которого аналитически найдено математическое ожидание, а дисперсия в рассматриваемом пределе стремится к нулю, что позволяет приближённо описывать связанную популяционную динамику как детерминированную, используя результаты из предшествующей литературы. **Результаты.** Аналитически показано и проиллюстрировано численным моделированием, что решающее правило, порожаемое классификатором, сходится в процессе обучения к правилу Байеса в рамках допущений, не отличающихся принципиально от принятых в имеющейся литературе по коллективным классификаторам; реализация требуемой конкурентной динамики не подразумевает использования внешнего сортирующего устройства. **Заключение.** Предложена концептуальная модель коллективного классификатора, обучение которого полностью обеспечивается собственной популяционной динамикой. Как и в предшествующей литературе, предполагается возможность реализации такого классификатора в виде ансамбля живых клеток с синтетическими генными структурами, если будет создан механизм популяционной динамики с внутривидовой конкуренцией, управляемой через синтетическую генную сеть.

Ключевые слова: конкуренция, машинное обучение, классификатор, модель Лотки–Вольтерры.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031).

Для цитирования: Сутягин А. А., Канаков О. И. Механизм обучения коллективного классификатора на основе конкуренции, управляемой обучающими примерами // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 160–179. DOI: 10.18500/0869-6632-003089. EDN: WBNLWM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Learning mechanism for a collective classifier based on competition driven by training examples

A. A. Sutyagin[✉], O. I. Kanakov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉alealesutyagin@gmail.com, okanakov@rf.unn.ru

Received 21.10.2023, accepted 30.11.2023, available online 12.01.2024, published 29.03.2024

Abstract. The purpose of this work is to modify the learning mechanism of a collective classifier in order to provide learning by population dynamics alone, without requiring an external sorting device. A collective classifier is an ensemble of non-identical simple elements, which do not have any intrinsic dynamics neither variable parameters; the classifier admits learning by adjusting the composition of the ensemble, which was provided in the preceding literature by selecting the ensemble elements using a sorting device. **Methods.** The population dynamics model of a collective classifier is extended by adding a “learning subsystem”, which is controlled by a sequence of training examples and, in turn, controls the strength of intraspecific competition in the population dynamics. The learning subsystem dynamics is reduced to a linear mapping with random parameters expressed via training examples. The solution to the mapping is an asymptotically stationary Markovian random process, for which we analytically find asymptotic expectation and show its variance to vanish in the limit under the specified assumptions, thus allowing an approximate deterministic description of the coupled population dynamics based on available results from the preceding literature. **Results.** We show analytically and illustrate it by numerical simulation that the decision rule of our classifier in the course of learning converges to the Bayesian rule under assumptions which are essentially in line with available literature on collective classifiers. The implementation of the required competitive dynamics does not require an external sorting device. **Conclusion.** We propose a conceptual model for a collective classifier, whose learning is fully provided by its own population dynamics. We expect that our classifier, similarly to the approaches taken in the preceding literature, can be implemented as an ensemble of living cells equipped with synthetic genetic circuits, when a mechanism of population dynamics with synthetically controlled intraspecific competition becomes available.

Keywords: competition, machine learning, classifier, Lotka–Volterra model.

Acknowledgements. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSWR-2023-0031).

For citation: Sutyagin AA, Kanakov OI. Learning mechanism for a collective classifier based on competition driven by training examples. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):160–179. DOI: 10.18500/0869-6632-003089

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Задача классификации состоит в отнесении классифицируемого объекта к одному из на-перёд заданного множества классов на основании значения некоторого наблюдаемого признака, который может быть как действительной величиной, так и, например, действительным вектором и т. п. [1, 2]. Количество классов, вообще говоря, определяется постановкой задачи; настоящее исследование ограничивается случаем двух классов. Решающее правило классификатора является функцией, отображающей множество значений признака на множество классов. Если известны условные распределения вероятностей на множестве значений признака по условию принадлежности классифицируемого объекта к каждому из классов, то минимальная вероятность ошибки классификации обеспечивается решающим правилом Байеса [1, разд. 1.1–1.2], [2, разд. 3]. Если же эти распределения неизвестны, но дано множество «обучающих примеров» — значений признака, каждое из которых снабжено «меткой класса», то есть указанием на принадлежность объекта к определённому классу, то процесс построения оптимального классификатора (например, в смысле минимизации вероятности ошибки) на основании обучающих примеров называют обучением классификатора. Подавляющее большинство исследований в области машинного

обучения ориентировано на создание алгоритмов, исполняемых цифровыми вычислительными устройствами [1, 2]. В то же время в природе существуют неалгоритмические обучающиеся системы, в которых обучение обеспечивается собственной динамикой этих систем. К таковым относятся не только нервные системы, но и, например, адаптивные иммунные системы живых организмов. Представляет интерес не только исследование подобных объектов в живой природе, но и создание искусственных обучающихся систем на аналогичных принципах (см. обзор литературы в [3]).

В работах [4, 5] были введены в рассмотрение коллективные классификаторы — обучаемые системы, материальной основой которых служат ансамбли неидентичных элементов ограниченной сложности, каждый из которых реализует некоторую фиксированную (и достаточно простую) функцию отклика на входные признаки, не имеющую подстроечных параметров, а обучение классификатора (ансамбля в целом) происходит путём формирования оптимального соотношения численностей элементов различных типов в составе ансамбля. Был описан метод осуществления такого обучения путём селекции ансамбля (выборочного удаления элементов) при помощи внешнего сортирующего устройства на основании ответов отдельных элементов на обучающие примеры. Была предложена реализация элемента ансамбля в виде бактериальной клетки с синтетической геной сетью, поэтому элемент коллективного классификатора далее для определённости будем называть *клеткой*, хотя настоящее исследование носит обобщённый характер, без привязки к биологической или другой реализации. При этом процедура селекции, описанная в [4, 5], всегда приводит к режиму конкурентной популяционной динамики с единственным победителем (в пределе остаётся единственный тип клеток), что существенно ограничивает применимость данного подхода; в частности, невозможно обеспечить асимптотическую сходимость обученного классификатора в пределе процесса обучения к оптимальному (например, байесовскому) решающему правилу.

В последующей работе [3] был предложен подход к преодолению указанного ограничения за счёт перехода в популяционной динамике от режима с единственным победителем к режиму конкуренции с сосуществованием. Была предложена модель конкурентной динамики, обладающая требуемыми свойствами и обеспечивающая формирование обученного ансамбля как устойчивого состояния равновесия в популяционной динамике; предложена также реализация требуемой конкурентной динамики с помощью алгоритма селекции, управляемого обучающими примерами. Общим недостатком методов селекции при обучении коллективных классификаторов [3–5] является необходимость использования сортирующего устройства, которое является внешним по отношению к системе, поскольку это означает, что не обеспечивается обучение системы за счёт только собственной динамики.

Целью настоящего исследования является восполнение указанного пробела. Модель конкурентной динамики, ранее предложенная в [3], модифицирована и дополнена подсистемой, обеспечивающей, во-первых, обучение системы на примерах непосредственно в силу динамики системы и, во-вторых, сохранение состава ансамбля после обучения. Аналитически показано и проиллюстрировано численным моделированием, что ансамбль, формируемый в результате предложенной популяционной динамики, представляет собой обученный коллективный классификатор, функция отклика которого является аппроксимацией байесовского решающего правила.

1. Методика

1.1. Модель конкуренции с сосуществованием, основанная на внешнем сортировщике.

В работе [3] была предложена и исследована стратегия обучения коллективного классификатора, основанная на популяционной динамике, включающей внутривидовую конкуренцию наряду с конкуренцией за общий ресурс, благодаря чему обеспечивается режим конкуренции

с сосуществованием. Динамика численностей типов клеток описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{n}_i = b_i n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^s n_j \right) - (1 - b_i) \frac{n_i^2}{N_c}, \quad i = 1 \dots s, \quad (1)$$

где численности типов клеток n_i выступают в качестве непрерывных динамических переменных, индекс i нумерует типы клеток, s — количество типов клеток, b_i — параметры конкурентоспособности, $N_c > 0$ — «ёмкость среды». На параметры накладывается ограничение $0 < b_i < 1$, а фазовое пространство ограничено неотрицательным ортантом (все $n_i \geq 0$), который в полном действительном пространстве является инвариантной областью.

Система (1) имеет состояние равновесия

$$n_i = N_c \frac{b_i}{1 - b_i} h, \quad \text{где} \quad h = \left(\sum_{j=1}^s \frac{1}{1 - b_j} - (s - 1) \right)^{-1}, \quad (2)$$

глобально устойчивое в положительном ортанте фазового пространства (где все $n_i > 0$).

В модели (1) параметр b_i задаёт соотношение вкладов механизмов внутривидовой конкуренции и конкуренции за общий ресурс в динамике численности соответствующего типа клеток: при $b_i = 1$ в правой части i -го уравнения в (1) отлично от нуля только первое слагаемое (имеющее смысл конкуренции за общий ресурс), тогда как при $b_i = 0$ отлично от нуля только второе слагаемое (имеющее смысл внутривидовой конкуренции). На основе модели (1) в [3] был предложен алгоритм селекции, управляемый обучающими примерами, порождающий конкурентную динамику, переходящую в (1) в непрерывном пределе, в результате чего, как было показано, решающее правило обученного классификатора приближается к (оптимальному) правилу Байеса.

Механизмы обучения коллективных классификаторов на основе селекции, представленные в [3–5], имеют общий недостаток — необходимость во внешнем сортирующем устройстве для обеспечения требуемой конкурентной динамики. Преодоление этого ограничения требует решения двух задач, которым и посвящено настоящее исследование: во-первых, требуется, чтобы обучение коллективного классификатора происходило за счёт собственной популяционной динамики ансамбля, и во-вторых, состав ансамбля должен сохраняться после завершения обучения.

Решение первой задачи, то есть отказ от внешней селекции при обучении, подразумевает фактическую реализацию в элементах ансамбля механизма конкурентной популяционной динамики (то есть управляемого размножения и удаления элементов) вместе с механизмом подстройки параметров конкурентоспособности, управляемым обучающими примерами. В случае реализации элемента ансамбля в виде бактериальной клетки с синтетической геной сетью [4], управление конкурентоспособностью может быть организовано, например, при помощи управления устойчивостью клетки к антибиотику через синтетическую геновую сеть, а ввод обучающих примеров и включение-отключение механизма обучения — например, за счёт использования химических каналов межклеточной коммуникации (таких, как кворум-сенсинг [4]). В любом случае коэффициенты конкурентоспособности, которые в модели (1) являются постоянными параметрами, при переходе к механизму обучения, основанному на собственной динамике элемента, становятся дополнительными динамическими переменными, динамика которых должна быть описана соответствующей подсистемой (далее — «подсистемой обучения»), дополнительно к подсистеме, описывающей популяционную динамику. В настоящем исследовании не ставится задача описания какой-либо конкретной материальной реализации требуемой конкурентной динамики, управляемой обучающими примерами; мы ограничиваемся демонстрацией принципиальной возможности решения поставленной задачи на основе простой достаточной модели.

Для решения второй из указанных задач, то есть для обеспечения сохранения структуры популяции после обучения, необходимо, чтобы вне процесса обучения относительные пропорции клеток разных типов в составе ансамбля не изменялись, либо изменялись на временном масштабе, превышающем требуемое время сохранения обученного состояния системы. В исходной форме модели (1) это требование не может быть выполнено, поскольку обучение по смыслу модели осуществляется путём управления параметрами конкурентоспособности b_i . Прекращение же обучения, таким образом, подразумевает прекращение управления конкурентоспособностью, то есть возвращение всех параметров b_i к некоторому «исходному» значению, одинаковому для всех клеток и определяемому реализацией элемента. Это, в свою очередь, влечёт за собой переход системы к устойчивому состоянию равновесия, в котором численности всех типов клеток также одинаковы, что означает забывание системой своего обученного состояния. Для решения этой проблемы предлагается модифицировать систему (1) таким образом, чтобы параметр, управляющий конкурентоспособностью каждого типа клеток, влиял только на *внутривидовую* конкуренцию внутри конкретного типа клеток, при этом конкурентоспособность всех типов клеток в конкуренции *за общий ресурс* становится одинаковой. При таком подходе, как показано в разделе 1.2, прекращение обучения переводит конкуренцию в вырожденный режим, сохраняющий пропорции типов клеток в составе ансамбля.

1.2. Модифицированная модель конкуренции с сосуществованием. Для реализации требуемой динамики модифицируем модель (1), поделив правую часть каждого уравнения на b_i и вводя переобозначение параметров, в результате чего модифицированная модель записывается в виде

$$\dot{n}_i = n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^s n_j \right) - k_i \frac{n_i^2}{N_c}, \quad \text{где} \quad k_i = \frac{1 - b_i}{b_i}, \quad i = 1 \dots s. \quad (3)$$

Ограничение $b_i \in (0, 1)$ переходит в $k_i \in (0, +\infty)$. Заметим, что параметры k_i в модели (3) с точки зрения популяционной динамики трактуются как определяющие внутривидовую конкуренцию. Если параметры k_i постоянны во времени и удовлетворяют указанному ограничению, то выражение для состояния равновесия (2) сохраняет силу и с учётом переобозначения параметров переписывается в виде

$$n_i = h N_c k_i^{-1}, \quad \text{где} \quad h = \left(1 + \sum_{j=1}^s k_j^{-1} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Утверждение о глобальной устойчивости состояния равновесия (4) в положительном ортанте остаётся справедливым (см. пункт 1 Приложения); это означает, что режим сосуществования, определяемый состоянием равновесия (4), является единственно возможным результатом конкурентной динамики в системе (3).

Равновесное значение суммарной численности клеток не отличается от известного [3, урavn. (6)] для модели (1) и получается суммированием всех численностей n_i в состоянии равновесия (4):

$$N_\infty = \sum_{i=1}^s n_i = N_c h \sum_{i=1}^s k_i^{-1} = N_c h (h^{-1} - 1) = N_c (1 - h). \quad (5)$$

Будем считать, что прекращение обучения соответствует случаю, когда все параметры k_i обращаются в нуль. Выражение для состояния равновесия (4) в этом случае неприменимо, однако

сама система (3) сохраняет смысл и переходит в вырожденную модель конкуренции с одинаковой конкурентоспособностью

$$\dot{n}_i = n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^s n_j \right), \quad i = 1 \dots s. \quad (6)$$

Эта модель имеет $(s - 1)$ -мерное инвариантное многообразие, заданное уравнением

$$\sum_{j=1}^s n_j = N_c \quad (7)$$

(гиперплоскость, отсекающая на всех осях координат одинаковые отрезки $n_i = N_c$), которое обращает в нуль выражение в скобках в правой части (6), то есть полностью состоит из состояний равновесия, и при этом глобально устойчиво в положительном ортанте (доказательство последнего утверждения следует ниже).

Кроме того, инвариантным многообразием является каждый луч в фазовом пространстве, выходящий из начала координат и описываемый уравнением

$$n_i = v_i N, \quad (8)$$

где v_i — константы, задающие направление луча, а $N \in [0, +\infty)$ является координатой вдоль луча. В самом деле, подстановка (8) в (6) обращает каждое уравнение системы (6) в одно и то же уравнение, описывающее динамику переменной N (движение вдоль луча)

$$\dot{N} = N \left(1 - \frac{N}{N_c} \sum_{j=1}^s v_j \right). \quad (9)$$

Без потери общности будем считать, что константы v_i удовлетворяют дополнительному условию

$$\sum_{j=1}^s v_j = 1 \quad (10)$$

(которое может быть выполнено для любого луча (8) путём домножения правой части (8) на константу), тогда из (8) имеем

$$N = \sum_{j=1}^s n_j. \quad (11)$$

В этом случае переменная $N(t)$ имеет смысл полной численности клеток, а её динамика описывается тогда частным случаем уравнения (9)

$$\dot{N} = N \left(1 - \frac{N}{N_c} \right), \quad (12)$$

имеющим два состояния равновесия: неустойчивое $N = 0$ и устойчивое $N = N_c$. Подставляя $N = N_c$ в уравнение луча (8) и учитывая (10), убеждаемся, что устойчивое состояние равновесия на каждом луче лежит на инвариантном многообразии (7). Поскольку каждая точка в положительном ортанте лежит на каком-либо луче вида (8), из этого рассуждения следует отмеченная выше глобальная устойчивость инвариантного многообразия (7) в положительном ортанте.

Выражение (8) при выполнении (10) может рассматриваться как решение системы (6)

$$n_i(t) = v_i N(t), \quad (13)$$

где $N(t)$ — решение уравнения (12).

1.3. Подсистема обучения и метод обучения коллективного классификатора. Сформулируем методику обучения коллективного классификатора, основанную на конкурентной динамике, исходя из предположения, что популяционная динамика ансамбля в процессе обучения описывается моделью (3), где параметры k_i , определяющие силу внутривидовой конкуренции, теперь считаются переменными во времени, а именно динамика переменных $k_i(t)$ в процессе обучения определяется обучающими примерами, последовательно предъявляемыми системе, а после окончания обучения все k_i обращаются в нуль (динамика системы тогда описывается вырожденной моделью (6)).

Пусть x — вход классификатора (признак или, вообще говоря, вектор признаков), и для каждого типа клеток задана функция отклика $f_i(x) \geq 0$, описывающая отклик любой клетки i -го типа на входное значение признака x (везде используем обозначения, соответствующие [3]).

Пусть имеется обучающая последовательность $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{\text{learn}}}$, содержащая общее количество N_{learn} обучающих примеров, каждый из которых представляет собой пару $\pi_\alpha = (x_\alpha, c_\alpha)$, состоящую из значения признака x_α и метки класса $c_\alpha \in \{+, -\}$, задающей принадлежность примера к одному из двух классов, которые далее именуется «положительным» и «отрицательным» и обозначаются соответствующими символами ‘+’ и ‘-’.

Будем считать, что все обучающие примеры предъявляются последовательно, в случайном порядке, длительность предъявления каждого примера составляет фиксированную величину T_s , а временные промежутки между предъявлением последовательных примеров отсутствуют (полное время обучения составляет, таким образом, величину $N_{\text{learn}} \cdot T_s$).

Введём в рассмотрение динамику переменных k_i — «подсистему обучения», описываемую уравнениями

$$\dot{k}_i = \begin{cases} -\tau_l^{-1} k_i & \text{вне процесса обучения,} \\ \tau_l^{-1} f_i(x_\alpha) (k^+ - k_i), & \text{если } c_\alpha = +, \\ \tau_l^{-1} f_i(x_\alpha) (k^- - k_i), & \text{если } c_\alpha = -, \end{cases} \quad (14)$$

где α — номер обучающего примера, предъявляемого в текущий момент времени, τ_l — параметр, определяющий временной масштаб процесса обучения, k^+ и k^- — константы.

Если для некоторого k_i в течение неограниченного времени реализуется только один из случаев в правой части уравнения (14), и $x_\alpha = \text{const}$ (то есть в течение неограниченного времени предъявляется один обучающий пример либо ни одного примера), то имеем для k_i автономную систему 1-го порядка (на фазовой прямой), которая при $f_i(x_\alpha) > 0$ имеет единственное глобально устойчивое состояние равновесия $k_i = 0$, $k_i = k^+$ или $k_i = k^-$, соответственно случаям в правой части (14). Характерное время приближения значения $k_i(t)$ к состоянию равновесия зависит от значения $f_i(x_\alpha)$, причём в случае $f_i(x_\alpha) = 0$ (если i -й тип клеток не даёт отклика на значение признака x_α) динамика (14) для переменной k_i вырождается в константу (то есть данный обучающий пример не оказывает влияния на значение переменной k_i).

Интуитивное обоснование предлагаемой методики обучения основано на соображении, что последовательность случайно выбираемых обучающих примеров приводит в (14) к стохастической динамике, в результате которой установившееся среднее значение каждой переменной k_i определяется только теми обучающими примерами, которые попадают в область ненулевого отклика соответствующего (i -го) типа клеток, а именно — соотношением между количествами примеров из положительного и отрицательного классов среди них. В частности, если в области отклика i -го типа клеток имеются только примеры из положительного (отрицательного) класса, то в процессе обучения в системе (14) правая часть оказывается отличной от нуля только для случая, соответствующего $c_\alpha = +$ ($c_\alpha = -$), и тогда $k_i(t)$ стремится к детерминированному предельному

значению $k_i(t) \rightarrow k^+$ ($k_i(t) \rightarrow k^-$). Если же клетки i -го типа дают ненулевой отклик на примеры из обоих классов, присутствующие в обучающей последовательности в случайном порядке, то в процессе обучения неизбежны случайные флуктуации переменной $k_i(t)$ на интервале между k^+ и k^- , причём можно ожидать, что если среди соответствующих (то есть дающих ненулевой отклик клеток i -го типа) обучающих примеров преобладают примеры из положительного (отрицательного) класса, то значения $k_i(t)$ в среднем будут оказываться ближе к k^+ (k^-). Кроме того, выполнение условия

$$T_s \ll \tau_l \quad (15)$$

подразумевает, что за время τ_l системе предъявляется большое количество обучающих примеров, благодаря чему их действие на систему должно эффективно усредняться, то есть дисперсия флуктуаций переменных $k_i(t)$ должна спадать с уменьшением отношения T_s/τ_l .

Вышеприведённые интуитивные рассуждения формализованы в Приложении, где приведён анализ динамики подсистемы обучения (14) как для детерминированной постановки задачи, в которой обучающая последовательность считается заданной, так и для стохастической постановки, где обучающая последовательность рассматривается как случайная выборка из некоторой генеральной совокупности. Показано, что в последнем случае математические ожидания (случайных) переменных $k_i(t)$ сходятся с течением времени к стационарным значениям

$$\langle k_i(t) \rangle \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \hat{k}_i, \quad (16)$$

причём при выполнении условия (15) стационарные значения дисперсий $D[k_i(t)]$ стремятся к нулю.

Соответствующая конкурентная динамика численностей типов клеток n_i , описываемая подсистемой (3), куда вместо постоянных параметров k_i теперь должны быть подставлены случайные процессы $k_i(t)$, являющиеся решением подсистемы обучения (14), также становится стохастической. Однако в установившемся (стационарном) режиме подсистемы обучения, в предположении о малости дисперсий переменных $k_i(t)$, что обеспечивается условием (15), можно ожидать, что дисперсии численностей $n_i(t)$ также должны быть малы. Из этих соображений, пренебрежём флуктуациями при описании асимптотического состояния подсистемы (3), которое в этом приближении рассматривается как детерминированное и описывается глобально устойчивым состоянием равновесия (4), куда вместо k_i подставляются соответствующие стационарные значения математических ожиданий $\hat{k}_i$:

$$\langle n_i(t) \rangle \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \hat{n}_i = h N_c \hat{k}_i^{-1}. \quad (17)$$

Стационарное значение суммарной численности даётся выражением (5), а именно

$$\sum_{i=1}^s \hat{n}_i = N_c (1 - h). \quad (18)$$

После окончания обучения, согласно первому случаю в (14), все переменные k_i устремляются к нулю экспоненциально, с постоянной времени τ_l . В предположении, что этот масштаб мал в сравнении с характерным временным масштабом популяционной динамики (3), можно считать, что динамика системы мгновенно переключается на режим вырожденной конкуренции (6), для которого асимптотическое состояние процесса обучения (17) выступает в качестве начального условия. Как показано в разделе 1.2, дальнейшее движение изображающей точки в фазовом пространстве происходит вдоль соответствующего луча (8) и стремится к устойчивому состоянию

равновесия, лежащему на пересечении этого луча с инвариантным многообразием (7). Движение вдоль луча (8) подразумевает, что значения переменных в состоянии равновесия $n_i = n_i^{\text{eq}}$ получаются пропорциональным масштабированием начальных значений $n_i = \hat{n}_i$ с сохранением соотношений между ними, то есть

$$n_i^{\text{eq}} = b \hat{n}_i, \quad (19)$$

где b — неизвестная константа. С другой стороны, в силу уравнения инвариантного многообразия (7), имеем

$$\sum_{i=1}^s n_i^{\text{eq}} = N_c. \quad (20)$$

Из уравнений (18)–(20) находим $b = (1 - h)^{-1}$. Тогда из уравнений (19) и (17) получаем установившиеся значения численностей типов клеток n_i^{eq} , определяющие результирующий состав обученного классификатора

$$n_i^{\text{eq}} = \frac{h}{1 - h} N_c \hat{k}_i^{-1}. \quad (21)$$

1.4. Аппроксимация байесовского решающего правила обученным классификатором.

Если априорные вероятности принадлежности классифицируемого объекта к каждому из двух классов одинаковы, то оптимальным с точки зрения минимизации вероятности ошибки классификации является байесовское решающее правило [1, разд. 1.1–1.2], [2, разд. 3], [3, уравн. (9)]

$$C_{\text{Bayes}}(x) = \begin{cases} +, & \text{если } w_+(x) > w_-(x), \\ -, & \text{если } w_+(x) \leq w_-(x), \end{cases} \quad (22)$$

где $w_+(x)$ и $w_-(x)$ — функции условной плотности распределения вероятности признака x по условию принадлежности объекта к классу c :

$$w_+(x) = w(x|c = +), \quad w_-(x) = w(x|c = -). \quad (23)$$

В рамках задачи обучения, функции $w_+(x)$ и $w_-(x)$ не заданы априори, и решающее правило классификатора должно быть получено в результате обучения на примерах.

Покажем, что решающее правило классификатора, обученного по методике, описанной в разделе 1.3, при определённых условиях может рассматриваться как аппроксимация правила (22). Следуя подходу, применённому в [3], будем считать функции отклика клеток $f_i(x)$ «узкими» в том смысле, что для них выполняется приближённое соотношение [3, уравн. (19)] (вопрос формализации этого приближения обсуждается ниже)

$$\frac{\int g(x) f_i(x) dx}{\int f_i(x) dx} \approx g(x_i), \quad (24)$$

где $g(x) = w_+(x)$ или $g(x) = w_-(x)$, x_i — «центральное» значение аргумента (признака), которое можно приписать каждой функции $f_i(x)$ таким образом, что «существенно отличные от нуля» (вносящие основной вклад в интеграл) значения $f_i(x)$ достигаются для значений аргумента x , сосредоточенных в окрестности $x = x_i$. Совокупность значений $\{x_i\}$ для всех типов клеток может образовывать равномерную или, вообще говоря, неравномерную сетку на множестве значений признака x . Заметим, что соотношение (24) становится точным, если функции отклика выражены через дельта-функцию Дирака в виде $f_i(x) = c_i \delta(x - x_i)$, где c_i — константы. Для реальных

функций отклика соотношение (24) выполняется тем точнее, чем меньше изменяются функции $w_+(x)$ и $w_-(x)$ на «эффективной ширине» (вносящей основной вклад в интеграл) функции отклика $f_i(x)$.

В Приложении показано, что при выполнении (15) и (24), в случае равенства априорных вероятностей двух классов (что, однако, не является принципиальным требованием; выкладки могут быть модифицированы для случая неравных априорных вероятностей классов), стационарное состояние (16) подсистемы обучения, устанавливающееся в процессе обучения, аппроксимируется выражением

$$\hat{k}_i \approx \frac{k^+ + k^-}{2} + \frac{k^+ - k^-}{2} \cdot \frac{w_+(x_i) - w_-(x_i)}{w_+(x_i) + w_-(x_i)}, \quad (25)$$

откуда, полагая для определённости $k^+ < k^-$, получаем соотношение

$$\hat{k}_i \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{k^+ + k^-}{2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} w_+(x_i) < w_-(x_i), \\ w_+(x_i) = w_-(x_i), \\ w_+(x_i) > w_-(x_i), \end{cases} \quad (26)$$

выполняемое с точностью до всех аппроксимаций, сделанных выше.

Подставляя результат (26) в выражение (21), для численностей типов клеток в обученном классификаторе n_i^{eq} имеем

$$n_i^{\text{eq}} \begin{cases} < \Theta \\ = \Theta \\ > \Theta \end{cases} \begin{cases} \text{при} & w_+(x_i) < w_-(x_i), \\ \text{при} & w_+(x_i) = w_-(x_i), \\ \text{при} & w_+(x_i) > w_-(x_i), \end{cases} \quad \text{где} \quad \Theta = \frac{h}{1-h} N_c \frac{2}{k^+ + k^-}. \quad (27)$$

Строгая формализация аппроксимации (24) требует конкретизации предположений о входящих в неё функциях. В Приложении приводится один из вариантов такой формализации, представленный в виде интервальной оценки (в форме двойного неравенства) в рамках условий, которым удовлетворяет семейство функций отклика $f_i(x)$, используемых в разделе 2. Соответствующая модификация соотношений (26), (27) также приведена в Приложении и может быть использована при разработке классификатора, однако для компактности выкладок далее рассматривается упрощённая формулировка, заданная соотношениями (25)–(27).

Введём в рассмотрение решающее правило коллективного классификатора, заданное аналогично [3, уравн. (10)] в виде

$$C_{\text{Collective}}(x) = \begin{cases} +, & \text{если } F(x) > \Theta, \\ -, & \text{если } F(x) \leq \Theta, \end{cases} \quad F(x) = \sum_i n_i f_i(x), \quad (28)$$

где $F(x)$ — суммарный отклик всех клеток, составляющих коллективный классификатор, Θ — порог классификации. Положим, что функции отклика $f_i(x)$ удовлетворяют дополнительному требованию

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (29)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, вследствие чего имеем

$$F(x_i) = n_i. \quad (30)$$

В примере, рассмотренном в разделе 2, соотношения (29), (30) выполняются точно; для реальных функций отклика (например, при реализации классификатора в виде ансамбля живых клеток

с синтетическими генными структурами [4, 5]) они могут рассматриваться как приближённые, и выполнение этих соотношений может быть обеспечено с некоторой точностью.

Применяя выражение (30) в случае обученного классификатора, то есть при $n_i = n_i^{\text{eq}}$, и учитывая соотношение (27) вместе с введённым в нём выражением для порога Θ , заключаем, что решающее правило обученного коллективного классификатора (28) аппроксимирует байесовское правило (22) в том смысле, что для значений признака x , попадающих в узлы сетки $x \in \{x_i\}$, ответ коллективного классификатора (28) совпадает с байесовским решающим правилом (22) с точностью, определяемой использованными аппроксимациями, а вне узлов сетки зависит от конкретного выбора функций отклика $f_i(x)$ (например, для случая, рассмотренного в разделе 2, определяется линейной интерполяцией значений $F(x)$ между узлами сетки).

В общем случае выражение для порога Θ , введённое в (27), непригодно для практического применения напрямую, поскольку входящая в него величина h , исходно определяемая в (4), сама по себе выражается через переменные подсистемы обучения k_i , равновесные значения которых устанавливаются в процессе обучения и не известны априори. Для решения задачи практического отыскания значения порога Θ , рассмотрим предельный случай

$$k^+ \ll k^-, \quad (31)$$

при котором выражение для Θ переходит в

$$\Theta = \frac{h}{1-h} N_c \frac{2}{k^-}. \quad (32)$$

Предположим, что среди типов клеток имеется хотя бы один такой (обозначим его номер как i^*), для которого реализуется подавляющее преобладание обучающих примеров из отрицательного класса, то есть $w_+(x_{i^*}) \ll w_-(x_{i^*})$. В этом пределе выражение (25) для $\hat{k}_{i^*}$ переходит в $\hat{k}_{i^*} = k^-$, а соответствующая численность клеток данного типа в составе обученного классификатора, согласно (21), составляет

$$n_{i^*}^{\text{eq}} = \frac{h}{1-h} N_c \frac{1}{k^-}. \quad (33)$$

Заметим, что при $k^+ < k^-$ выражение (25) даёт $\hat{k}_i \leq k^-$ для всех типов клеток i . Тогда значение (33) может быть найдено как наименьшая численность среди всех типов клеток в обученном классификаторе (21)

$$n_{i^*}^{\text{eq}} = n_{\min} = \min_i \{n_i^{\text{eq}}\}, \quad (34)$$

либо, согласно (30), как наименьшее значение суммарного отклика обученного классификатора $F(x)$ в узлах сетки $\{x_i\}$

$$n_{i^*}^{\text{eq}} = n_{\min} = \min_i F(x_i). \quad (35)$$

Сравнивая выражения (32) и (33), заметим, что искомое пороговое значение Θ может быть найдено как удвоенная величина $n_{i^*}^{\text{eq}}$, то есть

$$\Theta = 2n_{\min} = 2 \min_i F(x_i). \quad (36)$$

В силу вышесказанного, для практического определения порога Θ требуется обеспечить наличие среди типов клеток хотя бы одного «калибровочного» типа, для которого имеет место подавляющее преобладание обучающих примеров из отрицательного класса среди примеров, вызывающих ненулевой отклик клеток этого типа; в этом случае значение порога Θ может быть установлено согласно выражению (36).

2. Результаты

Конкретизируем задачу следующим образом. В подсистеме популяционной динамики (3) единственным свободным параметром является N_c , однако изменение N_c эквивалентно одновременному перемасштабированию всех переменных состояния n_i , поэтому значение N_c может быть без нарушения общности выбрано любым. Положим $N_c = 1$, что соответствует измерению численности клеток n_i в долях от ёмкости среды N_c .

В подсистеме обучения (14) положим $k^- = 5$, $k^+ = 0.5 \ll k^-$, что удовлетворяет (31). Выберем масштаб времени подсистемы обучения $\tau_l = 2$.

Функции отклика типов клеток зададим аналогично [3] в виде базиса линейной интерполяции на эквидистантной сетке

$$x_i = x_1 + (i - 1)\Delta, \quad (37a)$$

$$f_i(x) = \max \left\{ 1 - \left| \frac{x - x_i}{\Delta} \right|, 0 \right\}, \quad (37b)$$

что удовлетворяет требованию (29). Тогда $F(x)$ в (28) представляет собой кусочно-линейную интерполяцию значений (30) в узлах сетки. Шаг сетки Δ полагаем равным 1, количество типов клеток $s = 9$, сетка x_i пробегает целочисленные значения от $x_1 = 2$ до $x_9 = 10$. График одной из функций этого семейства показан на рис. 1.

Начальные условия для подсистемы популяционной динамики задаются $n_i(0) = N_c/s$, а для подсистемы обучения $k_i(0) = 1$.

Продолжительность предъявления одного обучающего примера $T_s = 0.01 \ll \tau_l$, чем обеспечено выполнение (15). Полное количество предъявляемых обучающих примеров составляет $N_{\text{learn}} = 20000$, таким образом полное время обучения составляет $T_s \cdot N_{\text{learn}} = 200$. Продолжительность эволюции системы после завершения обучения (после предъявления всех обучающих примеров) составляет $T_{\text{free}} = 20$.

Обучающие примеры в процессе обучения выбираются из двух классов случайно, с равной вероятностью и независимо. Функции условной плотности вероятности классов для получения выборки обучающих примеров задаются аналогично работе [3]: одна из этих функций (для «отрицательного» класса) представлена гауссовским распределением, вторая (для «положительного» класса) — бимодальным распределением, полученным суперпозицией двух гауссовских функций:

$$w_+(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right), \quad w_-(x) = \frac{1}{\sigma_3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}, \quad (38)$$

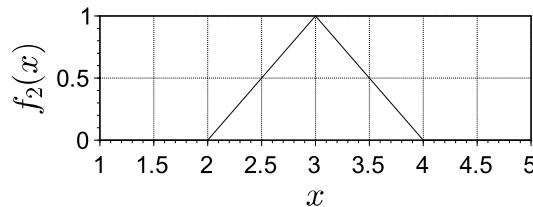


Рис. 1. График функции отклика клетки $f_i(x)$ на примере $i = 2$ ($x_i = 3$)

Fig. 1. Graph of cell response function $f_i(x)$ for $i = 2$ ($x_i = 3$)

Представлены результаты моделирования для следующих комбинаций параметров:

$$\mu_1 = 3, \quad \mu_2 = 9, \quad \mu_3 = 6, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1; \quad (39a)$$

$$\mu_1 = 3, \quad \mu_2 = 7, \quad \mu_3 = 6, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.5. \quad (39b)$$

Соответствующие графики функций $w_+(x)$ и $w_-(x)$ показаны на верхних панелях рис. 2. Значения параметров (39a) идентичны рассмотренным в [3]. Дополнительными вертикальными линиями сетки отмечены значения $x = x_L$ и $x = x_R$, являющиеся корнями уравнения $w_+(x) = w_-(x)$ и представляющие собой границы областей решений байесовского решающего правила (22).

Выполнено численное моделирование динамики полной системы, состоящей из подсистемы популяционной динамики (3), описывающей динамику численностей типов клеток $n_i(t)$, и подсистемы обучения (14), описывающей динамику коэффициентов внутривидовой конкуренции $k_i(t)$. Полученная эволюция динамики всех переменных модели представлена на рис. 3.

Графики отклика обученного коллективного классификатора $F(x)$ согласно (28), где взяты численности клеток в конечный момент численного эксперимента $n_i = n_i(T_s \cdot N_{\text{learn}} + T_{\text{free}})$, вместе с соответствующим пороговым значением Θ согласно (36), показаны на нижних панелях рис. 2. Сопоставление верхней и нижней панелей рис. 2 показывает, что решающее правило обученного коллективного классификатора (28), как и предсказано теорией, аппроксимирует байесовское решающее правило (22) в том смысле, что неравенство $F(x_i) > \Theta$ (положительный ответ коллективного классификатора) имеет место для значений признака x в тех узлах сетки $x = x_i$, в которых байесовский классификатор даёт положительный ответ ($w_+(x_i) > w_-(x_i)$), и наоборот, $F(x_i) < \Theta$ при $w_+(x_i) < w_-(x_i)$, чем и подтверждается работоспособность предложенной методики обучения коллективного классификатора без внешнего сортировщика.

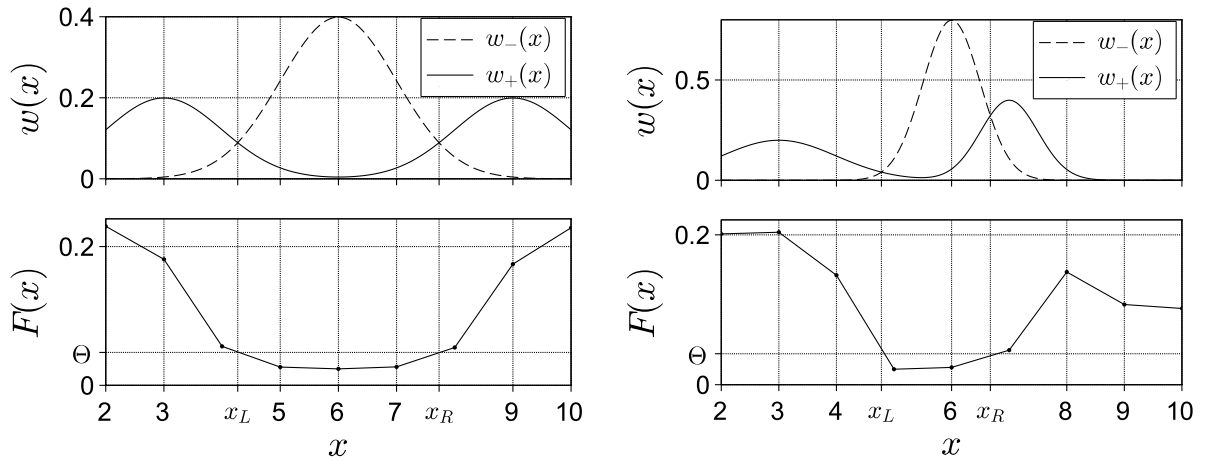


Рис. 2. Верхние панели: графики функций условной плотности вероятности классов $w_+(x)$ и $w_-(x)$ (38). Нижние панели: функция суммарного отклика обученного классификатора $F(x)$ (28). Дополнительными вертикальными линиями сетки отмечены границы x_L, x_R областей решений байесовского классификатора (22); дополнительной горизонтальной линией сетки на нижних панелях отмечен порог (36) решающего правила коллективного классификатора (28). Значения параметров распределений для классов: слева — согласно (39a), справа — согласно (39b)

Fig. 2. Upper panels: graphs of the conditional probability density functions for the classes $w_+(x)$ and $w_-(x)$ (38). Lower panels: summary response function $F(x)$ (28) of the trained classifier. Additional vertical grid lines denote the decision boundaries x_L, x_R for the Bayesian classification rule (22); additional horizontal grid lines in the lower panels denotes the threshold (36) for the collective classifier decision rule (28). Parameter values: left column (39a), right column (39b)

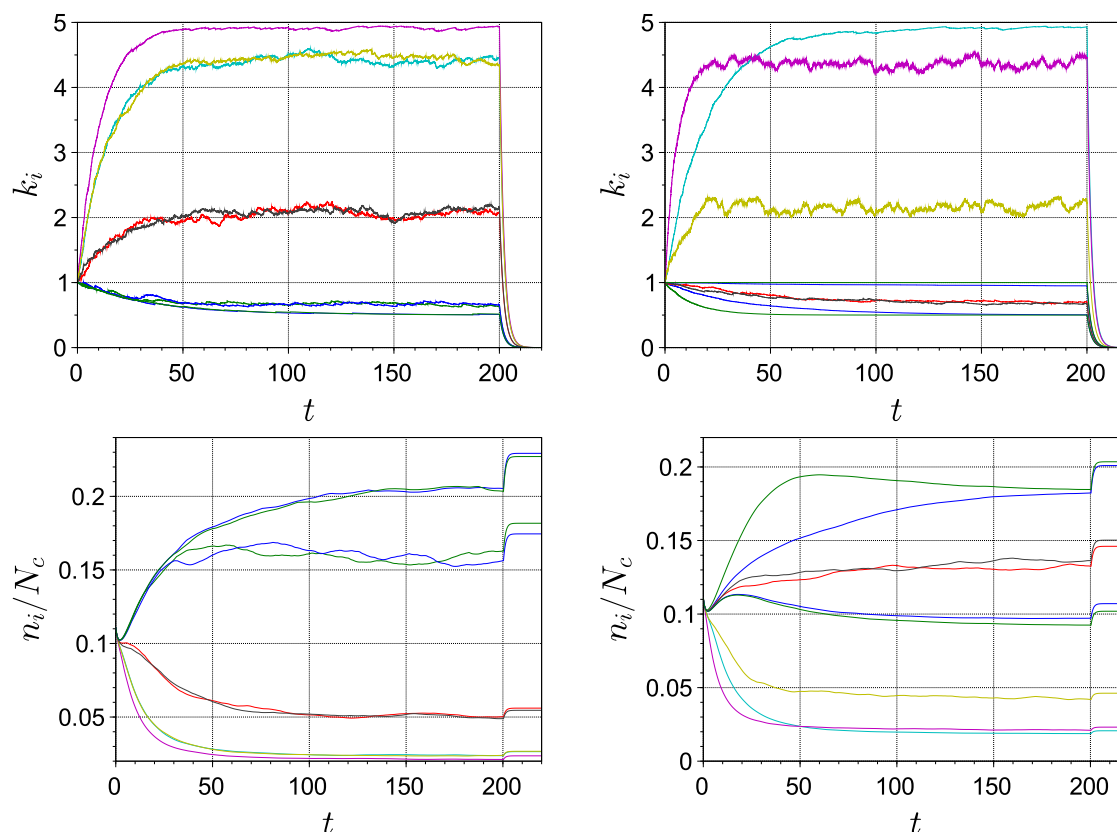


Рис. 3. Эволюция динамических переменных подсистемы обучения (14) $k_i(t)$ (верхние панели) и подсистемы популяционной динамики (3) $n_i(t)$ (нижние панели). Отрезок времени $t = 0 \dots 200$ — обучение, отрезок $t = 200 \dots 220$ — переходный процесс после обучения. Значения параметров распределений для классов: слева — согласно (39a), справа — согласно (39b) (цвет онлайн)

Fig. 3. Evolution of the dynamical variables of the learning subsystem (14) $k_i(t)$ (upper panels) and of the population dynamics subsystem (3) $n_i(t)$ (lower panels). Time ranges: $t = 0 \dots 200$ — learning, $t = 200 \dots 220$ — transient process after learning. Parameter values: left column (39a), right column (39b) (color online)

Заключение

Новая модель конкурентной динамики, представляющая собой модификацию системы, предложенной в [3], обеспечивает обучение коллективного классификатора только за счёт популяционной динамики, без использования внешнего сортировщика. Для этого система дополняется «подсистемой обучения», динамика которой определяется последовательностью обучающих примеров и, в свою очередь, управляет силой внутривидовой конкуренции в популяционной динамике. На примере рассмотренной концептуальной модели показано, что решающее правило, порождаемое обученным классификатором, является аппроксимацией оптимального байесовского правила, если удовлетворяется ряд допущений: в течение характерного масштаба времени динамики подсистемы обучения должно предъявляться большое количество обучающих примеров, выбираемых случайно и независимо, для их эффективного усреднения (снижения флуктуаций); продолжительность обучения должна быть достаточно большой для обеспечения сходимости к устойчивому состоянию равновесия; конкурентоспособность типов клеток вне процесса обучения должна быть одинаковой для сохранения пропорций типов клеток в обученном ансамбле; функции отклика клеток должны быть узкими в сравнении с условными распределениями классов

на пространстве признаков и вместе должны обладать свойствами базиса интерполяции для формирования суммарной функции отклика. Эти допущения не отличаются от сделанных в [4], где рассматривалась реализация коллективного классификатора в виде ансамбля живых клеток с синтетическими генными структурами, что позволяет рассчитывать на возможность такой реализации и для подхода, предложенного в настоящем исследовании, однако открытой остаётся проблема реализации «подсистемы обучения», то есть управления внутривидовой конкуренцией на основе последовательности обучающих примеров.

Приложение

1. Глобальная устойчивость режима сосуществования. В работе [6] модель Лотки–Вольтерры записана в виде

$$\dot{n}_i = n_i \left(b_i + \sum_{j=1}^s a_{ij} n_j \right), \quad i = 1 \dots s.$$

В случае невырожденной матрицы коэффициентов $A = (a_{ij})$ круглые скобки одновременно обращаются в ноль в единственной точке фазового пространства, которая, таким образом, является состоянием равновесия системы. Теорема [6] тогда утверждает, что это состояние равновесия глобально устойчиво в положительном ортанте, если оно в нём находится, и существует такая постоянная диагональная матрица с положительными коэффициентами C , что матрица $CA + (CA)^T$ (где T — операция транспонирования) является отрицательно определённой.

Для применения этой теоремы к системе (3) (для наглядности размерность системы выбрана $s = 3$) матрица A записывается в виде

$$A = -\frac{1}{N_c} \begin{pmatrix} 1 + k_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + k_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + k_3 \end{pmatrix},$$

а матрица C полагается единичной, тогда

$$CA + (CA)^T = -\frac{2}{N_c} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \right].$$

Здесь матрица из единиц является положительно полуопределённой, диагональная матрица имеет положительные коэффициенты и, значит, является положительно определённой, следовательно выражение в целом является отрицательно определённой матрицей. Остальные условия теоремы также выполнены.

2. Детерминированное описание процесса обучения. Уравнения, составляющие подсистему обучения (14), независимы друг от друга, поэтому дальнейшее рассмотрение относится к одному отдельно взятому уравнению системы, то есть значение индекса i фиксируется; везде далее обозначение k используется как сокращённый эквивалент для k_i . Поскольку процесс обучения описывается вторым и третьим случаями в (14), именно они рассматриваются далее.

Если последовательность обучающих примеров $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{\text{learn}}}$ задана, то система (14) описывает детерминированную динамику со скачкообразно изменяющимися во времени параметрами в правой части. Момент времени, в который начинается предъявление обучающего примера под номером α , обозначим

$$t_\alpha = T_s(\alpha - 1). \quad (40)$$

На каждом интервале времени предъявления отдельно взятого обучающего примера $t \in (t_\alpha, t_{\alpha+1})$ система (14) имеет постоянные параметры и может быть представлена в виде

$$\dot{k} = -\lambda_\alpha(k - k_\alpha^0), \quad (41)$$

где введены обозначения

$$\lambda_\alpha = \tau_l^{-1} f_i(x_\alpha), \quad k_\alpha^0 = \begin{cases} k^+, & \text{если } c_\alpha = +, \\ k^-, & \text{если } c_\alpha = -. \end{cases} \quad (42)$$

Исходя из непрерывности решения $k(t)$ в точках разрыва правой части $t = t_\alpha$ (то есть в моменты смены обучающего примера), вводя обозначение

$$k_\alpha = k(t_\alpha) \quad (43)$$

для значения переменной $k(t)$ в начальный момент предъявления обучающего примера π_α и рассматривая это значение как начальное условие для уравнения (41), запишем соответствующее частное решение в виде

$$k(t) = k_\alpha^0 + (k_\alpha - k_\alpha^0)e^{-\lambda_\alpha(t-t_\alpha)}, \quad t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1}], \quad (44)$$

в результате чего значение переменной $k(t)$ по окончании предъявления обучающего примера π_α (то есть в момент времени $t = t_\alpha + T_s = t_{\alpha+1}$), которое совпадает с начальным условием $k_{\alpha+1}$ для следующего обучающего примера, выражается точечным отображением

$$k_{\alpha+1} = k_\alpha^0 + (k_\alpha - k_\alpha^0)e^{-\lambda_\alpha T_s} \quad (45)$$

или эквивалентно

$$k_{\alpha+1} = k_\alpha(1 - \varepsilon_\alpha) + k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha, \quad (46)$$

где введено обозначение

$$\varepsilon_\alpha = 1 - e^{-\lambda_\alpha T_s} = 1 - e^{-\frac{T_s}{\tau_l} f_i(x_\alpha)}. \quad (47)$$

Поскольку $f_i(x) \geq 0$, всегда имеем $\varepsilon_\alpha \in [0, 1]$, причём $\varepsilon_\alpha = 0$ реализуется только в случае $f_i(x_\alpha) = 0$, то есть если i -й тип клеток даёт нулевой отклик на значение признака $x = x_\alpha$. Кроме того, полагая функции отклика $f_i(x)$ ограниченными и вводя параметр

$$\mu = \frac{T_s}{\tau_l}, \quad (48)$$

который является малым в рамках предположения (15) о малости длительности предъявления одного обучающего примера T_s в сравнении с временным масштабом подсистемы обучения τ_l , и раскладывая экспоненту в (47) в ряд по степеням μ , находим

$$\varepsilon_\alpha = \mu f_i(x_\alpha) + O(\mu^2), \quad (49)$$

что является малой величиной порядка $O(\mu)$.

Таким образом, имея заданную последовательность обучающих примеров $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{\text{learn}}}$, через которые выражениями (42) и (47) определяются последовательности параметров $\{k_\alpha^0\}$ и $\{\varepsilon_\alpha\}$ в отображении (46), а также задавая начальное условие $k(t=0) = k_1$, получаем из (46) значения переменной $k(t)$ в моменты смены обучающих примеров $k(t_\alpha) = k_\alpha$, тогда значения $k(t)$ внутри интервалов предъявления обучающих примеров даются выражением (44).

3. Стохастическое описание процесса обучения. Рассмотрим теперь стохастическую постановку задачи, где каждый обучающий пример $\pi_\alpha = (x_\alpha, c_\alpha)$ выбирается случайным образом из некоторой генеральной совокупности обучающих примеров, то есть обучающая последовательность $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{\text{learn}}}$ представляет собой случайную выборку некоторой случайной величины $\pi = (x, c) \in \mathbb{R} \times \{+, -\}$. Заметим, что в таком случае разные примеры π_α и $\pi_{\beta \neq \alpha}$ независимы между собой и имеют одинаковые вероятностные свойства, однако величины x_α и c_α внутри каждого примера, вообще говоря, зависимы (именно на этой зависимости основана возможность классификации). Отображение (46) тогда задаёт марковский случайный процесс $\{k_\alpha\}$ с дискретным временем и случайными параметрами k_α^0 и ε_α , а решение подсистемы обучения $k(t)$, получаемое из (44), является случайным процессом с непрерывным временем.

Поскольку (случайные) параметры k_α^0 и ε_α в (46) выражаются однозначно через компоненты примера π_α , они зависимы между собой, однако они независимы от величины k_α , которая имеет смысл начального условия для подсистемы обучения при предъявлении примера π_α , а значит, k_α может зависеть от предшествующих примеров $\pi_{\beta < \alpha}$, но не от π_α . Из этого следует факторизация математического ожидания $\langle k_\alpha \varepsilon_\alpha \rangle = \langle k_\alpha \rangle \langle \varepsilon_\alpha \rangle$ [7, § 25]; тогда из (46) получаем отображение для математических ожиданий

$$\langle k_{\alpha+1} \rangle = \langle k_\alpha \rangle (1 - \langle \varepsilon \rangle) + \langle k^0 \varepsilon \rangle, \quad (50)$$

где введены обозначения $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_\alpha \rangle$ и $\langle k^0 \varepsilon \rangle = \langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha \rangle$, не зависящие от α в силу идентичности вероятностных свойств обучающих примеров под всеми номерами α .

За исключением вырожденного случая $\langle \varepsilon \rangle = 0$, который означает, что i -й тип клеток не даёт отклика ни на один пример (см. комментарий к уравнению (47); в таком случае этот тип является «лишним» и может быть исключён), отображение (50) имеет неподвижную точку

$$\hat{k} = \frac{\langle k^0 \varepsilon \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}, \quad (51)$$

которая отыскивается из условия $\langle k_{\alpha+1} \rangle = \langle k_\alpha \rangle = \hat{k}$, является устойчивой в силу $|1 - \langle \varepsilon \rangle| < 1$ и определяет стационарное значение, к которому сходится математическое ожидание процесса $\{k_\alpha\}$. К тому же значению сходится и математическое ожидание процесса с непрерывным временем $k(t)$, который определяется выражением (44) и принимает значения между k_α и $k_{\alpha+1}$ на каждом отрезке $t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1}]$, чем обосновывается формула (16).

По формуле полного математического ожидания [7, § 23, уравн. (5)] находим

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle P(c_\alpha = +) + \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle P(c_\alpha = -), \quad (52a)$$

$$\langle k^0 \varepsilon \rangle = \langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle P(c_\alpha = +) + \langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle P(c_\alpha = -). \quad (52b)$$

Заметим, что значения k_α^0 при заданном c_α определяются выражением (42), а значит, при расчёте условных математических ожиданий в (52b) могут считаться детерминированными величинами, то есть

$$\langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle = k^+ \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle, \quad \langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle = k^- \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle. \quad (53)$$

Для компактности выкладок будем считать априорные вероятности двух классов одинаковыми, то есть $P(c_\alpha = +) = P(c_\alpha = -) = 1/2$. Это требование не является принципиальным; дальнейшие выкладки могут быть модифицированы для случая неравных априорных вероятностей классов.

Вводя обозначения для (не зависящих от α) условных математических ожиданий

$$\langle \varepsilon^+ \rangle = \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle, \quad \langle \varepsilon^- \rangle = \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle \quad (54)$$

и используя соотношения (52a,b), (53), перепишем (51) в виде

$$\hat{k} = \frac{k^+ \langle \varepsilon^+ \rangle + k^- \langle \varepsilon^- \rangle}{\langle \varepsilon^+ \rangle + \langle \varepsilon^- \rangle} = \frac{k^+ + k^-}{2} + \frac{k^+ - k^-}{2} \cdot \frac{\langle \varepsilon^+ \rangle - \langle \varepsilon^- \rangle}{\langle \varepsilon^+ \rangle + \langle \varepsilon^- \rangle}. \quad (55)$$

Пусть генеральная совокупность, из которой выбираются обучающие примеры, описывается условными плотностями распределения вероятности признака x по условию принадлежности примера к каждому из двух классов, введёнными в (23). Тогда в предположении малости параметра μ условные математические ожидания $\langle \varepsilon^+ \rangle$ и $\langle \varepsilon^- \rangle$ в (54) могут быть записаны (с точностью до $O(\mu^2)$) исходя из выражения (49) в виде

$$\langle \varepsilon^+ \rangle = \mu \int f_i(x) w_+(x) dx, \quad \langle \varepsilon^- \rangle = \mu \int f_i(x) w_-(x) dx. \quad (56)$$

Если функции $f_i(x)$ — «узкие» в смысле приближённого соотношения (24), то выражения (56) могут быть аппроксимированы в виде

$$\langle \varepsilon^+ \rangle \approx w_+(x_i) \cdot \mu \int f_i(x) dx, \quad \langle \varepsilon^- \rangle \approx w_-(x_i) \cdot \mu \int f_i(x) dx, \quad (57)$$

в результате чего результат (55) переписывается в виде (25).

Строгая формулировка аппроксимации (57) требует конкретизации свойств функций, входящих в выражения. Например, как показано в [3, п. 5 Приложения], если на некотором отрезке $x \in [a_i, b_i]$ функции $w_+(x)$ и $f_i(x)$ интегрируемы, и для $w_+(x)$ справедлива оценка $w_+(x) \in [\underline{w}_i^+, \overline{w}_i^+]$, а для $f_i(x)$ имеем $f_i(x) > 0$ на интервале $x \in (a_i, b_i)$, и $f_i(x) = 0$ при $x \notin (a_i, b_i)$ (что выполняется для семейства функций $f_i(x)$, заданных выражениями (37a), (37b), если положить $a_i = x_{i-1}$, $b_i = x_{i+1}$), то справедлива интервальная оценка

$$\underline{w}_i^+ \cdot \mu \int f_i(x) dx \leq \langle \varepsilon^+ \rangle \leq \overline{w}_i^+ \cdot \mu \int f_i(x) dx, \quad (58)$$

которая (вместе с аналогичной оценкой для $\langle \varepsilon^- \rangle$) является строгой формулировкой аппроксимации (57). Соответствующие соотношения, аналогичные (26), (27), но основанные на формулировке аппроксимации (58) вместо (57), могут быть получены из (55) и записываются в виде

$$\hat{k}_i \quad \begin{cases} > \\ < \end{cases} \quad \frac{k^+ + k^-}{2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \overline{w}_i^+ < \underline{w}_i^-, \\ \underline{w}_i^+ > \overline{w}_i^-, \end{cases} \quad (59)$$

$$n_i^{\text{eq}} \quad \begin{cases} < \Theta \\ > \Theta \end{cases} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \overline{w}_i^+ < \underline{w}_i^-, \\ \underline{w}_i^+ > \overline{w}_i^-. \end{cases} \quad (60)$$

Запишем теперь уравнение для дисперсий в отображении (46) с учётом (50), также факторизуя математические ожидания с учётом независимости k_α от k_α^0 и ε_α ; индекс α для краткости отбросим внутри не зависящих от него математических ожиданий:

$$\begin{aligned} D[k_{\alpha+1}] &= \langle k_{\alpha+1}^2 \rangle - \langle k_{\alpha+1} \rangle^2 = \\ &= \langle (k_\alpha(1 - \varepsilon_\alpha) + k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha)^2 \rangle - (\langle k_\alpha \rangle(1 - \langle \varepsilon \rangle) + \langle k^0 \varepsilon \rangle)^2 = \\ &= \langle k_\alpha^2 \rangle \langle (1 - \varepsilon)^2 \rangle + 2 \langle k_\alpha \rangle \langle (1 - \varepsilon) k^0 \varepsilon \rangle + \langle (k^0 \varepsilon)^2 \rangle - \\ &\quad - \langle k_\alpha \rangle^2 (1 - \langle \varepsilon \rangle)^2 - 2 \langle k_\alpha \rangle (1 - \langle \varepsilon \rangle) \langle k^0 \varepsilon \rangle - \langle k^0 \varepsilon \rangle^2. \end{aligned} \quad (61)$$

Приводя подобные слагаемые с учётом определения дисперсии и соотношения

$$\langle (1 - \varepsilon)^2 \rangle = (1 - \langle \varepsilon \rangle)^2 + D[\varepsilon], \quad (62)$$

получаем

$$D[k_{\alpha+1}] = D[k_{\alpha}](1 - \langle \varepsilon \rangle)^2 + \langle k_{\alpha}^2 \rangle D[\varepsilon] - 2\langle k_{\alpha} \rangle (\langle k^0 \varepsilon^2 \rangle - \langle k^0 \varepsilon \rangle \langle \varepsilon \rangle) + D[k^0 \varepsilon]. \quad (63)$$

В пределе $\mu \rightarrow 0$ имеем соотношение малости $\varepsilon = O(\mu)$ (49), откуда следует $D[\varepsilon] = O(\mu^2)$, $D[k^0 \varepsilon] = O(\mu^2)$, и

$$D[k_{\alpha+1}] = D[k_{\alpha}](1 - 2\langle \varepsilon \rangle) + O(\mu^2), \quad (64)$$

тогда для стационарного значения дисперсии $D[k]_s = D[k_{\alpha+1}] = D[k_{\alpha}]$ находим

$$D[k]_s = \frac{O(\mu^2)}{2\langle \varepsilon \rangle} = O(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0. \quad (65)$$

Список литературы

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989. 608 с.
2. Alpaydin E. Introduction to Machine Learning. Fourth Edition. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2020. 683 p.
3. Сутягин А. А., Канаков О. И. Метод обучения коллективного классификатора на основе конкуренции в режиме сосуществования // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 220–239. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-220-239.
4. Didovyk A., Kanakov O. I., Ivanchenko M. V., Hasty J., Huerta R., Tsimring L. Distributed classifier based on genetically engineered bacterial cell cultures // ACS Synthetic Biology. 2015. Vol. 4, no. 1. P. 72–82. DOI: 10.1021/sb500235p.
5. Kanakov O., Kotelnikov R., Alsaedi A., Tsimring L., Huerta R., Zaikin A., Ivanchenko M. Multi-input distributed classifiers for synthetic genetic circuits // PLoS ONE. 2015. Vol. 10, no. 5. P. e0125144. DOI: 10.1371/journal.pone.0125144.
6. Goh B. S. Global stability in many-species systems // The American Naturalist. 1977. Vol. 111, no. 977. P. 135–143. DOI: 10.1086/283144.
7. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: ЛЕНАНД, 2022. 456 с.

References

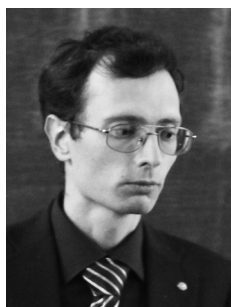
1. Aivazyanyan SA, Buchstaber VM, Yenyukov IS, Meshalkin LD. Applied Statistics: Classification and Reduction of Dimensionality. Moscow: Finansy i Statistika; 1989. 608 p. (in Russian).
2. Alpaydin E. Introduction to Machine Learning. Fourth Edition. Cambridge, Massachusetts: MIT Press; 2020. 683 p.
3. Sutyagin AA, Kanakov OI. Collective classifier learning strategy based upon competition in the coexistence regime. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2):220–239 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-220-239.
4. Didovyk A, Kanakov OI, Ivanchenko MV, Hasty J, Huerta R, Tsimring L. Distributed classifier based on genetically engineered bacterial cell cultures. ACS Synthetic Biology. 2015;4(1):72–82. DOI: 10.1021/sb500235p.

5. Kanakov O, Kotelnikov R, Alsaedi A, Tsimring L, Huerta R, Zaikin A, Ivanchenko M. Multi-input distributed classifiers for synthetic genetic circuits. PLoS ONE. 2015;10(5):e0125144. DOI: 10.1371/journal.pone.0125144.
6. Goh BS. Global stability in many-species systems. The American Naturalist. 1977;111(977): 135–143. DOI: 10.1086/283144.
7. Gnedenko BV. A Course in Probability Theory. Moscow: LENAND; 2022. 456 p. (in Russian).



Сутягин Алексей Алексеевич — родился в Нижнем Новгороде (1992). Окончил с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (ННГУ) по направлению «Радиофизика» (2016). Неоднократный победитель и призёр творческих и научных конкурсов. С 2019 преподаёт на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ в должности ассистента. Научные интересы — конкурентная динамика, коллективные классификаторы. Зарегистрировал РИД в рамках научной работы.

Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: alealesutyagin@gmail.com
AuthorID (eLibrary.Ru): 981112



Канаков Олег Игоревич — родился в Нижнем Новгороде (1981). Окончил с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (ННГУ) по направлению «Радиофизика» (2004). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007, ННГУ) и доктора физико-математических наук (2017, ННГУ) по специальности «Радиофизика». С 2007 года преподаёт на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (с 2019 — в должности профессора). Научные интересы — нелинейная динамика биологических моделей, коллективные классификаторы, локализованные решения и взаимодействие мод в нелинейных гамильтоновских решётках. Опубликовал более 30 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: okanakov@rf.unn.ru
AuthorID (eLibrary.Ru): 142927
ORCID: 0000-0001-9041-2209



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 519.63; 621.822.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003097
EDN: REYSBQ

Решение нелинейной задачи одностороннего динамически нагруженного упорного подшипника скольжения*

П. Е. Федотов¹✉, Н. В. Соколов²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия

²Казанский национальный исследовательский технологический университет, Россия

E-mail: ✉paulfedotov@mail.ru, sokol-88@list.ru

Поступила в редакцию 10.10.2023, принята к публикации 7.02.2024,
опубликована онлайн 1.03.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Цель настоящего исследования состоит в предложении эффективного численного метода решения обратной нелинейной задачи о движении диска ротора компрессора в упорном подшипнике скольжения. **Методы.** Построена периодическая термоупругогидродинамическая математическая модель гидродинамических и тепловых процессов в подшипнике при условии осевого движения диска ротора. В рамках модели сформулирована обратная нелинейная задача определения положения ротора при заданном изменении внешней нагрузки. Предложен итерационный метод решения, использующий решение прямой задачи. Для снижения вычислительных затрат применен модифицированный метод Деккера–Брента совместно с модифицированным методом Ньютона. **Результаты.** Проведены численные эксперименты, показавшие эффективность предложенных подходов. Предложенные методы позволяют существенно сократить требуемое количество ресурсов для расчёта за счёт снижения числа обращений к целевой функции в задаче оптимизации. Построен комплекс программ, позволяющий рассчитывать нелинейную систему движения ротора при различных физических и геометрических параметрах. **Заключение.** Предложен эффективный комплекс численных методов решения обратной нелинейной задачи о движении диска ротора компрессора в упорном подшипнике скольжения. Эффективность метода заключается в существенной экономии вычислительных ресурсов. Показана эффективность метода при проведении численных экспериментов.

Ключевые слова: упорный подшипник скольжения, дифференциальные уравнения, обратная нелинейная задача, zeroIn, метод Деккера–Брента, метод Ньютона.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ–2030»).

Для цитирования: Федотов П. Е., Соколов Н. В. Решение нелинейной задачи одностороннего динамически нагруженного упорного подшипника скольжения // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 180–196. DOI: 10.18500/0869-6632-003097. EDN: REYSBQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023».

Solving a nonlinear problem for a one-sided dynamically loaded sliding thrust bearing*

P. E. Fedotov¹✉, N. V. Sokolov²

¹Kazan (Volga Region) Federal University, Russia

²Kazan National Research Technological University, Russia

E-mail: ✉paulfedotov@mail.ru, sokol-88@list.ru

Received 10.10.2023, accepted 7.02.2024, available online 1.03.2024, published 29.03.2024

Abstract. The purpose of this study is to propose an efficient numerical method for solving the inverse nonlinear problem of the movement of the compressor rotor collar in a fluid film thrust bearing. *Methods.* A periodic thermoelastohydrodynamic (PTEHD) mathematical model of hydrodynamic and thermal processes in a bearing is constructed under the condition of the rotor collar motion. Within the framework of the model, an inverse nonlinear problem of determining the position of the collar under a given external load is formulated. An iterative solution method is proposed, which utilizes the solution of the direct problem. To reduce computational costs, a modified Dekker–Brent method is employed in conjunction with a modified Newton’s method. *Results.* Numerical experiments have been conducted, demonstrating the effectiveness of the proposed approaches. The suggested methods significantly reduce the required computational resources by minimizing the number of calls to the target function in the optimization problem. A software suite has been developed that allows for the calculation of the nonlinear system of rotor motion under various physical and geometric parameters. *Conclusion.* An efficient set of numerical methods for solving the inverse nonlinear problem of the motion of the rotor collar in the compressor fluid film thrust bearing is proposed. The method’s effectiveness lies in substantial savings of computational resources. The method’s efficiency has been demonstrated in numerical experiments.

Keywords: fluid film thrust bearing, differential equations, inverse nonlinear problem, zeroin, Dekker–Brent method, Newton’s method.

Acknowledgements. This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“PRIORITY–2030”).

For citation: Fedotov PE, Sokolov NV. Solving a nonlinear problem for a one-sided dynamically loaded sliding thrust bearing. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2):180–196. DOI: 10.18500/0869-6632-003097.

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Традиционно в качестве опоры ротора компрессорной машины с вращающимся ротором и действующими на него силовыми нагрузками применяются подшипники жидкостного трения [1, 2]. Их распространенность обусловлена отличными быстроходностью и долговечностью при соблюдении определенных условий: регулярная проверка физико-химических показателей масла, чистота фильтрации масла, температурные режимы и пр. Одним из основных аспектов при расчете и проектировании внутренней компоновки корпуса компрессора является обеспечение устойчивого пространственного движения ротора на опорах скольжения, которое проверяется на этапе механических испытаний корпуса. При этом отличительной особенностью возникновения недопустимых вибраций в роторных системах компрессоров являются частые осевые (продольные) колебания. Стоит отметить, для полного анализа и прогнозирования вибрационного состояния роторной системы многие авторы указывают на необходимость изучения ее вибродинамического состояния с учетом гидродинамических процессов в подшипниках скольжения [3, 4].

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Nonlinear days in Saratov for young scientists–2023”.

Исследуемый упорный подшипник скольжения служит для уменьшения износа и трения между вращающимися и неподвижными частями конструкции, восприятия возмущающих сил вдоль оси ротора компрессора и фиксации ротора относительно корпуса в осевом направлении, в том числе при переходных режимах компрессора. Осевые силы могут возникнуть от суммарного перепада давления на рабочих ступенях 2 (рис. 1), от внутренних нестационарных газодинамических процессов сжимаемого газа в проточной части центробежного компрессора (ЦК), от перепада давления сжимаемого газа между сторонами нагнетания и всасывания винтового компрессора (ВК) высокого давления (с конечным давлением более 10 МПа) и/или от осевой составляющей нагрузки косозубого зубчатого зацепления, например, мультипликаторного центробежного компрессора [1, 2, 5, 6].

Исследование нелинейных динамических режимов работы подшипников скольжения не имеет общего распространения, что связано со сложным совместным решением уравнений гидродинамики подшипника и динамики ротора, несмотря на свою более высокую точность расчета динамики ротора турбомашин. Как правило, решается линейная (линеаризованная) постановка с выводом коэффициентов жесткости и демпфирования смазочного слоя подшипника [7, 8]. При расчете упорного подшипника воспринимаемую осевую силу для упрощения процедуры расчета принимают, как правило, постоянной. Однако осевая нагрузка в значительной степени зависит от переменных внутренних физических параметров сжимаемой газовой среды в процессе работы центробежного или винтового компрессора. Особый интерес представляют переходные (неустановившиеся) режимы работы компрессора. Они могут наблюдаться при включении компрессора во внешнюю сеть, содержащую инерционность и емкость; при отключении компрессора от сети; при изменении характеристик самого компрессора, например, при изменении частоты вращения ротора ЦК [5, 6, 9]. Отдельно необходимо рассматривать опасные для прочности конструкции ЦК режимы, связанные с нестационарными газодинамическими процессами непосредственно в проточной части: срыв, вращающийся срыв и помпаж [6, 9, 10]. При переходных режимах на упорный подшипник действует дополнительная нерасчетная динамическая составляющая осевой силы, что приводит к изменению нагрузки по абсолютной величине и в некоторых случаях направлению. Результатом этого может быть выход из строя упорного подшипника вследствие возможного касания диска ротора и рабочей поверхности подушек подшипника.

Теоретический анализ возможных осевых перемещений ротора компрессора под действием внешней нагрузки позволяет в процессе проектирования корпуса оценить правильность выбора геометрических и рабочих параметров роторной системы и выбрать, как следствие, оптимальный

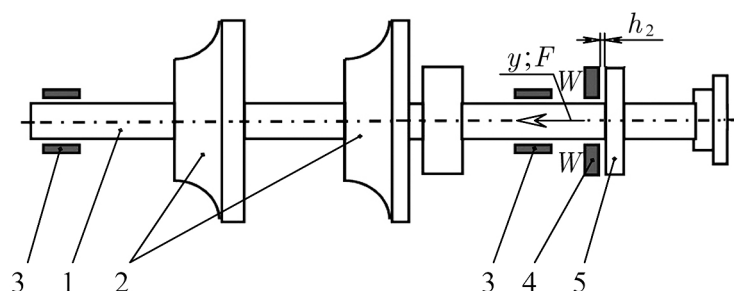


Рис. 1. Схема роторной части центробежного компрессора: 1 — вал; 2 — рабочая ступень; 3, 4 — опорный и упорный подшипники скольжения; 5 — упорный диск; h_2 — рабочий зазор упорного подшипника

Fig. 1. Scheme of the rotary part of a centrifugal compressor: 1 — shaft; 2 — working stage; 3, 4 — fluid film journal and thrust bearings; 5 — collar; h_2 — working clearance of the thrust bearing

вариант ее компоновки с учетом осевого воздействия упорного подшипника. При этом основой этого анализа являются определение осевого перемещения диска ротора при заданной компоновке и условия работы упорного подшипника с сохранением требования к надежности и долговечности его работы. Таким образом, динамические условия работы упорных подшипников скольжения ЦК и ВК и обеспечение устойчивости осевого перемещения диска ротора определяют актуальность исследований настоящего направления. Для описания динамического поведения ротора использована нелинейная задача, описанию решения которой посвящена данная статья.

1. Постановка задачи

Рассматриваемый упорный подшипник скольжения состоит из неподвижных (фиксированных) подушек 1, 2 цельного кольцевого подпятника и вращающегося упорного диска 3, которые разделены между собой смазочными слоями 4 над поверхностью подушек (рис. 2). Такое разделение обеспечивается посредством возникновения гидродинамического давления в смазочных слоях за счет вращения диска 3, сужающего конфузорного зазора по направлению вращения и подачи смазки необходимого объема и требуемой вязкости. При вращении диска 3 смазка поверхностью увлекается в сужающийся клиновидный зазор, в результате чего давление в смазочных слоях 4 подшипника возрастает и уравнивает приложенную извне нагрузку. Пространство между подушками заполнено межподушечными каналами 5 (МПК), через которые подается свежая смазка с постоянным давлением 0.24...0.26 МПа (абс.) от внешней системы смазки компрессорной установки. В МПК на поверхности диска и при условии его вращения формируется тонкий пограничный слой смазки 6, участвующий в сложном теплообменном процессе смешивания смазки [11]. С одной стороны, пограничный слой переносит при вращении диска нагретую за счет диссипации смазку с температурой $t|_{\varphi=0_p}$ с предыдущей подушки на последующую. С другой стороны, воспринимает поступающую из МПК свежую смазку с пониженной температурой t_0 , формируя таким образом важную начальную температуру $t|_{\varphi=0}$ на входе в последующую подушку. Все подушки подшипника имеют единую и уникальную геометрию рабочей поверхности, называемую профилем. В работе рассматриваются два наиболее часто применяемые в компрессорной технике профиля неподвижной поверхности подушки: параллельный межподушечному каналу (МПК) скос (см. рис. 2, а) и винтовая поверхность клинового колоса (см. рис. 2, б). Профиль, в свою очередь, позволяет возникать гидродинамическому давлению с определенной эпюрой, интеграл которой по рабочей поверхности подушки образует несущую способность P , уравнивающую внешнюю осевую силу F и обеспечивающую гарантированный зазор h_2 для исключения касания подушек о диск, в том числе во время переходных режимов ЦК и ВК.

Описанием принципа действия, условий функционирования и математических основ работы подшипников скольжения занимается гидродинамическая теория смазки. Результатом ее последовательного развития является *периодическая термоупругогидродинамическая (ПТУГД) теория* [12]. Такая постановка наиболее полно описывает совместно протекающие гидродинамические и тепловые процессы в смазочном и пограничном слоях, тепловые процессы в несущей подушке и вращающемся элементе с учетом термоупругих деформаций подушки от перепада температур по толщине и направлению вращения элемента. Особенностью этой постановки является то, что для уравнения внутренней энергии, описывающего аккумуляцию и распространение теплоты, задаются периодические тепловые граничные условия возле входной кромки подушки при $\varphi = 0$ [13–15]. Это позволяет напрямую рассчитывать заранее неизвестную температуру на входе в подушку $t|_{\varphi=0}$ в процессе вычислений и не проводить предварительные расчеты температуры путем последовательных приближений [12]. Такая постановка также позволяет учитывать температурные поля подушки и особенно упорного диска с учетом теплообмена с внешней средой.

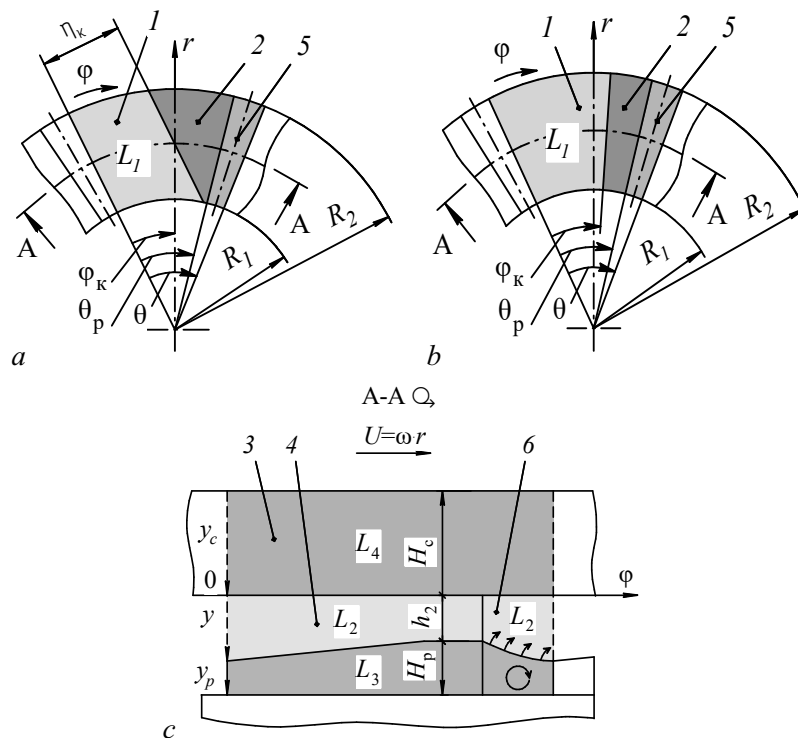


Рис. 2. Расчетная схема упорного подшипника скольжения: *a* — профиль подушки с параллельным МПК скосом; *b* — профиль подушки с винтовой поверхностью; *c* — разрез по А-А вдоль среднего радиуса: 1, 2 — клиновая и плоские части подушки; 3 — упорный диск; 4 — смазочный слой; 5 — междуподушечный канал; 6 — пограничный слой

Fig. 2. Calculation scheme of the fluid film thrust bearing: *a* — pad profile with a parallel taper land; *b* — pad profile with a spiral surface; *c* — section along A-A along the middle radius: 1, 2 — wedge and flat parts of the pad; 3 — collar; 4 — lubricating film; 5 — interpad groove; 6 — boundary layer

Как следствие, из-за совокупности учитываемых факторов течения смазки и распространения теплоты в элементах упорного подшипника ПТУГД теория имеет наибольшую сходимость при верификации результатов численного расчета с физическими экспериментами [16].

При выводе уравнений ПТУГД математической модели работы упорного подшипника скольжения с неподвижными подушками компрессора приняты следующие упрощения, позволившие существенно упростить исходные уравнения Навье–Стокса.

1. Толщина смазочного слоя мала по сравнению с радиальным r и окружным φ направлениями. Для упорного подшипника это направление y , ограниченное поверхностью диска при $y = 0$ и подушки при $y = h$ (см. рис. 2).
2. Градиент давления по толщине смазочного слоя принимается равным нулю $\partial p / \partial y = 0$ по сравнению с радиальным и окружным градиентами давления и при анализе не учитывается.
3. Силы инерции незначительны исходя из анализа порядка величин уравнений Навье–Стокса, то есть субстанциональные производные скоростей $DV_{r(\varphi, y)} / dt = 0$. Это означает также, что силы вязкости смазки преобладают над силами инерции.
4. Течение в смазочном слое предполагается ламинарным при отсутствии вихревого течения и турбулентности внутри слоя, что согласуется с пренебрежимо малыми силами инерции.
5. На смазочный слой не действуют массовые силы (центробежные, гравитационные и пр.).
6. На границе с поверхностью твердых элементов подшипника, то есть диска при $y = 0$ и подушки при $y = h$, смазка находится в неподвижном состоянии либо движется со скоростью этой поверхности (условие прилипания смазки).

7. Анализ порядка величин скоростей в уравнении Навье–Стокса показал доминирующее влияние градиентов скоростей по толщине смазочного слоя $\partial V_r / \partial y$ и $\partial V_\varphi / \partial y$ над остальными.
8. Смазка является ньютоновской и изотропной, то есть физические свойства в каждой ее точке одинаковы во всех направлениях.

Далее ПТУГД математическая модель представлена в безразмерном виде через относительные (безразмерные) величины, отнесённые к характерным размерам (знак « $\bar{\cdot}$ » над величиной). Основными определяющими уравнениями с соответствующими граничными условиями являются:

1. Обобщенное уравнение Рейнольдса, описывающее двумерное распределение давления в смазочном слое области $\bar{L}_1$ ($-1 \leq \bar{r} \leq 1$, $0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p$, $0 \leq \bar{y} \leq 1$) и представляющее собой основное уравнение гидродинамики подшипника. Уравнение выведено с минимумом ограничительных допущений, в котором плотность и вязкость смазки являются функциями всех трех координат. В безразмерном нестационарном виде уравнение принимает следующую форму:

$$-\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[(\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right] - \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[\frac{\bar{h}^3}{\sigma \bar{r} + 1} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \right] =$$

$$= -\text{Re} \psi \sigma \lambda^2 \frac{\partial (\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} + \bar{\omega} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial (\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} + Sh (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A}, \quad (1)$$

где $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{y}$ — безразмерные координаты; $\bar{p} = p h_{20}^2 / (\mu_0 \omega_* R_{cp}^2 \theta)$ — местное безразмерное давление; $\bar{A} = \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left(\bar{h} \int_0^1 \bar{\rho} d\bar{y} \right) - \bar{\rho}_{\bar{y}=1} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\tau}}$ — нестационарный множитель; $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ — функции, учитывающие переменность вязкости смазки по толщине слоя; λ, σ — относительные длина и ширина подушки; $\psi = h_{20} / (R_{cp} \theta)$ — относительная толщина; θ — угловая протяженность подушки с МПК; $\bar{\omega}, \omega_*$ — текущая безразмерная и характерная (как правило, максимальная) угловые скорости диска; R_{cp} — средний радиус подушки; h_{20} — характерная толщина смазочного слоя подшипника; μ_0 — вязкость при температуре подачи смазки t_0 в МПК; $\bar{\tau} = \tau / \tau_*$ — безразмерное время.

2. Уравнение баланса внутренней энергии, описывающее трехмерное распределение температуры в смазочном и пограничном слоях области $\bar{L}_2$ ($-1 \leq \bar{r} \leq 1$, $0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p$, $\bar{\theta}_p \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}$, $0 \leq \bar{y} \leq 1$). В дивергентном размерном нестационарном виде уравнение энергии принимает следующую форму:

$$c_p \left(\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + t \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (c_p \rho r V_r t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{c_p \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_o}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(c_p \rho V_y t - \lambda_o \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \mu \left[\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где t — местная температура, c_p, λ_o — изобарная теплоемкость и теплопроводность смазки, ρ — местная плотность смазки. Преобразование в безразмерный вид уравнения (2) выполнено на этапе численной реализации с использованием безразмерной температуры $\bar{t} = c_p \rho_0 h_{20}^2 (t - t_0) / (\mu_0 \omega_* R_{cp}^2 \theta)$ и с сохранением дивергентной формы. Правая часть уравнения (2) описывает диссипацию механической энергии и превращение ее в тепловую.

3. Трехмерное распределение температур в областях подушки $\bar{L}_3$ ($-1 \leq \bar{r} \leq 1$, $0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p$, $0 \leq \bar{y}_p \leq 1$) и упорного диска $\bar{L}_4$ ($-1 \leq \bar{r} \leq 1$, $0 \leq \bar{\varphi} \leq 1$, $0 \leq \bar{y}_p \leq 1$) описывается собственными уравнениями теплопроводности с соответствующими граничными условиями:

на внешних границах теплообмен учитывается граничными условиями Ньютона–Рихмана; между смазочным слоем и подушкой, а также между смазочным и пограничным слоями и диском ставятся условия непрерывности температур и тепловых потоков (условие сопряжения).

В разработанной ПТУГД математической модели граничное условие для уравнения энергии (2) на входе в смазочный слой выражено в периодической форме, которая подразумевает равенство температур и тепловых потоков смазки (за счет конвекции и теплопроводности). В размерном виде в случае отсутствия перекоса подушек и биения диска условие принимает следующую форму:

$$t|_{\varphi=0} = t|_{\varphi=2\pi}, \quad \left(\frac{c_p \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_o}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} = \left(\frac{c_p \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_o}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=2\pi}.$$

Радиальная и окружная скорости смазки $\bar{V}_r$ и $\bar{V}_\varphi$ математической модели выведены из усеченных уравнений Навье–Стокса после оценки безразмерных величин по методу Н. А. Слезкина и с учетом условия равенства нулю градиента давления по высоте зазора $\bar{h}$. Поперечная скорость $\bar{V}_y$ получена решением усеченного уравнения Навье–Стокса вдоль оси [17].

Форма зазора плоскоклиновой поверхности неподвижной подушки упорного подшипника скольжения при отсутствии перекосов в безразмерном виде выглядит следующим образом:

- в случае параллельного МПК скоса (см. рис. 2, а)

$$\bar{h} = \frac{h}{h_{20}} = 1 - \bar{y} + \varepsilon_0 \left[1 - \frac{(\sigma\bar{r} + 1)}{\bar{\eta}_k} \sin(\sigma\lambda\bar{\varphi}) \right] \delta_k + \alpha_p^* \chi \frac{\Psi_p}{\psi} \int_0^1 [\bar{T}_p(\bar{\theta}_p, \bar{y}_p) - \bar{T}_p(\bar{\varphi}, \bar{y}_p)] d\bar{y}_p, \quad (3)$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & 0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\varphi}_k, \\ 0, & \bar{\varphi}_k < \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_k, \end{cases} \quad \text{где } \bar{\varphi}_k = \frac{1}{\sigma\lambda} \arcsin \frac{\bar{\eta}_k}{\sigma\bar{r} + 1};$$

- в случае винтовой поверхности клинового скоса (см. рис. 2, б)

$$\bar{h} = \frac{h}{h_{20}} = 1 - \bar{y} + \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\theta}_k \bar{\theta}_p} \right] \delta_k + \alpha_p^* \chi \frac{\Psi_p}{\psi} \int_0^1 [\bar{T}_p(\bar{\theta}_p, \bar{y}_p) - \bar{T}_p(\bar{\varphi}, \bar{y}_p)] d\bar{y}_p, \quad (4)$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & 0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_k \bar{\theta}_p, \\ 0, & \bar{\theta}_k \bar{\theta}_p < \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p, \end{cases}$$

где $\bar{y} = y/h_{20}$ — безразмерная координата положения диска; $\varepsilon_0 = \Delta h/h_{20}$ — относительная клиновидность подушки; $\bar{\eta}_k = \eta_k/R_{cp}$ — относительная ширина клинового скоса; $\alpha_p^* = \alpha_p/\beta$; α_p — коэффициент линейного расширения материала подушки; β — температурный коэффициент вязкости смазки; δ_k — единичная функция.

Четвертый член справа уравнений формы зазора (3), (4) учитывает тепловые деформации неподвижной подушки за счет свободного теплового расширения, описанные формулой А. И. Голубева для торцовых уплотнений [18]. Координата $\bar{y}$ определяется или путем прямой подстановки в уравнение формы зазора (постановка прямой задачи), или вычисляется на основе уравнения динамики ротора компрессора (постановка обратной нелинейной задачи).

Безразмерная форма основных определяющих уравнений ПТУГД математической модели необходима для преобразования рассматриваемой размерной криволинейной области L_2 ($R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \varphi \leq \theta_p$, $\theta_p \leq \varphi \leq \theta$, $0 \leq y \leq h$) в прямоугольный вид $\bar{L}_2$ ($-1 \leq \bar{r} \leq 1$, $0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p$, $\bar{\theta}_p \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}$, $0 \leq \bar{y} \leq 1$) (см. рис. 2) на этапе численной реализации с обязательным условием сохранения дивергентной формы уравнений. Безразмерная форма необходима для уменьшения времени операций численных вычислений и сокращения общего количества исследуемых параметров при проведении последующего параметрического анализа характеристик упорного подшипника.

Дифференциальные уравнения математической модели в ПТУГД постановке и их граничные условия связаны через такие физические свойства рабочей смазки, как вязкость, плотность, теплоемкость и теплопроводность, а также через форму зазора, включающую геометрический профиль рабочей поверхности подушки, и некоторые режимные параметры. Разработанная авторами ПТУГД математическая модель и последующая ее численная реализация привели к написанию программы расчетов *Sm2Px3Txt* [19]. Программа, с учетом современной тенденции интенсификации тепловых процессов и учитываемого трехмерного распределения теплоты в элементах подшипника, позволяет изучать статические и динамические режимы работы одностороннего упорного подшипника скольжения с неподвижными подушками центробежного или винтового компрессора. К статическим (интегральным) характеристикам относятся несущая способность, потери мощности на трение, расходы смазки, тепловые потоки и др. Особенности построения математической модели, описание основных определяющих уравнений Рейнольдса (область L_1), внутренней энергии (область L_2) и теплопроводности подушки (область L_3) и упорного диска (область L_4) и граничных к ним условий (см. рис. 2), обезразмеривание и специфику численной реализации можно найти в статьях [13–17, 20, 21].

Под действием изменяемой внешней нагрузки при переходных режимах работы центробежного или винтового компрессора упорный диск совершает перемещения вдоль оси ротора. Отклонение диска от произвольной заранее заданной точки определяется формулой

$$y = y_{st} + y_d,$$

где y_{st} , y_d — статическая и динамическая составляющие положения диска. Начальное положение диска, характеризующееся зазором h_{20} , задаётся перед началом работы подшипника. Динамическая составляющая y_d определяет смещение диска относительно статического положения диска y_{st} .

Разработанная ПТУГД математическая модель предполагает две постановки в зависимости от определения динамической составляющей y_d :

- 1) *прямую*, при которой задается траектория перемещения диска и на его основе определяются характеристики подшипника. Решение прямой задачи описано в статье [22];
- 2) *обратную нелинейную*, при которой задается изменение внешней нагрузки и определяются положение диска и характеристики подшипника, соответствующие этому положению.

В данной работе рассматривается обратная нелинейная задача, которая основывается на совместном численном интегрировании уравнений динамики ротора и гидродинамики упорного подшипника. Форма перемещения упорного диска возле точки статического положения на кривой подвижного равновесия подшипника представляет собой геометрическое место точек, определяющих в конкретный момент времени положение центра диска, движущегося под действием внешней возмущающей силы и реакции упорного подшипника. Такая постановка позволяет исследовать влияние нелинейной реакции упорного подшипника и моделировать реальное динамическое поведение ротора при любых осевых эксцентриситетах e_p [23, 24]. Об устойчивости осевого движения ротора под действием внешней силы можно судить путем анализа амплитуды

и частоты перемещения диска ротора и возможности касания подвижной и неподвижной частей подшипника.

Ротор представляется в виде сосредоточенной массы, на которую действуют внешняя сила от компрессора F и реакция упорного подшипника P . Соотношение между положением диска, несущей способностью и внешней осевой силой выражается через уравнение динамики ротора

$$m_p \frac{d^2 y}{d\tau^2} = P - F, \quad (5)$$

где $m_p = \text{const}$ — масса ротора, y — координата смещения диска вдоль оси ротора, τ — время, $P = P(\tau, y)$ — несущая способность одностороннего подшипника, $F = F(\tau, y)$ — осевая сила. Внешняя осевая сила представляется в виде суммы статической и динамической составляющих $F = F_{st} + F_d$. Динамическая составляющая силы может быть задана по гармоническому закону, описывающему мягкий помпаж ЦК, или в виде кусочно-непрерывных функций в случае жесткого помпажа ЦК [6, 13]. Для решения уравнения (5) начальное условие положение диска определяется на основе решения стационарной задачи: при $\tau = 0$ положение $y = y_{st}$.

Используя следующие зависимости — координата $y = h_{20}\bar{y}$, время $\tau = \tau_0\bar{\tau}$, несущая способность $P(\bar{\tau}, \bar{y}) = C_{pf}\bar{P}(\bar{\tau}, \bar{y})$, сила $F(\bar{\tau}, \bar{y}) = C_{pf}\bar{F}(\bar{\tau}, \bar{y})$, $C_{pf} = \frac{\mu_0 \omega_* R_{cp}^3 \theta^2 (R_2 - R_1)}{h_{20}^2}$ — уравнение (5) приобретает следующий безразмерный вид:

$$\Lambda \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{\tau}^2} = \bar{P} - \bar{F},$$

где $\Lambda = \frac{m_p h_{20}^3}{\tau_0^2 \mu_0 \omega_* R_{cp}^3 \theta^2 (R_2 - R_1)} = \frac{m_p \psi^3 Sh}{\tau_0 \mu_0 (R_2 - R_1)}$ — приведённая масса, характеризующая инерционные свойства ротора; $\tau_0 = 2\pi/\omega$ — безразмерное время (за характерное время принято время одного оборота диска); $Sh = \theta/(\omega_* \tau_0)$ — число Струхали; $\psi = h_{20}/(R_{cp} \theta)$ — относительная толщина; h_{20} — характерная толщина слоя подшипника; μ_0 — вязкость при температуре подачи смазки t_0 в МПК; R_1, R_2, R_{cp} — внутренний, наружный и средний радиусы; θ_p, θ — угловые протяженности подушки и элемента периодичности; ω_* — характерная (как правило, максимальная) угловая скорость диска.

Гидродинамика упорного подшипника в свою очередь представлена несущей способностью i -ой подушки подшипника. При отсутствии биения упорного диска и перекоса общей поверхности подушек упорного подшипника несущая способность равна $P = zP_i$, где z — число подушек. Несущая способность i -ой подушки вычисляется путем интегрирования полей давления [15]:

$$P_i = \int_0^{\theta_p} \int_{R_1}^{R_2} p_i r d\varphi dr, \quad (6)$$

где $p_i = p_i(\tau, y)$ — распределение давлений в смазочном слое i -ой подушки. Оно определяется на основе решения уравнения Рейнольдса элемента периодичности (см. уравнение (1)) на поверхности подушки при $R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \theta_p$ (см. рис. 2) с учетом распределения температур и формируемой вязкости в объеме смазки [12, 13].

Безразмерная форма основных определяющих уравнений ПТУГД математической модели необходима для преобразования рассматриваемой размерной криволинейной области $L_2(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \theta_p, \theta_p \leq \varphi \leq \theta, 0 \leq y \leq h)$ в прямоугольный вид $\bar{L}_2(-1 \leq \bar{r} \leq 1, 0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p, \theta_p \leq \bar{\varphi} \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1)$ (см. рис. 2) на этапе численной реализации с обязательным условием сохранения дивергентной формы уравнений. Безразмерная форма необходима для корректной оценки величин переменных и сокращения общего количества исследуемых параметров при проведении последующего параметрического анализа характеристик упорного подшипника.

2. Методика

Учитывая вид уравнения (5), задачу можно разделить на две части: стационарную, связанную со статической силой F_{st} , и нестационарную, учитывающую динамическое изменение F_d .

В случае стационарной задачи уравнение (5) будет иметь следующий вид:

$$0 = P - F_{st}. \quad (7)$$

Следовательно, необходимо уравновесить стационарную силу F_{st} за счёт поиска определенного положения диска y и расчета несущей способности P . Описанное можно свести к оптимизационной задаче

$$y : \min |P - F_{st}|. \quad (8)$$

Положение диска естественным образом влияет на толщину смазочного слоя, от которой зависят параметры системы. Если толщина смазочного слоя уменьшится до нуля, то это будет означать касание диска и подушек, что, как говорилось, приведёт к выходу из строя упорного подшипника. Следовательно, на параметр y должно быть наложено условие $\max_{x \in L_2} h(x, y) > 0$, где h — толщина смазочного слоя.

Несущая способность P является интегральной характеристикой, вычисление которой требует знания распределения температур и давления в упорном подшипнике. В свою очередь, температура и давление зависят друг от друга через такие физические свойства жидкости, как вязкость и плотность смазки, и определяются через систему трехмерных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Стоит отметить, что уравнение энергии (2) для вычисления температуры в смазке имеет доминирующие конвективные члены [12, 13]. Это накладывает особые требования на используемые методы, точность расчёта и, следовательно, требует вычислительных ресурсов. Для решения оптимизационной задачи (8) потребуется выбрать итерационный метод. Поскольку ищется оптимальное положение диска y , на каждой итерации метода будет выбираться некоторый y^{k+1} , для которого потребуется вычислить несущую способность P и, следовательно, производить полный расчёт прямой стационарной задачи. Это является затратным процессом.

После решения стационарной задачи (7) возникает равновесие системы, и упорный подшипник воспринимает величину стационарной силы F_{st} . На основе этого решения можно производить дальнейшие вычисления, связанные с динамикой. Для решения уравнения (5) построим трехслойный по времени итерационный процесс.

$$m_p \frac{\hat{y}_h - 2y_h + \check{y}_h}{h_\tau^2} = P(\hat{y}_h) - F, \quad (9)$$

здесь y_h — сеточная аппроксимация смещения диска y , $\check{y}_h$ — смещение диска на предыдущем временном слое, $\hat{y}_h$ — на следующем, h_τ — шаг по времени. Записью $P(\hat{y}_h)$ дополнительно подчёркивается зависимость несущей способности P от положения диска, а именно от значения смещения диска на следующем временном слое.

Уравнение (9) можно свести к аналогичной (8) оптимизационной задаче

$$\hat{y}_h : \min \left| \left(m \frac{\hat{y}_h}{h_\tau^2} - P(\hat{y}_h) \right) - \left(\frac{2y_h - \check{y}_h}{h_\tau^2} - F \right) \right|. \quad (10)$$

Как и в случае с (8), при некотором итерационном методе, на каждой итерации при фиксированном положении диска, необходимо решать прямую задачу, что также является крайне затратным процессом. В соответствии с этим неявная схема является предпочтительной.

Для сравнения в работах [23, 24] для подшипников скольжения авторы решали выведенную систему дифференциальных уравнений движения ротора явным методом Адамса–Башфорта, имеющим четвертый порядок точности. Из-за невозможности самостартования первые три-четыре точки кривой движения рассчитывались методом Эйлера.

3. Результаты

Для решения представленных оптимизационных задач, в силу их вычислительной сложности, необходимо выбрать такой метод минимизации, который будет требовать перерасчёта коэффициентов уравнения (8) и (10) как можно меньшее количество раз. Если рассматривать целевые функции поставленных оптимизационных задач, то выяснится, что на их поведение влияют физические и геометрические параметры подшипника. Единственное, о чём можно сказать с уверенностью, так это о монотонности целевой функции. Поэтому метод должен учитывать нелинейность и иметь возможность искать решение для функций различного вида. Ниже представлена Таблица количества вызовов целевой функции в зависимости от её вида.

В Таблице приведено сравнение нескольких методов оптимизации, в том числе из пакета MatLab поиска нуля функции. Опишем параметры экспериментов: `zeroin` реализует алгоритм Деккера–Брента [25] (выбрана точность 10^{-15}); `fzero` — алгоритм Деккера (точность 10^{-15}); `fminsearch` — алгоритм Нелдера–Мида (точность 10^{-4}); `fminbnd` — алгоритм золотого сечения с параболическое интерполяцией (точность 10^{-4}); `newton` — алгоритм Ньютона с производными вычисленными разностным методом (точность 10^{-4}). Метод `zeroin` представлен изменённым, были добавлены дополнительные проверки, которые в некоторых случаях позволяют уменьшить количество вызовов целевой функции. Основным методом, который рекомендует MatLab, является метод `fzero`. Поскольку некоторые методы требовали большого количества вызовов целевой функции, точность для них была понижена.

По результатам экспериментов определено, что модифицированный алгоритм `zeroin` значительно превосходит предлагаемые MatLab методы. Однако для `zeroin` необходимо знать область локализации нуля функции. Для поиска области локализации был создан метод на основе метода Ньютона. Формулируется он следующим образом. Пусть $[a, b]$ — некоторый отрезок в области определения функции f . Если $f(a) * f(b) < 0$, значит, $[a, b]$ есть область локализации и не требует уточнения. Иначе необходимо произвести сдвиг, областью локализации, в таком случае, будет $[\alpha, \beta]$, где

$$\alpha = (a + \Delta c)\sigma + \left(\frac{b+a}{2} + \Delta c\right)(1 - \sigma),$$

$$\beta = (b + \Delta c)\sigma + \left(\frac{b+a}{2} + \Delta c\right)(1 - \sigma).$$

Здесь $\Delta c = \frac{\Delta b - \Delta a}{2}$, $\Delta a = -f(a)/f'$, $\Delta b = -f(b)/f'$, $f' = (f(b) - f(a))/(b - a)$, σ — параметр сжатия, который определяет соответствие размеров начальной области и конечной.

Таблица. Количество вызовов целевой функции в зависимости от её вида. $\rightarrow$ — решение находится на правой границе области локализации, $\gg$ — решение сдвинуто влево от границы

Table. Number of target function calls depending on its form. $\rightarrow$ — the solution is located at the right boundary of the localization region, $\gg$ — the solution is shifted to the left from the boundary

Целевая функция	zeroin	fzero	fminsearch	fminbnd	newton
$\text{const} \neq 0$	1	1	29	22	200
$x - \text{const}$	3	27	36	16	4
$x^2 - \text{const} \rightarrow$	2	32	52	20	18
$x^2 - \text{const} \leftarrow$	1	1	22	20	2
$x^2 - \text{const} \ll \rightarrow$	10	32	52	15	138
$x^2 - \text{const} \gg \leftarrow$	10	24	30	15	18
$\cos(x), [0, \pi]$	4	33	52	12	8
$\cos(x), [-\pi, 0]$	4	27	34	12	8

Ниже представлены графики результатов вычислений с использованием данной методики.

Для расчёта температуры и давления используются построенная авторами статьи ПТУГД модель подшипника и комплекс программ *Sm2Px3Txt*. В качестве исходных данных для программы при численных экспериментах приняты геометрические размеры упорного подшипника скольжения центробежного компрессора, расположенного в лаборатории кафедры «Компрессорные машины и установки» ФГБОУ ВО «КНИТУ» [13–15, 17, 20, 21].

На рис. 3 представлены графики распределения температуры вдоль оси y в центре расчётной области и давления p вдоль угловой координаты φ при оптимальном положении диска. Как видно, температура достигает максимального значения вблизи поверхности подушки за счет торможения неподвижной поверхностью, но не превышает предельного значения 110°C [1, 2]. Некоторое возрастание температуры t наблюдается вблизи поверхности диска за счет переноса нагретой по причине вязкого сдвига слоев смазки с предыдущей подушки. В теле диска и подушки за счет теплообмена с окружающей средой температура несколько понижается. Ранее выбранный плоскоклиновой профиль рабочей поверхности подушки (см. рис. 2, *a, b*) определяет форму кривой распределения давления p и ее значения. При этом максимум распределения смещен в сторону вращения диска. Интеграл по рабочей поверхности позволяет вычислить несущую способность упорного подшипника P , уравнивающую внешнюю осевую силу F (см. уравнение (6)).

На рис. 4 представлены два графика, демонстрирующие работу предложенных выше алгоритмов. График на рис. 4, *a* отображает синим поведение несущей способности в зависимости от положения диска y . Дополнительно на графике отображена действующая на ротор сила F в фиксированный момент времени. Вертикальными чертами отображена область локализации равновесного состояния между несущей способностью P и силой F . График на рис. 4, *b* показывает связь между температурой в центре расчётной области (синий цвет) и траекторией движения диска во времени (красный цвет, на графике в безразмерном виде). Для демонстрации был выбран мягкий помпаж как наиболее простой. Как видно из графика, кривые практически совпадают с единой циклической частотой без временной инерции.

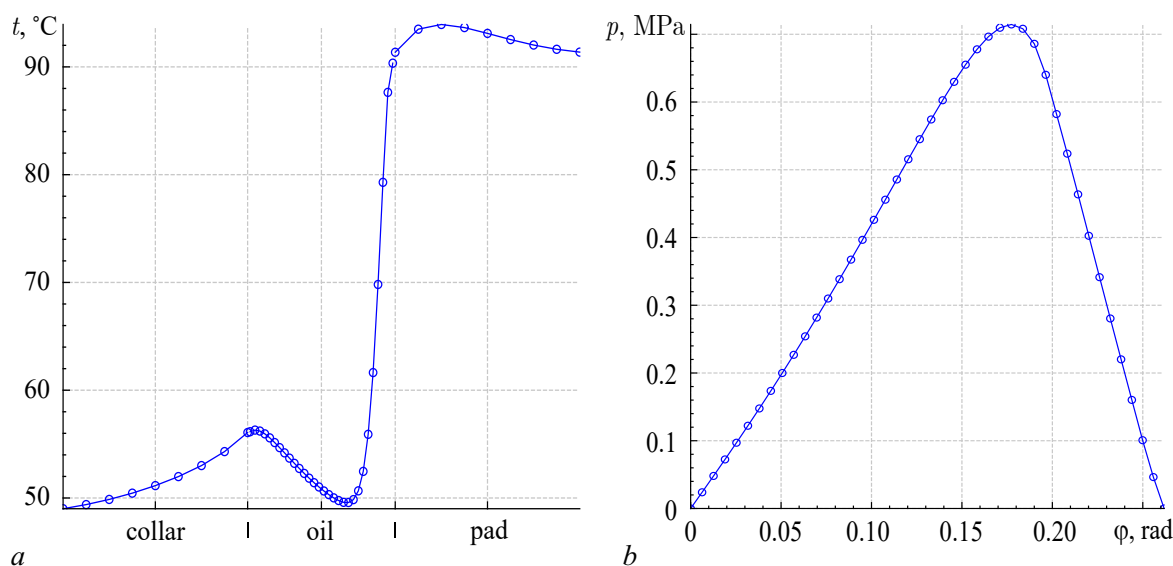


Рис. 3. Распределение при оптимальном положении диска: *a* — температуры ($^\circ\text{C}$) вдоль оси y , *b* — давление (Па) вдоль угловой координаты φ

Fig. 3. Distribution at the optimal collar position: *a* — temperature along the y axis, *b* — pressure along the angular coordinate φ

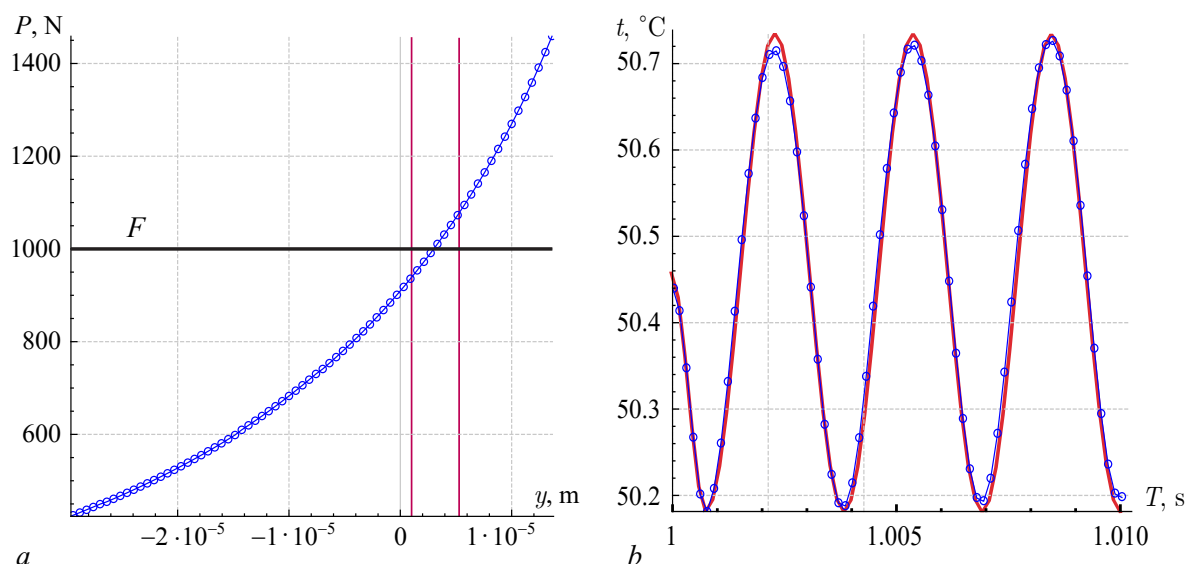


Рис. 4. Графики, демонстрирующие связь действующей на ротор силы F : a — область локализации равновесного состояния между несущей способностью P и силой F , b — связь температуры (синяя линия) и траектории движения диска (красная линия) (цвет онлайн)

Fig. 4. Graphs demonstrating the relationship of the force F acting on the rotor. a — The region of equilibrium localization between the load-bearing capacity P and the force F , b — the relationship between temperature (blue line) and the trajectory of the collar movement (red line) (color online)

В будущих статьях вопросы изменения интегральных характеристик упорного подшипника компрессора при решении прямой и обратной нелинейной задач, интенсивности помпажа и частоты вращения диска будут рассмотрены отдельно.

Заключение

На основе предложенных методов разработан комплекс программ *Sm2Px3Tхт*, позволяющий решать прямую и обратную нелинейные задачи одностороннего динамически нагруженного упорного подшипника скольжения с неподвижными подушками при различных геометрических, физических и режимных параметрах. С помощью программы можно исследовать устойчивость ротора с учетом воздействия упорного подшипника при различных режимах нагружения, что имеет важное практическое значение при проектировании различных компрессорных машин. Преимущества примененной ПТУГД математической модели заключаются в возможности полного учета температурного поля в подшипнике скольжения, включая перенос теплоты между соседними подушками и подачей свежей смазки. При нелинейной постановке происходит совместное интегрирование уравнений движения ротора и гидродинамики упорного подшипника, что позволяет учитывать нелинейное поведение реакции подшипника и моделировать реальное динамическое поведение ротора. При численной реализации предложен итерационный метод решения, использующий решение прямой задачи. Для снижения вычислительных затрат применен модифицированный метод Деккера–Брента совместно с модифицированным методом Ньютона. Решение обратной задачи позволит оптимизировать геометрические размеры упорного подшипника для достижения повышенной несущей способности и устойчивости движения ротора. Однако следует отметить, что решение обратной задачи с использованием ПТУГД математической модели может

быть сложным и требовать значительных вычислительных ресурсов. Таким образом, разработка эффективных численных методов и алгоритмов для решения этой задачи остается актуальной областью исследований в инженерной науке.

Список литературы

1. *Хадиев М. Б., Хамидуллин И. В.* Компрессоры в технологических процессах. Расчет подшипников скольжения центробежных и винтовых компрессоров. Казань: КНИТУ, 2021. 260 с.
2. *Максимов В. А., Баткис Г. С.* Трибология подшипников и уплотнений жидкостного трения высокоскоростных турбомашин. Казань: ФЭН, 1998. 429 с.
3. *Костюк А. Г.* Динамика и прочность турбомашин : учеб. для студентов вузов. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: МЭИ, 2007. 476 с.
4. *Некрасов А. Л.* Расчетный анализ нелинейных колебаний роторов турбомашин в подшипниках скольжения: дис. . . . канд. техн. наук: 05.04.12. Москва: МЭИ, 1998. 125 с.
5. *Хисамеев И. Г., Максимов В. А., Баткис Г. С., Гузельбаев Я. З.* Проектирование и эксплуатация промышленных центробежных компрессоров. 2-е изд., испр. и доп. Казань: ФЭН, 2012. 671 с.
6. *Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Хавкин А. Л., Хуснутдинов И. Ф.* Характер осевых колебаний ротора при переменных режимах работы центробежной компрессорной установки // Компрессорная техника и пневматика. 2018. Т. 4. С. 29–32.
7. *Lund J. W.* Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings // ASME Journal of Tribology. 1987. Vol. 109, no. 1. P. 37–41. DOI: 10.1115/1.3261324
8. *Zhu Q., Zhang W. J.* A Preliminary nonlinear analysis of the axial transient response of the sector-shaped hydrodynamic thrust bearing-rotor system // ASME Journal of Tribology. 2003. Vol. 125, no. 4. P. 854–858. DOI: 10.1115/1.1575775
9. *Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Максимов Т. В., Футин В. А.* Одноступенчатая центробежная компрессорная установка: практикум. Казань: КНИТУ, 2019. 152 с.
10. *Хадиев М. Б., Зиннатуллин Н. Х., Нафиков И. М.* Механизм помпажа в центробежных компрессорах // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17, № 8. С. 262–266.
11. *Heshmat H., Pinkus O.* Mixing inlet temperatures in hydrodynamic bearings // ASME Journal of tribology. 1986. Vol. 108, no. 2. P. 231–244. DOI: 10.1115/1.3261168.
12. *Усков М. К., Максимов В. А.* Гидродинамическая теория смазки: этапы развития, современное состояние, перспективы. Москва: Наука, 1985. 143 с.
13. *Sokolov N. V., Khadiev M. B., Maksimov T. V., Fedotov E. M., Fedotov P. E.* Mathematical modeling of dynamic processes of lubricating layers thrust bearing turbochargers // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1158, no. 04219. P. 138–151. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/4/042019.
14. *Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М.* Трёхмерное периодическое термоупругогидродинамическое моделирование гидродинамических процессов упорного подшипника скольжения // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 3. С. 138–151. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-3-138-151.
15. *Sokolov N. V., Khadiev M. B., Fedotov P. E., Fedotov E. M.* Mathematical model of a dynamically loaded thrust bearing of a compressor and some results of its calculation // Mesh methods for boundary-value problems and applications. Lecture notes in computational science and engineering. 2022. Vol. 141. P. 461–473. DOI: 10.1007/978-3-030-87809-2_35.
16. *Максимов В. А., Хадиев М. Б., Федотов Е. М.* Определение гидродинамических и тепло-

вых характеристик упорных подшипников математическим моделированием // Вестник машиностроения. 2004. № 6. С. 39–45.

17. Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М. Численное исследование влияния класса вязкости смазки на работу упорного подшипника скольжения // Математическое моделирование и численные методы. 2023. № 1. С. 92–111. DOI: 10.18698/2309-3684-2023-1-92111.
18. Голубев А. И. Торцовые уплотнения вращающихся валов. М.: Машиностроение, 1974. 214 с.
19. Федотов П. Е., Федотов Е. М., Соколов Н. В., Хадиев М. Б. *Sm2Px3Txт* — Динамически нагруженный упорный подшипник скольжения при постановке прямой задачи. Свид-во о госуд. регистрации программы для ЭВМ № 2020615227, 2020.
20. Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М. Влияние температуры подачи смазочного материала на работу упорного подшипника скольжения // Вестник машиностроения. 2023. № 1. С. 47–55. DOI: 10.36652/0042-4633-2023-102-1-47-55.
21. Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М. Сравнение квазитрехмерной и полной трехмерной постановок работы упорного подшипника скольжения // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2023. Т. 22, № 3. С. 143–159. DOI: 10.18287/2541-7533-2023-22-3-143-159.
22. Fedotov P. E. Numerical solution of the one-sided compressor thrust bearing dynamics equation // CEUR Workshop Proceedings. 2021. Vol. 2837. P. 54–75.
23. Савин Л. А., Соломин О. В., Устинов Д. Е. Метод пространственного движения жесткого ротора на опорах жидкостного трения // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королева (национального исследовательского университета). 2006. № 2-1. С. 328–332.
24. Корнеев А. Ю. Анализ динамики жесткого ротора на конических гидродинамических подшипниках скольжения методом траекторий // Вестник машиностроения. 2013. № 12. С. 24–28.
25. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. Computer Methods for Mathematical Computations // In: Prentice-Hall series in computational mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977. 259 p. DOI: 10.1002/zamm.19790590235.

References

1. Khadiev MB, Khamidullin IV. Compressors in Technological Processes. Calculation of Fluid Film Bearings of Centrifugal and Screw Compressors. Kazan: KNRTU; 2021. 260 p. (in Russian).
2. Maksimov VA, Batkis GS. Tribology of Bearings and Seals of Liquid Friction of High-speed Turbomachines. Kazan: FEN (science); 1998. 429 p. (in Russian).
3. Kostyuk AG. Dynamics and Strength of Turbomachines: a Textbook for University Students. 3rd ed., revised and additional. Moscow: Moscow power engineering university; 2007. 476 p. (in Russian).
4. Nekrasov AL. Calculation Analysis of Nonlinear Vibrations of Turbomachine Rotors in Fluid Film Bearings. PhD Thesis. Moscow: Moscow Power Engineering Institute; 1998. 125 p. (in Russian).
5. Khisameev IG, Maksimov VA, Batkis GS, Guzelbaev YaZ. Design and Operation of Industrial Centrifugal Compressors. 2nd ed., corrected and enlarged. Kazan: FEN (science); 2012. 671 p. (in Russian).
6. Sokolov NV, Khadiev MB, Khavkin AL, Khusnutdinov IF. The nature of axial oscillations of the rotor under variable operating conditions of a centrifugal compressor unit. Compressors and pneumatics. 2018;(4):29–32 (in Russian).

7. Lund JW. Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings. ASME Journal of Tribology. 1987;109(1):37–41. DOI: 10.1115/1.3261324
8. Zhu Q, Zhang WJ. A Preliminary nonlinear analysis of the axial transient response of the sector-shaped hydrodynamic thrust bearing-rotor system. ASME Journal of Tribology. 2003;125(4):854–858. DOI: 10.1115/1.1575775
9. Sokolov NV, Khadiev MB, Maksimov TV, Futin VA. Single-stage centrifugal compressor unit: practical work. Kazan: KNRTU; 2019. 152 p. (in Russian).
10. Khadiev MB, Zinnatullin NK, Nafikov IM. The surge mechanism in centrifugal compressors. Bulletin of the Kazan Technological University. 2014;(8):262–266 (in Russian).
11. Heshmat H, Pinkus O. Mixing inlet temperatures in hydrodynamic bearings. ASME Journal of tribology. 1986;108(2):231–244. DOI: 10.1115/1.3261168.
12. Uskov MK, Maksimov VA. Hydrodynamic Lubrication Theory: Stages of Development, Current State, Prospects. Moscow: Nauka; 1985. 143 p. (in Russian).
13. Sokolov NV, Khadiev MB, Maksimov TV, Fedotov EM, Fedotov PE. Mathematical modeling of dynamic processes of lubricating layers thrust bearing turbochargers. Journal of Physics: Conference Series. 2019;1158(04219):138–151. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/4/042019.
14. Sokolov NV, Fedotov PE, Khadiev MB, Fedotov EM. Three-dimensional periodic thermoelasto-hydrodynamic (PTEHD) modeling of hydrodynamic processes of a thrust bearing. In: Proceedings of the 2021 International Scientific and Technical Engine Conference (EC). 23–25 June 2021, Samara, Russian Federation. New York, NY: IEEE; 2021. P. 1–7. DOI: 10.1109/EC52789.2021.10016829.
15. Sokolov NV, Khadiev MB, Fedotov PE, Fedotov EM. Mathematical model of a dynamically loaded thrust bearing of a compressor and some results of its calculation. Mesh methods for boundary-value problems and applications. Lecture notes in computational science and engineering. 2022;141:461–473. DOI: 10.1007/978-3-030-87809-2_35.
16. Maksimov VA, Khadiev MB, Fedotov EM. Determination of hydrodynamic and thermal characteristics of thrust bearings by mathematical modeling. Bulletin of mechanical engineering. 2004;(6):39–45 (in Russian).
17. Sokolov NV, Khadiev MB, Fedotov PE, Fedotov EM. Numerical study of the lubricant viscosity grade influence on thrust bearing operation. Cyber-physical systems engineering and control. Studies in Systems, Decision and Control. 2023;1:477. DOI: 10.1007/978-3-031-33159-6_16.
18. Golubev AI. Mechanical Seals of Rotating Shafts. Moscow: Mechanical engineering; 1974. 214 p. (in Russian).
19. Fedotov PE, Fedotov EM, Sokolov NV, Khadiev MB. $Sm2Px3Tx\tau$ — Dynamically loaded fluid film thrust bearing when setting a direct problem. Certificate of the state registration of a computer program No. 2020615227. 2020. (in Russian).
20. Sokolov NV, Khadiev MB, Fedotov PE, Fedotov EM. Influence of the lubricant's supply temperature on the operation of a fluid film thrust bearing. Russian Engineering Research. 2023;43(3):264–271. DOI: 10.3103/S1068798X23040329.
21. Sokolov NV, Khadiev MB, Fedotov PE, Fedotov EM. Comparison of quasi-three-dimensional and full three-dimensional formulations of the operation of a thrust sliding bearing. Bulletin of Samara University. Aerospace Engineering, Technology and Mechanical Engineering. 2023;22(3):143–159. DOI: 10.18287/2541-7533-2023-22-3-143-159. (in Russian).
22. Fedotov PE. Numerical solution of the one-sided compressor thrust bearing dynamics equation. CEURWorkshop Proceedings. 2021;2837:54–75.
23. Savin LA, Solomin OV, Ustinov DE. Method of spatial motion of a rigid rotor on fluid friction bearings. Bulletin of the Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolev (National Research University). 2006;(2-1):328–332. (in Russian).

24. Korneev AYu. Analysis of the dynamics of a rigid rotor on conical hydrodynamic plain bearings using the trajectory method. Bulletin of mechanical engineering. 2013;(12):24–28. (in Russian).
25. Forsythe GE, Malcolm MA, Moler CB. Computer Methods for Mathematical Computations. In: Prentice-Hall series in computational mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977. 259 p.



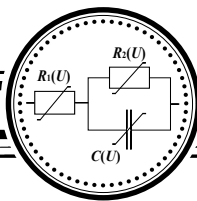
Федотов Павел Евгеньевич — родился в Казани (1996). Окончил с отличием Институт вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета по направлению «Прикладная математика». Защитил магистерскую диссертацию по специальности «Прикладная математика. Математическое моделирование». С 2021 года работает на кафедре «Прикладной математики и искусственного интеллекта» Казанского (Приволжского) федерального университета в должности ассистента. Научные интересы — вычислительная математика, математическое моделирование, высокопроизводительные системы, параллельные вычисления.

Россия, 420008 Казань, ул. Кремлевская, 35
Институт вычислительной математики и информационных технологий,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: paulfedotov@mail.ru
ORCID: 0000-0002-3398-7505
AuthorID (eLibrary.Ru): 1133146



Соколов Николай Викторович — родился в Казани (1988). Окончил с отличием факультет энергомашиностроения и технологического оборудования Казанского государственного технологического университета по специальности «Вакуумная и компрессорная техника физических установок» (2010). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности «Вакуумная, компрессорная техника и пневмосистемы» (2014, КНИТУ). Доцент кафедры «Компрессорные машины и установки» Казанского национального исследовательского технологического университета. Научные интересы — гидродинамическая теория смазки, проектирование и эксплуатация узлов трения компрессоров. Автор 9 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 420029 Казань, ул. Попова, 10, корп. «Г»
Казанский национальный исследовательский технологический университет
E-mail: sokol-88@list.ru
ORCID: 0009-0001-2657-9503
AuthorID (eLibrary.Ru): 871154



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 532.516, 532.517, 517.928

DOI: 10.18500/0869-6632-003091
EDN: SMOTDZ

Особенности динамики вязкой жидкости со свободной границей при периодических воздействиях

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: sennitskii@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.08.2023, принята к публикации 23.10.2023,
опубликована онлайн 8.02.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Целью работы является выявление и изучение особенностей движения вязкой жидкости, имеющей свободную границу и испытывающей периодические по времени воздействия, которые характеризуются отсутствием выделенного направления в пространстве. **Методы.** Используются аналитические методы исследования нелинейных задач, краевых задач для системы уравнений Навье–Стокса и неразрывности — метод возмущений (метод малого параметра), метод Фурье (метод разделения переменных), усреднение, построение и изучение асимптотических формул. **Результаты.** Поставлена и решена новая задача о движении вязкой жидкости. Построены и проанализированы асимптотические представления найденного решения. Обнаружены новые гидромеханические эффекты. **Заключение.** Работа выполнена в развитие перспективного направления в механике жидкости — изучения динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях. Полученные результаты могут использоваться, в частности, в дальнейших исследованиях нетривиальной динамики гидромеханических систем, при разработке методов управления гидромеханическими системами.

Ключевые слова: вязкая жидкость, свободная граница, периодические по времени воздействия, выделенное направление в пространстве, стационарное движение.

Для цитирования: Сенницкий В. Л. Особенности динамики вязкой жидкости со свободной границей при периодических воздействиях // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 197–208. DOI: 10.18500/0869-6632-003091. EDN: SMOTDZ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Peculiarities of the dynamics of a viscous liquid with a free boundary under periodic influences

V. L. Sennitskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB of the RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: sennitskii@yandex.ru

Received 29.08.2023, accepted 23.10.2023, available online 8.02.2024,

published 29.03.2024

Abstract. *Purpose* of the work is revealing and researching of peculiarities of a motion of a viscous liquid having a free boundary and undergoing periodic in time influences which are characterized by the absence of a predominant direction in space. *Methods.* The analytic investigation methods of non-linear problems, of boundary problems for the system of Navier–Stokes and continuity equations are used that are the method of perturbations (the method of a small parameter) the method of Fourier (the method of a separation of variables), an averaging, a construction and studying of asymptotic formulas. *Results.* A new problem on the motion of a viscous liquid is formulated and solved. Asymptotic representations of the found solution are constructed and explored. New hydromechanical effects are revealed. *Conclusion.* The work is fulfilled in the development of a perspective direction in liquid mechanics that is of researching the dynamics of hydromechanical systems under periodic influences. The obtained results can be used in particular in further investigations of a non-trivial dynamics of hydromechanical systems, under working for the methods of a control of hydromechanical systems.

Keywords: viscous liquid, free boundary, periodic in time influences, predominant direction in space, stationary motion.

For citation: Sennitskii VL. Peculiarities of the dynamics of a viscous liquid with a free boundary under periodic influences. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(2):197–208. DOI: 10.18500/0869-6632-003091

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Работами по теоретическому и экспериментальному изучению динамики гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях определяется одно из перспективных направлений в механике жидкости. В данном направлении получен ряд нетривиальных результатов (см., например, работы [1–31], а также [32–38]). Проведенные исследования, в частности, позволили доказать существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в вибрирующей жидкости [1, 2, 9, 26, 38]; построить математическую модель гидромеханического аналога «маятника Капицы» [17, 39]; обнаружить эффекты парадоксального поведения твердого тела в вибрирующей жидкости [26, 32, 33, 35–37], «левитации» жидкости [31], «самопроизвольного» перехода твердого включения в колеблющейся жидкости в положение с заданной ориентацией в пространстве [23].

В настоящей работе рассматривается задача о движении вязкой жидкости, обусловленном поступательным периодическим по времени движением плоской стенки и плоской пластины с проницаемой для жидкости границей. Жидкость заполняет две области пространства. Движение жидкости в данных областях происходит в существенно различных гидромеханических условиях: жидкость в одной из областей имеет только твердые границы, в другой — твердую и свободную границы. Обнаружены новые гидромеханические эффекты. В частности, установлено наличие эффекта, состоящего в том, что (на фоне колебаний) жидкость в одной из областей покоится, а в другой области совершает стационарное движение.

1. Постановка задачи

Имеется гидромеханическая система, состоящая из несжимаемой вязкой жидкости, газа, абсолютно твердой пластины η и абсолютно твердой стенки ξ (рис. 1). Жидкость граничит с газом, пластиной и стенкой. Граница пластины η проницаема для жидкости. Пластина поступательно движется относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z со скоростью $\mathbf{U} = \{U_X, 0, 0\}$. Скорость U_X заданным образом периодически, с периодом T , изменяется со временем t ($U_X = \tilde{U} \sin(2\pi t/T)$; $\tilde{U} > 0$ – постоянная). Стенка ξ совершает заданное поступательное движение вдоль оси Y . Граница Γ_ξ стенки ξ представляет собой плоскость $Y = H_\xi$; $-\infty < X < \infty$, $-\infty < Z < \infty$ ($H_\xi = \tilde{H} \sin(2\pi t/T + \varphi)$; $\tilde{H} > 0$, φ – постоянные). Границу $\Gamma_{\eta 1}, \Gamma_{\eta 2}$ пластины η составляют плоскости $Y = H_1, Y = H_2$; $-\infty < X < \infty$, $-\infty < Z < \infty$ ($H_2 > H_1$, $H_1 > \tilde{H}$ – постоянные, разность $H_2 - H_1$ – толщина пластины η). Свободная граница Γ_f жидкости характеризуется соотношениями $Y = L$; $-\infty < X < \infty$, $-\infty < Z < \infty$ ($L = \hat{L} + H_\xi$; $\hat{L} > H_2 + \tilde{H}$ – постоянная). Области $\Omega_1 : H_\xi < Y < H_1$ и $\Omega_2 : H_2 < Y < L$ ($-\infty < X < \infty$, $-\infty < Z < \infty$) заполнены жидкостью.

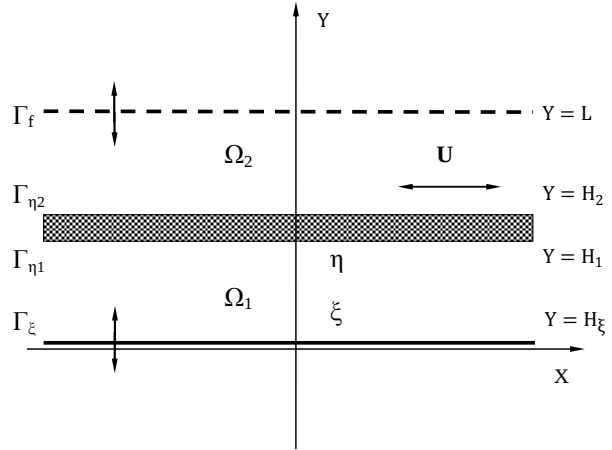


Рис. 1. Гидромеханическая система

Fig. 1. Hydromechanical system

Требуется определить периодическое по времени плоское движение жидкости.

Пусть $\tau = t/T$; $x = X/\hat{L}$; $y = Y/\hat{L}$; $z = Z/\hat{L}$; $\varepsilon = \tilde{H}/\hat{L}$; $u = TU_X/\hat{L} = \tilde{u} \sin(2\pi\tau)$; $\mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$; $\mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$; ρ и $\mathbf{V}$ – соответственно плотность и скорость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/\hat{L} = v_x(\tau, y)\mathbf{e}_x + v_y(\tau, y)\mathbf{e}_y$; P – давление в жидкости; $p = T^2 P/(\rho\hat{L}^2) = p(\tau, y)$; P_g – давление газа на жидкость; $p_g = T^2 P_g/(\rho\hat{L}^2) = p_g(\tau)$; $h_\xi = H_\xi/\hat{L} = \varepsilon \sin(2\pi\tau + \varphi)$; $h_1 = H_1/\hat{L}$; $h_2 = H_2/\hat{L}$; $Re = \hat{L}^2/(\nu T)$ – число Рейнольдса.

Задачу о движении жидкости составляют уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности и условия на свободной и твердых границах жидкости:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega_1, \Omega_2; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \Omega_2; \quad (2)$$

$$v_y = \frac{dh_\xi}{d\tau}, \quad p - \frac{2}{Re} \frac{\partial v_y}{\partial y} = p_g, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{на } \Gamma_f; \quad (3)$$

$$v_x = 0, \quad v_y = \frac{dh_\xi}{d\tau} \quad \text{на } \Gamma_\xi; \quad (4)$$

$$v_x = u, \quad v_y = \frac{dh_\xi}{d\tau} \quad \text{на } \Gamma_{\eta 1}, \Gamma_{\eta 2}. \quad (5)$$

2. Решение задачи

Согласно (2)–(5) имеем

$$v_y = 2\pi\varepsilon[\cos(2\pi\tau + \varphi)] \quad \text{в } \Omega_1, \Omega_2. \quad (6)$$

Из (1), (3), (6) следует

$$\begin{aligned} p &= 4\pi^2\varepsilon[\sin(2\pi\tau + \varphi)]y + p' \quad \text{в } \Omega_1, \\ p &= 4\pi^2\varepsilon[\sin(2\pi\tau + \varphi)](y - 1 - h_\xi) + p_g \quad \text{в } \Omega_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где p' — функция τ .

Используя (1), (3)–(6), определим задачи

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + 2\pi\varepsilon[\cos(2\pi\tau + \varphi)]\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{в } \Omega_1, \quad (8)$$

$$v_x = 0 \quad \text{при } y = h_\xi, \quad (9)$$

$$v_x = u \quad \text{при } y = h_1 \quad (10)$$

и

$$\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + 2\pi\varepsilon[\cos(2\pi\tau + \varphi)]\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{в } \Omega_2, \quad (11)$$

$$v_x = u \quad \text{при } y = h_2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 1 + h_\xi. \quad (13)$$

Будем рассматривать задачи (8)–(10) и (11)–(13) при малых по сравнению с единицей значениях ε . Применим метод разложения по степеням малого параметра [40, 41]. Предположим, что

$$v_x \sim v_0 + \varepsilon v_1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Используя (8)–(14), в ε^N -приближении ($N = 0, 1$) получим

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau} + 2N\pi[\cos(2\pi\tau + \varphi)]\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_N}{\partial y^2} \quad \text{в } \bar{\Omega}_1, \quad (15)$$

$$v_N = -N[\sin(2\pi\tau + \varphi)]\frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \text{при } y = 0, \quad (16)$$

$$v_N = (1 - N)u \quad \text{при } y = h_1, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau} + 2N\pi[\cos(2\pi\tau + \varphi)]\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_N}{\partial y^2} \quad \text{в } \bar{\Omega}_2, \quad (18)$$

$$v_N = (1 - N)u \quad \text{при } y = h_2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial y} = -N[\sin(2\pi\tau + \varphi)]\frac{\partial v_0}{\partial y^2} \quad \text{при } y = 1, \quad (20)$$

где $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ — области соответственно $0 < y < h_1$ и $h_2 < y < 1$ ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$).

Пусть $N = 0$. Задача (15)–(17) имеет решение

$$v_0 = \tilde{u} \operatorname{Imag} \left(\frac{\operatorname{sh} qy}{\operatorname{sh} qh_1} e^{2\pi i \tau} \right) \quad \text{для } 0 \leq y \leq h_1, \quad (21)$$

задача (18)–(20) имеет решение

$$v_0 = \tilde{u} \operatorname{Imag} \left[\frac{\operatorname{ch} q(1-y)}{\operatorname{ch} q(1-h_2)} e^{2\pi i \tau} \right] \quad \text{для } h_2 \leq y \leq 1, \quad (22)$$

где $q = (1+i)\sqrt{\pi Re}$.

Пусть $N = 1$. Произведем усреднение (15)–(20) по безразмерному времени τ . В результате этого получим

$$2\pi \left\langle [\cos(2\pi\tau + \varphi)] \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{Re} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} \quad \text{в } \bar{\Omega}_1, \quad (23)$$

$$\bar{v} = - \left\langle [\sin(2\pi\tau + \varphi)] \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\rangle \quad \text{при } y = 0, \quad (24)$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{при } y = h_1, \quad (25)$$

$$2\pi \left\langle [\cos(2\pi\tau + \varphi)] \frac{\partial v_0}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{Re} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} \quad \text{в } \bar{\Omega}_2, \quad (26)$$

$$\bar{v} = 0 \quad \text{при } y = h_2, \quad (27)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dy} = - \left\langle [\sin(2\pi\tau + \varphi)] \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right\rangle \quad \text{при } y = 1. \quad (28)$$

Здесь $\langle \dots \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} \dots d\tau'$; $\bar{v} = \langle v_1 \rangle$. Задача (15)–(17) имеет решение

$$v_1 = \bar{v} + \operatorname{Real}[v^{(1)} e^{4\pi i \tau}] \quad \text{для } 0 \leq y \leq h_1, \quad (29)$$

задача (18)–(20) имеет решение

$$v_1 = \bar{v} + \operatorname{Real}[v^{(2)} e^{4\pi i \tau}] \quad \text{для } h_2 \leq y \leq 1, \quad (30)$$

где $v^{(1)}, v^{(2)}$ — функции y .

Из (21)–(28) следует

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{\pi}{2} Re} \tilde{u} \operatorname{Real} \left[\frac{(\operatorname{ch} qh_1)y - h_1 \operatorname{ch} qy}{h_1 \operatorname{sh} qh_1} e^{i(\frac{\pi}{4} - \varphi)} \right] \quad \text{для } 0 \leq y \leq h_1, \quad (31)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{\pi}{2} Re} \tilde{u} \operatorname{Real} \left[\frac{\operatorname{sh} q(1-y) - \operatorname{sh} q(1-h_2)}{\operatorname{ch} q(1-h_2)} e^{i(\frac{\pi}{4} - \varphi)} \right] \quad \text{для } h_2 \leq y \leq 1. \quad (32)$$

Формулами

$$v_x = v_0 + \varepsilon v_1 \quad (33)$$

и (6), (7), (22), (23), (29)–(32) определяется приближенное решение задачи (1)–(5). Данное решение, в частности, свидетельствует о наличии эффекта, состоящего в том, что (на фоне колебаний) жидкость совершает стационарное движение.

Рассмотрим вопрос о среднем по времени течении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях Re . Используя (6), (21), (22), (29)–(33), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim -\frac{1}{2}\varepsilon\tilde{u}(\cos\varphi)\frac{h_1-y}{h_1^2}\mathbf{e}_x \quad \text{для } 0 \leq y \leq h_1, \quad (34)$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim -\pi\varepsilon\tilde{u}Re(\sin\varphi)(y-h_2)\mathbf{e}_x \quad \text{для } h_2 \leq y \leq 1 \quad (35)$$

при $Re \rightarrow 0$.

Согласно (34), (35) (на фоне колебаний) имеет место следующее. В области $\bar{\Omega}_1$ при $\cos\varphi > 0$ жидкость движется в направлении, противоположном направлению оси X ; при $\cos\varphi < 0$ жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением оси X ; при $\cos\varphi = 0$ жидкость покоится. В области $\bar{\Omega}_2$ при $\sin\varphi > 0$ жидкость движется в направлении, противоположном направлению оси X ; при $\sin\varphi < 0$ жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением оси X ; при $\sin\varphi = 0$ жидкость покоится. При $(\sin\varphi)\cos\varphi > 0$ жидкость в областях $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ движется (вдоль оси X) в одинаковых направлениях; при $(\sin\varphi)\cos\varphi < 0$ жидкость в областях $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ движется (вдоль оси X) во взаимно противоположных направлениях; при $(\sin\varphi)\cos\varphi = 0$ жидкость в одной из областей $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ покоится, а в другой движется в направлении, совпадающем с направлением оси X или в направлении, противоположном направлению оси X .

Используя (34), (35), найдем, что при $(\sin\varphi)\cos\varphi \neq 0$ выполняется соотношение

$$(\cos\varphi)\left(\frac{1}{1-h_2}\int_{h_2}^1\langle \mathbf{v} \rangle dy\right) = 2\pi Re(\sin\varphi)h_1(1-h_2)\left(\frac{1}{h_1}\int_0^{h_1}\langle \mathbf{v} \rangle dy\right). \quad (36)$$

Согласно (36) для малых значений Re (в (34), (35) $Re \rightarrow 0$) и любых (допустимых) значений $h_1, 1-h_2$ при движении жидкости в обеих областях $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ жидкость в области $\bar{\Omega}_2$, в среднем, движется значительно медленнее, чем в области $\bar{\Omega}_1$.

Рассмотрим вопрос о среднем по времени течении жидкости в областях $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$ при малых по сравнению с единицей значениях $h_1, 1-h_2$. Пусть $\sigma_1 = (h_1-y)/h_1$ ($0 \leq \sigma_1 \leq 1$ при $0 \leq y \leq h_1$); $\sigma_2 = (y-h_2)/(1-h_2)$ ($0 \leq \sigma_2 \leq 1$ при $h_2 \leq y \leq 1$). Используя (6), (21), (22), (29)–(33), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim -\frac{1}{2}\varepsilon\tilde{u}(\cos\varphi)\frac{\sigma_1}{h_1}\mathbf{e}_x \quad \text{для } 0 \leq y \leq h_1, \quad (37)$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim -\pi\varepsilon\tilde{u}Re(\sin\varphi)\sigma_2(1-h_2)\mathbf{e}_x \quad \text{для } h_2 \leq y \leq 1 \quad (38)$$

при $h_1 \rightarrow 0, 1-h_2 \rightarrow 0$ (и фиксированных $Re, \tilde{u}, \varphi$).

Отметим, что выражения в правых частях (37), (38) совпадают с выражениями в правых частях соответственно (34), (35), но, в отличие от формул (34), (35), пригодных при малых $Re > 0$ и любых (допустимых) $h_1, 1-h_2$, формулы (37), (38) пригодны при малых $h_1, 1-h_2$ и любом (фиксированном) $Re > 0$.

Из (37), (38), в частности, следует соотношение, совпадающее с (36), согласно которому для малых значений $h_1, 1-h_2$ (в (37), (38) $h_1 \rightarrow 0, 1-h_2 \rightarrow 0$) и любого значения $Re > 0$, при движении жидкости в обеих областях $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$ жидкость в области $\bar{\Omega}_2$, в среднем, движется значительно медленнее, чем в области $\bar{\Omega}_1$.

Остановимся на вопросе о среднем по времени силовом воздействии со стороны жидкости на пластину η в направлении оси X , вдоль которой происходит движение пластины η . Пусть $\Delta\eta$ — тело, часть пластины η , в (произвольный) момент времени $t = t^*$ занимающая область

$\Omega_{\Delta\eta} : X^* < X < X^* + D_X, H_1 < Y < H_2, Z^* < Z < Z^* + D_Z$ ($X^*, Z^*, D_X > 0, D_Z > 0$ — постоянные). Определим среднюю по времени силу F , действующую со стороны жидкости на тело $\Delta\eta$ в направлении оси X . Используя (6), (21), (22), (29)–(33), найдем

$$F = \varepsilon \frac{\rho \hat{L}^4}{Re T^2} \left[- \left(\frac{d\bar{v}}{dy} \right)_{|y=h_1} + \left(\frac{d\bar{v}}{dy} \right)_{|y=h_2} \right] s = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{Re}} \frac{\rho \hat{L}^4 \tilde{u}}{T^2 h_1} \text{Real} \left[(\text{cth } q h_1) e^{i(\frac{\pi}{4} - \varphi)} \right] s, \quad (39)$$

где $s = D_X D_Z / L^2$.

Отметим, что согласно (39) среднее по времени силовое воздействие со стороны жидкости на пластину η в направлении оси X не зависит от «толщины» $1 - h_2$ области $\bar{\Omega}_2$.

Из (39), в частности, следует

$$f = \frac{FT^2}{\rho \hat{L}^4} \sim - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{Re}} \frac{\tilde{u}}{h_1} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \quad (40)$$

при $Re \rightarrow \infty$ (и фиксированных $h_1, \tilde{u}, \varphi$).

Формулой (40) демонстрируется, что при больших по сравнению с единицей значениях числа Рейнольдса (в рассматриваемом приближении), при $\cos(\varphi - \pi/4) = 0$ сила F равна нулю, какое-либо среднее по времени силовое воздействие в направлении оси X со стороны жидкости на пластину η не оказывается; для $\cos(\varphi - \pi/4) \neq 0$ при возрастании Re модуль силы F убывает по закону $Re^{-1/2}$.

Заключение

Проведенное исследование привело к обнаружению новых эффектов необычного движения жидкости при периодических по времени воздействиях. Рассмотрено поведение вязкой жидкости, обусловленное воздействиями, не имеющими выделенного направления в пространстве. Из представленного в работе следует, что такие воздействия способны порождать качественные изменения в движении жидкости. Причиной обнаруженных эффектов является согласованность (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий. Гидромеханическая система, подвергающаяся периодическим по времени воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве, производит отклики (реакции на воздействия), которые характеризуются наличием выделенного направления в пространстве и выражаются в том, что свободные части системы (части системы, движение которых не задано) — например, жидкие слои — на фоне колебаний совершают среднее движение. Это находится в непосредственной связи со следующим обобщенным принципом среднего движения: основополагающей причиной того, что не имеющими выделенного направления в пространстве периодическими по времени (колебательными, вибрационными) воздействиями на гидромеханическую систему порождается среднее по времени движение свободных частей системы, является возможность совершения свободными частями системы движения в различных направлениях в пространстве в неодинаковых условиях (см. также [26]).

Изложенным в настоящей работе, в частности, демонстрируется, что «не имеющим направления» может создаваться «имеющее направление».

Полученные результаты могут использоваться при проведении направленных экспериментальных исследований нетривиальной динамики гидромеханических систем; при разработке перспективных методов управления гидромеханическими системами; при создании гидромеханических систем, обладающих предписанными свойствами, например, систем, заданным образом реагирующих на периодические по времени воздействия.

Список литературы

1. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Доклады Академии наук СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
2. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 1. С. 100–101.
3. Lyubimov D. V. New approach in the vibrational convection theory // In: Proc. 14 IMACs Congress on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, Georgia, USA: Georgia Institute of Technology, 1994. P. 59–68.
4. Lyubimov D. V. Thermovibrational flows in nonuniform systems // Microgravity Quarterly. 1994. Vol. 4, no. 1. P. 221–225.
5. Kozlov V. G. Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration // Europhysics Letters. 1996. Vol. 36, no. 9. P. 651–656. DOI: 10.1209/epl/i1996-00282-0.
6. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Meradji S., Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase // Journal of Crystal Growth. 1997. Vol. 180, no. 3–4. P. 648–659. DOI: 10.1016/S0022-0248(97)00294-7.
7. Иванова А. А., Козлов В. Г., Эвекс П. Динамика цилиндрического тела в заполненном жидкостью секторе цилиндрического слоя при вращательных вибрациях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 4. С. 29–39.
8. Любимов Д. В., Перминов А. В., Черепанов А. А. Генерация осреднённых течений в вибрационном поле вблизи поверхности раздела сред // Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: Издательство Пермского государственного университета, 1998. С. 204–221.
9. Сенницкий В. Л. О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
10. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
11. Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф. Вибрационная подъемная сила, действующая на тело жидкости вблизи твердой поверхности // Доклады Академии наук. 2005. Т. 402, № 4. С. 488–491.
12. Lyubimov D., Lyubimova T., Vorobev A., Mojtabi A., Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part 1. Non-uniform heating // Journal of Fluid Mechanics. 2006. Vol. 564. P. 159–183. DOI: 10.1017/S0022112006001418.
13. Hassan S., Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container // J. Appl. Mech. 2006. Vol. 73, no. 1. P. 72–78. DOI: 10.1115/1.1992516.
14. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Shklyaev S. V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18, no. 1. P. 012101. DOI: 10.1063/1.2137358.
15. Shevtsova V., Melnikov D., Legros J. C., Yan Y., Saghier Z., Lyubimova T., Sedelnikov G., Roux B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19, no. 1. P. 017111. DOI: 10.1063/1.2409622.
16. Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф. Вибрационное взаимодействие сферического тела с границами полости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 2. С. 31–40.
17. Сенницкий В. Л. О колебательном движении неоднородного твердого шара в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 27–35.
18. Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д. Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 6. С. 63–73.
19. Kozlov V., Ivanova A., Schipitsyn V., Stambouli M. Lift force acting on the cylinder in viscous liquid under vibration // Acta Astronautica. 2012. Vol. 79. P. 44–51. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.04.013.

20. *Lyubimov D. V., Baydin A. Y., Lyubimova T. P.* Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // *Microgravity Sci. Technol.* 2013. Vol. 25, no 2. P. 121–126. DOI: 10.1007/s12217-012-9336-3.
21. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д.* Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // *Прикладная механика и техническая физика.* 2014. Т. 55, № 5. С. 55–64.
22. *Алабужев А. А.* Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16.
23. *Сенницкий В. Л.* О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128. DOI: 10.17377/SIBJIM.2015.18.110.
24. *Kozlov V., Vlasova O.* The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid // *Microgravity Sci. Technol.* 2015. Vol. 27, no. 4. P. 297–303. DOI: 10.1007/s12217-015-9460-y.
25. *Kozlov N. V., Vlasova O. A.* Behavior of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation // *Fluid Dyn. Res.* 2016. Vol. 48, no. 5. P. 055503. DOI: 10.1088/0169-5983/48/5/055503.
26. *Сенницкий В. Л.* Парадоксальное движение жидкости // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* 2017. № 8–1. С. 28–33. DOI: 10.17513/mjprfi.11753.
27. *Власова О. А., Козлов В. Г., Козлов Н. В.* Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // *Прикладная механика и техническая физика.* 2018. Т. 59, № 2. С. 39–49. DOI: 10.15372/PMTF20180105.
28. *Коновалов В. В., Любимова Т. П.* Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твердых частиц в жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2019. Т. 12, № 1. С. 48–56. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.5.
29. *Щипицын В. Д.* Колебания неосесимметричного цилиндра в заполненной жидкостью полости, совершающей вращательные осцилляции // *Письма в Журнал технической физики.* 2020. Т. 46, № 15 (153). С. 43–46. DOI: 10.21883/PJTF.2020.15.49749.18349.
30. *Коновалов В. В., Любимова Т. П.* Влияние акустических вибраций на взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости // *Пермские гидродинамические научные чтения. Сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова / Отв. редактор Т. П. Любимова.* Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2022. С. 254–261.
31. *Сенницкий В. Л.* Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // *Сибирские электронные математические известия.* 2022. Т. 19, № 1. С. 241–247. DOI: 10.33048/semi.2022.19.018.
32. *Челомей В. Н.* Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // *Доклады Академии наук СССР.* 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
33. *Сенницкий В. Л.* О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // *Прикладная механика и техническая физика.* 1985. № 5. С. 19–23.
34. *Сенницкий В. Л.* Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // *Прикладная механика и техническая физика.* 1986. № 4. С. 31–36.
35. *Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.* О движении тела в вибрирующей жидкости // *Доклады Академии наук СССР.* 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
36. *Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.* О движении твёрдого тела в вибрирующей

щей жидкости // Конвективные течения. Пермь: Издательство Пермского педагогического института, 1987. С. 61–71.

37. *Челомей В. Н.* Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
38. *Сенницкий В. Л.* О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1988. № 6. С. 107–113.
39. *Капица П. Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44, № 1. С. 7–20. DOI: 10.3367/UFNr.0044.195105b.0007.
40. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 352 с.
41. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 2-е изд-е. М: Физматгиз, 1958. 408 с.

References

1. Sennitskii VL. Predominantly unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid. Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. 1991;319(1):117–119 (in Russian).
2. Sennitskii VL. Predominantly unidirectional motion of a compressible solid body in a vibrating liquid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1993;34(1):96–97. DOI: 10.1007/BF00851812.
3. Lyubimov DV. New approach in the vibrational convection theory. In: Proc. 14 IMACs Congress on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, Georgia, USA: Georgia Institute of Technology; 1994. P. 59–68.
4. Lyubimov DV. Thermovibrational flows in nonuniform systems. Microgravity Quarterly. 1994;4(1): 221–225.
5. Kozlov VG. Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration. Europhysics Letters. 1996;36(9):651–656. DOI: 10.1209/epl/i1996-00282-0.
6. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Meradji S, Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase. Journal of Crystal Growth. 1997;180(3–4):648–659. DOI: 10.1016/S0022-0248(97)00294-7.
7. Ivanova AA, Kozlov VG, Evesque P. Dynamics of a cylindrical body in a liquid-filled sector of a cylindrical layer under rotational vibration. Fluid Dynamics. 1998;33(4):488–496. DOI: 10.1007/BF02698213.
8. Lyubimov DV, Perminov AV, Cherepanov AA. Generation of mean flows in vibrational field near the interface. In: Vibration Effects in Hydrodynamics. Perm: Perm State University Publishing; 1998. P. 204–221 (in Russian).
9. Sennitskii VL. Motion of a pulsating rigid body in an oscillating viscous liquid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2001;42(1):72–76. DOI: 10.1023/A:1018808628235.
10. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Cherepanov AA. Dynamics of Interfaces in Vibrational fields. Moscow: Fizmatlit; 2003. 216 p. (in Russian).
11. Ivanova AA, Kozlov VG, Kuzaev AF. Vibrational lift force acting on a body in a fluid near a solid surface. Doklady Physics. 2005;50(6):311–314. DOI: 10.1134/1.1958123.
12. Lyubimov D, Lyubimova T, Vorobev A, Mojtaji A, Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part 1. Non-uniform heating. Journal of Fluid Mechanics. 2006;564:159–183. DOI: 10.1017/S0022112006001418.
13. Hassan S, Lyubimova TP, Lyubimov DV, Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container. J. Appl. Mech. 2006;73(1):72–78. DOI: 10.1115/1.1992516.
14. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Shklyaev SV. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. Phys. Fluids. 2006;18(1):012101. DOI: 10.1063/1.2137358.
15. Shevtsova V, Melnikov D, Legros JC, Yan Y, Saghir Z, Lyubimova T, Sedelnikov G, Roux B.

- Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions. *Phys. Fluids*. 2007;19(1):017111. DOI: 10.1063/1.2409622.
16. Ivanova AA, Kozlov VG, Kuzaev AF. Vibrational hydrodynamic interaction between a sphere and the boundaries of a cavity. *Fluid Dynamics*. 2008;43(2):194–202. DOI: 10.1134/S001546280802004X.
 17. Sennitskii VL. Pulsating motion of an inhomogeneous solid sphere in a vibrating liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2009;50(6):936–943. DOI: 10.1007/s10808-009-0127-6.
 18. Ivanova AA, Kozlov VG, Shchipitsyn VD. A light cylinder under horizontal vibration in a cavity filled with a fluid. *Fluid Dynamics*. 2010;45(6):889–897. DOI: 10.1134/S0015462810060062.
 19. Kozlov V, Ivanova A, Schipitsyn V, Stambouli M. Lift force acting on the cylinder in viscous liquid under vibration. *Acta Astronautica*. 2012;79:44–51. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.04.013.
 20. Lyubimov DV, Baydin AY, Lyubimova TP. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization. *Microgravity Sci. Technol.* 2013;25(2):121–126. DOI: 10.1007/s12217-012-9336-3.
 21. Ivanova AA, Kozlov VG, Shchipitsyn VD. Lift force acting on a cylindrical body in a fluid near the boundary of a cavity performing translational vibrations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014;55(5):773–780. DOI: 10.1134/S002189441405006X.
 22. Alabuzhev AA. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Computational Continuum Mechanics*. 2014;7(2):151–161 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16.
 23. Sennitskii VL. On a prescribed orientation of a solid inclusion in a viscous liquid. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2015;18(1):123–128 (in Russian). DOI: 10.17377/SIBJIM.2015.18.11.
 24. Kozlov V, Vlasova O. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid. *Microgravity Sci. Technol.* 2015;27(4):297–303. DOI: 10.1007/s12217-015-9460-y.
 25. Kozlov NV, Vlasova OA. Behavior of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation. *Fluid Dyn. Res.* 2016;48(5):055503. DOI: 10.1088/0169-5983/48/5/055503.
 26. Sennitskii VL. Paradoxical motion of a liquid. *International Journal of Applied and Basic Research*. 2017;(8–1):28–33 (in Russian). DOI: 10.17513/mjpf.11753.
 27. Vlasova OA, Kozlov VG, Kozlov NV. Lift force acting on a heavy solid in a rotating liquid-filled cavity with a time-varying rotation rate. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2018;59(2):219–228. DOI: 10.1134/S0021894418020050.
 28. Konovalov BB, Lyubimova TP. Numerical study of the effect of vibrations on the interaction in an ensemble of gas bubbles and solid particles in a liquid. *Computational Continuum Mechanics*. 2019;12(1):48–56 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.5.
 29. Shchipitsyn VD. Vibrations of a nonaxisymmetric cylinder in a cavity filled with liquid and performing rotational oscillations. *Tech. Phys. Lett.* 2020;46(8):771–774. DOI: 10.1134/S1063785020080143.
 30. Konovalov VV, Lyubimova TP. Influence of acoustic vibrations on the interaction of a gas bubble and a solid particle in a liquid. In: Lyubimova TP, editor. *Perm Hydrodynamical Scientific Readings. Digest of Articles by the Materials of VIII All-Russian Conference Dedicated for the Memory of Professors G. Z. Gershuny, E. M. Juhovitskii and D. V. Lyubimov*. Perm: Perm State National Research University; 2022. P. 254–261 (in Russian).
 31. Sennitskii VL. On peculiarities of a liquid flow in a gravity field. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2022;19(1):241–247 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2022.19.018.
 32. Chelomei VN. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*. 1983;270(1):62–67 (in Russian).

33. Sennitskii VL. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1985;26(5):620–623. DOI: 10.1007/BF00915307.
34. Sennitskii VL. Motion of a sphere in fluid caused by vibrations of another sphere. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1986;27(4):501–505. DOI: 10.1007/BF00910190.
35. Lugovtsov BA, Sennitskii VL. Motion of a body in a vibrating liquid. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*. 1986;289(2):314–317 (in Russian).
36. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Cherepanov AA. On the motion of a solid body in a vibrating fluid. In: *Convective Flows*. Perm: Perm Pedagogical Institute Publishing; 1987. P. 61–71 (in Russian).
37. Chelomei VN. *Selected Works*. Moscow: Mashinostroenie; 1989. 336 p. (in Russian).
38. Sennitskii VL. Motion of a gas bubble in a viscous vibrating liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1988;29(6):865–870. DOI: 10.1007/BF00858387.
39. Kapitsa PL. Pendulum with a vibrating suspension. *Sov. Phys. Usp.* 1951;44(1):7–20 (in Russian). DOI: 10.3367/UFNr.0044.195105b.0007.
40. Krylov NM, Bogoliubov NN. *Introduction in Non-linear Mechanics*. Moscow-Izhevsk: Research Center Regular and Chaotic Dynamics; 2004. 352 p. (in Russian).
41. Bogoliubov NN, Mitropolsky YA. *Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations*. New York: Gordon and Breach; 1961. 537 p.



Сенницкий Владимир Леонидович — родился в 1950 году. Окончил физический факультет Новосибирского государственного университета (НГУ, 1972). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1983) и доктора (1995) физико-математических наук. Имеет звание доцента (1994). С 1975 года работает в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, в настоящее время в должности старшего научного сотрудника. Область научных интересов: самодвижение тел в жидкости; нетривиальная, парадоксальная динамика гидромеханических систем.

Россия, 630090 Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15
 Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
 E-mail: sennitskii@yandex.ru
 ORCID: 0009-0006-5131-2858
 AuthorID (eLibrary.Ru): 2024



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003093
EDN: PKSHOK

Анализ синхронизации между временными рядами, полученными от анестезированных крыс во время болевого воздействия*

О. Е. Дик

Институт физиологии им. И. П. Павлова РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dickviola@gmail.com

Поступила в редакцию 10.08.2023, принята к публикации 9.11.2023,
опубликована онлайн 9.02.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Цель настоящей работы — определение возможности обнаружения изменений во взаимосвязях между такими физиологическими ритмами, как активность нейронов ретикулярной формации продолговатого мозга, колебания артериального давления и дыхания наркотизированных крыс до и во время развития патологического состояния, связанного с болевым колоректальным растяжением. Это растяжение имитирует боль, локализуемую в нижней части живота у пациентов с синдромом раздраженной кишки, и сопровождается реакциями нейронов мозга, флуктуациями артериального давления и дыхания. Анализ изменений во взаимосвязях указанных ритмов состоял в выявлении фазовой синхронизации между временными рядами вариабельности интервалов нейрональной активности и вариабельности интервалов артериального давления на частоте дыхания до и во время болевого воздействия. **Методы.** Для решения этой задачи применен метод синхросжатого вейвлет-преобразования, позволяющий эффективно вычислять мгновенные частоты и фазы нестационарных сигналов. В качестве показателей синхронизации использованы значения индекса и длительности фазовой синхронизации как интервала времени, в течение которого значение индекса синхронизации близко к единице. **Результаты.** Установлено, что болевое воздействие обеспечивает подстройку частоты вариабельности нейрональной активности и возникновение синхронизации между этой активностью и вариабельностью артериального давления на частоте дыхания или вызывает подстройку частоты вариабельности артериального давления и возникновение синхронизации между вариабельностью артериального давления и ритмом дыхания. Выявлено, что болевое воздействие повышает длительность фазовой синхронизации между вариабельностью артериального давления и ритмом дыхания или уменьшает длительность фазовой синхронизации между вариабельностью нейрональной активности и ритмом дыхания. **Заключение.** Подробно исследовано влияние болевого колоректального растяжения на изменение параметров фазовой синхронизации между физиологическими ритмами у наркотизированных крыс.

Ключевые слова: синхросжатое вейвлет-преобразование, фазовая синхронизация, физиологические ритмы.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках темы НИР № 0134-2019-0001.

Для цитирования: Дик О. Е. Анализ синхронизации между временными рядами, полученными от анестезированных крыс во время болевого воздействия // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 209–222. DOI: 10.18500/0869-6632-003093. EDN: PKSHOK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нейроинформатика — 2023».

Synchronization analysis of time series obtained from anesthetized rats during painful action*

O. E. Dick

Pavlov Institute of Physiology of the RAS, St. Petersburg, Russia
E-mail: dickviola@gmail.com

Received 10.08.2023, accepted 9.11.2023, available online 9.02.2024,
published 29.03.2024

Abstract. The purpose of this work is to determine the possibility of detecting changes in the relationships between such physiological rhythms as the activity of neurons in the reticular formation of the medulla oblongata, fluctuations in the blood pressure and respiration in anesthetized rats before and during the development of a pathological state associated with painful colorectal distension. This stretch mimics the pain localized in the lower abdomen in patients with irritable bowel syndrome and it is accompanied by responses of the brain neurons, fluctuations in the blood pressure and respiration. The analysis of changes in the relationships of these rhythms consisted in identifying phase synchronization between the time series of the variability of neuronal activity intervals and the variability of blood pressure intervals at the respiratory rate before and during pain exposure. *Methods.* To solve this problem, the synchrosqueezed wavelet transform method was applied, which makes it possible to effectively calculate the instantaneous frequencies and phases of non-stationary signals. As indicators of synchronization, we used the values of the index and the duration of phase synchronization as a time interval during which the value of the synchronization index is close to 1. *Results.* It has been established that the pain effect provides an adjustment of the frequency of the neuronal activity variability and the occurrence of synchronization between this activity and the blood pressure variability at the respiratory rate or causes an adjustment of the frequency of the blood pressure variability and the occurrence of synchronization between the blood pressure variability and the respiratory rhythm. It was found that the pain effect increases the duration of phase synchronization between the variability of the blood pressure and the respiratory rhythm or reduces the duration of phase synchronization between the variability of neuronal activity and the respiratory rhythm. *Conclusion.* The effect of painful colorectal distension on changes in the parameters of phase synchronization between physiological rhythms in anesthetized rats was studied in detail.

Keywords: synchrosqueezed wavelet transform, phase synchronization, physiological rhythms.

Acknowledgements. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of Research Topics No. 0134-2019-0001.

For citation: Dick OE. Synchronization analysis of time series obtained from anesthetized rats during painful action. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):209–222. DOI: 10.18500/0869-6632-003093

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование переходов от несинхронизированного состояния к синхронизированному состоянию представляет определенный интерес для оценки степени нарушения управления в различных физических [1–4] и биологических [5–11] системах. Например, анализ синхронизации электрической активности в разных локусах мозга позволяет идентифицировать очаг эпилепсии у пациентов с фокальной формой эпилепсии [12]. Анализ синхронизации медленной компоненты сердечного ритма и колебаний сосудистого тонуса в исследованиях одновременных записей электрокардиограмм и фотоплетизмограмм имеет важное значение для выяснения функционального состояния вегетативной регуляции кровообращения у пациентов с сердечно-сосудистыми заболеваниями [13–16]. Нарушения в сердечно-сосудистой системе после острого инфаркта миокарда могут вызывать уменьшение длительности синхронизации между колебаниями частоты сердечных сокращений и артериального давления [15, 16]. Снижение влияния механизмов контроля со стороны

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Neuroinformatics — 2023”.

нервной системы может приводить к изменению длительности синхронизации между дыхательной и сердечно-сосудистой системами [17, 18]. Таким образом, патологические состояния организма могут изменять синхронизованные взаимодействия различных физиологических систем.

В качестве патологического состояния в данной работе рассматривается абдоминальная боль, сопровождающая функциональные заболевания желудочно-кишечного тракта человека, из которых наиболее распространенным является синдром раздраженной кишки. Предполагается, что в основе развития этого синдрома лежит взаимодействие стрессорного фактора и нарушений моторной активности кишечника за счет дисрегуляции в нейрональных сетях, обеспечивающих проведение и контроль ноцицептивных сигналов в системе желудочно-кишечный тракт – мозг – желудочно-кишечный тракт [19, 20].

Для изучения механизмов развития абдоминальной боли в физиологии используются эксперименты на наркотизированных животных, в которых ноцицептивное колоректальное растяжение имитирует боль, локализуемую в нижней части живота у пациентов с синдромом раздраженной кишки [19]. Это растяжение сопровождается у наркотизированных крыс реакциями нейронов висцеральных ядер ствола мозга, а также сокращениями брюшной мускулатуры и изменениями частоты сердечных сокращений и артериального давления [19, 20].

В связи с этим актуальным представляется анализ формирования реакций различных физиологических систем, то есть изменений ритмов сердечно-сосудистой, дыхательной и нервной систем на возникновение абдоминальной боли. Это предполагает выяснение взаимодействия между вариабельностью артериального давления крови, ритмом дыхания и вариабельностью нейрональной активности мозга во время болевого воздействия. Для исследования такого взаимодействия важной является постановка задачи проведения анализа возможной синхронизации между паттернами этих физиологических ритмов, оценки параметров этой синхронизации до и во время болевого воздействия.

Для этого могут быть использованы различные подходы, связанные с анализом частотной и фазовой синхронизации нестационарных сигналов. Например, метод аналитического сигнала, включающий преобразование Гильберта [21], используется для выявления синхронизации между ритмами сердечно-сосудистой и дыхательной систем, то есть для изучения взаимодействия между ритмом дыхания, колебаниями артериального давления и вариабельностью R – R интервалов основного сердечного ритма [22–25].

Другим подходом является извлечение мгновенных частот и фаз на основе вейвлет-преобразования сигнала [26]. Этот подход применяется для анализа нейронных связей между различными областями мозга [27] и выявления синхронизации между ритмом дыхания и вариабельностью сердечного ритма [6–9].

Для повышения эффективности извлечения мгновенных частот и фаз из нестационарных экспериментальных данных с высоким уровнем шума существует метод синхросжатого вейвлет-преобразования [28]. Этот метод также используется для оценки динамики дыхания по ритму сердца [29, 30]. В работах [10, 11] этот метод применен для выявления мгновенных фаз и частот для последующего анализа фазовой синхронизации между ритмической фотостимуляцией и ответами мозга в виде электроэнцефалограмм у пациентов с гипертензией и начальными проявлениями умеренных когнитивных расстройств и без таких проявлений. В результате получены данные, позволяющие сделать заключение о том, что параметры синхронизации могут служить нейрофизиологическими маркерами нарушений когнитивных функций.

Таким образом, методы оценки степени фазовой синхронизации позволяют оценивать степень нарушения физиологических систем при различных патологиях.

Целью данной работы является выявление фазовой синхронизации между вариабельностью артериального давления крови и вариабельностью интервалов нейрональной активности нейронов вентролатеральной ретикулярной формации продолговатого мозга анестезированных крыс на частоте дыхания до и во время болевого колоректального растяжения.

1. Методика

1.1. Экспериментальные данные. Анализируемые данные были предоставлены лабораторией кортико-висцеральной физиологии Института физиологии им. И. П. Павлова РАН и содержали колебания артериального давления, дыхания и нейрональной активности наркотизированных уретаном (1.5 мг/кг) 10 крыс до и во время болевой стимуляции. Эти данные были зарегистрированы в соответствии с Директивой Совета Европейского сообщества (86/609/ЕЕС), а также требованиями Комиссии по контролю за содержанием и использованием лабораторных животных при Институте физиологии им. И. П. Павлова РАН (заключение № 02/24 от 24 февраля 2020).

Артериальное давление регистрировалось датчиком давления, расположенным в катетере, установленном в бедренной артерии (MLT0670, ADInstruments Ltd., Великобритания). Колебания дыхания определялись как колебания концентрации CO_2 , измеренные на вдохе и на выдохе с помощью датчика, находящегося в эндотрахеальной трубке (CapnoScan End-Tidal CO_2 Monitoring Modular System, USA). Нейрональная активность регистрировалась с помощью вольфрамового электрода (WPI, США), погруженного в область каудальной вентролатеральной ретикулярной формации продолговатого мозга. Это было связано с тем, что именно в этой области продолговатого мозга обнаружены группы нейронов, отвечающие на болевое колоректальное растяжение [31].

Болевая стимуляция означала механическое растяжение колоректальной области толстой кишки с помощью резинового баллона в течение 60 секунд. Частота дискретизации составляла 10000 Гц.

Короткие фрагменты экспериментальных данных нейрональной активности, колебаний артериального давления и дыхания представлены на рис. 1, *a*, *b*, *c*; выделенные кривые

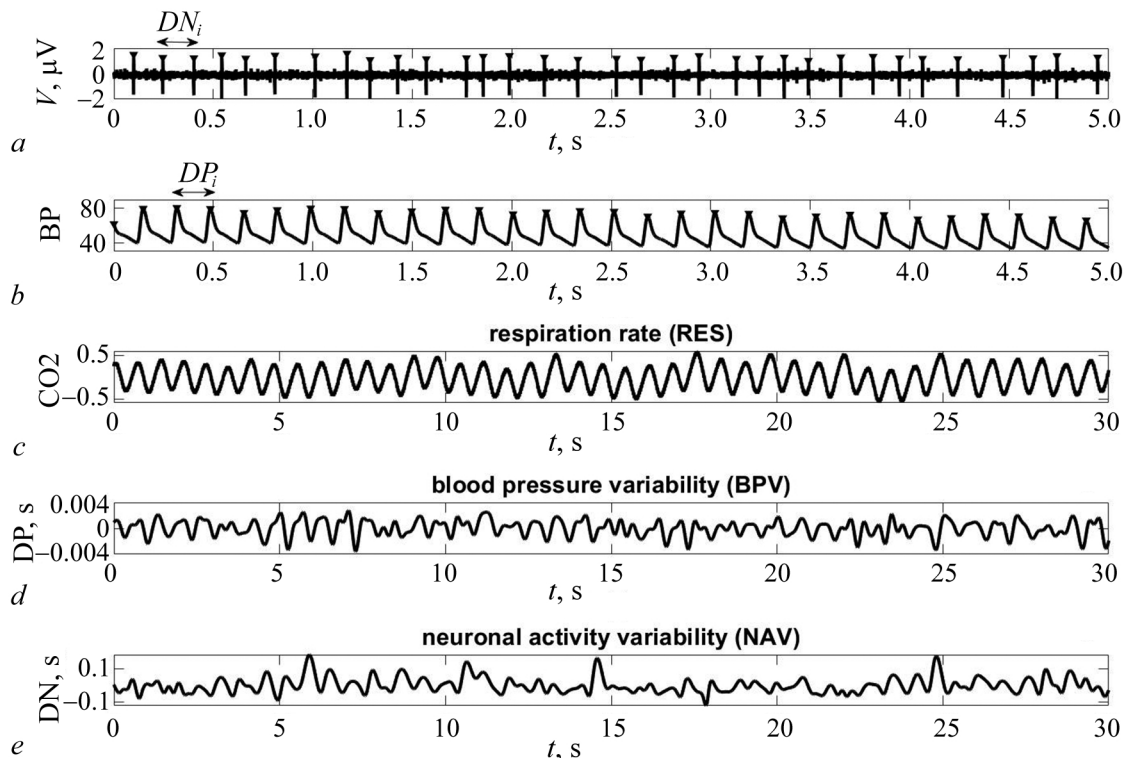


Рис. 1. Фрагменты данных: *a* — нейрональной активности; *b* — колебаний артериального давления; *c* — дыхания; *d* — кривые вариальности артериального давления (BPV); *e* — вариальности интервалов нейрональной активности (NAV). Интервалы DN_i и DP_i обозначены на фрагментах *a* и *b*

Fig. 1. Fragments of the datasets: *a* — the neuronal activity; *b* — the blood pressure fluctuations; *c* — respiratory oscillations; *d* — curves of the blood pressure variability (BPV); *e* — the neuronal activity variability (NAV). Intervals DN_i и DP_i are indicated in *a* and *b*

вариабельности интервалов нейрональной активности (NAV) и вариабельности интервалов артериального давления (BPV) показаны на рис. 1, с, d.

Эти кривые содержали последовательности временных интервалов между локальными максимумами исходных данных нейрональной активности и артериального давления. Полученные кривые были аппроксимированы кубическими сплайнами с передискретизацией до частоты 1000 Гц и удалением нелинейных трендов. Затем мы применили фильтрацию, удаляющую низкочастотные колебания (менее 1 Гц) в полученных кривых NAV и BPV, для анализа компонент этих кривых с основными частотами, близкими к частоте дыхательного ритма (RES).

1.2. Оценка индекса фазовой синхронизации. Алгоритм вычисления индекса фазовой синхронизации на основе синхросжатого вейвлетного преобразования [28] состоит из следующей последовательности процедур.

1. Построение проекции вейвлетного спектра $|W_s(\omega_l, b)|^2$ анализируемого сигнала $s(t)$ на плоскость (b, f) , где

$$W_s(f, b) = f \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi(f(t-b))} dt, \quad (1)$$

f и b — частота и временной сдвиг; символ $\overline{\psi(f(t-b))}$ означает комплексное сопряжение вейвлетной функции $\psi(f(t-b))$, полученной из материнского вейвлета Морле $\psi(t)$ путем масштабирования и сдвига по времени [26]:

$$\psi(f(t-b)) = f \exp(i\omega_0 f(t-b)) \exp(-0.5 f^2 (t-b)^2). \quad (2)$$

2. Построение проекции синхросжатого вейвлетного спектра $|T_s(\omega_l, b)|^2$ на плоскость (b, f) , где

$$T_s(f, b) = \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{f_k}^{f_t} W_s(f_k, b) f^{3/2} \Delta f_k, \quad (3)$$

$\Delta f_k = f_k - f_{k-1}$, f_k удовлетворяет условию $|\omega(f_k, b) - \omega_l| \leq \Delta\omega/2$, ω_l — l th дискретная круговая частота, вычисляемая в соответствии с формулой

$$\omega_l = (l/n)F_s, \quad l = 1, \dots, n, \quad (4)$$

F_s — частота дискретизации сигнала $s(t)$, n — число масштабов, используемых при построении вейвлетного спектра, $\Delta\omega = \omega_l - \omega_{l-1} = F_s/n$.

3. Нахождение гребней (частотных компонент сигнала) путем решения задачи условной оптимизации поиска среди всех тех кривых, которые максимизируют коэффициенты синхросжатого вейвлетного преобразования [26]:

$$\omega_r(b) = \arg \max |T_s(\omega_l, b)|, \quad (5)$$

$$\omega_l \in [\omega_r(b) - \Delta\omega/2, \omega_r(b) + \Delta\omega/2]. \quad (6)$$

4. Вычисление мгновенных фаз и частот на основании найденных гребней $\omega_r(b)$ в соответствии с формулами [32]

$$f_s(b) = \omega_r(b)/2\pi, \quad (7)$$

$$\phi_s(b) = \arg |T_s(\omega_r, b)|. \quad (8)$$

5. Вычисление соотношения мгновенных частот $f_{s1}(b)/f_{s2}(b)$ и разности фаз для двух анализируемых сигналов

$$\Delta\phi_{n,m}(b) = (n\phi_{s1}(b) - m\phi_{s2}(b))/2\pi, \quad (9)$$

где n и m — целые числа.

6. В соответствии с [6] фазовая синхронизация порядка $n : m$ определяется следующими условиями:

$$|\Delta\phi_{n,m}(b) - c| < \varepsilon_1, \quad (10)$$

$$|f_{s1}(b)/f_{s2}(b) - m/n| < \varepsilon_2, \quad (11)$$

где c — константа и $\varepsilon_1 = 0.03$, $\varepsilon_2 = 0.03$, то есть в случае фазовой синхронизации мгновенная разность фаз колеблется вокруг постоянного значения c , а величина отношения мгновенных частот $f_{s1}(b)/f_{s2}(b)$ изменяется вблизи значения m/n .

Усредненное по времени распределение энергии $E_{SW}(f)$ синхросжатого вейвлетного спектра $|T_s(f, b)|^2$ по частотам вычисляется в соответствии с формулой

$$E_{SW}(f) = \int_{t1}^{t2} |T_s(f, b)|^2 db. \quad (12)$$

Длительность фазовой синхронизации $n : m$ между двумя временными рядами вычисляется как интервал времени Δt_{syn} , в течение которого значение индекса фазовой синхронизации, вычисляемое в соответствии с [33],

$$\gamma_{n,m} = \left| \sum_{j=1}^k \exp(2\pi\Delta\phi_{n,m}(b + j\Delta b/k)) \right|, \quad (13)$$

близко к 1.

Различия между средними значениями длительности фазовой синхронизации для двух групп данных до и во время болевой стимуляции в данной работе выявлялись по методу однофакторного дисперсионного анализа ANOVA. При этом статистически значимые отличия между этими данными определялись на основании $p < 0.05$, так как $k = 2$, $n = k(k-1)/2 = 1$ и $1 - 0.95^{1/n} = 0.05$.

2. Результаты

Примеры проекций локальных вейвлетных спектров $|W_s(\omega_l, b)|^2$ на плоскость (b, f) для ритма дыхания (RES), вариабельности артериального давления (BPV) и вариабельности нейрональной активности (NAV) до болевого воздействия представлены на рис. 2, *a–c*.

Глобальный вейвлетный спектр, представляющий собой усредненное по времени распределение энергии $E_{SW}(f)$ синхросжатого вейвлетного спектра $|T_s(\omega_l, b)|^2$ по частотам, для временного ряда NAV (рис. 2, *f*) демонстрирует наличие множества частот в диапазоне от 1 до 3 Гц и наличие локального максимума вблизи частоты, соответствующей максимумам глобальных вейвлетных спектров $E_{SW}(f)$ для ритма дыхания RES и временного ряда BPV (рис. 2, *d–f*). Глобальный вейвлетный спектр $E_{SW}(f)$ для интервалов вариабельности артериального давления имеет максимум на частоте дыхания $f_{RES} = 1.880.03$ (рис. 2, *e*), но эта частота присутствует во временном ряду BPV не на протяжении всего временного интервала (рис. 2, *b*).

Частотная и фазовая синхронизация между временными рядами NAV и BPV отсутствуют в данном примере, поскольку отношение мгновенных частот f_{NAV}/f_{BPV} не удовлетворяет условию (9) (рис. 2, *g*), зависимость мгновенной разности фаз $\Delta\phi_{NAV-BPV}$ от времени не имеет

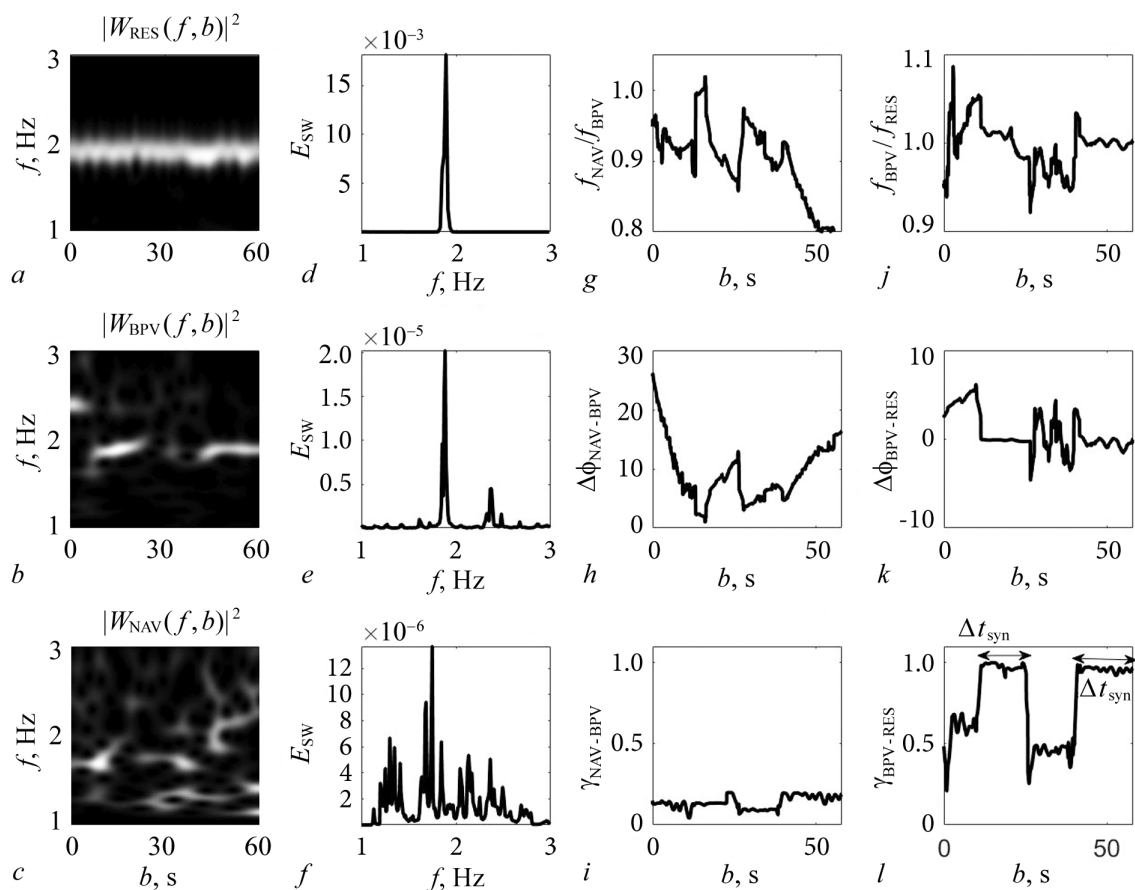


Рис. 2. Примеры вейвлетных спектров RES, BPV и NAV и фазовых и частотных характеристик до болевой стимуляции: *a-c* — проекции вейвлетных спектров $(b, f, |W_s(\omega_l, b)|^2)$ на плоскость (b, f) для NAV, BPV и RES; *d-f* — усредненные по времени распределения энергии $E_{SW}(f)$ синхросжатого вейвлетного спектра $(b, f, |T_s(\omega_l, b)|^2)$ по частотам для RES, BPV, NAV; *g, j* — отношения мгновенных частот f_{NAV}/f_{BPV} и f_{BPV}/f_{RES} ; *h, k* — мгновенные разности фаз $\Delta\phi_{NAV-BPV}$ и $\Delta\phi_{BPV-RES}$; *i, l* — зависимости индексов фазовой синхронизации $\gamma_{NAV-BPV}$ и $\gamma_{BPV-RES}$ от времени

Fig. 2. Examples of wavelet spectra of the RES, BPV and NAV time series and phase and frequency characteristics before the pain stimulation: *a-c* — projections of the local wavelet спектров $(b, f, |W_s(\omega_l, b)|^2)$ onto the (b, f) plane for the RES, BPV and NAV time series; *d-f* — global wavelet spectra $E_{SW}(f)$ for RES, BPV, NAV; *g, j* — ratios of instantaneous frequencies f_{NAV}/f_{BPV} and f_{BPV}/f_{RES} ; *h, k* — instantaneous phase differences $\Delta\phi_{NAV-BPV}$ and $\Delta\phi_{BPV-RES}$; *i, l* — dependences of phase synchronization indices $\gamma_{NAV-BPV}$ and $\gamma_{BPV-RES}$ on time

горизонтальных участков плато (рис. 2, *h*), а индекс фазовой синхронизации $\gamma_{NAV-BPV}$ колеблется около значения, близкого к нулю (рис. 2, *i*).

В отличие от этого, фазовая синхронизация между временными рядами RES и BPV обнаруживается во временных интервалах [14, 26] с и [40, 60] с. В этих интервалах отношение мгновенных частот f_{BPV}/f_{RES} близко к 1 (рис. 2, *j*), мгновенная разность фаз $\Delta\phi_{BPV-RES}$ близка к 0 (рис. 2, *k*), а индекс фазовой синхронизации $\gamma_{BPV-RES}$ колеблется вокруг значения, близкого к 1 (рис. 2, *l*).

Рис. 3 демонстрирует наличие интервалов фазовой синхронизации между ритмами вариабельности нейрональной активности и вариабельности артериального давления, а также между ритмом дыхания и вариабельностью артериального давления у той же крысы во время болевого воздействия.

Отношение мгновенных частот f_{BPV}/f_{RES} колеблется вокруг значения, близкого к 1 (рис. 3, *g*), колебания мгновенной разности фаз $\Delta\phi_{BPV-RES}$ происходят вокруг 0 (рис. 3, *h*),

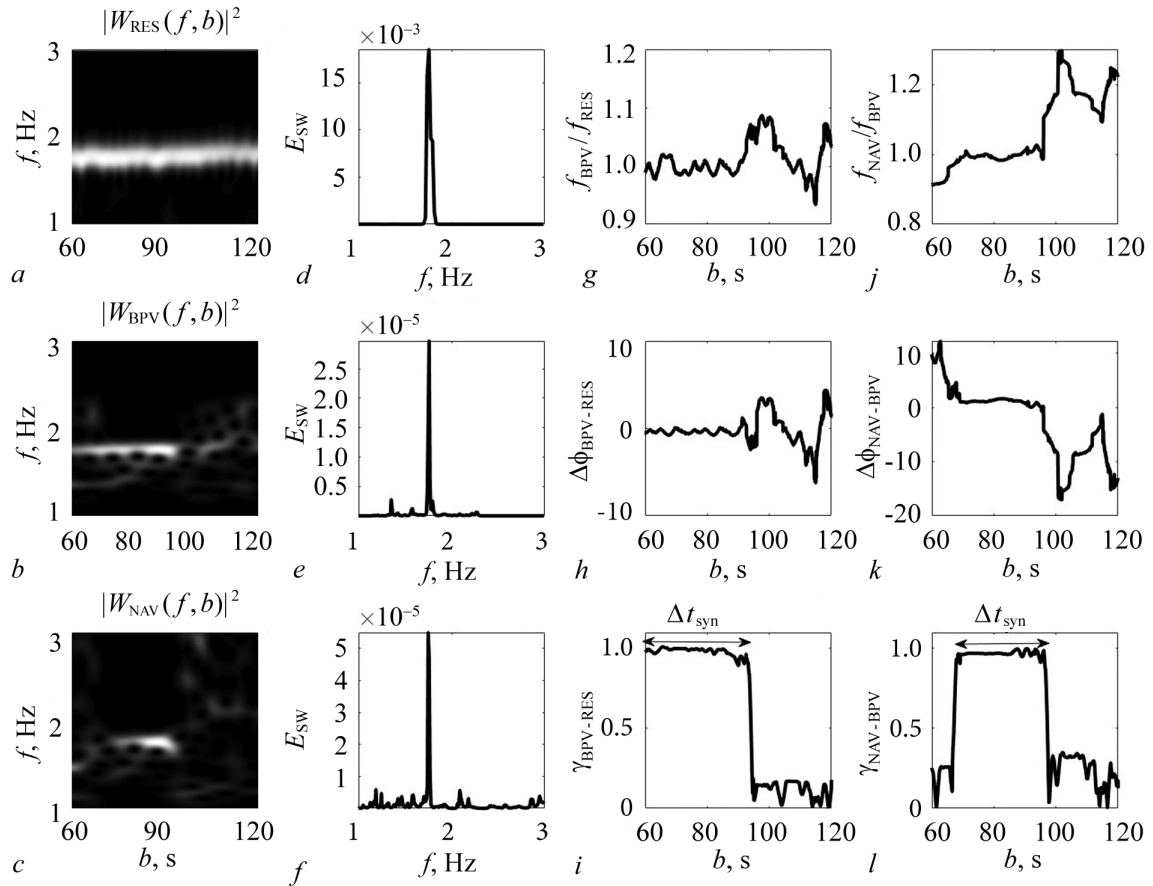


Рис. 3. Примеры вейвлетных спектров RES, BPV и NAV и фазовых и частотных характеристик во время болевой стимуляции: *a-l* — аналогичны рис. 2

Fig. 3. Examples of wavelet spectra of the RES, BPV and NAV time series and phase and frequency characteristics during the pain stimulation: *a-l* — are the same as in Fig. 2

а колебания индекса фазовой синхронизации $\gamma_{BPV-RES}$ вокруг 1 (рис. 3, *i*) в интервале времени [60...93.5] с. На десятой секунде от начала болевого воздействия происходит подстройка частоты вариабельности нейрональной активности и возникновение синхронизации между нейрональной активностью и вариабельностью артериального давления на частоте дыхания $f_{RES}=1.76\pm0.03$ Гц.

Во временном интервале [70...97] с отношение мгновенных частот f_{NAV}/f_{BPV} колеблется вокруг значения, близкого к 1 (рис. 3, *j*), мгновенная разность фаз $\Delta\phi_{NAV-BPV}$ колеблется вокруг 0 (рис. 3, *k*), а индекс фазовой синхронизации $\gamma_{NAV-BPV}$ вокруг 1 (рис. 3, *l*).

В Таблице приведены усредненные значения длительностей фазовой синхронизации $\Delta t_{synBPV-RES}$, $\Delta t_{synNAV-BPV}$, $\Delta t_{synNAV-RES}$ у крыс до и во время болевого воздействия.

Данные Таблицы показывают, что до болевого воздействия фазовая синхронизация между вариабельностью артериального давления и ритмом дыхания была обнаружена для большинства экспериментальных записей (у семи крыс из десяти), у других трех крыс синхронизация между этими ритмами отсутствовала (на это указывает близкая к нулю величина $\Delta t_{synBPV-RES}$). При этом у этих крыс фазовая синхронизация между вариабельностью артериального давления и ритмом дыхания сохранялась и во время болевого воздействия. Синхронизация между вариабельностью артериального давления и вариабельностью нейрональной активности до болевой стимуляции у этих крыс отсутствовала ($\Delta t_{synNAV-BPV} = 0.5 \pm 0.3$ с). Подстройка частоты вариабельности нейрональной активности обеспечивала возникновение фазовой синхронизации

Таблица. Усредненные значения длительностей фазовой синхронизации

$\Delta t_{\text{synBPV-RES}}$, $\Delta t_{\text{synNAV-BPV}}$, $\Delta t_{\text{synNAV-RES}}$

Table. Averaged values of durations of the phase synchronization $\Delta t_{\text{synBPV-RES}}$,

$\Delta t_{\text{synNAV-BPV}}$, $\Delta t_{\text{synNAV-RES}}$

крысы (7/10)		
	до болевой стимуляции	во время болевой стимуляции
$\Delta t_{\text{synBPV-RES}}$	33.7 ± 3.5	38.5 ± 3.9
$\Delta t_{\text{synNAV-BPV}}$	0.5 ± 0.3	34.4 ± 3.4
крысы (3/10)		
	до болевой стимуляции	во время болевой стимуляции
$\Delta t_{\text{synBPV-RES}}$	0.7 ± 0.3	56.2 ± 5.7
$\Delta t_{\text{synNAV-RES}}$	46.7 ± 4.9	37.8 ± 3.9

между вариабельностью нейрональной активности и вариабельностью артериального давления на частоте дыхания через некоторое время после начала болевого воздействия.

Статистически значимые различия между средними значениями длительности фазовой синхронизации $\Delta t_{\text{synBPV-RES}}$ для данных до и во время болевой стимуляции были определены на основании $p < 0.05$. Болевое воздействие повышало длительность фазовой синхронизации между вариабельностью артериального давления и ритмом дыхания ($\Delta t_{\text{synBPV-RES}} = 33.7 \pm 3.5$ с и $\Delta t_{\text{synBPV-RES}} = 38.5 \pm 3.9$ с до и после воздействия соответственно).

Синхронизация между ритмом дыхания и вариабельностью интервалов нейрональной активности при отсутствии болевого воздействия была найдена в меньшем количестве данных (у трех крыс из десяти) (см. Таблицу). Дисперсионный анализ также выявил статистически значимые различия между средними значениями длительности фазовой синхронизации до и во время болевой стимуляции для значений $\Delta t_{\text{synNAV-RES}}$ на уровне $p < 0.05$.

Болевое воздействие в этих случаях не нарушало синхронизацию между ритмом дыхания и вариабельностью нейрональной активности, но уменьшало длительность фазовой синхронизации ($\Delta t_{\text{synNAV-RES}} = 46.7 \pm 4.9$ с до воздействия и после $\Delta t_{\text{synNAV-RES}} = 37.8 \pm 3.9$ с) и вызывало подстройку частоты вариабельности артериального давления к частоте дыхания, приводя к синхронизации между ритмом дыхания и вариабельностью артериального давления. Усредненная длительность фазовой синхронизации между вариабельностью артериального давления и ритмом дыхания для этих крыс составляла $\Delta t_{\text{synBPV-RES}} = 56.2 \pm 5.7$ с.

Заключение

Применив метод синхросжатого вейвлет-преобразования, мы оценили возможность получения данных о возникновении фазовой синхронизации между различными физиологическими ритмами у наркотизированных крыс до и во время болевого воздействия.

Мы обнаружили, что болевое воздействие может вызывать подстройку частоты вариабельности нейрональной активности вентролатеральной ретикулярной формации продолговатого мозга или частоты вариабельности артериального давления к частоте дыхания с последующим возникновением фазовой синхронизации между этими временными рядами.

Оценка исчезновения или возникновения синхронизации между ритмами различных физиологических систем при различных патологиях функционального состояния представляется перспективным средством для анализа степени нарушения регуляции этих систем.

При разработке специфических анальгетических препаратов, которые могли бы влиять на регуляцию в нейрональных сетях и убирать синдром раздраженной кишки, и необходимости учета

возможных побочных эффектов на частоту сердечных сокращений и величину артериального давления полученные в работе результаты могут быть использованы для скрининга новых антиноцицептивных фармакологических препаратов, для анализа их влияния на взаимодействия между физиологическими ритмами, в частности, на возможное подавления синхронизации между вариабельностью артериального давления крови и вариабельностью нейрональной активности мозга.

Список литературы

1. *Ticos C. M., Rosa Jr. E., Pardo W. B., Walkenstein J. A., Monti M.* Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, no. 14. P. 2929–2932. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.2929.
2. *DeShazer D. J., Breban R., Ott E., Roy R.* Detecting phase synchronization in a chaotic laser array // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, no. 4. P. 044101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.044101.
3. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D. L., Zhou C. S.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports.* 2002. Vol. 366, no. 1–2. P. 1–101. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
4. *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., Arecchi F. T.* Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO₂ laser systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, no. 19. P. 194101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.194101.
5. *Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Bespyatov A. B., Bodrov M. B., Gridnev V. I.* Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2005. Vol. 23, no. 4. P. 1429–1438. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.041.
6. *Bespyatov A. B., Bodrov M. B., Gridnev V. I., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Experimental observation of synchronization between the rhythms of cardiovascular system // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2003. Vol. 6, no. 4. P. 885–893.
7. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73, no. 2. P. 026208. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.026208.
8. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, no. 5. P. 056207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.056207.
9. *Москаленко О. И., Короновский А. А., Храмов А. Е., Журавлев М. О.* Оценка степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду: Модельные системы и нейрофизиологические данные // *Письма в ЖЭТФ.* 2016. Т. 103, № 8. С. 606–610. DOI: 10.7868/S0370274X16080099.
10. *Дук О. Е., Глазов А. Л.* Параметры фазовой синхронизации в электроэнцефалографических паттернах как маркеры когнитивных нарушений // *ЖТФ.* 2021. Т. 91, № 4. С. 678–688. DOI: 10.21883/JTF.2021.04.50633.200–20.
11. *Dick O. E., Glazov A. L.* Estimation of the synchronization between intermittent photic stimulation and brain response in hypertension disease by the recurrence and synchrosqueezed wavelet transform // *Neurocomputing.* 2021. Vol. 455. P. 163–177. DOI: 10.1016/j.neucom.2021.05.038.
12. *Rangaprakash D., Pradhan N.* Study of phase synchronization in multichannel seizure EEG using nonlinear recurrence measure // *Biomedical Signal Processing and Control.* 2014. Vol. 11. P. 114–122. DOI: 10.1016/j.bspc.2014.02.012.
13. *Kiselev A. R., Mironov S. A., Karavaev A. S., Kulminskiy D. D., Skazkina V. V., Borovkova E. I., Shvartz V. A., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* A comprehensive assessment of cardiovascular autonomic control using photoplethysmograms recorded from the earlobe and fingers // *Physiol. Meas.* 2016. Vol. 37, no. 4. P. 580–595. DOI: 10.1088/0967-3334/37/4/580.

14. Боровкова Е. В., Караваев А. С., Киселев А. Р., Шварц В. А., Миронов С. А., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Метод диагностики синхронизованности 0,1 Гц ритмов вегетативной регуляции сердечно-сосудистой системы в реальном времени // *Анналы аритмологии*. 2014. Т. 11, № 2. С. 129–136. DOI: 10.15275/annaritm.2014.2.7.
15. Hoyer D., Leder U., Hoyer H., Pompe B., Sommer M., Zwiener U. Mutual information and phase dependencies: measures of reduced nonlinear cardiorespiratory interactions after myocardial infarction // *Medical Engineering & Physics*. 2002. Vol. 24, no. 1. P. 33–43. DOI: 10.1016/S1350-4533(01)00120-5.
16. Karavaev A. S., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Kiselev A. R., Gridnev V. I., Ruban E. I., Bezruchko B. P. Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system // *Chaos*. 2009. Vol. 19, no. 3. P. 033112. DOI: 10.1063/1.3187794.
17. Shio gai Y., Stefanovska A., McClintock P. V. E. Nonlinear dynamics of cardiovascular ageing // *Physics Reports*. 2010. Vol. 488, no. 2–3. P. 51–110. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.12.003.
18. Stefanovska A., Haken H., McClintock P. V. E., Hožič M., Bajrović F., Ribarič S. Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, no. 22. P. 4831–4834. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4831.
19. Любашина О. А., Михалкин А. А., Сиваченко И. Б. Нейрональные перестройки на супраспинальном уровне, способствующие кишечной гипералгезии при колите // *Интегративная физиология*. 2021. Т. 2, № 1. С. 71–78. DOI: 10.33910/2687-1270-2021-2-1-71-78.
20. Lyubashina O. A., Sivachenko I. B., Mikhalkin A. A. Impaired visceral pain-related functions of the midbrain periaqueductal gray in rats with colitis // *Brain Research Bulletin*. 2022. Vol. 182. P. 12–25. DOI: 10.1016/j.brainresbull.2022.02.002.
21. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М: Техносфера, 2003. 496 с.
22. Rosenblum M. G., Cimponeriu L., Bezerianos A., Patzak A., Mrowka R. Identification of coupling direction: Application to cardiorespiratory interaction // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65, no. 4. P. 041909. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041909.
23. Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Bespyatov A. B., Bodrov M. B., Gridnev V. I. Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005. Vol. 23, no. 4. P. 1429–1438. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.041.
24. Kralemann B., Frühwirth M., Pikovsky A., Rosenblum M., Kenner T., Schaefer J., Moser M. In vivo cardiac phase response curve elucidates human respiratory heart rate variability // *Nature Communications*. 2013. Vol. 4. P. 2418. DOI: 10.1038/ncomms3418.
25. Zhang Q., Patwardhan A. R., Knapp C. F., Evans J. M. Cardiovascular and cardiorespiratory phase synchronization in normovolemic and hypovolemic humans // *European Journal of Applied Physiology*. 2015. Vol. 115, no. 2. P. 417–427. DOI: 10.1007/s00421-014-3017-4.
26. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM Publication, 1992. 369 p. DOI: 10.1137/1.9781611970104.
27. Li D., Li X., Cui D., Li Z. H. Phase synchronization with harmonic wavelet transform with application to neuronal populations // *Neurocomputing*. 2011. Vol. 74, no. 17. P. 3389–3403. DOI: 10.1016/j.neucom.2011.05.022.
28. Daubechies I., Lu J., Wu H.-T. Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2011. Vol. 30, no. 2. P. 243–261. DOI: 10.1016/j.acha.2010.08.002.
29. Wu H.-T., Chan Y.-H., Lin Y.-T., Yeh Y.-H. Using synchrosqueezing transform to discover breathing

dynamics from ECG signals // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2014. Vol. 36, no. 2. P. 354–359. DOI: 10.1016/j.acha.2013.07.003.

30. *Wu H.-T., Lewis G. F., Davila M. I., Daubechies I., Porges S. W.* Optimizing estimates of instantaneous heart rate from pulse wave signals with the synchrosqueezing transform // *Methods. Inf. Med.* 2016. Vol. 55, no. 5. P. 463–472. DOI: 10.3414/ME16-01-0026.
31. *Lyubashina O. A., Sivachenko I. B., Sokolov A. Y.* Differential responses of neurons in the rat caudal ventrolateral medulla to visceral and somatic noxious stimuli and their alterations in colitis // *Brain Research Bulletin*. 2019. Vol. 152. P. 299–310. DOI: 10.1016/j.brainresbull.2019.07.030.
32. *Thakur G., Brevdo E., Fučkar N. S., Wu H.-T.* The Synchrosqueezing algorithm for time-varying spectral analysis: Robustness properties and new paleoclimate applications // *Signal Processing*. 2013. Vol. 93, no. 5. P. 1079–1094. DOI: 10.1016/j.sigpro.2012.11.029.
33. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C. E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // *Physica D*. 2000. Vol. 144, no. 3–4. P. 358–369. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00087-7.

References

1. Ticos CM, Rosa Jr E, Pardo WB, Walkenstein JA, Monti M. Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge. *Phys. Rev. Lett.* 2000;85(14):2929–2932. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.2929.
2. DeShazer DJ, Breban R, Ott E, Roy R. Detecting phase synchronization in a chaotic laser array. *Phys. Rev. Lett.* 2001;87(4):044101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.044101.
3. Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, Valladares DL, Zhou CS. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*. 2002;366(1–2):1–101. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
4. Boccaletti S, Allaria E, Meucci R, Arecchi FT. Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO₂ laser systems. *Phys. Rev. Lett.* 2002;89(19):194101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.194101.
5. Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Bespyatov AB, Bodrov MB, Gridnev VI. Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005;23(4):1429–1438. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.041.
6. Bespyatov AB, Bodrov MB, Gridnev VI, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Experimental observation of synchronization between the rhythms of cardiovascular system. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2003;6(4):885–893.
7. Hramov AE, Koronovskii AA, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency. *Phys. Rev. E*. 2006;73(2):026208. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.026208.
8. Hramov AE, Koronovskii AA, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform. *Phys. Rev. E*. 2007;75(5):056207. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.056207.
9. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Hramov AE, Zhuravlev MO. Estimate of the degree of synchronization in the intermittent phase synchronization regime from a time series (model systems and neurophysiological data). *Jetp Lett.* 2016;103(8):539–543. DOI: 10.1134/S0021364016080105.
10. Dik OE, Glazov AL. Parameters of phase synchronization in electroencephalographic patterns as markers of cognitive impairment. *Tech. Phys.* 2021;66(4):560–570. DOI: 10.1134/S1063784221040058.
11. Dik OE, Glazov AL. Estimation of the synchronization between intermittent photic stimulation and brain response in hypertension disease by the recurrence and synchrosqueezed wavelet transform. *Neurocomputing*. 2021;455:163–177. DOI: 10.1016/j.neucom.2021.05.038.

12. Rangaprakash D, Pradhan N. Study of phase synchronization in multichannel seizure EEG using nonlinear recurrence measure. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2014;11:114–122. DOI: 10.1016/j.bspc.2014.02.012.
13. Kiselev AR, Mironov SA, Karavaev AS, Kulminskiy DD, Skazkina VV, Borovkova EI, Shvartz VA, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. A comprehensive assessment of cardiovascular autonomic control using photoplethysmograms recorded from the earlobe and fingers. *Physiol. Meas.* 2016;37(4):580–595. DOI: 10.1088/0967-3334/37/4/580.
14. Borovkova EI, Karavaev AS, Kiselev AR, Shvartz VA, Mironov SA, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Method for diagnostics of synchronization of 0.1 Hz rhythms of cardiovascular system autonomic regulation in real time. *Annals of Arrhythmology*. 2014;11(2):129–136 (in Russian). DOI: 10.15275/annaritm.2014.2.7.
15. Hoyer D, Leder U, Hoyer H, Pompe B, Sommer M, Zwiener U. Mutual information and phase dependencies: measures of reduced nonlinear cardiorespiratory interactions after myocardial infarction. *Medical Engineering & Physics*. 2002;24(1):33–43. DOI: 10.1016/S1350-4533(01)00120-5.
16. Karavaev AS, Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Kiselev AR, Gridnev VI, Ruban EI, Bezruchko BP. Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system. *Chaos*. 2009;19(3):033112. DOI: 10.1063/1.3187794.
17. Shiozai Y, Stefanovska A, McClintock PVE. Nonlinear dynamics of cardiovascular ageing. *Physics Reports*. 2010;488(2–3):51–110. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.12.003.
18. Stefanovska A, Haken H, McClintock PVE, Hožič M, Bajrović F, Ribarič S. Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system. *Phys. Rev. Lett.* 2000;85(22):4831–4834. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4831.
19. Lyubashina OA, Mikhalkin AA, Sivachenko IB. Supraspinal neuronal alterations promoting intestinal hyperalgesia in colitis. *Integrative Physiology*. 2021;2(1):71–78. DOI: 10.33910/2687-1270-2021-2-1-71-78.
20. Lyubashina OA, Sivachenko IB, Mikhalkin AA. Impaired visceral pain-related functions of the midbrain periaqueductal gray in rats with colitis. *Brain Research Bulletin*. 2022;182:12–25. DOI: 10.1016/j.brainresbull.2022.02.002.
21. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. New York: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
22. Rosenblum MG, Cimponeriu L, Bezerianos A, Patzak A, Mrowka R. Identification of coupling direction: Application to cardiorespiratory interaction. *Phys. Rev. E*. 2002;65(4):041909. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041909.
23. Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Bespyatov AB, Bodrov MB, Gridnev VI. Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2005;23(4):1429–1438. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.041.
24. Kraleman B, Frühwirth M, Pikovsky A, Rosenblum M, Kenner T, Schaefer J, Moser M. In vivo cardiac phase response curve elucidates human respiratory heart rate variability. *Nature Communications*. 2013;4:2418. DOI: 10.1038/ncomms3418.
25. Zhang Q, Patwardhan AR, Knapp CF, Evans JM. Cardiovascular and cardiorespiratory phase synchronization in normovolemic and hypovolemic humans. *European Journal of Applied Physiology*. 2015;115(2):417–427. DOI: 10.1007/s00421-014-3017-4.
26. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM Publication; 1992. 369 p. DOI: 10.1137/1.9781611970104.

27. Li D, Li X, Cui D, Li ZH. Phase synchronization with harmonic wavelet transform with application to neuronal populations. *Neurocomputing*. 2011;74(17):3389–3403. DOI: 10.1016/j.neucom.2011.05.022.
28. Daubechies I, Lu J, Wu H-T. Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool. *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2011;30(2):243–261. DOI: 10.1016/j.acha.2010.08.002.
29. Wu H-T, Chan Y-H, Lin Y-T, Yeh Y-H. Using synchrosqueezing transform to discover breathing dynamics from ECG signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2014;36(2):354–359. DOI: 10.1016/j.acha.2013.07.003.
30. Wu H-T, Lewis GF, Davila MI, Daubechies I, Porges SW. Optimizing estimates of instantaneous heart rate from pulse wave signals with the synchrosqueezing transform. *Methods. Inf. Med.* 2016;55(5):463–472. DOI: 10.3414/ME16-01-0026.
31. Lyubashina OA, Sivachenko IB, Sokolov AY. Differential responses of neurons in the rat caudal ventrolateral medulla to visceral and somatic noxious stimuli and their alterations in colitis. *Brain Research Bulletin*. 2019;152:299–310. DOI: 10.1016/j.brainresbull.2019.07.030.
32. Thakur G, Brevdo E, Fučkar NS, Wu H-T. The Synchrosqueezing algorithm for time-varying spectral analysis: Robustness properties and new paleoclimate applications. *Signal Processing*. 2013;93(5):1079–1094. DOI: 10.1016/j.sigpro.2012.11.029.
33. Mormann F, Lehnertz K, David P, Elger CE. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. *Physica D*. 2000; 144(3–4):358–369. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00087-7.



Дик Ольга Евгеньевна — родилась в Междуреченске (1962). Окончила физический факультет Ленинградского государственного университета по направлению «Биофизика» (1985). Защитила диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Биофизика» (1992, МГУ) и доктора биологических наук по специальности «Физиология» (2018, ФИН РАН). С 1988 года работает в лаборатории Физиология interoцепции Института физиологии им. И. П. Павлова РАН. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, нелинейная динамика. Опубликовала свыше 80 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 199034 Санкт-Петербург, наб. Макарова, 6
Институт физиологии им. И. П. Павлова РАН
E-mail: dickviola@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5056-1779
AuthorID (eLibrary.Ru): 17280



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 616.853.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003088
EDN: XBFSQU

Разработка алгоритма детектирования медленной пик-волновой активности при бессудорожных формах эпилепсии*

А. С. Белокопытов¹✉, М. М. Макарова¹, М. И. Саламатин¹, О. М. Редкозубова²

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

²Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», Россия

E-mail: ✉a.belokopytov@neurobotics.ru, m.makarova@hse.ru,
mihail.salamatin@gmail.com, redkozubova@gmail.com

Поступила в редакцию 13.09.2023, принята к публикации 19.09.2023,
опубликована онлайн 8.02.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Цель данного исследования заключается в разработке классификатора, способного в режиме реального времени определять типичные абсансы на основе данных электроэнцефалограммы, с использованием модели опорных векторов. **Методы.** Для обучения модели опорных векторов использовались участки электроэнцефалограммы, предварительно помеченные специалистом как содержащие типичные абсансы. В качестве признаков для классификации выделены ключевые характеристики, такие как число пересечений нуля, кросс-корреляция между двумя последовательными окнами, спектральная мощность в различных диапазонах частот и среднее квадратическое отклонение мгновенной мощности сигнала. **Результаты.** Сформированы обучающая и тестировочная выборки, включающие окна электроэнцефалограммы с различными типами артефактов. Модель опорных векторов была обучена, протестирована и показала высокую эффективность. Разработанный алгоритм может быть интегрирован в мобильное приложение и использован совместно с носимым электроэнцефалографом на сухих электродах для детекции типичных абсансов в режиме реального времени. **Заключение.** Результаты исследования подтверждают перспективность применения методов машинного обучения для автоматического детектирования и протоколирования эпилептической активности. Однако для уверенного вывода требуется дальнейшее тестирование на большем объеме данных, включая данные, собранные с использованием беспроводного электроэнцефалографа на сухих электродах. Следующим этапом будет подбор подходящего устройства и создание мобильного приложения для сбора и анализа данных в режиме реального времени.

Ключевые слова: абсансная эпилепсия, метод опорных векторов, динамический классификатор, электроэнцефалограмма, детектирование в реальном времени, машинное обучение.

Для цитирования: Белокопытов А. С., Макарова М. М., Саламатин М. И., Редкозубова О. М. Разработка алгоритма детектирования медленной пик-волновой активности при бессудорожных формах эпилепсии // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 223–238. DOI: 10.18500/0869-6632-003088. EDN: XBFSQU

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нейроинформатика – 2023».

Development of an algorithm for detecting slow peak-wave activity in non-convulsive forms of epilepsy*

A. S. Belokopytov¹✉, M. M. Makarova¹, M. I. Salamatina¹, O. M. Redkozubova²

¹National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

²National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia

E-mail: ✉a.belokopytov@neurobotics.ru, m.makarova@hse.ru,

mihail.salamatina@gmail.com, redkozubova@gmail.com

Received 13.09.2023, accepted 19.09.2023, available online 8.02.2024, published 29.03.2024

Abstract. The purpose of this study is to develop a classifier capable of detecting typical absence seizures in real-time using electroencephalogram (EEG) data and a Support Vector Machine (SVM) model. *Methods.* Sections of the EEG, previously identified by a specialist as containing typical absences, were used to train the SVM model. Key features for classification include the number of zero crossings, cross-correlation between two consecutive windows, spectral power across various frequency bands, and the standard deviation of instantaneous signal power. *Results.* Training and testing datasets were established, consisting of EEG windows with various types of artifacts. The SVM model was successfully trained and tested, achieving high performance metrics. The developed algorithm can be integrated into a mobile application and used in conjunction with a wearable EEG device with dry electrodes for real-time detection of typical absences. *Conclusion.* The study results affirm the potential for using machine learning techniques for the automatic detection and logging of epileptic activity. However, additional testing on a larger dataset is needed for more conclusive results, including data acquired through a wireless EEG device using dry electrodes. Future work will involve selecting a suitable EEG device and developing a mobile application for real-time data collection and analysis.

Keywords: absence epilepsy, support vector machine, dynamic classifier, electroencephalography, real-time detection, machine learning.

For citation: Belokopytov AS, Makarova MM, Salamatina MI, Redkozubova OM. Development of an algorithm for detecting slow peak-wave activity in non-convulsive forms of epilepsy. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):223–238. DOI: 10.18500/0869-6632-003088

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Проблематика детектирования приступов. Медленную пик-волновую активность при бессудорожных формах эпилепсии относят к ЭЭГ-картине одного из видов эпилептических приступов (абсансов). Абсанс — это разновидность генерализованного эпилептического приступа (припадка), характеризующегося внезапной кратковременной (секунды-десятки секунд) утратой сознания, блокадой моторной активности и амнезией. Чаще всего они наблюдаются в детском возрасте (однако есть свидетельства возникновения припадков и в более позднем возрасте [1]) и ассоциируются со специфическими электроэнцефалографическими (ЭЭГ) паттернами [2], включая билатеральные, преобладающие в лобной части разряды спайк-волн частотой 3–4 Гц. Исследования, проведенные как на людях, так и на животных, позволяют предположить, что эти приступы возникают в результате колебаний кортикоталамической сети [3, 4].

При назначении противоэпилептической терапии неврологи полагаются на дневник приступов, который пациенты ведут самостоятельно. По данным отчётам делаются выводы насчёт дальнейшего лечения. Однако, как показывает практика, самоконтроль пациентов ненадежен. Согласно [5], они замечают менее 50% приступов, а согласно исследованию [6], 26% больных эпилепсией отмечают, что никогда не замечали приступов в течение дня, 47% утверждают,

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Neuroinformatics — 2023”.

что заметили менее половины произошедших приступов. При этом 64% пациентов никогда не замечали ночных припадков и 79% считают, что упустили большинство ночных припадков.

В исследовании [7] было установлено, что самоотчеты более чем у двух третей пациентов, страдающих от абсансных приступов, обладают недостаточной точностью. Было зафиксировано, что 37.5% отчетов о приступах были существенно завышены, в то время как 29.2% — значительно занижены.

Авторы исследования также отмечают, что пациентам даются инструкции, согласно которым в дневнике необходимо отмечать любые симптомы, похожие на симптомы припадка. Это приводит к тому, что количество ложных отчетов возрастает, а пациентам назначается излишнее лечение в тех случаях, когда противоэpileптическая терапия требуется в меньшем объеме, либо вообще не требуется.

Сравнение отчетов пациентов с реальными записями ЭЭГ подтвердило недостоверность самоконтроля больных эпилепсией. В исследовании, в котором приняло участие 552 человека, проводились длительные сеансы записи ЭЭГ. При этом пациенты должны были отмечать в дневнике любые проявления эпилепсии, указывая время припадка. В результате из 47 случаев фокальных припадков участники заметили лишь 29 (61.7%) [8].

В статье [9] авторы обнаружили следующую закономерность: в некоторых случаях тонико-клоническим припадкам предшествовала пик-волновая активность. Следовательно, иногда абсансная эпилепсия может выступать в качестве предиктора генерализованных приступов, что только подчеркивает актуальность разработки устройства детектирования пик-волновой активности.

Пациенты, которые не могут достоверно задокументировать число приступов, находятся в группе риска. Среди возможных негативных последствий возникновения абсансов у человека можно выделить следующие: снижение успеваемости в школе [10], увеличение риска несчастных случаев для себя и окружающих [11], увеличение частоты возникновения тревожно-депрессивных расстройств [12], расстройство внимания [13], нейродегенеративные процессы в головном мозге [2], а также риск перехода абсансной эпилепсии в другие судорожные формы [14, 15].

Таким образом, существует необходимость в объективной оценке частоты приступов. Однако использование видеофиксации пациента параллельно с регистрацией ЭЭГ (что является золотым стандартом детектирования приступов) требует больших ресурсов, которыми обладает не каждый стационар [7]. Вариант записи видео-ЭЭГ в амбулаторных условиях пока недоступен всем нуждающимся, к тому же такой подход приводит к накоплению огромных массивов визуальных данных, на анализ которых уходит много времени [14]. Этого можно было бы избежать, используя носимые устройства для автоматического обнаружения абсансов.

Авторы исследования [16] провели опрос среди пациентов (всего опрошено 92 человека), страдающих эпилепсией, их родственников, а также лечащих врачей. Результаты показали, что интерес к детектирующему устройству коррелирует с беспокойством по поводу незамеченных приступов. Оценка интереса и беспокойства производилась по шкале от 1 до 7, где меньшее значение означает меньший интерес и беспокойство (коэффициент корреляции Спирмена $r = 0.489$, коэффициент значимости $p < 0.001$). Это означает, что существует умеренная статистически значимая корреляция между уровнем беспокойства о незамеченных приступах и интересом к использованию устройства для детекции приступов.

Использование носимого устройства для автоматического обнаружения абсансов могло бы решить вышеозначенные проблемы. Подобные устройства не требуют применения геля, они комфортны, а также просты в использовании. Специальное программное обеспечение значительно упростило бы и ускорило работу врача-невролога, а его использование совместно с устройством, которое можно было бы использовать в качестве холтера, упростило бы задачу оценки эффективности проводимого лечения, и основывалась бы она на объективных данных. С помощью аппаратно-программного комплекса также можно было бы предупреждать пациента,

его родственников или окружающих о высокой вероятности возникновения абсансного припадка в тот или иной момент времени. Такие методы диагностики позволили бы собирать большее количество данных и проводить их онлайн-анализ, исключая необходимость постоянного посещения поликлиники. Реализация идеи открыла бы новые возможности для исследования эпилепсии в естественных условиях (вне лаборатории), позволяя анализировать причины возникновения (триггеры) припадков.

Создание устройства и программы, предназначенных для регистрации абсансных припадков, могло бы заменить практику ведения дневников. Помимо этого, аппаратно-программный комплекс потенциально мог бы выполнять следующие функции:

- вызов помощи (предупреждение окружающих, родных, врачей о случае припадка),
- предупреждение о необходимости принятия лекарств,
- активация противосудорожного стимулирующего устройства,
- запись ЭЭГ для дальнейшей консультации со специалистом.

Вопрос детектирования пик-волновой активности поднимается уже не первый год. Научные группы выдвигают свои решения проблемы выявления абсансных паттернов. Российские научные группы тестировали системы детектирования на крысах линии WAG/Rij с использованием интракраниальных электродов [17]. После того, как было показано, что чувствительность и точность разработанных алгоритмов достаточно высоки, был начат плавный переход к записи ЭЭГ больных эпилепсией. Первоначальный алгоритм детектирования был довольно прост: производилась свёртка материнского вейвлета (обычно Морле) с сигналом ЭЭГ, и если энергия сигнала в определённом диапазоне была достаточно высока относительно других частот, то исследуемый отрезок алгоритм распознавал как «пик-волновую активность». Работа велась очень последовательно, в результате чего был разработан особый математический аппарат, учитывающий особенности различных осцилляторных паттернов на ЭЭГ [17–21]. Вопросом для дальнейших исследований при таком подходе оставался подбор наилучших параметров исследуемого окна ЭЭГ и параметров вейвлет-преобразования и оценки (ширина окна ЭЭГ, время задержки детектирования, пороговое значение энергии частотной полосы и т. д.). Более того, постепенное развитие теоретической базы позволило приступить к вопросу прогнозирования пик-волновой активности в ЭЭГ, а также усложнения анализа ЭЭГ путём добавления новых методик, например, метода эмпирических мод [22, 23].

В области детектирования эпилептических припадков наблюдается значительное разнообразие методологий, разработанных исследователями из разных стран. Например, данные разработки включали в себя нейронные сети, использующие метод обратного распространения ошибки [24]; анализ изменений скорости сигнала на коротких интервалах с помощью первой производной [25]; свёртку материнского вейвлета (в основном, типа Морле) с ЭЭГ-сигналом [18, 26]; применение модели, основанной на радиальных базисных функциях [27]; подход на основе глубокого обучения [28]. Последний включал в себя анализ особенностей длины линии на основе многоуровневого декомпозирования вейвлет-преобразования, комбинируя это с искусственной нейронной сетью для классификации сигналов ЭЭГ относительно наличия или отсутствия припадка.

В [29] было также применено вейвлет-преобразование для анализа ЭЭГ с акцентом на исследовании длины линии, однако данный подход был успешно интегрирован с искусственными нейронными сетями. Отдельно стоит упомянуть о вычислительно эффективном алгоритме для детектирования абсанс-приступов в режиме реального времени в носимом оборудовании для ЭЭГ [30], где особое внимание уделялось созданию алгоритма, оптимизированного для выполнения на микроконтроллерах с минимальной памятью и вычислительной мощностью. Для проверки эффективности метода использовался набор данных восьми пациентов с юношеской формой абсанс-эпилепсии. Результаты показали высокую эффективность нового метода при сравнительно низких вычислительных затратах.

Учитывая всё вышесказанное, можно заключить, что разработка аппаратно-программного комплекса, предназначенного для детектирования и визуализации медленной пик-волновой активности является актуальной задачей, реализация которой могла бы найти широкое применение среди людей, страдающих эпилепсией. Однако в основе проекта необходима разработка классификатора, что раскрыто подробнее далее в статье.

Пик-волновая активность при абсансной эпилепсии. Как уже было сказано, абсансная эпилепсия на ЭЭГ проявляется в виде абсансов (рис. 1) — пик-волн или, как их ещё называют в литературе, спайк-волн [2, 31, 32].

Абсансы можно классифицировать по проявлению при записи электроэнцефалографии на типичный и атипичный абсанс. Изменение разности потенциалов при типичном абсансе имеет следующий характер: генерализованность, синхронность, симметричность, форма колебаний — пик-волны частотой около 3 Гц. Атипичный абсанс можно охарактеризовать следующим: не столь выраженная синхронность и симметричность, форма колебаний — пик-волны частотой большей или меньшей 3 Гц. Таким образом, абсансная эпилепсия имеет патогномоничный электроэнцефалографический коррелят [33] (для типичных абсансов, которые более распространены), что позволяет диагностировать болезнь согласно анализу записи ЭЭГ.

Пик-волновой комплекс состоит из резкого скачка (пика) и последующей медленной волны. Спайк и волна коррелируют по амплитуде, резко выделяющейся на фоне остальной ЭЭГ.

Амплитуда разности потенциалов во время приступа разнится от электрода к электроду и в разных точках варьируется от значений белого шума ± 15 мкВ до ± 600 мкВ [34].

В научной литературе представлены многочисленные методы автоматической детекции пик-волн, но на рынке доступны лишь два продукта: Sensor Dot [35] и Epyhunter [36]. В системе Sensor Dot используется метод опорных векторов, в то время как Epyhunter основан на принципах нейронного обучения. Модель детекции, применяемая в обеих системах, строится по следующему алгоритму.

1. Специалисты в области неврологии анализируют ЭЭГ и идентифицируют области с пик-волновой активностью.
2. Осуществляется оценка свойств отмеченных специалистами временных окон ЭЭГ продолжительностью 0.4 секунды (максимальный период типичного абсанса) со смещением на 0.2 секунды. На этом этапе происходит процесс машинного обучения или обучения нейронных сетей.
3. Обученные модели затем применяются для последующего обнаружения пик-волновой активности.

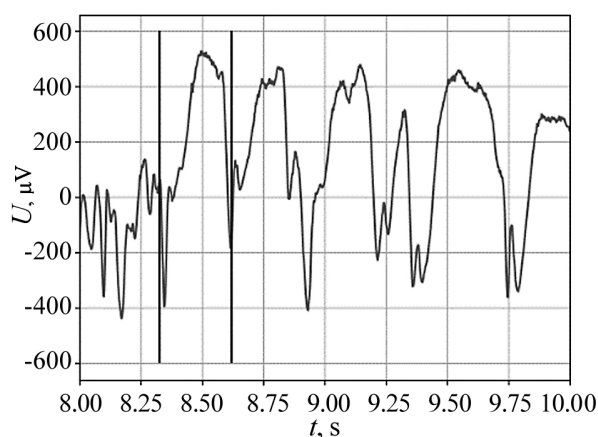


Рис. 1. Пик-волновая активность (абсанс) у пациента с тонико-клоническими припадками (пик-волновой комплекс выделен вертикальными линиями)

Fig. 1. Spike-wave activity (absence) in a patient with tonic-clonic seizures (spike-wave complex marked by vertical lines)

1. Методика

Целью данной работы является разработка механизма для определения типичного абсанса, что представляет собой конкретную математическую задачу. Сначала необходимо идентифицировать и выделить ключевые характеристики абсанса.

1. Число пересечений нуля.
2. Кросс-корреляция между двумя последовательными окнами в 0.4 с.
3. Спектральная мощность 32...64 Гц.
4. Спектральная мощность 16...32 Гц.
5. Спектральная мощность 8...16 Гц.
6. Спектральная мощность 2...4 Гц.
7. Среднеквадратическое отклонение мгновенной мощности сигнала.

Затем на основе этих данных необходимо применить машинное обучение, используя метод опорных векторов, для создания классификатора.

Самыми зарекомендовавшими себя простыми и эффективными методами решения для определения спектральной мощности являются оконное преобразование Фурье (ОПФ) и непрерывное вейвлет-преобразование (НВП). Однако у ОПФ есть недостаток в виде спектральной утечки и следующая неопределённость: чем уже окно, тем лучше разрешение по времени и хуже по частоте; чем шире окно — тем лучше разрешение по частоте и хуже по времени [37]. Таким образом, удобнее воспользоваться НВП, ведь оно позволяет сохранять частотное разрешение постоянным на всём спектре, при этом избегая явления спектральной утечки.

Процедура непрерывного НВП схожа с ОПФ. В первую очередь мы выбираем анализирующую функцию (материнский вейвлет) $\psi(t)$ и производим свёртку её семейства вейвлетов с нашим сигналом. Согласно работам [17, 20, 28], в качестве материнского вейвлета подходит вейвлет Морле

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(2\pi f_{\max} t), \quad (1)$$

где $f_{\max}$ — начальная (максимальная) анализируемая частота из диапазона интересующих нас частот, t — время. Семейство вейвлетов получается по формуле

$$\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right), \quad (2)$$

где a — масштабный коэффициент, τ — коэффициент сдвига вейвлета по оси времени. Масштабный коэффициент связан с анализируемой частотой f по следующей формуле:

$$f = \frac{f_{\max}}{a}, \quad a = \frac{f_{\max}}{f}, \quad (3)$$

где f — анализируемая (исследуемая при свёртке по формуле (4)) частота.

$$W(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{T_1}^{T_2} Q(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt, \quad (4)$$

где $1/\sqrt{a}$ — множитель, обеспечивающий независимость нормы функций от масштабирующего

числа a . С учётом формулы (3) получим частотно-временное представление полученных значений свёртки сигнала

$$W(f, \tau) = \sqrt{\frac{f}{f_{\max}}} \int_{T_1}^{T_2} Q(t) \psi^* \left(f \frac{t - \tau}{f_{\max}} \right) dt, \quad (5)$$

где ψ^* — комплексно-сопряжённый вейвлет ψ . Свёртка представляет собой некую меру схожести исходного сигнала $Q(t)$ и вейвлета ψ^* в момент времени τ . Чем больше значение $W(f, \tau)$ по модулю, тем больше в данный момент преобладание частотной компоненты f .

После перевода сигнала в частотно-временное представление $W(f, \tau)$ вычисляем значения мгновенной энергии $\omega(\tau)$ для исследуемого диапазона частот $[F_1, F_2]$

$$\omega(\tau) = \int_{F_1}^{F_2} |W(f, \tau)| df. \quad (6)$$

В формуле (6) взят модуль, чтобы в дальнейшем по формуле (7) при расчёте усреднённой мощности не возникало ситуации «зануления» значений, а рассчиталась бы вся энергия сигнала в точке независимо от знака мгновенной мощности.

Так как ЭЭГ является сложным сигналом, в котором могут появляться отдельные всплески активности в различных диапазонах частот, то может возникнуть резкое кратковременное увеличение мгновенной энергии (значение свёртки), а это приведёт к неверному трактованию сигнала. Таким образом, удобнее было бы брать для анализа значения, усреднённые по интервалу времени T_{int} (на окне, равном одному периоду пик-волн). Это сгладит значения энергии в каждой точке, уменьшив влияние кратковременных энергетических всплесков

$$\omega(\tau) = \langle \omega(\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_T \omega(\tau) dt. \quad (7)$$

Для оценки изменчивости мгновенной мощности сигнала вычислим его среднеквадратическое отклонение sd (standard deviation) на окне поступающих значений $\omega(\tau)$ (окно равно одному периоду исследуемых пик-волн). Однако мы немного видоизменим формулу (6) для расчёта sd , убрав модуль

$$\omega_{sd}(\tau) = \int_{F_1}^{F_2} W(f, \tau) df, \quad (8)$$

$$sd = \sqrt{D[\omega_{sd}]}, \quad (9)$$

где $D[\omega_{sd}]$ — дисперсия значений мгновенной мощности.

В процессе разработки алгоритма детекции мы использовали формулы (1)–(7) для расчёта значений спектральной мощности различных частотных компонент сигнала с помощью непрерывного вейвлет-преобразования (НВП), где значения мгновенной мощности усреднялись по интервалу времени, равному одному периоду пик-волновой активности. Для определения среднеквадратического отклонения мгновенной мощности применялись формулы (1)–(5) и формулы (8) и (9). Кросс-корреляция между двумя последовательными окнами сигнала была вычислена с использованием коэффициента Пирсона. Для определения числа пересечений нуля внутри исследуемого окна ЭЭГ мы считали количество смен знака значений внутри окна.

2. Результаты

Целью данного раздела является анализ результативности алгоритма детекции. Основными статистическими характеристиками, которые были взяты для оценки, являются: специфичность SPE , чувствительность SEN и точность ACC .

$$SPE = \frac{TN}{TN + FP}, \quad (10)$$

$$SEN = \frac{TP}{TP + FN}, \quad (11)$$

$$ACC = \frac{TP + TN}{TP + FP + TN + FN}. \quad (12)$$

Здесь TP обозначает верноположительные результаты, TN — верноотрицательные, FP — ложноположительные и FN — ложноотрицательные.

Тестирование алгоритма проводилось на записях ЭЭГ, которые были предоставлены авторами исследований [39, 40]. Эти авторы также предоставили данные о временных интервалах с зафиксированной пик-волновой активностью у участников.

Стоит отметить, что реализация алгоритма была выполнена на языке Python с использованием среды разработки PyCharm. Для обработки ЭЭГ файлов формата .edf использовалась библиотека Python MNE. Перед анализом данные фильтровались с выбором диапазона частот от 1 до 64 Гц.

Записи ЭЭГ содержат различные паттерны, отражающие разные внешние воздействия. Поэтому было решено провести тестирование на данных, содержащих различные артефакты. Был сформирован список паттернов высокоамплитудной ЭЭГ: расслабленное состояние (сидя), моргание, жевательные движения, движения головой (кивание), напряжение мышц лица, приседания, хождение по комнате, пик-волновая активность.

Для создания обучающей выборки использовались записи ЭЭГ с различными артефактами, полученные с помощью беспроводного электроэнцефалографа NeuroPlay-6C [41]. Этот прибор с усилителями позволяет получать высококачественные записи, сравнимые с теми, что делаются в клинических условиях.

В табл. 1 представлены результаты классификации различных паттернов ЭЭГ. Стоит заметить, что для некоторых паттернов присутствуют пропущенные значения в определенных столбцах. Это обусловлено спецификой данных паттернов и особенностью проведенного анализа.

Таблица 1. Результативность модели опорных векторов (N — число проанализированных записей размером 5–10 секунд)

Table 1. The effectiveness of the support vector machines (N — is the number of analyzed records of 5–10 seconds in size)

Паттерн	N	TP	TN	FP	FN	ACC	SEN	SPE
Расслабленное состояние	30	-	30	0	-	-	-	1
Моргание	30	-	30	0	-	-	-	1
Жевательные движения	30	-	30	0	-	-	-	1
Движения головой (кивание)	30	-	20	10	-	-	-	0.67
Напряжение мышц лица	30	-	30	0	-	-	-	1
Приседания	30	-	30	0	-	-	-	1
Хождение по комнате	30	-	30	0	-	-	-	1
Пик-волновая активность	30	30	-	-	0	-	1	-
Итоговые результаты	420	178	186	24	32	0.94	0.94	0.96

Например, для паттернов, таких как «Моргание», «Расслабленное состояние», «Жевательные движения» и других, основной акцент делался на выявление ложноположительных срабатываний. Эти паттерны служат контрольными и в идеальных условиях не должны интерпретироваться как пик-волновая активность. Поэтому для таких паттернов ключевыми являются показатели истинно отрицательных результатов TN и ложноположительных FP . Именно из-за этого показатели истинно положительных TP и ложноотрицательных FN не имеют смысла и отсутствуют в таблице.

В то время как для паттерна «Пик-волновая активность» главным является определение чувствительности (SEN) системы, здесь основное внимание уделяется правильному распознаванию этой аномальной активности. Поэтому для данного паттерна наибольший интерес представляют значения TP и FN .

Таким образом, пропущенные значения в таблице не являются ошибкой или упущением, а обусловлены методологией исследования и особенностью анализируемых паттернов.

Таким образом проанализировано по 30 трёхсекундных наиболее значимых паттернов ЭЭГ для оценки специфичности и 30 сегментов пик-волновой активности размером 5–10 секунд для определения чувствительности алгоритма.

Больше всего ложноположительных результатов было зарегистрировано при киваниях головой. Возможным вариантом решения данной проблемы могла бы быть установка акселерометра и гироскопа в усилитель, которые регистрировали бы резкие движения. При этом можно было бы модифицировать алгоритм таким образом, чтобы он отбрасывал все интервалы, на которых были зафиксированы определённые движения (например, кивания).

Наилучшие параметры для модели опорных векторов. В ходе настройки гиперпараметров для модели опорных векторов были исследованы различные комбинации параметров. Наилучшие результаты, представленные в табл. 2, были достигнуты с использованием следующих параметров.

Таблица 2. Оптимальные параметры для модели опорных векторов

Table 2. Optimal parameters for the support vector machines

Параметр	Значение
Тип ядра	Радиально-базисное (RBF)
Коэффициент регуляризации C	1.0
Параметр 'gamma'	0.01
Степень для полиномиального ядра	3 (не применялась для RBF)

Выбор радиально-базисного ядра объясняется его способностью к сложным пространственным преобразованиям, что может быть особенно полезно для анализа данных ЭЭГ, где различные паттерны могут быть весьма сложными и нелинейными. Коэффициент регуляризации C равный 1.0 предоставляет оптимальный баланс между максимизацией разделения между классами и предотвращением переобучения. Небольшое значение 'gamma' (фактор, определяющий степень влияния отдельного обучающего примера) позволяет модели улавливать сложные, но глобальные паттерны в данных, что также способствует улучшению производительности.

Перекрестная проверка. Для оценки производительности и устойчивости модели была использована k -блочная перекрестная проверка (k -fold cross-validation) с $k = 5$. Это означает, что первоначальные данные были разделены на 5 равных блоков и модель была обучена и проверена 5 раз, каждый раз используя разный блок в качестве тестового набора данных и оставшиеся блоки в качестве тренировочного набора. Перекрестная проверка позволила нам оценить, насколько хорошо модель будет работать на новых, ранее не встречавшихся данных.

Хотя 30 записей для каждого паттерна ЭЭГ может показаться небольшим набором данных, в данной задаче такой объем данных оказался оптимальным. Наши эксперименты показали, что при увеличении объема выборки качество модели улучшается лишь незначительно.

Вероятно, это связано с тем, что характеристики сигнала при различных паттернах достаточно устойчивы и различимы даже при небольшом объеме данных. Кроме того, с учетом временных и ресурсных ограничений, текущий размер выборки представляет собой разумный компромисс между потребностью в большом объеме данных и возможностью проведения качественного исследования.

Заключение

Оценка результативности показала перспективность использования модели машинного обучения для дальнейшего развития идеи создания системы автоматического детектирования и протоколирования различных видов эпилептической активности. Однако требуется тестирование модели на большем объеме данных. А так как конечной целью является использование алгоритма вкупе с беспроводным электроэнцефалографом на сухих электродах, то тренировочные данные необходимо записывать именно на него. Поэтому следующим шагом будет подбор такого устройства и создание андроид-приложения, предназначенного для сбора и анализа ЭЭГ в режиме реального времени.

Список литературы

1. *Reichsoellner J., Larch J., Unterberger I., Dobesberger J., Kuchukhidze G., Luef G., Bauer G., Trinka E.* Idiopathic generalised epilepsy of late onset: a separate nosological entity? // *J. Neurol. Neurosurg. Psychiatry*. 2010. Vol. 81, no. 11. P. 1218–1222. DOI: 10.1136/jnnp.2009.176651.
2. Эпилепсия и эпилептический статус у взрослых и детей. Клинические рекомендации. Министерство здравоохранения Российской Федерации, 2022. 291 с.
3. *Cortez M. A., Snead III O. C.* Pharmacologic models of generalized absence seizures in rodents // In: Pitkänen A., Schwartzkroin P. A., Moshé S. L. (eds) *Models of Seizures and Epilepsy*. Burlington: Academic Press, 2006. P. 111–126. DOI: 10.1016/B978-012088554-1/50012-8.
4. *Destexhe A.* Network models of absence seizures // In: Faingold C. L., Blumenfeld H. (eds) *Neuronal Networks in Brain Function, CNS Disorders, and Therapeutics*. San Diego: Academic Press, 2014. P. 11–35. DOI: 10.1016/B978-0-12-415804-7.00002-2.
5. *Elger C. E., Hoppe C.* Diagnostic challenges in epilepsy: seizure under-reporting and seizure detection // *Lancet Neurology*. 2018. Vol. 17, no. 3. P. 279–288. DOI: 10.1016/S1474-4422(18)30038-3.
6. *Bruno E., Viana P. F., Sperling M. R., Richardson M. P.* Seizure detection at home: Do devices on the market match the needs of people living with epilepsy and their caregivers? // *Epilepsia*. 2020. Vol. 61, no. S1. P. S11–S24. DOI: 10.1111/epi.16521.
7. *Elmali A. D., Begley K., Chester H., Cooper J., Moreira C., Sharma S., Whelan A., Leschziner G., Richardson M. P., Stern W., Koutroumanidis M.* Evaluation of absences and myoclonic seizures in adults with genetic (idiopathic) generalized epilepsy: a comparison between self-evaluation and objective evaluation based on home video-EEG telemetry // *Epileptic Disorders*. 2021. Vol. 23, no. 5. P. 719–732. DOI: 10.1684/epd.2021.1325.
8. *Tatum 4th W. O., Winters L., Gieron M., Passaro E. A., Benbadis S., Ferreira J., Liporace J.* Outpatient seizure identification: results of 502 patients using computer-assisted ambulatory EEG // *Journal of Clinical Neurophysiology*. 2001. Vol. 18, no. 1. P. 14–19. DOI: 10.1097/00004691-200101000-00004.
9. *Beniczky S., Wiebe S., Jeppesen J., Tatum W. O., Brazdil M., Wang Y., Herman S. T., Ryvlin P.* Automated seizure detection using wearable devices: A clinical practice guideline of the International League Against Epilepsy and the International Federation of Clinical Neurophysiology // *Clinical Neurophysiology*. 2021. Vol. 132, no. 5. P. 1173–1184. DOI: 10.1016/j.clinph.2020.12.009.
10. *Wirrell E. C., Camfield C. S., Camfield P. R., Dooley J. M., Gordon K. E., Smith B.* Long-term

- psychosocial outcome in typical absence epilepsy. Sometimes a wolf in sheeps' clothing // Arch. Pediatr. Adolesc. Med. 1997. Vol. 151, no. 2. P. 152–158. DOI: 10.1001/archpedi.1997.02170390042008.
11. *Wirrell E. C., Camfield P. R., Camfield C. S., Dooley J. M., Gordon K. E.* Accidental injury is a serious risk in children with typical absence epilepsy // Arch. Neurol. 1996. Vol. 53, no. 9. P. 929–932. DOI: 10.1001/archneur.1996.00550090141020.
 12. *Vega C., Guo J., Killory B., Danielson N., Vestal M., Berman R., Martin L., Gonzalez J. L., Blumenfeld H., Spann M. N.* Symptoms of anxiety and depression in childhood absence epilepsy // Epilepsia. 2011. Vol. 52, no. 8. P. e70–e74. DOI: 10.1111/j.1528-1167.2011.03119.x.
 13. *Killory B. D., Bai X., Negishi M., Vega C., Spann M. N., Vestal M., Guo J., Berman R., Danielson N., Trejo G., Shisler D., Novotny Jr. E. J., Constable R. T., Blumenfeld H.* Impaired attention and network connectivity in childhood absence epilepsy // NeuroImage. 2011. Vol. 56, no. 4. P. 2209–2217. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.03.036.
 14. *Fiest K. M., Birbeck G. L., Jacoby A., Jette N.* Stigma in epilepsy // Current Neurology and Neuroscience Reports. 2014. Vol. 14, no. 5. P. 444. DOI: 10.1007/s11910-014-0444-x.
 15. *Kjaer T. W., Sorensen H. B. D., Groenborg S., Pedersen C. R., Duun-Henriksen J.* Detection of paroxysms in long-term, single-channel EEG-monitoring of patients with typical absence seizures // IEEE Journal of Translational Engineering in Health and Medicine. 2017. Vol. 5. P. 2000108. DOI: 10.1109/JTEHM.2017.2649491.
 16. *Tovar Quiroga D. F., Britton J. W., Wirrell E. C.* Patient and caregiver view on seizure detection devices: A survey study // Seizure. 2016. Vol. 41. P. 179–181. DOI: 10.1016/j.seizure.2016.08.004.
 17. *Ovchinnikov A., Lüttjohann A., Hramov A., van Luijtelaar G.* An algorithm for real-time detection of spike-wave discharges in rodents // Journal of Neuroscience Methods. 2010. Vol. 194, no. 1. P. 172–178. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2010.09.017.
 18. *Sitnikova E., Hramov A. E., Koronovsky A. A., van Luijtelaar G.* Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis // Journal of Neuroscience Methods. 2009. Vol. 180, no. 2. P. 304–316. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2009.04.006.
 19. *Назимов А. И., Павлов А. Н., Храмов А. Е., Грубов В. В., Ситникова Е. Ю., Храмова М. В.* Распознавание осцилляторных паттернов на электроэнцефалограмме на основе адаптивного вейвлет-анализа // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, № 4. С. 1431–1434.
 20. *Грубов В. В., Короновский А. А., Ситникова Е. Ю., Храмов А. Е.* Частотно-временной анализ характерных паттернов активности нейронных ансамблей головного мозга при помощи непрерывного вейвлетного преобразования // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2014. Т. 78, № 12. С. 1525–1529.
 21. *Ситникова Е. Ю., Смирнова К. С., Грубов В. В., Храмов А. Е.* Принципы диагностики незрелой эпилептической (проэпилептической) активности на ЭЭГ у крыс с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии // Информационно-управляющие системы. 2019. № 1. С. 89–97. DOI: 10.31799/1684-8853-2019-1-89-97.
 22. *van Luijtelaar G., Lüttjohann A., Makarov V. V., Maksimenko V. A., Koronovskii A. A., Hramov A. E.* Methods of automated absence seizure detection, interference by stimulation, and possibilities for prediction in genetic absence models // Journal of Neuroscience Methods. 2016. Vol. 260. P. 144–158. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2015.07.010.
 23. *Грубов В. В., Ситникова Е. Ю., Куровская М. К., Короновский А. А., Храмов А. Е.* Перспективы использования метода эмпирических мод и вейвлетного анализа для выявления проэпилептической активности на сигналах электроэнцефалограмм // Ученые записки физического факультета Московского университета. 2016. № 5. С. 165404.
 24. *Jandó G., Siegel R. M., Horváth Z., Buzsáki G.* Pattern recognition of the electroencephalogram by

- artificial neural networks // *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. 1993. Vol. 86, no. 2. P. 100–109. DOI: 10.1016/0013-4694(93)90082-7.
25. *Buteneers P., Schrauwen B., Verstraeten D., Stroobandt D.* Real-time epileptic seizure detection on intra-cranial rat data using reservoir computing // In: Köppen M., Kasabov N., Coghill G. (eds) *Advances in Neuro-Information Processing. ICONIP 2008*. Vol. 5506 of *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. P. 56–63. DOI: 10.1007/978-3-642-02490-0_7.
 26. *Xanthopoulos P., Rebennack S., Liu C.-C., Zhang J., Holmes G. L., Uthman B. M., Pardalos P. M.* A novel wavelet based algorithm for spike and wave detection in absence epilepsy // In: 2010 IEEE International Conference on BioInformatics and BioEngineering. 31 May 2010 - 3 June 2010, Philadelphia, PA, USA. New York: IEEE, 2010. P. 14–19. DOI: 10.1109/BIBE.2010.12.
 27. *Startceva S. A., Lüettjohann A., Sysoev I. V., van Luijcklaar G.* A new method for automatic marking epileptic spike-wave discharges in local field potential signals // In: *Proc. SPIE*. Vol. 9448. Saratov Fall Meeting 2014: Optical Technologies in Biophysics and Medicine XVI; Laser Physics and Photonics XVI; and Computational Biophysics. SPIE, 2015. P. 94481R. DOI: 10.1117/12.2179017.
 28. *Baser O., Yavuz M., Ugurlu K., Onat F., Demirel B. U.* Automatic detection of the spike-and-wave discharges in absence epilepsy for humans and rats using deep learning // *Biomedical Signal Processing and Control*. 2022. Vol. 76. P. 103726. DOI: 10.1016/j.bspc.2022.103726.
 29. *Guo L., Rivero D., Dorado J., Rabuñal J. R., Pazos A.* Automatic epileptic seizure detection in EEGs based on line length feature and artificial neural networks // *Journal of Neuroscience Methods*. 2010. Vol. 191, no. 1. P. 101–109. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2010.05.020.
 30. *Dan J., Vandendriessche B., Van Paesschen W., Weckhuysen D., Bertrand A.* Computationally-efficient algorithm for real-time absence seizure detection in wearable electroencephalography // *International Journal of Neural Systems*. 2020. Vol. 30, no. 11. P. 2050035. DOI: 10.1142/S0129065720500355.
 31. Глухова Л. Ю. Клиническое значение эпилептиформной активности на электроэнцефалограмме // *Российский журнал детской неврологии*. 2016. Т. 11, № 4. С. 8–19. DOI: 10.17650/2073-8803-2016-11-4-8-19.
 32. Вольнова А. Б., Ленков Д. Н. Абсансная эпилепсия: механизмы гиперсинхронизации нейронных ансамблей // *Медицинский факультетский журнал*. 2012. Т. 12, № 1. С. 7–19.
 33. Карлов В. А. Абсанс // *Журнал неврологии и психиатрии им. С. С. Корсакова*. 2005. Т. 3. С. 55–60.
 34. *Petersen E. B., Duun-Henriksen J., Mazzaretto A., Kjær T. W., Thomsen C. E., Sorensen H. B. D.* Generic single-channel detection of absence seizures // In: 2011 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. 30 August 2011 - 3 September 2011, Boston, MA, USA. New York: IEEE, 2011. P. 4820–4823. DOI: 10.1109/IEMBS.2011.6091194.
 35. *Chatzichristos C., Swinnen L., Macea J., Bhagubai M., Van Paesschen W., De Vos M.* Multimodal detection of typical absence seizures in home environment with wearable electrodes // *Frontiers in Signal Processing*. 2022. Vol. 2. P. 1014700. DOI: 10.3389/frsip.2022.1014700.
 36. *Japaridze G., Loeckx D., Buckinx T., Larsen S. A., Proost R., Jansen K., MacMullin P., Paiva N., Kasradze S., Rotenberg A., Lagae L., Beniczky S.* Automated detection of absence seizures using a wearable electroencephalographic device: a phase 3 validation study and feasibility of automated behavioral testing // *Epilepsia*. 2022. DOI: 10.1111/epi.17200.
 37. Макаров В. В. Методы и алгоритмы автоматической классификации психофизиологических характеристик человека: дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.17. М.: Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, 2022. 104 с.
 38. Ситникова Е. Ю., Короновский А. А., Храмов А. Е. Анализ электрической активности головного мозга при абсанс-эпилепсии: прикладные аспекты нелинейной динамики // *Известия вузов. ПНД*. 2011. Т. 19, № 6. С. 173–182. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-173-182.

39. Beniczky S., Rubboli G., Covanis A., Sperling M. R. Absence-to-bilateral-tonic-clonic seizure // *Neurology*. 2020. Vol. 95, no. 14. P. e2009–e2015. DOI: 10.1212/WNL.00000000000010470.
40. Shoen A. CHB-MIT Scalp EEG Database [Electronic resource]. PhysioNet, 2010. Available from: <https://physionet.org/content/chbmit/1.0.0/>.
41. NeuroPlay - NeuroPlay-6C [Electronic resource]. Available from: <https://neuroplay.ru/catalog/neuroplay-6c/>.

References

1. Reichsoellner J, Larch J, Unterberger I, Dobesberger J, Kuchukhidze G, Luef G, Bauer G, Trinka E. Idiopathic generalised epilepsy of late onset: a separate nosological entity? *J. Neurol. Neurosurg. Psychiatry*. 2010;81(11):1218–1222. DOI: 10.1136/jnnp.2009.176651.
2. Epilepsy and Status Epilepticus in Adults and Children. Clinical Recommendations. Ministry of Health of the Russian Federation; 2022. 291 p. (in Russian).
3. Cortez MA, Snead III OC. Pharmacologic models of generalized absence seizures in rodents. In: Pitkänen A, Schwartzkroin PA, Moshé SL, editors. *Models of Seizures and Epilepsy*. Burlington: Academic Press; 2006. P. 111–126. DOI: 10.1016/B978-012088554-1/50012-8.
4. Destexhe A. Network models of absence seizures. In: Faingold CL, Blumenfeld H, editors. *Neuronal Networks in Brain Function, CNS Disorders, and Therapeutics*. San Diego: Academic Press; 2014. P. 11–35. DOI: 10.1016/B978-0-12-415804-7.00002-2.
5. Elger CE, Hoppe C. Diagnostic challenges in epilepsy: seizure under-reporting and seizure detection. *Lancet Neurology*. 2018;17(3):279–288. DOI: 10.1016/S1474-4422(18)30038-3.
6. Bruno E, Viana PF, Sperling MR, Richardson MP. Seizure detection at home: Do devices on the market match the needs of people living with epilepsy and their caregivers? *Epilepsia*. 2020;61(S1):S11–S24. DOI: 10.1111/epi.16521.
7. Elmali AD, Begley K, Chester H, Cooper J, Moreira C, Sharma S, Whelan A, Leschziner G, Richardson MP, Stern W, Koutroumanidis M. Evaluation of absences and myoclonic seizures in adults with genetic (idiopathic) generalized epilepsy: a comparison between self-evaluation and objective evaluation based on home video-EEG telemetry. *Epileptic Disorders*. 2021;23(5):719–732. DOI: 10.1684/epd.2021.1325.
8. Tatum 4th WO, Winters L, Gieron M, Passaro EA, Benbadis S, Ferreira J, Liporace J. Outpatient seizure identification: results of 502 patients using computer-assisted ambulatory EEG. *Journal of Clinical Neurophysiology*. 2001;18(1):14–19. DOI: 10.1097/00004691-200101000-00004.
9. Beniczky S, Wiebe S, Jeppesen J, Tatum WO, Brazdil M, Wang Y, Herman ST, Ryvlin P. Automated seizure detection using wearable devices: A clinical practice guideline of the International League Against Epilepsy and the International Federation of Clinical Neurophysiology. *Clinical Neurophysiology*. 2021;132(5):1173–1184. DOI: 10.1016/j.clinph.2020.12.009.
10. Wirrell EC, Camfield CS, Camfield PR, Dooley JM, Gordon KE, Smith B. Long-term psychosocial outcome in typical absence epilepsy. Sometimes a wolf in sheep's clothing. *Arch. Pediatr. Adolesc. Med.* 1997;151(2):152–158. DOI: 10.1001/archpedi.1997.02170390042008.
11. Wirrell EC, Camfield PR, Camfield CS, Dooley JM, Gordon KE. Accidental injury is a serious risk in children with typical absence epilepsy. *Arch. Neurol.* 1996;53(9):929–932. DOI: 10.1001/archneur.1996.00550090141020.
12. Vega C, Guo J, Killory B, Danielson N, Vestal M, Berman R, Martin L, Gonzalez JL, Blumenfeld H, Spann MN. Symptoms of anxiety and depression in childhood absence epilepsy. *Epilepsia*. 2011;52(8):e70–e74. DOI: 10.1111/j.1528-1167.2011.03119.x.
13. Killory BD, Bai X, Negishi M, Vega C, Spann MN, Vestal M, Guo J, Berman R, Danielson N, Trejo G, Shisler D, Novotny Jr EJ, Constable RT, Blumenfeld H. Impaired attention and network connectivity in childhood absence epilepsy. *NeuroImage*. 2011;56(4):2209–2217. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.03.036.

14. Fiest KM, Birbeck GL, Jacoby A, Jette N. Stigma in epilepsy. *Current Neurology and Neuroscience Reports*. 2014;14(5):444. DOI: 10.1007/s11910-014-0444-x.
15. Kjaer TW, Sorensen HBD, Groenborg S, Pedersen CR, Duun-Henriksen J. Detection of paroxysms in long-term, single-channel EEG-monitoring of patients with typical absence seizures. *IEEE Journal of Translational Engineering in Health and Medicine*. 2017;5:2000108. DOI: 10.1109/JTEHM.2017.2649491.
16. Tovar Quiroga DF, Britton JW, Wirrell EC. Patient and caregiver view on seizure detection devices: A survey study. *Seizure*. 2016;41:179–181. DOI: 10.1016/j.seizure.2016.08.004.
17. Ovchinnikov A., Lüttjohann A, Hramov A, van Luijtelaar G. An algorithm for real-time detection of spike-wave discharges in rodents. *Journal of Neuroscience Methods*. 2010;194(1):172–178. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2010.09.017.
18. Sitnikova E, Hramov AE, Koronovsky AA, van Luijtelaar G. Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis. *Journal of Neuroscience Methods*. 2009;180(2): 304–316. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2009.04.006.
19. Nazimov AI, Pavlov AN, Khramov AE, Grubov VV, Sitnikova EY, Khramova MV. Recognition of oscillatory patterns on electroencephalogram based on adaptive wavelet-analysis. *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical sciences*. 2013;18(4):1431–1434 (in Russian).
20. Grubov VV, Koronovskii AA, Sitnikova EY, Hramov AE. Time-frequency analysis of characteristic patterns of the activity of neuron ensembles in the brain by means of continuous wavelet transform. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2014;78(12):1242–1245. DOI: 10.3103/S1062873814120090.
21. *Sitnikova E, Smirnov K, Grubov V, Hramov A*. Diagnostic principles of immature epileptic (proepileptic) EEG activity in rats with genetic predisposition to absence epilepsy. *Information and Control Systems*. 2019;(1):89–97 (in Russian). DOI: 10.31799/1684-8853-2019-1-89-97.
22. van Luijtelaar G, Lüttjohann A, Makarov VV, Maksimenko VA, Koronovskii AA, Hramov AE. Methods of automated absence seizure detection, interference by stimulation, and possibilities for prediction in genetic absence models. *Journal of Neuroscience Methods*. 2016;260:144–158. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2015.07.010.
23. Grubov VV, Sitnikova EY, Kurovskaya MK, Koronovskii AA, Hramov AE. Prospect of using empirical mode decomposition and wavelet analysis for detecting proepileptic activity on EEG signal. *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 2016;(5):165404 (in Russian).
24. Jandó G, Siegel RM, Horváth Z, Buzsáki G. Pattern recognition of the electroencephalogram by artificial neural networks. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. 1993;86(2): 100–109. DOI: 10.1016/0013-4694(93)90082-7.
25. Buteneers P, Schrauwen B, Verstraeten D, Stroobandt D. Real-time epileptic seizure detection on intra-cranial rat data using reservoir computing. In: Köppen M, Kasabov N, Coghill G, editors. *Advances in Neuro-Information Processing. ICONIP 2008*. Vol. 5506 of Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer; 2009. P. 56–63. DOI: 10.1007/978-3-642-02490-0_7.
26. Xanthopoulos P, Rebennack S, Liu C-C, Zhang J, Holmes GL, Uthman BM, Pardalos PM. A novel wavelet based algorithm for spike and wave detection in absence epilepsy. In: 2010 IEEE International Conference on BioInformatics and BioEngineering. 31 May 2010 - 3 June 2010, Philadelphia, PA, USA. New York: IEEE; 2010. P. 14–19. DOI: 10.1109/BIBE.2010.12.
27. Startceva SA, Lüttjohann A, Sysoev IV, van Luijtelaar G. A new method for automatic marking epileptic spike-wave discharges in local field potential signals. In: *Proc. SPIE*. Vol. 9448. Saratov Fall Meeting 2014: Optical Technologies in Biophysics and Medicine XVI; Laser Physics and Photonics XVI; and Computational Biophysics. SPIE; 2015. P. 94481R. DOI: 10.1117/12.2179017.
28. Baser O, Yavuz M, Ugurlu K, Onat F, Demirel BU. Automatic detection of the spike-and-wave

- discharges in absence epilepsy for humans and rats using deep learning. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2022;76:103726. DOI: 10.1016/j.bspc.2022.103726.
29. Guo L, Rivero D, Dorado J, Rabuñal JR, Pazos A. Automatic epileptic seizure detection in EEGs based on line length feature and artificial neural networks. *Journal of Neuroscience Methods*. 2010;191(1):101–109. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2010.05.020.
 30. Dan J, Vandendriessche B, Van Paesschen W, Weckhuysen D, Bertrand A. Computationally-efficient algorithm for real-time absence seizure detection in wearable electroencephalography. *International Journal of Neural Systems*. 2020;30(11):2050035. DOI: 10.1142/S0129065720500355.
 31. Glukhova LY. Clinical significance of epileptiform activity in electroencephalogram. *Russian Journal of Child Neurology*. 2016;11(4):8–19 (in Russian). DOI: 10.17650/2073-8803-2016-11-4-8-19.
 32. Volnova AB, Lenkov DN. Absence epilepsy: mechanisms of hypersynchronization of neuronal networks. *Medical Academic Journal*. 2012;12(1):7–19 (in Russian).
 33. Karlov VA. Absence. *Neuroscience and Behavioral Physiology*. 2005;3:55–60 (in Russian).
 34. Petersen EB, Duun-Henriksen J, Mazzaretto A, Kjær TW, Thomsen CE, Sorensen HBD. Generic single-channel detection of absence seizures. In: 2011 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. 30 August 2011 - 3 September 2011, Boston, MA, USA. New York: IEEE; 2011. P. 4820–4823. DOI: 10.1109/IEMBS.2011.6091194.
 35. Chatzichristos C, Swinnen L, Macea J, Bhagubai M, Van Paesschen W, De Vos M. Multimodal detection of typical absence seizures in home environment with wearable electrodes. *Frontiers in Signal Processing*. 2022;2:1014700. DOI: 10.3389/frsip.2022.1014700.
 36. Japaridze G, Loeckx D, Buckinx T, Larsen SA, Proost R, Jansen K, MacMullin P, Paiva N, Kasradze S, Rotenberg A, Lagae L, Beniczky S. Automated detection of absence seizures using a wearable electroencephalographic device: a phase 3 validation study and feasibility of automated behavioral testing. *Epilepsia*. 2022. DOI: 10.1111/epi.17200.
 37. Makarov VV. Methods and Algorithms for Automatic Classification of Psychophysiological Characteristics of a Person. PhD Thesis. Moscow: Federal Research Center «Informatics and Management» of the Russian Academy of Sciences; 2022. 104 p. (in Russian).
 38. Sitnikova EY, Koronovskii AA, Hramov AE. Analysis of epileptic activity of brain in case of absence epilepsy: applied aspects of nonlinear dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2011;19(6):173–182 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-173-182.
 39. Beniczky S, Rubboli G, Covanis A, Sperling MR. Absence-to-bilateral-tonic-clonic seizure. *Neurology*. 2020;95(14):e2009–e2015. DOI: 10.1212/WNL.00000000000010470.
 40. Shueb A. CHB-MIT Scalp EEG Database [Electronic resource]. PhysioNet; 2010. Available from: <https://physionet.org/content/chbmit/1.0.0/>.
 41. NeuroPlay - NeuroPlay-6C [Electronic resource]. Available from: <https://neuroplay.ru/catalog/neuroplay-6c/>.



Белокопытов Антон Сергеевич — родился в Омске (2001). Окончил институт биомедицинских систем Московского института электронной техники по направлению «Биотехнические системы и технологии» (2023). С 2021 года работает в компании «Нейроботикс» в качестве программиста-разработчика. С 2023 года обучается в НИУ «Высшая школа экономики» по направлению «Когнитивные науки и технологии: от нейрона к познанию». Научные интересы — нейронаука.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
 E-mail: a.belokopytov@neurobotics.ru
 ORCID: 0009-0003-8059-5701
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1227644



Макарова Милана Михайловна — окончила Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (2020, квалификация инженер-физик). Стажер-исследователь, аспирант Центра нейроэкономики и когнитивных исследований Института когнитивных нейронаук НИУ «Высшая школа экономики». Сфера научных интересов: аналоговая и цифровая схемотехника, межполушарные взаимодействия, реабилитация, картирование мозга.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: m.makarova@hse.ru
ORCID: 0000-0002-9351-6588



Саламатин Михаил Игоревич — родился в Москве (2001). Окончил с отличием Московский психолого-педагогический университет по направлению «Психология развития и возрастная психология» (2022). Студент магистерской программы Высшей школы экономики «Когнитивные науки и технологии: от нейрона к познанию» (до 2025). Научные интересы — психология, нейронаука.

Россия, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: mihail.salamatina@gmail.com
ORCID: 0009-0004-1063-5509



Редкозубова Ольга Михайловна — окончила с отличием биологический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова (2005, квалификация физиолог). Кандидат биологических наук по специальности «Физиология» (2007, МГУ). С 2017 года работает в компании «Нейроботикс» в должности старшего научного сотрудника. С 2023 года по совместительству работает в должности доцента в институте биомедицинских систем Московского института электронной техники. Научные интересы — нейронаука, биология. Опубликовала свыше 12 научных статей по указанным направлениям.

Россия, Москва, 124498 Зеленоград, проезд 4922, д. 4, стр. 2, офис 477
Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»
E-mail: redkozubova@gmail.com
ORCID: 0009-0003-0400-2775
AuthorID (eLibrary.Ru): 172533
IstinaResearcherID (IRID): 2304959



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003094

Spiking neural network with local plasticity and sparse connectivity for audio classification*

R. B. Rybka^{1,2}✉, D. S. Vlasov¹, A. I. Manzhurov¹, A. V. Serenko¹, A. G. Sboev^{1,2}

¹National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia

²National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, Russia

E-mail: ✉rybka_rb@nrcki.ru, vfked0d@gmail.com,

manzhurov99@mail.ru, serenko@phystech.edu, sag111@mail.ru

Received 22.09.2023, accepted 5.12.2023, available online 1.03.2024, published 29.03.2024

Abstract. *Purpose.* Studying the possibility of implementing a data classification method based on a spiking neural network, which has a low number of connections and is trained based on local plasticity rules, such as Spike-Timing-Dependent Plasticity. *Methods.* As the basic architecture of a spiking neural network we use a network included an input layer and layers of excitatory and inhibitory spiking neurons (Leaky Integrate and Fire). Various options for organizing connections in the selected neural network are explored. We have proposed a method for organizing connectivity between layers of neurons, in which synaptic connections are formed with a certain probability, calculated on the basis of the spatial arrangement of neurons in the layers. In this case, a limited area of connectivity leads to a higher sparseness of connections in the overall network. We use frequency-based coding of data into spike trains, and logistic regression is used for decoding. *Results.* As a result, based on the proposed method of organizing connections, a set of spiking neural network architectures with different connectivity coefficients for different layers of the original network was implemented. A study of the resulting spiking network architectures was carried out using the Free Spoken Digits dataset, consisting of 3000 audio recordings corresponding to 10 classes of digits from 0 to 9. *Conclusion.* It is shown that the proposed method of organizing connections for the selected spiking neural network allows reducing the number of connections by up to 60% compared to a fully connected architecture. At the same time, the accuracy of solving the classification problem does not deteriorate and is 0.92...0.95 according to the F1 metric. This matches the accuracy of standard support vector machine, k -nearest neighbor, and random forest classifiers. The source code for this article is publicly available: <https://github.com/sag111/Sparse-WTA-SNN>.

Keywords: spiking neural network, STDP, sparse connectivity, free spoken digits dataset, audio classification.

Acknowledgements. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 21-11-00328, <https://rscf.ru/project/21-11-00328/>. Computational experiments were carried out using the equipment of the Center for Collective Use “Complex for Modeling and Processing Data of Mega-Class Research Installations” of the National Research Center “Kurchatov Institute”, <http://ckp.nrcki.ru/>.

For citation: Rybka RB, Vlasov DS, Manzhurov AI, Serenko AV, Sboev AG. Spiking neural network with local plasticity and sparse connectivity for audio classification. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):239–252. DOI: 10.18500/0869-6632-003094

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Neuroinformatics — 2023”.

Спайковая нейронная сеть с локальной пластичностью и разреженной связью для классификации аудио*

Р. Б. Рыбка^{1,2}✉, Д. С. Власов¹, А. И. Манжуров¹, А. В. Серенко¹, А. Г. Сбоев^{1,2}

¹Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

Email: ✉rybka_rb@nrcki.ru, vfked0d@gmail.com, manzhurov99@mail.ru,
serenko@phystech.edu, sag111@mail.ru

Поступила в редакцию 22.09.2023, принята к публикации 5.12.2023,

опубликована онлайн 1.03.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. *Цель.* Исследование возможности реализации метода классификации данных на базе спайковой нейронной сети, которая обладает низким количеством связей и обучается на основе правил локальной пластичности Spike-Timing-Dependent Plasticity. *Методы.* В качестве базовой архитектуры спайковой нейронной сети используется сеть, включающая входной слой и слои возбуждающих и тормозных спайковых нейронов с утечкой (Leaky Integrate and Fire). Исследуются различные варианты организации связей в выбранной нейросетевой архитектуре. Предложен метод организации связности между слоями нейронов, в котором синаптическая связь формируется с некоторой вероятностью, рассчитываемой на основе пространственного расположения нейронов в слоях. При этом ограничение области связности приводит к более высокой разреженности связей в общей сети. Кодирование данных в спайковые последовательности проводится частотным способом, а для декодирования применяется логистическая регрессия. *Результаты.* В результате на базе предложенного метода организации связей реализован набор архитектур спайковых нейронных сетей с различными коэффициентами связности для разных слоев исходной сети. Проведено исследование полученных архитектур спайковых сетей с использованием набора Free Spoken Digits, состоящего из 3000 аудиозаписей, соответствующих 10 классам цифр от 0 до 9. *Заключение.* Показано, что предлагаемый метод организации связей для выбранной спайковой нейронной сети позволяет снизить количество связей до 60% по сравнению с полносвязной архитектурой. При этом точность решения классификационной задачи не ухудшается и составляет 0.92...0.95 по метрике F1. Это соответствует точности стандартных классификаторов на базе машины опорных векторов, k ближайших соседей и случайного леса. Исходный код для данной статьи представлен в открытом доступе: <https://github.com/sag111/Sparse-WTA-SNN>

Ключевые слова: спайковая нейронная сеть, STDP, разреженная связность, free spoken digits dataset, классификация аудио.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 21-11-00328, <https://rscf.ru/project/21-11-00328/>. Вычислительные эксперименты проводились с использованием оборудования Центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>.

Для цитирования: Рыбка Р. Б., Власов Д. С., Манжуров А. И., Серенко А. В., Сбоев А. Г. Спайковая нейронная сеть с локальной пластичностью и разреженной связью для классификации аудио // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 239–252. DOI: 10.18500/0869-6632-003094. EDN: QTJDPC

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Introduction

One of the motivations for research on spiking neural networks (SNN) is to explore the possibility of utilizing the abilities of the brain of living organisms in computer models. This fundamental direction has recently acquired a more practical form, which is associated with progress in the creation of neuromorphic chips that allow simulating bioinspired spiking neural networks on energy-efficient

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нейроинформатика — 2023».

computing devices [1,2]. While many existing approaches are focused on offline learning of SNN with subsequent transfer to neuromorphic chips, it is promising to create methods for this class of devices that would allow online learning. These include learning methods based on local synaptic plasticity, implemented using Spike-Timing-Dependent Plasticity (STDP), where the change in the weight of a synaptic connection is proportional to the time interval from the arriving of a presynaptic spike to emitting the postsynaptic spike. The relevance of STDP is due to the prospective possibility of hardware implementation of SNNs with STDP. Therein, a synapse with STDP could be implemented on base of a memristor [3–5], the change in conductivity of which depends on the duration of overlapping presynaptic and postsynaptic voltage pulses.

Currently, there are several methods for training spiking neural networks with STDP [6–9]. One of the efficient approaches for solving classification problems is the SNN network with STDP based on a three-layer architecture [10].

This architecture was previously used to classify images of handwritten digits [10,11], real-valued vector data and audio information [12]. Despite its efficiency, it is quite resource-intensive, so the purpose of this paper is to study the possibility of reducing the number of connections in such an SNN. This formulation of the problem is due to the presence of restrictions on the number of connections of existing neurochips, which makes it relevant to reduce the computational complexity of SNN models.

The principles of sparse connectivity between neurons were studied earlier in a number of works on spiking and other artificial neural networks. For example, a $\sim 70\%$ reduction in connectivity by zeroing out weights that are below a given threshold in a network [13] consisting of two convolutional layers that process input data and then pass it on to spiking convolutional layers allows to reduce power consumption while maintaining the accuracy of image recognition on video in the IVS 3cls [14] dataset at the level of 71.5%. In [15], limiting the number of connections per neuron by about 50% is shown to reduce network power consumption and, at the same time, by training a multilayer convolutional network using the backpropagation method, achieve good performance on MNIST problems (99.51%), CIFAR-10 (94.10%), N-MNIST (99.53%), DVS-Gesture (98.20%). An SNN [16] in which connections between neurons are set in a probabilistic way based on the spatial coordinates of neurons, shows the accuracy of 97.8% on the handwritten digit and letter classification task from the EMNIST dataset.

Due to the possibility of spatial localization of neurons in layers in the chosen SNN architecture, in this work we have chosen an approach to establish sparse connectivity based on the probabilistic formation of connections in a given area. For this method, the effectiveness of using sparse connections between different layers of the original SNN is investigated. According to experts [17], the greatest effect from the use of SNNs implemented on neurochips is achieved when analyzing streaming data, an example of which is audio data. Therefore, in this work, we used the Free Spoken Digit Dataset (FSDD), an open benchmark for audio classification algorithms, as data for the study.

The main contribution of this article is:

- the effectiveness of the learning method based on local plasticity for the SNN with sparse connections was evaluated using a set of audio data,
- the impact of the SNN connectivity level on the accuracy of the audio data classification problem was assessed,
- the importance of using sparse connections between different layers of a three-layer SNN was determined.

The article is organized as follows: Section “Data and preprocessing” describes the dataset, methods for extracting significant features of audio and transforming at spike moments; Section “Spiking Neural Network” describes the models of neurons and synapses, the architecture of the spiking network, and the learning algorithm; Section “Experiments” presents the results of experimental studies of the selected sparse connectivity method for various configurations of SNN architectures; analysis of the results and comparison with other approaches is presented in Section “Analysis of results”.

1. Data and preprocessing

1.1. Dataset. The free-spoken-digit-dataset (FSDD) consisting of 3000 audio recordings of the pronunciation of numbers from 0 to 9 in English is considered as a test classification task for testing the proposed method. The FSDD dataset contains 10 classes of 300 WAV-format audio records, up to 1 second long. Examples of audio waveforms for some classes are shown in Fig. 1.

The dataset was formed as follows: 6 people pronounced the numbers from zero to nine 50 times with different intonations and speed. In order to be able to consistently compare the accuracy when classifying the dataset by various machine learning methods, the following splitting of data into test and training samples is recommended by default: the first 5 out of 50 (10%) audio pronunciations by each person in all classes are assigned to the test sample, the remaining 45 audio (90%) — to the training sample.

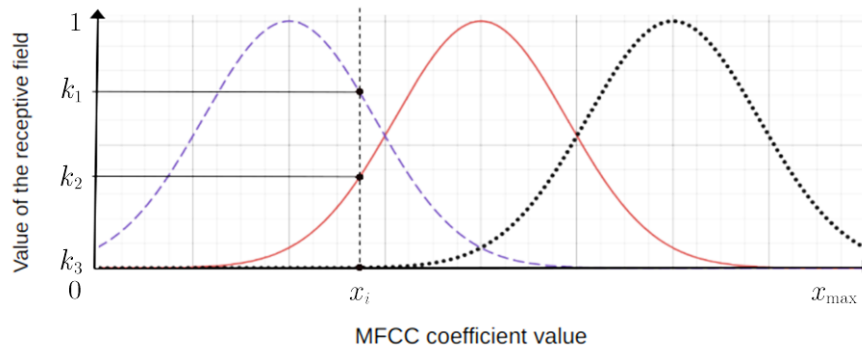


Fig. 1. An example of using three Gaussian receptive fields with different μ_j . $\mathbf{k}$ is the new vector of the x_i component of the input vector after GRF processing (color online)

1.2. Feature extraction. To feed data to the spiking neural network, a set of Mel-frequency cepstral coefficients (MFCC) was obtained for the audio records using the fast Fourier transform (FFT) and the discrete cosine transform. This is done using the open-source python package (ISC License) for music and audio analysis — librosa [18]. Further, the average value of each MFCC coefficients is calculated over audio length. The averaged values are normalized from 0 to 1. The result is a new vector of $K = 30$ averaged and normalized MFCC coefficients (other features were set by default from librosa package: the window size for Fourier transform is 250 ms, the stride is 64 ms).

1.3. Encoding into spike sequences. To improve classification accuracy when using SNN, at the preprocessing stage, the resulting feature vector is processed using M Gaussian receptive fields (GRF) (see Eq. (1)). To do this, the interval of values of the averaged and normalized MFCC coefficients is divided into M equal intervals. In each interval $j = 1, \dots, M$, a Gaussian peak with center μ_j in the middle of the j -th interval. The value of the component x_i of the input vector is replaced by a set of values $G_j(x_i)$ characterizing the proximity of x_i to the center of the j -th receptive field:

$$G_j(x_i) = \exp \left(-\frac{(x_i - \mu_j)^2}{\sigma^2} \right). \quad (1)$$

The value of the component x_i of the input vector is replaced by a set of values $G_j(x_i)$ characterizing the proximity of x_i to the center of the j -th receptive field. Thus, the dimension of the input increases by the factor of M . Fig. 1 shows an example for three receptive fields. In this research we used $M = 7$ as found to be optimal in an earlier work with the same dataset [12], $\sigma = \frac{2(\max_x - \min_x)}{3(M-2)}$,

Table 1. Results of the first stage of the research

Type of connection between layers of neurons				$v_{\max}$, Hz	Layer grid	F1
From excitatory to inhibitory	From inhibitory to excitatory	From input to excitatory	From input to inhibitory			
Counter-partnership	All-to-all*	All-to-all	Fixed Amount(10%)	550	—	0.93
Sparse ($P_{exc_inh} = 0.6$; $R_{exc_inh} = 0.25$)				550	Regular	0.93
Sparse ($P_{exc_inh} = 0.7$; $R_{exc_inh} = 0.55$)	All-to-all*	All-to-all	Fixed Amount(10%)	550	Irregular	0.93
	Sparse ($P_{inh_exc} = 0.4$; $R_{inh_exc} = 0.7$)			550	Regular	0.94
Counter-partnership	Sparse ($P_{inh_exc} = 0.7$; $R_{inh_exc} = 0.8$)	All-to-all	Fixed Amount(10%)	850	Irregular	0.93
Counter-partnership	All-to-all*	Probabilistic ($P_{gen_exc} = 0.4$)	Fixed Amount(10%)	950	Not applicable	0.94
Counter-partnership	All-to-all*	All-to-all	Probabilistic ($P_{gen_inh} = 0.2$)	550	Not applicable	0.62

* means excluding connections between counter-partners

$\mu_j = \min_x + (\max_x - \min_x) \cdot \frac{j}{M-1}$, where $\max_x$ and $\min_x$ are maximum and minimum values of x_i among all training set vectors.

Frequency coding is used to transform the components of the input vector into sequences of spikes: each element of the input layer emits spikes with a certain frequency v during the entire time $t_e = 350$ ms, of processing the current audio:

$$v = v_{\max} \cdot k, \quad (2)$$

where $v_{\max}$ is the maximum frequency constant, k is the value of the input vector component after preprocessing. After presenting an audio recording, the input are silent for $t_p = 50$ ms so as to allow the neuron potentials relax. The remaining parameters set during the experiments are presented in the Table 1.

2. Spiking Neural Network

2.1. Neuron model. The spiking neuron models in this work are Leaky Integrate-and-Fire (LIF), in which the state variable, membrane potential $V(t)$, changes in accordance with Eq. (3), as if the neuron's membrane was an electric capacitor with capacitance C_m and with a leakage that would drive the potential to its resting level V_{rest} in the characteristic time τ_m if the synaptic input $I_{\text{syn}}(t)$ was absent.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V(t) - V_{\text{rest}}}{\tau_m} + \frac{I_{\text{syn}}(t)}{C_m}. \quad (3)$$

The postsynaptic current $I_{\text{syn}}(t)$ is described by the synaptic conductance model (see Eq. (4)): each incoming synapse i has the conductance $g_i(t) \cdot w_i(t)$, through which the neuron's membrane is charged by a voltage source with the potential $E_{\text{rev_exc/inh}}$.

$$I_{\text{syn}}(t) = \sum_i w_i(t) g_i(t) \cdot (E_{\text{rev_exc/inh}} - V(t)). \quad (4)$$

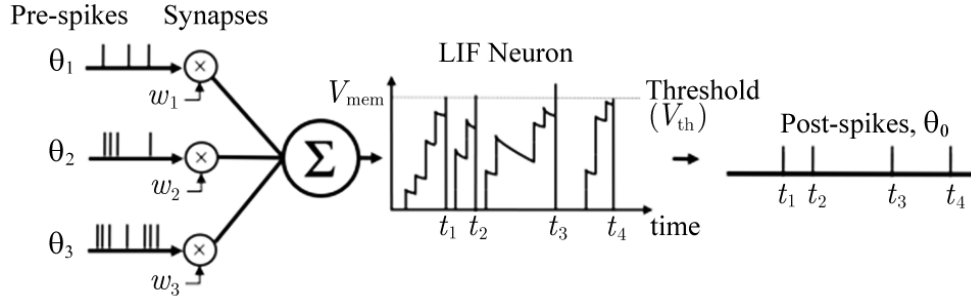


Fig. 2. An example of the Leaky Integrate-and-Fire neuron dynamics

The synaptic conductance increases by $\sigma_{\text{syn_exc/inh}}$ whenever a spike arrives (let the input spike times be denoted t_{pre}), and then relaxes to zero (see Eq. (5)). The trainable strength of the synapse is modelled by modulating the synaptic conductance with the non-dimensional weight $w_i(t)$ in the range $[0; 1]$.

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\frac{g_i(t)}{\tau_{\text{syn_exc/inh}}} + \sigma_{\text{syn_exc/inh}} \cdot \delta(t - t_{\text{pre}}). \quad (5)$$

As soon as $V(t)$ reaches the threshold V_{th} , the neuron fires an output spike, and $V(t)$ is instantaneously reset to V_{reset} . After a spike, a refractory period t_{ref} begins during which the input spikes have no effect on the neuron. The operation of a LIF neuron is schematically depicted in Figure 2.

In order to prevent the neurons from firing too many or too few spikes, the threshold potential is adaptive, increasing by Θ^+ whenever a spike is fired and gradually relaxing to Θ_{rest} :

$$\frac{dV_{\text{th}}}{dt} = -\frac{V_{\text{th}}(t) - \Theta_{\text{rest}}}{dt} + \Theta^+ \cdot H(V(t) - V_{\text{th}}(t)), \quad (6)$$

where H is the Heaviside step function.

The constants of the neuron and synapse models are chosen following prior work on similar SNN architectures [10, 12]. Their values, different for different layers of the network, are in Table 2. There, the values of the postsynaptic current constants $E_{\text{rev_exc/inh}}$, $\sigma_{\text{syn_exc/inh}}$, and $\tau_{\text{syn_exc/inh}}$ depend also on whether their synapse i is excitatory or inhibitory, and are denoted with subscripts syn_exc or syn_inh respectively.

Table 2. Neuron model constants for neurons of excitatory and inhibitory layers

Parameter	Exc. neurons	Inh. neurons
Refractory period t_{ref} , ms	4	3
Membrane leakage τ_m , ms	130	30
Membrane capacitance C_m , pF	100	10
Synaptic conductance increment q_{syn} , S	1	1
Conductance decay constant for exc. synapses $\tau_{\text{syn_exc}}$, ms	1	1
Conductance decay constant for inh. synapses $\tau_{\text{syn_inh}}$, ms	2	2
Dynamic threshold resting value Θ_{rest} , mV	-72	-40
Dynamic threshold increment Θ_+ , mV	0.05	0
Membrane potential resting value V_{rest} , mV	-65	-45
Initial threshold $V_{\text{th}}(t = 0)$, mV	-52	-40
Reversal potential for excitatory synapses $E_{\text{rev_exc}}$, mV	0	0
Reversal potential for inhibitory synapses $E_{\text{rev_exc}}$, mV	-160	-160

2.2. Connections between neurons. Synaptic connections in SNNs ensure the transfer of information between neurons via spikes. Connections between neurons can be with static or dynamic weights. The weight of the connection, multiplied by the spike passing through it, determines the contribution of the spike to the change in the membrane potential of the postsynaptic neuron.

Synapses with constant weights do not change their value when simulating an SNN. Dynamic weights change according to the law of plasticity. Spike Timing Dependent Plasticity (STDP) [19] is used as a plasticity model in this paper. In this approach, the weight of the synapse is adjusted depending on the relative arrival time of the pre- and post- synaptic spikes within a short time interval (tens of milliseconds). If the presynaptic neuron emits a spike just before the postsynaptic neuron sends its own, then the weight of the connection will increase. In the opposite case, if the presynaptic neuron emitted a spike already after the postsynaptic neuron, then the weight of this synapse will decrease. Thus, the change in weight is described by the following formulas: [19] according to Eq. (7) each time an input spike arrives at t_{pre} or a postsynaptic spike occurs at t_{post} :

$$\Delta w = \begin{cases} -A^- \cdot \exp\left(\frac{t_{post}-t_{pre}}{\tau^-}\right) & \text{if } t_{post} > t_{pre}; \\ A^+ \cdot \exp\left(-\frac{t_{pre}-t_{post}}{\tau^+}\right) & \text{if } t_{post} < t_{pre}. \end{cases} \quad (7)$$

If $t_{post} = t_{pre}$, such pair of spikes is by convention excluded from consideration and does not cause any weight change.

2.3. SNN architecture. The SNN considered in this study (see Fig. 3) is a modification of an SNN [10] consisting of three layers, input, excitatory and inhibitory. The input layer consists of $K \cdot M$ spike emitters, one for each component of the preprocessed input vector, that emit spikes with the mean rate depending on the values of the corresponding input vector components, as described in Section “Encoding into spike sequences”. Spikes emitted by the input layer arrive at synapses that connect the input layer to the excitatory and inhibitory layers. These layers contain The excitatory layer processes incoming spike sequences from the input layer. The connections from the input spike emitters to the excitatory neurons (the topology of which is described in more detail in Section “Sparse connectivity”) are excitatory, and have their weights changed by Spike-Timing-Dependent Plasticity (STDP). The inhibitory layer is used to create competition between neurons in the excitatory layer.

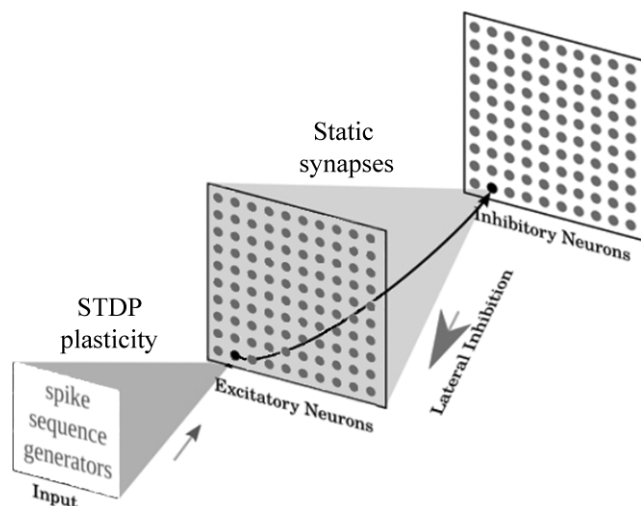


Fig. 3. Three-layer SNN architecture

For each excitatory neuron, there exists one associated inhibitory neuron, which receives spikes from it via an excitatory synapse with a fixed weight $w_{exc-inh} > 0$ (marked with a black arrow in Fig. 3). This inhibitory neuron is connected to all other neurons of the excitatory layer, except the one it gets spikes from, by static inhibitory connections with a fixed weight $w_{inh-exc} < 0$ (in Fig. 3 indicated by the area between the inhibitory and excitatory layers). Additionally, for greater activity of neurons in the inhibitory layer, static connections are introduced from the input layer with weights $w_{input-inh} > 0$.

2.4. Sparse connectivity. In the spiking neural network used, the layers of excitatory and inhibitory neurons are two-dimensional square areas, located mirror-symmetrically relative to each other. Neurons in layers can be located inside a square layer either randomly (irregular grid) or structured at the nodes of a regular square grid. The formation of sparse connections between the layers of excitatory and inhibitory neurons occurs as follows:

1. The presynaptic neuron (from which connections will begin) is projected onto the square area of the postsynaptic neurons layer (with which the connection is established).
2. The projection of the presynaptic neuron will be the center of a circle of a certain radius on the postsynaptic layer. Only those neurons of the postsynaptic layer that fell into the region of the circle can, with some probability, establish a connection with the presynaptic neuron.

This process is shown in Figure 4 and is carried out for all neurons of the presynaptic layer.

Thus, the sparse connectivity method is characterized by the following parameters:

- probability P of the formation of a connection between neurons of different layers falling into the specified areas;
- the radius R of the area for connections;
- the regularity or irregularity of the network of neurons in the layer to which the connection is established.

In this work, this method is used to organize connections between the following layers of neurons:

- From the layer of excitatory neurons to the layer of inhibitory ones. For synapses with static positive weights ($W_{exc_inh} > 0$), the following configuration parameters are selected: connection formation probability (P_{exc_inh}), connection region radius (R_{exc_inh}) and the grid regularity of the layer of inhibitory neurons.
- From the layer of inhibitory neurons to excitatory ones. For synapses with static negative weights ($W_{inh_exc} < 0$), the following configuration parameters are selected: connection formation probability (P_{inh_exc}), connection region radius (R_{inh_exc}) and regularity of the excitatory neurons layer grid.

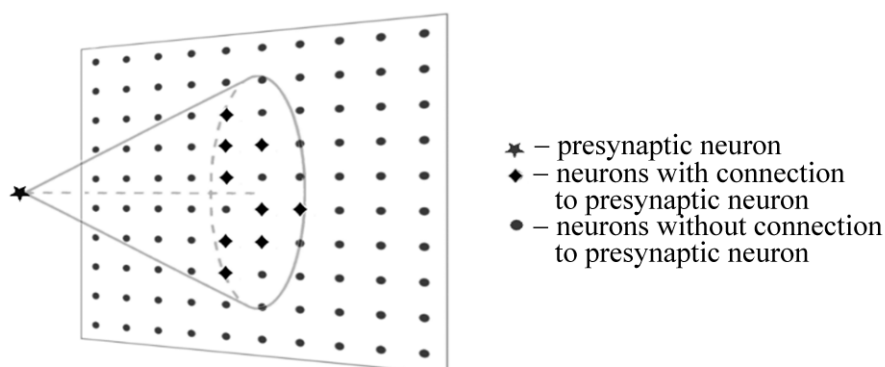


Fig. 4. An example of the sparse connectivity method

The size of the 2D areas for layers of excitatory and inhibitory neurons was initially set to select the R coefficient in the conducted experiments (1 mm $\times$ 1 mm). The size can be set to any size; what is important is the ratio of size and radius, which characterizes the sparse connectivity.

For the input layer, consisting of spike emitters, a clear position in space is not specified since when establishing connections from emitters, only the probability of its formation is used, and the projection of the neuron on the postsynaptic layer is not built. In this case, P_{gen_inh} and P_{gen_exc} are adjustable hyperparameters, and values found for them will be presented below, in Table 1.

2.5. SNN learning. The process of adjusting the weights during training in the layer with STDP (from input to excitatory neurons) is performed using Algorithm.

Algorithm. SNN learning process

Input: training data matrix X^{train} of preprocessed input vectors $\mathbf{x}_i$ of each audio in dataset, neuron parameters, plasticity parameters, synapse parameters, initial weight distribution
Optimized parameters: N_{epoch} , v_{max} , P_{exc_inh} , P_{inh_exc} , P_{gen_exc} , P_{gen_inh} , R_{exc_inh} , R_{inh_exc}
Constant network parameters: Table 3
Output data: SNN model, vector of neuron activity frequencies in the excitatory layer for each example of the training set $\mathbf{v}_i$.

- 1: Neural network initialization: neurons, synapses and initial weights.
- 2: **for** k in N_{epoch} **do**
- 3: **for** each $\mathbf{x}_i$ in X^{train} **do**
- 4: **for** each k_{i_j} in $\mathbf{x}_i$ **do**
- 5: Generating spikes sequences $\mathbf{x}_{i_j}^{seq}$ with length t_e and frequency v_{i_j} .
- 6: **end for**
- 7: Simulating SNN during t_e time steps using spikes sequences array $\mathbf{x}_i^{seq}$.
- 8: Simulating SNN without input signal during t_p time steps for membrane potential resting to initial value.
- 9: **end for**
- 10: **end for**
- 11: Stop changing weights.
- 12: Collecting and saving frequencies vector of excitatory neuron layer activities $\mathbf{v}_i$ during presenting samples of input data.
- 13: **Return** SNN model, vector of neuronal activities frequencies $\mathbf{v}_i$.

After obtaining the trained SNN, the general process of classifying an audio recording consists of the following steps:

- 1) preprocessing of audio test samples using MFCC and GRF methods,
- 2) conversion of the received values into spike sequences,
- 3) simulation of the SNN and calculation of the excitatory neuron activity frequency vectors,
- 4) defining audio sample class from frequency vector.

3. Experiments

The experiments were carried out in two stages. At the first stage, the feasibility of using sparse connectivity in different layers of the chosen SNN architecture was investigated.

To do this, sparse connectivity was applied in turn to the links between different layers. Based on the results of the experiments, layers were selected the use of sparse connectivity in which led to the best results. At the second stage of the experiments, we studied the application of sparse connectivity to several layers of the network at once. All experiments were carried out in the mode with automatic selection of hyperparameters based on the open-source HyperOpt library [20].

Measuring accuracy was performed using the micro-averaged F1-score metric which is calculated from the precision and recall of predicting that class (Eq. 8), where the precision is, for each class L , the number True Positive (TP_L) of samples from the class L predicted correctly as belonging to L , divided by the total number of samples predicted as belonging to L , including the False Positive (FP_L) samples that do not actually belong to L but were misattributed to it by the network. Recall is the number of true positive samples divided by the number of all samples belonging to L , including the False Negative (FN_L) samples that belong to L but were not identified as such by the network.

$$\begin{aligned} \text{Precision} &= \frac{\sum_L TP_L}{\sum_L TP_L + \sum_L FP_L}, \\ \text{Recall} &= \frac{\sum_L TP_L}{\sum_L TP_L + \sum_L FN_L}, \\ \text{F1} &= \frac{2 \cdot \text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}}. \end{aligned} \quad (8)$$

The results of the first stage of experiments are presented in the Table 1.

Baseline for comparison is the accuracy of the original SNN architecture, which was 0.93 F1 with the network parameters specified in the Table 3 and the maximum spike frequency $\nu_{\max} = 550$ Hz.

As can be seen from the Table 1, when replacing the initial connections with a fixed number (10% of all-to-all connections) between the input and inhibitory layers with sparse ones there is a significant decrease in the accuracy of audio classification (the best result on HyperOpt is 0.62 F1 at $P_{gen_inh} = 0.2$). In this regard, in the experiments at the second stage, only the initial connection was used between the input and inhibitory layers, which is also discharged with the probability of connection formation $P_{gen_inh} = 0.1$. It is also worth noting that the regularity or irregularity of the network of excitatory and inhibitory neurons does not significantly affect the classification accuracy, so the variation of this parameter can be neglected.

Thus, after the first stage of the study, the following intermediate conclusions were made:

- The sparse connectivity method works successfully in all connectivity areas of neuron layers, except for the area of connections between the input and inhibitory layers.
- The regularity or irregularity of the network of neurons in the layer has no significant differences.

The results of the second stage are presented in the Table 4. The best classification accuracy was achieved by architectures 3 and 4, in which sparse connectivity was simultaneously used to connect the following layers: a) input and excitatory; b) inhibitory and excitatory. In both areas, in the original architecture, the layers are connected in an all-to-all manner. Thus, the use of the sparse connectivity method can significantly reduce the number of connections between layers without sacrificing accuracy.

Table 3. Network and synapse parameters

Parameter	Value	Description
$w_{exc-inh}$	13	Static synaptic weights from exc to inh neurons
$w_{inh-exc}$	-12	Static synaptic weights from inh to exc neurons
t_p	50 ms	Intervector pause
t_e	350 ms	Spike train length
N	400	Number of neurons in every layer
A^-	0.55	STDP weight depression amplitude
A^+	1.0	STDP weight potentiation amplitude
τ_-	20 ms	STDP depression time window constant
τ_+	20 ms	STDP depression time window constant

Table 4. Results of the second stage of the research

Type of connection between layers of neurons				$v_{\max}$, Hz	Fraction of remaining connections	F1
From excitatory to inhibitory	From inhibitory to excitatory	From input to excitatory	From input to inhibitory			
Sparse ($P_{exc_inh} = 0.9$; $R_{exc_inh} = 0.8$)	Sparse ($P_{inh_exc} = 0.2$; $R_{inh_exc} = 0.8$)	All-to-all	Fixed Amount(10%)	950	0.95	0.94
Sparse ($P_{exc_inh} = 0.9$; $R_{exc_inh} = 0.8$)	All-to-all*	Probabilistic ($P_{gen_exc} = 0.4$)	Fixed Amount(10%)	950	128.21	0.94
Counter-Partnership	Sparse ($P_{inh_exc} = 0.4$; $R_{inh_exc} = 0.9$)	Probabilistic ($P_{gen_exc} = 0.4$)	Fixed Amount(10%)	950	40.31	0.96
Sparse ($P_{exc_inh} = 0.85$; $R_{exc_inh} = 0.3$)	Sparse ($P_{inh_exc} = 0.25$; $R_{inh_exc} = 0.95$)	Probabilistic ($P_{gen_exc} = 0.45$)	Fixed Amount(10%)	550	45.09	0.95

* - excluding connections between counter-partners

Also, according to the results of the study at both stages, it is possible to obtain the overall average value of the probability of the formation of a connection between the input and excitatory layers at the level $P_{gen_exc} = 0.4$.

4. Analysis of results

According to the results of the study, carried out in two stages, it was found that the sparse connectivity method can be successfully applied to the connections between layers, initially organized according to the all-to-all principle, significantly reducing the number of connections in the SNN. The best result in reducing the number of connections was achieved on an architecture in which sparse connectivity was implemented between a) input and excitatory, b) inhibitory and excitatory layers, and amounted to 40.3% of the original number (reduction from 252400 connections to 101746) without losing accuracy on the audio classification problem compared to the original SNN architecture. Table 5 presents the results of comparing the accuracy of various machine learning methods on the problem of classifying audio recordings from the FSDD set converted to 30 MFCC. It is shown that the accuracy (by the F1-score metric according to Eq. (8)) of classification of audio data by means of SNN is comparable to the results of classification by classical methods of machine learning.

Table 5. Comparison of various machine learning methods on the FSDD dataset using MFCC

Machine learning method	F1
SNN with all-to-all connectivity	0.93
SNN with sparse connectivity	0.90
Random Forest	0.96
k -Nearest Neighbors	0.97
Support Vector Machine	0.95
Multilayer Perceptron	0.90

Conclusion

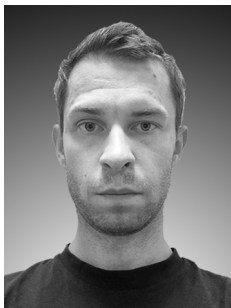
In the present work, we evaluated the efficiency of using the sparse connectivity method in a three-layer spiking neural network consisting of input, excitatory, and inhibitory layers for a little-studied problem of classifying an audio recording with SNN based on local plasticity. The connections between layers of neurons are established within a limited area of neurons using a given probability. Testing this

method on an audio classification problem showed that the number of connections in an SNN can be reduced by 60%. In this case, the accuracy of solving the classification problem is also achieved at the level of conventional machine learning classification methods. Thus, the prospects for using this method to reduce the computational complexity of spiking neural networks can be explored in relation to various classification problems.

References

1. Davies M, Srinivasa N, Lin T-H, Chinya G, Cao Y, Choday SH, Dimou G, Joshi P, Imam N, Jain S, Liao Y, Lin C-K, Lines A, Liu R, Mathaikutty D, McCoy S, Paul A, Tse J, Venkataramanan G, Weng Y-H, Wild A, Yang Y, Wang H. Loihi: A neuromorphic manycore processor with on-chip learning. *IEEE Micro*. 2018;38(1):82–99. DOI: 10.1109/MM.2018.112130359.
2. Merolla PA, Arthur JV, Alvarez-Icaza R, Cassidy AS, Sawada J, Akopyan F, Jackson BL, Imam N, Guo C, Nakamura Y, Brezzo B, Vo I, Esser SK, Appuswamy R, Taba B, Amir A, Flickner MD, Risk WP, Manohar R, Modha DS. A million spiking-neuron integrated circuit with a scalable communication network and interface. *Science*. 2014;345(6197):668–673. DOI: 10.1126/science.1254642.
3. Matsukatova AN, Vdovichenko AY, Patsaev TD, Forsh PA, Kashkarov PK, Demin VA, Emelyanov AV. Scalable nanocomposite parylene-based memristors: Multifilamentary resistive switching and neuromorphic applications. *Nano Research*. 2023;16(2):3207–3214. DOI: 10.1007/s12274-022-5027-6.
4. Matsukatova AN, Iliasov AI, Nikiruy KE, Kukueva EV, Vasiliev AL, Goncharov BV, Sitnikov AV, Zhanaveskin ML, Bugaev AS, Demin VA, Rylkov VV, Emelyanov AV. Convolutional neural network based on crossbar arrays of (Co-Fe-B) $\times$ (LiNbO₃)_{100-x} nanocomposite memristors. *Nanomaterials*. 2022;12(19):3455. DOI: 10.3390/nano12193455.
5. Bordanov I, Antonov A, Korolev L. Simulation of calculation errors in memristive crossbars for artificial neural networks. In: 2023 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). 15-19 May 2023, Sochi, Russian Federation. IEEE; 2023. P. 1008–1012. DOI: 10.1109/ICIEAM57311.2023.10139308.
6. Vlasov D, Minnekhanov A, Rybka R, Davydov Y, Sboev A, Serenko A, Ilyasov A, Demin V. Memristor-based spiking neural network with online reinforcement learning. *Neural Networks*. 2023;166:512–523. DOI: 10.1016/j.neunet.2023.07.031.
7. Tao T, Li D, Ma H, Li Y, Tan S, Liu E-X, Schutt-Aine J, Li E-P. A new pre-conditioned STDP rule and its hardware implementation in neuromorphic crossbar array. *Neurocomputing*. 2023;557:126682. DOI: 10.1016/j.neucom.2023.126682.
8. Sboev A, Serenko A, Rybka R, Vlasov D. Solving a classification task by spiking neural network with STDP based on rate and temporal input encoding. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020;43(13):7802–7814. DOI: 10.1002/mma.6241.
9. Sboev A, Vlasov D, Rybka R, Davydov Y, Serenko A, Demin V. Modeling the dynamics of spiking networks with memristor-based STDP to solve classification tasks. *Mathematics*. 2021;9(24):3237. DOI: 10.3390/math9243237.
10. Diehl PU, Cook M. Unsupervised learning of digit recognition using spike-timing-dependent plasticity. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2015;9:99. DOI: 10.3389/fncom.2015.00099.
11. Sboev A, Davydov Y, Rybka R, Vlasov D, Serenko A. A comparison of two variants of memristive plasticity for solving the classification problem of handwritten digits recognition. In: Klimov VV, Kelley DJ, editors. *Biologically Inspired Cognitive Architectures 2021. BICA 2021*. Vol. 1032 of *Studies in Computational Intelligence*. Cham: Springer; 2022. P. 438–446. DOI: 10.1007/978-3-030-96993-6_48.
12. Vlasov D, Davydov Y, Serenko A, Rybka R, Sboev A. Spoken digits classification based on

- spiking neural networks with memristor-based STDP. In: 2022 International Conference on Computational Science and Computational Intelligence (CSCI). 14-16 December 2022, Las Vegas, NV, USA. IEEE; 2022. P. 330–335. DOI: 10.1109/CSCI58124.2022.00066.
13. Lien H-H, Chang T-S. Sparse compressed spiking neural network accelerator for object detection. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2022;69(5):2060–2069. DOI: 10.1109/TCSI.2022.3149006.
 14. Tsai C-C, Yang Y-H, Lin H-W, Wu B-X, Chang EC, Liu HY, Lai J-S, Chen PY, Lin J-J, Chang JS, Wang L-J, Kuo TT, Hwang J-N, Guo J-I. The 2020 embedded deep learning object detection model compression competition for traffic in Asian countries. In: 2020 IEEE International Conference on Multimedia & Expo Workshops (ICMEW). 06-10 July 2020, London, UK. IEEE; 2020. P. 1–6. DOI: 10.1109/ICMEW46912.2020.9106010.
 15. Han B, Zhao F, Zeng Y, Pan W. Adaptive sparse structure development with pruning and regeneration for spiking neural networks. arXiv:2211.12219. arXiv Preprint; 2022. 9 p. DOI: 10.48550/arXiv.2211.12219.
 16. Amiri M, Jafari AH, Makkiabadi B, Nazari S. Recognizing intertwined patterns using a network of spiking pattern recognition platforms. Scientific Reports. 2022;12(1):19436. DOI: 10.1038/s41598-022-23320-8.
 17. Timcheck J, Shrestha SB, Rubin DBD, Kupryjanow A, Orchard G, Pindor L, Shea T, Davies M. The intel neuromorphic DNS challenge. arXiv:2303.09503. arXiv Preprint; 2023. 13 p. DOI: 10.48550/arXiv.2303.09503.
 18. McFee B, Raffel C, Liang D, Ellis DPW, McVicar M, Battenberg E, Nieto O. librosa: Audio and music signal analysis in python. In: Proceedings of the 14th Python in Science Conference. SciPy; 2015. P. 18–24. DOI: 10.25080/Majora-7b98e3ed-003.
 19. Morrison A, Diesmann M, Gerstner W. Phenomenological models of synaptic plasticity based on spike timing. Biological Cybernetics. 2008;98(6):459–478. DOI: 10.1007/s00422-008-0233-1.
 20. Bergstra J, Yamins D, Cox DD. Hyperopt: a Python library for model selection and hyperparameter optimization. In: Proceedings of the 12th Python in Science Conference. SciPy; 2013. P. 13–19.



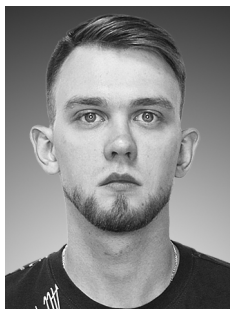
Рыбка Роман Борисович — родился в Волгограде (1989). Окончил МИРЭА (Российский технологический университет) по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» (2011) и аспирантуру НИЦ «Курчатовский институт» (2014). Кандидат технических наук (2016, НИУ ИТМО). С 2011 года по настоящее время работает в НИЦ «Курчатовский институт». Ведет преподавательскую деятельность. Научные интересы — нейронные сети, машинное обучение, обработка текстовой информации, спайковые нейронные сети, технологии анализа данных. Опубликовал свыше 100 научных статей.

Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1
 Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
 E-mail: Rybka_RB@nrcki.ru
 ORCID: 0000-0002-5595-6398
 AuthorID (eLibrary.Ru): 744614



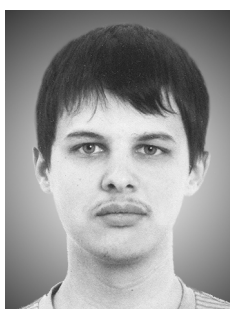
Власов Данила Сергеевич — родился в Москве (1992). Окончил МИРЭА (Российский технологический университет) по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» (2014), магистратуру НИЯУ МИФИ по специальности «Информатика» (2016) и аспирантуру НИЯУ МИФИ по направлению «Математика и информатика» (2023). Научные интересы — нейронные сети, машинное обучение, нейроинформатика, спайковые нейронные сети, моделирование биологических нейронных сетей. Опубликовал свыше 20 научных статей.

Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1
 Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
 E-mail: vfked0d@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-8314-3941
 AuthorID (eLibrary.Ru): 877713



Манжуров Александр Игоревич — родился в Екатеринбурге (1999). Окончил Физико-технологический институт Уральского Федерального Университета (УрФУ) по направлению «Ядерная физика и технологии» (2021) и магистратуру по программе «Прикладная математика и информатика» в физико-технической школе МФТИ ИНБИКСТ при НИЦ «Курчатовский институт» (2023). В настоящее время обучается в аспирантуре в Институте радиоэлектроники и информационных технологий (ИРИТ-РТФ) УрФУ по направлению «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика». Научные интересы — математическое моделирование, радиотехническое моделирование, нейронные сети, машинное обучение.

Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1
Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
E-mail: manzhurov99@mail.ru



Серенко Алексей Вячеславович — родился в Москве (1994). Окончил МФТИ по специальности «Прикладная математика и информатика» (2017). После окончания МФТИ работает в НИЦ «Курчатовский институт», в настоящее время на должности младшего научного сотрудника. Научные интересы — импульсные (спайковые) нейронные сети, обучение на основе биологически мотивированных локальных механизмов пластичности.

Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1
Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
E-mail: serenko@phystech.edu
ORCID: 0000-0002-2321-9879
AuthorID (eLibrary.Ru): 923447



Сбоев Александр Георгиевич — родился в Москве (1951). Окончил НИЯУ МИФИ по специальности «Теоретическая ядерная физика» (1974). Доктор физико-математических наук (2022, НИФУ МИФИ). С 1974 года по настоящее время работает в НИЦ «Курчатовский институт», в настоящее время на должности ведущего научного сотрудника. Активно участвует в подготовке научных кадров, проводя постоянную работу с аспирантами и выпускниками МФТИ, МИФИ, МИРЭА и других вузов. Лауреат премии им. И. В. Курчатова (2003). Научные интересы — нейронные сети, машинное обучение, моделирование социально-экономических процессов, анализ и выделение трендов, обработка текстовой информации, автоматизированные диагностические системы, робототехника, спайковые нейронные сети. Опубликовал свыше 140 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1
Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
E-mail: sag111@mail.ru
ORCID: 0000-0002-6921-4133
AuthorID (eLibrary.Ru): 4196



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003092

EDN: STLCRP

Исследование влияния синаптической пластичности на формирование признаков пространства спайковой нейронной сетью*

А. А. Лебедев¹, В. Б. Казанцев^{1,2}, С. В. Стасенко^{1,2}✉

¹Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

²Московский физико-технический институт, Россия

E-mail: lebedev_rf_unn@mail.ru, kazantsev@neuro.nnov.ru, ✉stasenko@neuro.nnov.ru

Поступила в редакцию 5.10.2023, принята к публикации 18.11.2023,

опубликована онлайн 19.02.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Цель настоящего исследования — исследовать влияние синаптической пластичности на возбуждающих и тормозных синапсах на формирование признаков пространства входного изображения на возбуждающих и тормозных слоях нейронов спайковой нейронной сети. **Методы.** Для моделирования динамики нейрона использовалась вычислительно-эффективная модель «Сброс и накопление с утечкой». В качестве модели синаптических контактов использовалась модель синапса на основе проводимости. Синаптическая пластичность в возбуждающих и тормозных синапсах моделировалась классической моделью, зависимой от времен возникновения спайков синаптической пластичности. Нейронная сеть, составленная из них, порождает признаковое пространство, которое разделяется на классы алгоритмом машинного обучения. **Результаты.** Была построена модель спайковой нейронной сети с возбуждающими и тормозными слоями нейронов с адаптацией синаптических контактов за счет синаптической пластичности. Были рассмотрены различные конфигурации модели с синаптической пластичностью для задачи формирования признаков пространства входного изображения на возбуждающих и тормозных слоях нейронов, а также проведено их сравнение. **Заключение.** Было показано, что синаптическая пластичность в тормозных синапсах ухудшает формирование признаков пространства изображения для задачи классификации. Получены также ограничения модели и выбрана лучшая конфигурация модели.

Ключевые слова: спайковая нейронная сеть, синаптическая пластичность, машинное обучение, классификация изображений.

Благодарности. В части исследования конфигураций моделей при формировании признаков описания с возбуждающей популяции нейронов работа выполнена при поддержке гранта Правительства Нижегородской области для молодых ученых (соглашение № 316-06-16-111а/23 от 4 июля 2023 г.), в части исследования конфигураций моделей при формировании признаков описания с тормозной популяции нейронов работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00134).

Для цитирования: Лебедев А. А., Казанцев В. Б., Стасенко С. В. Исследование влияния синаптической пластичности на формирование признаков пространства спайковой нейронной сетью // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 253–267. DOI: 10.18500/0869-6632-003092. EDN: STLCRP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нейроинформатика — 2023».

Study of the influence of synaptic plasticity on the formation of a feature space by a spiking neural network*

A. A. Lebedev¹, V. B. Kazantsev^{1,2}, S. V. Stasenko^{1,2} ✉

¹National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology, Russia

E-mail: lebedev_rf_unn@mail.ru, kazantsev@neuro.nnov.ru, ✉stasenko@neuro.nnov.ru

Received 5.10.2023, accepted 18.11.2023, available online 19.02.2024, published 29.03.2024

Abstract. The purpose of this study is to study the influence of synaptic plasticity on excitatory and inhibitory synapses on the formation of the feature space of the input image on the excitatory and inhibitory layers of neurons in a spiking neural network. *Methods.* To simulate the dynamics of the neuron, the computationally efficient model “Leaky integrate-and-fire” was used. The conductance-based synapse model was used as a synaptic contact model. Synaptic plasticity in excitatory and inhibitory synapses was modeled by the classical model of time dependent synaptic plasticity. A neural network composed of them generates a feature space, which is divided into classes by a machine learning algorithm. *Results.* A model of a spiking neural network was built with excitatory and inhibitory layers of neurons with adaptation of synaptic contacts due to synaptic plasticity. Various configurations of the model with synaptic plasticity were considered for the problem of forming the feature space of the input image on the excitatory and inhibitory layers of neurons, and their comparison was also carried out. *Conclusion.* It has been shown that synaptic plasticity in inhibitory synapses impairs the formation of an image feature space for a classification task. The model constraints are also obtained and the best model configuration is selected.

Keywords: spiking neural network, synaptic plasticity, machine learning, image classification.

Acknowledgements. In terms of studying model configurations when generating an indicative description from an excitatory population of neurons the work was supported by grant from the Government of the Nizhny Novgorod Region for young scientists (agreement No. 316-06-16-111a/23 from 4 July 2023), in terms of studying model configurations when generating an indicative description from an inhibitory population of neurons the work was supported by grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-11-00134).

For citation: Lebedev AA, Kazantsev VB, Stasenko SV. Study of the influence of synaptic plasticity on the formation of a feature space by a spiking neural network. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):253–267. DOI: 10.18500/0869-6632-003092

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Кодирование информации в спайковых нейронных сетях является активной исследовательской темой в области нейробиологии и машинного обучения. Этот подход к обработке информации имеет свои уникальные преимущества, такие как низкое энергопотребление, высокая вычислительная эффективность и возможность обработки сигналов в реальном времени. Под кодированием информации в статье будем понимать отображение векторов входных данных во входные последовательности спайков, а преобразование входных последовательностей спайков в выходные, которое выполняет спайковая нейронная сеть, называть выделением значимых признаков. В настоящее время были предложены различные методы кодирования.

Одним из распространенных методов кодирования является расстояние между спайками. Например, в кодировании частотой (rate coding) информация представляется количеством спайков в определенном временном окне. Чем больше спайков генерирует нейрон за определенный период времени, тем выше значение передаваемой информации. Этот метод кодирования был

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Neuroinformatics — 2023”.

широко изучен как в биологических системах, так и в спайковых нейронных сетях. Например, Сонг и др. [1] показали, что спайковые нейронные сети могут достичь надежного кодирования по частоте путем регулировки синаптических весов между нейронами. Другой метод — временное кодирование. Здесь информация кодируется временным интервалом между последовательными спайками. Относительное время между импульсами может нести конкретную информацию о стимуле. Например, более короткий интервал может означать передачу единицы информации, а более длинный — ноль. Торп и др. [2] предложили концепцию «временной связи» и показали, что спайковые нейронные сети могут использовать точное время импульсов для эффективного кодирования и обработки информации. Существуют также другие методы кодирования, такие как кодирование ранжированными интервалами (rank-order coding) [3] и фазовое кодирование (phase coding) [4]. Пачечное кодирование основывается на коллективной активности группы нейронов для представления информации. Паттерн активности в популяции несет закодированную информацию. В исследовании Боте и др. [5] было показано, что спайковые нейронные сети могут научиться кодировать входные сигналы с использованием распределенной пачечной динамики. Выбор конкретного метода кодирования зависит от задачи и особенностей конкретной спайковой нейронной сети. Кроме того, декодирование спайковой информации играет важную роль при анализе и интерпретации этих данных.

Участие зависящей от времен спайков синаптической пластичности (Spike-Timing-Dependent Plasticity, STDP) в кодировании информации является одной из важных тем в исследованиях спайковых нейронных сетей. STDP — это форма пластичности синапсов, которая основана на времени возникновения спайков в пресинаптическом и постсинаптическом нейронах. STDP ослабевает или усиливает связь между нейронами на основе временных интервалов между спайками. Если пресинаптический нейрон спайкует перед постсинаптическим нейроном, синапс усиливается, что способствует увеличению веса связи. Если пресинаптический нейрон спайкует после постсинаптического нейрона, синапс ослабевает, что приводит к уменьшению веса связи. Такая обратная связь, наряду с другими механизмами, позволяет нейронной сети учиться и адаптироваться к предъявляемым стимулам и образам [6–9]. Правило STDP может быть использовано для кодирования и хранения информации в сети [10]. Нейроны, которые часто активируются одновременно, могут формировать более сильные связи между собой, тогда как слабо активируемые нейроны могут иметь более слабые связи. В работе Маскелье и др. [11] было показано, что STDP может позволить спайковой нейронной сети извлекать признаки из естественных изображений. STDP также активно исследуется и применяется в области машинного обучения и интеллектуальных систем. Применение STDP к задаче обработки информации на основе спайковых сетей открывает новые возможности для создания эффективных и энергоэффективных алгоритмов обучения и распознавания.

Выделение новых признаков из изображений с помощью спайковых нейронных сетей — это активная область исследований, которая имеет потенциал для разработки эффективных методов обработки и анализа изображений [12]. Спайковые нейронные сети представляют собой мощный инструмент для анализа и классификации изображений, так как они могут учитывать временные особенности сигналов и обеспечивать низкую латентность при обработке данных.

В данной статье мы предлагаем модель выделения значимых признаков изображений с использованием спайковой нейронной сети с синаптической пластичностью для задачи распознавания. В качестве нового признакового пространства используется количество спайков на каждом нейроне в тормозном и возбуждающем слоях. На базе предлагаемой модели мы исследуем влияние синаптической пластичности на возбуждающих и тормозных синапсах на формирование нового признакового пространства входного изображения на возбуждающих и тормозных слоях нейронов спайковой нейронной сети.

1. Методика

1.1. Математическая модель нейрона. Динамика нейрона в нашей модели описывалась с помощью модели нейрона «Сброс и накопление с утечкой» (Leaky-Integrate-and-Fire, LIF) [13]. Система уравнений, описывающих динамику мембранного потенциала LIF-нейрона, может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \tau_V \dot{V}_i = (V_{\text{rest}} - V_i) + g_i^E (V_{\text{syn}}^E - V_i) + g_i^I (V_{\text{syn}}^I - V_i), \\ \dot{g}_i^E = -\frac{g_i^E}{\tau_{g_i^E}} + \sum_i w^E \cdot \delta(t - t_{\text{spike},i}), \\ \dot{g}_i^I = -\frac{g_i^I}{\tau_{g_i^I}} + \sum_i w^I \cdot \delta(t - t_{\text{spike},i}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь V_i — мембранный потенциал; V_{rest} — реверсивный потенциал; $V_{\text{syn}}^{E,I}$ — реверсивный потенциал для возбуждающих и тормозных синапсов; $g_i^{E,I}$ — синаптическая проводимость; τ_v — временная константа релаксации мембранного потенциала; $\tau_{g_i^{E,I}}$ — временная константа релаксации синаптической проводимости; $t_{\text{spike},i}$ — моменты времени последовательных пресинаптических спайков. При достижении мембранным потенциалом порогового значения V_{thr} происходит генерация спайка и возвращение значения мембранного потенциала к V_{reset} . Рефрактерность для возбуждающих нейронов равнялась 5 мс, для тормозных нейронов — 2 мс. В уравнение мембранного потенциала для тормозного нейрона входила только синаптическая проводимость возбуждающих синапсов.

Спайковая нейронная сеть состоит из множества таких нейронов, каждый из которых интегрирует входные сигналы и генерирует спайки в зависимости от своего состояния. Спайки, сгенерированные одним нейроном, могут быть связаны с входными токами других нейронов в сети, что позволяет передавать информацию и обрабатывать данные в нейронной сети.

В нашей работе мы предлагаем использовать две взаимодействующие друг с другом популяции нейронов: возбуждающую и тормозную.

Для модели возбуждающих нейронов были использованы следующие параметры: $V_{\text{rest}}^E = -60$ мВ, $V_{\text{reset}}^E = -65$ мВ, $V_{\text{thr}}^E = -52$ мВ, $V_{\text{syn}}^E = 0$ мВ, $V_{\text{syn}}^I = -100$ мВ, $\tau_V^E = 100$ мс, $\tau_{g_i^E} = 5$ мс и $\tau_{g_i^I} = 10$ мс.

Для модели тормозных нейронов были использованы следующие параметры: $V_{\text{rest}}^I = -60$ мВ, $V_{\text{reset}}^I = -45$ мВ, $V_{\text{thr}}^I = -40$ мВ, $\tau_{g_i^E} = 5$ мс.

Для связей «возбуждающий нейрон — тормозный нейрон» значение синаптического веса принималось равным 3, для связей типа «тормозный нейрон — возбуждающий нейрон» значение синаптического веса принималось равным 0.3.

1.2. Синаптическая пластичность. Синаптическая пластичность STDP ответственна за регулирование силы связей между нейронами в мозге. Она позволяет нейронам изменять силу связи на основе временной разницы между передаваемыми друг другу сигналами. В исследовании Guo-qiang Bi и Mu-ming [14] было установлено изменение синаптических связей как функция относительной синхронизации пре- и постсинаптических спайков. Результаты их эксперимента приведены на рис. 1 черными точками. В результате аппроксимации полученных данных экспоненциальными зависимостями можно записать систему уравнений

$$\Delta w = \begin{cases} A_+ \cdot \exp(\Delta t / \tau_-), & \Delta t < 0, \\ A_- \cdot \exp(-\Delta t / \tau_+), & \Delta t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

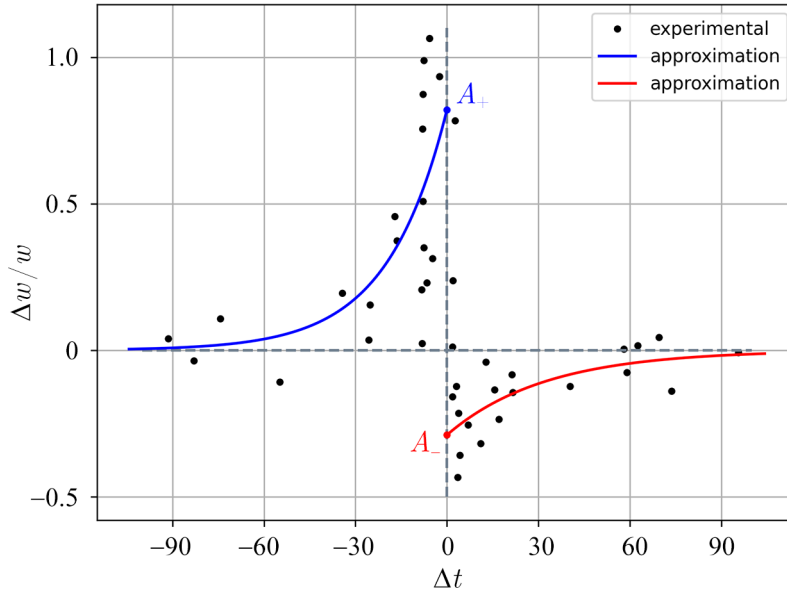


Рис. 1. Экспериментальная зависимость изменения синаптического веса от разницы времен возникновения спайков, полученная в работе [14]. Черными точками обозначены экспериментальные данные. Красная и синяя кривые являются аппроксимацией экспоненциальной зависимости экспериментальных данных (цвет онлайн)

Fig. 1. Experimental dependence of the change in synaptic weight on the difference in the times of occurrence of spikes, obtained in the work [14]. Black dots indicate experimental data. The red and blue curves are an approximation of the exponential dependence of the experimental data (color online)

Здесь $\Delta t = t_{\text{pre}} - t_{\text{post}}$ — разность времен между пре- (t_{pre}) и постсинаптическим спайком (t_{post}); τ_- и τ_+ — времена релаксации проводимости. Константы A_+ и A_- получены аппроксимацией экспериментальных данных.

Значения параметров модели STDP принимались следующие: $\tau_- = 20$ мс, $\tau_+ = 20$ мс, $A_+ = 0.01$ и $A_- = 0.01$.

Таким образом, синаптические веса, в соответствии с изложенным правилом пластичности в зависимости от каждой пары пре- и постсинаптических спайков, будут изменяться следующим образом:

$$w \leftarrow w + \Delta w. \quad (3)$$

При этом изменение синаптической проводимости будет происходить при возникновении спайка на пресинаптическом нейроне для возбуждающего синапса как $g_i^E \leftarrow g_i^E + w^E$ и для тормозного синапса как $g_i^I \leftarrow g_i^I + w^I$.

1.3. Данные. Классическая задача классификации изображений требует значительного количества размеченных однотипных данных, которые могут быть без труда обработаны и проанализированы. Чтобы исследовать вопрос извлечения пространства признаков с помощью спайковой нейронной сети, мы выбрали базу данных MNIST (<http://yann.lecun.com/exdb/mnist>) [15]. Каждое изображение в наборе данных представляет собой одноканальную квадратную матрицу, состоящую из 784 пикселей, каждый из которых кодируется одним байтом.

В общих терминах задача классификации может быть описана следующим образом.

1. Выделение пространства признаков на основе особенностей данных.
2. Выделение значимых признаков.
3. Разделение выбранного пространства на классы в соответствии с выбранной метрикой.
4. Оценка результатов на основе статистики, полученной из «неизвестной» выборки.

В данной работе особое внимание уделяется признаковому пространству ответов нейронов на входной стимул и качеству его выбора, на которое влияет синаптическая пластичность в модели спайковой нейронной сети.

1.4. Формирование входного сигнала. Входное изображение преобразуется в последовательность входных спайков, распределенных согласно процессу Пуассона [16] с частотой, равной значению интенсивности пикселя. Такое преобразование формирует нулевой слой (входной слой), где событие в последовательности спайков определяет момент пресинаптического спайка. Алгоритм генерации последовательности спайков схематически приведен в Алг. 1. Частота определяется пропорционально интенсивности пикселя с коэффициентом пропорциональности 0.5.

Алгоритм 1. Генерация входного стимула из одноканального изображения MNIST

Algorithm 1. Generating an input stimulus from a single-channel MNIST image

```

forall  $pixels \in image$  do
    Задать среднюю интенсивность пуассоновского процесса в соответствии
    с интенсивностью пикселя  $\rightarrow \lambda$ 
    Задать длительность временного интервала, на котором будет генерироваться процесс
     $\rightarrow T$ 
    Вычислить среднее время между событиями (инверсия интенсивности)  $\rightarrow t_{inv}$ 
    Инициализировать пустой массив для хранения временных меток событий
    while текущая временная метка не превысит длительность временного интервала ( $T$ )
    do
        Сгенерировать случайное число из равномерного распределения на интервале
         $[0, 1] \rightarrow n$ 
        Вычислить величину:  $t_{inv} \cdot \ln(n) \rightarrow \tau$ 
        Увеличить текущую временную метку на величину  $\tau$ 
        Добавить временную метку в массив событий
    end
    Сгенерировать спайки по временным меткам
    Использовать полученный сигнал как вход для каждого нейрона соответствующего
    слоя
end

```

1.5. Описание сети. В нашей работе мы предлагаем применение процессов распознавания и классификации изображений с использованием кодирования спайковой нейронной сетью. Для этого была построена двухслойная модель спайковой нейронной сети, изображенная на рис. 2. Для обеспечения однородности сгенерированный сигнал синхронно подавался на все нейроны возбуждающего слоя модели. На рис. 2 красным обозначен слой возбуждающих нейронов, а синим — тормозных нейронов. Каждый слой состоит из 100 нейронов. Слой возбуждающих нейронов связан со слоем тормозных нейронов правилом «один к одному», где каждый нейрон из одного слоя влияет на соответствующий нейрон противоположного слоя. Напротив, обратная связь от слоя тормозных нейронов определяется правилом «один ко всем, кроме одного», где тормозный нейрон влияет на все возбуждающие нейроны, кроме одного. Данный тип связи реализует механизм «победитель получает всё» (Winner Take All) [17], который включает латеральное торможение.

Для обучения и тестирования сети была разработана процедура предъявления стимула, схематически представленная на рис. 3 и состоящая из следующих основных шагов:

- 1) подача полезного сигнала в течение 350 миллисекунд;
- 2) период молчания в течение 150 миллисекунд.

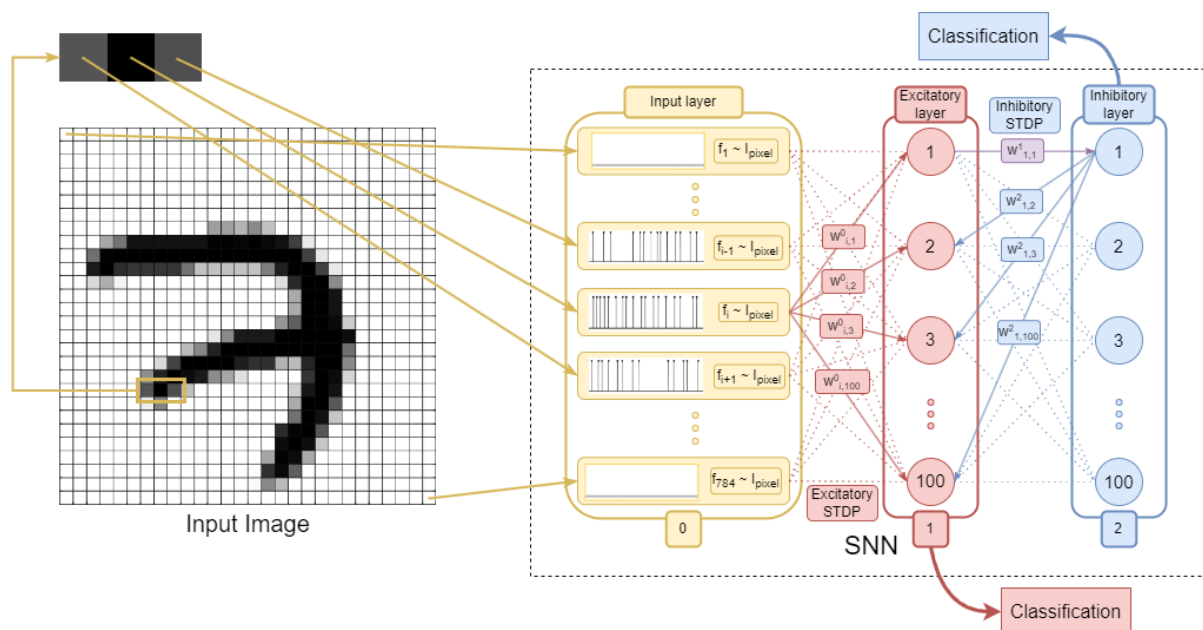


Рис. 2. Схема формирования нового признакового описания изображения с детальной схемой спайковой нейронной сети с синаптической пластичностью. Желтым цветом выделен входной слой (нулевой слой), представляющий собой набор последовательностей спайков, распределенных по Пуассону с частотой (f_i), равной интенсивности отдельного пикселя изображения (I_{pixel}). Количество последовательностей спайков равно количеству пикселей кодируемого изображения. Красным цветом обозначена возбуждающая популяция нейронов (первый слой), синим — тормозная популяция нейронов (второй слой). Красными стрелками на схеме обозначены возбуждающие синапсы, характеризуемые набором возбуждающих синаптических весовых коэффициентов — $w_{i,j}^0$, где $i = \overline{1, 784}, j = \overline{1, 100}$, эволюционирующие по правилу синаптической пластичности; синими же стрелками обозначены тормозные синапсы, характеризуемые набором тормозных синаптических весовых коэффициентов — $w_{i,j}^2$, где $i = \overline{1, 100}, j = \overline{1, 100}, i \neq j$. Фиолетовые синаптические веса не эволюционируют и их весовые коэффициенты равны и принимают постоянное значение, равное 0.03. Начальные значения возбуждающих и тормозных синаптических весов выбирались случайно согласно равномерному распределению на отрезке от 0 до 1. Так же приведены классификаторы. Классификатор, обозначенный синим цветом, принимает на вход данные с тормозного слоя, а классификатор, обозначенный красным цветом — с возбуждающего (цвет онлайн)

Fig. 2. Scheme for creating a new feature description of an image with a detailed diagram of a spiking neural network with synaptic plasticity. The input layer (zero layer) is highlighted in yellow, representing a set of spike sequences distributed according to a Poisson process with a frequency (f_i) equal to the intensity of individual pixels in the image (I_{pixel}). The number of spike sequences is equal to the number of pixels in the encoded image. The excitatory population of neurons (first layer) is denoted in red, and the inhibitory population of neurons (second layer) is shown in blue. Red arrows on the diagram represent excitatory synapses, characterized by a set of excitatory synaptic weight coefficients — $w_{i,j}^0$, where $i = \overline{1, 784}, j = \overline{1, 100}$, evolving according to the synaptic plasticity rule. Blue arrows represent inhibitory synapses, characterized by a set of inhibitory synaptic weight coefficients — $w_{i,j}^2$, where $i = \overline{1, 100}, j = \overline{1, 100}, i \neq j$. Purple synaptic weights do not evolve, and their weight coefficients are constant and equal to 0.03. Initial values of excitatory and inhibitory synaptic weights were randomly chosen according to a uniform distribution in the range from 0 to 1. Classifiers are also provided. The classifier denoted in blue takes data from the inhibitory layer as input, and the classifier denoted in red takes data from the excitatory layer (color online)

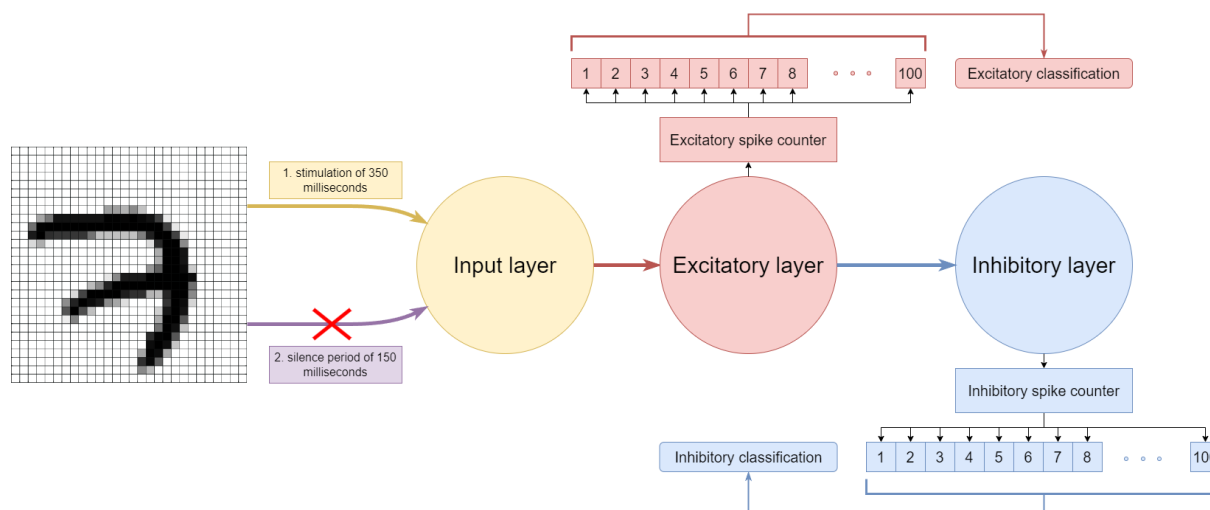


Рис. 3. Схема формирования нового признакового пространства изображения спайковой нейронной сетью с процедурой предъявления стимула. В качестве ответа сети на входное изображение в работе представлено количество спайков каждого нейрона исследуемого слоя (цвет онлайн)

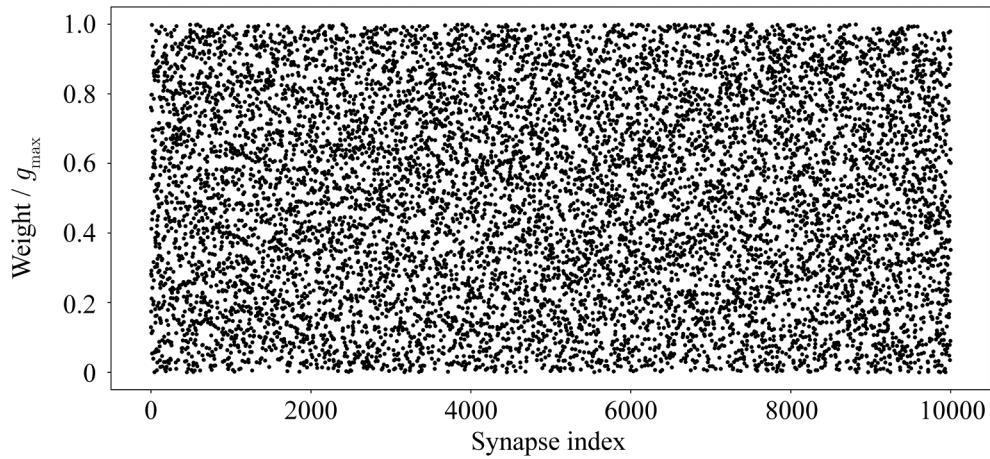
Fig. 3. A scheme for forming a new feature space of an image using a spiking neural network with a stimulus presentation procedure. In the study, the network's response to the input image is represented by the number of spikes of each neuron in the examined layer (color online)

1.6. Классификация. В результате стимуляции сети сигналами, кодирующими в виде последовательности спайков пиксели изображений датасета MNIST, на нейронах будут возникать спайки. Количество спайков, полученное на каждом из нейронов возбуждающего или тормозного слоя в ответ на входной стимул, было предложено в качестве двух различных признаков. Процесс кодирования изображения в новое признаковое пространство схематически представлен на рис. 3. Для классификации полученных данных был использован алгоритм случайного леса (Random Forest) с максимальной глубиной дерева равной 4.

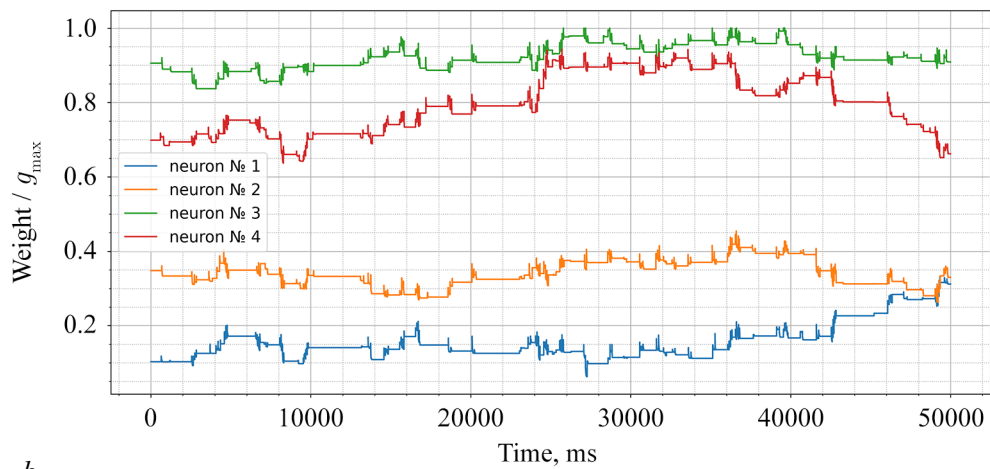
2. Результаты

2.1. Эволюция синаптических весов. Для исследования динамики синаптических весов был проведен эксперимент, в рамках которого была составлена выборка из 100 случайных изображений из набора данных MNIST и подана на вход сети с использованием описанного ранее метода. Далее была рассмотрена эволюция синаптических весов в присутствии синаптической пластичности на слоях возбуждающих и тормозных нейронов. Рассмотрим эволюцию синаптических весов между слоем возбуждающих нейронов и входным сигналом. Растровая диаграмма, иллюстрирующая нормированные синаптические веса между входным сигналом и слоем возбуждающих нейронов модели, показана на рис. 4. С течением времени в процессе подачи стимула происходит адаптация синаптических весов за счет синаптической пластичности, что показано на графике изменения синаптических весов от времени для нескольких нейронов, а также в соответствующих распределениях синаптических весов (рис. 4).

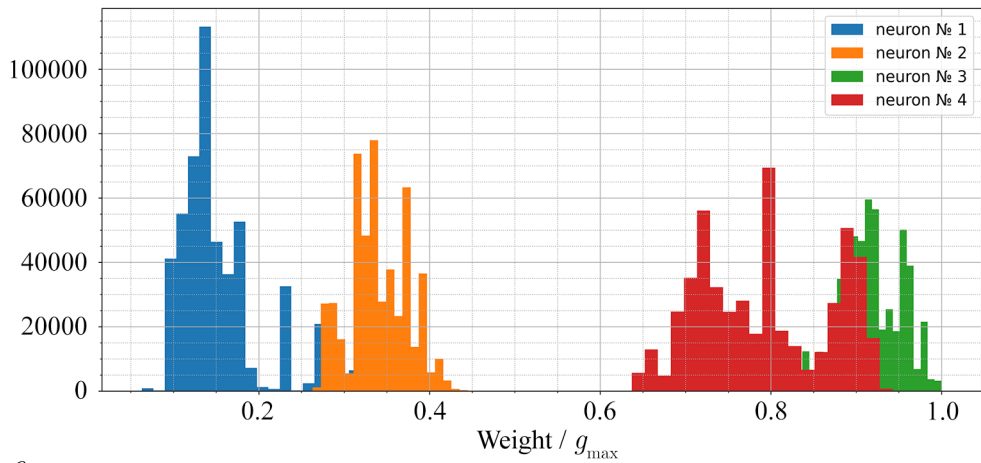
Были также проанализированы синаптические веса между слоями тормозных и возбуждающих нейронов в присутствии синаптической пластичности. Результаты приведены на рис. 5. Следует отметить значимое отличие от первого случая как в распределении синаптических весов, так и в их подстройке.



a



b



c

Рис. 4. Анализ эволюции синаптических весов возбуждающего слоя нейронов: *a* — растровая диаграмма распределения нормированного значения синаптического веса для каждого синапса; *b* — изменение синаптических весов во времени; *c* — гистограмма распределения синаптических весов для нейронов рис. 4, *b* (цвет онлайн)

Fig. 4. Analysis of the evolution of the synaptic weights of the excitatory layer of neurons: *a* — raster diagram of the distribution of the normalized value of the synaptic weight for each synapse; *b* — changing synaptic weights over time; *c* — histogram of distribution of synaptic weights for neurons fig. 4, *b* (color online)

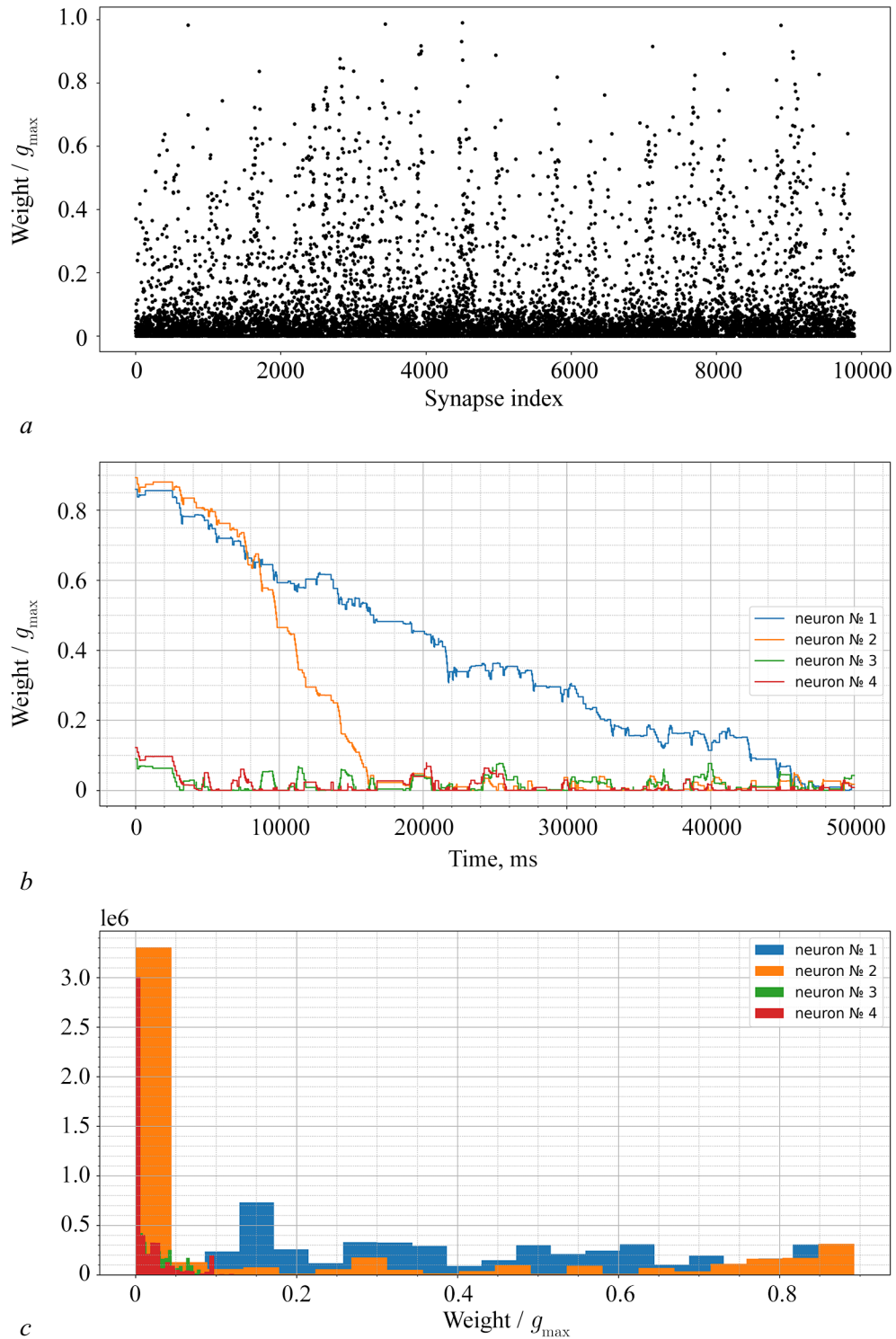


Рис. 5. Анализ эволюции синаптических весов тормозного слоя нейронов: *a* — растровая диаграмма распределения нормированного значения синаптического веса для каждого синапса; *b* — изменение синаптических весов во времени; *c* — гистограмма распределения синаптических весов для нейронов рис. 5, *b* (цвет онлайн)

Fig. 5. Analysis of the evolution of the synaptic weights of the inhibitory layer of neurons: *a* — raster diagram of the distribution of the normalized value of the synaptic weight for each synapse; *b* — changing synaptic weights over time; *c* — histogram of distribution of synaptic weights for neurons fig. 5, *b* (color online)

2.2. Признаковое пространство. Для анализа признакового пространства, размерность которого соответствует числу нейронов популяции, в качестве метрики оценки качества кластеризации было выбрано общее значение спайков для всего слоя. Предполагалось, что распределение спайков среди нейронов группы является равномерным, учитывая, что каждый нейрон в возбуждающем слое модели связан со всеми пикселями входного изображения. В среднем все нейроны в каждой популяции получают один и тот же сигнал, что позволяет использовать сумму спайков в качестве метрики для пространства признаков. Для анализа и подсчета метрики было предложено использовать данные, полученные из возбуждающего и тормозного слоев нейронов. Для этого построенная модель для обоих случаев обучена на 100 случайных изображениях базы данных MNIST.

На основе анализа была составлена сравнительная таблица (табл. 1), демонстрирующая выбранную метрику для выборки из 100 изображений каждого класса.

В результате анализа было обнаружено, что выбранный признак приводит к пересечению классов изображений, что побудило исключить некоторые из них из дальнейшего анализа. Выбранные для эксперимента классы выделены цветом в таблице. Кроме того, были построены зависимости, отображающие распределение общего количества спайков в возбуждающем и тормозном слоях, изображенные на рис. 6 и 7.

Таблица 1. Сравнительная таблица признака для выборок из 100 изображений каждого класса

Table 1. Feature comparison table for samples of 100 images of each class

Class	Excitatory		Inhibitory	
	$\bar{x}$	σ	$\bar{x}$	σ
“0”	517	131	1817	396
“1”	146	93	534	290
“2”	432	146	1551	496
“3”	413	127	1311	534
“4”	305	117	1013	449
“5”	330	137	753	313
“6”	380	133	1183	372
“7”	287	106	869	338
“8”	397	133	1351	183
“9”	303	105	882	235

Здесь $\bar{x}$ — среднее число спайков слоя нейронной сети; σ — стандартное отклонение

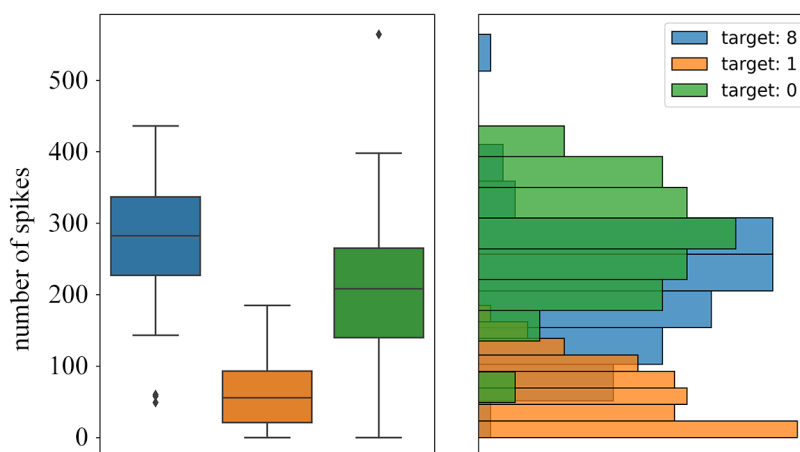


Рис. 6. Зависимость суммы спайков возбуждающего слоя при отклике сети на изображения из разных классов. Синим цветом указаны данные, собранные из изображений принадлежащих классу «0» — target 0; оранжевым цветом указаны данные, собранные из изображений принадлежащих классу «1» — target 1; зеленым цветом указаны данные, собранные из изображений принадлежащих классу «8» — target 8

Fig. 6. The dependence of the sum of spikes of the excitation layer during the response of the network to images from different classes. Blue color indicates data collected from images belonging to class «0» — target 0; orange color indicates data collected from images belonging to the class «1» — target 1; green color indicates data collected from images belonging to the class «8» — target 8

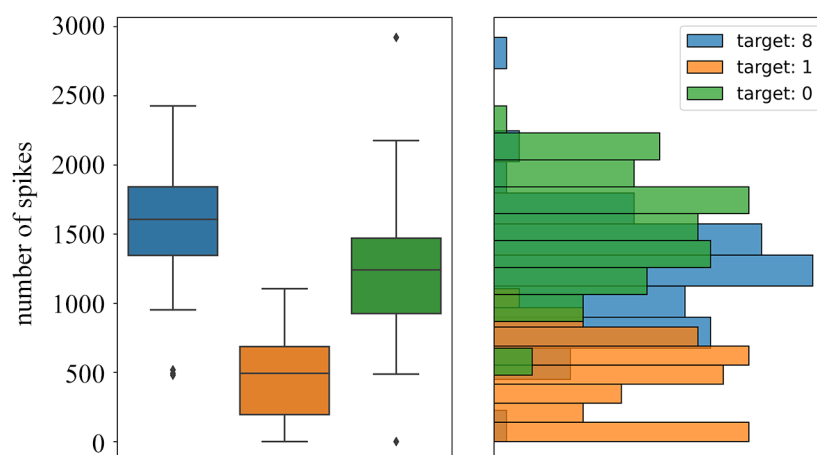


Рис. 7. Зависимость суммы спайков тормозного слоя при отклике сети на изображения из разных классов. Синим цветом указаны данные, собранные из изображений принадлежащих классу «0» — target 0; оранжевым цветом указаны данные, собранные из изображений принадлежащих классу «1» — target 1; зеленым цветом указаны данные, собранные из изображений принадлежащих классу «8» — target 8 (цвет онлайн)

Fig. 7. The dependence of the sum of inhibitory layer spikes in the response of the network to images from different classes. Blue color indicates data collected from images belonging to class «0» — target 0; orange color indicates data collected from images belonging to the class «1» — target 1; green color indicates data collected from images belonging to the class «8» — target 8 (color online)

2.3. Исследование влияния синаптической пластичности. С целью исследования влияния синаптической пластичности на качество формирования пространства признаков было рассмотрено восемь конфигураций модели, отражающих участие синаптической пластичности на разных связях популяций нейронов, а также получение признакового пространства только с возбуждающей популяцией нейронов или только с тормозной популяцией нейронов. Для обучения и тестирования моделей была сформирована выборка данных из 6000 случайных изображений, из которых 5000 изображений использовались для формирования признакового пространства, а 1000 изображений для тестирования. В результате были построены матрицы ошибок для оценки производительности моделей (см. рис. 8 и рис. 9).

В отдельные таблицы также были вынесены точности классификации каждой конфигурации модели: с возбуждающей популяцией — табл. 2, тормозной — табл. 3.

Таблица 2. Сравнительная таблица точности для 4 конфигураций моделей

Table 2. Accuracy comparison table for 4 model configurations

	eSTDP ON	eSTDP OFF
iSTDP ON	0.736	0.683
iSTDP OFF	0.803	0.745

Таблица 3. Сравнительная таблица точности для 4 конфигураций моделей

Table 3. Accuracy comparison table for 4 model configurations

	eSTDP ON	eSTDP OFF
iSTDP ON	0.742	0.700
iSTDP OFF	0.813	0.745

eSTDP — синаптическая пластичность между входными стимулами и возбуждающим слоем нейронов; iSTDP — синаптическая пластичность между тормозным и возбуждающим слоями. Конфигурация модели, которая дает лучшие результаты, выделена цветом.

eSTDP — synaptic plasticity between input stimuli and the excitatory layer of neurons; iSTDP — synaptic plasticity between inhibitory and excitatory layers. The model configuration that produces the best results is highlighted in color.

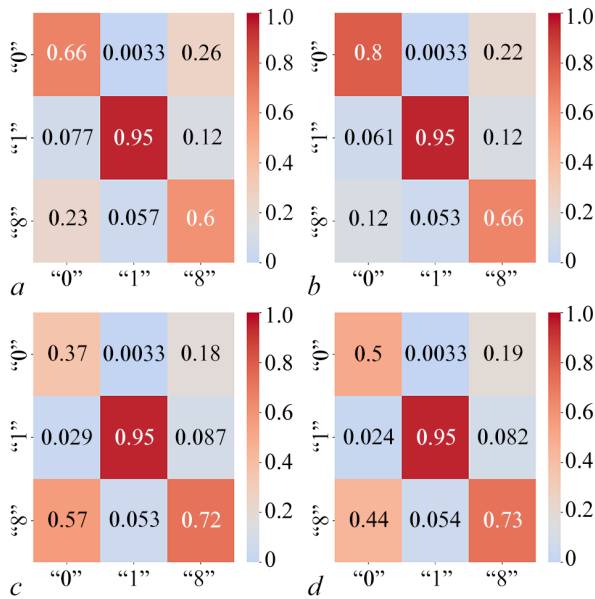


Рис. 8. Матрицы ошибок для классификации данных с возбуждающей популяцией: *a* — матрица ошибок для модели с возбуждающей и тормозной пластичностью; *b* — матрица ошибок для модели с возбуждающей пластичностью; *c* — матрица ошибок для модели с тормозной пластичностью; *d* — матрица ошибок для модели без пластичности (цвет онлайн)

Fig. 8. Confusion matrices for classifying data from the excitatory population: *a* — confusion matrix for the model with excitatory and inhibitory plasticity; *b* — confusion matrix for the model with excitatory plasticity; *c* — confusion matrix for the model with inhibitory plasticity; *d* — confusion matrix for a model without plasticity (color online)

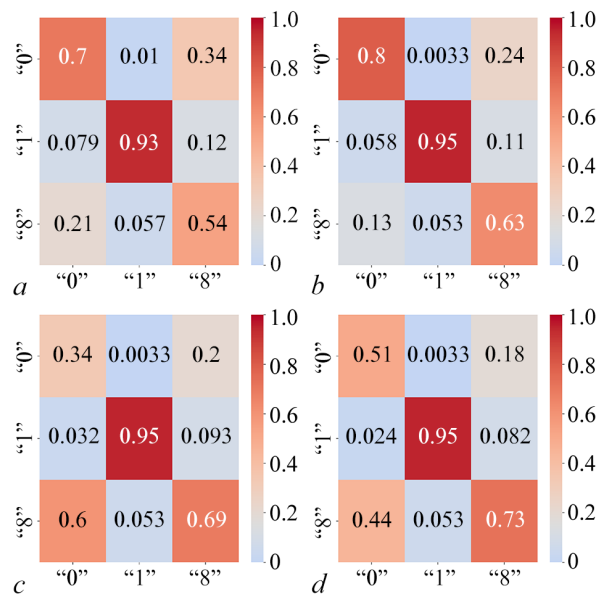


Рис. 9. Матрицы ошибок для классификации данных с тормозной популяцией: *a* — матрица ошибок для модели с возбуждающей и тормозной пластичностью; *b* — матрица ошибок для модели с возбуждающей пластичностью; *c* — матрица ошибок для модели с тормозной пластичностью; *d* — матрица ошибок для модели без пластичности (цвет онлайн)

Fig. 9. Confusion matrices for classifying data from the inhibitory population: *a* — confusion matrix for the model with excitatory and inhibitory plasticity; *b* — confusion matrix for the model with excitatory plasticity; *c* — confusion matrix for the model with inhibitory plasticity; *d* — confusion matrix for a model without plasticity (color online)

Как видно из представленных таблиц, наивысшая точность классификации достигается в конфигурации из только возбуждающей синаптической пластичности для обоих из рассмотренных случаев. Напротив, наименьшая точность достигается при использовании только синаптической пластичности между тормозным и возбуждающим слоями. Если же независимо сравнивать конфигурации классификаций с возбуждающей и тормозной популяцией, лучше всех себя показал случай с классификацией изображений с возбуждающей группы с активной синаптической пластичностью между входными стимулами и возбуждающим слоем нейронов.

Заключение

Была предложена модель для кодирования изображений с использованием спайковой нейронной сети для решения задачи распознавания. В качестве новых признаков, представляющих ответ нейронной сети на сенсорный стимул, было использовано количество спайков каждого нейрона в возбуждающем и тормозном слоях. Модель продемонстрировала наиболее эффективное разделение признаков для изображений цифр из базы данных MNIST, когда использовалась временно-зависимая пластичность (STDP) для возбуждающих синапсов. Модель также показала наихудшее разделение признаков в случае присутствия STDP для тормозных синапсов.

Следует отметить, что для улучшения разделения классов изображений на основе нового пространства признаков можно внести дополнительные улучшения в получаемое признаковое пространство, конфигурацию модели или метод подачи входного стимула. Эти области могут рассматриваться как потенциальные направления для будущих исследований и экспериментов.

References

1. Song S, Miller KD, Abbott LF. Competitive Hebbian learning through spike-timing-dependent synaptic plasticity. *Nature Neuroscience*. 2000;3(9):919–926. DOI: 10.1038/78829.
2. Thorpe S, Delorme A, Van Rullen R. Spike-based strategies for rapid processing. *Neural Networks*. 2001;14(6–7):715–725. DOI: 10.1016/S0893-6080(01)00083-1.
3. Loiselle S, Rouat J, Pressnitzer D, Thorpe S. Exploration of rank order coding with spiking neural networks for speech recognition. In: *Proceedings. 2005 IEEE International Joint Conference on Neural Networks, 2005. 31 July 2005 - 04 August 2005, Montreal, QC, Canada*. New York: IEEE; 2005. P. 2076–2080. DOI: 10.1109/IJCNN.2005.1556220.
4. Yamazaki K, Vo-Ho V-K, Bulsara D, Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sciences*. 2022;12(7):863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
5. Bohte SM, Kok JN, La Poutré H. Error-backpropagation in temporally encoded networks of spiking neurons. *Neurocomputing*. 2002;48(1–4):17–37. DOI: 10.1016/S0925-2312(01)00658-0.
6. Markram H, Gerstner W, Sjöström PJ. Spike-timing-dependent plasticity: a comprehensive overview. *Frontiers in Synaptic Neuroscience*. 2012;4:2. DOI: 10.3389/fnsyn.2012.00002.
7. Stasenko SV, Kazantsev VB. Dynamic image representation in a spiking neural network supplied by astrocytes. *Mathematics*. 2023;11(3):561. DOI: 10.3390/math11030561.
8. Stasenko SV, Kazantsev VB. Information encoding in bursting spiking neural network modulated by astrocytes. *Entropy*. 2023;25(5):745. DOI: 10.3390/e25050745.
9. Stasenko SV, Mikhaylov AN, Kazantsev VB. Model of neuromorphic odorant-recognition network. *Biomimetics*. 2023;8(3):277. DOI: 10.3390/biomimetics8030277.
10. Gordleeva SY, Tsybina YA, Krivonosov MI, Ivanchenko MV, Zaikin AA, Kazantsev VB, Gorban AN. Modeling working memory in a spiking neuron network accompanied by astrocytes. *Frontiers in Cellular Neuroscience*. 2021;15:631485. DOI: 10.3389/fncel.2021.631485.
11. Masquelier T, Guyonneau R, Thorpe S. Spike timing dependent plasticity finds the start of repeating patterns in continuous spike trains. *PLoS ONE*. 2008;3(1):e1377. DOI: 10.1371/journal.pone.0001377.
12. Guo W, Fouda ME, Eltawil AM, Salama KN. Neural coding in spiking neural networks: A comparative study for robust neuromorphic systems. *Frontiers in Neuroscience*. 2021;15:638474. DOI: 10.3389/fnins.2021.638474.
13. Börgers C. Linear integrate-and-fire (LIF) neurons. In: *An Introduction to Modeling Neuronal Dynamics*. Vol. 66 of Texts in Applied Mathematics. Cham: Springer; 2017. P. 45–50. DOI: 10.1007/978-3-319-51171-9_7.
14. Bi G-Q, Poo M-M. Synaptic modifications in cultured hippocampal neurons: Dependence on spike timing, synaptic strength, and postsynaptic cell type. *J. Neurosci*. 1998;18(24):10464–10472. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.18-24-10464.1998.
15. Deng L. The MNIST database of handwritten digit images for machine learning research [best of the web]. *IEEE Signal Processing Magazine*. 2012;29(6):141–142. DOI: 10.1109/MSP.2012.2211477.
16. Sterratt D, Graham B, Gillies A, Willshaw D. *Principles of Computational Modelling in Neuroscience*. Cambridge: Cambridge University Press; 2011. 390 p. DOI: 10.1017/CBO9780511975899.
17. Chen Y. Mechanisms of winner-take-all and group selection in neuronal spiking networks. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2017;11:20. DOI: 10.3389/fncom.2017.00020.



Лебедев Андрей Александрович — родился в Нижнем Новгороде (2000). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2022). С 2022 года студент магистратуры Института информационных технологий математики и механики по направлению «Фундаментальная информатика и информационные технологии» ННГУ. Научные интересы — анализ данных, машинное обучение, нейронаука.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр-кт Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: lebedev_rf_unn@mail.ru



Казанцев Виктор Борисович — родился в 1973 году. Окончил радиофизический факультет ННГУ. Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005). Заведующий кафедрой нейротехнологий биологического факультета ННГУ (с 2005), профессор университета Иннополис (Казань), заведующий лабораторией нейромоделирования НИИ нейронаук СамГМУ (Самара). Область научных интересов: нейронаука, математические модели нейронов и нейронных сетей, нейрогибридные и нейроморфные системы, нейроинтерфейсы, нейрон-глиальные взаимодействия, колебания и волны в нейродинамике. Имеет более 150 научных публикаций в российских и зарубежных реферируемых изданиях. Автор нескольких глав в книгах и монографиях, множества патентов и учебно-методических разработок. Под его руководством защищено 6 кандидатских диссертаций. Руководитель ведущей научной школы «Нелинейная динамика сетевых нейросистем: фундаментальные аспекты и приложения» в рамках гранта Президента РФ 2020–2021.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр-кт Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: kazantsev@neuro.nnov.ru
ORCID: 0000-0002-2881-6648
AuthorID (eLibrary.Ru): 29851



Стасенко Сергей Викторович — родился в 1988 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. Кандидат физико-математических наук (2017). Доцент кафедры нейротехнологий ННГУ. Область научных интересов: математическая биофизика, математическое моделирование живых систем, моделирование нейрон-астроцитарного и нейрон-ВКМ взаимодействий, спайковые нейронные сети и анализ данных.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр-кт Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: stasenko@neuro.nnov.ru
ORCID: 0000-0002-3032-5469
AuthorID (eLibrary.Ru): 655311



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003096
EDN: QZDYAI

Релейная модель замирающего нейрона*

В. К. Зеленова

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия
E-mail: ✉ verzelenowa12@gmail.com

Поступила в редакцию 31.08.2023, принята к публикации 17.01.2024,
опубликована онлайн 19.02.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Данное исследование является продолжением работы М. М. Преображенской «Relay System of Differential Equations with Delay as a Perceptron Model», идея которой заключалась в объединении подходов, связанных с искусственными нейронными сетями и моделированием биологических нейронов с использованием дифференциальных уравнений с запаздыванием. В ней была предложена модель одного нейрона, которая допускает существование режимов специального вида, называемых «стареющим» и «умирающим» поведением нейрона. В работе была найдена некоторая область параметров, при которых существует режим «умирающего» нейрона и численно показано существование режима «стареющего» нейрона. **Цель.** Объединим понятия «стареющего» и «умирающего» нейрона термином «замирающий» нейрон. Для него аналитически построим решение и найдем область параметров его существования и устойчивости, что будет являться расширением результатов опорной статьи. **Методы.** Для исследования данной модели рассматривается вспомогательное уравнение, полученное в результате экспоненциальной замены в исходном. Далее используется метод шагов интегрирования дифференциального уравнения с запаздыванием и введение дополнительных функций. **Результаты.** Построено решение вида «замирающего» нейрона исходной модели, описана область параметров для существования и устойчивости данного решения. **Заключение.** Для модели, предложенной М. М. Преображенской, получено расширение результатов для решений специального вида.

Ключевые слова: феноменологическая модель нейрона, дифференциальное уравнение с запаздыванием, релейное уравнение, метод шагов, область параметров, устойчивость.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2023-948).

Для цитирования: Зеленова В. К. Релейная модель замирающего нейрона // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 268–284. DOI: 10.18500/0869-6632-003096. EDN: QZDYAI

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023».

Relay model of a fading neuron*

V. K. Zelenova

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia

E-mail: ✉ verzelenowa12@gmail.com

Received 31.08.2023, accepted 17.01.2024, available online 19.02.2024,

published 29.03.2024

Abstract. This study is a continuation of M. M. Preobrazhenskaya's work "Relay System of Differential Equations with Delay as a Perceptron Model", which aimed to combine approaches related to artificial neural networks and modeling biological neurons using differential equations with delay. The model of a single neuron was proposed, which allows for the existence of special modes called "aging" and "dying" behavior of the neuron. The study found a certain range of parameters where the "dying" mode of the neuron exists and numerically demonstrated the existence of the "aging" mode. *Purpose.* We will unify the concepts of "aging" and "dying" neurons into the term "freezing" neuron. For this neuron, we will analytically construct a solution and find the range of parameters for its existence and stability, which will extend the results of the reference article. *Methods.* To study this model, an auxiliary equation obtained by exponential substitution in the original equation is considered. Then, the method of step integration of a differential equation with delay and the introduction of additional functions are used. *Results.* A solution of the "freezing" neuron type for the original model is constructed, and the range of parameters for the existence and stability of this solution is described. *Conclusion.* The study obtained an extension of results for solutions of a special type in the model proposed by M. M. Preobrazhenskaya.

Keywords: phenomenological model of a neuron, differential equation with delay, relay equation, step method, parameter range, stability.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on provision of subsidy from the federal budget No. 075-02-2023-948).

For citation: Zelenova VK. Relay model of a fading neuron. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):268–284. DOI: 10.18500/0869-6632-003096

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Данное исследование является продолжением работы [1], идея которой заключалась в объединении подходов, связанных с искусственными нейронными сетями и моделированием биологических нейронов с использованием дифференциальных уравнений.

В настоящее время нейромоделирование является востребованной задачей и представляет большой интерес в науке. Выбор удобной, биологически правдоподобной модели нейрона составляет определенную сложность. В связи с этим активно развиваются феноменологические модели, более или менее точно отражающие его динамику, но достаточно простые для аналитического или численного исследования. Более подробно о построении и изучении моделей нейрона с помощью дифференциальных уравнений с запаздыванием написано в [2].

В статье [1] была изучена феноменологическая модель нейронной сети в виде перцептрона, которая представляет собой систему дифференциально-разностных уравнений, где неизвестные функции описывают изменения нормированных мембранных потенциалов нейронов с течением времени. В модели участвуют три типа нейронов: сенсорные, ассоциативные и реагирующие.

*The paper presents materials of a talk given at the conference "Nonlinear days in Saratov for young scientists – 2023".

Для реагирующего нейрона предложена модель

$$\dot{R} = \lambda \left[\mathcal{F}(R(t-h)) + \mathcal{H}(X_*(t)) \right] R(t). \quad (1)$$

Здесь $R(t)$ — нормированный мембранный потенциал, $\lambda > 0$ — скорость электрических процессов в нервной клетке, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ — пороговые функции,

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} 1, & 0 < u \leq 1, \\ -\tilde{\alpha}, & u > 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(u) = \begin{cases} -\tilde{\eta}, & 0 < u \leq \theta, \\ \tilde{\xi}, & u > \theta, \end{cases}$$

$X_*(t) = e^{\lambda x_*(t)}$, $x_*(t)$ — периодическая функция с периодом T_* , в концах периода и в некоторой точке t_* принимающая нулевое значение, до точки t_* на периоде имеющая положительные значения, а после t_* — отрицательные значения до конца периода:

$$x_*(t) \begin{cases} = 0, & t = 0, \\ > 0, & 0 < t < t_*, \\ = 0, & t = t_*, \\ < 0, & t_* < t < T_*, \end{cases}$$

параметры $\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\alpha}, \theta$ — положительные, $h > 0$ — запаздывание.

Уравнение (1) — это модификация обобщенного уравнения Хатчинсона [3]

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u, \quad (2)$$

предложенного в статье [4]. Здесь $u = u(t) \geq 0$, $\lambda \gg 1$, функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на полуоси $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ и такая, что $f(0) = 1$, $f(x) \rightarrow -\tilde{\alpha}$ при $x \rightarrow +\infty$. В данной статье для уравнения (2) доказано, что при большом параметре λ уравнение имеет асимптотически орбитально устойчивый релаксационный цикл $u_*(t, \lambda) > 0$ периода $\tilde{T}(\lambda)$, удовлетворяющий предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{T}(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq \tilde{T}(\lambda)} |\tilde{x}(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где $T_0 = (1 + \tilde{\alpha})t_0$, $t_0 = 1 + 1/\tilde{\alpha}$, $\tilde{x}(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln u_*(t, \lambda)$, а T_0 -периодическая функция $x_0(t)$ задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 1 - \tilde{\alpha}(t-1), & t \in [1, t_0 + 1], \\ t - T_0, & t \in [t_0 + 1, T_0], \end{cases}$$

$$x_0(t + T_0) \equiv x_0(t).$$

В настоящее время уравнение (2) лежит в основе ряда феноменологических нейромоделей.

В работе [1] для уравнения (1) доказано существование решений специального вида: на некотором начальном промежутке существует любое наперед заданное количество одинаково высоких всплесков, после которых решение сразу переходит в периодическое с малыми колебаниями. Здесь и далее под термином «высокие всплески» будем понимать значения функции $R(t)$ порядка e^λ , под термином «малые колебания» — порядка $e^{-\lambda}$. Такой нейрон назван «умирающим».

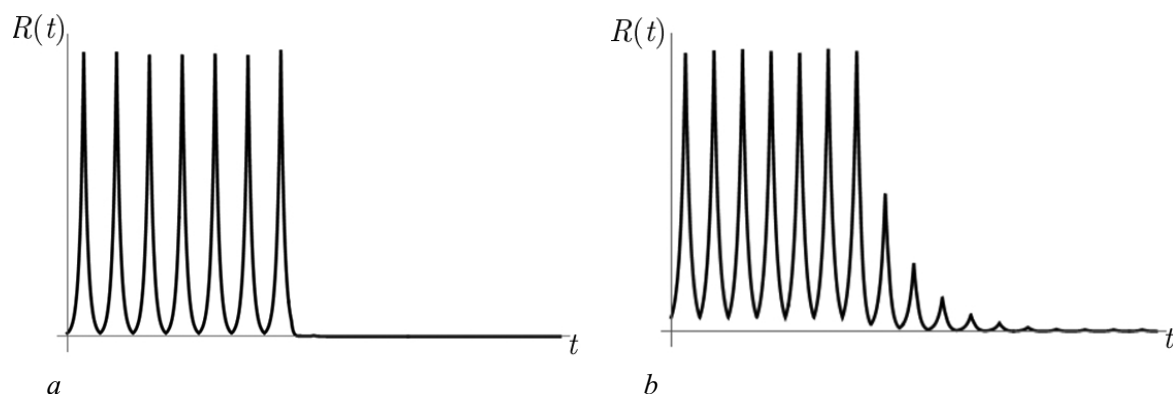


Рис. 1. Схематичное изображение «умирающего» (a) и «стареющего» (b) нейронов соответственно

Fig. 1. Schematic representation of «dying» (a) and «aging» (b) neurons, respectively

Также численно было показано существование решений, где после начального промежутка с одинаково высокими всплесками решение к малым колебаниям переходит постепенно, всплески некоторое время уменьшают свою амплитуду. Такой нейрон назван «стареющим».

В настоящей работе получено расширение данных результатов, а именно аналитически показано существование и устойчивость решения и найдена область параметров, при которых решение от высоких периодических всплесков переходит к малым колебаниям сразу или постепенно с уменьшением амплитуды, что объединяет виды поведения «стареющего» и «умирающего» нейрона (рис. 1). Данное обобщение назовем «замирающим» нейроном, где под термином «замирание» будем иметь ввиду переход к малым колебаниям.

1. Постановка задачи

Для уравнения (1) докажем существование и устойчивость режимов специального вида (рис. 2): решений, обладающих любым наперед заданным количеством одинаково высоких всплесков, после которых происходит постепенное затухание всплесков и устанавливаются колебания с малой амплитудой.

Для этого в уравнении (1) сделаем экспоненциальную подстановку $R(t) = e^{\lambda r(t)}$. Получим релейное уравнение

$$\dot{r} = F(r(t-h)) + H(x_*(t)), \quad (3)$$

$$F(x) = \mathcal{F}(e^{\lambda x}) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ -\tilde{\alpha}, & x > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$H(x) = \mathcal{H}(e^{\lambda x}) = \begin{cases} -\tilde{\eta}, & x \leq 0, \\ \tilde{\xi}, & x > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение (3) является центральным объектом исследования данной работы.

Для уравнения (3) режим специального вида соответствует существованию следующего решения (рис. 3): периодического с положительными и отрицательными значениями на промежутке до некоторой точки (см. I на рис. 3), после чего происходит уменьшение положительных значений и длин отрезков положительности (см. II на рис. 3), и с некоторого момента устанавливается периодическое решение с только отрицательными значениями (см. III на рис. 3).

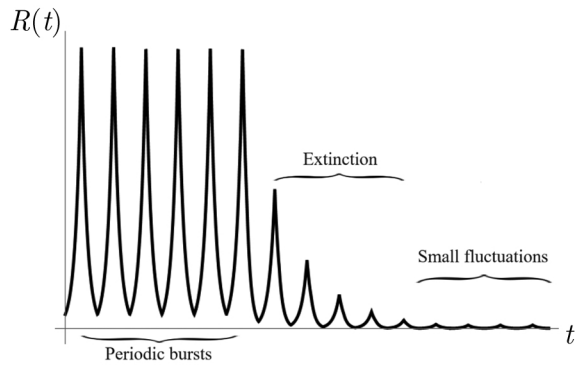


Рис. 2. Схематичное изображение специального вида функции $R(t)$

Fig. 2. Schematic representation of a special type of function $R(t)$

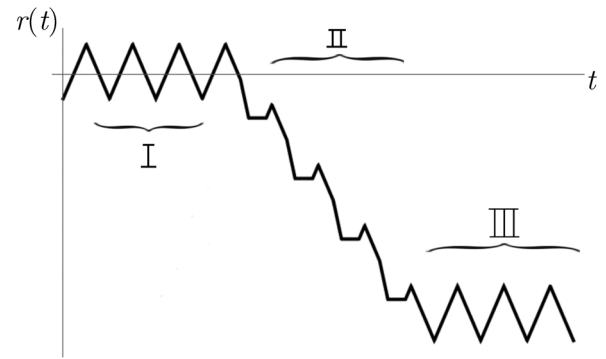


Рис. 3. Схематичное изображение специального вида функции $r(t)$

Fig. 3. Schematic representation of a special type of function $r(t)$

Введем множество начальных функций

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(t) \in C[-h, 0], \varphi(t) < 0, \varphi(0) = -d\}, \quad (6)$$

где d — положительный параметр, ограничения на который будут уточнены в дальнейшем.

Выполним переобозначение параметров для большего удобства в дальнейших вычислениях:

$$\alpha := 1 + \tilde{\alpha}, \quad \xi := 1 + \tilde{\xi}, \quad \eta := 1 - \tilde{\eta}.$$

2. Результат

Теорема 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует область параметров α, ξ, η, h

$$nT_* \leq h < (n+1)T_*, \quad (7)$$

$$\xi > 1, \quad \eta = \frac{-\xi t_*}{T_* - t_*}, \quad \alpha > \max \left\{ \frac{\xi t_*}{nT_*}, 1 \right\}, \quad (8)$$

такая, что уравнение (3) с начальной функцией из множества S при

$$0 < d < \xi t_* \quad (9)$$

имеет устойчивое решение следующего вида.

1. На отрезке $[0, h + \frac{d}{\xi}]$ совпадающее с T_* -периодической функцией

$$r^{(1)}(t) = \begin{cases} \xi t - d, & 0 < t < t_*, \\ \eta(t - t_*) + \xi t_* - d, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (10)$$

$$r^{(1)}(t + T_*) = r^{(1)}(t),$$

помещающей на этом промежутке n полных периодов, причем на периоде u данной функции есть положительные и отрицательные значения.

2. На отрезке $[h + \frac{d}{\xi}, h - \frac{\xi t_* - d}{\eta} + t_* + (n-1)T_*]$ совпадающее с функцией

$$r^{(2)}(t) = \begin{cases} r^{(1)}(t) - \alpha t + c_{k_1+}, & h + \frac{d}{\xi} + k_1 T_* \leq t \leq h - \frac{\xi t_* - d}{\eta} + t_* + k_1 T_*, \\ r^{(1)}(t) + c_{k_2-}, & h - \frac{\xi t_* - d}{\eta} + t_* + k_2 T_* \leq t \leq h + \frac{d}{\xi} + (k_2 + 1)T_*, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$c_{k_1+} = k_1 \frac{\alpha(\xi - \eta)}{\eta \xi} (\xi t_* - d) + \alpha(h + \frac{d}{\xi} + k_1 T_*), \quad (12)$$

$$c_{k_2-} = (k_2 + 1) \frac{\alpha(\xi - \eta)}{\eta \xi} (\xi t_* - d), \quad (13)$$

$k_1 = 0, 1, \dots, n-1$, $k_2 = 0, 1, \dots, n-2$.

Причем с некоторого момента $\tilde{t} \in [h + \frac{d}{\xi}, h - \frac{\xi t_* - d}{\eta} + t_* + (n-1)T_*]$ все значения функции $r^{(2)}(t)$ становятся отрицательными.

На отрезке $[h - \frac{\xi t_* - d}{\eta} + t_* + (n-1)T_*, h + \tilde{t}]$ продолжается решение типа предыдущего пункта

$$r^{(2)}(t) = \begin{cases} r^{(1)}(t) - \alpha t + v_{i+}, & a_i \leq t \leq b_i, \\ r^{(1)}(t) + v_{i-}, & b_i \leq t \leq a_{i+1}, \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \dots, l$, $l < n$, $v_{i-} \leq c_{(n-2)-}$ и $v_{i+} \leq c_{(n-1)+}$ — некоторые константы, $h - \frac{\xi t_* - d}{\eta} + t_* + (n-1)T_* < a_i, b_i < \tilde{t}$.

3. С момента $\tilde{t} + h$ решение совпадает с функцией

$$r^{(3)}(t) = \begin{cases} \xi t - d - \tilde{\Delta}, & 0 < t < t_*, \\ \eta(t - t_*) + \xi t_* - d - \tilde{\Delta}, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (14)$$

$$r^{(3)}(t + T_*) = r^{(3)}(t),$$

где $\tilde{\Delta} > \xi t_* - d$. Решение совпадает с T_* -периодической функцией с только отрицательными значениями на периоде.

Отметим, что решение, описанное в теореме 1, совпадает с решением, соответствующим решению специального вида уравнения (3). Конкретнее, функция $r^{(1)}(t)$ соответствует первой части — периодическому решению с положительными и отрицательными значениями на промежутке до некоторой точки (см. I на рис. 3). Функция $r^{(2)}(t)$ соответствует второй части решения, где происходит уменьшение положительных значений и длин отрезков положительности (см. II на рис. 3). Функция $r^{(3)}(t)$ соответствует третьей части, на которой устанавливается периодическое решение с только отрицательными значениями (см. III на рис. 3).

Теорема 2 (Следствие теоремы 1). Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует область параметров α, ξ, η, h , определенная в теореме 1 такая, что модель (1) имеет устойчивые режимы типа «замирающего» нейрона.

Перейдем к доказательству теорем.

3. Исследование уравнения (3)

Будем строить решение уравнения (3), соответствующее решению специального вида уравнения (1), описанное во Введении. Ограничения на параметры будем формировать во время построения решения. Для удобства разобьем построение функции $r(t)$ на этапы. Построение периодической части с положительными и отрицательными значениями назовем 1 этапом, доказательство наличия переходного процесса — 2 этапом, установление периодической части, имеющей только отрицательные значения — 3 этапом.

Выберем натуральное число n , соответствующее количеству всплесков на 1 этапе. Запоздывание $h > 0$ выберем таким образом: $nT_* \leq h < (n+1)T_*$, что соответствует формуле (7).

Функции $F(x)$ и $H(x)$, заданные равенствами (4) и (5), кусочно-постоянные, следовательно, функция $r(t)$ будет кусочно-линейной. Комбинаций пар значений функций $F(x)$ и $H(x)$ всего 4, рассмотрим все варианты решения.

3.1. Типы решения уравнения (3) на отрезке. Каждая из функций $F(x)$ и $H(x)$ принимает всего два значения 1 и $-\alpha + 1$, $\xi - 1$ и $\eta - 1$ соответственно. Рассмотрим некоторый отрезок $[t_1, t_2]$ на положительной полуоси, на котором правая часть уравнения (3) постоянна. Типов таких отрезков всего 4. Найдем значения функции $r(t)$ на данном отрезке в общем виде, обозначив значение функции $F(x)$ за $\tilde{f}$, а значение функции $H(x)$ за $\tilde{h}$. Для этого решим задачу Коши на данном отрезке, предположив, что начальное значение известно, обозначим его $r_1 = r(t_1)$. Тогда задача Коши выглядит так:

$$\dot{r} = \tilde{f} + \tilde{h}, \quad r(t_1) = r_1.$$

Следовательно, решение на отрезке $[t_1, t_2]$ с начальным значением r_1 будет иметь вид

$$r(t) = (\tilde{f} + \tilde{h})(t - t_1) + r_1. \quad (15)$$

Теперь определим каждый из четырех типов отрезков в зависимости от конкретных значений функций $F(r(t-h))$ и $H(x_*(t))$ на отрезке $[t_1, t_2]$.

Первый тип отрезка соответствует предположению

$$\begin{cases} [t_1, t_2] \in (kT_*, kT_* + t_*), & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ r(t) \leq 0, & t \in [t_1 - h, t_2 - h], \end{cases} \quad (16)$$

при нем $F(r(t-h)) = 1$, $H(x_*(t)) = \xi - 1$, следовательно, решение будет иметь вид

$$r(t) = \xi(t - t_1) + r_1. \quad (17)$$

Аналогично *второй тип* отрезка соответствует предположению

$$\begin{cases} [t_1, t_2] \in [kT_* + t_*, (k+1)T_*], & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ r(t) \leq 0, & t \in [t_1 - h, t_2 - h]. \end{cases} \quad (18)$$

Тогда $F(r(t-h)) = 1$, $H(x_*(t)) = \eta - 1$, следовательно, решение будет иметь вид

$$r(t) = \eta(t - t_1) + r_1. \quad (19)$$

Третий тип отрезка также соответствует предположению

$$\begin{cases} [t_1, t_2] \in (kT_*, kT_* + t_*), & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ r(t) > 0, & t \in [t_1 - h, t_2 - h], \end{cases} \quad (20)$$

при котором $F(r(t-h)) = -\alpha + 1$, $H(x_*(t)) = \xi - 1$, следовательно, решение будет иметь вид

$$r(t) = (-\alpha + \xi)(t - t_1) + r_1. \quad (21)$$

Предположение для *четвертого типа* отрезка

$$\begin{cases} [t_1, t_2] \in [kT_* + t_*, (k+1)T_*], & k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ r(t) > 0, & t \in [t_1 - h, t_2 - h]. \end{cases} \quad (22)$$

Тогда $F(r(t-h)) = -\alpha + 1$, $H(x_*(t)) = \eta - 1$, следовательно, решение будет иметь вид

$$r(t) = (\eta - \alpha)(t - t_1) + r_1. \quad (23)$$

3.2. Вспомогательные функции. В данном пункте введем и изучим две вспомогательные функции, связанные с функцией $r(t)$. Рассмотрим функции $r_-(t)$ и $r_+(t)$, такие как

$$\dot{r}_-(t) = 1 + H(x_*(t)), \quad (24)$$

$$\dot{r}_+(t) = -\alpha + 1 + H(x_*(t)). \quad (25)$$

Уравнения (24) и (25) — варианты уравнения (3) с постоянным (1 или $-\alpha + 1$) значением функции $F(r(t-h))$. Для функций $r_-(t)$ и $r_+(t)$ введем начальные условия

$$r_-(0) = -d, \quad r_+(0) = -d.$$

Заметим, что при $t \in (kT_*, kT_* + t_*)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функция $H(x_*(t)) = \xi - 1$. Тогда задачи Коши на данном интервале для уравнений (24) и (25) с начальными значениями, обозначенными a_{1-} и a_{1+} , выглядят соответственно так:

$$\begin{aligned} \dot{r}_- &= \xi, & r_-(kT_*) &= a_{1-}, \\ \dot{r}_+ &= -\alpha + \xi, & r_+(kT_*) &= a_{1+}. \end{aligned}$$

Следовательно, решения здесь будут иметь вид

$$r_-(t) = \xi(t - kT_*) + a_{1-}, \quad r_+(t) = (-\alpha + \xi)(t - kT_*) + a_{1+},$$

которые совпадают соответственно с *первым и третьим типами* решения уравнения (3) при $t_1 = kT_*$, $r_1 = a_{1-}$ и $r_1 = a_{1+}$.

Аналогично при $t \in [kT_* + t_*, (k+1)T_*]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ функция $H(x_*(t)) = \eta - 1$. Значит, задачи Коши на данном отрезке для уравнений (24) и (25) с начальными условиями, обозначенными a_{2-} и a_{2+} соответственно, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{r}_- &= \eta, & r_-(kT_* + t_*) &= a_{2-}, \\ \dot{r}_+ &= \eta - \alpha, & r_+(kT_* + t_*) &= a_{2+}. \end{aligned}$$

Следовательно, решения будут иметь вид

$$r_-(t) = \eta(t - kT_* - t_*) + a_{2-}, \quad r_+(t) = (\eta - \alpha)(t - kT_* - t_*) + a_{2+},$$

которые совпадают со *вторым и четвертым типами* решения уравнения (3) при $t_1 = kT_* + t_*$, $r_1 = a_{2-}$ и $r_1 = a_{2+}$ соответственно.

Замечание 1. Кусочно-линейная функция $r(t)$ на каждом линейном отрезке представима в виде $r(t) = r_*(t) + c$, где символ «*» означает один из возможных индексов «-» или «+», а c — некоторая константа, зависящая от отрезка рассмотрения. Причем символ «*» на некотором отрезке $[t_3, t_4]$ будет нести смысл индекса «-», если $r(t) \leq 0$ при $t \in [t_3 - h, t_4 - h]$, и смысл индекса «+», если $r(t) > 0$ при $t \in [t_3 - h, t_4 - h]$.

Выпишем полные решения уравнений (24) и (25) соответственно

$$r_-(t) = \begin{cases} \xi(t - kT_*) + r_-(kT_*), & kT_* \leq t < kT_* + t_*, \\ \eta(t - kT_* - t_*) + r_-(kT_* + t_*), & kT_* + t_* \leq t \leq (k+1)T_*, \end{cases} \quad (26)$$

$$r_+(t) = \begin{cases} (-\alpha + \xi)(t - kT_*) + r_+(kT_*), & kT_* \leq t < kT_* + t_*, \\ (\eta - \alpha)(t - kT_* - t_*) + r_+(kT_* + t_*), & kT_* + t_* \leq t \leq (k+1)T_*, \end{cases} \quad (27)$$

где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r_-(0) = r_+(0) = -d$.

Изучим, как растет разница значений введенных функций.

Лемма 1. Рассмотрим произвольный отрезок $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ на положительной полуоси. На его концах верно: $r_-(\tilde{t}_2) - r_+(\tilde{t}_2) = \alpha(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1) + r_-(\tilde{t}_1) - r_+(\tilde{t}_1)$.

Доказательство. Вычтем из левой и правой части равенства (24) соответственно левую и правую части равенства (25)

$$\dot{r}_-(t) - \dot{r}_+(t) = 1 + H(x_*(t)) - (-\alpha + 1 + H(x_*(t))) = \alpha,$$

проинтегрируем на отрезке $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$, подставим в полученную функцию значение $t = \tilde{t}_2$ и получим утверждение леммы 1. $\square$

3.3. Построение функции $r(t)$ на 1 этапе. Будем считать, что на отрезке $[-h, 0]$ функция $r(t)$ совпадает с одной из функций множества S , описанного формулой (6). Заметим, что до точки $t = nT_*$ функция $r(t - h)$ совпадает с функцией $\varphi(t - h)$ из начального множества S , так как $nT_* \leq h$. Тогда значения функции $r(t - h) < 0$ при $t \in [0, nT_*]$, и функция $F(r(t - h)) = 1$ при тех же значениях t . Следовательно, с учетом равенства $r(0) = r_-(0) = -d$, функции $r(t)$ и $r_-(t)$ совпадают на промежутке $[0, nT_*]$ и имеют вид (26).

Для достижения специального вида функции $r(t)$, описанного в постановке задачи, необходимо, чтобы на 1 этапе построения выполнялись следующие условия.

1. Периодичность функции $r(t)$ при $t \leq nT_*$. Это условие выполняется при равенстве начальных значений задач Коши на каждом интервале $(kT_*, kT_* + t_*)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Получаем необходимое условие $r(kT_*) = r(0) = -d$, $k = 0, 1, \dots, n$, равенство достижимо при введении ограничения $r(T_*) = -d \Leftrightarrow \eta T_* + (\xi - \eta)t_* = 0 \Leftrightarrow$

$$\eta = \frac{-\xi t_*}{T_* - t_*}. \quad (28)$$

2. Возрастание значений функции $r(t)$ на интервалах $(kT_*, kT_* + t_*)$ и убывание значений на отрезках $[kT_* + t_*, (k+1)T_*]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Данное условие эквивалентно положительности значения коэффициента ξ (выполняется автоматически, так как $\tilde{\xi} = \xi - 1 > 0$) и отрицательному значению коэффициента η , что верно из ограничения (28).
3. Существование положительных и отрицательных значений на периоде. Отрицательные значения мы имеем из условия периодичности функции $r(t)$. Положительные значения должны достигаться в концах отрезков, на которых функция $r(t)$ возрастает. Из второго

условия известно, что это точки $kT_* + t_*$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, также из условия периодичности достаточно, чтобы $r(t_*) > 0 \Leftrightarrow \xi t_* - d > 0$, то есть

$$0 < d < \xi t_*. \quad (29)$$

Таким образом, условия существования функции $r(t)$ специального вида на первом этапе — это (28) и (29), которые соответствуют ограничениям (8) и (9) теоремы 1. Применим ограничение (28) к формуле (26) и получим уточненный вид решения уравнения (24) при $t \geq 0$

$$r_-(t) = \begin{cases} \xi t - d, & 0 \leq t < t_*, \\ \eta(t - t_*) + \xi t_* - d, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (30)$$

$$r_-(t + T_*) = r_-(t),$$

то есть функция $r_-(t)$ T_* -периодическая на всей области определения. Из совпадения функций $r(t)$ и $r_-(t)$ на первом этапе также следует, что функция $r(t)$ при $t \in [0, nT_*]$ имеет вид

$$r(t) = \begin{cases} \xi t - d, & 0 \leq t < t_*, \\ \eta(t - t_*) + \xi t_* - d, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (31)$$

$$r(t + T_*) = r(t).$$

Учитывая вид решения (30) уравнения (24) и применяя лемму 1, получаем уточненный вид решения уравнения (25)

$$r_+(t) = \begin{cases} (-\alpha + \xi)t - d, & 0 \leq t < t_*, \\ (\eta - \alpha)(t - t_*) + (-\alpha + \xi)t_* - d, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (32)$$

$$r_+(t + T_*) = r_+(t) - \alpha T_*.$$

Вспомогательный факт. Для любого $t > 0$ на отрезке $[0, t]$ по лемме 1 верно

$$r_-(t) - r_+(t) = \alpha(t - 0) + r_-(0) - r_+(0) = \alpha t - d - (-d) = \alpha t,$$

отсюда следует, что верны формулы, связывающие функции $r_-(t)$ и $r_+(t)$

$$r_+(t) = r_-(t) - \alpha t, \quad r_-(t) = r_+(t) + \alpha t.$$

3.4. Построение функции $r(t)$ на 2 этапе. В данном пункте рассмотрим изменение поведения функции $r(t)$ на 2 этапе построения. Заметим, что при постоянном значении функции $F(r(t - h)) = 1$ решение уравнения (3) совпадало бы с решением (31) на всей оси, но это неверно, так как функция $F(r(t - h))$ изменяет свое значение на $-\alpha + 1$, если ее аргумент $r(t - h)$ становится положительным. В связи с этим рассмотрим влияние положительнозначных отрезков 1 этапа на построение решения уравнения (3) на 2 этапе. Для этого найдем нули функции $r(t)$ на 1 этапе. Заметим, что при введенных ограничениях (28) и (29) функция $r(t)$ принимает отрицательные значения в точках $t = kT_*$, $k = 0, 1, \dots, n$ и положительные значения в точках $t = t_* + kT_*$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. На интервалах $(kT_*, kT_* + t_*)$ и отрезках $[t_* + kT_*, (k + 1)T_*]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$ функция $r(t)$ линейна, следовательно, на данных интервалах и отрезках будет ровно по одному нулю. Найдем их значения.

Нули функции $r(t)$ на интервалах $(kT_*, kT_* + t_*)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ обозначим $t_k^{(1)}$, найдем их значения, решая уравнения $\xi(t_k^{(1)} - kT_*) - d = 0$, получим

$$t_k^{(1)} = \frac{d}{\xi} + kT_*, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (33)$$

Нули функции $r(t)$ на отрезках $[t_* + kT_*, (k+1)T_*]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ обозначим $t_k^{(2)}$. Их значения найдем, решая уравнения $\eta(t_k^{(2)} - kT_* - t_*) + \xi t_* - d = 0$, получим

$$t_k^{(2)} = \frac{\xi t_* - d}{-\eta} + t_* + kT_*, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (34)$$

Отметим, что все нули функции $r(t)$ на 1 этапе строго упорядочены

$$t_0^{(1)} < t_0^{(2)} < t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < \dots < t_{n-1}^{(1)} < t_{n-1}^{(2)}.$$

На 1 этапе функция $r(t)$ принимает положительные значения на отрезках: $[t_0^{(1)}, t_0^{(2)}]$, $[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}]$, $\dots$, $[t_{n-1}^{(1)}, t_{n-1}^{(2)}]$. Заметим, что $r(t-h) < 0$ при $t < h + t_0^{(1)}$, так как функция $r(t)$ впервые принимает неотрицательное значение в точке $t_0^{(1)}$. Следовательно, до точки $t = h + t_0^{(1)}$ функция $F(r(t-h)) = 1$, значит, решение уравнения (3) совпадает с решением уравнения (24) до данной точки, что соответствует формуле (10) теоремы 1, и верно $r(h + t_0^{(1)}) = r_-(h + t_0^{(1)})$. Будем считать точку $h + t_0^{(1)}$ окончанием первого этапа. На втором этапе $[h + t_0^{(1)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ разобьем все точки на два вида.

1. Точки на отрезках $[h + t_k^{(1)}, h + t_k^{(2)}]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. На них функция $r(t-h) > 0 \Rightarrow F(r(t-h)) = -\alpha + 1$, тогда согласно замечанию из пункта 3.2 верно, что на данных отрезках функция $r(t)$ представима в виде $r(t) = r_+(t) + c_{k+}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, где c_{k+} — некоторые константы.
2. Точки на отрезках $[h + t_k^{(2)}, h + t_{k+1}^{(1)}]$, $k = 1, 2, \dots, n-2$. На данных отрезках функция $r(t-h) \leq 0 \Rightarrow F(r(t-h)) = 1$, тогда аналогично предыдущему случаю здесь верно, что функция $r(t)$ представима в виде $r(t) = r_-(t) + c_{k-}$, $k = 1, 2, \dots, n-2$, где c_{k-} — некоторые константы.

Уточним значения констант c_{k-} и c_{k+} . По показанному выше на $[h + t_0^{(1)}, h + t_0^{(2)}]$ функция $r(t)$ представима в виде $r(t) = r_+(t) + c_{0+}$. При этом известно, что $r(h + t_0^{(1)}) = r_-(h + t_0^{(1)}) = r_+(h + t_0^{(1)}) + \alpha(h + t_0^{(1)})$ (последнее равенство следует из **вспомогательного факта**). Отсюда получаем, что $c_{0+} = \alpha(h + t_0^{(1)})$, функция $r(t) = r_+(t) + \alpha(h + t_0^{(1)})$ и значение в последней точке отрезка $r(h + t_0^{(2)}) = r_+(h + t_0^{(2)}) + \alpha(h + t_0^{(1)})$.

Аналогично на отрезке $[h + t_0^{(2)}, h + t_1^{(1)}]$ верно $r(t) = r_-(t) + c_{0-}$. Тогда с помощью вспомогательного факта получаем $r(h + t_0^{(2)}) = r_+(h + t_0^{(2)}) + (1 + \alpha)(h + t_0^{(1)}) = r_-(h + t_0^{(2)}) - \alpha(t_0^{(2)} - t_0^{(1)})$. Отсюда верно $c_{0-} = -\alpha(t_0^{(2)} - t_0^{(1)})$.

Лемма 2. Для констант c_{k+} и c_{k-} верны формулы $c_{0+} = \alpha(h + t_0^{(1)})$

$$c_{k+} = -\sum_{i=0}^{k-1} \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) + \alpha(h + t_k^{(1)}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (35)$$

$$c_{k-} = -\sum_{i=0}^k \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2. \quad (36)$$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции (ММИ). Базовые утверждения ММИ доказаны выше при $k = 0$. Предположим, что при некотором $k = m < n - 2$ утверждение верно. Тогда на $[h + t_m^{(1)}, h + t_m^{(2)}]$ функция $r(t) = r_+(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) + \alpha(h + t_m^{(1)})$, а на $[h + t_m^{(2)}, h + t_{m+1}^{(1)}]$ верно $r(t) = r_-(t) - \sum_{i=0}^m \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)})$.

Проверим утверждения для $k = m + 1$. По показанному выше на $[h + t_{m+1}^{(1)}, h + t_{m+1}^{(2)}]$ функция $r(t)$ представима в виде $r(t) = r_+(t) + c_{(m+1)+}$. Из предположения индукции и вспомогательного факта верно $r(h + t_{m+1}^{(1)}) = r_-(h + t_{m+1}^{(1)}) + c_{m-} = r_+(h + t_{m+1}^{(1)}) + \alpha(h + t_{m+1}^{(1)}) + c_{m-}$. Отсюда получаем, что $c_{(m+1)+} = \alpha(h + t_{m+1}^{(1)}) + c_{m-} = -\sum_{i=0}^m \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) + \alpha(h + t_{m+1}^{(1)})$ — подтверждает формулу (35) леммы 2. Функция $r(t) = r_+(t) + c_{(m+1)+}$ и значение в последней точке отрезка $r(h + t_{m+1}^{(2)}) = r_+(h + t_{m+1}^{(2)}) + c_{(m+1)+}$.

Аналогично на отрезке $[h + t_{m+1}^{(2)}, h + t_{m+2}^{(1)}]$ верно $r(t) = r_-(t) + c_{(m+1)-}$. Тогда с помощью предыдущего шага и вспомогательного факта получаем $r(h + t_{m+1}^{(2)}) = r_+(h + t_{m+1}^{(2)}) + c_{(m+1)+} = r_-(h + t_{m+1}^{(2)}) - \alpha(h + t_{m+1}^{(2)}) + c_{(m+1)+}$. Отсюда верно $c_{(m+1)-} = -\sum_{i=0}^m \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}) + \alpha(h + t_{m+1}^{(1)}) - \alpha(h + t_{m+1}^{(2)}) = -\sum_{i=0}^{m+1} \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)})$ — подтверждает формулу (36) леммы 2. Утверждение леммы 2 доказано. Отметим, что формулы (35) и (36) подтверждают формулы (12) и (13) теоремы 1. $\square$

Таким образом, получаем вид решения уравнения (3) на 2 этапе при $t \in [h + t_0^{(1)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ (см. рис. 4)

$$r(t) = \begin{cases} r_+(t) + c_{k+}, & h + t_k^{(1)} \leq t \leq h + t_k^{(2)}, \\ r_-(t) + c_{k-}, & h + t_k^{(2)} \leq t \leq h + t_{k+1}^{(1)}. \end{cases} \quad (37)$$

Рассмотрим значение функции $r(t)$ в последней точке второго этапа

$$r(h + t_{n-1}^{(2)}) = r_+(h + t_{n-1}^{(2)}) + c_{(n-1)+} = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}).$$

Получаем общую формулу для разности значений функции $r_-(t)$ и $r(t)$ в последней точке второго этапа, обозначим ее Δ :

$$\Delta = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - r(h + t_{n-1}^{(2)}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(t_i^{(2)} - t_i^{(1)}). \quad (38)$$

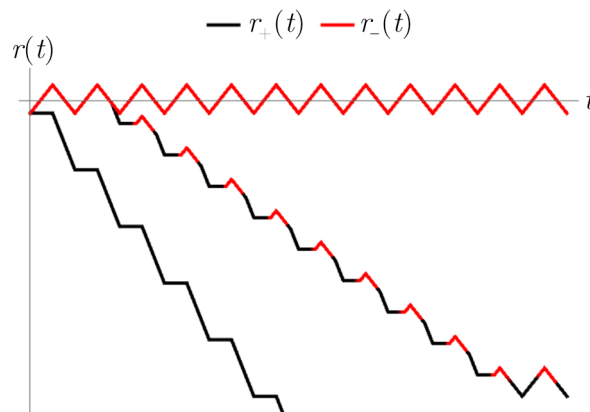


Рис. 4. Схематичное изображение функций $r_-(t)$, $r(t)$, $r_+(t)$ на 2 этапе (цвет онлайн)

Fig. 4. Schematic representation of the functions $r_-(t)$, $r(t)$, $r_+(t)$ at stage 2 (color online)

Подставим в формулу (38) значения нулей первого этапа (33) и (34) функции $r(t)$ и значение параметра η из (28):

$$\Delta = n \frac{\alpha(\eta - \xi)}{\eta \xi} (\xi t_* - d) = n \frac{\alpha T_*}{\xi t_*} (\xi t_* - d) = \gamma (\xi t_* - d), \quad \text{где } \gamma = n \frac{\alpha T_*}{\xi t_*}. \quad (39)$$

3.5. Построение функции $r(t)$ на 3 этапе. На 3 этапе решения необходимо получить отрицательные значения функции $r(t)$ при всех t . С помощью **вспомогательного факта** и формулы (37) выразим функцию $r(t)$ только через функцию $r_-(t)$

$$r(t) = \begin{cases} r_-(t) - \alpha t + c_{k_1+}, & h + t_{k_1}^{(1)} \leq t \leq h + t_{k_1}^{(2)}, \\ r_-(t) + c_{k_2-}, & h + t_{k_2}^{(2)} \leq t \leq h + t_{k_2+1}^{(1)}, \end{cases}$$

$k_1 = 0, 1, \dots, n-1$, $k_2 = 0, 1, \dots, n-2$. Применим к полученному выражению лемму 2 для коэффициентов c_{k+} и c_{k-} , получим

$$r(t) = \begin{cases} r_-(t) - \alpha(t - h - t_0^{(1)}), & h + t_0^{(1)} \leq t \leq h + t_0^{(2)}, \\ r_-(t) - \alpha(t - h - t_{k_3}^{(1)}) + c_{(k_3-1)-}, & h + t_{k_3}^{(1)} \leq t \leq h + t_{k_3}^{(2)}, \\ r_-(t) + c_{k_4-}, & h + t_{k_4}^{(2)} \leq t \leq h + t_{k_4+1}^{(1)}, \end{cases}$$

здесь $k_3 = 1, \dots, n-1$, $k_4 = 0, 1, \dots, n-2$, причем все $c_{k_i-} < 0$ по формулам (36), $i = 1, 2, 3, 4$. Из предыдущего пункта также известно, что $r(h + t_{n-1}^{(2)}) = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - \Delta$. Введем ограничения, при которых $r(h + t_{n-1}^{(2)}) < 0$. Для этого нужно, чтобы $r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - \Delta < 0$. Максимальное значение функции $r_-(t)$ достигается в точках $kT_* + t_*$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и равно $r_{\max-} = \xi t_* - d$. Так как мы не знаем точного расположения точки $h + t_{n-1}^{(2)}$ относительно периода функции $r_-(t)$, то достаточное условие отрицательности значения в этой точке — отрицательность значения в максимальной точке функции: $r_{\max-} - \Delta < 0$. Подставим в данное неравенство значения параметров $r_{\max-}$ из написанного выше и Δ из равенства (39) и сделаем некоторые преобразования

$$\xi t_* - d - n \frac{\alpha T_*}{\xi t_*} (\xi t_* - d) < 0,$$

получаем ограничение на параметр α :

$$\alpha > \frac{\xi t_*}{n T_*}. \quad (40)$$

Отметим, что при достаточно больших n это условие выполняется автоматически, так как $\alpha = \tilde{\alpha} + 1 > 1$. Данное условие соответствует ограничениям (8) теоремы 1.

Лемма 3. При выполнении ограничения (40) функция $r(t) < 0$ при всех $t > h + t_{n-1}^{(2)}$.

Доказательство. Пусть для всех $t \in [t_{n-1}^{(2)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t) \leq 0$. Тогда на 3 этапе при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t - h) \leq 0$ и $F(r(t - h)) = 1$, из чего следует, что функцию $r(t)$ можно представить в виде $r(t) = r_-(t) - c_-$, где c_- — некоторая константа. Из пункта 3.4 известно, что $r(h + t_{n-1}^{(2)}) = r_-(h + t_{n-1}^{(2)}) - \Delta$, следовательно, при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t) = r_-(t) - \Delta$. По введенному условию леммы 3 максимальное значение функции $r_-(t)$ меньше Δ , следовательно, при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t) < 0$. Тогда заметим, что все рассуждения для отрезка $[t_{n-1}^{(2)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ теперь можно повторить для отрезка $[h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ и далее для каждого отрезка $[kh + t_{n-1}^{(2)}, (k+1)h + t_{n-1}^{(2)}]$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, функция $r(t) < 0$ при всех $t > h + t_{n-1}^{(2)}$.

Пусть теперь на отрезке $[t_{n-1}^{(2)}, h + t_{n-1}^{(2)}]$ существуют l пар ($l \in \mathbb{N}$, $l < n$) таких упорядоченных точек $\{a_i, b_i\}$, $i = 1, \dots, l$, что при $t \in (a_i, b_i)$ функция $r(t) > 0$ (данные точки существуют обязательно парами на данном отрезке, так как значения в его концах меньше или равны нулю). Тогда аналогично пункту 3.4 и лемме 2 получаем формулу для $r(t)$ при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$

$$r(t) = \begin{cases} r_-(t) - \Delta, & h + t_{n-1}^{(2)} \leq t \leq h + a_1, \\ r_-(t) - \alpha(t - h - a_v) - \Delta - \sum_{i=1}^{v-1} \alpha(b_i - a_i), & h + a_v \leq t \leq h + b_v, \\ r_-(t) - \Delta - \sum_{i=1}^w \alpha(b_i - a_i), & h + b_w \leq t \leq h + a_{w+1}, \\ r_-(t) - \Delta - \sum_{i=1}^l \alpha(b_i - a_i), & h + b_l \leq t \leq 2h + t_{n-1}^{(2)}, \end{cases} \quad (41)$$

здесь $v = 1, \dots, l$, $w = 1, \dots, l - 1$. Следовательно, при $t \in [h + t_{n-1}^{(2)}, 2h + t_{n-1}^{(2)}]$ функция $r(t) \leq r_-(t) - \Delta < 0$. Значит, с данным отрезком можно провести рассуждения первого случая (на нем нет положительных значений функции $r(t)$) и далее для каждого отрезка $[kh + t_{n-1}^{(2)}, (k+1)h + t_{n-1}^{(2)}]$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, функция $r(t) < 0$ при всех $t > h + t_{n-1}^{(2)}$. $\square$

Следствие Леммы 3. При ограничении (40) функция $r(t)$ при $t > 2h + t_{n-1}^{(2)}$ является T_* -периодической функцией, имеет только отрицательные значения и описывается формулой

$$r(t) = r_-(t) - \Delta - \sum_{i=1}^l \alpha(b_i - a_i), \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad l < n, \quad (42)$$

Доказательство. По лемме 3 верно, что при $t > h + t_{n-1}^{(2)}$ функция $r(t) < 0$, значит, при $t > 2h + t_{n-1}^{(2)}$ функция $r(t - h) < 0$ и функция $F(r(t - h)) = 1$. Тогда при $t > 2h + t_{n-1}^{(2)}$ функцию $r(t)$ можно представить в виде $r(t) = r_-(t) + \text{const}$. Из формулы (42) получаем, что $r(2h + t_{n-1}^{(2)}) = r_-(2h + t_{n-1}^{(2)}) - \Delta - \sum_{i=1}^l \alpha(b_i - a_i)$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l < n$ (если $l = 0$, то последнего слагаемого просто нет). Тогда при $t > 2h + t_{n-1}^{(2)}$ функция $r(t) = r_-(t) - \Delta - \sum_{i=1}^l \alpha(b_i - a_i)$, где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l < n$. Причем функция $r_-(t)$ является T_* -периодической функцией, а при добавлении константы $-\Delta$ является отрицательнозначной. Результат гарантирует справедливость формулы (14) теоремы 1. $\square$

Таким образом, функция специального вида $r(t)$ поэтапно построена.

1. На первом этапе мы получили формулу для функции $r(t)$ (31). На нем она является T_* -периодической функцией с положительными и отрицательными значениями.
2. На втором этапе получили формулу (37) для функции $r(t)$. На нем происходит переходный процесс.
3. На третьем этапе получили формулы (41) и (42) для функции $r(t)$. На нем по лемме 3 и следствию из нее функция $r(t)$ переходит в периодический режим с только отрицательными значениями.

3.6. Исследование решения уравнения (3) на устойчивость. Докажем устойчивость построенного решения уравнения (3). Пусть $\|\cdot\|$ — стандартная норма в $C[-h, 0]$, то есть

$$\|r(t)\| = \max_{t \in [-h, 0]} |r(t)|.$$

Будем следовать определению устойчивости для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом из работы [5]. Выберем $\varepsilon > 0$ и покажем существование такого $\delta(\varepsilon) > 0$, что для начальных функций $\psi(t) \in C[-h, 0]$ и $\varphi(t) \in S$ неравенство $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \delta(\varepsilon)$ влечет за собой неравенство $\|r_\psi(t) - r_\varphi(t)\| < \varepsilon$ для построенных по ним решений при $t > 0$. Будем искать $\delta(\varepsilon)$ в виде $M\varepsilon$, то есть докажем существование константы M такой, что необходимая

$\delta(\varepsilon) = M\varepsilon$. Зафиксируем $\varphi(t) \in S$, обозначим возмущение этой начальной функции через $\theta(t) = \psi(t) - \varphi(t)$, будем считать, что $\|\theta(t)\| < M\varepsilon$ и константа $M > 0$ в нашем распоряжении. Обозначим значение функции $\theta(t)$ в точке ноль через $\tilde{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \theta(0)$. Из предполагаемой малости нормы добавки $\theta(t)$ следует, что введенная константа $\tilde{\theta}$ удовлетворяет неравенству $|\tilde{\theta}| < M\varepsilon$.

Рассмотрим решение с начальной функцией $\psi(t) = \varphi(t) + \theta(t)$. Мы интересуемся малыми ε , поэтому будем считать, что выполняется неравенство $\psi(t) < 0$ на $[-h, 0]$ (так как $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \delta(\varepsilon)$, то δ можно выбрать из условия $\delta < \min_{t \in [-h, 0]} |\varphi(t)|$). Тогда функция $\psi(t)$ отличается от функций из множества S только «подправленным» значением в точке ноль: $\psi(0) = -d + \tilde{\theta}$. Следовательно, решение уравнения (3) с начальной функцией $\psi(t)$ отличается от решения с начальной функцией из множества S только заменой параметра $-d$ на $-d + \tilde{\theta}$. Тогда на первом этапе

$$r_\psi(t) = \begin{cases} \xi t - d + \theta, & 0 < t < t_*, \\ \eta(t - t_*) + \xi t_* - d + \theta, & t_* \leq t \leq T_*, \end{cases} \quad (43)$$

$$r_\psi(t + T_*) = r_\psi(t).$$

Выполнение $\xi t - d + \theta > 0$ следует из ограничения (29) и малости ε . Отметим также, что из формул (31) и (43) верно $|r_\varphi(t) - r_\psi(t)| = |\tilde{\theta}|$ для всех $t \in [0, nT_*]$, следовательно, $\|r_\psi(t) - r_\varphi(t)\| = |\tilde{\theta}|$ на первом этапе.

Для оценки нормы разности значений функций $r_\psi(t)$ и $r_\varphi(t)$ на втором этапе необходимо получить значение Δ_ψ . Проведем рассуждения аналогичные пункту 3.5 и получим

$$\Delta_\psi = \gamma(\xi t_* - d + \tilde{\theta}).$$

Отдельно подчеркнем, что ограничение (40) не зависит от параметра d , поэтому его выполнение остается верным. Разница значений функций $r_\psi(t)$ и $r_\varphi(t)$ растет с увеличением параметра t на 2 этапе (по построению), а значит, достигает максимума в конечных точках этапа, то есть

$$\|r_\varphi(t) - r_\psi(t)\| = \max_{t \in [nT_*, h+t_{n-1}^{(2)}]} |r_\varphi(t) - r_\psi(t)| \leq |\theta + \Delta - \Delta_\psi| \leq (1 + \gamma)|\tilde{\theta}|.$$

Теперь рассмотрим третий этап. На нем все значения строго отрицательны. Заметим, что с момента установления периодического решения с только отрицательными значениями у обеих функций $r_\psi(t)$ и $r_\varphi(t)$ разница их значений останется постоянной. До этого момента влияние положительнозначных отрезков из второго этапа может быть не больше n штук, причем длины строго меньше длин отрезков с положительными значениями функции $r(t)$ первого этапа. Следовательно,

$$\|r_\varphi(t) - r_\psi(t)\| = \max_{t \in [h+t_{n-1}^{(2)}, 3h]} |r_\varphi(t) - r_\psi(t)| < (1 + 2\gamma)|\tilde{\theta}|.$$

Очевидно, что

$$(1 + 2\gamma)|\tilde{\theta}| > (1 + \gamma)|\tilde{\theta}| > |\tilde{\theta}|,$$

откуда следует, что константу M нужно выбирать исходя из ограничений на норму разности функций $r_\psi(t)$ и $r_\varphi(t)$ на третьем этапе. Значит, необходимо

$$(1 + 2\gamma)|\tilde{\theta}| < (1 + 2\gamma)M\varepsilon < \varepsilon,$$

тогда константу M нужно выбрать из условия

$$1 + 2\gamma \leq \frac{1}{M},$$

например, $M = \frac{1}{1 + 2\gamma}$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) = M\varepsilon$ такая, что выполнено условие устойчивости решения уравнения (3). Следовательно, теорема 1 полностью доказана.

3.7. Численные результаты. В данном пункте приведем иллюстрации решений, полученных численно в приложении «WOLFRAM MATHEMATICA» при конкретных параметрах, удовлетворяющих найденным ограничениям, указанных в теореме 1.

Например, графики функций $r(t)$ и $R(t)$ при $d = 2$, $\tilde{\alpha} = 0.06$, $\tilde{\xi} = 2$, $t_* = 1$, $T_* = 2$, $n = 6$, $h = 12.2$, $\lambda = 1$ на рис. 5.

Другой пример — графики функций $r(t)$ и $R(t)$ при $d = 2$, $\tilde{\alpha} = 2.5$, $\tilde{\xi} = 2$, $t_* = 1.5$, $T_* = 3$, $n = 6$, $h = 19.8$, $\lambda = 1$ на рис. 6.

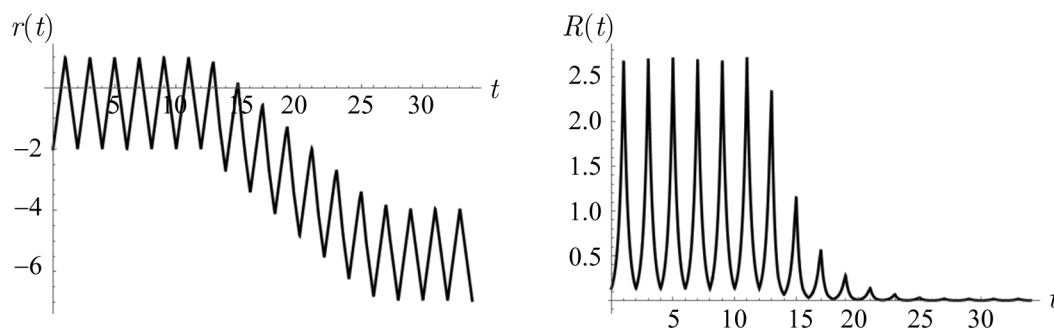


Рис. 5. Графики функций $r(t)$ и $R(t)$, демонстрирующие поведение «стареющего» нейрона

Fig. 5. Graphs of functions $r(t)$ and $R(t)$ demonstrating the behavior of an «aging» neuron

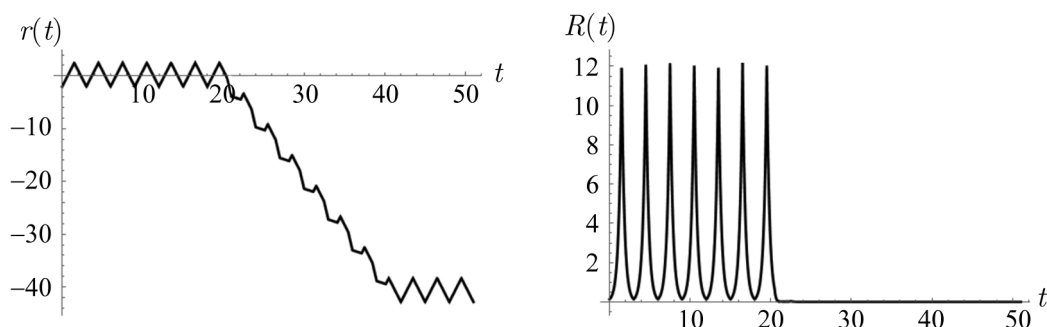


Рис. 6. Графики функций $r(t)$ и $R(t)$, демонстрирующие поведение «умирающего» нейрона

Fig. 6. Graphs of functions $r(t)$ and $R(t)$ demonstrating the behavior of a «dying» neuron

Заключение

В настоящей работе получено расширение результатов [1] в том смысле, что аналитически показано существование и устойчивость решения и поэтапно найдена область параметров, при которых решение от высоких периодических всплесков переходит к малым колебаниям, то есть существуют решения вида «замирающего» нейрона.

Для уравнения (3) доказана теорема 1. Для уравнения (1) доказана теорема 2, являющаяся следствием теоремы 1. Результаты работы численно проиллюстрированы.

В дальнейшем планируется рассмотреть объединение нескольких «замирающих» нейронов в сеть, в том числе их взаимодействие при различных формах цепи: цикл, полносвязная система

и другие. Для цепей «замирающих» нейронов планируется изучение вопроса существования и устойчивости периодических решений. Данное исследование может помочь созданию более точных и эффективных искусственных нейронных сетей. Свое применение работа также может найти в математической биологии и теории моделирования нейронных сетей.

Список литературы

1. *Preobrazhenskaia M. M.* Relay system of differential equations with delay as a perceptron model // In: Proceedings of the XXIV International Conference on Neuroinformatics «Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI». 17-21 October 2022, Moscow, Russia. Cham: Springer Cham, 2022. P. 530–539.
2. *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Модели волновой памяти. М.: ЛИБРОКОМ, 2009. 288 с.
3. *Hutchinson G. E.* Circular causal systems in ecology // *Annals of the New York Academy of Sciences. Teleological Mechanisms.* 1948. Vol. 50, no. 4. С. 221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
4. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112.
5. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

References

1. Preobrazhenskaia MM. Relay system of differential equations with delay as a perceptron model. In: Kryzhanovsky B, Dunin-Barkowski W, Redko V, Tiumentsev Y. (eds.): Proceedings of the XXIV International Conference on Neuroinformatics «Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI». 17-21 October 2022, Moscow, Russia. Cham: Springer Cham; 2022. P. 530–539.
2. Kashchenko SA. Models of Wave Memory. Cham: Springer International Publishing; 2015. 267 p. (Lecture Notes in Morphogenesis).
3. Hutchinson GE. Circular causal systems in ecology. *Annals of the New York Academy of Sciences. Teleological Mechanisms.* 1948;50(4):221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
4. Kolesov AY, Mishchenko EF, Rozov NK. A modification of Hutchinson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2010;50(12):2099–2112.
5. El'sgol'ts LE., Norkin SB. Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments. New York: Academic Press; 1973. 356 p.



Зеленова Вера Константиновна — родилась в городе Гаврилов-Яме Ярославской области (2001). Окончила с отличием математический факультет Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова по направлению «Прикладная математика и информатика» (2023). С 2022 года работает в РНОМЦ «Центр интегрируемых систем» ЯрГУ в должности стажера-исследователя. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: verzelenowa12@gmail.com
ORCID: 0009-0000-5974-6614
AuthorID (eLibrary.Ru): 1145522

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

V. A. Vakorin, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Pkovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

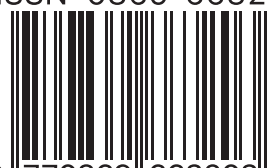
V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >