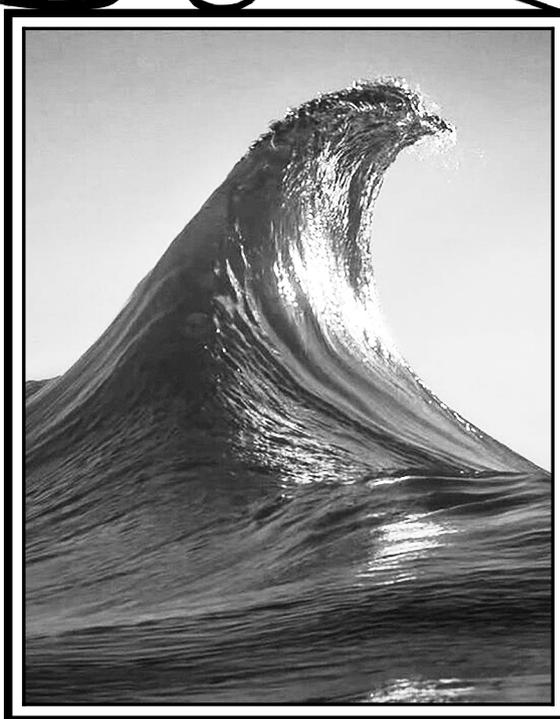


ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

# Прикладная Нелинейная Динамика



*130 лет уединённой волне Кортевега – де Фриза  
и 60 лет слову «солитон»*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

*М. В. Сысоева*, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*С. Боккалетти*, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

*А. М. Быков*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*Н. С. Гинзбург*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*С. В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*О. И. Канаков*, д.ф.-м.н., ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*С. А. Кащенко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

*А. В. Красков*, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

*Н. В. Кузнецов*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

*Ж. ван Луйтелаар*, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

*А. Люттйоханн*, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*И. И. Мохов*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

*А. Б. Нейман*, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

*В. И. Некоркин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. Н. Писарчик*, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. В. Тучин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

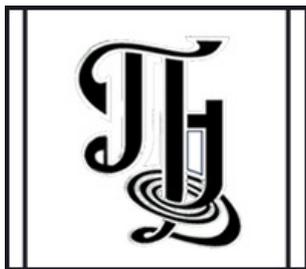
*Е. Я. Фрисман*, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)

*В. А. Царёв*, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)

*В. А. Черепенин*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

**Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

**Издатель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-77991 от 20 марта 2020 года

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписной индекс издания 73498. Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Свободная цена

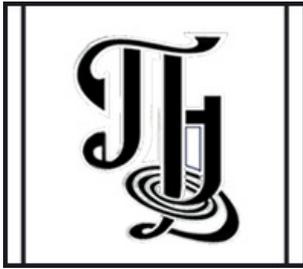
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией А. А. Грищенко  
Редактор А. Р. Нигметулина  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,  
Астраханская, 83. Тел.: +7 (927) 625-9020,  
e-mail: andjournal@sgu.ru,  
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 17.03.2025  
Вышел в свет 31.03.2025  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 16,51 (17,75)  
Тираж 100 экз. Заказ № 36-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского  
университета. Адрес типографии: Россия,  
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy**  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

The journal “Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics” is registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Registration ПИ No ФС77-77991 of 20 March 2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

The journal subscription index is 73498. A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies ([ural-press.ru](http://ural-press.ru)). Free price

The journal is Open Access

Head of Editorial office A. A. Grishchenko  
Editor A. R. Nigmatulina  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (927) 625-9020,  
e-mail: [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru),  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 17.03.2025. Published 31.03.2025  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 16,51 (17,75)  
Edition of 100 copies. Order No. 36-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

ОТ РЕДАКТОРА

*Канаков О. И.* К 130-летию уединённой волны Кортевега – де Фриза и к 60-летию слова «солитон»..... 145

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС.  
КВАНТОВЫЙ ХАОС

*Короновский А. А., Москаленко О. И., Сельский А. О.* О вероятностном описании возникновения асинхронных фаз в режиме перемежающейся обобщённой синхронизации одномерных отображений..... 153

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б., Муминов У. Р., Машарипов С. И.* Вырожденные случаи в дискретных динамических системах Лотки–Вольтерры..... 165

*Шабунин А. В.* Динамика взаимодействующих SIRS+V-моделей распространения инфекционных заболеваний..... 184

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА  
И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

*Кириллов А. Н., Сазонов А. М.* Периодические режимы в гибридной динамической системе «хищник–жертва» с учетом миграции и внутривидовой конкуренции ..... 199

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

*Сенницкий В. Л.* Эффекты вращательного движения жидкости между криволинейными стенками ..... 219

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

*Ермолаева А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю.* Астроцит-индуцированная синхронизация активности нейронной сети..... 233

*Кононов Р. А., Масленников О. В., Некоркин В. И.* Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации в задаче контекстно-зависимого принятия решения ..... 249

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Новичкова В. А., Рыбалова Е. В., Пономаренко В. И., Вадивасова Т. Е.* Влияние топологии связей и шума на возможность частотной подстройки в ансамблях осцилляторов ФитцХью–Нагумо ..... 266

**C O N T E N T S**

EDITORIAL

- Kanakov O. I.* To the 130th anniversary of the solitary wave by Korteweg and de Vries, and the 60th anniversary of the word “soliton”..... 145

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.  
QUANTUM CHAOS

- Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Selskii A. O.* On the probabilistic description of the asynchronous phases occurrence in intermittent generalized synchronization regime of one-dimensional maps..... 153

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Ganikhodzhaev R. N., Eshmamatova D. B., Muminov U. R., Masharipov S. I.* Degenerate cases in discrete Lotka–Volterra dynamical systems..... 165
- Shabunin A. V.* Dynamics of interacting SIRS+V models of infectious disease spread..... 184

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

- Kirillov A. N., Sazonov A. M.* Periodic regimes in a hybrid dynamical predator-prey system with migration and intraspecific competition..... 199

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Sennitskii V. L.* Effects of a rotational motion of a liquid between curvilinear walls..... 219

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

- Ermolaeva A. V., Kazantsev V. B., Gordleeva S. Yu.* Astrocyte-induced synchronization of neural network activity ..... 233
- Kononov R. A., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Dynamics of recurrent neural networks with piecewise linear activation function in the context-dependent decision-making task 249

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Novichkova V. A., Rybalova E. V., Ponomarenko V. I., Vadivasova T. E.* Influence of coupling topology and noise on the possibility of frequency tuning in ensembles of FitzHugh–Nagumo oscillators..... 266



## К 130-летию уединённой волны Кортевега – де Фриза и к 60-летию слова «солитон»

*О. И. Канаков*

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: ✉okanakov@rf.unn.ru

*Поступила в редакцию 17.03.2025, опубликована 31.03.2025*

*Для цитирования:* Канаков О. И. К 130-летию уединённой волны Кортевега – де Фриза и к 60-летию слова «солитон» // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 145–152. DOI: 10.18500/0869-6632-003169. EDN: RLVYAD

*For citation:* Kanakov OI. To the 130th anniversary of the solitary wave by Korteweg and de Vries, and the 60th anniversary of the word “soliton”. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2):145–152. DOI: 10.18500/0869-6632-003169

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### 1. Уравнение Кортевега – де Фриза и солитоны

В 2025 году исполняется 130 лет с публикации статьи Д. Кортевега и Г. де Фриза [1], в которой исследовалось знаменитое нелинейное уравнение в частных производных

$$u_t' + 6uu_x' + u_{xxx}'' = 0 \quad (1)$$

(далее — «уравнение КдФ»), описывающее волны на воде в предположении, что глубина воды много меньше длины волны, но много больше амплитуды, и известное сейчас под именами этих авторов (хотя в другой форме было записано ранее Ж. Буассинеском [2, с. 360]). В частности, в [1] было найдено решение, имеющее вид стационарной уединённой волны и воспроизводящее известную к тому времени зависимость скорости волны от амплитуды, ранее экспериментально установленную первооткрывателем уединённых волн на поверхности воды Дж. Скоттом Расселом [3, с. 423].

Тот факт, что уравнение КдФ воспроизводит и другие экспериментальные наблюдения Рассела — распад длинноволнового начального возмущения на пучок уединённых волн, а также взаимодействие таких волн между собой без изменения формы и скорости, — был установлен значительно позже при помощи численного моделирования в работе Н. Дж. Забуски (Забужского) и М.Д. Крускала [4], которой в этом году исполняется 60 лет. Вышеописанный характер взаимодействия уединённых волн, которое оказалось «упругим» несмотря на нелинейность уравнения,

вызвал всплеск интереса исследователей как к уравнению КдФ, так и к этому классу решений. Термин «солитон», впервые введенный именно в работе [4], был скомбинирован из первых букв англоязычного термина «solitary wave» (уединённая волна) и окончания «-он», типичного для названий элементарных частиц и призванного подчеркнуть «корпускулярный» характер поведения таких решений<sup>1</sup>.

В ознаменование этих двух годовщин — 130-летия солитонов в уравнении КдФ и 60-летия самого слова «солитон» — предлагаем освежить в памяти некоторые результаты из теории нелинейных волн, составляющие основу теории солитонов и вызванные к жизни работами, цитированными выше, не претендуя на полноту ни в плане математической строгости (не будем полностью формулировать условия теорем), ни в плане библиографии и истории науки (за подробностями отошлём к вводу обзор [5] и к монографиям [6, 7], хотя полностью осветить все варианты физической и математической постановки задач, связанных с солитонами, сейчас невозможно даже в объёме книги).

## 2. Метод обратной задачи рассеяния

К. С. Гарднер, Дж. М. Грин, М. Д. Крускал и Р. М. Миура в своих статьях 1967 и 1974 годов [8, 9] предложили оригинальный подход, модификации которого сейчас известны под названием «методы обратной задачи рассеяния», сводящий отыскание решения задачи Коши для нелинейного уравнения КдФ к решению только линейных задач.

Центральным элементом метода является специфическая замена переменных, для построения которой вводится в рассмотрение «вспомогательная линейная задача» — задача на собственные числа  $\lambda$  и собственные функции  $\psi(x)$  стационарного уравнения Шрёдингера

$$L\psi = \lambda\psi, \quad (2a)$$

где

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x), \quad (2b)$$

куда в качестве потенциала  $U(x)$  формально подставляется профиль искомого решения уравнения КдФ в некоторый фиксированный момент времени  $U(x) = u(x, t)$ , причём время  $t$  выступает в этой вспомогательной задаче исключительно в качестве параметра. Для дальнейшего важно, чтобы солитон был не положительным, а отрицательным — тогда в уравнении Шрёдингера он выступает как потенциальная яма; это позволяет рассматривать собственные состояния, локализованные в одной или нескольких ямах, наряду с задачей о рассеянии (то есть об отражении и пропускании) волн де Бройля, набегающих из бесконечности, на неоднородности потенциала, образованной этими ямами. Из этих соображений уравнение КдФ (1) переписывается путём замены  $u$  на  $-u$ :

$$u_t' - 6uu_x' + u_{xxx}''' = 0. \quad (3)$$

Как было показано в [8, 9], при условии  $\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x)||x|^n dx < \infty$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$ , обеспечивающем достаточно быстрое приближение  $U(x)$  к нулю на бесконечности (это означает, что «неоднородность» потенциала, то есть вся существенно ненулевая часть  $U(x)$ , достаточно хорошо локализована в пространстве), спектр собственных чисел задачи (2a,b) состоит из непрерывной части, занимающей всю положительную полуось  $\lambda_k = k^2 > 0$ , где  $k \neq 0$  — действительные числа, и конечного (возможно, пустого) дискретного набора невырожденных (некратных) отрицательных

<sup>1</sup>Для большего сходства со словами «электрон», «нейтрон» и т. п. авторы вначале придумали термин «solitron», но слово оказалось занято — так называлась (и по сей день называется) фирма, выпускающая силовые полупроводниковые приборы [5].

собственных чисел  $\lambda_n = -\kappa_n^2 < 0$ . Таким образом, спектр собственных чисел полностью определяется его дискретной частью  $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ , где  $N$  — количество собственных чисел, составляющих дискретную часть спектра.

Соответствующие собственные функции для дискретной части спектра действительны, локализованы в пространстве вблизи неоднородности потенциала и экспоненциально убывают на бесконечности:  $\psi(x \rightarrow +\infty) = C_n e^{-\kappa_n x}$ , где  $C_n$  — константы, обеспечивающие нормировку  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x) dx = 1$  (для определённости можно положить  $C_n > 0$ ). Каждая собственная функция для непрерывной части спектра на бесконечностях (вдали от неоднородности потенциала) представляет собой суперпозицию бегущих гармонических волн с некоторым волновым числом  $k$ , проходящих через неоднородность и отражающихся от неё. Для определённости можно положить, что в положительной области  $x \rightarrow +\infty$  присутствуют набегающая (из бесконечности) и отражённая волны, а в отрицательной области  $x \rightarrow -\infty$  — только прошедшая волна. Тогда собственные функции однозначно определяются параметрами своих асимптотик: для дискретной части спектра — константами  $C_n$ , а для непрерывной части — коэффициентами отражения  $b(k)$  (через них выражаются и коэффициенты прохождения).

Совокупность, состоящую из дискретной части спектра  $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$  и параметров асимптотик собственных функций  $C_n$  и  $b(k)$ , называют «данными рассеяния». Известны условия, при которых однозначно решается не только задача отыскания данных рассеяния по заданному потенциалу  $U(x)$  («прямая задача рассеяния»), но и «обратная задача рассеяния», состоящая в отыскании потенциала по известным данным рассеяния. Основным этапом решения обратной задачи состоит в решении линейного интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. Таким образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между рассмотренным классом потенциалов  $U(x)$  и данными рассеяния.

Именно это взаимно-однозначное соответствие и используется в качестве замены переменных в уравнении КдФ: вспомогательная линейная задача (2а,б) (с подстановкой  $U(x) = u(x, t)$ ) увязывает искомое решение  $u(x, t)$  в каждый конкретный момент времени с некоторыми данными рассеяния, а эволюция решения  $u(x, t)$  во времени, таким образом, взаимно-однозначно увязывается с некоторой эволюцией данных рассеяния  $\{\lambda_n(t)\}_{n=1}^N, C_n(t), b(k, t)$ .

Разумеется, вышеописанная замена переменных не записывается в виде готовой формулы, поэтому эволюция в новых переменных не может быть найдена простой подстановкой в исходное уравнение. Тем не менее динамика данных рассеяния, в которую отображается уравнение КдФ (3), была найдена в [8, 9], причём, во-первых, спектр собственных чисел оказывается постоянным во времени:

$$\lambda_n(t) = -\kappa_n^2 = \text{const}; \quad (4)$$

во-вторых, уравнения движения для параметров собственных функций оказываются линейными, и их решение имеет вид

$$C_n(t) = C_n(0)e^{4\kappa_n t}, \quad b(k, t) = b(k, 0)e^{8ik^3 t}. \quad (5)$$

В частности, выясняется (путём решения обратной задачи рассеяния), что решение (5) при нулевом коэффициенте отражения  $b(k, t) = b(k, 0) = 0$  представляет собой в исходных переменных  $u(x, t)$  комбинацию из  $N$  солитонов, распространяющихся со скоростями  $c_n = -4\lambda_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ; так, в случае единственного дискретного собственного числа  $N = 1$  имеем один изолированный солитон и т. д.). В том числе это означает, что потенциальная яма (или их совокупность), имеющая форму солитона (или их совокупности) в уравнении КдФ, является с точки зрения уравнения Шрёдингера «безотражательным потенциалом» в том смысле, что набегающая на него волна де Бройля не претерпевает отражения.

### 3. Представление Лакса

Замена переменных, используемая в методе обратной задачи рассеяния, крайне неочевидна и выглядит как изобретательный трюк, основанный на знаниях свойств уравнения Шрёдингера, так что остаётся непонятным, может ли описанный подход быть обобщен для применения к другим нелинейным моделям. Один из способов получения этой замены в рамках более общего подхода был предложен П. Лаксом в 1968 году [10].

Можно показать прямой подстановкой, что уравнение КдФ (3) эквивалентно операторному уравнению Лакса  $L'_t = [B, L]$  или

$$L'_t + [L, B] = 0, \quad (6)$$

где  $L'_t$  — производная оператора  $L$  по времени,  $[L, B] = LB - BL$  — коммутатор, оператор  $L$  определён согласно (2b) (тогда  $L'_t = u'_t(x, t)$ ), а оператор  $B$  задан в виде

$$B = B_2 = -4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial}{\partial x} + 3u'_x. \quad (7)$$

Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что левая часть (6) тождественна оператору домножения на левую часть уравнения КдФ (3), то есть

$$(L'_t + [L, B])\psi = (u'_t - 6uu'_x + u'''_{xxx})\psi, \quad (8)$$

и является нулевым оператором тогда и только тогда, когда  $u(x, t)$  является решением уравнения КдФ (3).

Представление (6) удобно тем, что свойство постоянства во времени дискретной части спектра оператора  $L(t)$  (4) доказывается в общем виде для оператора  $L(t)$ , удовлетворяющего уравнению (6), при условии самосопряжённости оператора  $L$  и достаточно слабых требованиях к области определения и непрерывной дифференцируемости нужных операторов и функций [11, с. 58, теорема 3.1.1]. Сохранение во времени непрерывной части спектра должно быть обосновано дополнительно, либо также обеспечено уравнением (6), если дополнительно потребовать антисамосопряжённость оператора  $B(t)$ , существование (унитарного) оператора  $U(t)$  как решения операторного уравнения  $U'_t = BU$  и (непрерывную) дифференцируемость нужных операторов по времени [11, с. 60, теорема 3.2.1]. Кроме того, эволюция во времени для нормированных собственных функций  $\psi$  в случае антисамосопряжённого оператора  $B$  описывается линейным уравнением

$$\psi'_t = B\psi. \quad (9)$$

В частности, указанным условиям удовлетворяют операторы  $L$  (самосопряжённый) и  $B$  (антисамосопряжённый), определённые в (2b) и в (7), откуда следует постоянство спектра (4), а из (9) — эволюция асимптотических параметров собственных функций (5). Таким образом не только воспроизводится ключевой элемент метода обратной задачи рассеяния, состоящий в сведении нелинейного волнового уравнения КдФ к линейной динамике данных рассеяния, но и открывается путь к обобщению этого метода путём отыскания других нелинейных моделей, сводимых к линейным при помощи замены, основанной на некоторой вспомогательной задаче рассеяния.

Сохраняя вид оператора  $L$  (2b), можно поставить в общем виде задачу отыскания таких антисамосопряжённых операторов  $B$ , для которых левая часть уравнения Лакса (6) принимает вид оператора домножения на некоторую функцию  $f(x, t)$ :

$$(L'_t + [L, B])\psi = f(x, t)\psi, \quad (10)$$

где  $f(x, t)$  получается некоторым преобразованием из  $u(x, t)$ , — аналогично (8), но теперь не обязательно  $f(x, t)$  должна совпадать с левой частью уравнения КдФ. Решение задачи в такой постановке приводит к последовательности операторов  $B_1, B_2, B_3$  и т. д. [10], [11, с. 65–66], каждый из которых, будучи подставлен в уравнение Лакса (6) вместе со шрёдингеровским оператором  $L$  (2b), порождает некоторое уравнение относительно  $u(x, t)$ .

Так, оператор  $B_1 = \partial/\partial x$  обращает уравнение Лакса в линейное уравнение

$$u'_t - u'_x = 0, \quad (11)$$

решениями которого являются стационарные волны. Оператор  $B_2$  совпадает (с точностью до эквивалентных переобозначений) с введённым в (7) и порождает, соответственно, уравнение КдФ (3). Следующие члены этой операторной последовательности порождают новые нелинейные волновые модели, решения которых по построению обеспечивают постоянство спектра (4) и линейную эволюцию собственных функций (9) оператора Шрёдингера  $L$ , а значит, допускают анализ методом обратной задачи рассеяния на основе уравнения Шрёдингера и являются полностью интегрируемыми. Эту последовательность интегрируемых волновых моделей называют «иерархия КдФ».

#### 4. Законы сохранения и представление Гамильтона

Из стационарного уравнения Шрёдингера (2a), где оператор  $L$  по-прежнему задан в виде (2b), и закона эволюции собственных функций в представлении Лакса (9) в общем виде, не конкретизируя вид антисамосопряжённого оператора  $B$ , можно получить последовательность законов сохранения, каждый из которых имеет форму пространственного интеграла от некоторой «плотности», выражаемой в каждой точке через решение  $u(x, t)$  и его производные:

$$Q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \int \rho_{2n+1} dx = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где

$$\rho_1 = -u, \quad \rho_2 = \frac{\partial}{\partial x} \rho_1, \quad \rho_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x} \rho_k + \sum_{m=1}^{k-1} \rho_m \rho_{k-m} \quad (13)$$

(интегралы здесь и далее берутся от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). В частности, после упрощения интегралов имеем

$$Q_0 = \int \frac{u}{2} dx, \quad Q_1 = \int \frac{u^2}{2} dx, \quad Q_2 = \int \left( \frac{u_x^2}{2} + u^3 \right) dx. \quad (14)$$

Вывод этих выражений в применении к уравнению КдФ был описан в [12, § 3]. В силу независимости вывода от конкретного вида оператора  $B$  (что отмечено, например, в [13, раздел 3]), все эти законы сохранения справедливы для каждого из уравнений в иерархии КдФ.

Более того, выясняется, что (любое)  $n$ -е уравнение из иерархии КдФ само по себе может быть получено из соответствующего интеграла  $Q_n$  как гамильтоновская система, имеющая в качестве гамильтониана интеграл  $Q_n$ :

$$u'_t = \{u, Q_n\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta Q_n}{\delta u}, \quad (15)$$

в которой скобка Пуассона  $\{\cdot, \cdot\}$  задаётся в виде скобки Гарднера

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u} dx, \quad (16)$$

где  $\delta/\delta u$  означает производную Фреше. Для исходного уравнения КдФ (3), соответствующего случаю  $n = 2$ , это было доказано В. Е. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым в 1971 году [12], причём было также показано, что замена переменных, используемая в методе обратной задачи рассеяния (см. разд. 2), приобретает в этих обозначениях смысл перехода к переменным «действие-угол» [14, § 50].

Итак, представление Лакса (6) позволяет нам найти последовательность операторов  $B_1, B_2, \dots$ , каждый из которых приводит (по построению) к некоторой полностью интегрируемой модели, порождая таким образом иерархию уравнений КдФ. С другой стороны, мы получаем последовательность интегралов движения  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ , каждый из которых автоматически является таковым для каждой модели в иерархии. Эти две линии рассуждений сами по себе выглядят как «ортогональные», поэтому утверждение, что каждая из моделей в иерархии КдФ (или, другими словами, каждый из операторов  $B_n$ ) находится в прямой взаимосвязи с соответствующим конкретным интегралом  $Q_n$  посредством гамильтоновской динамики<sup>2</sup>, звучит в этом контексте как новое и неожиданное, и при этом замыкает «логический треугольник». Сам факт наличия такого «треугольника» наводит на мысль, что все три его «стороны» должны следовать из какого-то единого подхода. В самом деле, оказывается (см., например, [15]), что как операторы  $B_n$ , так и гамильтонианы  $Q_n$  выражаются через «полуцелые степени»  $L^{(2n-1)/2}$  оператора  $L$  (где квадратный корень из дифференциального оператора определяется с помощью аппарата псевдодифференциальных операторов в виде ряда Лорана по оператору дифференцирования  $\partial/\partial x$ , содержащего положительные и отрицательные степени  $\partial/\partial x$ ), при этом все получаемые гамильтоновские фазовые потоки по построению являются по отношению друг к другу инвариантными преобразованиями (то есть все гамильтонианы имеют нулевую скобку Пуассона между собой), а значит, каждый из гамильтонианов автоматически является интегралом движения для любого другого из этого семейства [14, § 40].

Таким образом, вся вышеописанная картина порождается оператором  $L$ . Выше рассматривался единственный его вариант — оператор Шрёдингера (2b). Обобщения подхода Лакса, в которых оператор  $L$  задаётся другими способами (вместе с некоторыми дополнительными обобщениями теории), позволили единообразно описать другие интегрируемые модели, в числе которых нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение «синус-Гордона», цепочечная модель Тоды — все они допускают и гамильтоновское описание [16].

## Заключение

Обе работы [1] и [4] не были первыми в своих ключевых результатах: «уравнение Кортевега-де Фриса» (как мы его сейчас называем) было ранее записано в другой форме Буссинеском, а «корпускулярный» характер взаимодействия солитонов, который побудил Забужского и Крускала к изобретению термина «солитон» и оказался большим сюрпризом для их современников, был описан ещё в XIX веке Дж. Скоттом Расселом по итогам его впечатляющей программы экспериментальных исследований гидродинамических явлений, связанных с движением судов в каналах. Тем не менее статья Кортевега и де Фриса послужила одной из предпосылок для работы Забужского и Крускала, которая, в свою очередь, запустила настоящую лавину исследований по математике и физике солитонов самой разной природы. К сожалению, Расселу, несмотря на его усилия, не удалось вызвать сопоставимого интереса у своих современников: ни физика, ни математика, ни вычислительная техника тогда не были к этому готовы.

<sup>2</sup>Интеграл  $Q_0$ , у которого, казалось бы, не нашлось «собрата» в иерархии КдФ, приводит к тривиальному уравнению  $u'_t = 0$ .

Зато теперь объём теоретических и экспериментальных результатов, так или иначе связанных с солитонами, достиг таких объёмов, что даже перечислить основные направления этих исследований было бы невозможно в рамках краткой заметки. Такой задачи мы и не ставили, а лишь кратко сформулировали некоторые из результатов в теории солитонов и постарались отследить логические взаимосвязи между ними. Вряд ли исследователь, чьи основные научные интересы связаны с солитонами, найдёт что-то новое для себя в этой заметке; в то же время надеемся, что для читателя, приступающего к изучению этой тематики, мы подсветили некоторые ориентиры в море лежащей перед ним информации.

## Список литературы

1. Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1895. Vol. 39, no. 240. P. 422–443. DOI: 10.1080/14786449508620739.
2. Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes. Paris: Imprimerie Nationale, 1877. 680 p. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56673076>.
3. Scott Russell J. Report of the Committee on Waves: Appointed by the British Association at Bristol in 1836 [And Consisting of Sir John Robison and John Scott Russell]. London: R. and J. E. Taylor, 1838. 80 p. <https://books.google.ru/books?id=ahEMAAAYAAJ>.
4. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of “Solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Physical Review Letters. 1965. Vol. 15, no. 6. P. 240–243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240.
5. Marin F. Solitons: Historical and physical introduction // Encyclopedia of Complexity and Systems Science / ed. by R. A. Meyers. Berlin, Heidelberg: Springer, 2017. P. 1–20. DOI: 10.1007/978-3-642-27737-5\_506-2.
6. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи / пер. с англ. А. В. Михайлова; под ред. [и с предисл.] В. Е. Захарова. Москва: Мир, 1987. 478 с.
7. Додд Р. Эйлбек Д. Гиббон Д. Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / пер. с англ. В. П. Гурария, В. И. Мацаева; под ред. А. Б. Шабата. Москва: Мир, 1988. 694 с.
8. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg-deVries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, no. 19. P. 1095–1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.
9. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Korteweg – de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1974. Vol. 27, no. 1. P. 97–133. DOI: 10.1002/cpa.3160270108.
10. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968. Vol. 21, no. 5. P. 467–490. DOI: 10.1002/cpa.3160210503.
11. Eckhaus W., van Harten A. Chapter 3. Isospectral Potentials: The Lax Approach // The Inverse Scattering Transformation and The Theory of Solitons: An Introduction. North-Holland Mathematics Studies, vol. 50. Elsevier, 1981. P. 53–73. DOI: 10.1016/S0304-0208(08)70593-0.
12. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега – де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функциональный анализ и его приложения. 1971. Т. 5, № 4. С. 18–27. MathNet: faa2612.
13. Krishnaswami G. S., Vishnu T. R. The Idea of a Lax Pair — Part II: Continuum Wave Equations // Resonance. 2021. Vol. 26, no. 2. P. 257–274. DOI: 10.1007/s12045-021-1124-1.
14. Арнольд В. И. Математические методы классической механики: учебное пособие. Изд. 5-е, стереотипное. Москва: УРСС, 2003. 416 с.

15. *Zabrodin A.* Lectures on nonlinear integrable equations and their solutions. Preprint arXiv: 1812.11830. DOI: 10.48550/arXiv.1812.11830.
16. *Faddeev L. D.* A Hamiltonian interpretation of the inverse scattering method // Solitons. Topics in Current Physics, vol. 17 / ed. by R. K. Bullough, P. J. Caudrey. Berlin, Heidelberg: Springer, 1980. P. 339–354. DOI: 10.1007/978-3-642-81448-8\_11.

## References

1. Korteweg DJ, De Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1895;39(240):422–443. DOI: 10.1080/14786449508620739.
2. Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes. Paris: Imprimerie Nationale; 1877. 680 p. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56673076>.
3. Scott Russell J. Report of the Committee on Waves: Appointed by the British Association at Bristol in 1836 [and Consisting of Sir John Robison and John Scott Russell]. London: R. and J. E. Taylor; 1838. 80 p. <https://books.google.ru/books?id=ahEMAAAYAAJ>.
4. Zabusky NJ, Kruskal MD. Interaction of “Solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Physical Review Letters. 1965;15(6):240–243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240.
5. Marin F. Solitons: Historical and physical introduction. In: RA. Meyers (ed.). Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Berlin, Heidelberg: Springer; 2017. P. 1–20. DOI: 10.1007/978-3-642-27737-5\_506-2.
6. Ablowitz MJ, Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM; 1981. 424 p. DOI: 10.1137/1.9781611970883.
7. Dodd RK, Eilbeck CJ, Gibbon JD, Morris HC. Solitons and Nonlinear Wave Equations. New York: Academic Press; 1982. 630 p.
8. Gardner CS, Greene JM, Kruskal MD, Miura RM. Method for solving the Korteweg-deVries equation. Physical Review Letters. 1967;19(19):1095–1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.
9. Gardner CS, Greene JM, Kruskal MD, Miura RM. Korteweg – de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1974;27(1): 97–133. DOI: 10.1002/cpa.3160270108.
10. Lax PD. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968;21(5):467–490. DOI: 10.1002/cpa3160210503.
11. Eckhaus W, van Harten A. Chapter 3. Isospectral Potentials: The Lax Approach. In: The Inverse Scattering Transformation and The Theory of Solitons: An Introduction. North-Holland Mathematics Studies, vol. 50. Elsevier; 1981. P. 53–73. DOI: 10.1016/S0304-0208(08)70593-0.
12. Zakharov VE, Faddeev LD. Korteweg-de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system. Functional Analysis and Its Applications. 1972;5(4):280–287. MathNet: faa2612.
13. Krishnaswami GS, Vishnu TR. The Idea of a Lax Pair — Part II: Continuum Wave Equations. Resonance. 2021;26(2):257–274. DOI: 10.1007/s12045-021-1124-1.
14. Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer; 1989. 536 p.
15. *Zabrodin A.* Lectures on nonlinear integrable equations and their solutions. Preprint arXiv: 1812.11830. DOI: 10.48550/arXiv.1812.11830.
16. *Faddeev LD.* A Hamiltonian interpretation of the inverse scattering method. In: RK. Bullough, PJ. Caudrey (eds.). Solitons. Topics in Current Physics, vol. 17. Berlin, Heidelberg: Springer; 1980. P. 339–354. DOI: 10.1007/978-3-642-81448-8\_11.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003149  
EDN: DCOYIK

## О вероятностном описании возникновения асинхронных фаз в режиме перемежающейся обобщённой синхронизации одномерных отображений

А. А. Короновский, О. И. Москаленко<sup>✉</sup>, А. О. Сельский

Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com, ✉o.i.moskalenko@gmail.com, selskii.ao@gmail.com

Поступила в редакцию 13.09.2024, принята к публикации 22.10.2024,

опубликована онлайн 6.12.2024, опубликована 31.03.2025

**Аннотация.** Цель настоящего исследования заключается в объяснении и описании с помощью вероятностной модели процесса разрушения стадии синхронного поведения и возникновения участка асинхронной динамики в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации в одномерных динамических системах с дискретным временем. **Методы.** В данной работе используется вероятностная модель для количественного описания наблюдаемых характеристик поведения однонаправленно связанных хаотических систем вблизи границы установления синхронного режима. **Результаты.** Получено аналитическое выражение для вероятности наблюдения разрушения синхронной фазы на интервале фиксированной длительности в предположении равномерно распределённой величины, а также форма плотности вероятности состояния системы для участков разрушения синхронной динамики. **Заключение.** В работе приведены количественные оценки процесса разрушения участков синхронного поведения в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации для одномерных динамических систем с дискретным временем. Показана общность процессов вблизи границы установления синхронного режима для обобщённой хаотической синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом.

**Ключевые слова:** перемежающаяся обобщённая хаотическая синхронизация, индуцированная шумом синхронизация, ламинарная фаза, разрушение синхронного поведения, отображения, случайный сигнал.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (соглашение № 075-02-2025-1635 от 27 февраля 2025 г.).

**Для цитирования:** Короновский А. А., Москаленко О. И., Сельский А. О. О вероятностном описании возникновения асинхронных фаз в режиме перемежающейся обобщённой синхронизации одномерных отображений // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 153–164. DOI: 10.18500/0869-6632-003149. EDN: DCOYIK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On the probabilistic description of the asynchronous phases occurrence in intermittent generalized synchronization regime of one-dimensional maps

A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko<sup>✉</sup>, A. O. Selskii

Saratov State University, Russia

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com, ✉o.i.moskalenko@gmail.com, selskii@yandex.ru

Received 13.09.2024, accepted 22.10.2024, available online 6.12.2024, published 31.03.2025

**Abstract.** The purpose of the present study is to explain and describe (with the help of the probabilistic model) the process of breaking the stage of synchronous behavior and the emergence of a section of asynchronous dynamics in the regime of intermittent generalized chaotic synchronization in one-dimensional dynamical systems with discrete time. *Methods.* In this paper, a probabilistic model is used to quantitatively describe the observed characteristics of the behavior of two unidirectionally coupled systems being near the onset of the synchronous regime. *Results.* An analytical expression for the probability to observe the destruction of the synchronous phase on an interval of fixed duration under the assumption of uniformly distributed variable, as well as the form of the probability density function of the system state for the destruction intervals of synchronous dynamics are obtained. *Conclusion.* The paper presents quantitative estimates of the process of destruction of synchronous behavior in the regime of intermittent generalized chaotic synchronization for one-dimensional dynamical systems with discrete time. The generality of processes near the boundary of the synchronous motion for generalized chaotic synchronization and noise-induced synchronization is shown.

**Keywords:** intermittent generalized synchronization, noise-induced synchronization, laminar phase, destruction of synchronous behavior, discrete maps, random signal.

**Acknowledgements.** This work was supported by Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies” (Agreement no. 075-02-2025-1635, February 27, 2025).

**For citation:** Koronovskii AA, Moskalenko OI, Selskii AO. On the probabilistic description of the asynchronous phases occurrence in intermittent generalized synchronization regime of one-dimensional maps. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(2):153–164. DOI: 10.18500/0869-6632-003149

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

На сегодняшний день хорошо известно, что установлению различных типов синхронизации хаотических осцилляторов как с непрерывным, так и дискретным временем предшествует перемежающееся поведение, причём тип перемежаемости определяется типом синхронной динамики и параметрами взаимодействующих систем [1–5]. Настоящая работа направлена на изучение перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации [6–8], предшествующей возникновению обобщённой хаотической синхронизации [9, 10], а именно на выявление механизмов разрушения участков синхронной динамики (так называемых «ламинарных фаз»), приводящих к формированию интервалов асинхронного поведения («турбулентных фаз»).

Обобщённая хаотическая синхронизация, как известно, наблюдается в системах и с дискретным, и с потоковым временем. Самым низкоразмерным классом динамических систем, в котором наблюдается явление обобщённой хаотической синхронизации, является класс одномерных отображений, а в качестве экземпляра объекта, принадлежащего этому классу, в качестве исследуемой системы часто используется логистическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) = \lambda x_n(1 - x_n). \quad (1)$$

В однонаправленно связанных динамических системах обобщённая хаотическая синхронизация возникает, когда состояние ведомой системы полностью определяется состоянием ведущего осциллятора. В вышеуказанном случае однонаправленно связанные одномерные хаотические осцилляторы с дискретным временем задаются оператором эволюции

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_d), \\y_{n+1} &= f(y_n, \lambda_r) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_d) - f(y_n, \lambda_r)),\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\varepsilon$  — управляющий параметр, задающий интенсивность связи взаимодействующих осцилляторов,  $\lambda_d \neq \lambda_r$  — управляющие параметры каждой из систем, а условие режима обобщённой хаотической синхронизации задаётся требованием существования функционала

$$y_n = F(x_n),\tag{3}$$

явный вид которого в общем случае неизвестен. Для детектирования режима обобщённой хаотической синхронизации могут использоваться различные численные методы, такие как расчёт условных показателей Ляпунова [6, 11, 12], метод ближайших соседей [9], метод фазовых трубок [13], но в случае однонаправленно связанных хаотических осцилляторов наиболее удобным, простым и наглядным является метод вспомогательной системы [14]. Суть данного метода заключается во введении в рассмотрение дополнительной (вспомогательной) системы

$$z_{n+1} = f(z_n, \lambda_r) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_d) - f(z_n, \lambda_r)),\tag{4}$$

которая является идентичной ведомой системе, но стартует с других начальных условий ( $z_0 \neq y_0$ ), лежащих в бассейне притяжения того же самого аттрактора, к которому сходятся фазовые траектории ведомой системы. В этом случае, в силу соотношения (3), в режиме обобщённой хаотической синхронизации выполняется условие

$$z_n = y_n,\tag{5}$$

что и является критерием наличия режима обобщённой хаотической синхронизации. Ниже критического значения параметра связи  $\varepsilon_c$ , соответствующего установлению синхронного режима, условие (5) выполняется не всегда, а лишь на отдельных временных интервалах, тогда как на других участках временной реализации вышеуказанное условие (5) не выполняется. Иными словами, в системе наблюдается явление перемежаемости, когда два различных динамических режима (синхронный и асинхронный) последовательно сменяют друг друга при одних и тех же фиксированных значениях управляющих параметров. Участки синхронного поведения, где выполняется условие (5), в соответствии с принятой в теории перемежаемости терминологией называются также «ламинарными фазами», тогда как участки с асинхронной динамикой — «турбулентными фазами».

Перемежающееся поведение классических типов I–III, как хорошо известно [15], связано с прохождением изображающей точкой определённой области в фазовом пространстве исследуемой системы. Именно эта область отвечает за формирование ламинарных фаз поведения. В одномерных динамических системах с дискретным временем это хорошо видно на примере «коридора» между графиком отображения и биссектрисой на диаграмме Ламерея для перемежаемости I-го типа [15], а для потоковых систем, в свою очередь, это может быть выявлено с помощью процедуры сечения Пуанкаре [16]. В силу универсальности явления перемежаемости можно было бы ожидать, что и перемежающееся поведение вблизи границы установления режима обобщённой хаотической синхронизации должно быть обусловлено схожими механизмами.

Однако попытки локализации областей, которые отвечают за синхронную (ламинарные фазы) или, наоборот, асинхронную (турбулентные фазы) динамику, в фазовом пространстве ведущей, ведомой или в обобщённом фазовом пространстве ведущей и ведомой систем к видимым успехам не приводят. Более того, последние исследования на примере дискретных отображений показывают, что разрушение синхронного поведения (разрушение ламинарных фаз) и, соответственно, сама перемежаемость имеют вероятностный характер [17]. С учётом последних актуальных результатов в настоящей работе с помощью вероятностной модели и с учётом тесной взаимосвязи между обобщённой и индуцированной шумом хаотическими синхронизациями [18] предложено количественное объяснение механизма разрушения ламинарных фаз перемежающегося поведения вблизи границы установления синхронного режима для одномерных динамических систем с дискретным временем.

## 1. Разрушение ламинарных фаз

В те моменты времени, когда в однонаправленно связанных одномерных динамических системах с дискретным временем, находящихся в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации, реализуется синхронная (ламинарная) фаза динамики, состояния ведомой и вспомогательной систем очень близки друг к другу, и, соответственно, разность

$$\xi_n = y_n - z_n \quad (6)$$

между состояниями этих систем по абсолютной величине близка к нулю. При разрушении синхронного режима величина  $\xi_n$  начинает возрастать по модулю, что соответствует нарастанию различий в состояниях ведомой  $y_n$  и вспомогательной  $z_n$  систем. Соответственно, превышение величиной  $\xi_n$  некоторого наперед установленного порога  $\Delta$  (в абсолютных или относительных величинах) может использоваться как критерий разрушения синхронной фазы динамики изучаемой системы.

Изменение величины  $\xi_n$  с течением дискретного времени, с учётом (2) и (4), определяется соотношением

$$\xi_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1} = (1 - \varepsilon) (f(y_n, \lambda_r) - f(z_n, \lambda_r)). \quad (7)$$

При условии, что изменение величины  $\xi_n$  с течением дискретного времени будет рассматриваться для ламинарных фаз и относительно небольших сегментов временной реализации, соответствующих началу разрушения синхронного поведения («выхода» из ламинарной фазы), величина  $\xi_n$  может считаться малой по абсолютной величине,

$$|\xi_n| \ll 1, \quad (8)$$

и, соответственно, соотношение (7) в этом случае может быть приведено к виду

$$\xi_{n+1} = g'(y_n) \xi_n = (1 - \varepsilon) f'(y_n, \lambda_r) \xi_n. \quad (9)$$

Следует отметить, что в соотношение (9) входит производная от функции

$$g(y_n) = (1 - \varepsilon) f(y_n, \lambda_r), \quad (10)$$

которая является оператором эволюции *модифицированной системы*, используемой для качественного и количественного описания явления обобщённой хаотической синхронизации [17, 19].

Таким образом, на нарастание / уменьшение разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем  $\xi_n$  в соотношении (9) явным образом влияет текущее состояние ведомой

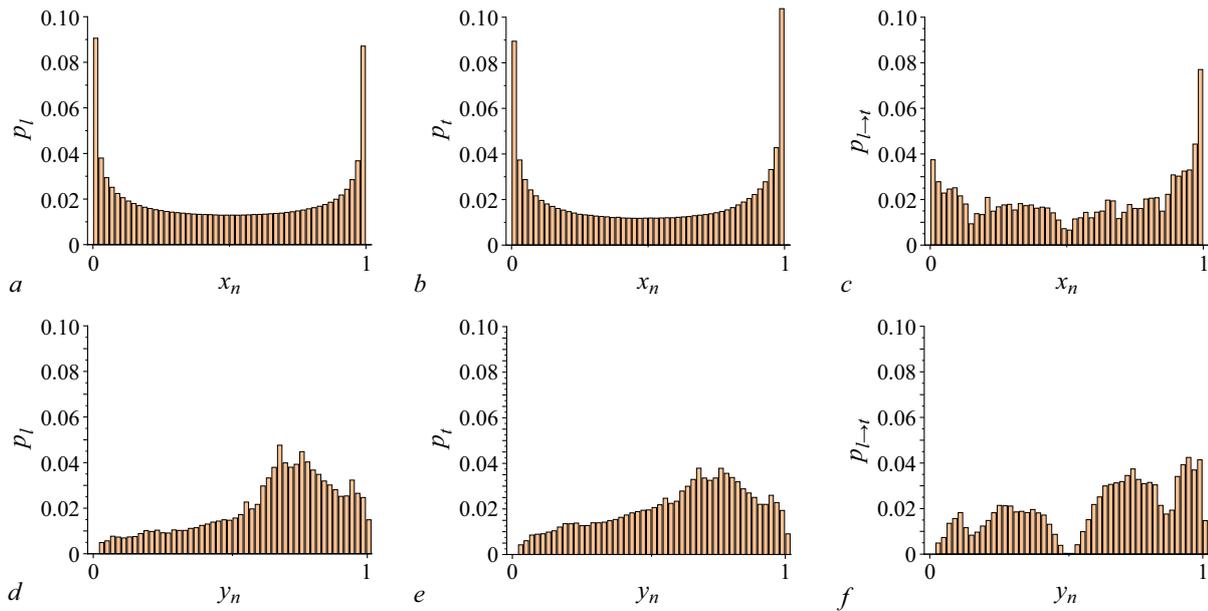


Рис. 1. Плотности распределения вероятности динамических переменных  $x_n, y_n$  однонаправленно связанных логистических отображений (2) для ведущей (a–c) и ведомой (d–f) систем, полученные для ламинарных  $p_l(x_n)$  (a),  $p_l(y_n)$  (d) и турбулентных  $p_t(x_n)$  (b),  $p_t(y_n)$  (e) фаз, а также для интервалов времени, соответствующих разрушению синхронного движения и переходу от ламинарного поведения к турбулентному  $p_{l \rightarrow t}(x_n)$  (c),  $p_{l \rightarrow t}(y_n)$  (f). Значения управляющих параметров  $\lambda_d = 4.0$ ,  $\lambda_r = 3.95$ ,  $\varepsilon = 0.32$

Fig. 1. Probability distribution densities of dynamical variables  $x_n, y_n$  of unidirectionally coupled logistic maps (2) for the drive (a–c) and response (d–f) systems, obtained for the laminar  $p_l(x_n)$  (a),  $p_l(y_n)$  (d) and turbulent  $p_t(x_n)$  (b),  $p_t(y_n)$  (e) phases, as well as for time intervals corresponding to the destruction of the synchronous motion and the transition from the laminar behavior to the turbulent one  $p_{l \rightarrow t}(x_n)$  (c),  $p_{l \rightarrow t}(y_n)$  (f). The control parameter values are the following:  $\lambda_d = 4.0$ ,  $\lambda_r = 3.95$ ,  $\varepsilon = 0.32$

системы  $y_n$ , на которое, в свою очередь, в силу соотношения (2), оказывает влияние текущее состояние ведущей системы  $x_n$ . В работе [17] было показано, что плотности распределения динамических переменных как для ведущей, так и ведомой систем (в рассматриваемом случае  $p(x_n)$  и  $p(y_n)$ ) во время ламинарных и турбулентных фаз оказываются практически одинаковыми, то есть  $p_l(x_n) \approx p_t(x_n)$  и  $p_l(y_n) \approx p_t(y_n)$ . В то же самое время для участков временных реализаций, соответствующих переходам от ламинарных фаз к турбулентным, на которых и происходит резкое возрастание разности состояний ведомой и вспомогательной систем, распределение  $p_{l \rightarrow t}(y_n)$  претерпевает существенную трансформацию и заметно отличается от распределений  $p_l(y_n)$  и  $p_t(y_n)$ . Аналогичное распределение для ведущей системы  $p_{l \rightarrow t}(x_n)$ , в свою очередь, меняется не столь радикально и остаётся качественно таким же, как и в случае ламинарных  $p_l(x_n)$  и турбулентных  $p_t(x_n)$  фаз, хотя и оказывается несколько более «изрезанным». Соответствующие распределения, полученные для двух однонаправленно связанных логистических отображений (2) при значениях управляющих параметров  $\lambda_d = 4.0$  и  $\lambda_d = 3.95$ , несколько отличающихся от использованных в работе [17], приведены на рис. 1. Из рис. 1 видно, что плотность распределения  $p_{l \rightarrow t}(y_n)$  динамической переменной  $y_n$  ведомой системы, полученная для участков разрушения синхронного движения, обладает характерным «клювом», достигающим почти нулевого значения в точке  $y_c = 0.5$ , соответствующей экстремуму отображения модифицированной системы (10).

В работе [17] показано (что подтверждается и рис. 1), что переход от синхронного поведения к асинхронному в рамках перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации может быть описан в рамках вероятностной модели. В пользу данного утверждения свидетельствует также

факт очень тесной взаимосвязи [18] между явлениями обобщённой хаотической синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом [20–22]. Для количественного и качественного объяснения механизмов, приводящих к разрушению синхронного поведения в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации, рассмотрим в следующем разделе статьи вероятностную модель данного явления.

## 2. Вероятностная модель разрушения ламинарных фаз

Поскольку в данном случае рассматривается одномерное отображение, введем в рассмотрение одномерную случайную величину  $\zeta$ , которая будет играть роль, аналогичную переменной ведомой системы  $y$ . Отличие в данном случае будет заключаться лишь в том, что динамика переменной  $y_n$  является полностью детерминированной, хотя и хаотической, и обусловлена видом отображения (1) и значениями управляющих параметров  $\lambda_d$ ,  $\lambda_r$  и  $\varepsilon$ , тогда как поведение величины  $\zeta_n$  будем полагать полностью случайным. Переменная  $y_n$ , в силу особенностей оператора эволюции, локализована в интервале  $(0; 1)$ , поэтому для простоты будем считать, что величина  $\zeta_n$  равномерно распределена на единичном интервале  $[0; 1]$ , иными словами,

$$p_\zeta(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in [0; 1], \\ 0, & \zeta \notin [0; 1], \end{cases} \quad \int_0^1 p_\zeta(\zeta) d\zeta = 1. \quad (11)$$

Поскольку в рассматриваемой вероятностной модели величина  $\zeta$  играет роль динамической переменной  $y$ , будем считать, что динамика величины  $\xi_n$ , описывающей разность между состояниями ведомой и вспомогательной систем (6), определяется соотношением

$$\xi_{n+1} = g'(\zeta_n)\xi_n, \quad (12)$$

аналогичным соотношению (9), где  $g'(\zeta) = \lambda_r(1 - \varepsilon)(1 - 2\zeta)$ . За интервал дискретного времени длиной  $L$  расстояние между состояниями ведомой и вспомогательной систем изменяется по абсолютной величине в  $\kappa$  раз:

$$\kappa = \prod_{i=n+1}^{n+L} |g'(\zeta_i)|. \quad (13)$$

Для того чтобы произошло разрушение ламинарного движения, на ограниченном и достаточно коротком временном интервале дискретного времени длиной  $L$  величина  $\kappa$  должна быть существенно больше единицы. Будем считать, что разрушение ламинарной фазы происходит при превышении величиной  $\kappa$  некоторого наперед установленного порога  $H \gg 1$ . В [17] эмпирическим путём было установлено, что длина участка, на котором происходит разрушение синхронной динамики и осуществляется переход от ламинарной фазы к турбулентной для рассматриваемых логистических отображений (2) при использованных в [17] значениях управляющих параметров, составляет примерно  $L = 12$  единиц дискретного времени. Выбор более длинного участка в качестве переходной области ведет к тому, что в данную выборку начинают попадать точки, фактически принадлежащие ещё к ламинарной или уже к турбулентной фазе, что приводит к искажению результата. Очевидно, что чем длиннее анализируемый интервал, тем ближе получаются статистические характеристики к характеристикам, полученным по полному временному ряду, и, соответственно, тем менее выраженным оказывается влияние исследуемого механизма. С другой стороны, выбор более коротких временных отрезков для анализа процессов перехода приводит к бедности статистики и опять-таки же к искажению количественных характеристик исследуемого явления.

В том случае, когда функции  $g(\zeta)$  и  $p_\zeta(\zeta)$  симметричны относительно центра распределения величины  $\zeta_c$  (как, например, в рассматриваемой задаче, где  $\zeta_c = 0.5$ ), для удобства можно выполнить замену переменных

$$\eta = 2(\zeta - \zeta_c). \quad (14)$$

Теперь в силу симметрии можно рассматривать только диапазон  $\eta \geq 0$  (в рассматриваемом случае  $\eta \in [0; 1]$ ), а в качестве плотности распределения случайной величины  $\eta$  использовать

$$p(\eta) = 2p_\zeta\left(\frac{\eta + 2\zeta_c}{2}\right). \quad (15)$$

Для равномерной плотности распределения (как в данном случае) на рассматриваемом интервале  $[0; 1]$  имеем

$$p(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \in [0; 1], \\ 0, & \eta > 1, \end{cases} \quad \int_0^1 p(\eta) d\eta = 1. \quad (16)$$

С учётом проведённой замены переменных (14) соотношение (13) может быть записано в виде

$$\kappa = \prod_{i=n+1}^{n+L} \lambda_r(1 - \varepsilon)\eta_i. \quad (17)$$

Соответственно, условие разрушения синхронного движения примет вид

$$\eta_1 \times \eta_2 \times \dots \times \eta_L \geq \frac{H}{(\lambda_r(1 - \varepsilon))^L} = \delta, \quad (18)$$

причём все  $\eta_i$  в соотношении (18) положительны и лежат в интервале  $[0; 1]$ . Величина  $\delta$ , в свою очередь, зависит от управляющих параметров  $H$ ,  $\lambda_r$ ,  $\varepsilon$  и не может быть больше единицы.

При рассмотрении диапазона возможных значений величины  $\eta_1$  понятно, что условие (18) может выполняться, только если  $\eta_1$  находится в интервале  $[\delta; 1]$ , причём для нижней границы  $\eta_1 = \delta$  выполнение (18) возможно лишь при условии  $\eta_2 \times \dots \times \eta_L = 1$ . Аналогично для  $\eta_2$  соотношение (18) будет выполняться для значений из диапазона  $[\delta/\eta_1; 1]$  при выполненном условии  $\eta_1 \in [\delta; 1]$ . Продолжая соответствующие рассуждения по цепочке, можно получить, что для выполнения условия (18) все последующие величины  $\eta_i$  ( $i = 3, \dots, L$ ) должны находиться в диапазонах  $\eta_3 \in [\delta/(\eta_1\eta_2); 1]$ ,  $\dots$ ,  $\eta_L \in [\delta/(\eta_1\eta_2 \dots \eta_{L-1}); 1]$ . Вероятность реализации такого события для произвольной плотности распределения вероятности  $p(\eta)$  будет определяться как условная вероятность осуществления каждого из вышеупомянутой цепочки событий

$$P(\delta, L) = \int_{\delta}^1 p(\eta_1) \int_{\delta/\eta_1}^1 p(\eta_2) \dots \int_{\delta/(\eta_1\eta_2 \dots \eta_{L-1})}^1 p(\eta_L) d\eta_L \dots d\eta_2 d\eta_1. \quad (19)$$

В рассматриваемом случае при выполнении допущения (16) соотношение (19) становится более простым

$$P(\delta, L) = \int_{\delta}^1 \int_{\delta/\eta_1}^1 \dots \int_{\delta/(\eta_1\eta_2 \dots \eta_{L-1})}^1 d\eta_L \dots d\eta_2 d\eta_1 \quad (20)$$

и допускает аналитическое решение в виде

$$P(\delta, L) = 1 - \delta \sum_{i=0}^{L-1} (-1)^i \frac{\ln^i \delta}{i!}. \quad (21)$$

Таким образом, полученное соотношение (21) даёт вероятность того, что на выбранном отрезке дискретной временной реализации  $\{\eta_i\}$ , длина которого составляет  $L$  дискретных единиц, будет наблюдаться возрастание модуля величины  $\xi$  (которая представляет собой расстояние между ведомой и вспомогательной системами) более чем в  $H$  раз (то есть  $|\xi_{i+L}/\xi_i| \geq H$ ). Иными словами, с помощью выражения (21) можно оценить вероятность того, что некоторый временной интервал длительностью  $L$  временной реализации  $\{\eta_i\}$  будет являться участком перехода от ламинарной фазы к турбулентной.

Следует также отметить, что в полученном соотношении (21) сумма представляет собой  $L + 1$  старших членов разложения экспоненты  $e^x$  в степенной ряд при значении аргумента  $x = \ln(1/\delta)$ . Соответственно, для временного интервала с длиной  $L$ , стремящейся к бесконечности, вероятность возрастания величины  $\xi$  в  $H$  раз стремится к нулю, что соответствует отрицательности старшего условного показателя Ляпунова вблизи границы установления синхронного режима.

Важно обратить внимание, что величина  $\delta$ , входящая в соотношение (21), зависит не только от управляющих параметров  $H$ ,  $\lambda$  и  $\varepsilon$ , но и от длины  $L$  анализируемой последовательности (см. соотношение (18)), поэтому соотношение (21) имеет смысл переписать в виде

$$P_{\lambda,\varepsilon}(H, L) = 1 - \frac{H}{(\lambda(1-\varepsilon))^L} \sum_{i=0}^L \frac{(-1)^i}{i!} \ln^i \frac{H}{(\lambda(1-\varepsilon))^L}. \quad (22)$$

### 3. Плотность распределения вероятностей

С помощью построенной в разделе 2 вероятностной модели можно получить аналитическое выражение плотности распределения вероятностей  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$  величины  $\zeta$  для интервалов, соответствующих разрушению ламинарных фаз и, соответственно, для которых выполняется условие (18). Такая плотность распределения  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$  качественно будет соответствовать плотности распределения вероятности  $p_{l \rightarrow t}(y_n)$  динамической переменной  $y_n$  ведомой системы однонаправленно связанных логистических отображений (2), полученной для интервалов времени, соответствующих разрушению синхронного движения и переходу от ламинарного поведения к турбулентному (см. рис. 1, f).

Для получения выражения для плотности распределения вероятностей  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$  следует рассчитать, какова будет вероятность разрушения ламинарной фазы (22) на длине интервала  $L$  в том случае, если одна из точек последовательности  $\{\eta_j\}_{j=i+1}^{i+L}$  принимает некоторое фиксированное значение  $\eta^*$ . Если это фиксированное значение принимает первая точка анализируемой последовательности, то вероятность разрушения ламинарной фазы на участке длиной  $L$  при указанном условии можно получить, повторив вышеприведенные вычисления (18)–(20) при фиксированном значении  $\eta_1 = \eta^*$  и, соответственно, без интегрирования по переменной  $\eta_1$ :

$$P_{\lambda,\varepsilon}(H, L | \eta_1 = \eta^*) = 1 - \frac{H}{\eta^*(\lambda(1-\varepsilon))^L} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{(-1)^i}{i!} \ln^i \frac{H}{\eta^*(\lambda(1-\varepsilon))^L}. \quad (23)$$

Понятно, что переменная  $\eta$  может принять искомое значение  $\eta^*$  не обязательно в первой точке анализируемой последовательности, но с учетом равнозначности и независимости друг от друга всех точек последовательности, вероятность разрушения ламинарной фазы при условии, скажем, что третья точка последовательности  $\{\eta_j\}_{j=i+1}^{i+L}$  принимает значение  $\eta^*$ , будет той же самой, что и для случая  $\eta_1 = \eta^*$ , а следовательно, будет определяться тем же самым соотношением (23).

Тогда вероятность того, что на интервале длиной  $L$  произойдет переход от ламинарной фазы к турбулентной при условии, что хотя бы одна из точек этой последовательности примет значение  $\eta^*$ , в силу условной вероятности будет определяться как

$$P_{\lambda,\varepsilon}(H, L|\eta = \eta^*) = LP_{\lambda,\varepsilon}(H, L|\eta_1 = \eta^*). \quad (24)$$

Фактически учет возможности одной из всех точек рассматриваемой последовательности принять наперед заданную величину  $\eta^*$  влияет только на нормировочный множитель  $L$  по сравнению с соотношением (23).

По факту найденная условная вероятность (24) представляет собой плотность распределения величины  $\eta$  для участков временной реализации длиной  $L$ , соответствующих разрушению ламинарной фазы и переходу от синхронной динамики к асинхронной. Теперь для того чтобы получить искомую плотность распределения вероятностей  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$ , остается только осуществить обратный переход от величины  $\eta$  к  $\zeta$ . С учетом соотношения (14) и учета симметрии задачи относительно точки  $\zeta_c = 0.5$  для плотности распределения вероятностей  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$  можно получить следующее выражение:

$$p_{l \rightarrow t}(\zeta) = L \left( 1 - \frac{H}{2|\zeta - \zeta_c|(\lambda(1 - \varepsilon))^L} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{(-1)^i}{i!} \ln^i \frac{H}{2|\zeta - \zeta_c|(\lambda(1 - \varepsilon))^L} \right). \quad (25)$$

Полученное выражение (25) предопределяет и объясняет возникновение «клюва» на плотности распределения вероятностей для участков перехода от ламинарных фаз к турбулентным, как, например, на рис. 1, *f*.

На рис. 2 приведено сопоставление полученного аналитического соотношения (25) с результатами численного моделирования, в ходе которого для равномерно распределенной в интервале  $[0; 1]$  случайной величины  $\zeta$  на каждом интервале дискретного времени длиной  $L$  единиц при фиксированных значениях управляющих параметров  $\lambda = 3.95$  и  $\varepsilon = 0.32$  вычислялась величина  $k$  (см. соотношение (13)). Те интервалы, для которых величина  $k$  превышала наперед заданное значение порога  $H = 10$ , трактовались как участки, соответствующие переходу от синхронного

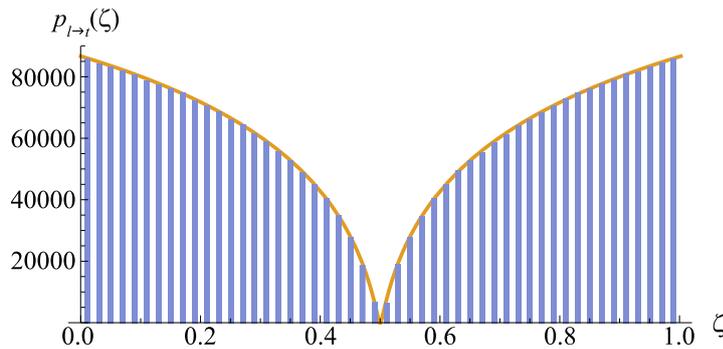


Рис. 2. Плотность распределения случайной величины  $\zeta$  для интервалов времени, соответствующих разрушению синхронного движения и переходу от ламинарного поведения к турбулентному  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$ , полученная с помощью численного моделирования (столбики) и аналитическая кривая (сплошная линия), определяемая соотношением (25). Значения управляющих параметров  $\lambda = 3.95$ ,  $\varepsilon = 0.32$ . Общее количество точек –  $3 \times 10^6$  (цвет онлайн)

Fig. 2. The distribution density of the random variable  $\zeta$  for time intervals corresponding to the destruction of the synchronous motion and the transition from the laminar to the turbulent behavior  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$ , obtained by means of numerical simulation (bars) and the analytical curve (solid line) determined by relation (25). The values of the control parameters are  $\lambda = 3.95$ ,  $\varepsilon = 0.32$ . The total number of points is  $3 \times 10^6$  (color online)

поведения к асинхронному, и, соответственно, все точки этого участка использовались для численного построения плотности распределения вероятностей  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$ . Как видно из рис. 2, результаты численного моделирования очень хорошо соответствуют кривой, определяемой аналитическим соотношением (25).

Из рис. 1, *f* и 2 также видно хорошее качественное соответствие профилей плотности распределения динамической переменной ведомой системы  $y_n$  и случайной величины  $\zeta_n$ , моделирующей поведение детерминированной системы в окрестности границы установления обобщённой хаотической синхронизации. На обоих графиках отчетливо виден характерный «клюв», упирающийся в точку экстремума графика отображения модифицированной системы (10).

Следует отметить, что точка  $\zeta_c = 0.5$  в вероятностной модели и, соответственно, точка  $y_c = 0.5$  в ведомом логистическом отображении в (2), в которых производная модифицированной системы (10) обращается в ноль, локально характеризуются максимальной устойчивостью (суперустойчивостью). В этих точках за одну итерацию любое возмущение (пока оно находится в рамках линейного приближения (8)) схлопывается до нуля. Близлежащие точки к  $\zeta_c$  (или к  $y_c$  соответственно) также характеризуются значительной устойчивостью, поскольку производная модифицированной системы в этих точках близка к нулю. Очевидно, что попадание фазовой траектории в окрестность точки  $\zeta_c$  ( $y_c$  для ведомого логистического отображения (2)) приводит к радикальному уменьшению возмущения  $\xi_n$ . Следовательно, для того чтобы возмущение нарастало с течением времени и за ограниченное число итераций  $L$  превысило наперед заданный порог  $H$  (что в рассматриваемой модели соответствует разрушению ламинарной фазы движения), необходимо, чтобы в течение данного количества последовательных итераций изображающая точка как можно реже попадала в окрестность критической точки  $\zeta_c$  ( $y_c$ ) и совсем не попадала в эту критическую точку, что, собственно, и объясняет качественное формирование «клюва» на профиле распределения динамических переменных на рис. 1, *f* и 2.

Очевидно также, что ожидать полного количественного соответствия в данном случае не приходится по двум основным причинам.

1. Предложенная вероятностная модель изначально базируется на линейном описании, соответствующем разрушению ламинарной фазы движения и переходу к турбулентному участку. Соответственно, она не будет давать корректные результаты в случае большой разницы между состояниями ведомой и вспомогательной систем (что как раз имеет место во время асинхронного участка поведения связанных систем).
2. Плотность распределения динамической переменной  $y_n$  не совпадает с равномерной плотностью распределения вероятностей  $p(\zeta)$ , использованной при получении аналитической зависимости (25), а следовательно, ожидать полного количественного соответствия в данном случае не приходится.

## Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена вероятностная модель в предположении равномерно распределённой случайной величины для описания разрушения ламинарных фаз (участков синхронной динамики) во временных рядах одномерных динамических систем с дискретным временем, находящихся в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации. Следует отметить, что, несмотря на глубинную взаимосвязь динамических систем с непрерывным и дискретным временем, а также общность закономерностей, наблюдающихся при установлении режима обобщённой хаотической синхронизации, обобщение результатов, полученных в настоящей работе для одномерных динамических систем с дискретным временем, на отображения большей размерности, а также потоковые системы требует дополнительных исследований.

## References

1. Pikovsky AS, Osipov GV, Rosenblum MG, Zaks M, Kurths J. Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 1997;79(1):47–50. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.47.
2. Boccaletti S, Allaria E, Meucci R, Arcchi FT. Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO<sub>2</sub> laser systems. *Phys. Rev. Lett.* 2002;89(19):194101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.194101.
3. Hramov AE, Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Boccaletti S. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 2006;97(11):114101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.114101.
4. Rosenblum MG, Pikovsky AS, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78(22):4193–4196. DOI: 10.1103/PHYSREVLETT.78.4193.
5. Boccaletti S, Valladares DL. Characterization of intermittent lag synchronization. *Phys. Rev. E.* 2000;62(5):7497–7500. DOI: 10.1103/PhysRevE.62.7497.
6. Pyragas K. Properties of generalized synchronization of chaos. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control.* 1998;IMI(3):101–129. DOI: 10.15388/NA.1998.3.0.15261.
7. Hramov AE, Koronovskii AA. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. *Europhysics Lett.* 2005;70(2):169–175. DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6.
8. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Pivovarov AA, Khanadeev VA, Hramov AE, Pisarchik AN. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization. *Phys. Rev. E.* 2020;102(1):012205. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205.
9. Rulkov NF, Sushchik MM, Tsimring LS, Abarbanel HDI. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E.* 1995;51(2):980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
10. Rulkov NF. Images of synchronized chaos: Experiments with circuits. *Chaos.* 1996;6(3):262–279. DOI: 10.1063/1.166174.
11. Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos. *Phys. Rev. E.* 1996;54(5):R4508–R4511. DOI: 10.1103/PhysRevE.54.R4508.
12. Pyragas K. Conditional Lyapunov exponents from time series. *Phys. Rev. E.* 1997;56(5):5183–5188. DOI: 10.1103/PhysRevE.56.5183.
13. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization. *Phys. Rev. E.* 2011;84(3):037201. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.037201.
14. Abarbanel HDI, Rulkov NF, Sushchik MM. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Phys. Rev. E.* 1996;53(5):4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528.
15. Berge P, Pomeau Y, Vidal C. *Order within Chaos.* New York: John Wiley and Sons; 1984. 329 p.
16. Manneville P, Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. *Physica D.* 1980;1(2):219–226. DOI: 10.1016/0167-2789(80)90013-5.
17. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Selskii AO. Intermittent generalized synchronization and modified system approach: Discrete maps. *Phys. Rev. E.* 2024;109:064217. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.064217.
18. Hramov AE, Koronovskii AA, Moskalenko OI. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? *Phys. Lett. A.* 2006;354(5–6):423–427. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.01.079.
19. Hramov AE, Koronovskii AA. Generalized synchronization: a modified system approach. *Phys. Rev. E.* 2005;71(6):067201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.067201.
20. Herzog H, Freund J. Chaos, noise, and synchronization reconsidered. *Phys. Rev. E.* 1995;52(3):3238–3241. DOI: 10.1103/PHYSREVE.52.3238.

21. Shuai JW, Wong KW. Noise and synchronization in chaotic neural networks. *Phys. Rev. E.* 1998;57(6):7002–7007. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.7002.
22. Pakdaman K, Mestivier D. Noise induced synchronization in a neuronal oscillator. *Physica D.* 2004;192(1):123–137. DOI: 10.1016/j.physd.2003.12.006.



*Короновский Алексей Александрович* — родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Проректор по научной работе и цифровому развитию СГУ, заведующий кафедрой физики открытых систем Института физики СГУ. Область научных интересов — динамический хаос, синхронизация, нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой деятельности. Автор научных монографий и статей в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com  
 ORCID: 0000-0003-3585-317X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 73470



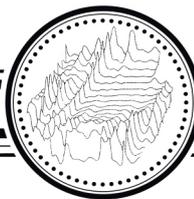
*Москаленко Ольга Игоревна* — родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006). Доктор физико-математических наук (2017), профессор (2024). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов — исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор около 200 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах, нескольких монографий и патентов на изобретения и полезные модели.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com  
 ORCID: 0000-0001-5727-5169  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 150252



*Сельский Антон Олегович* — окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2011). Кандидат физико-математических наук (2014). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ (с 2017). Область научных интересов — междисциплинарное направление нейронауки, включающее в себя анализ сложных сигналов различной биомедицинской природы и разработка новых методов и подходов к анализу таких сигналов.

Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: selskii@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0003-3175-895X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 643422



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003153  
EDN: JIIRXF

## Вырожденные случаи в дискретных динамических системах Лотки–Вольтерры

Р. Н. Ганиходжаев<sup>1</sup>, Д. Б. Эшмаматова<sup>2,3</sup>✉, У. Р. Муминов<sup>4</sup>, С. И. Машарипов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный университет Узбекистана

<sup>2</sup>Ташкентский государственный транспортный университет

<sup>3</sup>Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз

<sup>4</sup>Ферганский государственный университет

E-mail: rganikhodzhaev@gmail.com, ✉24dil@mail.ru, ulugbek.muminov.2020@mail.ru,  
sirojiddinmasharipov1995@gmail.com.

Поступила в редакцию 15.07.2023, принята к публикации 14.09.2024,  
опубликована онлайн 7.12.2024, опубликована 31.03.2025

**Аннотация.** Цель работы — исследование асимптотического поведения траекторий внутренних точек дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с вырожденными кососимметрическими матрицами, действующих в двумерном и трехмерном симплексах. Оказалось, что в ряде прикладных задач возникают отображения Лотки–Вольтерры именно такого типа, и точки симплекса в этом случае рассматриваются как состояния исследуемой системы. При этом отображение, сохраняющее симплекс, определяет дискретный закон эволюции данной системы. Для произвольной начальной точки мы можем построить последовательность — орбиту, определяющую ее эволюцию. И если в этом случае отображение является автоморфизмом, то мы можем определить как положительную, так и отрицательную орбиту для рассматриваемой точки. При этом особый интерес вызывают предельные множества положительных и отрицательных орбит. **Методы.** Известно, что для отображений Лотки–Вольтерры можно определить предельные множества, которые в случае невырожденных отображений состоят из единственной точки. В настоящей работе мы определяем эти множества для вырожденных отображений Лотки–Вольтерры с помощью построения функции Ляпунова и анализа спектра якобиана. Отметим, что эти множества позволяют описать динамику рассматриваемых систем. **Результаты.** Учитывая, что рассматриваемые в статье отображения являются автоморфизмами, для них с помощью функций Ляпунова и анализа спектра якобиана построены множества предельных точек как положительной, так и отрицательной траекторий и доказано, что в вырожденном случае эти множества являются бесконечными. Также в работе показано, что вырожденным отображениям можно поставить в соответствие частично-ориентированные графы, с помощью которых можем наглядно увидеть фазовый портрет траекторий внутренних точек. **Заключение.** Вырожденные случаи отображений Лотки–Вольтерры до нас другими авторами рассмотрены не были. Эти отображения интересны тем, что их можно рассматривать как дискретные модели эпидемиологических ситуаций, в частности, для исследования течения вирусных инфекций, передающихся воздушно-капельным путем. Результаты, полученные в работе, дают подробное описание динамики траекторий отображений Лотки–Вольтерры с вырожденными матрицами. Кроме того, для рассматриваемых систем в целях наглядного представления динамики эпидемиологических ситуаций были построены частично-ориентированные графы.

**Ключевые слова:** отображение Лотки–Вольтерры, орбита, функция Ляпунова, частично-ориентированный граф.

**Благодарности.** Д. Б. Эшмаматова, У. Р. Муминов и С. И. Машарипов выражают благодарность своему научному руководителю, профессору Р. Н. Ганиходжаеву за идею и постановку рассмотренной задачи.

*Для цитирования:* Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б., Муминов У. Р., Машарипов С. И. Вырожденные случаи в дискретных динамических системах Лотки–Вольтерры // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 165–183. DOI: 10.18500/0869-6632-003153. EDN: JIIRXF

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003153

## Degenerate cases in discrete Lotka–Volterra dynamical systems

R. N. Ganikhodzhaev<sup>1</sup>, D. B. Eshmamatova<sup>2,3</sup>✉, U. R. Muminov<sup>4</sup>, S. I. Masharipov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National University of Uzbekistan

<sup>2</sup>Tashkent State Transport University, Uzbekistan

<sup>3</sup>V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

<sup>4</sup>Fergana State University

E-mail: rganikhodzhaev@gmail.com, ✉24dil@mail.ru, ulugbek.muminov.2020@mail.ru, sirojiddinmasharipov1995@gmail.com

*Received 15.07.2023, accepted 14.09.2024, available online 7.12.2024, published 31.03.2025*

**Abstract.** The purpose of the work is to study the asymptotic behavior of trajectories of interior points of discrete Lotka–Volterra dynamical systems with degenerate skew-symmetric matrices operating in two-dimensional and three-dimensional simplexes. It turned out that in a number of applied problems, the Lotka–Volterra mappings of this type arise and the simplex points in this case are considered as the state of the system under study. In this case, the mapping preserving the simplex determines the discrete law of evolution of this system. For an arbitrary starting point, we can construct a sequence – an orbit that determines its evolution. And if in this case the mapping in question is an automorphism, we can define both a positive and a negative orbit for the point in question. At the same time, the limiting sets of positive and negative orbits are of particular interest. **Methods.** It is known that for Lotka–Volterra mappings it is possible to define limit sets, which in the case of non-degenerate mappings consist of a single point. In this paper, we define these sets for degenerate Lotka–Volterra mappings by constructing the Lyapunov function and applying Jacobian spectrum analysis. It should be noted that these sets allow us to describe the dynamics of the systems under consideration. **Results.** Taking into account that the considered mappings are automorphisms, using the Lyapunov functions and applying the analysis of the Jacobian spectrum, sets of limit points of both positive and negative trajectories are constructed and it is proved that in the degenerate case they are infinite. It is also shown that partially oriented graphs can be constructed for degenerate mappings. **Conclusion.** Degenerate cases of Lotka–Volterra mappings have not been considered by other authors before us. These mappings are interesting because they can be considered as discrete models of epidemiological situations, in particular, for studying the course of airborne viral infections. The results obtained in this work provide a detailed description of the dynamics of the trajectories of Lotka–Volterra mappings with degenerate matrices. In addition, partially oriented graphs were constructed for the systems under consideration in order to visually represent the dynamics of epidemiological situations.

**Keywords:** Lotka–Volterra mapping, orbit, Lyapunov function, partially-oriented graph.

**Acknowledgements.** D. B. Eshmamatova, U. R. Muminov and S. I. Masharipov express their gratitude to their scientific supervisor, Professor R. N. Ganikhodzhaev for the idea and formulation of the considered problem.

**For citation:** Ganikhodzhaev RN, Eshmamatova DB, Muminov UR, Masharipov SI. Degenerate cases in discrete Lotka–Volterra dynamical systems. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2):165–183. DOI: 10.18500/0869-6632-003153

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Введение

Многие практические вопросы сводятся к описанию различных структур и процессов нелинейной динамики, их эволюции во времени и пространстве, а также процессов, в которые вовлечены сложные структуры [1–4]. Все это приводит к изучению динамических свойств

квадратичных отображений. Если обратимся к квадратичным стохастическим операторам, то их исследования начались с работы Бернштейна [5], и по сей день их теория развивается в связи с ее многочисленными приложениями в математике, биологии, физике, популяционной генетике, эпидемиологии, экологии, а также экономике [3, 4, 6–12].

Для исследования динамических свойств любой системы достаточно знать ее состояние в заданные дискретные моменты времени. Как правило, в этих случаях физики и механики в качестве математической модели исследуемого процесса рассматривают непрерывные динамические системы, в частности, автономные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных [6, 10, 13]. Эта склонность также присуща биологам и эпидемиологам [4, 8, 14, 15], но оказалось, что для многих биологических и эпидемиологических ситуаций, а также в задачах, связанных с популяционной генетикой, предпочтительно рассматривать изменения из года в год или же от поколения к поколению. В описании и исследовании задач подобного типа в качестве эволюционного оператора целесообразно использование функции, выражающей состояние системы в некоторый момент времени через ее состояние в предыдущий момент.

Начнем работу с изложения необходимых сведений. Как известно [16], в ряде прикладных задач точки симплекса

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m) : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$$

рассматриваются как состояние системы, состоящей из  $m$  видов [17–20]. При этом отображение  $f : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  определяет дискретный закон эволюции этой системы. Рассмотрев некоторую начальную точку  $x^0 \in S^{m-1}$ , можно построить последовательность  $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$ , определяющую эволюцию точки  $x^{(0)}$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Последовательность  $\{x^{(n)}\}$  называется положительной орбитой, а  $\{x^{(-n)}\}$  — отрицательной орбитой точки  $x^{(0)}$ . Отрицательную орбиту можно строить только лишь в случае, когда отображение  $f : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  — автоморфизм. В работе [18] в качестве такого автоморфизма было введено квадратичное стохастическое отображение, задаваемое набором чисел  $\{P_{ij,k}\}$ ,  $i, j, k = \overline{1, m}$ , удовлетворяющих условиям  $P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1$ , и действующее по равенствам

$$x'_k = (Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Очевидно [18], что условия, наложенные на коэффициенты  $\{P_{ij,k}\}$ , обеспечивают сохранение симплекса  $S^{m-1}$ . Известно, что в математической генетике отображение (1) называется эволюционным оператором. Популяция определяется как замкнутое относительно размножения сообщество организмов. В популяции различаются последовательные поколения  $F_1, F_2, \dots$ . Предполагается, что между особями различных поколений никогда не происходит скрещиваний. Каждая особь, входящая в популяцию, принадлежит некоторой (единственной) из  $n$  разновидностей («признаков»):  $1, 2, \dots, n$ . Состояние популяции — это набор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1}$  вероятностей разновидностей. Коэффициенты наследственности  $\{P_{ij,k}\}$  — это вероятность рождения особи, принадлежащей  $k$ -й разновидности при скрещивании особей из  $i$ -й и  $j$ -й разновидностей. При панмиксии родительская пара образуется в состоянии  $x$  с вероятностью  $x_i x_j$ . Это означает, что уравнение (1) будет полной вероятностью разновидности для непосредственных потомков. Если же в некотором поколении популяция находится в состоянии  $x$ , то в следующем поколении она находится в состоянии  $x' = Vx$ . Условие симметричности  $P_{ij,k} = P_{ji,k}$  означает, что разновидности не связаны с полом.

Одна из основных задач математической генетики, эпидемиологии и популяционной генетики состоит в исследовании поведения траекторий:

$$x^0, Vx^0, V^2x^0, V^3x^0, \dots,$$

то есть итераций отображения  $V$ .

Пусть  $\omega(x^{(0)}) = \{x^{(n)}\}'$  — множество предельных точек положительной траектории, а  $\alpha(x^{(0)}) = \{x^{(-n)}\}'$  — множество предельных точек отрицательной траектории ([16, 18]).

**Определение 1 ([18]).** Квадратичное стохастическое отображение  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ , определяемое равенствами (1), называется отображением Лотки–Вольтерры, если коэффициенты наследственности  $\{P_{ij,k}\}$  удовлетворяют условию  $P_{ij,k} = 0$  при  $k \notin \{i, j\}$ .

В работах [16, 18] было доказано, что отображение (1), удовлетворяющее условиям определения 1, можно представить в виде

$$V : x'_k = x_k \left( 1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где

$$a_{ki} = \begin{cases} 2P_{ik,k} - 1, & i \neq k, \\ 0, & i = k. \end{cases}$$

Здесь  $A = (a_{ki})$  — вещественная кососимметрическая матрица, для которой  $A = -A^T$ , где  $A^T$  — транспонированная матрица к матрице  $A$ , и  $a_{ki} = -a_{ik}$ ,  $|a_{ki}| \leq 1$ ,  $k, i = \overline{1, m}$ .

Как было отмечено выше, актуальная проблема математической биологии состоит в изучении асимптотического поведения траекторий. В работе [21] утверждается, что эта проблема была полностью решена для вольтерровских квадратичных стохастических операторов, определенных равенствами (2). В статьях [16, 18, 22] теория операторов такого типа была развита с использованием теории функции Ляпунова и турниров. Биологический смысл отображений Лотки–Вольтерры с соответствующей кососимметрической матрицей, являющейся матрицей в общем положении заключается в том, что индивид повторяет генотип одного из его родителей. Оператор  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ , представленный в виде (2), трактуется как эволюция системы с дискретным временем. Условие  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$  диктуется прикладными требованиями к оператору, описанному выше.

В работе [21] описаны неподвижные точки квадратичных стохастических операторов Вольтерра для двуполой популяции, и это сведено к описанию неподвижных точек операторов вольтерровского типа. Для операторов такого вида в данной работе построены функции Ляпунова  $\varphi(x, y) = \prod_{j=n+1}^v y_j$  и  $\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^r (x_j + y_j)$ , используя которые получены верхние границы для  $\omega$ -предельного множества траекторий.

В работе [17] рассмотрена динамическая система с дискретным временем, определенная нелинейным оператором с четырьмя действительными параметрами, описывающая экосистему океана. Для этой системы найдены условия для параметров, при которых оператор сводится к квадратичному стохастическому оператору вольтерровского типа, сохраняющему двумерный симплекс. В работе показано, что при некоторых условиях для коэффициентов этот оператор может иметь или до трех, или счетное число неподвижных точек.

В работах [14, 15, 23–25] рассмотрены непрерывные динамические системы биологии, эпидемиологии, а также непрерывные варианты систем Лотки–Вольтерры, а работы [16, 18–20, 26–33]

посвящены исследованию дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры. Вообще говоря, динамические свойства дискретных систем Лотки–Вольтерры отличаются от соответствующих свойств непрерывных систем и часто описывают более точную картину эволюции.

Как мы уточнили выше, в работах [16, 18, 22, 28–31] рассматривались динамические системы вида (2) в случае, когда соответствующая кососимметрическая матрица является матрицей в общем положении. Но оказалось, что в случае, когда кососимметрическая матрица не является матрицей в общем положении, асимптотическое поведение траекторий совсем иное, так как операторы в этом случае имеют бесконечно много неподвижных точек. Именно операторы, введенные в настоящей статье, то есть операторы Лотки–Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей, возникают в задачах эпидемиологии в качестве дискретных моделей для исследования течения заболеваний, передающихся воздушно-капельным путем. В работе показано, что операторам такого типа, в отличие от невырожденных случаев, соответствуют частично-ориентированные графы. Также в работе рассмотрена функция Ляпунова вида  $\varphi(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_m^{p_m}$ , которая была введена в работе [16]. Доказано, что и в вырожденном случае функцию Ляпунова такого вида можно применить для нахождения предельных множеств рассматриваемых отображений. Иными словами, в предлагаемой статье исследовано асимптотическое поведение орбит некоторых систем с вырожденными матрицами, при этом динамика каждой из них отличается друг от друга. Рассматриваемые в работе системы взяты из прикладных задач популяционной генетики, эпидемиологии, экологии и т. д. (см. [14, 15, 19, 20]). Если сказать более точно, в работе рассмотрены вырожденные случаи дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры, действующих в двумерном и трехмерном симплексах, так как именно эти системы можно предложить в качестве дискретных моделей для исследования течения вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём.

## 1. Методика

Пусть  $A = (a_{ki})$  – кососимметрическая матрица  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  с условием  $|a_{ki}| \leq 1$ . Как уточняли выше, для любого  $x \in \mathbb{R}^m$  отображение  $x' = Vx$ , определяемое равенствами [16, 18]

$$x'_k = x_k \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i\right), \quad k = 1, \dots, m,$$

называется оператором Лотки–Вольтерры. Очевидно, при условии  $|a_{ki}| \leq 1$  симплекс  $S^{m-1}$  инвариантен, то есть  $V(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$ . Известно ([16]), что на симплексе  $S^{m-1}$  оператор Лотки–Вольтерры является автоморфизмом при любых  $|a_{ki}| \leq 1$  и  $a_{ki} = -a_{ik}$ . Так как  $S^{m-1}$  – компакт, то множество предельных точек положительной траектории  $\omega(x^{(0)}) \neq \emptyset$  и множество предельных точек отрицательных траекторий  $\alpha(x^{(0)}) \neq \emptyset$  для всех точек симплекса  $x^{(0)} \in S^{m-1}$ .

Известно [22, 27, 28], что кососимметрическая матрица называется матрицей общего положения, если все главные миноры четного порядка отличны от нуля, в противном случае она называется вырожденной кососимметрической матрицей. Асимптотическое поведение орбит в системах Лотки–Вольтерры с невырожденными матрицами изучалось в работах [16, 18, 20, 22, 26–33]. Также известно [16, 18, 28], что в случае, когда отображение Лотки–Вольтерры в общем положении, мы можем связать их с турнирами, а в вырожденных случаях их можно связать с частично-ориентированными графами [19, 20].

В работе [16] была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Если  $A$  – кососимметрическая матрица, тогда множества*

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\}, \quad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\}$$

– непустые выпуклые многогранники.

На основе этой теоремы в работе [16] в случае общего положения отображений Лотки–Вольтерры были построены функции Ляпунова вида  $\varphi_p(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_m^{p_m}$ ,  $x \in S^{m-1}$ .

Оказалось, что в случае, когда кососимметрическая матрица в общем положении для соответствующего отображения Лотки–Вольтерры, множества  $P$  и  $Q$  состоят из единственной точки, либо они совпадают [16, 18]. Наша задача, в отличие от вышеупомянутых работ, — найти и построить множества  $P$  и  $Q$  для вырожденных случаев отображений Лотки–Вольтерры, а также с помощью построения функций Ляпунова найти и исследовать множества  $\alpha(x^{(0)})$  и  $\omega(x^{(0)})$ . Мы доказываем, что множества  $P$  и  $Q$  в нашем случае бесконечны.

## 2. Результаты

В основной части статьи рассмотрим несколько динамических систем, обобщить которые нет возможности, так как асимптотические поведения траекторий внутренних точек в корне отличаются друг от друга. В монографиях [34, 35] введены частично-ориентированные графы при  $m = 3$ . А в работах [19, 20, 28] показано, что системам Лотки–Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей можно поставить в соответствие частично-ориентированные графы при  $m = 3$  и  $m = 4$ . В работе [28] показано, что при  $m = 3$  существует 16 частично-ориентированных графов, а в работе [34] показано, что при  $m = 4$  существует 42 частично-ориентированных графа. В данной статье мы показываем, что эти частично-ориентированные графы можно связать с дискретными динамическими системами Лотки–Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей. В работах [19, 20, 36] некоторые из них предлагаются в качестве дискретных компартментарных моделей  $SIR$ ,  $SIRD$ ,  $SEIR$ , описывающих течение вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путем с нерецидивным характером. В данной работе мы даем полное математическое обоснование этим дискретным динамическим системам, а также в дополнение мы включили в работу те динамические системы, которые могут претендовать на роль дискретных моделей вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путем с рецидивным характером.

Рассмотрим систему Лотки–Вольтерры

$$V_1 : \begin{cases} x'_1 = x_1 \cdot (1 - ax_2 + bx_3), \\ x'_2 = x_2 \cdot (1 + ax_1), \\ x'_3 = x_3 \cdot (1 - bx_1), \end{cases} \quad (3)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ ,  $V_1 x = x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ ,  $0 < a, b \leq 1$ . Система (3) является простейшим примером системы Лотки–Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В работе [22] приведены понятия турнира и однородности турнира, а также там показано, что в случае, когда кососимметрическая матрица, соответствующая отображению Лотки–Вольтерры, является матрицей в общем положении, тогда ей можно поставить в соответствие турнир — полный ориентированный граф. Кососимметрическая матрица, соответствующая рассматриваемому нами отображению, не является матрицей в общем положении, этой матрице мы поставим в соответствие частично-ориентированный граф, приведенный на рис. 1.

Так как в матрице  $A_1$  элемент  $a_{23} = 0$ , тогда ребро  $\Gamma_{23}$ , соединяющее вершины  $e_2 = (0, 1, 0)$  и  $e_3 = (0, 0, 1)$ , не имеет направления. Это означает, что все ребро состоит из неподвижных точек с координатами  $(0, \alpha, 1 - \alpha)$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

Согласно [16], любая точка  $p = (p_1, p_2, p_3)$  симплекса  $S^2$  определяет функцию

$$\varphi_p(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3}, \quad x \in S^2.$$

Известно, что  $\varphi_p$  непрерывна на  $S^2$  (полагаем  $0^0 = 1$ ), причем экстремумы этой функции  $\max_{x \in S^2} \varphi_p(x) = \varphi_p(p)$ , а  $\min_{x \in S^2} \varphi_p(x) = 0$ . Ясно, что максимум достигается в единственной точке  $x = p$ , а минимум достигается на границе симплекса  $S^2$  или на её замкнутой части. Пусть теперь  $c \in [0; \varphi_p(p)]$ . Докажем, что множество  $\{x \in S^2 : \varphi_p(x) \geq c\}$  выпукло.

Действительно, если  $x, y \in S^2$ , причем  $\varphi_p(x) \geq c$  и  $\varphi_p(y) \geq c$ , тогда

$$\begin{aligned} \varphi_p\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{x_2+y_2}{2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{x_3+y_3}{2}\right)^{p_3} \geq \\ &\geq (\sqrt{x_1 \cdot y_1})^{p_1} \cdot (\sqrt{x_2 \cdot y_2})^{p_2} \cdot (\sqrt{x_3 \cdot y_3})^{p_3} \geq c. \end{aligned}$$

Возвращаясь к системе (1), получаем

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} \cdot (1 - ax_2^{(n)} + bx_3^{(n)}), \\ x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} \cdot (1 + ax_1^{(n)}), \\ x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} \cdot (1 - bx_1^{(n)}) \end{cases}$$

для любого  $n \in \mathbb{Z}$  и начальной точки  $x^{(0)} \in S^2$ .

Так как последовательности  $\{x_2^{(n)}\}$  и  $\{x_3^{(n)}\}$  монотонны, любая траектория сходится к неподвижной точке отображения  $V_1$ , то есть как положительная, так и отрицательная траектории сходятся.

В силу непрерывности отображения  $V_1$  для любого  $x^{(0)} \in S^2$  получаем, что  $\alpha(x^{(0)})$  и  $\omega(x^{(0)})$  суть неподвижные точки для отображения  $V_1$ .

Заметим, что решением неравенства  $A_1 x \geq 0$  на симплексе  $S^2$  является отрезок с концами  $(0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$  и  $(0, 0, 1)$ , то есть

$$P = \{x \in S^2 : A_1 x \geq 0\} = \left\{ \left( 0; \frac{\lambda b}{a+b}; \frac{a+(1-\lambda)b}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}. \quad (4)$$

Для произвольного  $p = \left( 0, \frac{\lambda b}{a+b}, \frac{a+(1-\lambda)b}{a+b} \right) \in P$  рассмотрим функцию на  $S^2$ :

$$\varphi_p(x) = x_2^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot x_3^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}}. \quad (5)$$

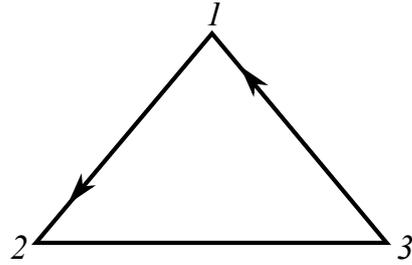


Рис. 1. Частично-ориентированный граф, соответствующий матрице  $A_1$

Fig. 1. A partially-oriented graph corresponding to the matrix  $A_1$

Используя неравенство Юнга [16, 18], получаем

$$\begin{aligned}\varphi_p(V_1x) &= (x_2(1+ax_1))^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot (x_3(1-bx_1))^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}} = x_2^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot x_3^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}} \cdot (1+ax_1)^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot (1-bx_1)^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}} = \\ &= \varphi_p(x) \cdot (1+ax_1)^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot (1-bx_1)^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}} \leq \varphi_p(x) \cdot \left( \frac{\lambda b}{a+b}(1+ax_1) + \frac{a+(1-\lambda)b}{a+b} \cdot (1-bx_1) \right) = \\ &= \varphi_p(x) \cdot (1 - (1-\lambda) \cdot bx_1).\end{aligned}\quad (6)$$

Итак, если  $0 \leq \lambda < 1$ , то  $\varphi_p(Vx) < \varphi_p(x)$  для всех внутренних точек  $S^2$ . Так как функция  $\varphi_p(x)$ , описанная равенством (3), достигает максимума только лишь в точке  $p \in P$ , для любой внутренней начальной точки из симплекса  $S^2$  имеем  $\omega(x) \cap P \neq \emptyset$  и  $\alpha(x) \subset P$ . Поскольку  $\omega(x)$  — неподвижная точка для  $V_1$  и  $\omega(x) \cap P = \emptyset$ , то, начиная с некоторого  $n_0$ , имеем  $bx_3^{(n)} - ax_2^{(n)} \leq k < 0$  для всех  $n \geq n_0$ . Поэтому

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} \cdot \left( 1 + bx_3^{(n)} - ax_2^{(n)} \right) \leq x_1^{(n_0)} \cdot (1+k)^{n-n_0}$$

при  $n \geq n_0$ . Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_1^{(n)}$  сходится быстрее геометрической прогрессии, так как  $-1 < k < 0$ . В этом случае, согласно [16, 19], имеем

$$x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} \left( 1 - ax_1^{(n)} \right) = x_3^{(0)} \cdot \left( 1 - ax_1^{(n)} \right) \cdot \left( 1 - ax_1^{(n-1)} \right) \cdots \left( 1 - ax_1^{(0)} \right),$$

поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} > 0$ .

Наряду с множеством  $P \subset S^2$ , описанным в (2), рассмотрим множество

$$Q = \left\{ x \in S^2 : A_1x \leq 0 \right\} = \left\{ \left( 0, \frac{b+\lambda a}{a+b}, \frac{(1-\lambda)a}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.\quad (7)$$

Выбрав произвольную точку  $q = \left( 0, \frac{b+\lambda a}{a+b}, \frac{(1-\lambda)a}{a+b} \right) \in Q$ , построим функцию

$$\varphi_q(x) = x_2^{\frac{b+\lambda a}{a+b}} \cdot x_3^{\frac{(1-\lambda)a}{a+b}}.$$

Очевидно,

$$\varphi_q(x) = \varphi_q(V_1(V_1^{-1}x)) = \varphi_q(V_1^{-1}x) \cdot \left( 1 + ax_1^{(-1)} \right)^{\frac{b+\lambda a}{a+b}} \cdot \left( 1 - bx_1^{(-1)} \right)^{\frac{(1-\lambda)a}{a+b}}.$$

Вычислив производную функции  $\left( 1 + ax_1^{(-1)} \right)^{\frac{b+\lambda a}{a+b}} \cdot \left( 1 - bx_1^{(-1)} \right)^{\frac{(1-\lambda)a}{a+b}}$  по  $x_1^{(-1)}$  в точке  $x_1^{(-1)} = 0$ , получаем  $1 + a\lambda$ , то есть

$$\varphi_q(x) = \varphi_q(V_1^{-1}x) \cdot \left( 1 + a\lambda x_1^{(-1)} + o(x_1^{(-1)}) \right).$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности нуля верно неравенство  $\varphi_q(V_1^{-1}x) < \varphi_q(x)$ , так как  $x_1^{(-1)} > 0$ ,  $a > 0$  и  $0 < \lambda \leq 1$ . Таким образом, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** *Траектория любой внутренней точки  $x \in S^2$  начинается во множестве  $P$  и заканчивается во множестве  $Q$ , то есть  $\alpha(x) \subset P$  и  $\omega(x) \subset Q$ .*

**Замечание 1.** *Согласно теореме Гробмана–Хартмана [37], любая траектория содержится в инвариантной кривой.*

Итак, в рассматриваемом случае имеем картину векторного поля, изображенного на рис. 2.

Перейдем к рассмотрению кососимметрической матрицы

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & -b \\ a & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ b & 0 & -d & 0 \end{pmatrix},$$

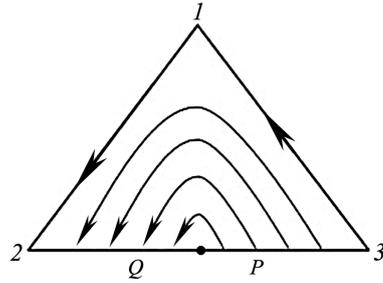


Рис. 2. Векторное поле, согласно теореме 2  
Fig. 2. Vector field, according to Theorem 2

определяющей систему Лотки–Вольтерры вида

$$V_2 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 - bx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1 - cx_3), \\ x'_3 = x_3(1 + cx_2 + dx_4), \\ x'_4 = x_4(1 + bx_1 - dx_3), \end{cases} \quad (8)$$

которая задается отображением  $V_2 : S^3 \rightarrow S^3$  при условии  $0 < a, b, c, d \leq 1$ . При этих ограничениях  $V_2$  является автоморфизмом [16]. Очевидно, матрица  $A_2$  определяет частично-ориентированный граф (см. рис. 3). Так как некоторые элементы матрицы  $A_2$ , соответствующей системе (8), равны нулю, то есть  $a_{13} = 0$  и  $a_{24} = 0$ , ребра  $\Gamma_{13}$  и  $\Gamma_{24}$  не ориентированы. Поэтому для наглядности мы в рис. 3 убрали эти ребра, оставив только ориентированные.

Пусть  $\Gamma_{123}$  — грань симплекса  $S^3$ , натянутая на вершины  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$  и  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ . Заметим, что любая грань симплекса также является симплексом ([18, 22]), причем она инвариантна относительно отображения  $V_2$ , и сужение  $V_2$  на эту грань также является отображением Лотки–Вольтерры. Следовательно, на гранях  $\Gamma_{123}$  и  $\Gamma_{134}$  динамика траекторий описывается предыдущим отображением  $V_1$ , а на остальных двух гранях поведение траекторий тривиально.

Пусть  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$  — произвольная начальная точка, причем  $x_1^0 \cdot x_2^0 \cdot x_3^0 \cdot x_4^0 > 0$ . Тогда как положительная, так и отрицательная траектории, начинающиеся из нее, целиком лежат внутри симплекса  $S^3$ . Рассмотрим последовательность  $\{x_3^{(n)}\}$ . Так как

$$x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} \cdot (1 + cx_2^{(n)} + dx_4^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N},$$

тогда  $\{x_3^{(n)}\}$  — возрастающая и ограниченная последовательность. Ясно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} > 0$ .

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_4^{(n)} = 0$ , поэтому  $\omega(x^0) \subset \Gamma_{13}$ .

Аналогично отрицательная последовательность  $\{x_1^{(n)}\}$ , где  $-n \in \mathbb{N}$ , возрастает и ограничена. Тогда из равенства

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} \cdot (1 - ax_2^{(n)} - bx_4^{(n)}), \quad -n \in \mathbb{N}$$

получим, что  $\alpha(x^0) \subset \Gamma_{13}$ . Поскольку  $\{x_2^{(n)}\}$  и  $\{x_4^{(n)}\}$  при  $n \rightarrow \pm\infty$  сходятся к нулю, а  $\{x_1^{(n)}\}$

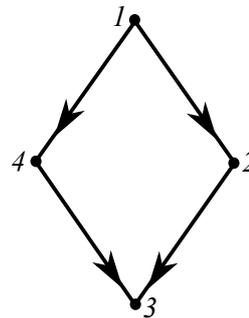


Рис. 3. Частично-ориентированный граф, соответствующий матрице  $A_2$   
Fig. 3. The partially-oriented graph corresponding to the matrix  $A_2$

и  $\{x_3^{(n)}\}$  монотонны, любая траектория сходится, и её предел принадлежит грани  $\Gamma_{13}$ , которая состоит из неподвижных точек отображения  $V_2$ .

Пусть  $x = (x_1, 0, x_3, 0) \in \Gamma_{13}$ . Вычисляя якобиан в этой точке, получаем

$$J_{V_2}(x) = (1 - \lambda)^2 \cdot (1 + ax_1 - cx_3 - \lambda) \cdot (1 + bx_1 - dx_3 - \lambda).$$

Следовательно, корни уравнения  $J_{V_2}(x) = 0$  вещественны и

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1 + ax_1 - cx_3, \quad \lambda_4 = 1 + bx_1 - dx_3.$$

Ясно, что  $\lambda_1 = 1$ , и это указывает, что  $x$  — неподвижная точка;  $\lambda_2 = 1$  означает, что грань  $\Gamma_{13}$  состоит из неподвижных точек. Учитывая, что  $x_1 + x_3 = 1$ , получаем  $\lambda_3 > 1$ , если  $x_1 > \frac{c}{a+c}$  и  $\lambda_4 > 1$ , если  $x_1 > \frac{d}{b+d}$ . Без ограничения общности положим  $\frac{c}{a+c} \geq \frac{d}{b+d}$ , что равносильно неравенству  $bc \geq ad$ . Тогда при  $x_1 > \frac{c}{a+c}$  неподвижная точка  $x$  является отталкивающей, то есть репеллером, а при  $x_1 < \frac{d}{b+d}$  точка  $x$  будет притягивающей, то есть аттрактором. Таким образом, для любой внутренней начальной точки  $\alpha(x^0) \subset \Gamma_{13}$  при  $x_1 > \frac{c}{a+c}$  и  $\omega(x^0) \subset \Gamma_{13}$  при  $x_1 < \frac{d}{b+d}$ .

**Теорема 3.** *Любая траектория отображения  $V_2$  сходится, то есть для любой внутренней начальной точки симплекса  $x^0 \in S^3$*

$$\alpha(x^0) \subset \left\{ \left( \frac{(1-t)a+c}{a+c}, 0, \frac{ta}{a+c}, 0 \right) \right\}, \quad \omega(x^0) \subset \left\{ \left( \frac{(1-t)b+d}{b+d}, 0, \frac{tb}{b+d}, 0 \right) \right\}, \quad t \in [0, 1].$$

Следовательно, пределы отрицательной и положительной траектории принадлежат ребру  $\Gamma_{13}$ . Если закон эволюции какой-либо системы определяется отображением  $V_2$ , тогда «начало» и «конец» эволюции находятся на ребре  $\Gamma_{13}$ .

Простые вычисления показывают, что решением неравенства  $A_2x \geq 0$  на симплексе  $S^3$  является отрезок  $P$  с концами  $(1, 0, 0, 0)$  и  $(\frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}, 0)$ , а решение неравенства  $A_2x \leq 0$  на  $S^3$  есть отрезок с концами  $(\frac{d}{b+d}, 0, \frac{b}{b+d}, 0)$  и  $(0, 0, 1, 0)$ . Следовательно, в данном случае «начало» траектории находится во множестве  $P$ , а «конец» траектории находится в  $Q$ . Аналогичный результат получим и в случае  $\frac{c}{a+c} < \frac{d}{b+d}$ , то есть  $bc < ad$ . Для наглядности приведем пример.

**Пример 1.** Пусть  $a = d = 0.1$  и  $b = c = 0.9$ . Тогда  $\frac{c}{a+c} = 0.9$  и  $\frac{d}{b+d} = 0.1$ . В этом случае на ребре  $\Gamma_{13}$  получаем картину, показанную на рис. 4.

Здесь  $A = (\frac{9}{10}, 0, \frac{1}{10}, 0)$  и  $B = (\frac{1}{10}, 0, \frac{9}{10}, 0)$ , а  $x^0$  — произвольная внутренняя точка симплекса  $S^3$ . Любая неподвижная точка из интервала  $(A; B)$  является седловой, то есть одно из собственных чисел якобиана  $\lambda_3, \lambda_4$  больше 1, а другое меньше 1.

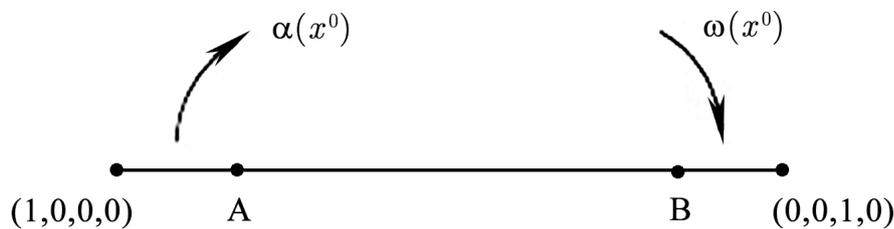


Рис. 4. Расположение множеств  $\alpha(x^0)$  и  $\omega(x^0)$

Fig. 4. The arrangement of the sets  $\alpha(x^0)$  and  $\omega(x^0)$

**Замечание 2.** Очевидно, что  $\det A_2 = (ad - bc)^2$ . Поэтому условие  $\frac{c}{a+c} = \frac{d}{b+d}$  означает, что  $\det A_2 = 0$ . В этом случае точки  $A$  и  $B$  из рис. 4 совпадают. Следовательно, грань  $\Gamma_{13}$  не содержит седловых неподвижных точек.

Пусть вырожденная кососимметрическая матрица имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & -b \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & d \\ b & 0 & -d & 0 \end{pmatrix},$$

где  $0 < a, b, c, d \leq 1$ , и определяет следующую систему Лотки–Вольтерры:

$$V_3 : S^3 \rightarrow S^3 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 - bx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1 + cx_3), \\ x'_3 = x_3(1 - cx_2 + dx_4), \\ x'_4 = x_4(1 + bx_1 - dx_3). \end{cases} \quad (9)$$

Заметим, что  $\det A = (ad + bc)^2$ , следовательно, матрица  $A_3$ , соответствующая системе (9), не вырождена при всех  $0 < a, b, c, d \leq 1$ . Так как

$$x_2^{(n+1)} = x_2 \cdot (1 + ax_1^{(n)} + cx_3^{(n)})$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ , и  $\{x_2^{(n)}\}$  — возрастающая и ограниченная последовательность, для любой внутренней начальной точки симплекса имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = 0.$$

Следовательно,  $\omega(x^0) \subset \Gamma_{24}$ .

Аналогично и для отрицательных траекторий из равенства

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} \cdot (1 - ax_2^{(n)} - bx_4^{(n)})$$

получаем

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow -\infty} x_4^{(n)} = 0,$$

поэтому заключаем, что  $\alpha(x^0) \subset \Gamma_{13}$ .

Вычисляя собственные значения якобиана в неподвижных точках грани  $\Gamma_{24}$ , получим

$$(1 - \lambda)^2 \cdot (1 - ax_2 - bx_4 - \lambda) \cdot (1 - cx_2 + dx_4 - \lambda) = 0.$$

Если  $x_2 > \frac{d}{a+d}$ , то за исключением кратного корня  $\lambda_1 = 1$  имеем  $\lambda_3 < 1$  и  $\lambda_4 < 1$ . Следовательно,  $\omega(x^0) \subset \left\{ \left( 0, \frac{(1-t)a+d}{a+d}, 0, \frac{td}{a+d} \right) \right\}$ , где  $0 \leq t \leq 1$ . Аналогично собственные значения якобиана на ребре  $\Gamma_{13}$  находятся из уравнения

$$(1 - \lambda)^2 \cdot (1 + ax_1 + cx_3 - \lambda) \cdot (1 + bx_1 - dx_3 - \lambda) = 0.$$

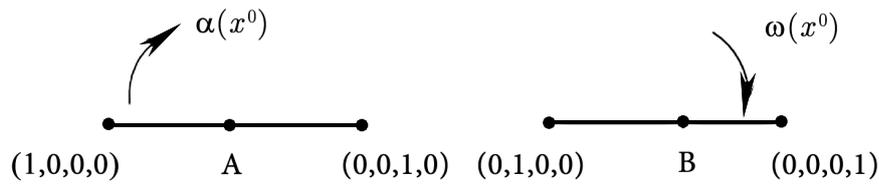


Рис. 5. Расположение множеств  $\alpha(x^0)$  и  $\omega(x^0)$  для  $V_3$   
 Fig. 5. The arrangement of the sets  $\alpha(x^0)$  and  $\omega(x^0)$  for  $V_3$

Если  $x_1 > \frac{d}{a+d}$ , то  $\lambda_3 > 1$  и  $\lambda_4 > 1$ . Поэтому

$$\alpha(x^0) \subset \left\{ \left( \frac{(1-t)b+d}{b+d}, 0, \frac{tb}{b+d}, 0 \right) \right\},$$

где  $0 \leq t \leq 1$ . Здесь визуально получим картину, изображенную на рис. 5, где  $A \left( \frac{d}{a+d}, 0, \frac{a}{a+d}, 0 \right)$  и  $B \left( 0, \frac{d}{a+d}, 0, \frac{a}{a+d} \right)$ .

**Замечание 3.** Для отображения  $V_3$  расположения  $\alpha(x^0)$  и  $\omega(x^0)$  также определяются решениями неравенств  $A_3x \geq 0$  и  $A_3x \leq 0$  на симплексе  $S^3$ .

Перейдем к рассмотрению последнего случая. Пусть

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & b \\ a & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & -d \\ -b & 0 & -d & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующая ей система Лотки–Вольтерры имеет вид

$$V_4 : S^3 \rightarrow S^3 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 + bx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1 - cx_3), \\ x'_3 = x_3(1 + cx_2 - dx_4), \\ x'_4 = x_4(1 - bx_1 + dx_3), \end{cases} \quad (10)$$

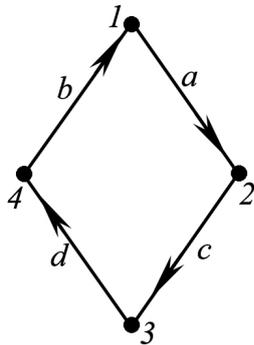


Рис. 6. Частично-ориентированный граф, соответствующий матрице  $A_4$

Fig. 6. The partially-oriented graph corresponding to the matrix  $A_4$

где  $0, a, b, c, d \leq 1$ . Пусть  $V_4 : S^3 \rightarrow S^3$  – отображение, определяемое этими равенствами. Очевидно, что  $\det A_4 = (ad - bc)^2$  и частично-ориентированный граф, соответствующий матрице  $A_4$ , имеет вид, изображенный на рис. 6.

Здесь для изучения асимптотического поведения траекторий внутренних точек симплекса рассмотрим следующие три случая.

i)  $ad = bc$ . В этом случае множества  $P = \{x \in S^3 : A_4x \geq 0\}$  и  $Q = \{x \in S^3 : A_4x \leq 0\}$  совпадают и представляют собой прямолинейный отрезок с концами  $A = \left( \frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}, 0 \right)$  и  $B = \left( 0, \frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b} \right)$ . Легко проверить, что



Рис. 7. Расположение множеств  $\alpha(x^0)$  и  $\omega(x^0)$  для  $V_4$

Fig. 7. The arrangement of the sets  $\alpha(x^0)$  and  $\omega(x^0)$  for  $V_4$

отрезок  $AB$  состоит из неподвижных точек отображения  $V_4$ . В любой точке отрезка  $AB$  спектр якобиана находится из уравнения

$$(1 - \lambda)^4 + (1 - \lambda)^2 \cdot (a^2 x_1 x_2 + b^2 x_1 x_4 + c^2 x_2 x_3 + d^2 x_3 x_4) + (ad - bc)^2 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

Поскольку  $ad = bc$ , корни этого уравнения за исключением  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  комплексные, причем  $|\lambda_3| = |\lambda_4| > 1$ .

Положительная траектория любой внутренней точки, не принадлежащей отрезку  $AB$ , расходится, отрицательная траектория сходится к одной из точек отрезка  $AB$ . Несложно проверить, что  $\omega(x^0)$  бесконечно и лежит на границе симплекса, а  $\alpha(x^0) \subset AB$ .

ii)  $ad > bc$ . В этом случае простые вычисления показывают, что решение неравенства  $A_4 x \geq 0$  на симплексе содержится на грани  $\Gamma_{13}$  и удовлетворяет неравенству

$$\frac{c}{a+c} \leq x_1 \leq \frac{d}{b+d},$$

решение которого, в силу  $ad > bc$ , непусто. Следовательно, множество  $P = \{x \in S^3 : A_4 x \geq 0\}$  представляет собой отрезок на грани  $\Gamma_{13}$  с концами  $A = \left(\frac{a}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}, 0\right)$  и  $B = \left(\frac{d}{b+d}, 0, \frac{b}{b+d}, 0\right)$ .

Решением неравенства  $Q = \{x \in S^3 : A_4 x \leq 0\}$  является отрезок, принадлежащий ребру  $\Gamma_{24}$  с концами  $C = \left(0, \frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b}\right)$  и  $D = \left(0, \frac{d}{c+d}, 0, \frac{c}{c+d}\right)$ . Для этого случая картина множеств предельных точек положительной и отрицательной траектории представлена на рис. 7.

iii) Случай  $ad < bc$  исследуется аналогично предыдущему.

### Заключение

Эпидемиологические смыслы некоторых дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры, являющихся дискретными аналогами компартментарных моделей  $SIR$ ,  $SEIR$ ,  $SIRD$ , были исследованы в работах [19, 20, 36]. В данной работе подробно рассмотрены и исследованы вырожденные случаи дискретных отображений Лотки–Вольтерры, сохраняющих двумерный и трехмерный симплексы. Эти системы могут полноправно служить в качестве дискретных моделей  $SIRS$ ,  $SEIRS$ ,  $SIRD$  для исследований течения вирусных заболеваний, имеющих рецидивный характер, а также включающих в себя смертность зараженных особей. Предлагаемые системы исследованы с помощью анализа собственных значений якобиана, который дает локальную картину поведения траекторий в окрестности неподвижной точки. Также с помощью построения функций Ляпунова исследован глобальный характер поведения траекторий внутренних точек исследуемых систем. В итоге найдены и построены множества предельных точек положительной траектории  $\omega(x^0)$  и множества предельных точек отрицательной траектории  $\alpha(x^0)$ , означающие соответственно начало эпидемии и ее конец.

В статье подробно исследованы три динамические системы. Первая из них — система (3), которая является дискретным аналогом непрерывной компартментарной модели  $SIR$ , описывающей течение заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём и не имеющих рецидивирующий характер. В работе [19] описан эпидемиологический смысл этой системы в качестве такой модели. Мы же в нашей работе полностью исследовали эту динамическую систему, доказав для нее существование функции Ляпунова в виде

$$\varphi_p(x) = x_2^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot x_3^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}},$$

и с помощью этой функции показали расположение множеств предельных точек положительной

$$\alpha(x) \subset P = \{x \in S^2 : A_1 x \geq 0\} = \left\{ \left( 0; \frac{\lambda b}{a+b}; \frac{a+(1-\lambda)b}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

и отрицательной траекторий

$$Q = \{x \in S^2 : A_1 x \leq 0\} = \left\{ \left( 0, \frac{b+\lambda a}{a+b}, \frac{(1-\lambda)a}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

доказав при этом, что они суть бесконечные множества (см. теорему 2).

Для системы (8) использован метод анализа спектра якобиана, согласно [38], так как этот метод описывает локальный характер неподвижных точек. Для этой системы также найдены множества предельных точек положительной и отрицательной орбиты. Отмечено, что любая траектория отображения (8) сходится на ребре  $\Gamma_{13}$  (см. теорему 3).

В отличие от предыдущего случая (8), для динамической системы (9) доказано, что множества предельных точек положительной и отрицательной траектории лежат на разных ребрах —  $\Gamma_{24}$  и  $\Gamma_{13}$ .

В конце работы приведена система (10), которая является явным аналогом непрерывной модели  $SEIRS$ . Эта модель полностью описывает течение вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путем с рецидивным характером. Асимптотическое поведение внутренних точек этой системы хаотично, и для нее исследованы три случая  $ad = bc$ ,  $ad > bc$  и  $ad < bc$ , полностью описывающие модель (см. рис. 7).

Условие  $ad = bc$  означает, что множества  $P$  и  $Q$  совпадают, в эпидемиологии такой ситуации не может быть, так как начало и конец вирусной инфекции идентично совпадать не могут. Поэтому в данном случае при моделировании течения вирусных заболеваний целесообразно рассматривать при условиях  $ad < bc$  и  $ad > bc$ .

Применение рассмотренных нами в данной статье дискретных динамических систем в качестве дискретных компартментарных моделей с численными анализами конкретных заболеваний и прогнозом на будущее мы изложим в следующей работе.

## Список литературы

1. Devaney R. L. A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment. New York: CRC Press, 2020. 328 p. DOI: 10.1201/9780429280665.
2. Strogatz S. Nonlinear Dynamics and Chaos. New York: CRC Press, 2019. 532 p.
3. Anupam P., Sandip M., Lan S. S., Hidekatsu Y. Micro-scale variability enhances trophic transfer and potentially sustains biodiversity in plankton ecosystems // J. Theor. Biol. 2017. Vol. 412. P. 86–93. DOI: 10.1016/j.jtbi.2016.10.005.
4. Müller J., Kuttler C. Methods and Models in Mathematical Biology. Deterministic and Stochastic Approaches. Berlin: Springer, 2015. 711 p. DOI: 10.1007/978-3-642-27251-6.

5. Бернштейн С. Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследованности // Ученые записки научно-исследовательских кафедр Украины. Отдел математический. 1924. Т. 1. С. 83–115.
6. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. О. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. М.: Институт Компьютерных Исследований, 2004. 416 с.
7. Amraoui S., Auroux D., Blum J. Back-and-forth nudging for the quasi-geostrophic ocean dynamics with altimetry: theoretical convergence study and numerical experiments with the future swot observations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2023. Vol. 16, iss. 2. P. 197–219. DOI: 10.3934/dcdss.2022058.
8. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. New York: Springer, 2012. 522 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-1686-9.
9. Jiang Xu, Yinong Wang, Zhongwei Cao. Dynamics of a stochastic SIRS epidemic model with standard incidence under regime switching // International Journal of Biomathematics. 2021. Vol. 19, iss. 10. P. 10618–10636. DOI: 10.3934/mbe.2022496.
10. Carrasco-Gutierrez C. E., Sosa W. A discrete dynamical system and its applications // Pesquisa Operacional. 2019. Vol. 39, iss. 3. P. 457–469. DOI: 10.1590/0101-7438.2019.039.03.0457.
11. Jin X., Jia J. Qualitative study of a stochastic SIRS epidemic model with information intervention // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2020. Vol. 547. P. 123866. DOI: 10.1016/j.physa.2019.123866.
12. Кулаков М. П., Фрисман Е. Я. Простая и сложная динамика в модели эволюции двух миграционно связанных популяций с непересекающимися поколениями // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 208–232. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-208-232.
13. Ростунцова А. А., Рыскин Н. М. Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. P. 597–609. DOI: 10.18500/0869-6632-003067.
14. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proc. R. Soc. Lond. A. 1927. Vol. 115, no. 772. P. 700–721. DOI: 10.1098/rspa.1927.0118.
15. Мюррей Дж. Математическая биология. Том 1. Введение. М.: Институт компьютерных исследований, 2009. 776 с.
16. Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б. Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий // Владикавказский математический журнал. 2006. Т. 8, № 2. С. 12–28.
17. Rozikov U. A., Shoyimardonov S. K. Ocean ecosystem discrete time dynamics generated by  $l$ -Volterra operators // International Journal of Biomathematics. 2019. Vol. 12, iss. 2. P. 1950015. DOI: 10.1142/S1793524519500153.
18. Tadzhiyeva M. A., Eshmamatova D. B., Ganikhodzhaev R. N. Volterra-type quadratic stochastic operators with a homogeneous tournament // J. Math. Sci. 2024. Vol. 278. P. 546–556. DOI:10.1007/s10958-024-06937-0.
19. Eshmamatova D. B. Discrete analog of the SIR model // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2781. P. 020024. DOI: 10.1063/5.0144884.
20. Eshmamatova D. B., Tadzhiyeva M. A., Ganikhodzhaev R. N. Degenerate cases in Lotka–Volterra systems // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2781. P. 020034. DOI: 10.1063/5.0144887.
21. Rozikov U. A., Zhamilov U. U. Volterra quadratic stochastic operators of a two-sex population // Ukr. Math. J. 2011. Vol. 63, iss. 7. P. 1136–1153. DOI: 10.1007/s11253-011-0568-y.
22. Ganikhodzhaev R. N., Tadzhiyeva M. A., Eshmamatova D. B. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex // J. Math. Sci. 2020. Vol. 245, iss. 3. P. 398–402. DOI: 10.1007/s10958-020-04702-7.

23. Трубецков Д. И. Феномен математической модели Лотки–Вольтерры и сходных с ней // Известия вузов. ПНД. 2011. Т. 19, № 2. С. 69–88. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-2-69-88.
24. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Пер. с франц. М.: Наука, 1976. 288 с.
25. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 400 с.
26. Seytov Sh. J., Eshmatova D. B. Discrete dynamical systems of Lotka-Volterra and their applications on the modeling of the biogen cycle in ecosystem // Lobachevskii J. Math. 2023. Vol. 44. P. 1471-1485. DOI: 10.1134/S1995080223040248.
27. Eshmatova D., Ganikhodzhaev R. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in a simplex // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365, no. 1. P. 060009. DOI: 10.1063/5.0057303.
28. Эшмаматова Д. Б., Таджиева М. А., Ганиходжаев Р. Н. Критерии существования внутренних неподвижных точек с однородными турнирами дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 30, № 6. С. 702–716. DOI: 10.18500/0869-6632-003012.
29. Eshmatova D. B., Yusupov F. A. Dynamics of compositions of some Lotka–Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex // Turkish Journal of Mathematics. 2024. Vol. 48, no. 3. P. 391–406. DOI: 10.55730/1300-0098.3514.
30. Eshmatova D. B., Seytov Sh. J., Narziyev N. B. Basins of fixed points for composition of the Lotka-Volterra mappings and their classification // Lobachevskii J. Math. 2023. Vol. 44, no. 2. P. 558–569. DOI: 10.1134/S1995080223020142.
31. Eshmatova D. B. Compositions of Lotka-Volterra Mappings as a Model for the Study of Viral Diseases // AIP Conference Proceedings. 2024. Vol. 3085. P. 020008. DOI: 10.1063/5.0194902.
32. Eshmatova D. B., Ganikhodzhaev R. N. Asymptotic behavior of Volterra type discrete dynamical systems // AIP Conference Proceedings. 2024. Vol. 3085. P. 020009. DOI: 10.1063/5.0194901.
33. Eshmatova D. B., Ganikhodzhaev R. N., Tadzhieva M. A. Invariant sets of Lotka–Volterra mappings acting in a four-dimensional simplex // AIP Conference Proceedings. 2024. Vol. 3004. P. 020011. DOI: 10.1063/5.0199936.
34. Harary F., Palmer E. Graphical Enumeration. New York: Academic Press, 1973. 271 p. DOI: 10.1016/C2013-0-10826-4.
35. Moon J. Topics on Tournaments. New York: Academic Press, 2013. 136 p.
36. Eshmatova D. B. Dynamics of a discrete *SIRD* model based on Lotka–Volterra mappings // AIP Conference Proceedings. 2024. Vol. 3004. P. 020005. DOI: 10.1063/5.0199863.
37. Hartman P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 11. P. 610–620. DOI: 10.1090/S0002-9939-1960-0121542-7.
38. Devaney R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical System. Third Edition. New York: CRC Press, 2021. 434 p. DOI: 10.1201/9780429280801.

## References

1. Devaney RL. A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment. New York: CRC Press; 2020. 328 p. DOI: 10.1201/9780429280665.
2. Strogatz S. Nonlinear Dynamics and Chaos. New York: CRC Press; 2019. 532 p.
3. Anupam P, Sandip M, Lan SS, Hidekatsu Y. Micro-scale variability enhances trophic transfer and potentially sustains biodiversity in plankton ecosystems. J. Theor. Biol. 2017;412:86–93. DOI: 10.1016/j.jtbi.2016.10.005.
4. Müller J, Kuttler C. Methods and Models in Mathematical Biology. Deterministic and Stochastic Approaches. Berlin: Springer; 2015. 711 p. DOI: 10.1007/978-3-642-27251-6.

5. Bernstein SN. The solution of a mathematical problem related to the theory of heredity. Scientific Notes of Scientific Research Department of the Ukrainian Department of Mathematics. 1924; 1:83–115.
6. Shilnikov LP, Shilnikov AL, Turaev DV, Chua LO. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part 1. Singapore: World Scientific; 1998. 416 p.
7. Amraoui S, Auroux D, Blum J. Back-and-forth nudging for the quasi-geostrophic ocean dynamics with altimetry: theoretical convergence study and numerical experiments with the future swot observations. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2023;16(2):197–219. DOI: 10.3934/dcdss.2022058.
8. Brauer F, Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. New York: Springer; 2012. 522 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-1686-9.
9. Jiang Xu, Yinong Wang, Zhongwei Cao. Dynamics of a stochastic SIRS epidemic model with standard incidence under regime switching. International Journal of Biomathematics. 2021;19(10): 10618–10636. DOI: 10.3934/mbe.2022496.
10. Carrasco-Gutierrez CE, Sosa W. A discrete dynamical system and its applications. Pesquisa Operacional. 2019;39(3):457–469. DOI: 10.1590/0101-7438.2019.039.03.0457.
11. Jin X, Jia J. Qualitative study of a stochastic SIRS epidemic model with information intervention. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2020;547:123866. DOI: 10.1016/j.physa.2019.123866.
12. Kulakov MP, Frisman E. Simple and complex dynamics in the model of evolution of two populations coupled by migration with non-overlapping generations. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2):208–232. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-208-232.
13. Rostuntsova AA, Ryskin NM. Investigation of the nature of modulation instability in cyclotron resonance interaction of radiation with an oncoming rectilinear electron beam. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5):597–609. DOI: 10.18500/0869-6632-003067.
14. Kermack WO, McKendrick AG. Contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. Lond. A. 1927;115(772):700–721. DOI: 10.1098/rspa.1927.0118
15. Murray JD. Mathematical Biology. Third Edition. Berlin: Springer; 2002. 551 p. DOI: 10.1007/b98868.
16. Ganikhodzhaev RN, Eshmatova DB. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories. Vladikavkaz Mathematical Journal. 2006;8(2):12–28 (in Russian).
17. Rozikov UA, Shoyimardonov SK. Ocean ecosystem discrete time dynamics generated by  $I$ -Volterra operators. International Journal of Biomathematics. 2019;12(2):1950015. DOI: 10.1142/S1793524519500153.
18. Tadzhiyeva MA, Eshmatova DB, Ganikhodzhaev RN. Volterra-Type Quadratic Stochastic Operators with a Homogeneous Tournament. J. Math. Sci. 2024;278:546–556. DOI: 10.1007/s10958-024-06937-0.
19. Eshmatova DB. Discrete analog of the SIR model. AIP Conference Proceedings. 2023;2781: 020024. DOI: 10.1063/5.0144884.
20. Eshmatova DB, Tadzhiyeva MA, Ganikhodzhaev RN. Degenerate cases in Lotka–Volterra systems. AIP Conference Proceedings. 2023;2781:020034. DOI: 10.1063/5.0144887.
21. Rozikov UA, Zhamilov UU. Volterra quadratic stochastic operators of a two-sex population. Ukr. Math. J. 2011;63(7):1136–1153. DOI: 10.1007/s11253-011-0568-y.
22. Ganikhodzhaev RN, Tadzhiyeva MA, Eshmatova DB. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex. J. Math. Sci. 2020;245(3):398–402. DOI: 10.1007/s10958-020-04702-7.

23. Trubetskov DI. The phenomenon of the Lotka–Volterra mathematical model and similar ones. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2011;19(2):69–88. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-2-69-88.
24. Volterra V. *Mathematical Theory of Struggle for Existence*. M.: Nauka; 1976. 288 p. (in Russian).
25. Bratus AS, Novozhilov AS, Platonov AP. *Dynamical Systems and Models in Biology*. M.: FIZMATLIT; 2010. 400 p.
26. Seytov ShJ, Eshmamatova DB. Discrete dynamical systems of Lotka-Volterra and their applications on the modeling of the biogen cycle in ecosystem. *Lobachevskii J. Math.* 2023;44: 1471–1485. DOI: 10.1134/S1995080223040248.
27. Eshmamatova D, Ganikhodzhaev R. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in a simplex. *AIP Conference Proceedings*. 2021;2365(1):060009. DOI: 10.1063/5.0057303.
28. Eshmamatova DB, Tadzhiyeva MA, Ganikhodzhaev RN. Criteria for internal fixed points existence of discrete dynamic Lotka-Volterra systems with homogeneous tournaments. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;30(6):702–716. DOI: 10.18500/0869-6632-003012.
29. Eshmamatova DB, Yusupov FA. Dynamics of compositions of some Lotka–Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex. *Turkish Journal of Mathematics*. 2024;48(3):391–406. DOI: 10.55730/1300-0098.3514.
30. Eshmamatova DB, Seytov ShJ, Narziev NB. Basins of fixed points for composition of the Lotka-Volterra mappings and their classification. *Lobachevskii J. Math.* 2023;44(2):558–569. DOI: 10.1134/S1995080223020142.
31. Eshmamatova DB. Compositions of Lotka-Volterra Mappings as a Model for the Study of Viral Diseases. *AIP Conference Proceedings*. 2024;3085(1):020008. DOI: 10.1063/5.0194902.
32. Eshmamatova DB, Ganikhodzhaev RN. Asymptotic Behavior of Volterra Type Discrete Dynamical Systems. *AIP Conference Proceedings*. 2024;3085(1):020009. DOI: 10.1063/5.0194901.
33. Eshmamatova DB, Ganikhodzhaev RN, Tadzhiyeva MA. Invariant Sets of Lotka-Volterra Mappings Acting in a Four-dimensional Simplex. *AIP Conference Proceedings*. 2024;3004(1):020011. DOI: 10.1063/5.0199936.
34. Harary F, Palmer E. *Graphical Enumeration*. New York: Academic Press; 1973. 271 p. DOI: 10.1016/C2013-0-10826-4.
35. Moon J. *Topics on Tournaments*. New York: Academic Press; 2013. 136 p.
36. Eshmamatova DB. Dynamics of a Discrete *SIRD* Model Based on Lotka-Volterra Mappings. *AIP Conference Proceedings*. 2024;3004:020005. DOI: 10.1063/5.0199863.
37. Hartman P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1960;11:610-620. DOI: 10.1090/S0002-9939-1960-0121542-7.
38. Devaney RL. *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. Third Edition. New York: CRC Press; 2021. 434 p. DOI: 10.1201/9780429280801.



*Ганиходжаев Расул Набиевич* — родился в Ташкенте (1945). Окончил факультет математики Ташкентского государственного университета по направлению «Функциональный анализ» (1971). Доктор физико-математических наук (1997, ТашГУ). С 1967 года работает на кафедре алгебры и функционального анализа Национального университета Узбекистана в должности профессора. Научные интересы — динамические системы, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы, касающиеся экологии. Опубликовал свыше 60 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Алмазарский район  
 Национальный университет Узбекистана  
 E-mail: rganikhodzhaev@gmail.com  
 ORCID: 0000-0001-6551-5257  
 Scopus: 35098653200

*Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна* — родилась в Самарканде (1974). Окончила с отличием механико-математический факультет Ташкентского государственного университета по направлению «Дифференциальные уравнения» (1996). Доктор физико-математических наук (2023, НУУз). Заведующий кафедрой высшей математики Ташкентского государственного транспортного университета (с 2020 года). Научные интересы — динамические системы, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы, касающиеся экологии. Опубликовала свыше 50 научных статей по указанным направлениям.



Узбекистан, 100167 Ташкент, Мирабадский район  
Ташкентский государственный транспортный университет  
Узбекистан, Ташкент, ул. Мирзо Улугбека, 81  
Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз  
E-mail: 24dil@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-1096-2751  
Scopus: 57214791647  
<https://www.webofscience.com/wos/author/record/37355263>

*Муминов Улугбек Рахимжонович* — родился в Фергане (1988). Окончил с отличием факультет математики Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека по направлению «Математический анализ и дифференциальные уравнения» (2014). С 2021 года ведет научную деятельность в докторантуре (PhD) по специальности «Математический анализ» в Ферганском национальном университете. Научные интересы — динамические системы, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, популяционная генетика. Опубликовал более 5 научных статей по указанным направлениям.



Узбекистан, 100167 Ташкент, Мирабадский район  
Ташкентский государственный транспортный университет  
E-mail: ulugbek.muminov.2020@mail.ru  
ORCID: 0009-0008-0762-1180

*Машарипов Сирожиддин Исмойилжон угли* — родился в Хорезме (1995). Окончил с отличием факультет математики Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека по направлению «Математический анализ» (2017). С 2021 года ведет научную деятельность в докторантуре (PhD) на кафедре алгебры и функционального анализа Национального университета Узбекистана. Научные интересы — динамические системы, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика. Опубликовал более 10 научных статей по указанным направлениям.



Узбекистан, 100167 Ташкент, Юнусабадский район  
Национальный университет Узбекистана  
E-mail: sirojiddinmasharipov1995@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-9414-3250



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья  
УДК 517.9, 621.372

DOI: 10.18500/0869-6632-003151  
EDN: HTWPWH

## Динамика взаимодействующих SIRS+V-моделей распространения инфекционных заболеваний

*А. В. Шабунин*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: [shabuninav@info.sgu.ru](mailto:shabuninav@info.sgu.ru)

*Поступила в редакцию 9.09.2024, принята к публикации 30.09.2024,  
опубликована онлайн 6.12.2024, опубликована 31.03.2025*

**Аннотация.** *Цель* — исследование процессов распространения инфекционных заболеваний в метапопуляциях, взаимодействующих посредством спонтанной миграции. *Метод.* Теоретическое исследование устройства фазового пространства системы связанных обыкновенных дифференциальных уравнений; численное исследование переходных процессов в зависимости от связи между подсистемами. *Результаты.* Предложена и исследована модель взаимодействующих популяций в виде двух идентичных SIRS+V-систем с взаимной диффузионной связью. Обнаружено, что долговременная динамика метапопуляции не отличается от поведения индивидуальной популяции; однако ее переходная динамика может быть разной и существенно зависит от величин коэффициентов миграции больных и здоровых особей. В частности, при определенных условиях во вторично заражаемой популяции может наблюдаться полное подавление волн заражения. *Обсуждение.* Несмотря на крайнюю простоту модели и наблюдаемых режимов, результаты могут быть интересны с точки зрения практических рекомендаций для планирования стратегии борьбы с передачей инфекции между сообществами, поскольку демонстрируют влияние интенсивности миграций больных и здоровых особей на распространение эпидемии в метапопуляциях.

**Ключевые слова:** SIRS-модель, популяционная динамика, связанные системы.

**Для цитирования:** Шабунин А. В. Динамика взаимодействующих SIRS+V-моделей распространения инфекционных заболеваний // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 184–198. DOI: 10.18500/0869-6632-003151. EDN: HTWPWH

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Dynamics of interacting SIRS+V models of infectious disease spread

A. V. Shabunin

Saratov State University, Russia  
E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

Received 9.09.2024, accepted 30.09.2024, available online 6.12.2024, published 31.03.2025

**Abstract.** The *purpose* of this work is study of processes of spread of infectious diseases in metapopulations interacted through spontaneous migration. The *method* is based on theoretical examination of the structure of the phase space of a system of coupled ODEs and numerical study of the transient processes in dependence on the coupling between subsystems. *Results.* A model of interacting populations in the form of two identical SIRS+V systems with mutual diffusion coupling is proposed and investigated. It was found that the long-term dynamics of the metapopulation does not differ from the behavior of an individual population; however, its transitional dynamics may be different and significantly depends on the values of the migration coefficients of infected and healthy individuals. In particular, under certain conditions, a complete suppression of infection waves can be observed in a secondarily infected population. *Discussion.* Despite the extreme simplicity of the model and the observed regimes, the results may be interesting from the point of view of practical recommendations for planning a strategy to combat transmission between communities, since they reveal the influence of the intensity of migrations of sick and healthy individuals on the spread of the epidemic in metapopulations.

**Keywords:** SIRS model, populations dynamics, coupled systems.

**For citation:** Shabunin AV. Dynamics of interacting SIRS+V models of infectious disease spread. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2):184–198. DOI: 10.18500/0869-6632-003151

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Математическое моделирование эпидемий берет начало в работах Хамера [1] и Росса [2–4], в которых сформулирована модель развития заболевания в популяции в виде эволюционного уравнения. Впоследствии было создано множество подобных моделей [5–8], наиболее известной из которых является модель SIRS, предложенная в 1920-х годах Кермаком и МакКендриком [9]. В SIRS-модели популяцию разбивают на группы восприимчивых (S — Susceptible), инфицированных (I — Infectious) и иммунных (R — Recovered) особей и строят систему уравнений, определяющих закон изменения относительного числа особей в каждой из групп, опираясь на предположение о случайном и равномерном распределении особей в популяции. В работе [10] была предложена модификация SIRS-модели (так называемая SIRS+V-модель), в которой передача инфекции происходит опосредованно за счет взаимодействия с агентом-переносчиком, в качестве которого могут выступать вирусы или бактерии. Такой подход позволяет учесть инерционность процессов заражения. Он может быть полезен для прогнозирования распространения тех инфекций, при которых агент, вызывающий заражение, является подвижным и относительно долгоживущим, поэтому заражение может происходить в отрыве от непосредственного контакта между особями. Исследование данной модели [10, 11] показало возможность ее использования для описания процессов развития заболевания в отдельной популяции, в том числе и при наличии периодической модуляции параметров, вызванных сезонными факторами.

В природных популяциях эпидемиологические процессы могут определяться не только процессами внутри каждой отдельной популяции, но и взаимодействием между ними. Такое взаимодействие может быть как однократным, при котором происходит передача инфекции от зараженной популяции к здоровой, так и перманентным вследствие непрерывной миграции между популяциями. В последнем случае мы имеем дело с ансамблем взаимодействующих популяций,

который называют *метапопуляцией*. Для описания метапопуляций используют системы связанных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [12–15] или связанных отображений [17–19]. Такие модели могут демонстрировать более сложную колебательную динамику [20, 21]. В работах [22–25] рассматривалось заражение и распространение болезни в результате взаимодействия и миграции в сообществах популяций типа «хищник–жертва». В статье [26] проводилось математическое моделирование эпидемий во взаимодействующих посредством миграции SIR-системах и полученные результаты сопоставлялись с реально наблюдаемыми данными в ходе эпидемии COVID-19. В работе [27] рассматривалось миграционное взаимодействие в стохастических SIRS-системах с динамическим регулированием численности популяций и была показана возможность синхронизации колебаний в таких системах.

В настоящей работе строится модель миграционно-взаимодействующих популяций, в которых распространение инфекционного заболевания происходит по правилам SIRS+V-модели [10]; проводится ее теоретический анализ и численное исследование переходных процессов в зависимости от величины связей между подсистемами.

## 1. SIRS+V-модель распространения инфекционных заболеваний

В работе [10] рассматривалась SIRS+V-модель распространения инфекционных заболеваний, в которой явным образом использовались уравнения для агента заражения (например, вирусов). Эта модель строится на основе SIRS-модели. В последней популяцию разбивают на три группы особей:  $S$  — восприимчивые (Susceptible),  $I$  — инфицированные (Infectious) и  $R$  — выздоровевшие (Recovered) и определяют следующие реакции:

- локальный контакт  $S$  с  $I$  приводит с вероятностью  $P_1$  к ее заражению:  $S + I \xrightarrow{P_1} 2I$ ;
- зараженная особь  $I$  с вероятностью  $P_2$  излечивается:  $I \xrightarrow{P_2} R$ ;
- излеченная и обладающая иммунитетом особь  $R$  с вероятностью  $P_3$  утрачивает иммунитет:  $R \xrightarrow{P_3} S$ .

Как видно из схемы, модель предполагает циклическую цепочку превращений состояния каждой вовлеченной в эпидемию особи:  $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S^1$ . Однонаправленность цепочки означает, что никаких других процессов в SIRS-модели не предусмотрено. Например, в ней отсутствует возможность летальных исходов, а значит, не рассматривается возможное влияние заболевания на численность популяции, которая остается постоянной. Это справедливо для ряда нетяжелых инфекций, например, респираторно-вирусных. Для таких инфекций характерно, что агент заражения может достаточно длительное время существовать и поддерживать способность к заражению, находясь вне организма. Поэтому перенос инфекции от одной особи к другой может происходить без их непосредственного контакта. Эта особенность учтена в SIRS+V-модели [10], в которой меняется первая реакция схемы SIRS: вместо непосредственной одномоментной передачи инфекции от больной особи к здоровой рассматривается двухступенчатая схема заражения. В этой схеме инфицированная особь выступает генератором вирусов ( $V$ ), которые, в свою очередь, заражают восприимчивых особей.

Для SIRS+V-модели можно построить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих в приближении среднего поля ход эпидемических процессов в популяции:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -P_1(v)s + P_3r, \\ \dot{i} &= P_1(v)s - P_2i, \\ \dot{r} &= P_2i - P_3r, \\ \dot{v} &= \beta i - \mu v, \end{aligned} \tag{1}$$

<sup>1</sup>Отсюда и название данной модели — SIRS.

где  $s$ ,  $i$  и  $r$  — плотности населения восприимчивых, зараженных и иммунных особей соответственно;  $v$  — нормированная концентрация вирусов. Первые три уравнения описывают процессы заражения ( $P_1(v)s$ ), излечения ( $P_2i$ ) и потери иммунитета ( $P_3r$ ). Каждый из них характеризуется соответствующей скоростью  $P_k$ , при этом скорость заражения ( $P_1$ ) зависит от концентрации вирусов:  $P_1(v) = 1 - \exp(-v)$ . Оставшееся уравнение системы задает динамику концентрации вирусов, растущую за счет генерации больными особями ( $\beta i$ ) и уменьшающуюся при инактивации вирусов ( $\mu v$ ). Исходя из контекста модели (1), все параметры являются положительными, а начальные значения переменных — неотрицательными.

Уравнения (1) описывают диссипативную динамическую систему, которая обладает интегралом движения  $C = s + i + r$ , где  $C > 0$  характеризует плотность населения популяции. Наличие интеграла  $C$  можно использовать для уменьшения числа переменных, выразив  $s$  через  $i$  и  $r$ :

$$\begin{aligned} \dot{i} &= P_1(v)(C - i - r) - P_2i, \\ \dot{r} &= P_2i - P_3r, \\ \dot{v} &= \beta i - \mu v, \end{aligned} \quad (2)$$

при дополнительном условии  $i(0) + r(0) \leq C$ . Устройство фазового пространства системы (2) достаточно простое (см. работу [10]). Оно имеет два состояния равновесия: тривиальное  $E_0 = (0, 0, 0)$ , соответствующее отсутствию заболевания, и нетривиальное

$$E_1 = \left( I, \frac{P_2}{P_3}I, \frac{\beta}{\mu}I \right), \quad (3)$$

где значение  $I$  определяется как корень трансцендентного уравнения:

$$I = \frac{1}{1 + \frac{P_2}{P_3}} \left( C - \frac{P_2I}{1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\mu}I\right)} \right). \quad (4)$$

Последнее соответствует динамическому равновесию между заражением и излечением, достигаемому в популяции на больших временах при условии, когда  $E_1$  устойчива (при  $P_2 < \frac{\beta}{\mu}C$ ). В этом случае точка  $E_1$  может быть либо узлом, либо фокусом. В последнем случае переход к стационарному уровню  $I$  от первоначального  $i(0) \ll C$  будет представлять собой затухающие осцилляции, которые называют последовательностью *волн заражения*, типичный вид которых показан на рис. 1, а.

Как следует из рис. 1, а, в самом начале эпидемии наблюдается быстрый (почти экспоненциальный) рост числа заболевших, за которым следует такой же быстрый спад практически до нуля; после него в течение длительного интервала времени число заболевших остается чрезвычайно низким. Далее, спустя продолжительный интервал, следует второй пик заражения, уже существенно меньшей величины, после чего траектория выходит на уровень, близкий к  $I$ , на котором она и остается в дальнейшем.

Из сопоставления приведенных на рис. 1, а временных реализаций можно заметить, что плотность населения является определяющим параметром как для итогового уровня заражения, так и для его максимального уровня в ходе первой волны заражения. Чем выше плотность населения популяции, тем быстрее там возникает первичная волна заражения и тем выше ее пиковое значение. Причем растет не только абсолютное значение  $i_{\max}$ , но и относительный уровень заражения  $i_{\max}/C$ . Соответствующий график построен на рис. 1, б. Здесь мы видим сначала падение относительного максимума заражения на интервале  $0 \leq C < 0.177$ , а затем монотонный нелинейный рост относительного числа заболевших. Значение  $C^* \simeq 0.177$ , отмеченное на рисунке

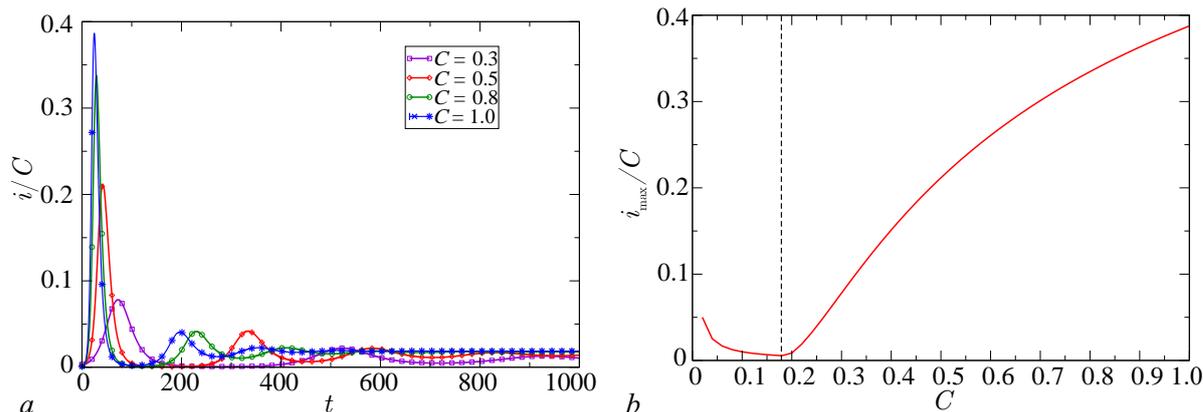


Рис. 1. *a* — Относительное число зараженных  $i(t)/C$  на начальном этапе эпидемии для разных  $C$  и *b* — зависимость относительного максимального уровня заражения от  $C$ ; значения параметров:  $P_2 = 1/7$ ,  $P_3 = 1/300$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\mu = 0.5$  (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* — The relative number of infected  $i(t)/C$  at the initial stage of the epidemic for different  $C$  and *b* — the dependence of the relative maximum level of infection on  $C$ ; parameter values:  $P_2 = 1/7$ ,  $P_3 = 1/300$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\mu = 0.5$  (color online)

штриховой линией, является бифуркационным. Оно соответствует столкновению точек  $E_0$  и  $E_1$ , при котором они обмениваются устойчивостью. Таким образом, при  $C < C^*$  эпидемия не развивается и первоначальное заражение монотонно затухает до нуля, а при  $C > C^*$  создаются условия для развития эпидемии, которая развивается тем успешнее, чем выше плотность популяции  $C$ .

## 2. SIRS+V-модель взаимодействующих популяций

Уравнения (1) описывают динамику распространения заболевания внутри отдельной популяции. Построим на их основе модель взаимодействующих популяций. В качестве взаимодействия будем рассматривать спонтанную миграцию особей между популяциями, которую можно рассматривать как диффузионный процесс. При его наличии изменение численности любой из групп особей будет представлять собой сумму двух слагаемых: «реакции» и «диффузии»; последняя пропорциональна разности плотностей населения в первой и второй популяциях. Таким образом, получим уравнения:

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_1 &= -P_1(v_1)s_1 + P_3r_1 + \gamma_h(s_2 - s_1), \\
 \dot{i}_1 &= P_1(v_1)s_1 - P_2i_1 + \gamma_i(i_2 - i_1), \\
 \dot{r}_1 &= P_2i_1 - P_3r_1 + \gamma_h(r_2 - r_1), \\
 \dot{v}_1 &= \beta i_1 - \mu v_1, \\
 \dot{s}_2 &= -P_1(v_2)s_2 + P_3r_2 + \gamma_h(s_1 - s_2), \\
 \dot{i}_2 &= P_1(v_2)s_2 - P_2i_2 + \gamma_i(i_1 - i_2), \\
 \dot{r}_2 &= P_2i_2 - P_3r_2 + \gamma_h(s_1 - s_2), \\
 \dot{v}_2 &= \beta i_2 - \mu v_2,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где нижний индекс у переменных означает номер популяции;  $\gamma_h \in [0, 1]$  и  $\gamma_i \in [0, 1]$  — коэффициенты миграции здоровых и больных особей соответственно<sup>2</sup>. Заметим, что в данной

<sup>2</sup>Возможность к миграции у здоровых и больных особей может существенно различаться.

модели отсутствует передача вирусов через границу между популяциями, которая предполагается невозможной в силу удаленности последних друг от друга.

В системе (5) общие численности каждой из популяции  $C_k = s_k + i_k + r_k$  ( $k = 1, 2$ ) уже не сохраняются по отдельности, но сохраняется их сумма  $C_1 + C_2$ . Соответственно, введя параметр средней плотности населения популяций  $C = (C_1 + C_2) / 2$  и переменную, описывающую дисбаланс плотностей,  $\Delta C = (C_1 - C_2) / 2$ , можно уменьшить на единицу общее число независимых переменных:

$$\begin{aligned}
 \dot{i}_1 &= P_1(v_1)(C + \Delta C - i_1 - r_1) - P_2 i_1 + \gamma_i(i_2 - i_1), \\
 \dot{r}_1 &= P_2 i_1 - P_3 r_1 + \gamma_h(r_2 - r_1), \\
 \dot{v}_1 &= \beta i_1 - \mu v_1, \\
 \dot{i}_2 &= P_1(v_2)(C - \Delta C - i_2 - r_2) - P_2 i_2 + \gamma_i(i_1 - i_2), \\
 \dot{r}_2 &= P_2 i_2 - P_3 r_2 + \gamma_h(s_1 - s_2), \\
 \dot{v}_2 &= \beta i_2 - \mu v_2, \\
 \dot{\Delta C} &= -2\gamma_h \Delta C + (\gamma_h - \gamma_i)(i_1 - i_2).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Решение уравнений (6) ищется при  $C \in [0, 1]$ ,  $i_k(0), r_k(0), v_k(0) \geq 0$ ,

$$\Delta C(0) \in \begin{cases} [-C, C], & \text{при } C \leq 0.5, \\ [C - 1, 1 - C], & \text{при } C > 0.5 \end{cases}$$

и дополнительных начальных условиях:  $i_1(0) + r_1(0) \leq C + \Delta C(0)$ ,  $i_2(0) + r_2(0) \leq C - \Delta C(0)$ , которые гарантируют, что начальная плотность населения каждой из популяций  $C_k(0)$  окажется в интервале  $[0, 1]$ .

### 3. Анализ установившихся режимов динамического равновесия

Чтобы получить координаты состояний равновесия системы (6), воспользуемся аппроксимацией функции  $P_1(v) \simeq v$  при  $v(\infty) \ll 1$ <sup>3</sup>, а также перейдем к «нормальным» координатам:  $x = (x_1 + x_2) / 2$  и  $\Delta x = (x_1 - x_2) / 2$ , где  $x = i, r, v$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{i} &= v(C - i - r) + \Delta v(\Delta C - \Delta i - \Delta r) - P_2 i, \\
 \dot{r} &= P_2 i - P_3 r, \\
 \dot{v} &= \beta i - \mu v, \\
 \dot{\Delta i} &= \Delta v(C - i - r) + v(\Delta C - \Delta i - \Delta r) - (P_2 + 2\gamma_i)\Delta i, \\
 \dot{\Delta r} &= P_2 \Delta i - (P_3 + 2\gamma_h)\Delta r, \\
 \dot{\Delta v} &= \beta \Delta i - \mu \Delta v, \\
 \dot{\Delta C} &= -2\gamma_h \Delta C + 2(\gamma_h - \gamma_i)\Delta i.
 \end{aligned} \tag{7}$$

<sup>3</sup>Это условие выполняется для многих инфекционных заболеваний, у которых  $P_2 \gg P_3$ , например, респираторно-вирусных.

Приравняв правые части (7) нулю, получим следующие неподвижные точки:

- $\mathbb{E}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  – тривиальное состояние равновесия, соответствующее отсутствию заболевания в обеих популяциях;
- $\mathbb{E}_1 = \left( I_s, \frac{P_2}{P_3} I_s, \frac{\beta}{\mu} I_s, 0, 0, 0, 0 \right)$ , где  $I_s = \frac{C - \frac{\mu P_2}{\beta}}{\left(1 + \frac{P_2}{P_3}\right)}$  – симметричное состояние равновесия, соответствующее одинаковым уровням заболевания в обеих популяциях;
- $\mathbb{E}_2 = \left( I_a, \frac{P_2}{P_3} I_a, \frac{\beta}{\mu} I_a, \Delta I_a, \frac{P_2}{P_3 + 2\gamma_h} \Delta I_a, \frac{\beta}{\mu} \Delta I_a, \frac{\gamma_h - \gamma_i}{\gamma_h} \Delta I_a \right)$ , где

$$I_a = \frac{C - \frac{\mu P_2}{\beta} - \frac{2\mu\gamma_i}{\beta}}{1 + \frac{P_2}{P_3} + \frac{P_2}{P_3 + 2\gamma_h} + \frac{\gamma_i}{\gamma_h}}, \quad (8)$$

$$\Delta I_a^2 = \frac{\left(C - \frac{\mu P_2}{\beta}\right) I_a - \left(1 + \frac{P_2}{P_3}\right) I_a^2}{\frac{P_2}{P_3 + 2\gamma_h} + \frac{\gamma_i}{\gamma_h}} \quad (9)$$

– несимметричное состояние равновесия соответствующее большему уровню заражения в первой популяции;

- $\mathbb{E}_3 = \left( I_a, \frac{P_2}{P_3} I_a, \frac{\beta}{\mu} I_a, -\Delta I_a, -\frac{P_2}{P_3 + 2\gamma_h} \Delta I_a, -\frac{\beta}{\mu} \Delta I_a, -\frac{\gamma_h - \gamma_i}{\gamma_h} \Delta I_a \right)$  – точка, симметричная  $\mathbb{E}_2$ .

Из (9) следуют интервалы существования для  $\mathbb{E}_2$  и  $\mathbb{E}_3$ :

- $I_s \leq I_a \leq 0$ , при  $I_s < 0$ ;
- $0 \leq I_a \leq I_s$ , при  $I_s > 0$ .

Граничное состояние  $I_a = 0$  соответствует соотношению между параметрами  $P_2 = \frac{\beta C}{\mu} - 2\gamma_i$ . В этой точке происходит рождение  $\mathbb{E}_2$  и  $\mathbb{E}_3$  из  $\mathbb{E}_0$ . Граничное состояние  $I_a = I_s$  при положительных параметрах недостижимо.

Полученные выше состояния равновесия могут быть «возвращены» в исходную систему координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \mathcal{E}_1 &= \left( I_s, \frac{P_2}{P_3} I_s, \frac{\beta}{\mu} I_s, I_s, \frac{P_2}{P_3} I_s, \frac{\beta}{\mu} I_s, 0 \right), \\ \mathcal{E}_2 &= \left( I_a + \Delta I_a, \frac{P_2}{P_3} I_a + \frac{P_2}{P_3 + 2\gamma_h} \Delta I_a, \frac{\beta}{\mu} (I_a + \Delta I_a), I_a - \Delta I_a, \frac{P_2}{P_3} I_a - \frac{P_2}{P_3 + 2\gamma_h} \Delta I_a, I_a \right. \\ &\quad \left. \frac{\beta}{\mu} (I_a - \Delta I_a), \frac{\gamma_h - \gamma_i}{\gamma_h} \Delta I_a \right), \\ \mathcal{E}_3 &= \left( I_a - \Delta I_a, \frac{P_2}{P_3} I_a - \frac{P_2}{P_3 + 2\gamma_h} \Delta I_a, \frac{\beta}{\mu} (I_a - \Delta I_a), I_a + \Delta I_a, \frac{P_2}{P_3} I_a + \frac{P_2}{P_3 + 2\gamma_h} \Delta I_a, \right. \\ &\quad \left. \frac{\beta}{\mu} (I_a + \Delta I_a), -\frac{\gamma_h - \gamma_i}{\gamma_h} \Delta I_a \right). \end{aligned}$$

Устойчивость состояний равновесия определялась посредством расчета собственных чисел якобиана. Для симметричных точек  $\mathbb{E}_0$  и  $\mathbb{E}_1$  он имеет блочно-диагональный вид:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} \hat{J}_t & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{J}_{tr} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где  $\hat{J}_t$  —  $3 \times 3$  матрица, определяющая устойчивость к касательным возмущениям, совпадающая с якобианом одиночной системы:

$$\hat{J}_t = \begin{bmatrix} -(v + P_2) & -v & C - i - r \\ P_2 & -P_3 & 0 \\ \beta & 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

а  $\hat{J}_{tr}$  —  $4 \times 4$  матрица, определяющая устойчивость к трансверсальным возмущениям:

$$\hat{J}_{tr} = \begin{bmatrix} -(v + P_2 + 2\gamma_i) & -v & C - i - r & v \\ P_2 & -(P_3 + 2\gamma_h) & 0 & 0 \\ \beta & 0 & -\mu & 0 \\ 2(\gamma_h - \gamma_i) & 0 & 0 & -2\gamma_h \end{bmatrix},$$

$\hat{0}$  — нулевая матрица. Соответственно, набор собственных чисел (10) представляет собой объединение наборов собственных чисел матриц  $\hat{J}_t$  и  $\hat{J}_{tr}$ . Первый из них совпадает с собственными числами одиночной подсистемы, поэтому бифуркации в касательном направлении происходят идентично бифуркациям системы (2). Для  $\mathbb{E}_0$  эти собственные числа равны:  $\lambda_1^t = -P_3$ ,  $\lambda_{2,3}^t = 0.5 \left( \pm \sqrt{(P_2 - \mu)^2 + 4\beta C - P_2 - \mu} \right)$ . Соответственно, при положительных параметрах тангенциальная устойчивость  $\mathbb{E}_0$  определяется соотношением  $P_2 > \frac{\beta C}{\mu}$ . В бифуркационной точке  $P_2 = \frac{\beta C}{\mu}$  происходит столкновение состояний равновесия  $\mathbb{E}_0$  и  $\mathbb{E}_1$ , при котором они обмениваются тангенциальной устойчивостью. При этом  $\mathbb{E}_1$  становится аттрактором и остается таковым при любых положительных значениях связей. Трансверсальные собственные числа для  $\mathbb{E}_0$  равны:  $\lambda_1^{tr} = -\tilde{P}_3$ ,  $\lambda_{2,3}^{tr} = 0.5 \left( \pm \sqrt{(\tilde{P}_2 - \mu)^2 + 4\beta C - \tilde{P}_2 - \mu} \right)$  и  $\lambda_4^{tr} = -2\gamma_h$ , где  $\tilde{P}_2 = P_2 + 2\gamma_i$ ,  $\tilde{P}_3 = P_3 + 2\gamma_h$ . Легко увидеть, что последнее из них всегда отрицательное, а выражения для первых трех отличаются от тангенциальных собственных чисел заменой  $P_k \rightarrow \tilde{P}_k$ . Соответственно, условие устойчивости  $\mathbb{E}_0$  в трансверсальном направлении определяется соотношением  $P_2 > \frac{\beta C}{\mu} - 2\gamma_i$ . В бифуркационной точке  $P_2 = \frac{\beta C}{\mu} - 2\gamma_i$  потеря устойчивости для  $\mathbb{E}_0$  в трансверсальном направлении сопровождается рождением точек  $\mathbb{E}_2$  и  $\mathbb{E}_3$ . Поскольку к этому моменту (при  $P_2 = \frac{\beta C}{\mu}$ )  $\mathbb{E}_0$  уже превратилось в седло, потеряв устойчивость в касательном направлении, точки  $\mathbb{E}_2$  и  $\mathbb{E}_3$  рождаются седловыми. Последние остаются седлами при положительных значениях параметров связи.

Таким образом, в связанной системе наблюдается тот же бифуркационный сценарий обмена устойчивостью между точками  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}_1$ , что и в одиночной системе (2). Аттрактором является одно из симметричных состояний равновесия  $\mathcal{E}_0$  и  $\mathcal{E}_1$  аналогично точкам  $E_0$  и  $E_1$  модели для одиночной популяции, бифуркация между которыми происходит при том же соотношении  $P_2 = \frac{\beta C}{\mu}$ . Иными словами, наличие миграции не меняет долговременную динамику заболевания в одинаковых популяциях. Однако оно может оказывать влияние на переходные процессы к стационарному состоянию, то есть на развитие эпидемии, следующее за моментом первоначального заражения.

#### 4. Численные исследования передачи инфекции между популяциями

Рассмотрим ситуацию развития заболевания в одинаковых популяциях после того, как в первую проникла малая группа зараженных особей:  $i_1(0) = 0.001$ ,  $r_1(0) = 0$ ,  $v_1(0) = 0$  и  $i_2(0) = r_2(0) = v_2(0) = 0$ ,  $\Delta C(0) = 0$ . Значения параметров выберем типичными для ряда

респираторно-вирусных заболеваний, например:  $P_2 = 1/7$  (то есть средний интервал излечения составляет одну неделю),  $P_3 = 1/300$  (иммунитет держится около года),  $\beta = 0.4$ ,  $\mu = 0.5$  (вирусы сохраняют способность к заражению в течение двух дней) и при  $C = 0.5$ . При данных параметрах и в достаточно широкой области вокруг них аттрактором является состояние равновесия  $\mathcal{E}_1$ , представляющее собой устойчивый фокус. Проведем численные исследования системы (6) в зависимости от параметров связей для трех характерных случаев: однородной миграции ( $\gamma_i = \gamma_h$ ), неоднородной миграции ( $\gamma_i < \gamma_h$ ) и аномальной миграции ( $\gamma_i > \gamma_h$ ).

**Однородная миграция.** Данный тип миграции характерен для легких заболеваний, при которых болезнь почти не отражается на поведении инфицированных, а также при отсутствии специальных карантинных мероприятий. На рис. 2, *a* и 2, *b* показаны временные реализации  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  для двух характерных случаев: средней ( $\gamma = 0.01$ ) и слабой ( $\gamma = 0.0001$ ) связи. Анализ результатов численного моделирования позволяет заключить, что:

- в обеих популяциях эпидемия развивается схожим образом, подобно тому, как это происходит в отдельной несвязанной системе (см. рис. 1, *a*), то есть через последовательность нескольких волн заражения, первая из которых имеет большую амплитуду;
- амплитуды первичных и вторичных волн заражения в первой и второй подсистемах почти одинаковы;
- первичная волна заражения во второй популяции отстает от таковой в первой на интервал  $\Delta t_1$ , величина которого растет с уменьшением параметра связи;
- при  $\gamma \geq 0.01$  вторая и последующие волны заражения синхронизируются.

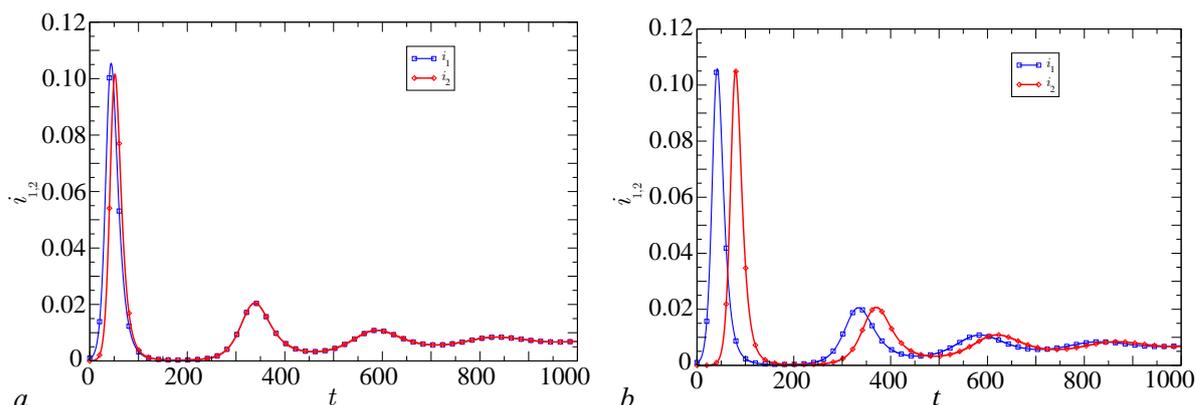


Рис. 2. Временные реализации колебаний  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  при  $\gamma = 0.01$  (*a*) и  $\gamma = 0.0001$  (*b*) (цвет онлайн)

Fig. 2. Oscillations time-series  $i_1(t)$  and  $i_2(t)$  at  $\gamma = 0.01$  (*a*) and  $\gamma = 0.0001$  (*b*) (color online)

**Неоднородная миграция.** Данный тип миграции соответствует заболеваниям тяжелым и средней тяжести, при которых болезнь существенно меняет поведение особей, препятствуя их свободному перемещению, а также наблюдается при наличии карантинных мероприятий, направленных на предотвращение проникновения извне инфицированных особей. В этом случае мигрируют в основном здоровые особи, что соответствует соотношению между параметрами:  $\gamma_h \gg \gamma_i > 0$ . Построим несколько характерных временных реализаций  $i(t)$  в «донорской» и «реципиентной» подсистемах для разных соотношений между  $\gamma_h$  и  $\gamma_i$  (см. рис. 3, *a* и 3, *b*). Как видно из рисунков, ход эпидемии во второй популяции происходит качественно так же, как и в первой, но с отставанием по времени. Кроме того, в отличие от случая однородной миграции, теперь наблюдается существенное уменьшение амплитуды первой волны заражения во второй популяции. Это уменьшение тем больше, чем слабее миграция инфицированных особей.

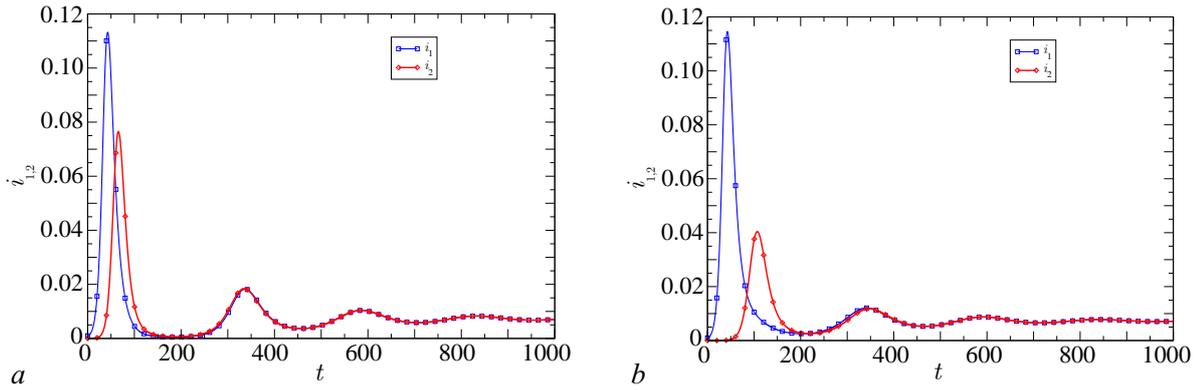


Рис. 3. Временные реализации колебаний  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  при  $\gamma_h = 0.01$  и  $\gamma_i = 0.001$  (a),  $\gamma_i = 0.00001$  (b) (цвет онлайн)  
 Fig. 3. Oscillations time-series  $i_1(t)$  and  $i_2(t)$  at  $\gamma_h = 0.01$  and  $\gamma_i = 0.001$  (a),  $\gamma_i = 0.00001$  (b) (color online)

Для анализа «подавления» первой волны заражения во второй популяции построим зависимость отношения максимумов заболевших  $\xi_i = \frac{i_2^{(\max)}}{i_1^{(\max)}}$  как функцию отношений коэффициентов связи  $\xi_\gamma = \frac{\gamma_i}{\gamma_h}$ . Графики  $\xi_i(\xi_\gamma)$  для разных  $\gamma_h$  приведены на рис. 4, a. Для удобства анализа они построены в двойном логарифмическом масштабе. Из рисунка видно, что (а) все зависимости имеют монотонно возрастающий характер и (б) при  $\gamma_h < 0.02$  их форма схожа с прямыми линиями. Последнее свидетельствует о степенном характере зависимостей  $\xi_i \sim \xi_\gamma^q$ , где показатель экспоненты  $q$  определяется углом наклона прямой, то есть значением  $\gamma_h$ . Расчеты показывают, что зависимость  $q(\gamma_h)$  оказывается близкой к линейной, что иллюстрируется графиком на рис. 4, b.

Таким образом, при небольшой миграции уменьшение первой волны заражения во второй популяции относительно первой может быть аппроксимировано функцией

$$\xi_i \approx \left( \frac{\gamma_i}{\gamma_h} \right)^{q\gamma_h}.$$

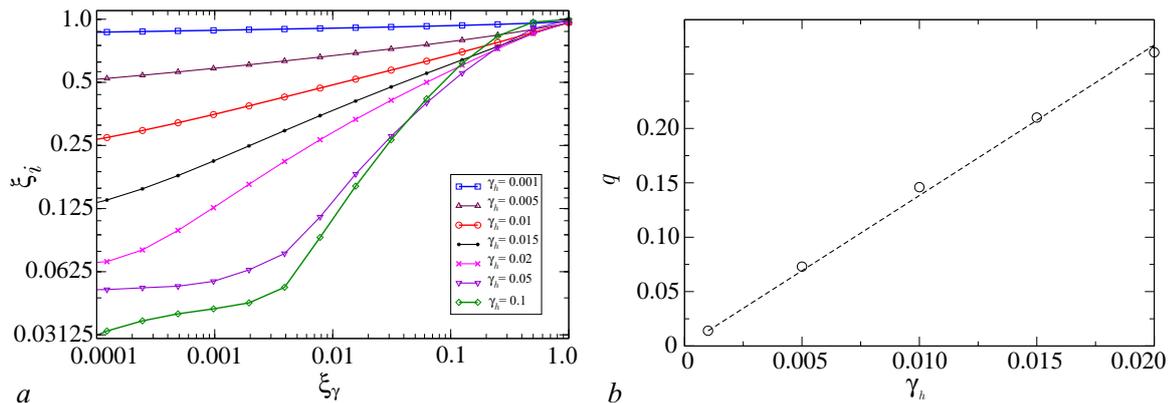


Рис. 4. a — Отношение между максимальными уровнями заражения в первой и второй популяциях  $\xi_i$  в зависимости от отношения коэффициентов связи  $\xi_\gamma$  при разных  $\gamma_h$ ; b — значение показателя  $q$  степенной аппроксимации  $\xi_i(\xi_\gamma) = \xi_\gamma^q$  в зависимости от  $\gamma_h$ ; штриховая линия соответствует прямой  $q = 13.8\gamma_h$  (цвет онлайн)

Fig. 4. a — The ratio between the maximum infection levels in the first and second populations  $\xi_i$  depending on the ratio of the coupling coefficients  $\xi_\gamma$  for different  $\gamma_h$ ; b — the value of the exponent  $q$  of the power approximation  $\xi_i(\xi_\gamma) = \xi_\gamma^q$  depending on  $\gamma_h$ ; the dashed line corresponds to  $q = 13.8\gamma_h$  (color online)

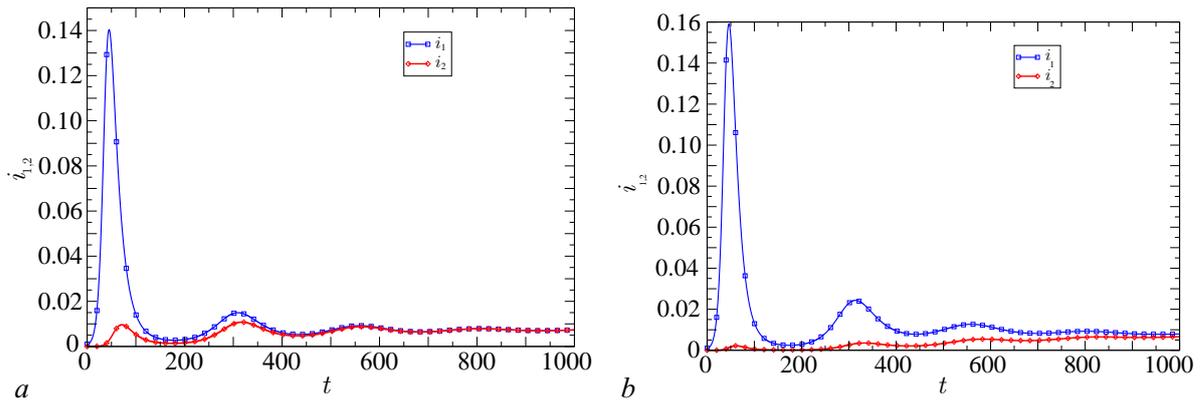


Рис. 5. Временные реализации колебаний  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  при  $\gamma_h = 0.05$ ,  $\gamma_i = 0.0001$  (a) и  $\gamma_h = 0.1$ ,  $\gamma_i = 0.0001$  (b) (цвет онлайн)

Fig. 5. Oscillations time-series  $i_1(t)$  and  $i_2(t)$  at  $\gamma_h = 0.05$ ,  $\gamma_i = 0.0001$  (a) and  $\gamma_h = 0.1$ ,  $\gamma_i = 0.0001$  (b) (color online)

Однако, как видно из графиков на рис. 4, a, степенной характер  $\xi_i$  ( $\xi_\gamma$ ) имеет место только при средней и слабой миграции здоровых особей. При  $\gamma_h \geq 0.02$  характер зависимостей качественно меняется. Очевидно, это связано с качественным изменением хода эпидемии во второй популяции, наблюдаемым в случае значительной миграции. Действительно, как показывают расчеты, при больших  $\gamma_h$  подавление первой волны заражения во второй популяции оказывается настолько большим, что уровень заболевших в ходе нее становится меньше, чем во время последующих волн. Соответствующая ситуация показана на рис. 5, a для  $\gamma = 0.05$ . При еще более высокой миграции (рис. 5, b) подавляются и последующие волны заражения. В результате при больших  $\gamma_h$  во вторично зараженной популяции наблюдается медленный и почти монотонный рост числа заболевших от нуля до  $I_s$ .

**Аномальная миграция.** Несмотря на то, что участие в миграции преимущественно больных особей является нетипичным, рассмотрим также и эту ситуацию. Зададим  $\gamma_i = 0.01$ , что на два порядка больше чем  $\gamma_h = 0.0001$ , и построим для этого случая временные реализации заболевших в обеих популяциях (рис. 6). Ход заболевания оказывается и качественно,

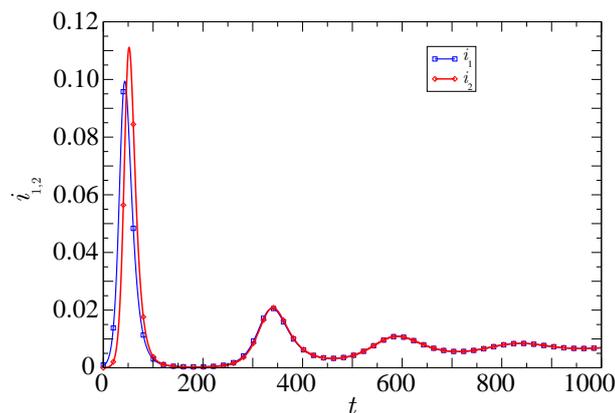


Рис. 6. Временные реализации колебаний  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  при  $\gamma_h = 0.0001$  и  $\gamma_i = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Oscillations time-series  $i_1(t)$  and  $i_2(t)$  at  $\gamma_h = 0.0001$  and  $\gamma_i = 0.01$  (color online)

и количественно схож со случаем равной миграции. Отличием является лишь небольшое превышение максимума заболевших во второй популяции по сравнению с максимумом в первой. При других значениях параметров связи, подчиняющихся соотношению  $\gamma_i \gg \gamma_h$ , картина оказывается схожей.

### Заключение

Предложена модель миграционно-связанных популяций, в которых распространяется инфекционное заболевание. Модель представляет собой две идентичные SIRS+V-системы ОДУ с взаимной диффузионной связью. Система исследуется в зависимости от коэффициентов связи, характеризующих по отдельности миграцию здоровых и больных особей.

Проведенный анализ устройства фазового пространства и численные исследования модели позволяют заключить, что:

- долговременная динамика связанной системы не отличается от динамики модели для индивидуальной популяции. На больших временах в обеих взаимодействующих системах устанавливается одинаковый уровень инфицированных особей, равный соответствующему уровню в изолированной популяции.
- переходная динамика связанной системы зависит от величин коэффициентов миграции больных и здоровых особей.

Зависимость переходной динамики во вторичной популяции является существенной в случае неоднородной миграции, когда миграция здоровых особей значительно превышает миграцию больных. Если при одинаковой миграции ход заболевания во второй популяции почти повторяет с некоторой задержкой ход заболевания в первой, то при неоднородной миграции наблюдается подавление первой и последующих волн заражения. При значительном уровне миграции здоровых особей может наблюдаться полное подавление волн заражения во вторичной популяции, при котором рост заболевания в ней будет проходить в форме медленного, почти монотонного роста с постепенным выходом на стационарный уровень.

Полученные результаты могут быть интересны для планирования стратегии борьбы с развитием эпидемий посредством карантинных мероприятий. Как видно из моделирования, неселективное подавление миграции не является эффективной стратегией, поскольку не приводит к уменьшению заболевания ни в кратковременном, ни в долговременном планах, а лишь отсрочивает наступление эпидемии. С другой стороны, предотвращение миграции больных особей с одновременным поощрением миграции здоровых позволяет полностью подавить волны заражения во вторичной популяции, так что начало эпидемии в ней будет проходить в форме медленного и плавного роста числа заболевших к стационарному уровню.

### Список литературы

1. *Hamer W. H.* The Milroy Lectures on Epidemic Disease in England — The Evidence of Variability and Persistence of Type // *The Lancet*. 1906. Vol. 1. P. 733–739.
2. *Ross R.* An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. – Part I // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1916. Vol. 92, iss. 638. P. 204–230. DOI: 10.1098/rspa.1916.0007.
3. *Ross R.* An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. – Part II // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1917. Vol. 93, iss. 650. P. 212–225. DOI: 10.1098/rspa.1917.0014.
4. *Ross R., Hudson H.* An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. – Part III // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1917. Vol. 93, iss. 650. P. 225–240. DOI: 10.1098/rspa.1917.0015.
5. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.

6. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. Москва: Наука, 1991. 276 с.
7. *Hethcote H. W.* The mathematics of infectious diseases // *SIAM Review*. 2000. Vol. 42, no. 4. P. 599–653. DOI: 10.1137/S0036144500371907.
8. *Андерсон Р., Мэй Р.* Инфекционные болезни человека. Динамика и контроль. М.: Мир, 2004. 784 с.
9. *Kermack W., McKendrick A.* A contribution to the mathematical theory of epidemics // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1927. Vol. 115. P. 700–721. DOI: 10.1098/RSPA.1927.0118.
10. *Шабунин А. В.* Гибридная SIRS-модель распространения инфекций // *Известия вузов. ПНД*. 2022. Т. 30, № 6. С. 717–731. DOI: 10.18500/0869-6632-003014.
11. *Шабунин А. В.* Пространственная и временная динамика возникновения эпидемий в гибридной SIRS+V модели клеточных автоматов // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 3. С. 271–285. DOI: 10.18500/0869-6632-003042.
12. *Логофет Д. О.* Способна ли миграция стабилизировать экосистему? (Математический аспект) // *Журнал общей биологии*. 1978. Т. 39. С. 123–129.
13. *Фрисман Е. Я.* О механизме сохранения неравномерности в пространственном распределении особей // В кн: *Математическое моделирование в экологии: Материалы III школы по мат. моделированию слож. биол. систем*. М.: Наука, 1978. С. 145–153.
14. *Frisman E. Ya.* Differences in densities of individuals in population with uniform range // *Ecol. Modelling*. 1980. Vol. 8, no. 3. P. 345–354. DOI: 10.1016/0304-3800(80)90046-0.
15. *Cressman R., Krivan V.* Migration dynamics for the ideal free distribution // *Amer. Natur.* 2006. Vol. 168, no. 3. P. 384–397. DOI: 10.1086/506970.
16. *Kritzer J., Sale P.* Marine Metapopulations. New York: Academic Press, 2006. 544 с.
17. *Allen J. P.* Mathematical models of species interactions in time and space // *Amer. Natur.* 1975. Vol. 109, no. 967. P. 319–342. DOI: 10.1086/283000.
18. *Udwadia F. E., Raju N.* Dynamics of coupled nonlinear maps and its application to ecological modeling // *Appl. Math. Comp.* 1997. Vol. 82, iss. 2–3. P. 137–179. DOI: 10.1016/S0096-3003(96)00027-6.
19. *Wysham D. B., Hastings A.* Sudden Shift Ecological Systems: Intermittency and Transients in the Coupled Riker Population Model // *Bull. Math. Biol.* 2008. Vol. 70. P. 1013–1031. DOI: 10.1007/S11538-007-9288-8.
20. *Кулаков М. П., Неверова Г. П., Фрисман Е. Я.* Мультистабильность в моделях динамики миграционно-связанных популяций с возрастной структурой // *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10. С. 407–425.
21. *Кулаков М. П., Фрисман Е. Я.* Кластеризация и химеры в модели пространственно-временной динамики популяций с возрастной структурой // *Нелинейная динамика*. 2018. Т. 14. С. 13–31.
22. *Mukherjee D.* Persistence aspect of a predator-prey model with disease in the prey // *Journal of Biological Systems*. 2003. Vol. 11, no. 1. P. 101–112. DOI: 10.1142/S0218339003000634.
23. *Das K. P.* A study of harvesting in a predator-prey model with disease in both populations // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2016. Vol. 39. P. 2853–2870. DOI: 10.1002/mma.3735.
24. *Biswas S., Saifuddin M., Sasmal S. K., Samanta S., Pal N., Ababneh F., Chattopadhyay J.* A delayed prey-predator system with prey subject to the strong Allee effect and disease // *Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 3. P. 1569–1594. DOI: 10.1007/s11071-015-2589-9.
25. *Kant S., Kumar V.* Stability analysis of predator-prey system with migrating prey and disease infection in both species // *Applied Mathematical Modelling*. 2017. Vol. 42. P. 509–539. DOI: 10.1016/j.apm.2016.10.003.
26. *Ambrosio B., Aziz-Alaoui M. A.* On a coupled time-dependent SIR models fitting with New York

and New-Jersey states COVID-19 data // *Biology*. 2020. Vol. 9, no. 6. P. 135. DOI: 10.3390/biology9060135.

27. Шабунин А. В. Синхронизация процессов распространения инфекций во взаимодействующих популяциях: Моделирование решетками клеточных автоматов // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 4. С. 383–396. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-383-396.

## References

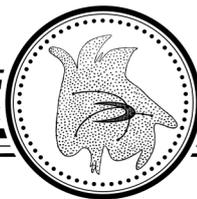
1. Hamer WH. The Milroy Lectures on Epidemic Disease in England — The Evidence of Variability and Persistence of Type. *The Lancet*. 1906;167(4307):733-739.
2. Ross R. An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. — Part I. *Proc. R. Soc. London A*. 1916;92(638):204–230. DOI: 10.1098/rspa.1916.0007.
3. Ross R. An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. — Part II. *Proc. R. Soc. London A*. 1917;93(650):212–225. DOI: 10.1098/rspa.1917.0014.
4. Ross R, Hudson H. An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. — Part III. *Proc. R. Soc. London A*. 1917;93(650):225–240. DOI: 10.1098/rspa.1917.0015.
5. Bailey N. *The Mathematical Approach to Biology and Medicine*. London: John Wiley and Sons; 1967. 296 p. DOI: 10.2307/2982529.
6. Marchuk GI. *Mathematical Models in the Immunology. Simulation Methods and Experiments*. M.: Nauka; 1991. 276 p. (in Russian).
7. Hethcote HW. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*. 2000; 42(4):599–653. DOI: 10.1137/S0036144500371907.
8. Anderson R, May R. *Infectious Diseases of Humans – Dynamics and Control*. Oxford: Oxford University Press; 1991. 757 p.
9. Kermack W, McKendrick A. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. London A*. 1927;115:700–721. DOI: 10.1098/RSPA.1927.0118.
10. Shabunin AV. Hybrid SIRS model of infection spread. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):717–731 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003014.
11. Shabunin AV. Spatial and temporal dynamics of the emergence of epidemics in the hybrid SIRS+V model of cellular automata. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(3):271–285 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-003042.
12. Logofet DO. Is migration able to stabilize an ecosystem? (The mathematical aspect). *J. Gen. Biol*. 1978;39:123–129 (in Russian).
13. Frisman EY. On the mechanism of preserving nonuniformity in the spatial distribution of individuals. In: *Mathematical Modeling in Ecology*. M.: Nauka; 1978. P. 145–153 (in Russian).
14. Frisman EY. Differences in densities of individuals in population with uniform range. *Ecol. Modelling*. 1980;8:345–354.
15. Cressman R, Křivan V. Migration Dynamics for the Ideal Free Distribution. *The American Naturalist*. 2006;168(3):384–987. DOI: 10.1086/506970.
16. Kritzer J, Sale P. *Marine Metapopulations*. New York: Academic Press; 2006. 544 p.
17. Allen JP. Mathematical models of species interactions in time and space. *Amer. Natur.* 1975; 109(967):319–342. DOI: 10.1086/283000.
18. Udawadia FE, Raju N. Dynamics of Coupled Nonlinear Maps and Its Application to Ecological Modeling. *Appl. Math. Comp.* 1997;82:137–179. DOI: 10.1016/S0096-3003(96)00027-6.
19. Wysham DB, Hastings A. Sudden Shift Ecological Systems: Intermittency and Transients in the Coupled Riker Population Model. *Bull. Math. Biol.* 2008; 70:1013–1031. DOI: 10.1007/S11538-007-9288-8.

20. Kulakov MP, Neverova GP, Frisman EY. Multistability in dynamic models of migration coupled populations with an age structure. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2014;10(4):407–425. (in Russian).
21. Kulakov MP, Frisman EY. Clustering and chimeras in the model of spatial and temporal dynamics of populations with age structure. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018;14(1):13–31. (in Russian).
22. Mukherjee D. Persistence aspect of a predator-prey model with disease in the prey. *J. Biol. Systems.* 2003;11(1):101–112. DOI: 10.1142/S0218339003000634.
23. Das KP. A study of harvesting in a predator-prey model with disease in both populations. *Math. Methods Appl. Sci.* 2016;39(11):2853–2870. DOI: 10.1002/mma.3735.
24. Biswas S, Saifuddin M, Sasmal SK, Samanta S, Pal N, Ababneh F, Chattopadhyay J. A delayed prey-predator system with prey subject to the strong Allee effect and disease. *Nonlinear Dynamics.* 2016;3:1569–1594. DOI: 10.1007/s11071-015-2589-9.
25. Kant S, Kumar V. Stability analysis of predator-prey system with migrating prey and disease infection in both species. *Applied Mathematical Modelling.* 2017;42:509–539. DOI: 10.1016/j.apm.2016.10.003.
26. Ambrosio B, Aziz-Alaoui MA. On a coupled time-dependent SIR models fitting with New York and New-Jersey states COVID-19 data. *Biology.* 2020;9(6):135. DOI: 10.3390/biology9060135.
27. Shabunin AV. Synchronization of infections spread processes in populations interacting: Modeling by lattices of cellular automata. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2020;28(4):383–396. (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-383-396.



*Шабунин Алексей Владимирович* — родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1998, СГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2007, СГУ). С 1990 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности профессора. Научные интересы — нелинейная динамика, синхронизация, мультистабильность, клеточные автоматы, искусственные нейронные сети. Опубликовал свыше 100 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru  
 ORCID: 0000-0002-3495-9418  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 34839



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья  
УДК 517.91

DOI: 10.18500/0869-6632-003144  
EDN: ATHCRQ

## Периодические режимы в гибридной динамической системе «хищник–жертва» с учетом миграции и внутривидовой конкуренции

А. Н. Кириллов, А. М. Сазонов✉

Карельский научный центр РАН, Петрозаводск, Россия

E-mail: krllv1812@yandex.ru, ✉sazon-tb@mail.ru

Поступила в редакцию 15.04.2024, принята к публикации 1.08.2024,

опубликована онлайн 3.12.2024, опубликована 31.03.2025

**Аннотация.** Целью работы является построение и анализ гибридной модели, описывающей динамику биосообщества участка с переменной структурой межвидовых взаимодействий. Изменение структуры взаимодействия видов вызвано миграцией хищника из участка в случае недостатка пищевых ресурсов и колонизацией (возможно, реколонизацией) участка в случае достаточного их количества. **Методы.** Модель представляет собой трехмерную нелинейную гибридную систему, состоящую из трех динамических подсистем. Переключение между подсистемами регулируется величиной пищевой привлекательности участка, понятие которой введено ранее одним из авторов. Благодаря использованию пищевой привлекательности система обладает памятью, и изменение структуры межвидового взаимодействия приобретает инерционность, характерную для экологических процессов. **Результаты.** Введены режимы биосообщества участка: взаимодействие видов, миграция хищника и динамика жертвы в отсутствие хищника. Исследована символическая динамика, соответствующая изменению режимов участка. Доказан ряд результатов, дающих условия существования периодических траекторий в гибридной системе и периодических символических последовательностей режимов. Определено бифуркационное для динамики режимов значение параметра, характеризующего потребности хищника в пищевых ресурсах. Приведен численный пример. **Заключение.** На основе полученных условий существования периодических символических последовательностей режимов возможно прогнозирование миграции популяции хищника из участка и его реколонизации. При этом, в частности, становится разрешимой практически важная в экологии задача оценивания временных периодов процесса реколонизации.

**Ключевые слова:** гибридная система, переменная структура, нелинейная динамика популяций.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РНФ в рамках научного проекта 23-21-00092.

**Для цитирования:** Кириллов А. Н., Сазонов А. М. Периодические режимы в гибридной динамической системе «хищник–жертва» с учетом миграции и внутривидовой конкуренции // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 199–218. DOI: 10.18500/0869-6632-003144. EDN: ATHCRQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Periodic regimes in a hybrid dynamical predator-prey system with migration and intraspecific competition

A. N. Kirillov, A. M. Sazonov✉

Karelian Research Centre of the RAS, Petrozavodsk, Russia

E-mail: krllv1812@yandex.ru, ✉sazon-tb@mail.ru

Received 15.04.2024, accepted 1.08.2024, available online 3.12.2024, published 31.03.2025

**Abstract.** The goal of the paper is to construct and analyze a hybrid model describing patch biocommunity dynamics with variable structure interspecific interactions. Species interaction structure variations are implied by predator's population migration from a patch caused by food resources lack and patch colonization in a case of its sufficient amount. **Methods.** The model is presented by a three dimensional nonlinear hybrid system consisting of three dynamical subsystems. Switchings between subsystems are regulated by a patch food attractivity value the notion of which was introduced by one of the authors. Due to a food attractivity usage the system possesses a memory because of which variations of interactions' structure obtain inertia typical for ecological processes. **Results.** The following regimes of patch biocommunity are introduced: interspecific interaction, predator's migration and prey's dynamics in the absence of predators. Symbolic dynamics corresponding to patch regimes variations is investigated. Results delivering conditions of existence of periodic trajectories in a hybrid system, as well as periodic symbolic regime sequences, are obtained. A bifurcation value of a parameter characterized predator's resource requirements is determined. Numerical example is given. **Conclusion.** On the basis of obtained results concerning periodic symbolic regime sequences, expressed via system parameters relations, it is possible to predict a predator population migration from a patch and its recolonization. Moreover, appears a possibility to estimate time periods of recolonization processes which is an important practical problem in ecology.

**Keywords:** hybrid system, variable structure, nonlinear population dynamics.

**Acknowledgements.** This work was supported by RSF, project number 23-21-00092.

**For citation:** Kirillov AN, Sazonov AM. Periodic regimes in a hybrid dynamical predator-prey system with migration and intraspecific competition. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(2):199–218. DOI: 10.18500/0869-6632-003144

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Рассматривается популяция некоторого вида, хищника, местообитание которой состоит из изолированных участков. Участки содержат ресурс питания, жертву. Популяция хищников мигрирует между участками обитания в целях отыскания оптимальных условий существования. В случае недостатка ресурса питания на участке популяция покидает его. При этом возможна реколонизация участка, если его пищевая привлекательность возрастает до некоторого порога.

Участок в каждый момент времени может находиться в одном из состояний, которые будем называть режимами: взаимодействие «хищник–жертва», миграция хищника, функционирование жертвы в отсутствие хищника. Нас интересуют условия существования этих режимов и перехода между ними. В настоящей задаче будет изучаться динамика режимов, что отличает ее от традиционных задач теории динамических систем.

Описанную (пока неформально) задачу можно отнести к теории метапопуляций [1]. Под метапопуляцией понимают совокупность субпопуляций вида, находящуюся на различных участках (patches), связанных миграционными потоками.

Метапопуляционная динамика представлена в различных исследованиях. В частности, статья [2] посвящена моделированию метапопуляции на основе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), исследуется вопрос глобальной устойчивости методом Ляпунова. В [3] исследована модель метапопуляции *Trypanosoma cruzi*. Качественный анализ модели сконцентрирован на индексе репродукции с целью показать, как миграция и различные способы передачи инфекции определяют устойчивость инфекции, проведено численное исследование устойчивости. В работе [4] представлена модель метапопуляции для изучения малярии, исследуется устойчивость. Статья [5] посвящена исследованию возникающих бифуркаций в модели метапопуляции с двумя конкурирующими видами на основе ОДУ. В [6] исследуется модель метапопуляции в виде ОДУ, показано существование и устойчивость равновесий, получено условие исчезновения популяции. В работе [7] представлена модель метапопуляции дафний в виде ОДУ, исследуется устойчивость и возникновение бифуркаций.

В качестве недостатка описанных моделей можно выделить то, что метапопуляция описывается единственной системой ОДУ, что неидеально подходит для экологических систем со сложной, изменчивой структурой. Для описания систем с изменяющимися типами взаимодействия лучше подходят гибридные системы [8–10], позволяющие явным образом учитывать изменения структуры экологических систем. Таким образом, актуальной задачей в области моделирования метапопуляций является разработка новых моделей в виде гибридных динамических систем. Например, в работе [11] представлена гибридная система типа Филиппова, описывающая динамику метапопуляции с двумя участками, для исследования динамики предрасположенных и зараженных инфекционными заболеваниями. Исследуется устойчивость равновесий.

В настоящей работе предлагается подход к моделированию динамики процессов взаимодействия, миграции и реколонизации участка популяцией хищника на основе гибридной системы или динамической системы с переключениями. В отличие от многих существующих моделей, трудно исследуемых качественно и аналитически, данная модель представляет собой совокупность простых моделей и сценарий переключения между ними. Это позволяет провести достаточно полное исследование нелинейной динамики.

Ценность участка для хищника характеризуется его пищевой привлекательностью, понятие которой введено одним из авторов [12].

Пусть  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  — количественные характеристики популяций жертв и хищника в момент времени  $t$  соответственно. Пусть  $\lambda > 0$  — пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое хищнику для поддержания его жизненных функций. Тогда величина

$$n(t) = \int_0^t \left( \frac{x(\tau)}{y(\tau)} - \lambda \right) d\tau \quad (1)$$

характеризует накопление избытка или недостатка пищевого ресурса на участке на промежутке  $[0, t]$  для популяции хищников. Функция  $n : t \rightarrow n(t)$  введена в [12] и называется пищевой привлекательностью участка в момент  $t \geq 0$ . Величину  $n(t)$  можно интерпретировать как память популяции хищников о питательных ресурсах участка на промежутке  $[0, t]$ .

Динамика биосообщества с памятью, заданной выражением, отличным от (1), рассматривалась в [13], где проводилось исследование устойчивости равновесия по первому приближению. В [14] использовано отношение  $x/y$  в модели двумерной динамики «хищник–жертва» с переключениями между двумя подсистемами.

Будем полагать, что условие  $n(t) > 0$  характеризует участок как привлекательный для популяции хищника.

## 1. Модель

Рассмотрим следующую гибридную модель «хищник–жертва» с миграцией хищников, представляющую собой совокупность систем дифференциальных уравнений, каждая из которых задана в соответствующей области, принадлежащей  $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ , где  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ . Если  $n > 0$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(kbx - m), \\ \dot{n} = x - \lambda y, \end{cases} \quad (2)$$

где постоянные  $a, b, m$  положительны,  $0 < k < 1$ . Система (2) описывает режим взаимодействия хищников и жертв при достаточной для этого величине пищевой привлекательности  $n > 0$ . Первые два уравнения представляют собой систему Лотки–Вольтерры, третье получено дифференцированием (1).

Для дальнейшего описания динамики введем функцию  $y = \varepsilon^*(x)$ :

$$\varepsilon^*(x) = \begin{cases} \frac{x}{\lambda}, & 0 < x < \varepsilon\lambda, \\ \varepsilon, & x \geq \varepsilon\lambda, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varepsilon < a/b$ .

Если  $n \leq 0$  и  $y > \varepsilon^*(x)$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ \dot{y} = -my, \\ \dot{n} = x - \lambda y. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) описывает процесс миграции или ухода хищника из участка вследствие недостаточной величины пищевой привлекательности ( $n < 0$ ). При этом отсутствует взаимодействие между популяциями хищников и жертв, что типично для миграции.

Если  $n < 0$  и  $0 < y \leq \varepsilon^*(x)$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = -d, \\ \dot{n} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $d > 0$ . Система (5) задает режим полного исчезновения популяции хищника из сообщества, настолько быстропротекающий ( $d$  достаточно велико), что изменением переменных  $x, n$  можно пренебречь.

Если  $n < 0$  и  $y = 0$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cx), \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{n} = x, \end{cases} \quad (6)$$

где  $c > 0$ . Система (6) описывает динамику популяции жертв в отсутствие хищника. При этом учитывается внутривидовая конкуренция жертв (первое уравнение — логистическое), что естественно при отсутствии хищника, подавляющего популяцию жертв.

Если  $n = 0$  и  $0 < y \leq \varepsilon^*(x)$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = d, \\ \dot{n} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) описывает режим появления хищника в сообществе.

Введем обозначения для режимов, задаваемых приведенными выше системами (подсистемами):

- $P_2$  — взаимодействие (2),
- $P_1$  — отсутствие хищника (6),
- $P_{21}$  — миграция хищника (4),
- $P_-$  — уход хищника (5),
- $P_+$  — появление хищника (7).

Пусть символ  $\xi \in \Psi = \{1, 2, 12, -, +\}$ .

Представленная работа посвящена изучению динамики символических последовательностей  $\{P_\xi\}$ ,  $\xi \in \Psi$ . Это мотивируется целью исследования. Нас интересует, как уже отмечалось во Введении, не традиционно изучаемое состояние фазового вектора, характеризующего биосообщество, а состояние структуры взаимодействия видов, присутствующих на участке, условия ухода популяции хищника из участка, условия реколонизации участка хищником, условия периодической реколонизации. Все это позволит прогнозировать состояние биогеоценоза территории. Последовательность  $\{P_\xi\}$  является инструментом в таком исследовании.

**Замечание 1.** Отметим, что в рассматриваемой гибридной системе переходы между основными режимами, а именно, взаимодействия (2) и миграции (4), происходят не мгновенно при нехватке ресурсов, а с учетом предыстории  $n(t)$ , что придает инерционность изменению режимов. В работе [14], где представлена двумерная гибридная система с двумя подсистемами и иной динамикой, переключение происходит в момент времени  $t^*$  такой, что  $x(t^*) = \lambda y(t^*)$ . Данное обстоятельство делает модель более адекватной реальным экологическим системам, которым свойственна инерционность изменения структуры. Инерционность при переключении между режимами  $P_2$  и  $P_{21}$  возникает вследствие того, что переключение происходит не в момент попадания на плоскость  $x(t) = \lambda y(t)$ , а позже за счет введения переменной  $n(t)$ .

Пусть  $r_\xi(t, M, \lambda)$  — решение системы, задающей режим  $P_\xi$ , при постоянном  $\lambda > 0$ ,  $r_\xi(0, M, \lambda) = M$ ,  $\tilde{r}_\xi(M, \lambda) = \{r_\xi(t, M, \lambda), t \geq 0\}$  — соответствующая положительная полутраектория.

Под решением гибридной системы (2)–(7) будем понимать, как это принято для систем с переключениями, такую функцию  $t \rightarrow r(t, M, \lambda)$ ,  $r(0, M) = M$ , что ее ограничение на область, в которой задана соответствующая система, совпадает с решением последней. При этом решение гибридной системы сшивается из решений систем (2)–(7) стандартным образом. Для того чтобы это было возможно, на границах областей, в которых определены подсистемы, их векторные поля не должны быть направлены навстречу друг другу. Тогда будет происходить так называемое прошивание границ траекториями [15], что обеспечит переход к следующей системе. При этом конечная точка для предыдущей системы становится начальной для последующей. Под положительной полутраекторией гибридной системы (2)–(7) будем понимать объединение отрезков (дуг) соответствующих траекторий составляющих ее подсистем.

В дальнейшем будет показано, что достаточным условием, обеспечивающим прошивание траекториями границ областей, в которых заданы подсистемы, является ограниченность сверху параметра  $\lambda$ , то есть выполнение условия

$$\lambda \leq C, \quad (8)$$

где значение положительной постоянной  $C$  будет определено. Тогда решения и полутраектории гибридной системы (2)–(7) будут определены корректно.

В настоящей работе рассматривается, если не оговорено особо, случай

$$\lambda > \frac{m}{ak}, \quad (9)$$

причем, как будет показано в дальнейшем, для постоянной  $C$  будет выполнено условие  $C > \frac{m}{ak}$ . Экологически это значит, что для нормальной жизнедеятельности хищнику требуется большое количество жертв, поэтому вследствие выедания особей жертвы хищник вынужден мигрировать в поисках более богатых пищевыми ресурсами участков. Условие (9) соответствует активно мигрирующему хищнику. Случаю  $\lambda \leq \frac{m}{ak}$  уделено некоторое внимание в последнем разделе.

**Определение 1.** Введем названия для представленных ниже последовательностей режимов:

- $P_2P_{21}P_2$  — частичная миграция;
- $P_2P_{21}P_-P_1$  — полная миграция;
- $P_2P_{21}P_-P_1P_+P_2P_{21}P_-P_1$  — полная вторичная миграция.

В названиях последовательностей режимов отражен смысл поведения популяции хищника. Изучим условия существования полной вторичной миграции, смысл которой состоит в том, что популяция хищника, покинув участок, через некоторое время возвращается на него, а затем снова покидает.

Для знакомства с динамикой гибридной системы опишем кратко начальное ее функционирование, предполагая, что все переходы между соответствующими подсистемами возможны.

В дальнейшем полагаем, что популяция хищника в момент времени  $t = 0$  появляется на участке, и пусть  $M_0 = (x_0, 0, 0)$  — начальная точка. Далее, динамика задается системой (7) (режим  $P_+$ ), и за конечное (достаточно малое) время фазовая точка переходит в положение  $M$ :

$$M = (x_M, y_M, 0) \in \{(x, y, 0) : y = \varepsilon^*(x)\},$$

где  $x_M = x_0$ ,  $y_M = \varepsilon^*(x_M)$ . Затем начинает функционировать система (2) — режим  $P_2$ , в результате которого фазовая точка вернется на плоскость  $n = 0$  (это будет доказано ниже). Далее, из уравнений (4), (6) следует, что фазовая точка в течение конечного времени находится в области  $n < 0$  и вдоль траектории системы (4) попадет на плоскость  $n = 0$ , в область  $x < \lambda y$ , или — на поверхность  $y = \varepsilon^*(x)$ . Приведенное описание соответствует последовательности режимов  $P_+P_2P_{21}$ .

Ниже будет проведено исследование возможности существования периодических траекторий в гибридной системе.

## 2. Инвариантные поверхности

**2.1. Инвариантные поверхности для системы (2).** Первые два уравнения в (2), как уже было отмечено выше, задают систему Лотки–Вольтерры

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(kbx - m), \end{cases}$$

которую будем обозначать как система  $L - V$ . Обозначим через  $\sigma(z_0)$  траекторию системы  $L - V$ , проходящую через точку  $z_0 = (x_0, y_0)$ . Как известно,  $\sigma(z_0)$  — замкнутый овал, задаваемый уравнением  $f(x, y, z_0) = 0$ , где

$$\sigma(z_0) : f(x, y, z_0) = a \ln y - by + m \ln x - kbx - h(x_0, y_0) = 0, \quad (10)$$

где  $h(x_0, y_0) = a \ln y_0 - by_0 + m \ln x_0 - kbx_0$ .

**Замечание 2.** Отметим, что условие (9) геометрически соответствует расположению положения равновесия  $(\frac{m}{bk}, \frac{a}{b})$  системы  $L - V$  над прямой  $x = \lambda y$ .

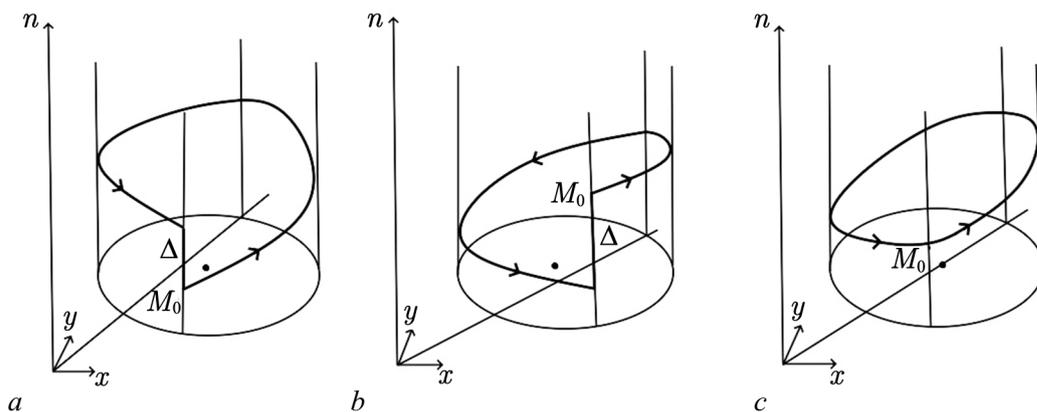


Рис. 1. Значение  $\Delta(M_0, \lambda)$ :  $a$  — при  $\lambda < \frac{m}{ak}$ ;  $b$  — при  $\lambda > \frac{m}{ak}$ ;  $c$  — при  $\lambda = \frac{m}{ak}$   
 Fig. 1. Value of  $\Delta(M_0, \lambda)$ :  $a$  — if  $\lambda < \frac{m}{ak}$ ;  $b$  — if  $\lambda > \frac{m}{ak}$ ;  $c$  — if  $\lambda = \frac{m}{ak}$

Будем полагать, что овалы  $\sigma(z_0)$  вложены в плоскость  $n = 0$ :  $\sigma(z_0) \in \{(x, y, 0)\}$ . Точку  $M = (x, y, 0)$  будем также обозначать как  $z = (x, y)$ .

Поскольку в правые части первых двух уравнений системы (2) не входит  $n$ , то в пространстве  $\mathbb{R}^3$  (без учета ограничения  $n > 0$ ) траектории этой системы принадлежат инвариантным цилиндрическим поверхностям, образующие которых параллельны координатной оси  $On$ , направляющие — овалы  $\sigma$ . Обозначим через  $C(\sigma)$  цилиндрическую поверхность с направляющей  $\sigma$ . Поскольку система (2) имеет место при  $n \geq 0$ , то ее траектории принадлежат поверхностям  $C(\sigma) \cap \mathbb{R}_+^3$ , где  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, n) : x \geq 0, y \geq 0, n \geq 0\}$ . Сохраним для этих «получилиндрических» поверхностей обозначение  $C(\sigma)$ .

Следующий результат характеризует расположение траектории системы (2) на соответствующей поверхности  $C(\sigma)$ .

Пусть  $r_v(t, z_0)$  и  $\sigma(z_0)$  — решение и траектория системы  $L - V$ ,  $T(\sigma(z_0))$  — период решения  $r_v(t, z_0)$ ,  $M_0 = (z_0, n_0)$ ,  $\Delta(t, M_0, \lambda)$  — приращение координатной функции  $n(t, M_0, \lambda)$  решения  $r_2(t, M_0, \lambda)$  системы (2) на промежутке  $[t, t + T(\sigma(z_0))]$ , то есть

$$\Delta(t, M_0, \lambda) = n(t + T(\sigma(z_0)), M_0, \lambda) - n(t, M_0, \lambda).$$

В [16] доказано, что  $\Delta(t, M_0, \lambda)$  не зависит от  $t$ , и если обозначить  $\Delta(t, M_0, \lambda) = \Delta(M_0, \lambda)$ , то (см. рис. 1)

**Лемма 1 (см. [16, с. 103]).**

$$\Delta(M_0, \lambda) = \frac{aT(\sigma(z_0))}{b} \left( \frac{m}{ak} - \lambda \right). \quad (11)$$

Величина смещения  $\Delta(M_0, \lambda)$  не изменится, если точку  $M_0$  заменить на любую другую точку  $M \in \sigma(z_0)$ , поскольку в правую часть (11) входит период  $T$ , определяемый соответствующим овалом  $\sigma$ .

## 2.2. Инвариантные плоскости для систем (4), (2).

**Лемма 2 (см. [12]).** Система (4) имеет линейный интеграл вида

$$mx + a\lambda y - amn = const. \quad (12)$$

Система (2) имеет линейный интеграл (12) тогда и только тогда, когда  $\lambda = \frac{m}{ak}$ .

**Доказательство.** Для доказательства достаточно продифференцировать выражение  $mx + a\lambda y - amn$  вдоль решений системы (4), а в случае  $\lambda = \frac{m}{ak}$  вдоль решений (2), и убедиться, что соответствующие производные тождественно равны нулям.  $\square$

### 3. Условие корректности модели

Переход от системы (4) к (6) или (2), как нетрудно убедиться, не вызывает сомнений: происходит прошивание траекториями граничных поверхностей  $y = \varepsilon^*(x)$  или  $n = 0$  соответственно.

При переходе же от (6) к (2) возможно попадание траектории системы (7) на промежуток  $(0E)$ , где  $E = E(\varepsilon) = (\lambda\varepsilon, \varepsilon)$  (см. (3)). Пусть это попадание произойдет в точку  $M \in (0E)$ . Предположим, что существует овал  $\sigma$ , касающийся промежутка  $(0E)$  в точке  $Q = \sigma \cap (0E)$ . Также предположим, что точка  $M$  лежит выше точки  $Q$ , то есть  $y(Q) < y(M) < \varepsilon$ . Тогда при попадании траектории системы (7) в точку  $M$  не определено дальнейшее движение, то есть переход к следующей подсистеме. Действительно, точка  $M$  не может быть начальной для системы (2), поскольку решение системы (2) из нее непродолжимо: продолжение возможно лишь в область  $n < 0$ , где оно не определено. В то же время точка  $M$  не может быть конечной для системы (4). Таким образом, в описанном случае движение из точки  $M$  не определено.

Для преодоления описанного препятствия введем ограничения вида (8), смысл которого состоит в том, чтобы точка касания  $Q$  не принадлежала множеству  $y < \varepsilon^*(x)$ .

Найдем точки касания  $Q(\lambda)$  луча  $p(\lambda)$  и овала  $\sigma$ . Для ординаты точки касания  $Q(\lambda) = (\lambda y, y)$ , где  $x = \lambda y$ , справедливо уравнение

$$\frac{y(kb\lambda y - m)}{\lambda y(a - by)} = \frac{1}{\lambda},$$

откуда получаем

$$y = \frac{a + m}{(1 + \lambda k)b} = y(Q(\lambda)).$$

Легко убедиться как аналитически, так и геометрически в том, что  $y(Q(\lambda)) < \frac{a}{b}$  при  $\lambda > \frac{m}{ak}$ .

Выясним теперь, при каком условии  $y(Q(\lambda)) \geq \varepsilon$ , где  $\varepsilon < \frac{a}{b}$  (см. (3)), то есть

$$\frac{a + m}{(1 + \lambda k)b} \geq \varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\lambda \leq \frac{a + m - b\varepsilon}{bk\varepsilon} \doteq \lambda_\varepsilon. \quad (13)$$

Несложно показать, что при принятом выше условии (13) числитель последней дроби положителен, и также  $\frac{m}{ak} < \lambda_\varepsilon$ , то есть (13) не противоречит условию (9). Таким образом, для корректности модели (2)–(7) достаточно, чтобы выполнялось условие  $\lambda \leq \lambda_\varepsilon$ , что вместе с условием (9) приводит к следующему условию, выполнение которого будет предполагаться в дальнейшем

$$\frac{m}{ak} < \lambda \leq \lambda_\varepsilon \quad (14)$$

**3.1. Область ухода.** Введем следующие обозначения, полагая что  $\lambda > 0$ :

- конус  $\pi$

$$\pi = \{(x, y, 0) : x > 0, y > 0\};$$

- луч  $p = p(\lambda)$

$$p(\lambda) = \{(x, y, 0) : x = \lambda y, x > 0, y > 0\} \subset \pi;$$

- конусы  $p^+(\lambda) \subset \pi$ ,  $p^-(\lambda) \subset \pi$

$$p^+(\lambda) = \{(x, y, 0) : x > \lambda y, x > 0, y > 0\},$$

$$p^-(\lambda) = \{(x, y, 0) : x < \lambda y, x > 0, y > 0\}.$$

Упорядочим точки луча  $p(\lambda)$ : для точек  $M, N \in p(\lambda)$  пишем  $M < N$ , если для их координат  $x(M) < x(N)$ , или, что равносильно,  $y(M) < y(N)$ .

Обозначим через  $l(\lambda) \subset p^-$  такую кривую, что траектории системы (4), начинаясь в точках  $l(\lambda)$ , возвращаются впервые в область  $p^+$ , попадая на луч

$$\delta(\varepsilon, \lambda) = \{(x, y, 0) : y = \frac{a}{b}, x \geq \varepsilon \lambda\}. \quad (15)$$

**Лемма 3.** Линия  $l(\lambda) \subset \pi$  задается уравнением вида

$$x = \frac{\lambda a}{m} \cdot \frac{y - \varepsilon}{\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^{\frac{a}{m}} - 1} \doteq w(y, \lambda) \doteq w(y). \quad (16)$$

**Доказательство.** Пусть  $(x_0, y_0) \in l(\lambda)$  – начальная точка при  $t = t_0$  для системы (4), интегрируя которую, получим

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad y(t) = y_0 e^{-m(t-t_0)}, \quad n(t) = \frac{x_0}{a}(e^{a(t-t_0)} - 1) + \frac{y_0}{m}(e^{-m(t-t_0)} - 1).$$

Пусть при  $t = t_1$  фазовая точка впервые возвращается на плоскость  $n = 0$  вдоль траектории системы (4). Тогда  $n(t_1) = 0$ . Исключая  $t_1 - t_0$  из приведенных выше равенств, получаем (16).  $\square$

Нетрудно показать, что функция  $w(y)$  вогнута и монотонно убывает при  $a > m$ , выпукла и монотонно возрастает при  $a < m$ .

**Определение 2.** Линия ухода – это множество

$$L(\lambda) = l(\lambda) \cup (0A], \quad (17)$$

где  $(0A] \subset p$  – полуоткрытый промежуток,  $A = A(\lambda, \varepsilon) = (\lambda\varepsilon, \varepsilon, 0)$ .

Отметим, что линия  $L(\lambda)$  разбивает область  $p^-$  на два множества:

- область  $K_1 = K_1(\lambda)$ , ограниченную линией ухода  $L(\lambda)$  и координатной осью  $y$ ,
- и
- область  $K_2 = K_2(\lambda)$ , ограниченную лучами  $\delta(\varepsilon)$  и

$$[A\infty) = \{(x, y, 0) : x = \lambda y, y \geq \varepsilon\} \subset p.$$

Из области  $K_1$  фазовая точка переходит на поверхность  $y = \varepsilon^*(x)$  вдоль траекторий системы (4). Далее, фазовая точка вдоль траекторий системы (6) попадает на плоскость  $y = 0$ , то есть популяция хищника полностью покидает сообщество. Из области  $K_2$  фазовая точка попадает на плоскость  $n = 0$ , в область  $p^+ \subset \pi$ , вдоль траекторий системы (4), и далее действует режим  $P_2$  (2).

**Определение 3.** Области  $K_1(\lambda)$ ,  $K_2(\lambda)$  называются областями ухода и возврата соответственно.

Имеет место утверждение, которое моментально следует из (16).

**Лемма 4.** Пусть  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . Тогда  $K_1(\lambda_1) \supset K_1(\lambda_2)$  (рис. 2).

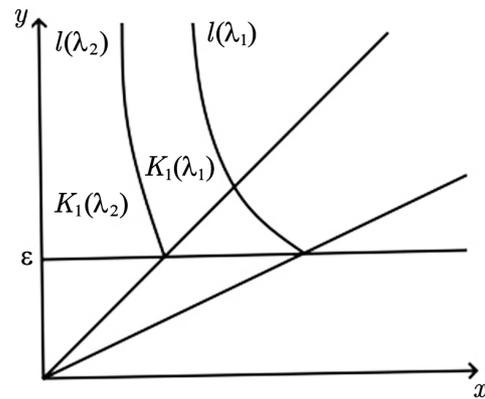


Рис. 2. Области ухода:  $K_1(\lambda_1) \supset K_1(\lambda_2)$  при  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Fig. 2. Leaving domains:  $K_1(\lambda_1) \supset K_1(\lambda_2)$  if  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

#### 4. Отображение последования $F(z, \lambda)$ и его монотонность

Введем обозначение

$$\lambda^* = \frac{m}{ak}.$$

**Лемма 5.** При любом  $\lambda \geq \lambda^*$  для точек  $z \in p^+$  существует отображение Пуанкаре (отображение последования)

$$F_\lambda : p^+(\lambda) \rightarrow p^-(\lambda)$$

вдоль траекторий системы  $P_2$  вида

$$F_\lambda : z \rightarrow F_\lambda(z), \quad (18)$$

где

$$F_\lambda(z) = r_2(t_\lambda(z), z, \lambda) \doteq F(z, \lambda)$$

при условии

$$r_2(t, z, \lambda) \in \mathbb{R}_+^3, \quad \text{если } t \in (0, t_\lambda(z)).$$

Обозначим  $t_\lambda(z)$  — момент времени первого попадания фазовой точки траектории  $\tilde{r}_2(z, \lambda)$  системы (2) на плоскость  $n = 0$ , в область  $p^-$ , где  $z \in p^+$ .

**Доказательство.** При  $\lambda = \lambda^*$  существование  $F_{\lambda^*}$  следует из лемм 2 и 1. Отметим, что в этом случае отображение  $F_{\lambda^*}$  определено и для точек  $z \in (0P)$ , где  $p(\lambda^*) \supset (0P)$  — открытый промежуток,  $P = (\frac{m}{bk}, \frac{a}{b})$  — положение равновесия системы Лотки–Вольтерры, входящей в (2). В этом случае  $F(z, \lambda^*) = z$ .

Пусть  $\lambda > \lambda^*$ . Из (11) следует,

$$\Delta(M, \lambda) = n(T(\sigma(z)), M, \lambda) - n(0, M, \lambda) = n(t + T(\sigma(z)), M, \lambda) < 0,$$

где  $M = (z, 0)$ . Следовательно, существует единственный момент времени  $t_\lambda(z)$  такой, что  $n(t_\lambda(z), M, \lambda) = 0$  при условии, что  $n(t, M, \lambda) > 0$  для  $t \in (0, t_\lambda(z))$ . При этом  $F(z, \lambda) = r_2(t_\lambda(z), M, \lambda) \in p^-$ , что следует из третьего уравнения системы (2).  $\square$

Для дальнейших рассуждений упорядочим точки овала  $\sigma$ . Рассмотрим луч  $p^* = p(\lambda^*)$  и точки  $\{A_1^*, A_2^*\} = p^* \cap \sigma$ , где  $A_1^* < A_2^*$ ,  $A_1^* = A_1^*(\sigma, \lambda^*)$ ,  $A_2^* = A_2^*(\sigma, \lambda^*)$ . Поскольку далее будем использовать в основном точку  $A_1$ , то для краткости обозначим ее как

$$A^* \doteq A_1^*(\sigma, \lambda^*).$$

Введем полярные координаты, полагая началом точку равновесия  $P = (\frac{m}{bk}, \frac{a}{b})$  соответствующей системы Лотки–Вольтерры. Пусть луч с началом в точке  $P$  и проходящий через точку  $A^*$  является полярной осью, которую обозначим через  $l(PA^*)$ . Полярный угол, как обычно, отсчитывается от  $l(PA^*)$  против часовой стрелки. Пусть  $PM = \rho(M)$  — радиус-вектор точки овала, то есть  $M \in \sigma$ ,  $\varphi(M)$  — соответствующий полярный угол, для которого полагаем  $\varphi(M) \in [0, 2\pi)$ . Отсюда  $\varphi(A^*) = 0$ ,  $\varphi(A_2^*) = \pi$ .

Тогда для точек  $M_1, M_2 \in \sigma$  пишем  $M_1 < M_2$ , если  $\varphi(M_1) < \varphi(M_2)$ .

**Лемма 6.** Пусть  $\lambda > \lambda^*$ . Имеет место монотонность отображения  $F(z, \lambda)$  по  $z$  и  $\lambda$  в следующем смысле.

1. Если  $z_1, z_2 \in \sigma \cap p^+(\lambda)$  и  $z_1 < z_2$ , то  $F(z_1, \lambda) > F(z_2, \lambda)$  (рис. 3, а).
2. Если  $\lambda_1 < \lambda_2$  и  $z \in \sigma \cap p^+(\lambda_2)$ , то  $F(z, \lambda_1) > F(z, \lambda_2)$  (рис. 3, б).

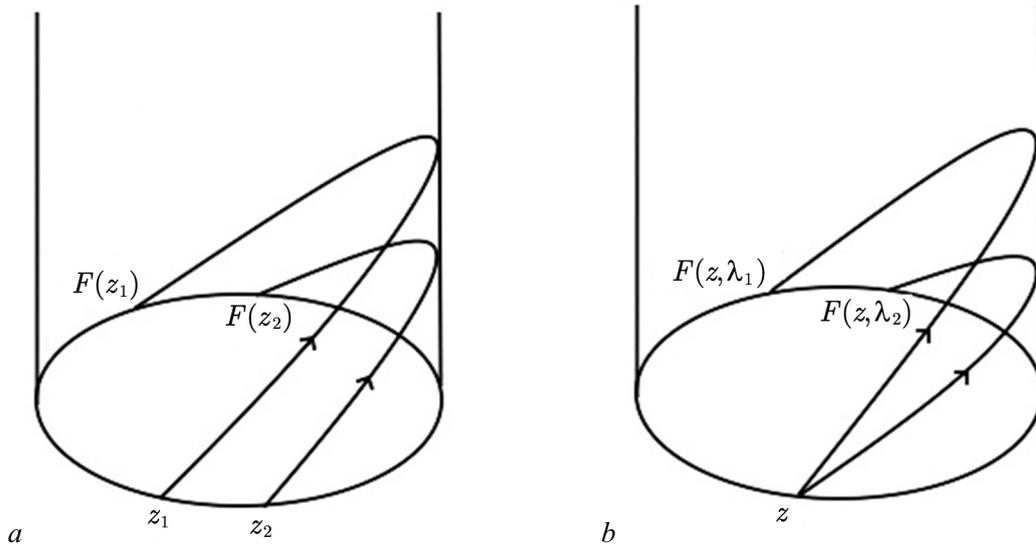


Рис. 3. Монотонность отображения Пуанкаре:  $a$  — если  $z_1 < z_2$ , то  $F(z_1, \lambda) > F(z_2, \lambda)$ ;  $b$  — если  $\lambda_1 < \lambda_2$ , то  $F(z, \lambda_1) > F(z, \lambda_2)$

Fig. 3. Monotonicity of Poincaré map:  $a$  — if  $z_1 < z_2$  then  $F(z_1, \lambda) > F(z_2, \lambda)$ ;  $b$  — if  $\lambda_1 < \lambda_2$  then  $F(z, \lambda_1) > F(z, \lambda_2)$

**Доказательство.** Первое утверждение следует из единственности траекторий, проходящих через данную точку и принадлежащих общей цилиндрической поверхности  $C(\sigma)$ .

Из второго условия,  $\lambda_1 < \lambda_2$ , следует, что  $\dot{n}(x, y, \lambda_1) = x - \lambda_1 y > x - \lambda_2 y = \dot{n}(x, y, \lambda_2)$ . Отсюда получаем, что для  $n$ -координат (координат по оси  $n$ ) траекторий  $\tilde{r}_2(M, \lambda_i) = (x(M, \lambda_i), y(M, \lambda_i), n(M, \lambda_i))$ ,  $M = (x, y, 0) = M(z, 0)$  справедливо неравенство  $n(M, \lambda_1) > n(M, \lambda_2)$ , откуда следует второе утверждение.  $\square$

### 5. Непрерывность отображения последования $F(M(\lambda), \lambda)$

Введем точку

$$A^*(\varepsilon) = (\lambda^* \varepsilon, \varepsilon, 0)$$

и промежуток  $(0, A^*(\varepsilon)) \subset p(\lambda^*)$ .

Для краткости для точки  $A^*(\varepsilon)$  будем использовать обозначение  $A^*$ , что не противоречит тому, что оно использовано выше при введении полярной системы координат, поскольку точка  $A^*(\varepsilon)$  — это частный случай точки  $A^*$ . Итак,  $A^* \doteq A^*(\varepsilon)$ .

Пусть точка

$$M^* \in (0, A^*). \tag{19}$$

Овал  $\sigma(M^*)$  содержит внутри себя овал  $\sigma(A^*)$  и, следовательно, пересекает прямую  $l_\varepsilon : y = \varepsilon$  в двух точках, которые обозначим через  $M_1^*(\varepsilon), M_2^*(\varepsilon)$ :

$$\{M_1^*, M_2^*\} = \sigma(M^*) \cap l_\varepsilon,$$

где  $M_1^* < M_2^*$ , то есть  $x(M_1^*) < x(M_2^*)$ . Пусть при  $\lambda = \lambda(M_2^*)$

$$M_2^* \in p(\lambda(M_2^*)).$$

Обозначим через  $A_\varepsilon$  точку пересечения луча  $p(\lambda_\varepsilon)$  ( $\lambda_\varepsilon$  определено в (13)) и прямой  $l_\varepsilon : y = \varepsilon$

$$A_\varepsilon = p(\lambda_\varepsilon) \cap l_\varepsilon.$$

Пусть точка  $M_\varepsilon^* \in p(\lambda^*)$  такова, что

$$M_\varepsilon^* = p(\lambda^*) \cap \sigma(A_\varepsilon).$$

Точка  $M_\varepsilon^*$  может принадлежать промежутку  $(0, A^*)$  при некоторых условиях, которые будут сформулированы в нижеследующей лемме.

Введем на прямой  $l_\varepsilon$  естественный порядок точек  $A, B \in l_\varepsilon$ :  $A < B$  равносильно тому, что  $x(A) < x(B)$ .

Пусть точка  $A_2^* = \sigma(A^*) \cap l_\varepsilon$ . Очевидно,  $A^* < A_2^*$ . Пусть при  $\lambda = \lambda_2$

$$A_2^* \in p(\lambda_2).$$

Очевидно, луч  $p(\lambda) : x = \lambda y$  имеет с овалом  $\sigma$  не более двух общих точек. Пусть  $\lambda$  таково, что  $\sigma \cap p(\lambda) = \{M_1(\lambda, \sigma), M_2(\lambda, \sigma)\}$ , где  $M_1(\lambda, \sigma) \leq M_2(\lambda, \sigma)$ . Введем краткое обозначение для точки  $M(\lambda, \sigma)$  такой, что  $x(M_1(\lambda, \sigma(M^*))) \leq \varepsilon$ , которое будем использовать ниже

$$M(\lambda) \doteq M_1(\lambda, \sigma(M^*)), \quad (20)$$

где  $x(M(\lambda)) \leq \varepsilon$ .

Введем для краткости обозначение

$$H(\lambda) \doteq F(M(\lambda), \lambda).$$

**Лемма 7.** Пусть выполнено условие (14).

Если

$$A_\varepsilon \leq A_2^*,$$

то функция  $H(\lambda)$  непрерывна при всех  $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_\varepsilon)$ .

Если

$$A_\varepsilon > A_2^*,$$

то возможны два случая.

1) Пусть  $M^* \in (0, M_\varepsilon^*]$ . Тогда функция  $H(\lambda)$  непрерывна при всех  $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_\varepsilon]$ .

2) Пусть  $M^* \in (M_\varepsilon^*, A^*)$ . Введем точку  $N^* = \sigma(M^*) \cap l_\varepsilon$ , где  $N^* > A^*$ , и пусть при  $\lambda = \lambda(N^*)$  точка  $N^* \in p(\lambda(N^*))$ . Тогда функция  $H(\lambda)$  непрерывна при всех  $\lambda \in [\lambda^*, \lambda(N^*))$ .

При этом в точках, являющихся границами интервалов изменения  $\lambda$ , имеет место непрерывность справа или слева для левой и правой границ соответственно.

**Доказательство.** Обе части леммы доказываются одинаково. Докажем первую часть. Пусть  $\hat{\lambda}, \lambda \in [\lambda^*, \lambda_\varepsilon)$  и  $\lambda > \hat{\lambda}$ . Тогда  $M(\lambda) > M(\hat{\lambda})$ .

Из леммы 6 следует, что

$$H(\hat{\lambda}) = F(M(\hat{\lambda}), \hat{\lambda}) > F(M(\hat{\lambda}), \lambda) > F(M(\lambda), \lambda) = H(\lambda).$$

Докажем непрерывность в точке  $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_\varepsilon)$  справа, то есть докажем, что

$$H(\lambda) \rightarrow H(\hat{\lambda}) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \hat{\lambda} + 0. \quad (21)$$

Пусть (21) не выполняется. Тогда в силу монотонности (по  $\varphi$ ) и ограниченности  $H(\lambda)$  существует предел  $\lim_{\lambda \rightarrow \hat{\lambda} + 0} H(\lambda) \doteq \hat{H}$ , где

$$H(\hat{\lambda}) > \hat{H} > H(\lambda). \quad (22)$$

При достаточно малом значении  $\lambda - \hat{\lambda} > 0$  имеем

$$M(\hat{\lambda}) < M(\lambda) < F^{-1}(\hat{H}, \hat{\lambda}), \quad (23)$$

где  $F^{-1}$  — обратное отображение. Из (22), учитывая изменение порядка образов точек  $M(\lambda)$  и  $F^{-1}(\hat{H}, \hat{\lambda})$ , получаем, что траектории системы (2) с этими начальными точками пересекутся в некоторой точке  $M = (x, y, n)$  такой, что  $n(\hat{\lambda}) > \dot{n}(\hat{\lambda})$  в точке  $M$ , где производные  $\dot{n}$  вычисляются при соответствующих значениях  $\lambda$ . Тогда из третьего уравнения системы (2) получаем, что  $x - \lambda y > x - \hat{\lambda} y$  или  $\lambda < \hat{\lambda}$ . Полученное противоречие с тем, что  $\lambda > \hat{\lambda}$ , доказывает непрерывность справа. Непрерывность слева доказывается аналогично.  $\square$

Введем обозначение  $\widehat{MN}$  для дуги овала  $\sigma$  с концами  $M, N \in \sigma$ , где  $M < N$  в смысле введенного выше порядка точек овала.

Пусть  $M^* \in (0, A^*)$  и точка  $M_{\min} = M_{\min}(M^*) = \sigma(M^*) \cap l(\lambda^*)$  имеет наименьшую ординату среди всех общих точек овала  $\sigma(M^*)$  и линии  $l(\lambda^*)$ . Существование точки  $M_{\min}$  следует из того, что кривая  $\sigma(M^*)$  замкнута и точка ее пересечения с прямой  $y = \varepsilon$  лежит под кривой  $l(\lambda^*)$  (см. рис. 4).

**Лемма 8.** Пусть выполнено условие (14).

Тогда для любой точки  $M^* \in (0, A^*)$  существует  $\lambda(M^*)$  такое, что при любом  $\lambda \in [\lambda^*, \lambda(M^*)]$

$$H(\lambda) \in K_1(\lambda).$$

**Доказательство.** Доказательство очевидным образом следует из существования точки  $M_{\min}$ , введенной перед формулировкой настоящей леммы, и из лемм 7, 4.  $\square$

В лемме 8 получено множество точек, в которые приходит популяция хищника и для которых в дальнейшем имеет место миграция и уход из участка. Если при этом приход в участок следовал после предыдущего ухода из него, то имеет место полная вторичная миграция  $P_2 P_{21} P_- P_1 P_+ P_2 P_{21} P_- P_1 -$ . Отметим, что лемма 8 носит глобальный, а не локальный характер. Так, например, в случае  $M^* = M_\varepsilon^*$  существует точка  $R^* \in \widehat{M_\varepsilon^* A_\varepsilon}$  и соответствующее  $\lambda(R) : R \in p(\lambda(R))$  такие, что прообраз любой точки дуги  $\widehat{M_{\min}^* M_\varepsilon^*}$  при отображении  $H(\lambda)$ , где  $\lambda \in [\lambda^*, \lambda(R)]$ , принадлежит дуге  $\widehat{M_\varepsilon^* R}$ .

На основании этого результата в следующем разделе получим условия периодической полной вторичной миграции.

## 6. Периодические режимы и траектории

В этом разделе будет проведено исследование существования периодической последовательности режимов вида  $\{(P_1 P_2 P_{21})\}$ , где опущены режимы  $P_-$ ,  $P_+$  как не влияющие на периодичность. Такой последовательности соответствует бесконечное повторение полной вторичной миграции, то есть ухода–возврата–ухода–... популяции хищника. Для экологии это означает бесконечное повторение реколонизации участка. Прогнозирование развития биосообщества участка

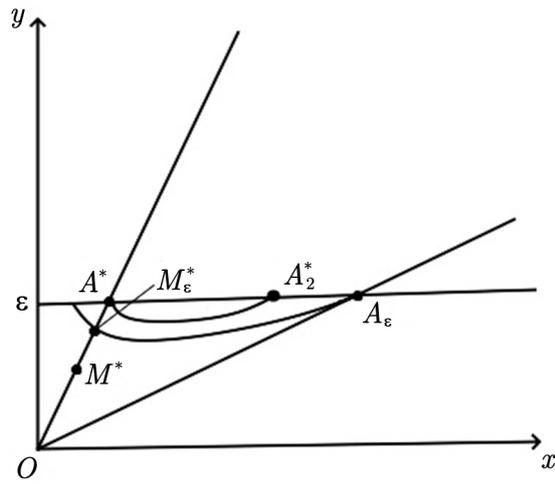


Рис. 4. Расположение точек при  $A_2^* < A_\varepsilon$

Fig. 4. Arrangement of points if  $A_2^* < A_\varepsilon$

является важной задачей экологии. Более того, будут получены условия существования периодических траекторий гибридной системы (2)–(7), что является непростой задачей, учитывая трехмерность и нелинейность системы с переключениями.

Периодическая траектория гибридной системы (2)–(7), соответствующая полной вторичной миграции, может быть устроена очень сложно. Ниже будут даны достаточные условия существования наиболее простой периодической траектории, которая соответствует последовательному чередованию всех режимов, а именно периодической последовательности вида

$$\{(P_1 P_+ P_2 P_{21} P_-)_i\}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

При этом будет рассмотрен случай, когда фазовая точка возвращается в режим  $P_2$  на интервал  $(0, A^*)$ . Существование периодических траекторий при возвращении на луч  $\delta(\varepsilon, \lambda)$  (см. 15) требует дополнительного исследования, которое будет проведено в дальнейшем.

**Определение 4.** Будем говорить, что режим  $P_2$  реализуется на цилиндрической поверхности  $C(\sigma)$ , если траектория (или ее отрезок) системы (2) принадлежит  $C(\sigma)$ .

Пусть сохраняются обозначения предыдущего раздела

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие (14).

Пусть точка  $M^* \in (0, A^*)$ , а  $\lambda(M^*)$  определено в формулировке леммы 8.

Пусть  $\lambda \in [\lambda^*, \lambda(M^*)]$ , то есть  $x_M = x(M(\lambda)) \in [x(M^*), x(M(\lambda(M^*)))]$ .

Пусть  $x_0 > 0$ ,  $n_0 < 0$  и выполнены следующие условия

$$x_0 > x_M > \frac{a}{c} \quad (25)$$

или

$$\begin{cases} x_0 < x_M < \frac{a}{c}, \\ x_0 - x_M > an_0, \end{cases} \quad (26)$$

где  $c = c(x_M, x_0, n_0)$  является единственным решением уравнения

$$n_0 c = \ln \left| \frac{a - cx_M}{a - cx_0} \right| \doteq \psi(c). \quad (27)$$

Тогда траектория гибридной системы (2)–(7), проходящая через точку  $(x_0, n_0, 0)$ , замкнута и реализуется на цилиндрической поверхности  $C(\sigma(M^*))$  (рис. 5, 6).

**Доказательство.** Траектория системы (6), проходящая через точку  $(x_0, n_0, 0)$ , имеет вид

$$n = n_0 + \frac{1}{c} \ln \left| \frac{a - cx}{a - cx_0} \right| \doteq s(x, x_0, n_0), \quad y = 0, \quad (28)$$

что доказывается элементарным интегрированием системы (6). Подставив в (28)  $n = 0$ ,  $x = x_M$ , получим уравнение (27):  $n_0 c = \psi(c)$ .

Очевидно, траектория  $n = s(x, x_0, n_0)$  из заключения леммы может существовать лишь в двух случаях:  $x_0 > x_M > \frac{a}{c}$  или  $x_0 < x_M < \frac{a}{c}$ .

Проведя на основе элементарных методов математического анализа исследование поведения функции  $\psi(c)$ , получаем следующие выводы о количестве и расположении решений уравнения (27).

Пусть  $x_0 < x_M$  (рис. 7, а). Тогда возможно одно из двух.

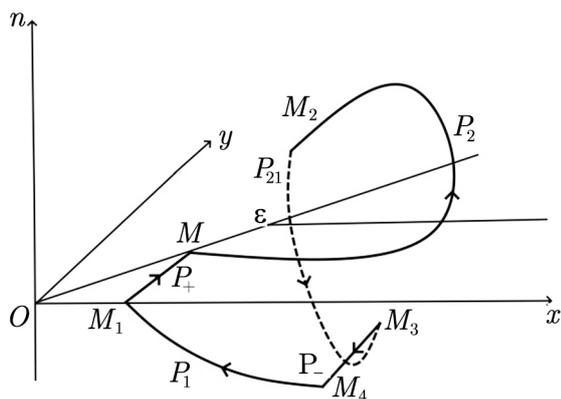


Рис. 5. Периодическая траектория

Fig. 5. Periodic trajectory

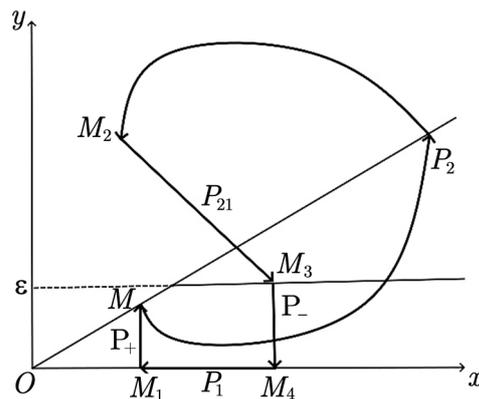


Рис. 6. Периодическая траектория (проекция на  $\pi$ )

Fig. 6. Periodic trajectory (projection onto  $\pi$ )

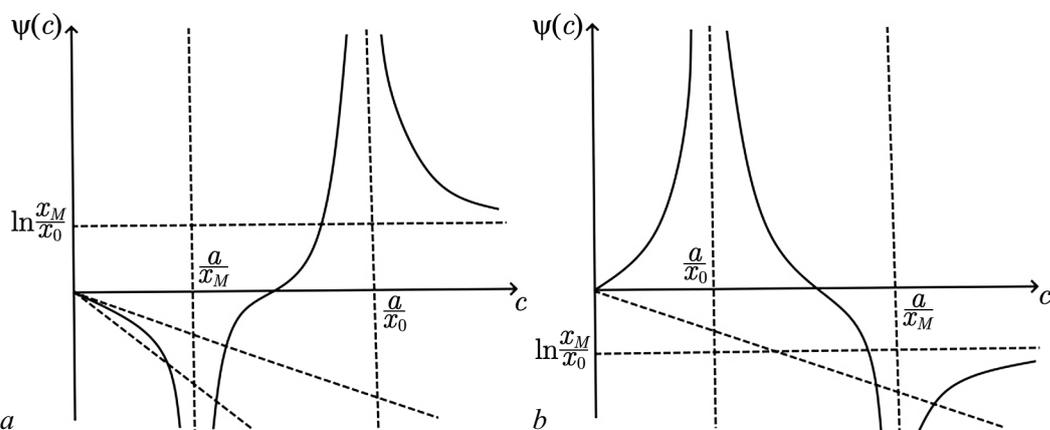


Рис. 7. Поведение  $\psi(c)$ : а – при  $x_0 < x_M$ ; б – при  $x_0 > x_M$

Fig. 7. Behaviour of  $\psi(c)$ : а – if  $x_0 < x_M$ ; б – if  $x_0 > x_M$

а) Существует единственное решение  $c < \frac{a}{x_M}$  при условии  $\psi'(+0) > n_0$ , равносильном неравенству  $x_0 - x_M > an_0$ . Последнее условие следует, в частности, из того, что  $\psi''(c) < 0$  в случае  $x_0 < x_M$ . Тогда  $x_0 < x_M < \frac{a}{c}$  и нетрудно видеть, что траектория  $n = s(x, x_0, n_0)$  существует.

б) Существует единственное решение  $\frac{a}{x_M} < c < \frac{a}{x_0}$ . При этом  $x_M > \frac{a}{c}$  и  $\frac{a}{x_M}x_0 < \frac{a}{c}$ . Тогда требуемая траектория не существует.

Пусть  $x_0 > x_M$  (рис. 7, б). Также имеется две возможности.

а) Существует единственное решение  $\frac{a}{x_0} < c < \frac{a}{x_M}$ . При этом  $x_0 > \frac{a}{c}$  и  $x_M < \frac{a}{c}$ , то есть траектория  $n = s(x, x_0, n_0)$  не существует.

б) Существует единственное решение  $c > \frac{a}{x_M}$ , откуда получаем  $x_0 > x_M > \frac{a}{c}$ , и траектория  $n = s(x, x_0, n_0)$  существует.  $\square$

Покажем, как устроена периодическая траектория. Предположим, что в режиме  $P_1$  (система (6)) фазовая точка попадает в точку  $M_1 = (x_M, 0, 0)$ , а затем – в точку  $M = (x_M, y_M, 0)$  вдоль отрезка, определяемого режимом  $P_+$  (система (7)). Происходит переключение на режим  $P_2$  (система (2)).

Пусть  $M$  — точка пересечения прямой  $x = x_M$  с овалом  $\sigma(M^*)$ , имеющая меньшую ординату  $y$ , то есть  $y < \frac{a}{b}$ , и при  $\lambda = \lambda_M$  луч  $p(\lambda_M)$  проходит через точку  $M$ . В силу условия  $x_M \in [x(M^*), x(M(\lambda_m))]$  теоремы и леммы 8, получаем, что  $F(M(\lambda_M), \lambda_M) \doteq M_2 \in K_1$ .

Далее, в режиме  $P_2$  (система (2)) фазовая точка попадает на поверхность  $y = \varepsilon^*(x)$  в точку  $M_3$ , из которой в режиме  $P_-$  (система (5)) переходит в точку  $M_4 = (x_0, 0, n_0)$ , где  $n_0 < 0$ .

Далее, если выполняются условия 1, то при соответствующем значении  $c$ , определенном в этой же теореме, получаем замкнутую траекторию гибридной системы (2)–(7), которой соответствует периодическая последовательность режимов  $\{(P_1 P_+ P_2 P_{21} P_-)\}$ .

**6.1. Численный эксперимент.** Целью проведения численного эксперимента является поиск периодической траектории гибридной системы (случай вторичной миграции).

Зададим следующие значения параметров  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ ,  $m = 2$ ,  $k = 0.7$ ,  $c = 0.5$ ,  $\lambda = 3.5$ ,  $\varepsilon = 1.5$ . Имеем  $\frac{m}{ak} = 2.86$ . Поскольку мы рассматриваем случай вторичной миграции, выберем в качестве начальной точки  $M_0 = (x_0, y_0, n_0) = (3.5, 1, 0) \in (OA)$ , для которой начальным режимом будет  $P_2$  до следующего попадания на плоскость  $\pi$ . В результате численного решения системы получим конечную точку  $M_1 = (3.71, 3.70, 0)$  режима  $P_2$  рис. 8, *a*.

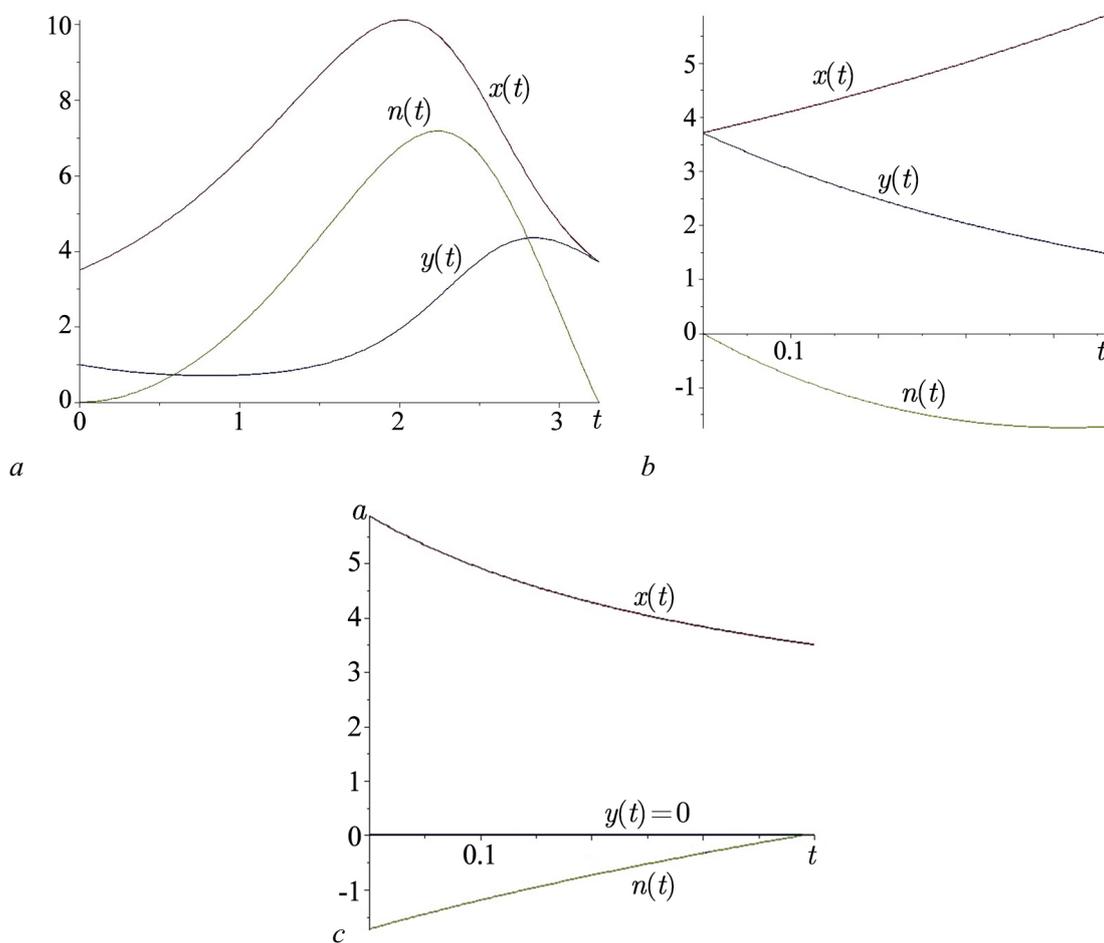


Рис. 8. Численный эксперимент: *a* — численное решение системы  $P_2$ ; *b* — численное решение системы  $P_{21}$ ; *c* — численное решение системы  $P_1$

Fig. 8. Numerical simulation: *a* — numerical solution of the system  $P_2$ ; *b* — numerical solution of the system  $P_{21}$ ; *c* — numerical solution of the system  $P_1$

Далее происходит переключение к системе  $P_{21}$ , действующей до момента достижения либо плоскости  $\pi$ , либо поверхности  $y = \varepsilon^*(x)$ . Отметим, что в данном эксперименте нас интересует второй случай. В результате численного решения системы получим конечную точку  $M_2 = (5.88, 1.48, -1.73)$  режима  $P_2$  рис. 8, b.

В точке  $M_2$  происходит переключение к системе  $P_-$ , которую нет смысла решать в силу ее тривиальности. В результате действия  $P_-$  получим точку  $M_3 = (5.88, 0, -1.73)$ , в которой система переключится на режим  $P_1$ , действующий до момента  $t^*$  достижения  $n(t^*) = 0$ . В результате численного решения системы для  $c = 0.52$  получим конечную точку  $M_4 = (3.50, 0, 0)$  режима  $P_1$  рис. 8, c. Далее произойдет переключение к системе  $P_+$ , в результате действия которой, очевидно, получим точку  $(3.50, 1, 0)$ , совпадающую с начальной  $M_0$ . Итак, получили замкнутую траекторию для начальной точки  $M_0$ . Результат численного моделирования подтверждает сформулированный ранее в [теореме](#) вывод о существовании периодической траектории в случае вторичной миграции.

## 7. Бифуркационное значение $\lambda = \frac{m}{ak}$

1) Пусть  $\lambda = \frac{m}{ak}$ .

Тогда на основании леммы 2 нетрудно получить следующий вывод.

Если при выходе из режима  $P_1$  в режим  $P_2$  фазовая точка попадает в точку  $M \in (0, A^*]$ , то далее в режиме  $P_2$  точка вернется в положение  $M$ . Затем последуют режимы  $P_-$  и  $P_+$ . В результате фазовая точка снова попадает в  $M$ , и движение повторяется. Таким образом, имеем замкнутую траекторию, соответствующую периодической последовательности режимов  $\{(P_-P_2P_+)\}$ . Поскольку  $\varepsilon$  достаточно мало, то приближенно можно считать, что имеем периодическую траекторию в режиме  $P_2$ , а именно, овал, образованный пересечением соответствующей интегральной плоскости и цилиндрической поверхности. При этом устанавливается режим  $(P_2)$ .

Если при выходе из режима  $P_1$  в режим  $P_2$  фазовая точка попадает в точку  $M \in \delta(\varepsilon, \lambda)$ , где луч  $\delta(\varepsilon, \lambda)$  определен в (15), то получаем периодическую последовательность режимов  $\{(P_-P_2P_{21}P_+)\}$ . Как и в предыдущем случае, можно приближенно считать, что имеем периодическую траекторию с той разницей, что теперь она состоит из двух отрезков траекторий систем (2), (4). Это значит, что имеем периодическую последовательность режимов  $\{(P_2P_{21})\}$ , где опущены символы  $P_-$ ,  $P_+$ , никак не влияющие на периодичность.

2) Пусть  $\lambda < \frac{m}{ak}$ . Введем точку  $B(\lambda) = (\lambda\varepsilon, \varepsilon)$ .

**Лемма 9.** Пусть  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  и  $M \in (0, B(\lambda))$ .

Тогда отображение Пуанкаре  $F(M, \lambda)$  не определено.

**Доказательство.** Доказательство следует из того, что  $\Delta(M, \lambda) > 0$  (см. (11)). □

Из данной леммы следует, что после попадания фазовой точки из режима  $P_-$  на промежуток  $(0, B(\lambda))$  устанавливается без дальнейшего изменения режим  $P_2$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что значение параметра  $\lambda = \lambda^* = \frac{m}{ak}$  является бифуркационным в смысле символьной динамики режимов  $P_\xi$ . При этом данный вывод относится только к тому случаю, когда фазовая точка после режима  $P_-$  попадает на интервал  $(0, B(\lambda))$ . Тем самым выделяется область фазового пространства, для которой можно говорить о бифуркационном значении  $\lambda$ .

**Замечание 3.** В представленном исследовании рассматривался только случай попадания фазовой точки из режима  $P_-$  на интервал  $(0, B(\varepsilon))$ , где  $B(\varepsilon) = (\lambda\varepsilon, \varepsilon)$ . Этот интервал принадлежит линии  $y = \varepsilon^*(x)$ , введенной в (3). При этом случай  $\lambda < \frac{m}{ak}$  не добавил исследованию сложности. Случай попадания на другую часть этой линии, а именно на луч  $\delta(\varepsilon, \lambda)$  (см. (15)), требует особого исследования. При этом случай  $\lambda < \frac{m}{ak}$  значительно усложняет исследование. Изучение этого варианта задачи проводится.

## Заключение

Для моделирования динамики биосообщества с переменной структурой взаимодействия видов предложена модель, являющаяся гибридной трехмерной динамической системой. При этом происходят переключения между пятью подсистемами, каждой из которых соответствует режим функционирования биосообщества участка: взаимодействие видов, миграция хищника и динамика жертвы в отсутствие хищника. Исследована символическая динамика, соответствующая изменению режимов участка. Получены результаты, дающие условия существования периодических траекторий в гибридной системе и периодических последовательностей режимов. Определено бифуркационное значение параметра, характеризующего потребности хищника в пищевых ресурсах. Приведены численные примеры. Исследование требует продолжения для рассмотрения не представленных в нем случаев поведения траекторий в зависимости от областей поверхностей переключения, на которые они попадают.

## Список литературы

1. *Metapopulation Biology: Ecology, Genetics, and Evolution* / ed. by I. A. Hanski, M. E. Gilpin. New York: Academic Press, 1997. 512 p. DOI: 10.1016/B978-0-12-323445-2.X5000-7.
2. *Dang Q. A., Hoang M. T.* Complete global stability of a metapopulation model and its dynamically consistent discrete models // *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2019. Vol. 18. P. 461–475. DOI: 10.1007/s12346-018-0295-y.
3. *Crawford B., Kribs-Zaleta C.* A metapopulation model for sylvatic *T. cruzi* transmission with vector migration // *Mathematical Biosciences and Engineering.* 2014. Vol. 11, iss. 3. P. 471–509. DOI: 10.3934/mbe.2014.11.471.
4. *Arino J., Ducrot A., Zongo P.* A metapopulation model for malaria with transmission-blocking partial immunity in hosts // *J. Mathematical Biology.* 2012. Vol. 64. P. 423–448. DOI: 10.1007/s00285-011-0418-4.
5. *Feng Z., Swihart R., Yi Y., Zhu H.* Coexistence in a metapopulation model with explicit local dynamics // *Mathematical Biosciences and Engineering.* 2004. Vol. 1, iss. 1. P. 131–145. DOI: 10.3934/mbe.2004.1.131.
6. *Xu D., Feng Z., Allen L. J. S., Swihart R. K.* A spatially structured metapopulation model with patch dynamics // *Journal of Theoretical Biology.* 2006. Vol. 239, iss. 4. P. 469–481. DOI: 10.1016/j.jtbi.2005.08.012.
7. *Diekmann O., Gyllenberg M., Metz J. A. J., Nakaoka S., de Roos A. M.* *Daphnia* revisited: local stability and bifurcation theory for physiologically structured population models explained by way of an example // *J. Mathematical Biology.* 2010. Vol. 61. P. 277–318. DOI: 10.1007/s00285-009-0299-y.
8. *Matveev A. S., Savkin A. V.* *Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems.* Boston: Birkhauser, 2000. 348 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1364-2.
9. *Liberzon D.* *Switching in Systems and Control.* Boston: Birkhauser, 2003. 233 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0017-8.
10. *Кириллов А. Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью // *Известия вузов. Приборостроение.* 2009. Т. 52, № 3. С. 23–28.
11. *Bolzoni L., Della Marca R., Groppi M., Gragnani A.* Dynamics of a metapopulation epidemic model with localized culling // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B.* 2020. Vol. 25, iss. 6. P. 2307–2330. DOI: 10.3934/dcdsb.2020036.
12. *Кириллов А. Н.* Экологические системы с переменной размерностью // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* 1999. Т. 26, № 2. С. 318–336.

13. *Gökçe A.* The influence of past in a population system involving intraspecific competition and Allee effect // *The European Physical Journal Plus.* 2022. Vol. 137, no. 200. P. 1–11. DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02425-z.
14. *Chen X., Huang L.* A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2015. Vol. 428, iss. 2. P. 817–837. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045.
15. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
16. *Кириллов А. Н., Иванова А. С.* Периодический и квазипериодический процессы управления в задаче сохранения видового состава биосообщества // *Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии.* 2015. № 10. С. 99–106. DOI: 10.17076/mat148.

## References

1. Hanski IA, Gilpin ME (eds.) *Metapopulation Biology: Ecology, Genetics, and Evolution.* New York: Academic Press, 1997. 512 p. DOI: 10.1016/B978-0-12-323445-2.X5000-7.
2. Dang QA, Hoang MT. Complete global stability of a metapopulation model and its dynamically consistent discrete models. *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2019;18:461–475. DOI: 10.1007/s12346-018-0295-y.
3. Crawford B, Kribs-Zaleta C. A metapopulation model for sylvatic *T. cruzi* transmission with vector migration. *Mathematical Biosciences and Engineering.* 2014;11(3):471–509. DOI: 10.3934/mbe.2014.11.471.
4. Arino J, Ducrot A, Zongo P. A metapopulation model for malaria with transmission-blocking partial immunity in hosts *J. Mathematical Biology.* 2012;64:423–448. DOI: 10.1007/s00285-011-0418-4.
5. Feng Z, Swihart R, Yi Y, Zhu H. Coexistence in a metapopulation model with explicit local dynamics. *Mathematical Biosciences and Engineering.* 2004;1(1):131–145. DOI: 10.3934/mbe.2004.1.131.
6. Xu D, Feng Z, Allen LJS, Swihart RK. A spatially structured metapopulation model with patch dynamics. *Journal of Theoretical Biology.* 2006;239(4):469–481. DOI: 10.1016/j.jtbi.2005.08.012.
7. Diekmann O, Gyllenberg M, Metz JAJ, Nakaoka S, de Roos AM. *Daphnia revisited: local stability and bifurcation theory for physiologically structured population models explained by way of an example* *J. Mathematical Biology.* 2010;61:277–318. DOI: 10.1007/s00285-009-0299-y.
8. Matveev AS., Savkin AV. *Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems.* Boston: Birkhauser, 2000. 348 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1364-2.
9. Liberzon D. *Switching in systems and control.* Boston: Birkhauser, 2003. 233 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0017-8.
10. Kirillov AN. Dynamical systems with variable structure and dimension. *Journal of Instrument Engineering.* 2009;52(3):23–28. (in Russian).
11. Bolzoni L, Della Marca R, Groppi M, Gagnani A. Dynamics of a metapopulation epidemic model with localized culling. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B.* 2020;25(6):2307–2330. DOI: 10.3934/dcdsb.2020036.
12. Kirillov AN. Ecological systems with variable dimension. *Surveys on Applied and Industrial Mathematics.* 1999;26(2):318–336. (in Russian).
13. *Gökçe A.* The influence of past in a population system involving intraspecific competition and Allee effect. *The European Physical Journal Plus.* 2022;137(200):1–11. DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-02425-z.

14. Chen X, Huang L. A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2015;428(2):817–837. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045.
15. Filippov AF. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. M.: Nauka; 1985. 225 p. (in Russian).
16. Kirillov AN, Ivanova AS Periodic and quasiperiodic control processes in the biocommunity species composition preserving problem. *Transactions of Karelian Research Centre of RAS. Mathematical Modeling and Information Technologies*. 2015;10:99–106 (in Russian). DOI: 10.17076/mat148.



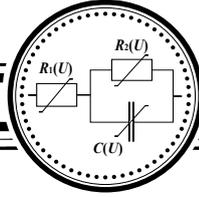
*Кириллов Александр Николаевич* — родился в Ленинграде (1954). Окончил факультет ПМ-ПУ Ленинградского государственного университета. Доктор физико-математических наук (2010, ПетрГУ). С 2010 года работает в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра в должности ведущего научного сотрудника. Научные интересы — динамические системы, математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Опубликовал свыше 120 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11  
 ФИЦ Карельский научный центр РАН  
 E-mail: krllv1812@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0002-3356-1846  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 617068



*Сазонов Александр Михайлович* — родился в Петрозаводске (1993). Окончил Институт математики и информационных технологий Петрозаводского государственного университета по направлению «Математика» (2017). Кандидат физико-математических наук (2021, ПетрГУ). С 2021 года работает в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы — динамические системы, математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Опубликовал более 12 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 185910 Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11  
 ФИЦ Карельский научный центр РАН  
 E-mail: sazon-tb@mail.ru  
 ORCID: 0009-0006-4385-5422  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1123344



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья  
УДК 532.516, 532.517, 517.928

DOI: 10.18500/0869-6632-003155  
EDN: LMQFLO

## Эффекты вращательного движения жидкости между криволинейными стенками

*В. Л. Сенницкий*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия  
E-mail: [sennitskii@yandex.ru](mailto:sennitskii@yandex.ru)

Поступила в редакцию 26.06.2024, принята к публикации 30.08.2024,  
опубликована онлайн 10.12.2024, опубликована 31.03.2025

**Аннотация.** Целью работы является выявление и изучение особенностей среднего по времени вращательного движения вязкой жидкости, граничащей с твердыми телами (криволинейными стенками), при периодических по времени воздействиях на жидкость, характеризующихся наличием или отсутствием выделенного направления в пространстве. **Методы.** Используются аналитические методы исследования краевых задач для уравнений Навье–Стокса и неразрывности: метод возмущений (метод разложения по степеням малого параметра), метод Фурье, усреднение. **Результаты.** Поставлена и решена новая задача о движении вязкой жидкости. Обнаружены новые гидромеханические эффекты. **Заключение.** Проведенное исследование является продолжением предшествующих исследований нетривиальной динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях. Работа направлена, в частности, на определение диапазона возможностей порождения периодическими воздействиями качественных изменений в динамике гидромеханических систем. Полученные результаты могут использоваться в научном поиске перспективных подходов к решению актуальных прикладных и фундаментальных проблем.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, периодические по времени воздействия, выделенное направление в пространстве, эффекты вращательного движения.

**Для цитирования:** Сенницкий В. Л. Эффекты вращательного движения жидкости между криволинейными стенками // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 219–232. DOI: 10.18500/0869-6632-003155. EDN: LMQFLO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Effects of a rotational motion of a liquid between curvilinear walls

V. L. Sennitskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: ✉sennitskii@yandex.ru

Received 26.06.2024, accepted 30.08.2024, available online 10.12.2024, published 31.03.2025

**Abstract.** The *purpose* of the work is the revealing and the researching of peculiarities of an average in time rotational motion of a viscous liquid which is bordering with solid bodies (curvilinear walls) under periodic in time influences which are characterized by the presence or the absence of a predominant direction in space. *Methods.* The analytic investigational methods for boundary problems for Navier–Stokes and continuity equations are used that are the method of perturbations (the method of a decomposition by degrees of a small parameter), the method of Fourier, an averaging. *Results.* A new problem on the motion of a viscous liquid is formulated and solved. New hydro-mechanical effects are revealed. *Conclusion.* The fulfilled investigation is a continuation of previous investigations of non-trivial dynamics of hydro-mechanical systems under periodic influences. In particular the work is directed to the determination of the range of possibilities to create quality changes of a hydro-mechanical systems dynamics by periodic influences. The obtained results can be used in a scientific researching of perspective approaches to the solving actual applied and fundamental problems.

**Keywords:** viscous liquid, periodic in time influences, predominant direction in space, effects of rotational motion.

**For citation:** Sennitskii VL. Effects of a rotational motion of a liquid between curvilinear walls. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2):219–232. DOI: 10.18500/0869-6632-003155

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Данная работа выполнена в развитие перспективного научного направления — изучения динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях. К настоящему времени в этом направлении получен ряд содержательных, нетривиальных результатов (см., например, [1–50]). В частности, установлено наличие «разрешенных» и «запрещенных» состояний подвергающейся периодическим воздействиям гидромеханической системы, для которых решение задачи о движении системы соответственно существует и не существует [33]; обнаружены эффекты парадоксального поведения твердого включения в вибрирующей жидкости [2, 4, 5, 18], «самопроизвольного» перехода твердого тела в колеблющейся вязкой жидкости в положение с заданной ориентацией в пространстве [38], преимущественно однонаправленного вращения твердого тела и вязкой жидкости [42]; построена и изучена математическая модель гидромеханического аналога «маятника Капицы» (см. [30, 51]); введены основополагающие понятия однородных и неоднородных колебаний жидкости, определены количественные характеристики неоднородности колебаний жидкости [10, 28]; обнаружены эффекты разделения включений в колеблющейся жидкости по плотностям [3, 22], преимущественно однонаправленного движения вязкой жидкости со свободной границей [50], парадоксального движения вязкой жидкости в поле силы тяжести при периодических воздействиях [47, 49]; доказано существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в вибрирующей жидкости [6, 8, 9, 20]; обнаружен эффект «левитации» жидкости [49].

В данной работе рассмотрена задача о течении вязкой жидкости, заполняющей промежуток между двумя бесконечно длинными твердыми телами (криволинейными стенками). Тела, в частности, совершают заданное периодическое вращательное движение. Жидкость испытывает со стороны тел воздействия, характеризующиеся наличием или отсутствием выделенного

направления в пространстве. Обнаружены новые гидромеханические эффекты, установлено в том числе, что часть жидкости (на фоне колебаний) может совершать вращательное движение в направлении, противоположном направлению среднего вращения твердых тел.

## 1. Постановка задачи

Имеется гидромеханическая система, состоящая из бесконечно длинных твердых тел (криволинейных стенок)  $\eta$ ,  $\xi$  и вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1). Тело  $\eta$  ограничено извне цилиндрической поверхностью  $\Gamma_\eta$  радиуса  $R_\eta$ . Тело  $\xi$  ограничено изнутри цилиндрической поверхностью  $\Gamma_\xi$  радиуса  $R_\xi > R_\eta$ . Оси границ  $\Gamma_\eta, \Gamma_\xi$  тел  $\eta, \xi$  находятся на оси  $Z$  инерциальной прямоугольной системы координат  $X, Y, Z$ . Жидкость заполняет область  $Q$ :  $R_\eta < R < R_\xi, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < Z < \infty$  ( $R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \theta, Z$  – цилиндрическая система координат). Тело  $\eta$  и тело  $\xi$  совершают вращательное движение вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Граница  $\Gamma_\eta$  тела  $\eta$  проницаема для жидкости. Радиус  $R_\xi$  и угловая скорость  $\Omega$  периодически с периодом  $T$  изменяются со временем  $t$  ( $R_\xi = \hat{R}[1 + \varepsilon \sin(2\pi t/T)]$ ,  $\Omega = \hat{\Omega}[\sin(2\pi t/T + \varphi) + \varepsilon(\hat{r} - 1)w]$ ;  $\hat{r} = \hat{R}/R_\eta$ ;  $\hat{R} > 0$ ,  $\hat{\Omega} > 0$ ,  $\varphi, w$  – постоянные;  $0 < \varepsilon < 1$  – параметр;  $(1 - \varepsilon)\hat{R} > R_\eta, 4\varepsilon\hat{R}^2 < R_\eta^2$ ).

Требуется определить периодическое по времени (не зависящее от начальных условий) симметричное относительно оси  $Z$  плоское движение жидкости.

Пусть  $\tau = t/T$ ;  $r = R/R_\eta$ ;  $r_\xi = R_\xi/R_\eta$ ;  $\omega = \Omega T$ ;  $\mathbf{V}$ ,  $\rho$  и  $\nu$  – соответственно скорость, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости;  $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/R_\eta = v_r(r, \tau)\mathbf{e}_r + v_\theta(r, \tau)\mathbf{e}_\theta$  ( $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$  – единичные базисные векторы, направления которых совпадают с направлениями возрастания соответственно  $r$  и  $\theta$ );  $P$  – давление в жидкости;  $p = T^2 P/(\rho R_\eta^2) = p(r, \tau)$ ;  $Re = R_\eta^2/(\nu T)$  – число Рейнольдса.

Задачу о движении жидкости составляют уравнение Навье–Стокса, уравнение неразрывности и условия на границах  $\Gamma_\eta, \Gamma_\xi$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad \text{в } Q, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } Q, \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = r_\xi \frac{dr_\xi}{d\tau} \mathbf{e}_r + \omega \mathbf{e}_\theta \quad \text{на } \Gamma_\eta \quad (\text{при } r = 1), \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dr_\xi}{d\tau} \mathbf{e}_r + r_\xi \omega \mathbf{e}_\theta \quad \text{на } \Gamma_\xi \quad (\text{при } r = r_\xi). \quad (4)$$

Отметим, что в задаче (1)–(4) испытываемые жидкостью периодические по времени воздействия при  $w \neq 0$  характеризуются наличием, а при  $w = 0$  – отсутствием выделенного направления в пространстве (выделенным направлением является направление вектора  $w[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta]$ , совпадающее с направлением средней угловой скорости вращения тел  $\eta, \xi$ ).

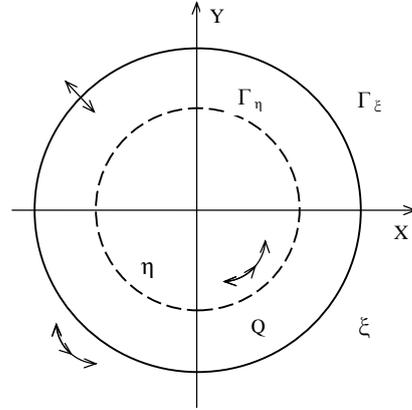


Рис. 1. Гидромеханическая система

Fig. 1. The hydromechanical system

## 2. Решение задачи

Согласно (2)–(4) имеем

$$v_r = \frac{h}{r}, \quad (5)$$

где

$$h = r_\xi \frac{dr_\xi}{d\tau}.$$

Из (1), (3)–(5) следует

$$p = -\frac{dh}{d\tau} \ln r - \frac{h^2}{2r^2} + \int_1^r \frac{v_\theta^2}{r'} dr' + c \quad (6)$$

( $c$  – функция  $\tau$ );

$$Re r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \tau} - r^2 \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + (Re h - 1) r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + (Re h + 1) v_\theta = 0 \quad \text{в } Q, \quad (7)$$

$$v_\theta = \omega \quad \text{при } r = 1, \quad (8)$$

$$v_\theta = r_\xi \omega \quad \text{при } r = r_\xi. \quad (9)$$

Будем рассматривать задачу (7)–(9) при малых по сравнению с единицей значениях  $\varepsilon$ . Применим метод разложения по степеням малого параметра [52, 53]. Предположим, что

$$v_\theta \sim v_0 + \varepsilon v_1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

Используя (7)–(10), в  $\varepsilon^N$ -приближении ( $N = 0, 1$ ) получим

$$Re r^2 \frac{\partial v_N}{\partial \tau} - r^2 \frac{\partial^2 v_N}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_N}{\partial r} + v_N = -N Re \hat{r} \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \left( r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \quad \text{в } \bar{Q}, \quad (11)$$

$$v_N = (1 - N)\tilde{\omega} + N\hat{\omega}(\hat{r} - 1)w \quad \text{при } r = 1, \quad (12)$$

$$v_N = (1 - N)\hat{r}\tilde{\omega} + N[\hat{r}\hat{\omega}(\hat{r} - 1)w + \tilde{r}(\tilde{\omega} - \frac{\partial v_0}{\partial r})] \quad \text{при } r = \hat{r}. \quad (13)$$

Здесь  $\bar{Q}$  – область  $R_\eta < R < \hat{R}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $-\infty < Z < \infty$ );  $\tilde{r} = \hat{r} \sin 2\pi\tau$ ;  $\hat{\omega} = \hat{\Omega}T$ ;  $\tilde{\omega} = \hat{\omega} \sin(2\pi\tau + \varphi)$ .

Пусть  $N = 0$ . Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_0 = \hat{\omega} \operatorname{Imag} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{G} [A_K I_1(qr) - A_I K_1(qr)] e^{2\pi i \tau} \right\}, \quad (14)$$

где  $q = (1 + i)\sqrt{\pi Re}$ ;  $I_1, K_1$  – модифицированные функции Бесселя;

$$A_I = I_1(q\hat{r}) - I_1(q)\hat{r}; \quad A_K = K_1(q\hat{r}) - K_1(q)\hat{r};$$

$$G = I_1(q)K_1(q\hat{r}) - K_1(q)I_1(q\hat{r}).$$

Пусть  $N = 1$ . Произведем усреднение (11)–(13) по безразмерному времени  $\tau$ . В результате этого получим

$$r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + r \frac{d\bar{v}}{dr} - \bar{v} = Re \hat{r} \left\langle \frac{d\tilde{r}}{d\tau} \left( r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \right\rangle \quad \text{в } \bar{Q}, \quad (15)$$

$$\bar{v} = \hat{\omega}(\hat{r} - 1)w \quad \text{при } r = 1, \quad (16)$$

$$\bar{v} = \hat{r}\hat{\omega}(\hat{r} - 1)w + \left\langle \tilde{r} \left( \tilde{\omega} - \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \right\rangle \quad \text{при } r = \hat{r}. \quad (17)$$

Здесь  $\langle \dots \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} \dots d\tau'$ ;  $\bar{v} = \langle v_1 \rangle$ . Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_1 = \bar{v} + \text{Real}(v' e^{4\pi i \tau}) \quad (18)$$

( $v'$  – функция  $r$ ).

Из (14), (15), (17) следует

$$r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + r \frac{d\bar{v}}{dr} - \bar{v} = \pi Re \hat{r}^2 \hat{\omega} r \text{Imag} \left\{ \frac{qe^{i\varphi}}{G} [A_K I_0(qr) + A_I K_0(qr)] \right\} \quad \text{в } \bar{Q}, \quad (19)$$

$$\bar{v} = \hat{r} \hat{\omega} \left[ (\hat{r} - 1)w + \cos \varphi + \text{Real} \left( e^{i\varphi} \frac{q\hat{r}^2 H - 1}{2\hat{r}G} \right) \right] \quad \text{при } r = \hat{r}, \quad (20)$$

где  $I_0, K_0$  – модифицированные функции Бесселя;

$$H = I_1(q)K_0(q\hat{r}) + K_1(q)I_0(q\hat{r}).$$

Используя (16), (19), (20), найдем

$$\bar{v} = \alpha r + \frac{\beta}{r} + \frac{\pi}{2} Re \hat{r}^2 \hat{\omega} \text{Imag} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{G} [A_K (qr S_I - I_1(qr)) + A_I (qr S_K + K_1(qr))] \right\}. \quad (21)$$

Здесь

$$S_I = \int_1^r \frac{I_0(qr')}{r'} dr'; \quad S_K = \int_1^r \frac{K_0(qr')}{r'} dr';$$

$$\alpha = -\beta + \frac{\pi}{2} Re \hat{r}^2 \hat{\omega} \sin \varphi + \hat{\omega} (\hat{r} - 1)w;$$

$$\beta = \frac{\hat{r} \hat{\omega}}{1 - \hat{r}^2} \left\{ \hat{r} \cos \varphi + \frac{1}{2} \left[ \text{Real} \left( e^{i\varphi} \frac{q\hat{r}^2 H - 1}{G} \right) - \pi Re \hat{r}^3 \text{Imag} \left( qe^{i\varphi} \frac{A_K \hat{S}_I + A_I \hat{S}_K}{G} \right) \right] \right\}$$

$$(\hat{S}_I = S_I|_{r=\hat{r}}; \hat{S}_K = S_K|_{r=\hat{r}}).$$

Формулами

$$v_\theta = v_0 + \varepsilon v_1 \quad (22)$$

и (5), (6), (14), (18), (21) определяется приближенное решение задачи (1)–(4). Согласно данному решению имеет место эффект, состоящий в том, что (и при  $w \neq 0$ , и при  $w = 0$ ) жидкость на фоне колебаний совершает стационарное вращательное движение.

Обратимся к вопросу о среднем по времени движении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях  $\hat{r} - 1$  (значения  $\hat{r} - 1$  велики по сравнению с значениями  $\varepsilon$ ). Используя (5), (14), (18), (21), (22), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \varepsilon \hat{\omega} [w + k Re(\sin \varphi) \chi] (\hat{r} - 1) \mathbf{e}_\theta \quad \text{при } \hat{r} - 1 \rightarrow 0. \quad (23)$$

Здесь  $k = (5/2)\pi$ ;  $\chi = (r - 1)/(\hat{r} - 1)$ .

Отметим, что в рассматриваемом приближении безразмерная скорость  $\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{e}_\theta$  совпадает со средней по времени безразмерной угловой скоростью  $\langle v_\theta/r \rangle$  вращения жидкости вокруг оси  $Z$ .

Согласно (23) на фоне колебаний имеет место следующее.

1. Если  $w \neq 0$ , то при  $\chi \sin \varphi = 0$  (то есть при  $r = 1$ ,  $-1 \leq \sin \varphi \leq 1$  и при  $\sin \varphi = 0$ ,  $1 < r \leq \hat{r}$ ) средняя (по времени) угловая скорость вращения жидкости равна (отличной от нуля) средней угловой скорости вращения тел (стенок)  $\eta, \xi$ .

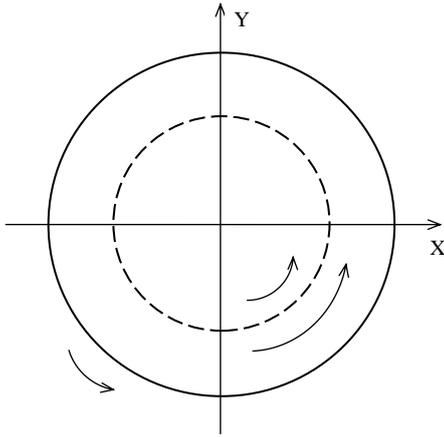


Рис. 2. Жидкость обгоняет стенки

Fig. 2. The liquid moves faster than walls

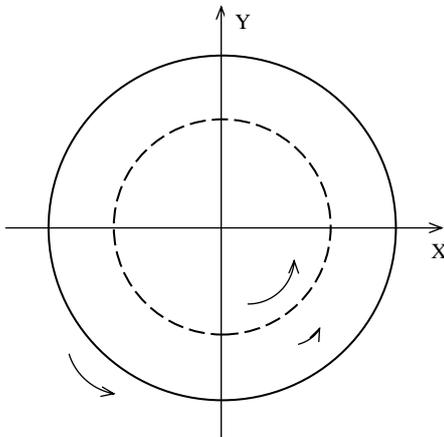


Рис. 3. Жидкость отстает от стенок

Fig. 3. The liquid moves slower than walls

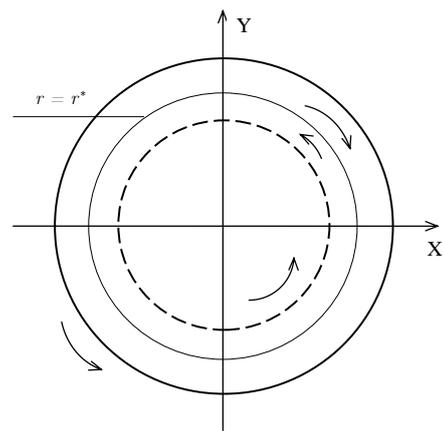


Рис. 4. Жидкость совершает парадоксальное вращательное движение

Fig. 4. The liquid performs the paradoxical rotational motion

2. Если  $w \sin \varphi > 0$ , то при  $1 \leq r \leq \hat{r}$  жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тел  $\eta, \xi$ , при том что для  $1 < r \leq \hat{r}$  жидкость обгоняет стенки (для  $w > 0$  см. рис. 2).

3. Если  $w \sin \varphi < 0$  и  $|w| > kRe|\sin \varphi|$ , то при  $1 \leq r \leq \hat{r}$  жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тел  $\eta, \xi$ , при том что для  $1 < r \leq \hat{r}$  жидкость отстает от стенок (для  $w > 0$  см. рис. 3).

4. Если  $w \sin \varphi < 0$  и  $|w| < kRe|\sin \varphi|$ , то при  $r = r^* = 1 - w(\hat{r} - 1)/(kRe \sin \varphi)$  угловая скорость вращения жидкости равна нулю; при  $1 \leq r < r^*$  жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тел  $\eta, \xi$ , при том что для  $1 < r < r^*$  жидкость отстает от тел  $\eta, \xi$ ; при  $r^* < r \leq \hat{r}$  жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения тел  $\eta, \xi$  (жидкость совершает парадоксальное вращательное движение; для  $w > 0$  см. рис. 4). В частности, «толщина»  $r^* - 1$  области, в которой жидкость совершает вращательное движение в «правильном» направлении, может быть мала по сравнению с «толщиной»  $\hat{r} - r^*$  области, в которой жидкость совершает вращательное движение в «неправильном» направлении; необходимым и достаточным условием наличия такой картины течения жидкости между твердыми телами является условие малости по сравнению с единицей отношения  $|w|/(kRe|\sin \varphi|)$ .

5. Если  $w \sin \varphi < 0$  и  $|w| = kRe|\sin \varphi|$ , то  $r^* = \hat{r}$ , и угловая скорость вращения жидкости равна нулю при  $r = \hat{r}$ .

6. Если  $w = 0$ ,  $\sin \varphi \neq 0$ , то при  $1 < r \leq \hat{r}$  направление вращения жидкости определяется знаком  $\sin \varphi$  (при  $\sin \varphi > 0$  жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением вектора  $e_\theta$ , при  $\sin \varphi < 0$  жидкость вращается в направлении, противоположном направлению вектора  $e_\theta$ ); при  $r = 1$  угловая скорость вращения жидкости равна нулю.

Отметим, что согласно (23) все типы вращательного движения жидкости, описанные в пунктах 1–6, при выполнении сформулированных выше условий имеют место для любого значения  $Re > 0$  (а также для любого значения  $k > 0$ ).

Остановимся на вопросе о переносе массы жидкости, обусловленном ее средним по времени движением. Пусть  $\Psi$  – замкнутая область  $R_\eta \leq R \leq \hat{R}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $Z^* \leq Z \leq Z^* + L$  ( $Z^*$ ,  $L > 0$  – постоянные);  $D$  – сечение области  $\Psi$  полуплоскостью  $0 \leq R < \infty$ ,  $\theta = 0$ ,  $-\infty < Z < \infty$  (прямоугольник  $R_\eta \leq R \leq \hat{R}$ ,  $\theta = 0$ ,  $Z^* \leq Z \leq Z^* + L$ ). Найдем массу жидкости

$$\delta M = \rho R_\eta^2 L \frac{\delta t}{T} \int_1^{\hat{r}} \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{e}_\theta dr, \quad (24)$$

которая за промежуток времени  $\delta t$  протекает через сечение  $D$  в направлении, совпадающем с направлением вектора  $\mathbf{e}_\theta$ , в условиях, сформулированных в пунктах 1–4. Без умаления общности может быть принято, что  $w > 0$ . Согласно (23), (24)

– если  $\sin \varphi = 0$  (средняя по времени угловая скорость вращения жидкости равна средней угловой скорости вращения стенок), то имеет место соотношение

$$\delta M = \varepsilon \rho R_\eta^2 L \frac{\delta t}{T} \hat{\omega} w (\hat{r} - 1)^2;$$

– если  $\sin \varphi > 0$  (жидкость обгоняет стенки), то имеет место соотношение

$$\delta M = \varepsilon \rho R_\eta^2 L \frac{\delta t}{T} \hat{\omega} w \left(1 + \frac{kRe \sin \varphi}{2w}\right) (\hat{r} - 1)^2;$$

– если  $\sin \varphi < 0$ ,  $w > kRe |\sin \varphi|$  (жидкость отстает от стенок), то имеет место соотношение

$$\delta M = \varepsilon \rho R_\eta^2 L \frac{\delta t}{T} \hat{\omega} w \left(1 - \frac{kRe |\sin \varphi|}{2w}\right) (\hat{r} - 1)^2, \quad (25)$$

– если

$$\sin \varphi < 0, \quad w < kRe |\sin \varphi| \quad (26)$$

(жидкость совершает парадоксальное вращательное движение), то имеет место соотношение (25). Из (25), (26) следует, что

$$\delta M > 0 \quad \text{для} \quad \frac{1}{2} kRe |\sin \varphi| < w < kRe |\sin \varphi|, \quad (27)$$

$$\delta M = 0 \quad \text{для} \quad w = \frac{1}{2} kRe |\sin \varphi|, \quad (28)$$

$$\delta M < 0 \quad \text{для} \quad w < \frac{1}{2} kRe |\sin \varphi|. \quad (29)$$

Формулы (27)–(29) свидетельствуют о том, что при парадоксальном вращательном движении жидкости, в частности, возможно осуществление качественно различных процессов переноса массы жидкости.

### Заключение

В настоящей работе представлены новые результаты в изучении динамики вязкой жидкости при периодических по времени воздействиях на жидкость. Дана постановка и получено решение задачи (1)–(4) о движении вязкой жидкости, граничащей с твердыми телами, оказывающими на жидкость воздействия, характеризующиеся наличием (при  $w \neq 0$ ) или отсутствием (при  $w = 0$ ) выделенного направления в пространстве. Выявлены новые особенности (эффекты) среднего движения жидкости. Обнаружен эффект, состоящий в том, что в рассмотренных гидромеханических условиях жидкость (и при наличии, и в отсутствие выделенного направления в пространстве)

на фоне колебаний совершает стационарное вращательное движение (см. (21)). Установлено, что жидкость (на фоне колебаний) может совершать вращательное движение с угловой скоростью, совпадающей по направлению со средней угловой скоростью вращения твердых тел, но при этом угловая скорость жидкости может как совпадать, так и не совпадать со средней угловой скоростью вращения твердых тел по абсолютной величине — жидкость может совершать вращательное движение вместе со стенками «как одно целое», может обгонять стенки или отставать от них (см. (23)). Обнаружен эффект, состоящий в том, что часть жидкости (на фоне колебаний) совершает вращательное движение в направлении, противоположном направлению среднего вращения твердых тел (см. (23)). Для представленных гидромеханических условий подтверждено, что периодические по времени воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве, могут порождать качественные изменения в движении жидкости, по достигаемому влиянию на динамику гидромеханических систем способны эффективно конкурировать со стационарными воздействиями на системы (см. [2, 47, 49]). Гидромеханическая система, испытывающая те из оказываемых на нее периодических по времени воздействий, которые не имеют выделенного направления в пространстве, производит отклики (реакции на воздействия), которые характеризуются наличием выделенного направления в пространстве и выражаются в том, что свободные части системы (части системы, движение которых не задано) — например, жидкие слои — на фоне колебаний стремятся совершать «свое» среднее движение, усиливая или ослабляя результативность оказываемых на систему воздействий, имеющих выделенное направление в пространстве, или же совершают «свое» среднее движение — даже вопреки оказываемым на систему воздействиям, имеющим выделенное направление в пространстве. Причиной обнаруженных особенностей среднего движения жидкости является согласованность (друг с другом) испытываемых жидкостью воздействий, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения (см. [50], а также [13, 41, 46, 54]).

Полученные результаты могут использоваться в дальнейшем изучении нетривиальной динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях, в частности, при подготовке и проведении направленных экспериментальных исследований, а также при разработке перспективных методов управления гидромеханическими системами, при создании гидромеханических систем, обладающих предписанными свойствами, например, систем, заданным образом реагирующих на периодические по времени воздействия.

### Список литературы

1. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Доклады АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. Сенницкий В. Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1985. Т. 25, № 5. С. 19–23.
3. Сенницкий В. Л. Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикладная механика и техническая физика. 1986. Т. 27, № 4. С. 31–36.
4. Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Доклады АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
5. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А. О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // В кн.: Конвективные течения: Сб. науч. тр. Пермь: Издательство Пермского педагогического института, 1987. С. 61–71.
6. Сенницкий В. Л. О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1988. Т. 29, № 6. С. 107–113.
7. Челомей В. Н. Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
8. Сенницкий В. Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Доклады АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.

9. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1993. Т. 34, № 1. С. 100–101.
10. *Sennitskii V. L.* On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Proceedings of the International workshop on G-jitter. Potsdam (USA): Clarkson University, 1993. P. 178–186.
11. *Lyubimov D. V.* New approach in the vibrational convection theory // Proc. 14 IMACs Congress on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, Georgia, USA: Georgia Institute of Technology, 1994. P. 59–68.
12. *Lyubimov D. V.* Thermovibrational flows in nonuniform systems // Microgravity Quarterly. 1994. Vol. 4, no. 1. P. 221–225.
13. *Сенницкий В. Л.* Движение включений в колеблющейся жидкости // Сибирский физический журнал. 1995. № 4. С. 18–26.
14. *Kozlov V. G.* Solid body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration // Europhysics Letters. 1996. Vol. 36, no. 9. P. 651–656. DOI: 10.1209/epl/i1996-00282-0.
15. *Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Meradji S., Roux B.* Vibrational control of crystal growth from liquid phase // J. Crystal Growth. 1997. Vol. 180. P. 648–659. DOI: 10.1016/S0022-0248(97)00294-7.
16. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Эвекс П.* Динамика цилиндрического тела в заполненном жидкостью секторе цилиндрического слоя при вращательных вибрациях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 4. С. 29–39.
17. *Любимов Д. В., Перминов А. В., Черепанов А. А.* Генерация осреднённых течений в вибрационном поле вблизи поверхности раздела сред // В кн.: Вибрационные эффекты в гидродинамике. Пермь: изд. Перм. гос. университета, 1998. С. 204–221.
18. *Сенницкий В. Л.* Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
19. *Lavrenteva O. M.* On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Europ. J. Appl. Math. 1999. Vol. 10, no. 3. P. 251–263. DOI: 10.1017/S0956792599003745.
20. *Сенницкий В. Л.* Движение пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
21. *Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
22. *Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.* Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45, № 4. С. 102–106.
23. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф.* Вибрационная подъемная сила, действующая на тело в жидкости вблизи твердой поверхности // Доклады Академии Наук. 2005. Т. 402, № 4. С. 488–491.
24. *Lyubimov D., Lyubimova T., Vorobev A., Mojtabi A., Zappoli B.* Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part I: Non-uniform heating // Journal of Fluid Mechanics. 2006. Vol. 564. P. 159–183. DOI: 10.1017/S0022112006001418.
25. *Hassan S., Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Kawaji M.* Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container // J. Appl. Mech. 2006. Vol. 73, no. 1. P. 72–78. DOI: 10.1115/1.1992516.
26. *Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Shklyaev S. V.* Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18. P. 012101. DOI: 10.1063/1.2137358.
27. *Shevtsova V., Melnikov D., Legros J. C., Yan Y., Saghiri Z., Lyubimova T., Sedelnikov G., Roux B.* Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19, no. 1. P. 017111. DOI: 10.1063/1.2409622.

28. *Сенницкий В. Л.* О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 1. С. 79–85.
29. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Кузаев А. Ф.* Вибрационное гидродинамическое взаимодействие сферы с границами полости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 2. С. 31–40.
30. *Сенницкий В. Л.* О колебательном движении неоднородного твердого шара в вибрирующей жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 27–35.
31. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д.* Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 6. С. 63–73.
32. *Kozlov V. G., Ivanova A. A., Schipitsyn V. D., Stambouli M.* Lift Force on the cylinder in viscous liquid under vibration. *Acta Astronaut.* 2012. Vol. 79. P. 44–51. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.04.013.
33. *Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.* Пример движения цилиндрического твердого тела в вязкой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 81–87.
34. *Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.* О движении твердых частиц в колеблющейся жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 3. С. 74–78.
35. *Lyubimov D. V., Baydin A. Y., Lyubimova T. P.* Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // *Microgravity Sci. Technology.* 2013. Vol. 25. P. 121–126. DOI: 10.1007/s12217-012-9336-3.
36. *Иванова А. А., Козлов В. Г., Щипицын В. Д.* Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 5. С. 55–63.
37. *Алабужев А. А.* Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // *Вычисл. механика сплошных сред.* 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16.
38. *Сенницкий В. Л.* О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128. DOI: 10.17377/SIBJIM.2015.18.110.
39. *Vlasova O. A., Kozlov V. G.* The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid // *Microgravity sci. Technology.* 2015. Vol. 27. P. 297–303. DOI: 10.1007/s12217-015-9460-y.
40. *Kozlov N. V., Vlasova O. A.* Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquidfilled cavity at modulated rotation // *Fluid dyn. res.* 2016. Vol. 48, no. 5. 055503. DOI:10.1088/0169-5983/48/5/055503.
41. *Сенницкий В. Л.* Парадоксальное движение жидкости // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* 2017. № 8–1. С. 28–33. DOI: 10.17513/mjprfi.11753.
42. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97.
43. *Власова О. А., Козлов В. Г., Козлов Н. В.* Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // *Прикладная механика и техническая физика.* 2018. Т. 59, № 2. С. 39–49.
44. *Коновалов В. В., Любимова Т. П.* Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твердых частиц в жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2019. Т. 12, № 1. С. 48–56. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.5.
45. *Щипицын В. Д.* Колебания неосесимметричного цилиндра в заполненной жидкостью полости, совершающей вращательные осцилляции // *Письма в Журнал технической физики.* 2020. Т. 46, вып. 15. С. 43–46. DOI: 10.21883/PJTF.2020.15.49749.18349.
46. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2021. Т. 24, № 2. С. 126–133. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.210.

47. Сенницкий В. Л. О течении вязкой жидкости в поле силы тяжести // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28, № 3. С. 373–377.
48. Коновалов В. В., Любимова Т. П. Влияние акустических вибраций на взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости // Пермские гидродинамические научные чтения: Сборник статей по материалам VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова. Отв. редактор Т. П. Любимова. Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2022. С. 254–261.
49. Сенницкий В. Л. Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // Сибирские электронные математические известия. 2022. Т. 19, № 1. С. 241–247. DOI: 10.33048/semi.2022.19.018.
50. Сенницкий В. Л. Особенности динамики вязкой жидкости со свободной границей при периодических воздействиях // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2. С. 197–208. DOI: 10.18500/0869-6632-003091.
51. Катица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44, вып. 1. С. 7–20. .
52. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 352 с.
53. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФ-МЛ, 1958. 408 с.
54. Сенницкий В. Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 1. С. 57–62.

## References

1. Chelomei VN. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. Doklady Akad. Nauk SSSR. 1983;270(1):62–67 (in Russian).
2. Sennitskii VL. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1985;(5):19–23 (in Russian).
3. Sennitskii VL. The motion of a sphere in a liquid caused by vibrations of another sphere. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1986;(4):31–36 (in Russian).
4. Lugovtsov BA, Sennitskii VL. Motion of a Body in a vibrating Liquid. Doklady Acad. Nauk SSSR. 1986;289(2):314–317 (in Russian).
5. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Cherepanov AA. On the motion of a solid body in a vibrating fluid. In: Convective Flows. Perm: Perm. Pedagogical Institute Publishing; 1987. P. 61–71 (in Russian).
6. Sennitskii VL. On the motion of a gas bubble in a viscous vibrating liquid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1988;(6):107–113 (in Russian).
7. Chelomei VN. Selected works. M.: Mashinostroenie; 1989. 336 p. (in Russian).
8. Sennitskii VL. Predominantly unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid. Doklady Akad. Nauk SSSR. 1991;319(1):117–119 (in Russian).
9. Sennitskii VL. Predominantly unidirectional motion of a compressible solid body in a vibrating liquid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1993;(1):100–101 (in Russian).
10. Sennitskii VL. On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid. Proceedings of the International workshop on G-jitter. Potsdam (USA): Clarkson University; 1993. P. 178–186.
11. Lyubimov DV. New approach in the vibrational convection theory. Proc. 14 IMACs Congress on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, Georgia, USA: Georgia Institute of Technology; 1994. P. 59–68.
12. Lyubimov DV. Thermovibrational flows in nonuniform systems. Microgravity Quarterly. 1994;4(1): 221–225.

13. Sennitskii VL. The motion of inclusions in an oscillating liquid. *Siberian Physical Journal*. 1995;(4):18–26 (in Russian).
14. Kozlov VG. Solid body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration. *Europhysics Letters*. 1996;36(9):651–656. DOI: 10.1209/epl/i1996-00282-0.
15. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Meradji S, Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase. *J. Crystal Growth*. 1997;180:648–659. DOI: 10.1016/S0022-0248(97)00294-7.
16. Ivanova AA, Kozlov VG, Evesque P. Dynamics of a cylindrical body in a liquid-filled sector of a cylindrical layer under rotational vibration. *Fluid Dynamics*. 1998;33:488–496. DOI: 10.1007/BF02698213.
17. Lyubimov DV, Perminov AV, Cherepanov AA. Generation of averaged flows in a vibrational field close to the interface of mediums. In: *Vibrational Effects in Hydrodynamics*. Perm: Perm University Publishing; 1998. P. 204–221 (in Russian).
18. Sennitskii VL. The motion of a ball in a liquid in the presence of a wall under oscillational influences. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 1999;40(4):125–132 (in Russian).
19. Lavrenteva OM. On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid. *Europ. J. Appl. Math.* 1999;10(3):251–263. DOI: 10.1017/S0956792599003745.
20. Sennitskii VL. The motion of a pulsating rigid body in an oscillating viscous liquid. *Applied Mechanics and Technical Physics*. 2001;42(1):72–76 (in Russian).
21. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Cherepanov AA. *Dynamics of Interfaces in Vibrational Fields*. M.: Fizmatlit; 2003. 216 p. (in Russian).
22. Pyatigorskaya OS, Sennitskii VL. Motion of a sphere in a liquid caused by vibrations of another sphere. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2004;45:542–545. DOI: 10.1023/B:JAMT.0000030331.35411.2e.
23. Ivanova AA, Kozlov VG, Kuzaev AF. Vibrational lift force acting on a body in a fluid near a solid surface. *Doklady Physics*. 2005;50(6):311–314. DOI: 10.1134/1.1958123.
24. Lyubimov D, Lyubimova T, Vorobev A, Mojtabi A, Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part I: Non-uniform heating. *Journal of Fluid Mechanics*. 2006;564:159–183. DOI: 10.1017/S0022112006001418.
25. Hassan S, Lyubimova TP, Lyubimov DV, Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container. *Journal of Applied Mechanics*. 2006;73(1):72–78. DOI: 10.1115/1.1992516.
26. Lyubimov DV, Lyubimova TP, Shklyaev SV. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Physics of Fluids*. 2006;18:012101. DOI: 10.1063/1.2137358.
27. Shevtsova V, Melnikov D, Legros JC, Yan Y, Saghiri Z, Lyubimova T, Sedelnikov G, Roux B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions. *Physics of Fluids*. 2007;19(1):017111. DOI: 10.1063/1.2409622.
28. Sennitskii VL. Motion of an inclusion in uniformly and nonuniformly vibrating liquids. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2007;48(1):65–70. DOI: 10.1007/s10808-007-0009-8.
29. Ivanova AA, Kozlov VG, Kuzaev AF. Vibrational hydrodynamic interaction between a sphere and the boundaries of a cavity. *Fluid Dynamics*. 2008;43:194–202. DOI: 10.1134/S001546280802004X.
30. Sennitskii VL. Pulsating motion of an inhomogeneous solid sphere in a vibrating liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2009;50(6):936–943. DOI: 10.1007/s10808-009-0127-6.
31. Ivanova AA, Kozlov VG, Shchipitsyn VD. A light cylinder under horizontal vibration in a cavity filled with a fluid. *Fluid Dynamics*. 2010;45:889–897. DOI: 10.1134/S0015462810060062.
32. Kozlov VG, Ivanova AA, Schipitsyn VD, Stambouli M. Lift Force on the cylinder in viscous liquid under vibration. *Acta Astronaut.* 2012;79:44–51. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.04.013.
33. Pyatigorskaya OS, Sennitskii VL. Example of motion of a cylindrical solid in a viscous liquid.

- Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013;54:237–242. DOI: 10.1134/S0021894413020089.
34. Pyatigorskaya OS, Sennitskii VL. Motion of solid particles in an oscillating liquid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013;54:404–407. DOI: 10.1134/S0021894413030085.
  35. Lyubimov DV, Baydin AY, Lyubimova TP. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization. Microgravity Science Technology. 2013;25:121–126. DOI: 10.1007/s12217-012-9336-3.
  36. Ivanova AA, Kozlov VG, Shchipitsyn VD. Lift force acting on a cylindrical body in a fluid near the boundary of a cavity performing translational vibrations. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014;55:773–780. DOI: 10.1134/S002189441405006X.
  37. Alabujev AA. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. Computational Continuum Mechanics. 2014;7(2):151–161. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16.
  38. Sennitskii VL. On the prescribed orientation of a solid inclusion in a viscous liquid. Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2015;18(1):123–128. DOI: 10.17377/SIBJIM.2015.18.110 (in Russian).
  39. Vlasova OA, Kozlov VG. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid. Microgravity Sci. Technology. 2015;27:297–303. DOI: 10.1007/s12217-015-9460-y.
  40. Kozlov NV, Vlasova OA. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquidfilled cavity at modulated rotation. Fluid Dyn. Res. 2016;48(5):055503. DOI: 10.1088/0169-5983/48/5/055503.
  41. Sennitskii VL. Paradoxical motion of a liquid. International Journal of Applied and Fundamental Research. 2017;(8–1):28–33 (in Russian). DOI: 10.17513/mjpf.11753.
  42. Sennitskii VL. The predominantly unidirectional rotation of a solid body and a viscous liquid. Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2017;20(2):93–97 (in Russian).
  43. Vlasova OA, Kozlov VG, Kozlov NV. Lift force acting on a heavy solid in a rotating liquid-filled cavity with a time-varying rotation rate. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018;59:219–228. DOI: 10.1134/S0021894418020050.
  44. Konovalov VV, Lyubimova TP. Numerical study of the influence of vibrations on the interaction in an ensemble of gas bubbles and solid particles in a liquid. Computational Continuum Mechanics. 2019;12(1):48–56 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.1.5.
  45. Shchipitsyn VD. Vibrations of a nonaxisymmetric cylinder in a cavity filled with liquid and performing rotational oscillations. Tech. Phys. Lett. 2020;46:771–774. DOI: 10.1134/S1063785020080143.
  46. Sennitskii VL. The predominantly unidirectional flow of a viscous liquid. Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2021;24(2):126–133 (in Russian). DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.210.
  47. Sennitskii VL. On the flow of a viscous liquid in a gravity field. Thermophysics and Aeromechanics. 2021;28(3):347–351. DOI: 10.1134/S0869864321030057.
  48. Konovalov VV, Lyubimova TP. Influence of acoustic vibrations on the interaction of a gas bubble and a solid particle in a liquid. In: TP Lyubimova (ed.). Perm Hydrodynamical Scientific Readings. Digest of articles by the materials of VIII all-Russian conference dedicated for the memory of professors G. Z. Gershuny, E. M. Juhovitskii, D. V. Lyubimov. Perm: Perm University Publishing; 2022. P. 254–261.
  49. Sennitskii VL. On peculiarities of a liquid flow in a gravity field. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2022;19(1):241–247 (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2022.19.018.
  50. Sennitskii VL. Peculiarities of the dynamics of a viscous liquid with a free boundary under periodic influences. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2):197–208. DOI: 10.18500/0869-6632-003091.

51. Kapitsa PL. Pendulum with a vibrating suspension. *Sov. Phys. Usp.* 1951;44(1):7–20 (in Russian).
52. Krilov NM, Bogolyubov NN. Introduction in Non-Linear Mechanics. Moscow-Ijevsk: NITs Reguliarnaya i haoticheskaya dinamika; 2004. 352 p. (in Russian).
53. Bogolyubov NN, Mitropolskii YuA. Asimptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. M.: GIF-ML; 1958. 408 p. (in Russian).
54. Sennitskii VL. Force interaction of a sphere and a viscous liquid in the presence of a wall. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2000;41:50–54. DOI: 10.1007/BF02465236.



*Сенницкий Владимир Леонидович* — родился в 1950 году. Окончил физический факультет (ФФ) Новосибирского государственного университета (НГУ, 1972) и аспирантуру ФФ НГУ (1975). С 1975 года работает в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, в настоящее время в должности старшего научного сотрудника. Доктор физико-математических наук (1995). Имеет ученые звания старшего научного сотрудника (механика жидкости, газа и плазмы, 1992) и доцента (общая физика, 1994). Награжден дипломом Министерства образования и науки РФ «За научное руководство студенческой работой, отмеченной медалью «За лучшую научную студенческую работу» по итогам открытого конкурса на лучшую работу студентов по естественным, техническим и гуманитарным наукам в вузах Российской Федерации» (2009). Область научных интересов: самодвижение тел в жидкости; нетривиальная динамика гидромеханических систем.

Россия, 630090 Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15  
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
E-mail: sennitskii@yandex.ru  
ORCID: 0009-0006-5131-2858  
AuthorID (eLibrary.Ru): 2024



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003152  
EDN: ICZYLL

## Астроцит-индуцированная синхронизация активности нейронной сети

А. В. Ермолаева<sup>1,2</sup>✉, В. Б. Казанцев<sup>1,2</sup>, С. Ю. Гордлеева<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского, Россия

<sup>2</sup>АНО «Неймарк», Нижний Новгород, Россия

<sup>3</sup>Государственный институт русского языка им. А. С. Пушкина, Москва, Россия

E-mail: ✉anastasia.v.ermolaeva@gmail.com, kazantsev@neuro.nnov.ru, gordleeva@neuro.nnov.ru

Поступила в редакцию 19.06.2024, принята к публикации 30.10.2024,

опубликована онлайн 7.12.2024, опубликована 31.03.2025

**Аннотация.** Цель данной работы — исследование роли механизмов астроцитарной регуляции синаптической передачи в процессах формирования синхронизации в сигнализации нейронных сетей методами математического моделирования. **Методы.** В работе представлена модель малого нейрон-астроцитарного ансамбля. В качестве модели динамики мембранного потенциала нейрона используется модель Ходжкина–Хаксли. Рассматривается случай упорядоченной топологии связей («все со всеми») в нейронной сети. Астроцитарная сеть моделируется как сеть диффузионно-связанных кальциевых осцилляторов с упорядоченной топологией (при которой матрица связей определённым образом структурирована, осцилляторы взаимодействуют с ближайшими соседями). В качестве модели астроцита используется биофизическая модель кальциевой динамики. Воздействие астроцитов на нейроны учитывается как медленная модуляция весов синаптических связей в нейронной сети, пропорциональная кальциевым сигналам в близлежащих астроцитах. Другими словами, на сетевом уровне изучается возможность адаптивной перестройки колебательно-волновых паттернов за счёт астроцит-индуцированной регуляции синаптической передачи. Оценка синхронизации активности нейронов производится путём вычисления когерентности сигнализации нейронной сети. **Результаты.** Влияние астроцитов на динамику нейронной сети состоит в возбуждении коррелированных во времени паттернов нейронной активности, обусловленных астроцито-зависимым усилением синаптического взаимодействия между нейронами на временных масштабах астроцитарной динамики. Показано, что синхронизированная кальциевая сигнализация астроцитарной сети приводит к координированной пачечной активности нейронной сети, возникающей на фоне некоррелированной во времени спонтанной импульсной активности, индуцированной внешней шумовой стимуляцией. Исследовано влияние конкретных биофизических механизмов астроцитарной модуляции синаптической передачи на динамические свойства структур локальной синхронизации в нейронных ансамблях. Исследованы характеристики координированной пачечной активности нейронной сети в зависимости от свойств внешней шумовой стимуляции, силы астроцитарной регуляции синаптической передачи, а также степени влияния нейронов на астроциты.

**Ключевые слова:** нейрон, астроцит, нейрон-астроцитарное взаимодействие, нейрон-астроцитарная сеть.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки № 075-15-2022-1139.

**Для цитирования:** Ермолаева А. В., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю. Астроцит-индуцированная синхронизация активности нейронной сети // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 233–248. DOI: 10.18500/0869-6632-003152. EDN: ICZYLL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Astrocyte-induced synchronization of neural network activity

A. V. Ermolaeva<sup>1,2</sup>✉, V. B. Kazantsev<sup>1,2</sup>, S. Yu. Gordleeva<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>ANO Neymark, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>3</sup>Pushkin State Russian Language Institute, Moscow, Russia

E-mail: ✉anastasia.v.ermolaeva@gmail.com, kazantsev@neuro.nnov.ru, gordleeva@neuro.nnov.ru

Received 19.06.2024, accepted 30.10.2024, available online 7.12.2024, published 31.03.2025

**Abstract.** The purpose of this work is to study the role of mechanisms of astrocytic regulation of synaptic transmission in the processes of synchronization formation in signaling of neural networks by mathematical modeling methods. **Methods.** The paper presents a model of a small neuron-astrocyte ensemble. The Hodgkin-Huxley model is used as a model of the membrane potential dynamics of a neuron. The case of an ordered topology of connections (“all-to-all”) in a neural network is considered. The astrocyte network is modeled as a network of diffusion-coupled calcium oscillators with an ordered topology (in which the matrix of connections is structured in a certain way, interaction with the nearest neighbors). A biophysical model of calcium dynamics is used as an astrocyte model. The effect of astrocytes on neurons is taken into account as a slow modulation of synaptic connections weights in the neural network, proportional to calcium signals in nearby astrocytes. In other words, at the network level, the possibility of adaptive restructuring of oscillatory wave patterns due to astrocyte-induced regulation of synaptic transmission is being studied. The synchronization of neuronal activity is estimated by calculating the coherence of the neural network signaling. **Results.** The influence of astrocytes on the dynamics of the neural network consists in the excitation of time-correlated patterns of neural activity caused by an astrocyte-dependent increase in synaptic interaction between neurons on the time scales of astrocytic dynamics. It has been shown that synchronized calcium signaling of the astrocytic network leads to coordinated burst (bundle) activity of the neural network, which occurs against the background of uncorrelated spontaneous impulse activity induced by external noise stimulation. The influence of specific biophysical mechanisms of astrocytic modulation of synaptic transmission on the dynamic properties of local synchronization structures in neural ensembles has been investigated. The characteristics of the coordinated bundle activity of a neural network are studied depending on the properties of external noise stimulation, the strength of astrocytic regulation of synaptic transmission, as well as the degree of neurons influence on astrocytes.

**Keywords:** neuron, astrocyte, neuron-astrocyte interaction, neuron-astrocyte network.

**Acknowledgements.** This work was supported by the grant of the Ministry of Education and Science No. 075-15-2022-1139.

**For citation:** Ermolaeva AV, Kazantsev VB, Gordleeva SYu. Astrocyte-induced synchronization of neural network activity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(2):233–248. DOI: 10.18500/0869-6632-003152

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Исследование эффектов синхронизации в динамике нейронных сетей мозга и разработка адекватных моделей их поведения становится в последние годы одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений современной нелинейной физики. Связано это с двумя основными факторами. С одной стороны, существенно возросли возможности нейрофизиологического эксперимента, позволяющего получить всё более обширную информацию о функционирующей различных нейронных систем. Здесь, прежде всего, следует отметить оптический флуоресцентный нейроимиджинг и использование мультиэлектродных зондов для многоканальной электрофизиологической регистрации. Эти методики позволяют не только исследовать активность одной или нескольких отдельно взятых клеток, но и регистрировать паттерны активности сети взаимодействующих клеток, что открывает возможность экспериментально проверять гипотезы о функциональном назначении исследуемых нейросетей, изучать процессы межклеточной

сигнализации и обработки информации. Это позволяет также существенно корректировать существующие и разрабатывать новые модели в соответствии с получаемой экспериментально информацией. Вторым аспектом связан с тем, что уже сейчас на основе моделей нейронных систем разрабатываются новейшие системы обработки и передачи информации, нейрокомпьютинга [1], ассоциативной памяти и распознавания [2, 3], нейроаниматов [4], нейронно-полупроводниковых интерфейсов-нейрочипов [5] и др.

Согласно современным представлениям о функционировании головного мозга, синхронизация локальных нейронных ансамблей, а также возникновение временной корреляции между удалёнными областями распределённой нейронной сети определяет нормальную работу мозга, включая когнитивную, двигательную активность и т.д. [6, 7]. В то же время возникновение аномальной синхронизации мозга — или гиперсинхронизации в нейронных сетях — является причиной различных типов заболеваний головного мозга, таких как эпилепсия, болезни Паркинсона и Альцгеймера, формирование опухолей и др. [8, 9]. Экспериментальное исследование подобных вопросов зачастую является затруднительным и требует серьёзного оперативного вмешательства. В этом случае моделирование эффектов возникновения синхронизации в сигнализации нейронных сетей головного мозга с использованием релевантных биологических моделей позволяет существенно продвинуться в понимании условий, способствующих развитию патологических состояний, механизмов формирования индивидуальных приступов, а также их раннего предсказания и подавления.

В области приложения методов радиофизики к изучению нейроподобных систем к настоящему времени достаточно хорошо изучены бифуркационные механизмы генерации импульсов в отдельных нейронах [10], принципы распространения электрических импульсов по нейронной сети [11–13], исследованы эффекты синхронизации, мультистабильности [14, 15] и кластерообразования [16]. Однако в основном рассматриваемые модели нейронных сетей не являются биологически релевантными, представляют собой сильно формализованные системы, а получаемые режимы сигнализации слабо согласуются с нейрофизиологическими данными. Кроме того, многие важные аспекты сетевых взаимодействий в биофизических моделях нейронных систем остаются практически не исследованными.

Одним из актуальных направлений исследования нейросистем является включение в анализ пространственно-временной динамики традиционно исследуемых нейронных сетей влияния глиальных клеток. Их роль в функционировании систем мозга в настоящее время активно обсуждается в нейронауке. Традиционно считалось, что глиальные клетки выполняют ряд функций, поддерживающих жизнедеятельность нейронов. Однако, как показывают последние исследования [17], астроциты — один из самых распространённых типов глиальных клеток — способны генерировать импульсы химической активности в ответ на прохождение импульсных сигналов по нейронной сети. Такие импульсы представляют собой кратковременное повышение внутриклеточной концентрации кальция. Считается, что кальциевые импульсы в астроцитах вовлечены в биофизические механизмы двунаправленного взаимодействия между нейронами и астроцитами. Понимание исключительной роли астроцитов в процессах регуляции нейрональной сигнализации открыло целый ряд потенциальных возможностей для опосредованного терапевтического воздействия на нейронные сети мозга. Несмотря на большое накопление экспериментальных данных о роли астроцитов в процессах формирования когнитивных функций и развитии патологий и старения [18, 19], работ, направленных на изучение эффектов астроцитарной регуляции синаптической передачи на сетевом уровне, к настоящему времени существует крайне мало.

Обладая собственной нетривиальной динамикой, нейроны и астроциты формируют сети со сложными межклеточными взаимодействиями. Характерной особенностью коллективной

динамики таких сетей является наличие таких нелинейных эффектов, как мультистабильность, синхронизация, формирование структур активности. Считается, что эти феномены лежат в основе различных процессов обработки информации в мозге, например, обучения и памяти, а также в основе процессов развития патологической активности, например, эпилепсии. Понимание механизмов данных процессов составляет одну из приоритетных и актуальных задач современной биофизики.

В работе представлена модель малого нейрон-астроцитарного ансамбля. В качестве модели динамики мембранного потенциала нейрона используется модель Ходжкина–Хаксли. Рассматривается случай упорядоченной топологии связей («все со всеми») в нейронной сети. Астроцитарная сеть моделируется как сеть диффузионно-связанных кальциевых осцилляторов с упорядоченной топологией (при которой матрица связей определённым образом структурирована, осцилляторы взаимодействуют с ближайшими соседями). В качестве модели астроцита используется биофизическая модель кальциевой динамики [20]. Воздействие астроцитов на нейроны учитывается как медленная модуляция весов синаптических связей в нейронной сети, пропорциональная кальциевым сигналам в близлежащих астроцитах. Другими словами, на сетевом уровне изучается возможность адаптивной перестройки колебательно-волновых паттернов за счёт астроцит-индуцированной регуляции синаптической передачи. Оценка синхронизации активности нейронов производится путём вычисления когерентности сигнализации нейронной сети.

## 1. Описание модели

Нейронная сеть состоит из 6 возбуждающих синаптически связанных нейронов Ходжкина–Хаксли со связью «все со всеми» (рис. 1). Мембранный потенциал каждого нейрона изменяется в соответствии со следующим уравнением баланса ионных токов [21]:

$$C \frac{dV^{(i)}}{dt} = I_{\text{channel}}^{(i)} + I_{\text{app}}^{(i)} + \sum_j I_{\text{syn}}^{(ij)} + I_p^{(i)}, \quad (1)$$

где индекс  $i = 1, \dots, 6$  соответствует номеру нейрона в сети,  $j$  – индекс входной связи,  $t$  – время в миллисекундах,  $C = 1$  мкФ/см<sup>2</sup>.

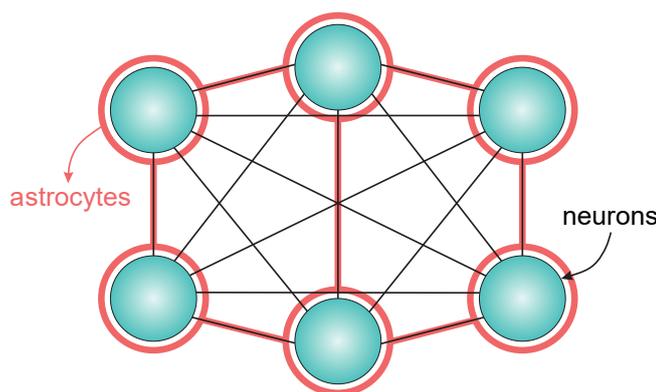


Рис. 1. Схема модели нейрон-астроцитарной сети, состоящей из 6 синаптически связанных нейронов и 6 диффузионно-связанных астроцитов. Каждый астроцит соединён с 1 близрасположенным нейроном (цвет онлайн)

Fig. 1. Scheme of the neuron-astrocyte network model consisting of 6 synaptically connected neurons and 6 diffusion-connected astrocytes. Each astrocyte is connected to 1 nearby neuron (color online)

Динамика ионных токов описывается следующими уравнениями:

$$I_{\text{channel}} = -g_{Na}m^3h(V - E_{Na}) - g_Kn^4(V - E_K) - g_{\text{leak}}(V - E_{\text{leak}}), \quad (2)$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m m, \quad (3)$$

$$\alpha_m = \frac{0.1(V + 40)}{1 - \exp(-(V + 40)/10)}, \quad (4)$$

$$\beta_m = 4 \exp(-(V + 65)/18), \quad (5)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h h, \quad (6)$$

$$\alpha_h = 0.07 \exp(-(V + 65)/20), \quad (7)$$

$$\beta_h = \frac{1}{1 + \exp(-(V + 35)/10)}, \quad (8)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n, \quad (9)$$

$$\alpha_n = \frac{0.01(V + 55)}{1 - \exp(-(V + 55)/10)}, \quad (10)$$

$$\beta_n = 0.125 \exp(-(V + 65)/80), \quad (11)$$

где  $E_{Na} = 55$  мВ,  $E_K = -77$  мВ,  $E_{\text{leak}} = -54.4$  мВ,  $g_{Na} = 120$  мСм/см<sup>2</sup>,  $g_K = 36$  мСм/см<sup>2</sup>,  $g_{\text{leak}} = 0.3$  мСм/см<sup>2</sup> [22]. Ток  $I_{\text{app}}^{(i)}$  моделирует постоянную мембранную деполяризацию и определяет динамический режим нейрона. В данной работе для каждого нейрона  $I_{\text{app}}^{(i)} = 5$  мкА/см<sup>2</sup>, что соответствует возбудимому режиму. Каждый нейрон стимулируется последовательностью импульсов Пуассона  $I_p^{(i)}$  с определённой средней частотой  $\lambda$ , моделирующей внешнее воздействие. Каждый пуассоновский импульс имеет постоянную длительность 10 мс и постоянную амплитуду, которая выбирается независимо для каждого импульса из равномерного случайного распределения в интервале  $[-1.8, 1.8]$ . Последовательности пуассоновских импульсов, подаваемые на разные нейроны, независимы между собой. Синаптический ток  $I_{\text{syn}}^{(ij)}$  моделирует взаимодействие между нейронами [23]:

$$I_{\text{syn}}^{(ij)} = \frac{g_{\text{syn}}(V^{(j)} - E_{\text{syn}})}{1 + \exp(-(V^{(i)} - \theta_{\text{syn}})/k_{\text{syn}})}, \quad (12)$$

где параметр  $g_{\text{syn}}$  описывает синаптический вес, модулируемый астроцитом,  $E_{\text{syn}} = 0$  мВ для возбуждающего синапса,  $\theta_{\text{syn}} = 0$  мВ,  $k_{\text{syn}} = 0.2$  мВ.

При возникновении потенциала действия на пресинаптическом нейроне происходит высвобождение порции нейромедиатора (в частности, глутамата). Уравнение, описывающее динамику внеклеточной концентрации глутамата в окрестности нейрона,  $G^{(i)}$ , имеет вид:

$$\frac{dG^{(i)}}{dt} = -\alpha_G G^{(i)} + \beta_G H(V), \quad (13)$$

где

$$H(V) = \frac{1}{1 + \exp(-V^{(i)}/0.5)}, \quad (14)$$

параметр  $\alpha_G = 25$  с<sup>-1</sup> определяет скорость релаксации концентрации до стационарного уровня, а  $\beta_G = 500$  с<sup>-1</sup> — эффективность высвобождения нейромедиатора.

Астроцитарная сеть представляет собой решётку из 6 астроцитов, связанных посредством диффузии ионов  $Ca^{2+}$  и молекул инозитол 1,4,5-трифосфата (ИТФ). Динамика внутриклеточной концентрации  $Ca^{2+}$  астроцита включает в себя высвобождение  $Ca^{2+}$  из внутриклеточного хранилища, эндоплазматического ретикулума (ЭР), в цитозоль с помощью рецепторов ИТФ ( $J_{IP3}$ ), процесс закачки  $Ca^{2+}$  обратно в ЭР посредством кальциевого насоса “SERCA” ( $J_{pump}$ ), утечку  $Ca^{2+}$  из ЭР в цитозоль ( $J_{leak}$ ), а также кальциевый поток через плазматическую мембрану из внеклеточного пространства в цитозоль ( $J_{in}$ ) и обратно ( $J_{out}$ ). Кальциевая динамика отдельного астроцита описывается моделью Уллаха [20] с учётом диффузионных токов и может быть представлена следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d[Ca^{2+}]^{(k)}}{dt} = J_{IP3} - J_{pump} + J_{leak} + J_{in} - J_{out} + J_{Cadiff}^{(k)}, \quad (15)$$

где индекс  $k = 1, \dots, 6$ ;  $[Ca^{2+}]^{(k)}$  — внутриклеточная концентрация  $Ca^{2+}$ ,  $t$  — время в секундах.

Динамика внутриклеточной концентрации ИТФ,  $[IP_3]^{(k)}$ , определяется продукцией ИТФ  $Ca^{2+}$ -зависимой фосфолипазой  $C\delta$  ( $J_{PLC\delta}$ ), продукцией ИТФ фосфолипазой  $C\beta$  ( $J_{glu}$ ), которая зависит от концентрации нейромедиатора (глутамата) во внеклеточной среде, и процессом деградации молекул ИТФ [20]:

$$\frac{d[IP_3]^{(k)}}{dt} = J_{PLC\delta} - \frac{1}{\tau_r} ([IP_3]^{(k)} - [IP_3^*]) + J_{glu}^{(k)} + J_{IP3diff}^{(k)}. \quad (16)$$

Инактивационная переменная,  $h^{(k)}$ , соответствует доле неинaktivированных кальциевых каналов на мембране ЭР и описывается следующим уравнением [20]:

$$\frac{dh^{(k)}}{dt} = a_2 \left[ d_2 \frac{[IP_3]^{(k)} + d_1}{[IP_3]^{(k)} + d_3} (1 - h^{(k)}) - [Ca^{2+}]^{(k)} h^{(k)} \right]. \quad (17)$$

Уравнения для токов имеют вид

$$J_{IP3} = c_1 v_1 m_\infty^3 n_\infty^3 h^3 ([Ca^{2+}]_{ER} - [Ca^{2+}]), \quad (18)$$

$$m_\infty = \frac{[IP_3]}{[IP_3] + d_1}, \quad (19)$$

$$n_\infty = \frac{[Ca^{2+}]}{[Ca^{2+}] + d_5}, \quad (20)$$

$$[Ca^{2+}]_{ER} = \frac{c_0 - [Ca^{2+}]}{c_1}, \quad (21)$$

$$J_{pump} = \frac{v_3 [Ca^{2+}]^2}{[Ca^{2+}]^2 + k_3^2}, \quad (22)$$

$$J_{leak} = c_1 v_2 ([Ca^{2+}]_{ER} - [Ca^{2+}]), \quad (23)$$

$$J_{in} = v_5 + v_6 \frac{[IP_3]^2}{[IP_3]^2 + k_2^2}, \quad (24)$$

$$J_{out} = k_1 [Ca^{2+}], \quad (25)$$

$$J_{PLC\delta} = v_4 \frac{[Ca^{2+}] + (1 - \alpha)k_4}{[Ca^{2+}] + k_4}, \quad (26)$$

где  $c_0 = 2$  мкМ,  $c_1 = 0.185$ ,  $v_1 = 6$  с<sup>-1</sup>,  $v_2 = 0.11$  с<sup>-1</sup>,  $v_3 = 2.2$  мкМ·с<sup>-1</sup>,  $v_5 = 0.025$  мкМ·с<sup>-1</sup>,  $v_6 = 0.2$  мкМ·с<sup>-1</sup>,  $k_1 = 0.5$  с<sup>-1</sup>,  $k_2 = 1$  мкМ,  $k_3 = 0.1$  мкМ,  $k_4 = 1.1$  мкМ,  $a_2 = 0.14$  мкМ<sup>-1</sup> с<sup>-1</sup>,  $d_1 = 0.13$  мкМ,  $d_2 = 1.049$  мкМ,  $d_3 = 0.9434$  мкМ,  $d_5 = 0.082$  мкМ,  $\alpha = 0.8$ ,  $1/\tau_r = 0.14$  с<sup>-1</sup>,  $IP_3^* = 0.16$  мкМ. Параметр  $v_4$  описывает скорость регенерации ИТФ и управляет динамическим режимом астроцита. В данной модели все астроциты находятся в возбужденном режиме и  $v_4 = 0.3$  мкМ·с<sup>-1</sup>.

Токи  $J_{\text{Cadiff}}^{(k)}$  и  $J_{\text{IP3diff}}^{(k)}$  моделируют диффузию ионов  $\text{Ca}^{2+}$  и молекул ИТФ соответственно через гэнп-контакты между астроцитами в сети и могут быть выражены следующим образом:

$$J_{\text{Cadiff}}^{(k)} = d_{\text{Ca}}(\Delta C a)^{(k)}, \quad (27)$$

$$J_{\text{IP3diff}}^{(k)} = d_{\text{IP3}}(\Delta IP_3)^{(k)}, \quad (28)$$

где параметры  $d_{\text{Ca}} = 0.001$  с<sup>-1</sup> и  $d_{\text{IP3}} = 0.12$  с<sup>-1</sup> описывают скорости диффузии ионов  $\text{Ca}^{2+}$  и молекул ИТФ соответственно.  $(\Delta C a)^{(k)}$  и  $(\Delta IP_3)^{(k)}$  являются дискретными операторами Лапласа:

$$(\Delta C a)^{(k)} = \sum_{m=1}^N [C a^{2+}]^{(m)} - N[C a^{2+}]^{(k)}, \quad (29)$$

$$(\Delta IP_3)^{(k)} = \sum_{m=1}^N [IP_3]^{(m)} - N[IP_3]^{(k)}, \quad (30)$$

где  $N$  — количество ближайших соседей астроцита  $k$ : в рассматриваемой модели  $N = 2$  для крайних левых и крайних правых элементов сети,  $N = 3$  — для центральных.

В модели предполагается, что каждый астроцит из сети взаимодействует с одним близрасположенным нейроном из нейронной сети посредством модуляции веса синаптической связи. Повышение внутриклеточной концентрации  $\text{Ca}^{2+}$  индуцирует высвобождение глутаматергического астроцитарного глутамата на внесинаптические NMDARs на постсинапсе, индуцирующее усиление постсинаптического тока нейрона  $j$ . Динамикой глутаматергического астроцитарного глутамата в модели нейрон-астроцитарной сети пренебрегается, и астроцитарная модуляция синаптической передачи описывается как  $\text{Ca}^{2+}$ -зависимое изменение веса (эффективности) синаптической связи  $ij$ -го синапса:

$$g_{\text{syn}}^{\text{eff}} = \begin{cases} g_{\text{syn}}(1 + g_{\text{astro}}[C a^{2+}]^{(k)}), & \text{если } [C a^{2+}]^{(k)} > 0.2 \text{ мкМ,} \\ g_{\text{syn}}, & \text{если } [C a^{2+}]^{(k)} \leq 0.2 \text{ мкМ,} \end{cases} \quad (31)$$

где  $g_{\text{syn}} = 0.04$  мСм/см<sup>2</sup> — это синаптический вес без воздействия астроцита, параметр  $g_{\text{astro}} > 0$  — эффективность астроцитарного воздействия на синапс.

Воздействие нейрона на астроцит описывается при помощи тока  $J_{\text{glu}}$ , в который входит внеклеточная концентрация нейромедиатора:

$$J_{\text{glu}}^{(k)} = \frac{\alpha_{\text{glu}}}{1 + \exp\left(-\frac{G^{(i)} - 0.4}{0.01}\right)}, \quad (32)$$

где параметр  $\alpha_{\text{glu}}$  определяет скорость производства ИТФ фосфолипазой  $\text{C}\beta$  и управляет степенью воздействия нейронов на астроциты. Описанные выше дифференциальные уравнения интегрировались методом Рунге–Кутты 4 порядка с шагом интегрирования  $\Delta t = 0.1$  мс.

Для количественной оценки уровня корреляции сигнализации нейронной сети, индуцированной влиянием астроцитов на синаптическую передачу, была выбрана мера когерентности,

основанная на нормализованных кросс-корреляциях активности пар нейронов в сети [24]. Время делилось на интервалы  $T = 1500$  мс. В каждом интервале была вычислена средняя частота нейронной активности  $\Omega$ , равная обратной величине среднего межимпульсного интервала в сети. Далее интервал  $T$  делился на небольшие отрезки  $\Delta t = \tau = 0.1/\Omega$ . Последовательности импульсов нейронов были бинаризованы следующим образом: 0 – нет потенциала действия в окне  $\tau$ , 1 – есть потенциал действия в окне  $\tau$ . Когерентность между двумя нейронами  $i$  и  $j$  измерялась их кросс-корреляцией последовательностей импульсов с нулевой задержкой по времени во временном интервале  $\tau$ :

$$k_{i,j}(\tau) = \frac{\sum_{l=1}^N X(l)Y(l)}{\sqrt{\sum_{l=1}^N X(l) \sum_{l=1}^N Y(l)}}, \quad (33)$$

где  $T/N = \tau$ ,  $X(l)$  и  $Y(l)$  – бинаризованные последовательности импульсов нейронов.

Когерентность активности нейронной сети  $k(t)$  вычислялась как среднее значение  $k_{i,j}(\tau)$  по всем парам нейронов в сети. По полученным реализациям  $k(t)$  были определены пики когерентности на временах кальциевых импульсов в астроцитах ( $[Ca^{2+}] > 0.2$  мкМ). Координированная пачечная активность нейронной сети оценивалась по следующим характеристикам: максимальное значение, ширина и период следования пиков когерентности. Ширина пиков вычислялась на уровне  $k = 0.85$ . Каждая характеристика была усреднена по всем  $Ca^{2+}$ -импульсам астроцитов в численном эксперименте.

## 2. Результаты

На все нейроны в сети подавалась внешняя шумовая стимуляция в виде последовательности импульсов Пуассона со средней частотой  $\lambda$ . При генерации потенциалов действия пресинаптическим нейроном происходит увеличение внеклеточной концентрации глутамата,  $G$ , что, в свою очередь, приводит к повышению уровня внутриклеточной концентрации ИТФ в связанном с данным нейроном астроците. Увеличение внутриклеточной концентрации ИТФ приводит к генерации кальциевых импульсов в астроците. На рис. 2 представлены примеры временных реализаций внутриклеточной концентрации  $Ca^{2+}$  (рис. 2, *a*) и ИТФ (рис. 2, *b*) астроцита. При достижении внутриклеточной концентрацией  $Ca^{2+}$  порога в 0.2 мкМ активируется астроцитарная модуляция веса синаптической связи между нейронами. Динамика мембранного потенциала соответствующего постсинаптического нейрона представлена на рис. 2, *c*. Астроцитарная модуляция приводит к формированию синхронной активности нейронной сети, которая представляет собой коррелированные во времени пачки импульсов (бёрсты) на временах  $Ca^{2+}$ -динамики (рис. 2, *c*, рис. 3, *a*, *b*). Для оценки степени синхронизации нейронов была вычислена когерентность активности нейронной сети (рис. 3, *c*), а также рассчитаны её характеристики: максимальное значение, длительность и период следования коррелированных пачек импульсов. На основе предложенной модели нейрон-астроцитарной сети было проведено исследование характеристик астроцит-обусловленной координированной пачечной активности нейронов в зависимости от ключевых параметров нейрон-астроцитарного взаимодействия и свойств внешней шумовой стимуляции.

Основным параметром, регулирующим динамику нейронной сети, является средняя частота внешнего шумового воздействия,  $\lambda$ . В модели были исследованы характеристики коррелированных паттернов активности нейронов при варьировании  $\lambda$ . Увеличение частоты внешнего воздействия приводит к росту частоты генерации потенциалов действия (ПД) в нейронной сети. С ростом

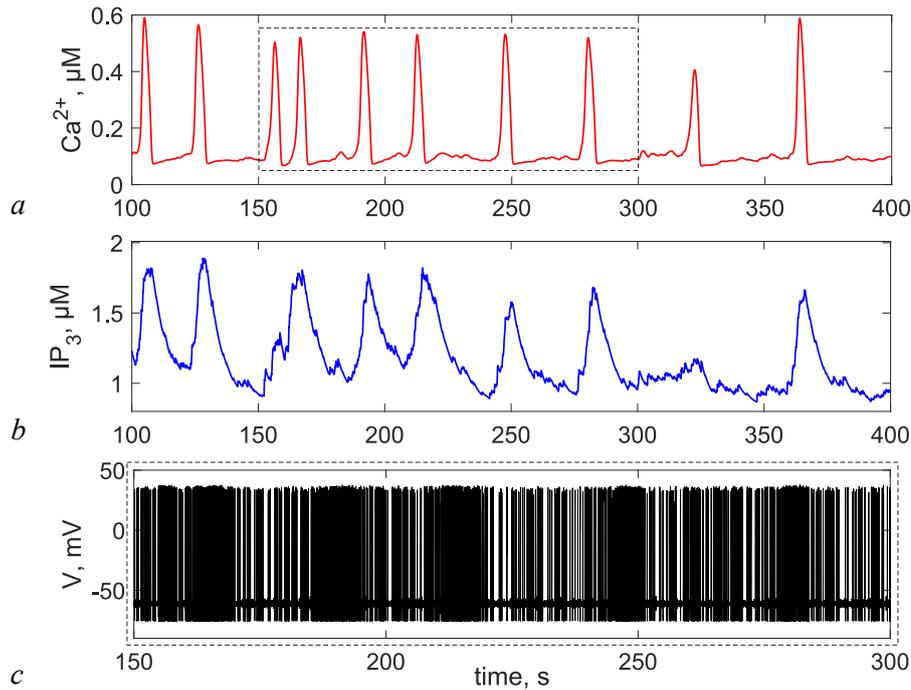


Рис. 2. Динамика нейрон-астроцитарного взаимодействия: пример реализации внутриклеточной концентрации  $\text{Ca}^{2+}$  (a) и ИТФ (b) астроцита, а также динамика мембранного потенциала постсинаптического нейрона (c) при  $g_{\text{astro}} = 6$ ,  $\lambda = 20$  Гц,  $\alpha_{\text{glu}} = 20 \text{ c}^{-1}$

Fig. 2. Dynamics of neuron-astrocyte interaction: an example of the implementation of intracellular concentration of  $\text{Ca}^{2+}$  (a) and  $\text{IP}_3$  (b) of an astrocyte, as well as dynamics of the membrane potential of a postsynaptic neuron (c) at  $g_{\text{astro}} = 6$ ,  $\lambda = 20$  Hz,  $\alpha_{\text{glu}} = 20 \text{ s}^{-1}$

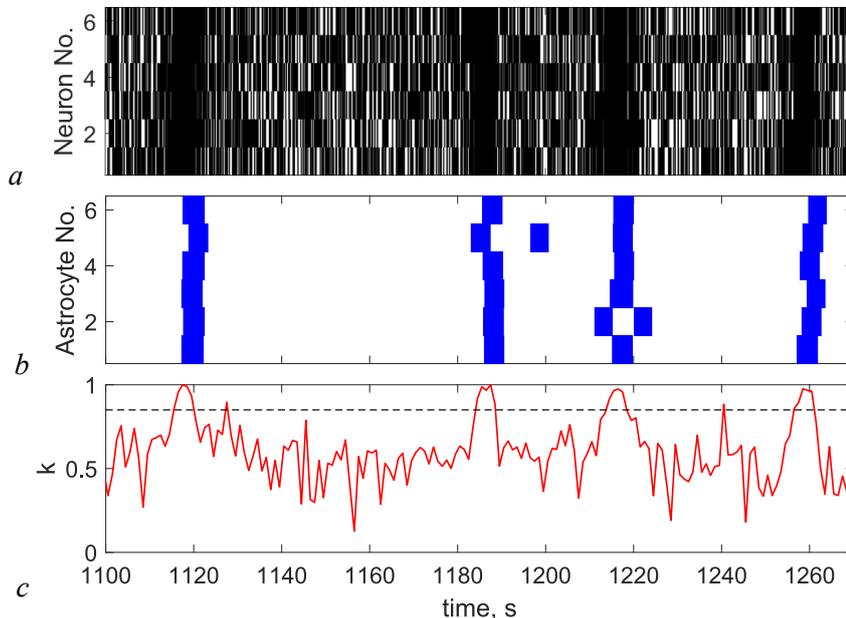


Рис. 3. Астроцит-индуцированная синхронизация в нейронной сети: растры нейронной (a) и астроцитарной (b) активности, когерентность нейронной сети в окне 1500 мс (c) при  $g_{\text{astro}} = 6$ ,  $\lambda = 20$  Гц,  $\alpha_{\text{glu}} = 20 \text{ c}^{-1}$ . Пунктирной линией обозначен уровень, по которому определялась ширина пиков когерентности

Fig. 3. Astrocyte-induced synchronization in a neural network: raster plots of neuronal (a) and astrocytic (b) activity, coherence of the neural network in a window of 1500 ms (c) at  $g_{\text{astro}} = 6$ ,  $\lambda = 20$  Hz,  $\alpha_{\text{glu}} = 20 \text{ s}^{-1}$ . The dotted line indicates the level by which the width of the coherence peaks was determined

активности нейронной сети за счёт связи увеличивается частота генерации  $\text{Ca}^{2+}$ -сигналов в астроцитах (рис. 4, *a*) и, соответственно, частота коррелированных паттернов (уменьшается период следования пиков когерентности, рис. 4, *d*). Полученные характеристики когерентности активности нейронной сети показали, что при увеличении параметра  $\lambda$  также растёт максимальное значение (рис. 4, *b*) и длительность (рис. 4, *c*) синхронизации. При достаточно больших значениях частоты внешнего воздействия значительно увеличивается средняя частота кальциевых сигналов в астроцитарной сети и количество пиков когерентности, в результате чего среднее максимальное значение пиков,  $k_{\max}$ , немного снижается.

Для анализа влияния астроцитов на синхронизацию активности нейронов была исследована зависимость когерентности сигнализации нейронной сети от эффективности астроцитарной регуляции синаптической передачи ( $g_{\text{astro}}$ ). Астроцит-индуцированное усиление синаптической передачи приводит к увеличению частоты генерации ПД нейронами. В свою очередь, повышение частоты нейронной сети приводит к росту  $\text{Ca}^{2+}$ -активности астроцитов (рис. 5, *a*). Анализ характеристик когерентности нейронной сети показал, что усиление астроцитарного воздействия приводит к усилению синхронизации в нейронном ансамбле: увеличивается максимальное значение величины  $k$  (рис. 5, *b*), а также ширина пиков когерентности (рис. 5, *c*). При этом период пиков уменьшается (рис. 5, *d*).

Также в модели была исследована зависимость характеристик коррелированных паттернов активности нейронной сети от параметра  $\alpha_{\text{glu}}$ , моделирующего степень влияния нейронов на астроциты. Усиление воздействия нейронов приводит к росту  $\text{Ca}^{2+}$ -активности в астроцитарной сети (рис. 6, *a*), что, в свою очередь, влияет на синхронизацию в нейронном ансамбле. Полученные результаты показали, что при увеличении параметра  $\alpha_{\text{glu}}$  максимальное значение (рис. 6, *b*),

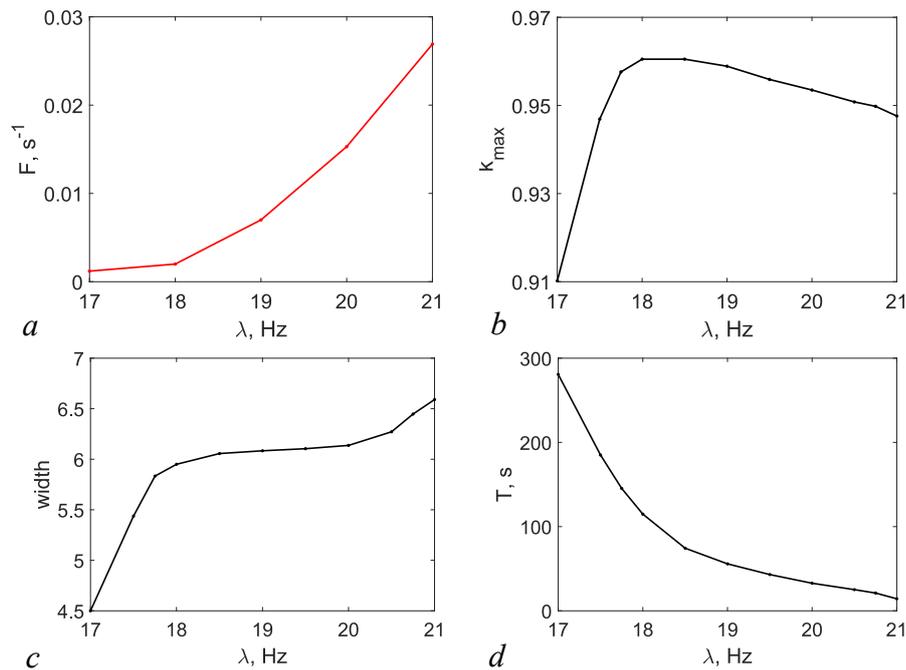


Рис. 4. Динамика нейрон-астроцитарной сети в зависимости от средней частоты внешнего шумового воздействия  $\lambda$  при  $g_{\text{astro}} = 6$ ,  $\alpha_{\text{glu}} = 20 \text{ c}^{-1}$ : средняя частота генерации  $\text{Ca}^{2+}$ -сигналов в астроцитах (*a*), максимальное значение (*b*), ширина (*c*) и период следования (*d*) пиков когерентности нейронной сети

Fig. 4. Dynamics of the neuron-astrocyte network depending on the average frequency of external noise stimulation  $\lambda$  at  $g_{\text{astro}} = 6$ ,  $\alpha_{\text{glu}} = 20 \text{ s}^{-1}$ : the average frequency of generation of  $\text{Ca}^{2+}$  signals in astrocytes (*a*), the maximum value (*b*), width (*c*) and period (*d*) of the coherence peaks of the neural network

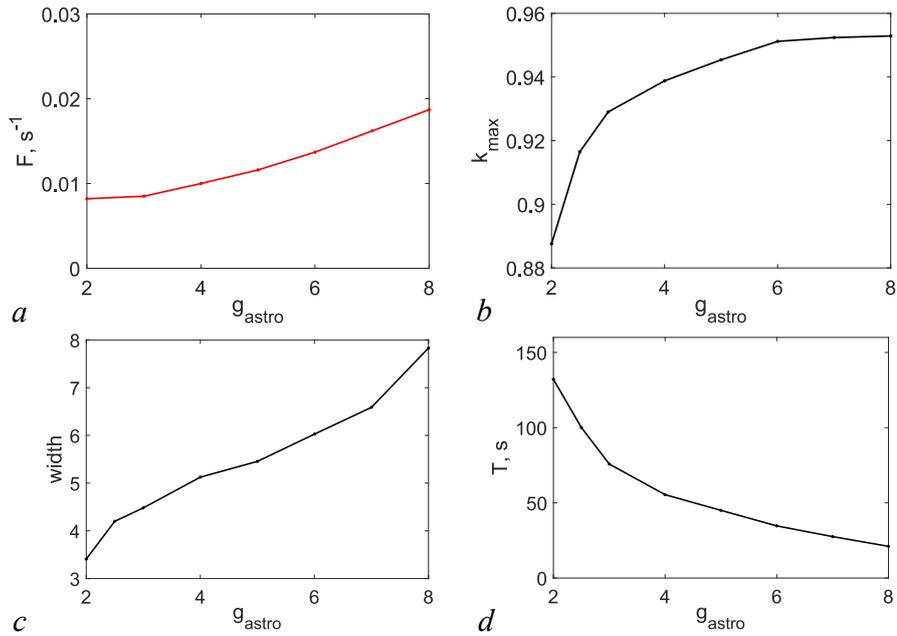


Рис. 5. Зависимость активности нейрон-астроцитарной сети от эффективности астроцитарной регуляции синаптической передачи  $g_{astro}$  при  $\lambda = 20$  Гц,  $\alpha_{glu} = 20 s^{-1}$ : средняя частота генерации  $Ca^{2+}$ -сигналов в сети астроцитов (a), максимальное значение (b), ширина (c) и период следования (d) пиков когерентности нейронов

Fig. 5. Dependence of the neuron-astrocytic network activity on the strength of astrocytic regulation of synaptic transmission  $g_{astro}$  at  $\lambda = 20$  Hz,  $\alpha_{glu} = 20 s^{-1}$ : the average frequency of generation of  $Ca^{2+}$  signals in the astrocyte network (a), the maximum value (b), width (c) and period (d) of the coherence peaks of neurons

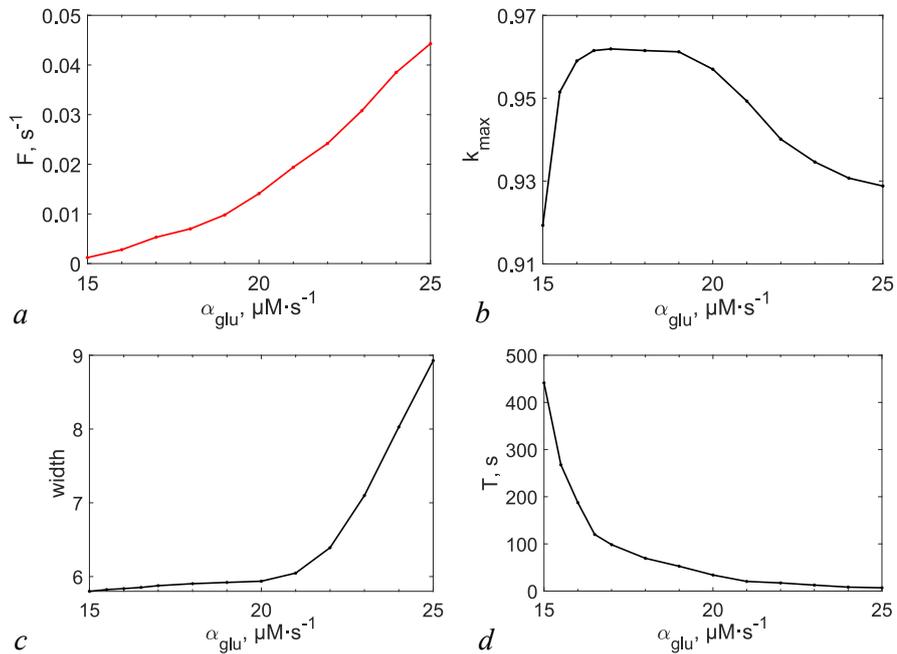


Рис. 6. Зависимость динамики нейрон-астроцитарной сети от степени влияния нейронов на астроциты  $\alpha_{glu}$  при  $\lambda = 20$  Гц,  $g_{astro} = 6$ : средняя частота генерации  $Ca^{2+}$ -сигналов в астроцитах (a), максимальное значение (b), ширина (c) и период следования (d) пиков когерентности нейронной сети

Fig. 6. Dependence of the neuron-astrocyte network dynamics on the influence strength of neurons on astrocytes  $\alpha_{glu}$  at  $\lambda = 20$  Hz,  $g_{astro} = 6$ : the average frequency of generation of  $Ca^{2+}$  signals in astrocytes (a), the maximum value (b), width (c) and period (d) of the coherence peaks of the neural network

ширина (рис. 6, *c*) и частота (рис. 6, *d*) пиков когерентности также увеличиваются. Однако при сильном воздействии нейронов на астроциты значительно увеличивается частота генерации  $\text{Ca}^{2+}$ -сигналов в астроцитарной сети и значение  $k_{\max}$  снижается (рис. 6, *b*).

### Заключение

В данной работе представлена модель малого нейрон-астроцитарного ансамбля, описывающая двунаправленное взаимодействие между нейронами и астроцитами. При выборе архитектуры модели нейронной сети учитывался тот факт, что в реальных нейронных сетях мозга преобладают локальные связи между клетками [25]. В модели рассматривается астроцитарная регуляция глутаматергической синаптической передачи, наблюдаемая экспериментально [26]. Показано, что астроцит-индуцированная регуляция синаптической передачи приводит к возникновению коррелированных во времени паттернов активности в нейронной сети. Были исследованы характеристики данных паттернов в зависимости от средней частоты внешней шумовой стимуляции, эффективности астроцитарной регуляции синаптической передачи, а также от степени влияния нейронов на астроциты. С использованием полученных реализаций была вычислена когерентность сигнализации нейронной сети и рассчитаны характеристики её пиков, а именно максимальное значение, ширина и период следования.

Показано, что частота внешнего шумового воздействия влияет на синхронизацию активности нейронной сети: с увеличением частоты возрастает максимальное значение синхронизации, частота и длительность коррелированных во времени паттернов активности нейронов. Такой же эффект наблюдался при увеличении силы астроцитарной регуляции синаптической передачи. Изменение степени влияния нейронов на астроциты также приводило к усилению синхронизации, однако при больших значениях параметра синхронизация снижалась.

На текущий момент существует несколько работ, посвящённых исследованию влияния астроцитарной регуляции синаптической передачи на синхронизацию нейронной активности. Например, Дж. Уэйд с соавторами [27] представили математическую модель двунаправленного нейрон-астроцитарного взаимодействия, состоящую из 10 нейронов “leaky integrate and fire” и 1 астроцита, динамика которого описывалась моделью Ли-Ринцеля. Модель учитывает глутамат-индуцированную активацию внесинаптических NMDARs на постсинаптическом нейроне, а также активацию пресинаптических метаболитных глутаматных рецепторов. Результаты исследования показали, что модуляция синаптической передачи, опосредованная астроцитарным глутаматом, вызывает координированную активность в отдалённых нейронах. В работе [28] с использованием компьютерного моделирования и данных экспериментов было продемонстрировано, что астроцитарная регуляция синаптической передачи изменяет уровень синхронизации в нейронной сети: увеличение силы астроцитарной регуляции приводит к снижению синхронизации нейронной активности. Исследование проводилось с использованием минимальной модели, состоящей из 2 нейронов Моррисиса–Лекара и 1 астроцита, которая в дальнейшем была расширена до биолого-правдоподобной модели нейрон-астроцитарной сети. В работе [29] было исследовано участие астроцита в синхронизации соседних нейронов за счёт высвобождения астроцитарного глутамата и D-серина и показано, что при высокочастотной стимуляции пресинаптических нейронов действие глутаматных рецепторов значительно повышает степень синхронизации в нейронной сети. Модель нейрон-астроцитарной сети, предложенная в работе [30], состоит из 125 нейронов, динамика которых описывается уравнениями Ижикевича, и 100 астроцитов. На основе данной модели было обнаружено, что в зависимости от степени нарушения синтеза глутамата, наблюдающегося при патологии, синхронизация нейронных сетей может быть частично или полностью подавлена. В нашей работе впервые была исследована зависимость характеристик синхронной активности

нейронов, опосредованной астроцитами, от свойств внешней шумовой стимуляции, эффективности астроцитарной регуляции синаптической передачи и силы воздействия нейронов на астроциты.

Данная работа посвящена исследованию динамических механизмов взаимодействия малых нейронных и астроцитарных ансамблей методами биологоправдоподобного математического моделирования. Результаты, полученные в настоящей работе, могут быть верифицированы в экспериментальных исследованиях, посвящённых нейрон-астроцитарному взаимодействию на сетевом уровне. Приведём несколько примеров таких работ. В работе [31] исследуются изменения коллективной активности нейронных и астроцитарных сетей *in vivo* при возникновении эпилептических припадков. Во время эксперимента регистрировалась электрическая активность нейронов при помощи микроэлектрода, а также кальциевая нейронная активность с помощью генетически кодируемых кальциевых индикаторов. Использование двухфотонной кальциевой визуализации позволило отслеживать активность и функциональные связи отдельных нейронов и астроцитов в нескольких областях мозга. Уровень высвобождаемого глутамата регистрировался при помощи флуоресцентного глутаматного индикатора. Для усиления воздействия астроцитов на нейроны использовалась оптогенетическая активация глиальных клеток. Благодаря гЭп-контактам между астроцитами кальциевые сигналы распространяются по астроцитарным сетям, в результате чего астроциты способны регулировать активность целых доменов нейронных сетей. В данной работе было показано, что активация астроцитарных сетей приводит к значительному увеличению нейронной активности благодаря действию глутамата и гЭп-контактам между астроцитами. М. Гóмес–Гонсало с соавторами исследовали взаимосвязь между повышением уровня  $Ca^{2+}$  в астроцитах и медленными входными токами (SICs) в нейронах срезов гиппокампа мышей [32]. При увеличении внутриклеточной концентрации  $Ca^{2+}$  в астроцитах происходит высвобождение глутамата, что, в свою очередь, приводит к активации NMDARs на мембране постсинаптических нейронов и генерации SICs. Для измерения электрической активности нейронов в данной работе использовался метод «патч-кламп», а кальциевые сигналы в астроцитах регистрировались при помощи флуоресцентной микроскопии. Для анализа влияния глутамата на динамику SICs использовались стимуляторы и блокаторы трансммиттеров. В работе [33] с использованием кальциевой визуализации было проведено исследование сетей пирамидальных клеток из области CA3 культур гиппокампа и показано, что астроцит-индуцированная активация пресинаптических mGluRs I и II групп приводит к коррелированным во времени паттернам активности нейронов. Было также обнаружено, что ингибирование кальциевой сигнализации в астроцитах посредством внутриклеточной инъекции кальциевого хелатора значительно подавляло синхронизацию нейронных сетей.

Представленная в данной работе модель позволяет исследовать влияние различных параметров нейрон-астроцитарного взаимодействия, в частности, астроцитарной модуляции синаптической передачи, на характеристики коррелированных во времени паттернов активности нейронов. Исследование пространственной синхронизации в нейрон-глиальных сетях мозга имеет большое значение для диагностики и лечения нейродегенеративных заболеваний, а предложенная модель может стать хорошим инструментом для количественной оценки влияния различных параметров на коллективную динамику нейрон-астроцитарных сетей мозга.

## References

1. Hoppensteadt FC, Izhikevich EM. Oscillatory neurocomputers with dynamic connectivity. *Physical Review Letters*. 1999;82(14):2983–2986. DOI: 10.1103/physrevlett.82.2983.
2. Hopfield JJ. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 1982;79(8):2554–2558. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554.
3. Nishikawa T, Hoppensteadt FC, Lai YC. Oscillatory associative memory network with perfect retrieval. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004;197(1–2):134–148. DOI: 10.1016/j.physd.2004.06.011.

4. DeMarse TB, Wagenaar DA, Blau AW, Potter SM. The neurally controlled animat: Biological brains acting with simulated bodies. *Autonomous Robots*. 2001;11(3):305–310. DOI: 10.1023/a:1012407611130.
5. Fromherz P. Semiconductor chips with ion channels, nerve cells and brain. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*. 2003;16(1):24–34. DOI: 10.1016/s1386-9477(02)00578-7.
6. Schnitzler A, Gross J. Normal and pathological oscillatory communication in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*. 2005;6(4):285–296. DOI: 10.1038/nrn1650.
7. Fries P. Rhythms for cognition: Communication through coherence. *Neuron*. 2015;88(1):220–235. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.09.034.
8. Lüttjohann A, van Luijtelaaar G. Dynamics of networks during absence seizure's on- and offset in rodents and man. *Frontiers in Physiology*. 2015;6:16. DOI: 10.3389/fphys.2015.00016.
9. Stam CJ. Modern network science of neurological disorders. *Nature Reviews Neuroscience*. 2014;15(10):683–695. DOI: 10.1038/nrn3801.
10. Guckenheimer J, Labouriau I. Bifurcation of the Hodgkin Huxley equations: A new twist. *Bulletin of Mathematical Biology*. 1993;55:937–952. DOI: 10.1007/BF02460693.
11. Rubin J, Terman D. Geometric analysis of population rhythms in synaptically coupled neuronal networks. *Neural Computation*. 2000;12(3):597–645. DOI: 10.1162/089976600300015727.
12. Kopell N, Ermentrout GB. Mechanisms of phase-locking and frequency control in pairs of coupled neural oscillators. In: Fielder B, editor. *Handbook on Dynamical Systems*. New York: Elsevier; 2002. P. 3–54.
13. Izhikevich EM. Which model to use for cortical spiking neurons? *IEEE Transactions on Neural Networks*. 2004;15(5):1063–1070. DOI: 10.1109/TNN.2004.832719.
14. Komarov MA, Osipov GV, Suykens JA. Variety of synchronous regimes in neuronal ensembles. *Chaos*. 2008;18(3):037121. DOI: 10.1063/1.2959340.
15. Postnov DE, Ryazanova LS, Zhirin RA, Mosekilde E, Sosnovtseva OV. Noise controlled synchronization in potassium coupled neural models. *International Journal of Neural Systems*. 2007;17(2):105–113. DOI: 10.1142/S012906570700097X.
16. Izhikevich EM, Gally JA, Edelman GM. Spike-timing dynamics of neuronal groups. *Cerebral Cortex*. 2004;14(8):933–944. DOI: 10.1093/cercor/bhh053.
17. Semyanov A, Kullmann DM. Modulation of GABAergic signaling among interneurons by metabotropic glutamate receptors. *Neuron*. 2000;25(3):663–672. DOI: 10.1016/s0896-6273(00)81068-5.
18. Kastanenka KV, Moreno-Bote R, De Pittà M, Perea G, Eraso-Pichot A, Masgrau R, Poskanzer KE, Galea E. A roadmap to integrate astrocytes into Systems Neuroscience. *Glia*. 2020;68(1):5–26. DOI: 10.1002/glia.23632.
19. Santello M, Toni N, Volterra A. Astrocyte function from information processing to cognition and cognitive impairment. *Nature Neuroscience*. 2019;22(2):154–166. DOI: 10.1038/s41593-018-0325-8.
20. Ullah G, Jung P, Cornell-Bell AH. Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1, 4, 5)-trisphosphate regeneration. *Cell Calcium*. 2006;39(3):197–208. DOI: 10.1016/j.ceca.2005.10.009.
21. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology*. 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
22. Izhikevich EM. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. Cambridge: MIT press; 2007. 441 p.

23. Kazantsev VB, Asatryan SY. Bistability induces episodic spike communication by inhibitory neurons in neuronal networks. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*. 2011;84(3 Pt 1):031913. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.031913
24. Wang XJ, Buzsáki G. Gamma oscillation by synaptic inhibition in a hippocampal interneuronal network model. *Journal of Neuroscience*. 1996;16(20):6402–6413. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.16-20-06402.1996.
25. Hellwig B. A quantitative analysis of the local connectivity between pyramidal neurons in layers 2/3 of the rat visual cortex. *Biological Cybernetics*. 2000;82(2):111–121. DOI: 10.1007/PL00007964.
26. Ni Y, Malarkey EB, Parpura V. Vesicular release of glutamate mediates bidirectional signaling between astrocytes and neurons. *Journal of Neurochemistry*. 2007;103(4):1273–1284. DOI: 10.1111/j.1471-4159.2007.04864.x.
27. Wade JJ, McDaid LJ, Harkin J, Crunelli V, Kelso JA. Bidirectional coupling between astrocytes and neurons mediates learning and dynamic coordination in the brain: a multiple modeling approach. *PLoS One*. 2011;6(12):e29445. DOI: 10.1371/journal.pone.0029445.
28. Amiri M, Hosseinmardi N, Bahrami F, Janahmadi M. Astrocyte-neuron interaction as a mechanism responsible for generation of neural synchrony: a study based on modeling and experiments. *Journal of Computational Neuroscience*. 2013;34(3):489–504. DOI: 10.1007/s10827-012-0432-6.
29. Pankratova EV, Kalyakulina AI, Stasenko SV, Gordleeva SYu, Lazarevich IA, Kazantsev VB. Neuronal synchronization enhanced by neuron-astrocyte interaction. *Nonlinear Dynamics*. 2019;97:647–662. DOI: 10.1007/s11071-019-05004-7.
30. Stasenko SV, Hramov AE, Kazantsev VB. Loss of neuron network coherence induced by virus-infected astrocytes: a model study. *Scientific Reports*. 2023;13(1):6401. DOI: 10.1038/s41598-023-33622-0.
31. Diaz Verdugo C, Myren-Svelstad S, Aydin E, Van Hoeymissen E, Deneubourg C, Vanderhaeghe S, Vancraeynest J, Pelgrims R, Cosacak MI, Muto A, Kizil C, Kawakami K, Jurisch-Yaksi N, Yaksi E. Glia-neuron interactions underlie state transitions to generalized seizures. *Nature Communications*. 2019;10(1):3830. DOI: 10.1038/s41467-019-11739-z.
32. Gómez-Gonzalo M, Zehnder T, Reque LM, Bezzi P, Carmignoto G. Insights into the release mechanism of astrocytic glutamate evoking in neurons NMDA receptor-mediated slow depolarizing inward currents. *Glia*. 2018;66(10):2188–2199. DOI: 10.1002/glia.23473.
33. Sasaki T, Ishikawa T, Abe R, Nakayama R, Asada A, Matsuki N, Ikegaya Y. Astrocyte calcium signalling orchestrates neuronal synchronization in organotypic hippocampal slices. *The Journal of Physiology*. 2014;592(13):2771–2783. DOI: 10.1113/jphysiol.2014.272864.



*Ермолаева Анастасия Викторовна* — родилась в Нижегородской области (1995). Окончила с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского по направлению «Фундаментальная информатика и информационные технологии» (2018) и аспирантуру ННГУ им. Н. И. Лобачевского по специальности «Радиофизика» (2022). Младший научный сотрудник кафедры прикладной математики Института информационных технологий, математики и механики. Научные интересы: нейронные сети, астроцитарные сети, нейрон-астроцитарное взаимодействие, математическое моделирование.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: anastasia.v.ermolaeva@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-9513-7434  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1176069



*Казанцев Виктор Борисович* — родился в 1973 году. Окончил радиофизический факультет ННГУ. Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005). Заведующий кафедрой нейротехнологий биологического факультета ННГУ (с 2005), профессор университета Иннополис (Казань), заведующий лабораторией нейромоделирования НИИ нейронаук СамГМУ (Самара). Область научных интересов: нейронаука, математические модели нейронов и нейронных сетей, нейрогибридные и нейроморфные системы, нейроинтерфейсы, нейрон-глиальные взаимодействия, колебания и волны в нейродинамике. Имеет более 150 научных публикаций в российских и зарубежных реферируемых изданиях. Автор нескольких глав в книгах и монографиях, множества патентов и учебно-методических разработок. Под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций, научный консультант 2 докторских диссертаций. Руководитель ведущей научной школы «Нелинейная динамика сетевых нейросистем: фундаментальные аспекты и приложения» в рамках гранта Президента РФ 2020–2021.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр-кт Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: kazantsev@neuro.nnov.ru  
ORCID: 0000-0002-2881-6648  
AuthorID (eLibrary.Ru): 29851



*Гордлеева Сусанна Юрьевна* — родилась в 1987 году. Окончила радиофизический факультет ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Доктор физико-математических наук (2022), профессор кафедры нейротехнологий ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Лауреат премии Президента РФ в области науки и инноваций для молодых ученых за 2023 год. Область научных интересов: нейронаука, биофизика, нелинейная динамика, математические модели нейронов и нейрон-астроцитарных сетей, анализ ЭЭГ, нейроинтерфейсы.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: gordleeva@neuro.nnov.ru  
ORCID: 0000-0002-7687-3065  
AuthorID (eLibrary.Ru): 677041



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003147  
EDN: ANWDXK

### Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации в задаче контекстно-зависимого принятия решения\*

Р. А. Кононов<sup>1,2</sup>✉, О. В. Масленников<sup>1,2</sup>, В. И. Некоркин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉r.kononov@ipfran.ru, olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 28.06.2024, принята к публикации 4.09.2024,  
опубликована онлайн 6.12.2024, опубликована 31.03.2025

**Аннотация.** Цель данной работы — исследовать динамические механизмы решения рекуррентными нейронными сетями когнитивной задачи двухальтернативного выбора с контекстом, вырабатываемые в процессе обучения с подкреплением, и развить методологию анализа таких моделей на основе теории динамических систем. **Методы.** Построен ансамбль нейросетей с кусочно-линейной функцией активации. Модели оптимизировались с помощью метода обучения с подкреплением — проксимального обновления стратегии. Структура испытания с постоянными стимулами в течение длительного этапа позволяет трактовать входы в качестве параметров системы и рассматривать систему как автономную на конечных временных интервалах. **Результаты.** Выявлен и описан динамический механизм двухальтернативного выбора в терминах аттракторов автономных систем. Описаны возможные типы аттракторов в рассматриваемой модели и изучено распределение типов аттракторов в ансамбле моделей относительно параметров когнитивной задачи. В полученных сетях выявлено устойчивое по ансамблю моделей разделение на функциональные популяции. Исследован процесс эволюции состава данных популяций в процессе обучения. На основе полученного понимания динамического механизма была сконструирована двумерная сеть, решающая упрощенную задачу двухальтернативного выбора без контекста. **Заключение.** Предложенный подход позволяет качественно описать механизм решения задачи в терминах аттракторов. Подобное описание позволяет исследовать динамику функциональных моделей и выделять стоящие за динамическими объектами популяции. Данный подход позволяет отслеживать эволюцию аттракторов системы и соответствующих популяций в процессе обучения.

**Ключевые слова:** рекуррентная нейронная сеть, обучение с подкреплением, когнитивная задача, аттрактор, популяционная динамика.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-72-10088.

**Для цитирования:** Кононов Р. А., Масленников О. В., Некоркин В. И. Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации в задаче контекстно-зависимого принятия решения // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 249–265. DOI: 10.18500/0869-6632-003147. EDN: ANWDXK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

\*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нейроинформатика — 2024».

## Dynamics of recurrent neural networks with piecewise linear activation function in the context-dependent decision-making task\*

R. A. Kononov<sup>1,2</sup>✉, O. V. Maslennikov<sup>1,2</sup>, V. I. Nekorkin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉r.kononov@ipfran.ru, olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Received 28.06.2024, accepted 4.09.2024, available online 6.12.2024, published 31.03.2025

**Abstract.** *Purpose.* This paper aims to elucidate the dynamic mechanism underlying context-dependent two-alternative decision-making task solved by recurrent neural networks through reinforcement learning. Additionally, it seeks to develop a methodology for analyzing such models based on dynamical systems theory. *Methods.* An ensemble of neural networks with piecewise linear activation functions was constructed. These models were optimized using the proximal policy optimization method. The trial structure, featuring constant stimuli over extended periods, allowed us to treat inputs as system parameters and consider the system as autonomous during finite time intervals. *Results.* The dynamic mechanism of two-alternative decision-making was uncovered and described in terms of attractors of autonomous systems. The possible types of attractors in the model were characterized, and their distribution within the ensemble of models relative to the cognitive task parameters was studied. A stable division into functional populations was observed in the ensemble of models, and the evolution of these populations' composition was examined. *Conclusion.* The proposed approach enables a qualitative description of the problem-solving mechanism in terms of attractors, facilitating the study of functional model dynamics and identification of populations underlying dynamic objects. This methodology allows for tracking the evolution of system attractors and corresponding populations during the learning process. Furthermore, based on this understanding, a two-dimensional network was developed to solve a simplified context-free two-alternative decision problem.

**Keywords:** recurrent neural network, reinforcement learning, cognitive task, attractor, population dynamics.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Science Foundation, grant № 23-72-10088.

**For citation:** Kononov RA, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Dynamics of recurrent neural networks with piecewise linear activation function in the context-dependent decision-making task. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(2): 249–265. DOI: 10.18500/0869-6632-003147

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Математические модели нейронных сетей — объект исследования как минимум двух крупных направлений: вычислительной нейронауки и машинного обучения. В каждом из этих направлений нейросети рассматриваются со своей точки зрения и с определенным набором методов. Оба указанных способа изучения нейронных сетей уходят своими корнями в общую идею математически описать информационные функции нервной системы и использовать полученные знания в прикладных целях. Исторически в каждом направлении были выработаны свойственные именно ему методы и подходы, однако всегда наблюдался взаимный интерес и попытка заимствовать идеи из соседней области. Такая тенденция сближения особенно ярко наблюдается в последнее десятилетие, когда в области машинного обучения всё чаще делаются попытки включать в модели ранее игнорируемые свойства биологических нейронных сетей (например, спайковую динамику, локальные правила обучения и др.) с целью построения энергоэффективных систем нейроморфного искусственного интеллекта. С другой стороны, в вычислительной нейронауке также всё

\*The paper presents materials of a talk given at the conference “Neuroinformatics — 2024”.

больше распространяются примеры успешного применения методов машинного обучения, причём не только для обработки высокоразмерных данных, но и для построения моделей нового класса — функциональных искусственных нейронных сетей [1–5]. В такие модельные сети закладываются определенные аспекты биологического прототипа (например, рекуррентная структура связей, спайковая динамика, принцип Дейла о соотношении возбуждающих/тормозных синапсов и др.), и далее они настраиваются методами машинного обучения на задачах, основанных на экспериментах сенсомоторного преобразования лабораторными животными [1, 3, 6–12]. В экспериментах изучается, как сенсорные и поведенческие переменные отражаются в активности нейронов различных отделов мозга. Одним из ключевых достижений такого анализа стал тот обнаруженный факт, что электрохимическая активность нейронных популяций при выполнении испытуемыми животными целевых задач происходит в соответствующем многомерном фазовом пространстве в окрестности низкоразмерных многообразий [13–15]. Свойства данных многообразий определяются как структурными и динамическими характеристиками нейронных сетей, так и параметрами входных стимулов решаемых задач. Для исследования базовых принципов в основе этого явления как раз и разрабатываются функциональные нейронные сети. В случае рекуррентных связей полученные после обучения сети являются многомерными динамическими системами, которые можно анализировать методами нелинейной динамики, с помощью которых можно сопоставить траектории фазового пространства с параметрами решаемой задачи [16–20].

Рекуррентные искусственные нейронные сети с кусочно-линейной функцией активации — один из наиболее распространённых классов моделей в рамках описанного подхода. Они вычислительно просты и имеют ясную нейробиологическую интерпретацию. Кроме того, модели данного класса часто применяются в прикладных задачах машинного обучения, что значительно расширяет арсенал методов оптимизации. Несмотря на кажущуюся простоту и распространённость, зачастую такие модели остаются своего рода «чёрным ящиком», и лишь в редких случаях исследователи анализируют механизмы их внутренней динамики [21].

Среди широкого набора методов машинного обучения можно выделить три наиболее распространённых: обучение *с учителем*, *без учителя* и *с подкреплением*. Обучение с учителем — наиболее известный класс алгоритмов, и хотя есть множество работ на его основе, которые пролили свет на некоторые детали динамики нейронных сетей [4, 7, 16, 18, 22], данный метод биологически нерелевантен, и интерес представляет лишь непосредственно сама обученная сеть. Обучение с подкреплением, в свою очередь, опирается при обучении на те же данные, что и биологический агент — на сигнал награды, поэтому интерес для исследования представляет также сам процесс обучения модели.

В данной работе обучен с подкреплением ансамбль рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации. Выделены популяции нейронов, которые реализуют динамические механизмы, отвечающие за решение модельной когнитивной задачи — контекстно-зависимого двухальтернативного выбора, а также изучена эволюция популяций в процессе обучения.

## 1. Когнитивная задача двухальтернативного выбора с контекстом

В качестве целевой в данной работе выбрана задача контекстно-зависимого двухальтернативного выбора [7], которая в экспериментах когнитивной нейронауки применяется для изучения свойств кодирования перцептивных стимулов, рабочей памяти и принятия решения. В прототипном биологическом эксперименте испытуемому животному (как правило, обезьяне) демонстрируют экран с двигающимися точками, имеющими два признака: цвет (один из двух) и выделенное направление движения (одно из двух). В начале каждого испытания испытуемому подается специальный сигнал контекста, который информирует о том, какой признак

в сенсорном сигнале нужно выделить. В конце испытания животное сообщает движением глаз о преобладающем цвете или о преобладающем направлении движения в зависимости от контекста.

В нашей работе в качестве агента выступает нейронная сеть, для которой сенсорные сигналы, поступающие от среды в каждый момент времени, моделировались вектором

$$\mathbf{s}_t = (F, A_1, A_2, B_1, B_2, C_A, C_B), \quad \mathbf{s}_t \in \mathbb{R}^7. \quad (1)$$

Здесь  $F \in \{0, 1\}$  — сигнал фиксации, сообщающий о начале и конце испытания,  $A_{1,2} \in [0, 1]$  — информационные сигналы, моделирующие долю точек одного цвета и долю точек другого,  $B_{1,2} \in [0, 1]$  — аналогичная пара для признака движения,  $C_{A,B} \in \{0, 1\} : C_A \neq C_B$  — бинарные сигналы контекста,  $t$  — дискретное время.

При обучении и тестировании моделей на входные сигналы накладывался шум  $\mathcal{N}(0.1)$ .

Параметрами испытания выступали когерентности пар стимулов и контекст:

$$\text{coh}_a = A_1 - A_2, \quad \text{coh}_b = B_1 - B_2, \quad C_A, \quad C_B.$$

Агент должен сравнивать  $A_1$  и  $A_2$  в случае  $C_A = 1$  и  $B_1$  и  $B_2$  в случае  $C_B = 1$ .

Помимо сенсорных сигналов, в каждый момент времени также генерируется скалярный сигнал награды  $r_t$ .

В одном испытании можно выделить 4 этапа, в течение каждого из которых компоненты вектора  $\mathbf{s}_t$  — постоянный сигнал с наложенным на него нормальным шумом.

1. *Этап фиксации.* Этап, разделяющий испытания. Сигналов стимула нет, присутствуют только сигналы фиксации и контекста (пример  $\mathbf{s}_t = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ ).
2. *Этап стимулов.* Этап подачи стимулов. В дополнение к сигналам фиксации и контекста подаются также сигналы стимулов (пример  $\mathbf{s}_t = (1, 0.3, 0.7, 0.2, 0.8, 1, 0)$ ).
3. *Этап задержки.* Агент должен запомнить правильный ответ и держать его в памяти некоторое время. Сенсорные сигналы на этом этапе совпадают с сигналами этапа фиксации.
4. *Этап принятия решения.* На данном этапе от агента ожидается ответ. Все сенсорные сигналы, кроме сигнала контекста, равны нулю.

Решение сети — это один из 3 вариантов:  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = (\text{Фиксация}, \text{Первый стимул сильнее второго}, \text{Второй сильнее первого})$

В течение этапа фиксации от агента требуется выбирать  $\mathcal{A}_1$  в каждый момент времени, и в случае неверного ответа выдаётся небольшая отрицательная награда ( $r_t = -0.1$ ). Во время этапа принятия решения от агента ожидается ответ. Если на этапе стимулов когерентность пары стимулов, на которую указывает контекст испытания, была отрицательной, — ответ  $\mathcal{A}_2$ , иначе —  $\mathcal{A}_3$ . За правильный ответ агент получает награду ( $r_t = 1$ ). В остальные моменты времени награда  $r_t = 0$ .

В качестве агента выступала рекуррентная нейронная сеть из  $N$  нейронов, внутренняя динамика и выходы которой описываются системой

$$\begin{cases} \mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{U}\mathbf{s}_t + \mathbf{W}\mathbf{h}_t), \\ \mathbf{out}_t = \mathbf{O}\mathbf{h}_t, \end{cases}$$

$$\text{ReLU}(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  — рекуррентные веса сети,  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times 7}$  — входные веса сети,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$  — скрытое состояние сети или активность нейронов,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^7$  — вход сети,  $\mathbf{out} \in \mathbb{R}^3$  — отклик сети, а  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{3 \times N}$  — выходные веса сети.

Для получения дискретного ответа отклик интерпретировался как ненормированная логарифмическая вероятность. Нормировка проводилась с помощью функции Softmax:

$$d_j^t = \frac{e^{\text{out}_j^t}}{\sum_{k=1}^3 e^{\text{out}_k^t}}.$$

На основе полученного распределения вероятностей  $\mathbf{d}$  выбирался случайный ответ сети из  $\mathcal{A}$ .

## 2. Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации

В нашей работе мы рассматриваем динамику полносвязной рекуррентной сети с функцией активации ReLU. Динамика такой системы из  $N$  нейронов описывается следующим отображением:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{U}\mathbf{s}_t + \mathbf{W}\mathbf{h}_t). \quad (2)$$

Временная структура испытания такова, что на вход сети длительное время подаются постоянные стимулы. Это позволяет нам внутри одного этапа испытания рассматривать  $\mathbf{s} = \mathbf{U}\mathbf{s}_t$  в (2) как параметр системы, то есть рассматривать автономную динамику системы:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{s} + \mathbf{W}\mathbf{h}_t). \quad (3)$$

Мы можем разделить действие отображения (3) на шаг линейной системы и последующее применение ReLU к вектору состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_t &= \mathbf{s} + \mathbf{W}\mathbf{h}_t, \\ \mathbf{h}_{t+1} &= \text{ReLU}(\mathbf{g}_t). \end{aligned}$$

В случае если все компоненты вектора  $\mathbf{g}_t \geq 0$ :  $\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{g}_t$ , то есть в строго положительной области фазового пространства, динамика системы (3) совпадает с динамикой линейной системы без функции активации:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{s} + \mathbf{W}\mathbf{h}_t. \quad (4)$$

В системе (4) существует одна неподвижная точка:

$$\mathbf{h}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{W})^{-1}\mathbf{s}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  — единичная матрица.

Если все  $h_{1,2,\dots,N}^* > 0$ , то  $\mathbf{h}^*$  — неподвижная точка системы (3), причём единственная в строго положительной области фазового пространства (то есть все  $h_{1,2,\dots,N}^* > 0$ ). Иные неподвижные точки могут существовать только на границах этой области ( $\prod_{i=1}^N h_i = 0$ ).

Предположим, что в системе есть такая неподвижная точка. Так как она находится на границе положительной области, одна или несколько из компонент  $\mathbf{h}^*$  равны нулю. Пусть  $h_i^* = 0$ , тогда справедливо

$$\begin{bmatrix} h_1^* \\ h_2^* \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ h_{N-1}^* \\ h_N^* \end{bmatrix} = \text{ReLU} \left( \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,i} & \dots & W_{1,N} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \dots & W_{2,i} & \dots & W_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i,1} & W_{i,2} & \dots & W_{i,i} & \dots & W_{i,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & \dots & W_{N-1,i} & \dots & W_{N-1,N} \\ W_{N-1,1} & W_{N,2} & \dots & W_{N,i} & \dots & W_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^* \\ h_2^* \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ h_{N-1}^* \\ h_N^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_i \\ \dots \\ s_{N-1} \\ s_N \end{bmatrix} \right).$$

Если вычеркнуть из  $\mathbf{h}^*$  нулевую компоненту — получим неподвижную точку редуцированной системы, которую мы можем получить, вычеркнув в  $\mathbf{W}$   $i$ -е строку и столбец, а в  $\mathbf{s}$  —  $i$ -й элемент. Этой процедурой мы вычеркнем элементы, которые входили как слагаемые в уравнения других компонент с множителем  $h_i^* = 0$ , поэтому на остальные компоненты  $\mathbf{h}^*$  это не повлияет.

Так как все компоненты рассматриваемой траектории положительные, то опустим функцию ReLU и получим следующую систему:

$$\begin{bmatrix} h_1^* \\ \dots \\ h_{i-1}^* \\ h_{i+1}^* \\ \dots \\ h_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{1,1} & \dots & W_{1,i-1} & W_{1,i+1} & \dots & W_{1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i-1,1} & \dots & W_{i-1,i-1} & W_{i-1,i+1} & \dots & W_{i-1,N} \\ W_{i+1,1} & \dots & W_{i+1,i-1} & W_{i+1,i+1} & \dots & W_{i+1,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N,N} & \dots & W_{N,i-1} & W_{N,i+1} & \dots & W_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^* \\ \dots \\ h_{i-1}^* \\ h_{i+1}^* \\ \dots \\ h_N^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_{i-1} \\ s_{i+1} \\ \dots \\ s_N \end{bmatrix}.$$

Если неподвижная точка  $\mathbf{h}^*$  имеет несколько нулевых координат, то нужно повторить описанную процедуру для каждой нулевой компоненты. Полученную в результате проведенной процедуры систему вида (4) с матрицей рекуррентных связей  $\mathbf{W}_{\text{red.}}$  и вектором параметров  $\mathbf{s}_{\text{red.}}$  будем называть редуцированной относительно  $\mathbf{h}^*$ .

Условимся сохранять индексирование при проведении этой процедуры, тогда каждой неподвижной точке системы (3) можно сопоставить редуцированную линейную систему, в которой координаты этой точки ищутся как

$$\mathbf{h}_{\text{red.}}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{W}_{\text{red.}})^{-1} \mathbf{s}_{\text{red.}}. \quad (6)$$

Заполнив нулями пропущенные индексы в  $\mathbf{h}_{\text{red.}}^*$ , при условии, что для всех пропущенных индексов  $n$  изначальной системы выполнено

$$s_n + \sum_i h_i^{\text{red.}} W_{ni} \leq 0,$$

мы получим неподвижную точку изначальной системы (3). Заметим, что характер устойчивости неподвижной точки линейной системы (4) полностью описывается спектром собственных чисел матрицы весов  $\mathbf{W}$ . Условимся, что собственные числа  $\lambda$  отсортированы по убыванию их модуля, тогда если  $|\lambda_0| < 1$  — точка устойчивая, если  $|\lambda_0| > 1$ , но  $\exists n : |\lambda_n| < 1$  — точка седловая или же седло-фокус. Если все  $|\lambda_{1,2,\dots,N}| > 1$ , имеем неустойчивые фокус или узел.

Таким образом, можно каждой неподвижной точке системы (3) сопоставить единственную неподвижную точку  $\mathbf{h}_{\text{red.}}^*$  в системе вида (4) меньшей размерности. Характер устойчивости точки в полной системе (3) совпадает с характером устойчивости неподвижной точки в соответствующей ей редуцированной системе, но в окрестности точки при переходе от (4) к (3) могут появиться новые особые траектории.

В случае  $|\lambda_0| < 1$  устойчивые точки сохраняют свою устойчивость, а новые траектории не появляются.

В случае  $|\lambda_0| > 1$ ,  $\text{Im}(\lambda_0) = 0$ , на границах положительной области фазового пространства могут появиться новые неподвижные точки.

В случае  $|\lambda_0| > 1$ ,  $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$  в окрестности неустойчивого фокуса могут появиться устойчивые квазипериодические траектории.

Для иллюстрации описанных эффектов на рис. 1 даны фазовые портреты систем вида (4) (красным) и систем вида (3) (синим). На рис. 1, *a* неустойчивые сепаратрисы седла пересекаются с границами положительной области и на последних возникают устойчивые неподвижные точки. На рис. 1, *b, f* продемонстрировано появление устойчивой квазипериодической траектории вокруг неустойчивого фокуса. Причем на рис. 1, *f* в системе существует устойчивая квазипериодическая траектория, но нет глобальной устойчивости. Рис. 1, *c, d* иллюстрируют сохранение устойчивости.

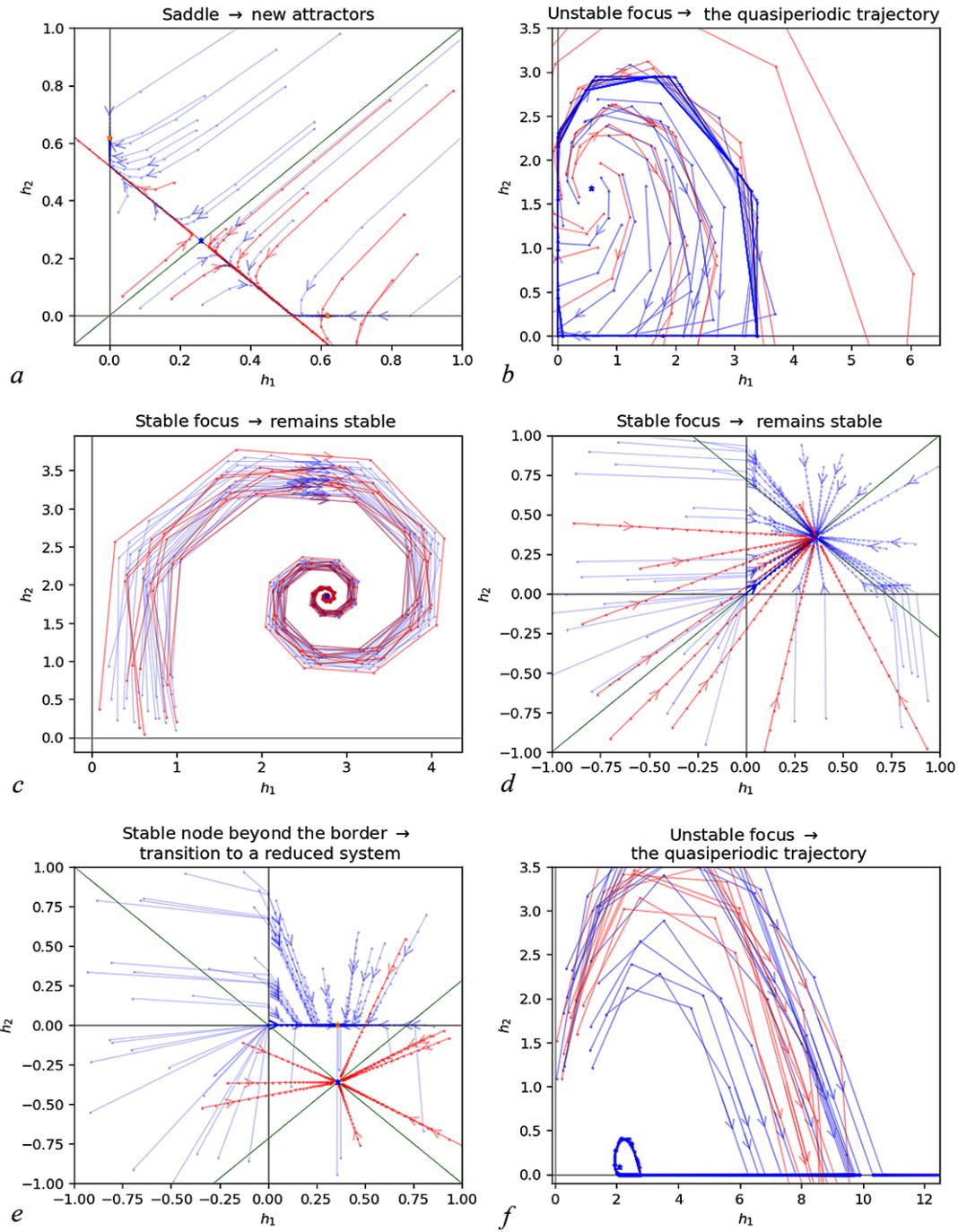


Рис. 1. Изменения фазовых траекторий при переходе от линейной системы к системе с ReLU на примере двумерной системы. Красные траектории — это траектории линейного отображения, а синие — отображения с ReLU. Все траектории выпущены из случайных точек в окрестности неподвижной точки (цвет онлайн)

Fig. 1. Phase trajectory changes during the transition from a linear system to a system employing the ReLU activation function, illustrated using a two-dimensional system. Red lines represent trajectories under linear mapping, while blue lines depict trajectories under ReLU mapping. All trajectories originate from random initial points in the vicinity of a fixed point (color online)

Рис. 1,  $e$  показывает, как устойчивая точка линейной системы за границей положительной области притягивает к этой границе траектории, и на ней появляется устойчивая неподвижная точка.

Заметим, что количество редуцированных систем конечно. Перебрав все возможные редуцированные системы и найдя в них неподвижные точки, можно найти все неподвижные точки системы (3). Число редуцированных систем  $N$ -мерной системы (3), полученное пересчётом всех комбинаций редуцируемых компонент, равно

$$2^N - 1.$$

Поэтому алгоритм полного обхода может быть применён только для систем с небольшим  $N$  или для отдельных систем с привлечением высокопроизводительных параллельных вычислений.

Более эффективно использовать сформулированные критерии для оценки редуцированных систем вдоль траектории исследуемой системы из численного эксперимента. Именно этот подход и продемонстрирован в следующем разделе.

### 3. Анализ ансамбля функциональных моделей

Мы обучили ансамбль из 89 моделей вида (2) с  $N = 250$  решению задачи, описанной в разделе 1. Веса моделей были инициализированы случайным равномерным распределением, как параметры для оптимизации выступали матрицы  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{O}$ .

Для обучения мы использовали алгоритм обучения с подкреплением — проксимальное обновление стратегии [23]. Данный алгоритм использует для оптимизации весов сигнал награды и не требует отдельного сигнала ошибки. Для градиентного спуска применялся алгоритм Adam [24]. Мы использовали реализацию алгоритма в пакете StableBaselines3, гиперпараметры указаны в Таблице. Количество шагов среды, по которым происходило обновление весов, 32000.

В процессе обучения и тестирования сети на входные сигналы задачи накладывался шум. Для исследования динамики рассматривалась активность сети в ответ на незашумлённые сигналы среды.

Критерием остановки выступало достижение сетью точности ответов 0.95. Под точностью подразумевается средняя вероятность выбора правильного ответа в наборе зашумлённых испытаний.

Мы исследовали аттракторы обученной системы, существующие внутри каждого из этапов испытания, и их взаиморасположение, лежащее в основе решения когнитивной задачи.

Для иллюстрации динамического механизма на рис. 2 дана первая главная компонента активности сети в течение серии испытаний. Для формирования рисунка сеть стартовала с одного и того же состояния, поэтому на первом этапе траектории совпадают. На этапе подачи стимулов активность сети сходится в окрестность неподвижной точки, положение которой определяется когерентностью испытания. На этапе задержки существует мультистабильность — на данном

Таблица. Гиперпараметры алгоритма обучения, с которыми обучался ансамбль

Table. Hyperparameters of the learning algorithm that the ensemble was trained with

PPO		Adam	
$\gamma$	0.99	$\beta_1$	0.9
$\lambda_{gae}$	0.95	$\beta_2$	0.999
$\epsilon$	0.2	learning rate	0.0003
ent coef	0	max grad norm	0.5
vf coef	0.5		

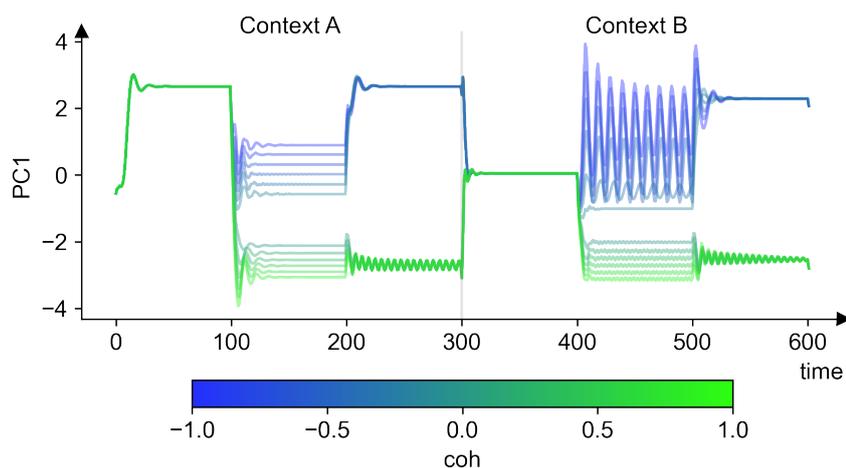


Рис. 2. Главная компонента активности сети в течение двух испытаний с разным контекстом. Сигналы задачи подавались без шума. Цветом обозначена когерентность основной пары стимулов в этих испытаниях. Этап испытания удлинён в 4 раза по сравнению с обучением (цвет онлайн)

Fig. 2. The principal component of network activity during two trials with different contexts. Task signals were transmitted without noise. Color represents the coherence of the primary stimulus pair in these trials. The trial is extended fourfold compared to the training phase (color online)

этапе в системе существует три аттрактора: по одному на каждый ответ системы. В зависимости от того, в бассейн какого из них изображающая точка пришла на прошлом этапе, активность притягивается к одному из этих аттракторов. Заметим, что в сети, приведённой для примера, аттрактор, соответствующий положительной когерентности, является квазипериодическим. Нулевая фиксация «сбрасывает» состояние сети, и в ней появляется третий аттрактор, соответствующий ответу фиксации.

Второе испытание — это испытание с теми же когерентностями, но другим контекстом. Можно видеть, что аттракторы, кодирующие одну и ту же когерентность в разных контекстах, могут быть разного типа.

При рассмотрении главных компонент или активности отдельных нейронов при выходе на аттрактор всегда встаёт вопрос того, завершился ли переходный процесс. Для исследования типов обнаруженных аттракторов мы применили описанный в первом разделе подход. На рис. 3 приведён пример активности, где одна и та же рекуррентная сеть выходит на аттракторы разного типа.

Для поиска аттракторов системы мы получали длинные траектории  $(\mathbf{0}, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_T)$  на каждом этапе, указанном на рис. 3, *a*. Чтобы убедиться в том, что система вышла в окрестность аттрактора, мы рассматривали редуцированную систему относительно активности  $\mathbf{h}_t$ . Активность сети нейронов на соответствующих этапах испытаний приведена на рис. 3, *b*. Знак координат неподвижной точки  $\text{sign}(\mathbf{h}_{\text{red.}}^*)$  для редуцированной системы относительно  $\mathbf{h}_t$  приведен на рис. 3, *c*. Если все координаты неподвижной точки редуцированной системы положительные и эта точка устойчива, то система вышла на аттрактор — неподвижную точку. Устойчивость точки определяется набором собственных чисел редуцированной системы, описывающей динамику активных нейронов. Собственные числа такой системы для последнего момента каждого из 6 этапов приведены на рис. 3, *d*. Часть траектории квазипериодического аттрактора лежит на границах положительной области, а неподвижная точка в этом случае имеет комплексно-сопряжённые собственные числа с модулем больше единицы.

Мы обнаружили, что вероятность найти квазипериодический аттрактор на плоскости когерентности распределена неравномерно. Для малых по модулю значений когерентности вероятность найти квазипериодический аттрактор значительно выше. Распределение вероятности

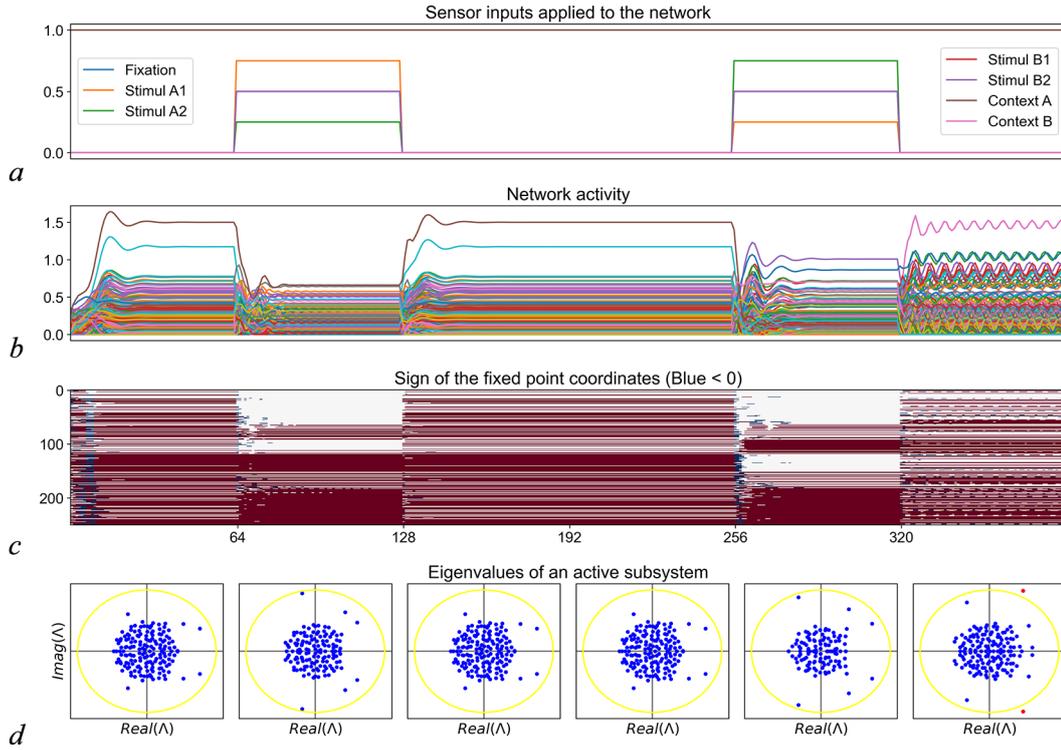


Рис. 3. *a* – Пример двух последовательных испытаний без периода принятия решения. *b* – Активность сети  $\mathbf{h}_t$  в течение данной пары испытаний. *c* – Знак активности  $\text{sign}(\mathbf{h}_t)$  во время испытаний. Белым цветом обозначен ноль, красным и синим – положительная и отрицательная активность соответственно. *d* – Собственные числа редуцированной системы для  $\mathbf{h}_t$ , где  $t \in (64, 128, 192, 256, 320)$  (цвет онлайн)

Fig. 3. *a* – Example of two consecutive trials without a decision period. *b* – Network activity  $\mathbf{h}_t$  during these two trials. *c* – Sign of  $\mathbf{h}_t$  during this pair of trials. White indicates zero, while red and blue represent positive and negative values, respectively. *d* – Eigenvalues of the reduced system calculated for  $\mathbf{h}_t$  at time points  $t \in (64, 128, 192, 256, 320)$  (color online)

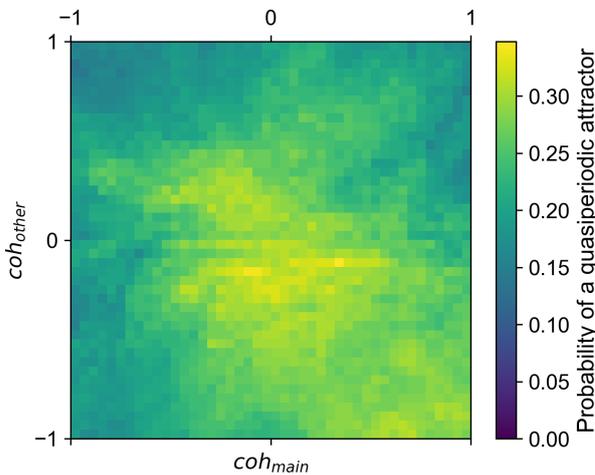


Рис. 4. Вероятность того, что пару когерентностей на этапе стимулов будет кодировать квазипериодический аттрактор, посчитанная для обученного ансамбля (цвет онлайн)

Fig. 4. The probability of encoding a pair of coherences during the stimulus period by a quasi-periodic attractor (color online)

того, что пару когерентностей будет кодировать квазипериодический аттрактор, дано на рис. 4. Данное распределение построено по обученному нами ансамблю из 89 сетей. Для получения вероятности на систему подавался длительный постоянный вход, соответствующий входам с определённой парой когерентностей, по вышеописанному критерию определялся тип аттрактора системы при таком значении входа. Для каждой сети таким образом была получена пара бинарных матриц  $\mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B \in \mathbb{B}^{\text{coh}_A \times \text{coh}_B}$ . Чтобы получить усреднённую матрицу  $\mathbf{V}$ , перейдём от конкретных когерентностей к основной и побочной, транспонируя второе слагаемое:  $\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B^T)$ . На рис. 4 представлена матрица, усреднённая по всем  $M$  моделям:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{V}_i.$$

Мы разделили нейроны сети на 4 популяции на основании следующего критерия: участвует ли каждый из них в стационарной динамике во время удлинённого этапа стимулов для определённого знака когерентности.

1. Не участвует в стационарной динамике.
2. Участвует в стационарной динамике в испытаниях с  $coh < 0$ .
3. Участвует в стационарной динамике в испытаниях с  $coh > 0$ .
4. Участвует в стационарной динамике в испытаниях с любой  $coh$ .

Разделение нейронов происходило на основе активности в течение серии испытаний с удлинёнными этапами, рассматривалась только активность во второй половине этапа. Эволюция состава этих популяций дана на рис. 5. График по оси абсцисс нормирован по точности сети в процессе обучения, при этом точки снимались через равное количество шагов отображения; ниже даны модули собственных чисел в каждой точке. Плотный кластер точек на уровне 0.5 демонстрирует, что на этом уровне находится плато по точности. Можно видеть, что популяции 2 и 3 появляются на этом плато и растут вместе с точностью. Между этими популяциями в обученной сети существует определённая структура связности, четко различимая на графике матрицы рекуррентных весов.

В процессе обучения равномерно распределённая матрица становится ближе к нормальному распределению. В спектре матрицы смежности появляются собственные числа больше единицы по модулю.

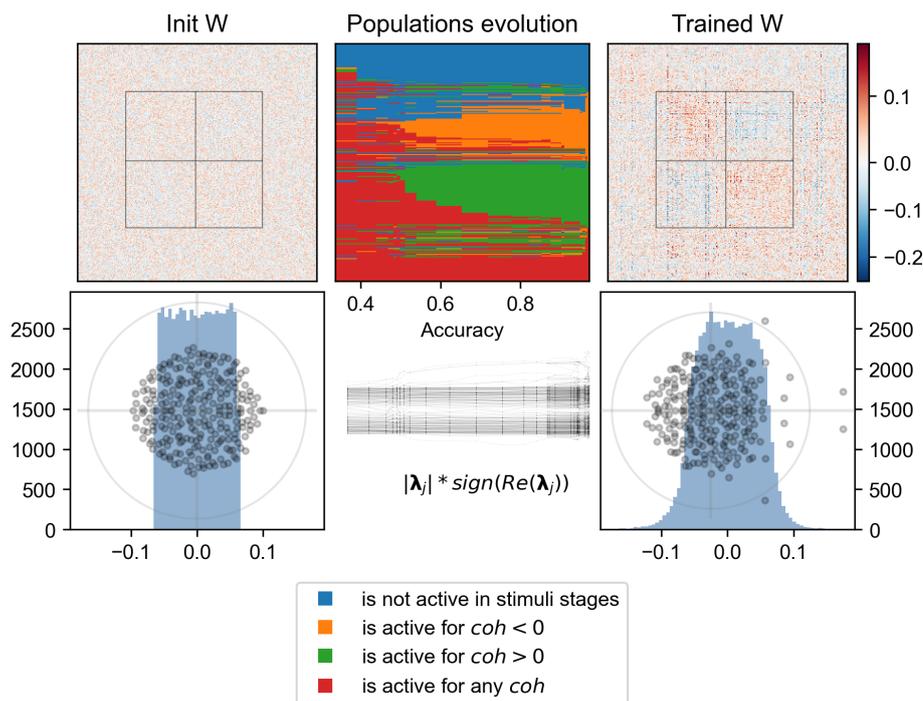


Рис. 5. Эволюция популяций нейронов, селективных в стационарной активности относительно параметров испытания. Нейроны в матрицах смежности отсортированы так же, как на картинке с эволюцией. В нижней строке показано распределение всех рекуррентных весов и собственные числа на комплексной плоскости для инициализации и обученной сети. Между распределениями показана эволюция модулей собственных чисел (цвет онлайн)

Fig. 5. Evolution of neuronal populations exhibiting selectivity for stationary activity in relation to trial parameters. The lower panel shows the distribution of all recurrent weights and eigenvalues in the complex plane at both initialization and after training. The changes in the magnitudes of eigenvalues across these distributions are depicted (color online)

#### 4. Построение двумерной сети, решающей когнитивную задачу двухальтернативного выбора

В данном разделе на основе полученных результатов построим двумерную сеть вида (2), способную решать упрощённую задачу двухальтернативного выбора без контекста. Эта задача фактически представляет собой вышеописанную задачу, в которой отсутствуют сигналы контекста и вторая пара стимулов:  $\mathbf{s}_t^{\text{simpl}} = (F, A_1, A_2)$ . Модель описывается системой двух уравнений вида

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{U}\mathbf{s}_t^{\text{simpl}} + \mathbf{W}\mathbf{h}_t).$$

Подобная низкоразмерная система наглядно демонстрирует динамический механизм решения рассматриваемой задачи. Для однозначного задания модели необходимо задать входные веса  $\mathbf{U}$  и рекуррентные веса  $\mathbf{W}$ .

Для того чтобы на фазовой плоскости возникла мультистабильность, выберем параметры таким образом, чтобы в положительной области фазовой плоскости была седловая точка  $\mathbf{p}^{\text{sad}}$ . Представим матрицу рекуррентных весов в виде

$$\mathbf{W}_{\text{rec}} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \\ | & | \end{bmatrix}^T,$$

где  $v_{1,2}$  — собственные векторы,  $\lambda_{1,2}$  — собственные числа. Вектор параметров  $\mathbf{s} = \mathbf{U}\mathbf{s}_t^{\text{simpl}}$  определяет координаты неподвижной точки в линейной системе (4). Запишем произведение матрицы входных весов и входного сигнала как сумму трёх векторов:

$$\mathbf{U}\mathbf{s}_t^{\text{simpl}} = \mathbf{f}F + \mathbf{c}A_1 + \mathbf{d}A_2.$$

Тогда в матрицу входных весов эти векторы войдут в виде столбцов

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{f} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если в линейной системе вида (4) есть седловая точка и мы хотим получить систему с функцией ReLU, в которой есть устойчивая неподвижная точка, необходимо чтобы одна из координат седловой точки была отрицательной. В примере, указанном на рис. 6, отрицательной координатой является  $h_2$ . Траектория, выпущенная из окрестности неподвижной точки (например,  $p^{+1}$ ), будет двигаться вдоль неустойчивого собственного вектора вправо, пересекая границу положительной области фазового пространства  $h_1 = 0$ , «прижмётся» к ней и асимптотически будет стремиться к устойчивой неподвижной точке на этой границе. Выберем параметры таким образом, чтобы неподвижные точки линейной системы в период стимулов для всех когерентностей имели одну и ту же координату  $h_1$ .

Обозначим координаты неподвижной точки линейной системы для конкретной когерентности  $\text{coh}$  как  $\mathbf{p}^{\text{coh}}$ . Согласно (6) выразим векторы параметров на каждом из этапов испытания через координаты неподвижной точки линейной системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{\text{fix.}} &= \mathbf{f} = (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^{\text{sad.}}, \\ \mathbf{s}^{\text{coh}=-1} &= \mathbf{f} + \mathbf{c} = (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^{-1}, \\ \mathbf{s}^{\text{coh}=0} &= \mathbf{f} + \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^0, \\ \mathbf{s}^{\text{coh}=+1} &= \mathbf{f} + \mathbf{d} = (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^{+1}. \end{aligned}$$

Перейдем к уравнениям для векторов-столбцов матрицы входных весов:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^{\text{sad.}}, \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^- - \mathbf{f}, \\ \mathbf{d} &= (\mathbf{1} - \mathbf{W})\mathbf{p}^+ - \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Выберем направление собственных векторов матрицы  $\mathbf{W}$  таким образом, чтобы устойчивая сепаратриса  $\mathbf{p}^{\text{sad.}}$  пересекала ось  $h_1$  в устойчивой неподвижной точке  $\mathbf{h}_{\text{coh}=0}^*$ :

$$\mathbf{h}_{\text{coh}=0}^* = \left( \frac{s_1^{\text{coh}=0}}{W_{11} - 1}, 0 \right).$$

Таким образом, после перехода от этапа стимулов к этапу задержки изображающая точка притянется к одной из двух точек решения в зависимости от того, с какой стороны сепаратрисы она находится. Пример сети, созданной по описанному алгоритму:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU} \left( \begin{bmatrix} 0.7753 & -0.4109 \\ -0.4475 & 0.5196 \end{bmatrix} \mathbf{h}_t + \begin{bmatrix} 0.8602 & -0.8794 & -0.4684 \\ 1.3753 & -1.5826 & -1.1023 \end{bmatrix} \mathbf{s}_t \right). \quad (7)$$

Траектории данной системы в процессе решения пары испытаний с противоположными знаками когерентности приведены на рис. 6. Матрица весов полученной модели качественно повторяет модульную структуру описанных в разделе 3 популяций.

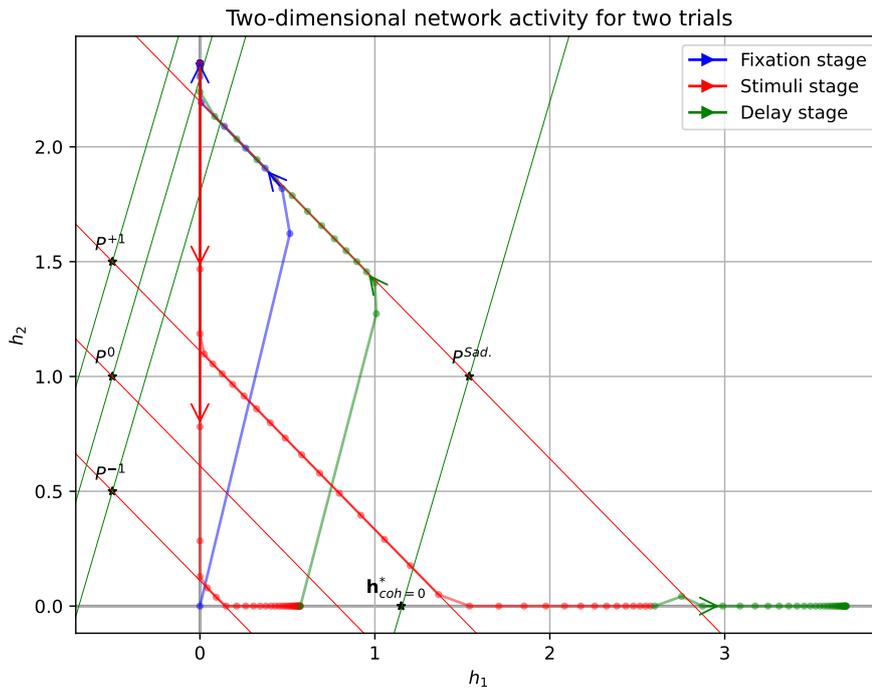


Рис. 6. Фазовые траектории системы (7) в течение двух испытаний упрощённой задачи без контекста с когерентностями  $-1$  и  $+1$ . В начале испытания система выходит на один из аттракторов решения, в качестве которых в двумерной системе выступают неподвижные точки. При подаче стимулов когерентность кодируется в  $h_1$  единственного аттрактора системы таким образом, что сепаратриса седла, существующего в период задержки, разделяет эти неподвижные точки по нулевой когерентности (цвет онлайн)

Fig. 6. Phase trajectories of system (7) during two trials of a simplified task without context, with coherences of  $-1$  and  $+1$ . Initially, the system converges to one of the decision attractors, which are fixed points in the two-dimensional system. Upon application of stimuli, coherence is encoded in  $h_1$  of the system's unique attractor such that the separatrix of the saddle present during the delay period separates these fixed points at zero coherence (color online)

## Заключение

1. *Ансамбль сетей обучен методами обучения с подкреплением одной из классических в нейронауке когнитивных задач — контекстно-зависимому двухальтернативному принятию решения.* Класс алгоритмов обучения с подкреплением опирается при обучении на те же данные, что и биологический агент в эксперименте — на сигнал награды. С одной стороны, в работе мы опираемся на ранее полученные нами и другими авторами результаты — это схожие целевые задачи и рекуррентная нейронная сеть. С другой стороны, мы формулируем новизну: биологически более релевантный метод обучения, новые методы анализа динамических механизмов на популяционном уровне в процессе обучения, а не только на финальной стадии.
2. *Рассмотрена автономная динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации.* Описаны два типа аттракторов: квазипериодические траектории и неподвижные точки. Сформулирован алгоритм полного перебора редуцированных систем, позволяющий теоретически найти в системе все неподвижные точки. Установлено соответствие между неподвижными точками линейной системы типа «неустойчивый фокус» и устойчивыми квазипериодическими траекториями в нелинейной системе. Использованная для перехода к автономной системе структура испытания свойственна многим когнитивным задачам, что позволяет применить описанный подход к широкому классу других когнитивных задач.
3. *Изучена динамика обученного ансамбля, выявлена взаимосвязь между типом аттрактора и параметрами когнитивной задачи.* Механизм решения когнитивной задачи описан на языке теории динамических систем. Выявлены популяции, активность которых соответствует выходу системы в окрестности соответствующих аттракторов. Эволюция данных популяций коррелирует со способностью сети решать поставленную когнитивную задачу. Исследовано распределение аттракторов разных типов и выявлена корреляция с параметрами когнитивной задачи.
4. *Построена двумерная сеть, решающая упрощённую задачу.* На основе выявленного динамического механизма и свойств автономной динамики системы сконструирована двумерная сеть, решающая упрощённую задачу двухальтернативного выбора без контекста. Данная модель демонстрирует обнаруженный динамический механизм распознавания наибольшего стимула и последующего удержания решения в рабочей памяти. Структура связей низкоразмерной модели качественно повторяет структуру связей между популяциями в обученных многомерных моделях.

## Список литературы

1. *Sussillo D.* Neural circuits as computational dynamical systems // *Curr. Opin. Neurobiol.* 2014. Vol. 25. P. 156-163. DOI: 10.1016/j.conb.2014.01.008.
2. *Marblestone A. H., Wayne G., Kording K. P.* Toward an integration of deep learning and neuroscience // *Frontiers in Computational Neuroscience.* 2016. Vol. 10. P. 94. DOI: 10.3389/fncom.2016.00094.
3. *Barak O.* Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research // *Curr. Opin. Neurobiol.* 2017. Vol. 46. P. 1–6. DOI: 10.1016/j.conb.2017.06.003.
4. *Richards B. A., Lillicrap T. P., Beaudoin P., Bengio Y., Bogacz R., Christensen A., Clopath C., Costa R. P., de Berker A., Ganguli S., Gillon C. J., Hafner D., Kepecs A., Kriegeskorte N., Latham P., Lindsay G. W., Miller K. D., Naud R., Pack Ch. C., Poirazi P., Roelfsema P., Sacramento J., Saxe A., Scellier B., Schapiro A. C., Senn W., Wayne G., Yamins D., Zenke F., Zylberberg J., Therien D., Kording K. P.* A deep learning framework for neuroscience // *Nature Neuroscience.* 2019. Vol. 22, no. 11. P. 1761–1770. DOI: 10.1038/s41593-019-0520-2.
5. *Ehrlich D. B., Stone J. T., Brandfonbrener D., Atanasov A., Murray J. D.* PsychRNN: An Accessible

- and Flexible Python Package for Training Recurrent Neural Network Models on Cognitive Tasks // *Eneuro*. 2021. Vol. 8, no. 1. DOI: 10.1523/ENEURO.0427-20.2020.
6. *Durstewitz D., Koppe G., Thurm M. I.* Reconstructing computational system dynamics from neural data with recurrent neural networks // *Nature Reviews Neuroscience*. 2023. Vol. 24, no. 11. P. 693–710. DOI: 10.1038/s41583-023-00740-7.
  7. *Mante V., Sussillo D., Shenoy K. V., Newsome W. T.* Context-dependent computation by recurrent dynamics in prefrontal cortex // *Nature*. 2013. Vol. 503, no. 7474. P. 78–84. DOI: doi.org/10.1038/nature12742.
  8. *McNaughton B. L., Battaglia F. P., Jensen O., Moser E. I., Moser M.-B.* Path integration and the neural basis of the “cognitive map” // *Nature Reviews Neuroscience*. 2006. Vol. 7, no. 8. P. 663–678. DOI: 10.1038/nrn1932.
  9. *Yang G. Rt., Wang X.-J.* Artificial neural networks for neuroscientists: A primer // *Neuron*. 2020. Vol. 107, no. 6. P. 1048–1070. DOI: 10.1016/j.neuron.2020.09.005.
  10. *Bernáez T. L., Ekelmans P., Kraynyukova N., Rose T., Busse L., Tchumatchenko T.* How to incorporate biological insights into network models and why it matters // *The Journal of Physiology*. 2023. Vol. 601(15). P. 3037–3053. DOI: 10.1113/JP282755.
  11. *Vyas S., Golub M. D., Sussillo D., Shenoy K. V.* Computation through neural population dynamics // *Annual Review of Neuroscience*. 2020. Vol. 43. P. 249–275. DOI: 10.1146/annurev-neuro-092619-094115.
  12. *Sussillo D., Abbott L. F.* Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks // *Neuron*. 2009. Vol. 63, no. 4. P. 544–557. DOI: 10.1016/j.neuron.2009.07.018.
  13. *Kriegeskorte N., Xue-Xin W.* Neural tuning and representational geometry // *Nature Reviews Neuroscience*. 2021. Vol. 22, no. 11. C. 703–718. DOI: 10.1038/s41583-021-00502-3.
  14. *Khona M., Fiete I. R.* Attractor and integrator networks in the brain // *Nature Reviews Neuroscience*. 2022. Vol. 23, no. 12. P. 744–766. DOI: 10.1038/s41583-022-00642-0.
  15. *Langdon Ch., Genkin M., Engel T. A.* A unifying perspective on neural manifolds and circuits for cognition // *Nature Reviews Neuroscience*. 2023. Vol. 24, no. 6. P. 363–377. DOI: 10.1038/s41583-023-00693-x.
  16. *Масленников О. В., Пугавко М. М., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейная динамика и машинное обучение рекуррентных спайковых нейронных сетей // *Успехи физических наук*. 2022. Т. 65, № 12. DOI: 10.3367/UFNr.2021.08.039042.
  17. *Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Stimulus-induced sequential activity in supervisory trained recurrent networks of firing rate neurons // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 101, no. 2. P. 1093–1103. DOI: 10.1007/s11071-020-05787-0.
  18. *Pugavko M. M., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Dynamics of spiking map-based neural networks in problems of supervised learning // *Communications in Nonlinear Science, Numerical Simulation*. 2020. Vol. 90. P. 105399. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105399.
  19. *Пугавко М. М., Масленников О. В., Некоркин В. И.* Динамика сети дискретных модельных нейронов при контролируемом обучении системы резервуарных вычислений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2020. Т. 28, № 1. С. 77–89. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89.
  20. *Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system // *Chaos*. 2019. Vol. 29, no. 10. P. 103126. DOI: 10.1063/1.5119895.
  21. *Parga N., Serrano-Fernández L., Falcó-R. J.* Emergent computations in trained artificial neural networks and real brains // *Journal of Instrumentation*. 2023. Vol. 18, no. 02. P. C02060. DOI: 10.1088/1748-0221/18/02/C02060.
  22. *Pugavko M. M., Maslennikov O. V., Nekorkin V. I.* Multitask computation through dynamics in recurrent spiking neural networks // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13, no. 1. P. 3997. DOI: 10.1038/s41598-023-31110-z.
  23. *Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O.* Proximal policy optimization algorithms. arXiv:1707.06347; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1707.06347.

24. *Diederik P. K., Jimmy B. Adam: A Method for Stochastic Optimization.* arXiv:1412.6980; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.

## References

1. Sussillo D. Neural circuits as computational dynamical systems. *Curr. Opin. Neurobiol.* 2014;25:156–163. DOI: 10.1016/j.conb.2014.01.008.
2. Marblestone AH, Wayne G, Kording KP. Toward an integration of deep learning and neuroscience. *Frontiers in Computational Neuroscience.* 2016;10:94 DOI: 10.3389/fncom.2016.00094.
3. Barak O. Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research. *Current Opinion in Neurobiology.* 2017;46:1–6. DOI: 10.1016/j.conb.2017.06.003.
4. Richards BA, Lillicrap TP, Beaudoin P, Bengio Y, Bogacz R, Christensen A, Clopath C, Costa RP, de Berker A, Ganguli S, Gillon CJ, Hafner D, Kepecs A, Kriegeskorte N, Latham P, Lindsay GW, Miller KD, Naud R, Pack ChC, Poirazi P, Roelfsema P, Sacramento J, Saxe A, Scellier B, Schapiro AC, Senn W, Wayne G, Yamins D, Zenke F, Zylberberg J, Therien D, Kording KP. A deep learning framework for neuroscience. *Nature Neuroscience.* 2019;22(11):1761–1770. DOI: 10.1038/s41593-019-0520-2.
5. Ehrlich DB, Stone JT, Brandfonbrener D, Atanasov A, Murray JD. PsychRNN: An Accessible and Flexible Python Package for Training Recurrent Neural Network Models on Cognitive Tasks. *Eneuro.* 2021;8(1). DOI: 10.1523/ENEURO.0427-20.2020.
6. Durstewitz D, Koppe G, Thurm MI. Reconstructing computational system dynamics from neural data with recurrent neural networks. *Nature Reviews Neuroscience.* 2023;24(11): 693–710. DOI: 10.1038/s41583-023-00740-7.
7. Mante V, Sussillo D, Shenoy KV, Newsome WT. Context-dependent computation by recurrent dynamics in prefrontal cortex. *Nature.* 2013;503(7474):78–84. DOI: doi.org/10.1038/nature12742.
8. McNaughton BL, Battaglia FP, Jensen O, Moser EI, Moser M-B. Path integration and the neural basis of the “cognitive map”. *Nature Reviews Neuroscience.* 2006;7(8):663–678. DOI: 10.1038/nrn1932.
9. Yang GRt, Wang X-J. Artificial neural networks for neuroscientists: A primer. *Neuron.* 2020;107(6): 1048–1070. DOI: 10.1016/j.neuron.2020.09.005.
10. Bernáez TL, Ekelmans P, Kraynyukova N, Rose T, Busse L, Tchumatchenko T. How to incorporate biological insights into network models and why it matters. *The Journal of Physiology.* 2023;601(15):3037–3053. DOI: 10.1113/JP282755.
11. Vyas S, Golub MD, Sussillo D, Shenoy KV. Computation through neural population dynamics. *Annual Review of Neuroscience.* 2020;43:249–275. DOI: 10.1146/annurev-neuro-092619-094115.
12. Sussillo D, Abbott LF. Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks. *Neuron.* 2009;63(4):544–557. DOI: 10.1016/j.neuron.2009.07.018.
13. Kriegeskorte N, Xue-Xin W. Neural tuning and representational geometry. *Nature Reviews Neuroscience.* 2021;22(11):703–718. DOI: 10.1038/s41583-021-00502-3.
14. Khona M, Fiete IR. Attractor and integrator networks in the brain. *Nature Reviews Neuroscience.* 2022;23(12):744–766. DOI: 10.1038/s41583-022-00642-0.
15. Langdon Ch, Genkin M, Engel TA. A unifying perspective on neural manifolds and circuits for cognition. *Nature Reviews Neuroscience.* 2023;24(6):363–377. DOI: 10.1038/s41583-023-00693-x.
16. Maslennikov OV, Pugavko MM, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamics and machine learning of recurrent spiking neural networks. *Phys. Usp.* 2022;65:1020–1038. DOI: 10.3367/UFNe.2021.08.039042.
17. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Stimulus-induced sequential activity in supervisedly trained recurrent networks of firing rate neurons. *Nonlinear Dynamics.* 2020;101(2):1093–1103. DOI: 10.1007/s11071-020-05787-0.
18. Pugavko MM, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Dynamics of spiking map-based neural networks

in problems of supervised learning. *Communications in Nonlinear Science, Numerical Simulation*. 2020;90:105399. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105399

19. Pugavko MM, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Dynamics of a network of map-based model neurons for supervised learning of a reservoir computing system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(1):77–89. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-77-89.
20. Maslennikov OV, Nekorkin VI. Collective dynamics of rate neurons for supervised learning in a reservoir computing system. *Chaos*. 2019;29(10):103126. DOI: 10.1063/1.5119895.
21. Parga N, Serrano-Fernández L, Falcó-RJ. Emergent computations in trained artificial neural networks and real brains. *Journal of Instrumentation*. 2023;18(02):C02060. DOI: 10.1088/1748-0221/18/02/C02060.
22. Pugavko MM, Maslennikov OV, Nekorkin VI. Multitask computation through dynamics in recurrent spiking neural networks. *Scientific Reports*. 2023;13(1):3997. DOI: 10.1038/s41598-023-31110-z.
23. Schulman J, Wolski F, Dhariwal P, Radford A, Klimov O. Proximal policy optimization algorithms. arXiv:1707.06347; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1707.06347.
24. Diederik PK, Jimmy B. Adam: A Method for Stochastic Optimization. arXiv:1412.6980; 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.



*Кононов Роман Андреевич* — родился в Выксе (1999). Окончил магистратуру радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2023). С 2022 года работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов — нелинейные колебания и волны, машинное обучение, нейродинамика, сложные сети.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru  
ORCID: 0000-0003-0173-587X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 2740



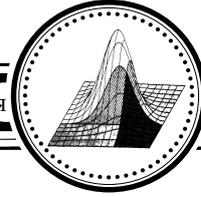
*Масленников Олег Владимирович* — родился в Горьком (1988). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2011). С 2007 года работает в Институте прикладной физики РАН. Кандидат физико-математических наук (2014, ИПФ РАН). Область научных интересов — нелинейные колебания и волны, синхронизация, сложные сети, нейродинамика. Имеет более 40 научных публикаций по указанным направлениям. Награжден медалью РАН с премией для молодых ученых (2016).

Россия, 603950 Нижний Новгород, Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: olmaov@ipfran.ru  
ORCID: 0000-0002-8909-321X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 643949



*Некоркин Владимир Исаакович* — родился в 1948 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1971). Член-корреспондент РАН (2022), профессор (1995), доктор физико-математических наук (1992). Профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН. Лауреат премии им. А. А. Андропова (2012). Область научных интересов — динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 350 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 5 книг.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru  
ORCID: 0000-0003-0173-587X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 2740



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003146  
EDN: ANSXHT

### Влияние топологии связей и шума на возможность частотной подстройки в ансамблях осцилляторов ФитцХью–Нагумо

В. А. Новичкова<sup>1</sup>, Е. В. Рыбалова<sup>1</sup>✉, В. И. Пономаренко<sup>1,2</sup>, Т. Е. Вадивасова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>2</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: novichkovava@mail.ru, ✉rybalovaev@gmail.com, pomomarenkovi@gmail.com, vadivasovate@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.07.2024, принята к публикации 12.08.2024,

опубликована онлайн 2.12.2024, опубликована 31.03.2025

**Аннотация.** Цель. Работа направлена на исследование спайковой активности и синхронизации в ансамблях нейронов ФитцХью–Нагумо в отсутствие и присутствии внешнего шумового возбуждения. В таких сетях в зависимости от параметра возбудимости парциальных элементов и силы связи между элементами (в частности, от ее знака) могут возбуждаться колебания с различной частотой. Более того, вариация параметров может приводить к синхронизации элементов. Проводится исследование динамики однослойной сети, в которой присутствует один общий элемент, и трехслойной, в которой промежуточный слой — один нейрон-хаб. Методы. Для изучения динамики исследуемых сетей рассчитываются средние по времени частоты спайков всех элементов, которые усредняются по ансамблю нейронов для каждого внешнего слоя и сравниваются с частотой центрального элемента и между собой в случае многослойной сети. Для анализа влияния силы связи на спайковую активность элементов сети и их синхронизацию строятся распределения частот и распределения разности частот на плоскости коэффициентов сил связи. Результаты. Показано, что в небольших однослойных и трехслойных сетях идентичных осцилляторов (нейронов ФитцХью–Нагумо) с простой топологией связи возможно наблюдение различной спайковой активности в отдельных частях системы. При этом наблюдается переход нейронов в автоколебательный режим, обусловленный отталкивающей связью между элементами. В работе установлено, что в однослойной сети кольцо элементов может синхронизироваться по частоте с центральным элементом в некоторой области значений сил связи. В трехслойной системе также можно наблюдать синхронизацию слоев. Слабый шум слабо влияет на границы области синхронизации всех трех слоев по параметрам связи, но с ростом интенсивности шума эта область уменьшается. В то же время шум вызывает появление новой области синхронизации, в которой наблюдается удаленная синхронизация слоев при отсутствии синхронизации хаба. Заключение. В работе проведено исследование возможности возбуждения колебаний и их синхронизации в однослойной и трехслойной сетях связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо при вариации силы связи между элементами. В данном исследовании была получена лишь самая общая картина спайковой активности возбудимых нейронов в двух рассмотренных моделях сети, однако этого достаточно, чтобы проиллюстрировать важную роль связей в формировании спайковой активности возбудимых нейронов.

**Ключевые слова:** нейроны, осцилляторы ФитцХью–Нагумо, частота зажигания, синхронизация.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда No 23-12-00103, <https://rscf.ru/project/23-12-00103/>.

*Для цитирования:* Новичкова В. А., Рыбалова Е. В., Пономаренко В. И., Вадивасова Т. Е. Влияние топологии связей и шума на возможность частотной подстройки в ансамблях осцилляторов ФитцХью–Нагумо // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 266–282. DOI: 10.18500/0869-6632-003146. EDN: ANSXHT

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003146

## **Influence of coupling topology and noise on the possibility of frequency tuning in ensembles of FitzHugh–Nagumo oscillators**

V. A. Novichkova<sup>1</sup>, E. V. Rybalova<sup>1</sup>✉, V. I. Ponomarenko<sup>1,2</sup>, T. E. Vadivasova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

<sup>2</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

E-mail: novichkovava@mail.ru, ✉rybalovaev@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com, vadivasovate@yandex.ru

*Received 10.07.2024, accepted 12.08.2024, available online 2.12.2024, published 31.03.2025*

**Abstract.** *Purpose.* The study focuses on analyzing spike activity and synchronization in ensembles of FitzHugh–Nagumo neurons, both with and without external noise excitation. In these networks oscillations at different frequencies can be induced depending on the excitability parameter of individual elements and the coupling strength between them. Additionally, variations in these parameters can lead to synchronization among the elements. The research investigates the dynamics of both a single-layer network, which includes a common element, and a three-layer network with an intermediate neuron-hub layer. *Methods.* To analyze the dynamics of the networks under investigation, we calculate the time-averaged spike frequencies of all elements. These frequencies are then averaged for each outer layer and compared with the frequency of the central element, as well as with each other in the case of a multilayer network. In order to assess the impact of coupling strength on the spike activity and synchronization of the network elements, we construct frequency distributions and frequency difference distributions in a plane of coupling strength coefficients. *Results.* It has been shown that small single-layer and three-layer networks of identical oscillators (FitzHugh–Nagumo neurons) with simple coupling topologies can exhibit different spike activity in different parts of the system. In this case, the neurons transition to a self-oscillatory mode due to repulsive coupling between the elements. The research has established that in a single-layer network, a ring of elements can synchronize in frequency with the central element within a specific range of coupling strength values. In a three-layer system, layer synchronization can also be observed. Weak noise has minimal impact on the synchronization boundaries of all three layers, in terms of coupling parameters. However, as the noise intensity increases, synchronization area decreases. At the same time, the noise leads to the emergence of a new synchronization region in which relay synchronization of the layers is observed in the absence of synchronization with the hub. *Conclusion.* The study explored the potential of exciting oscillations and achieving synchronization in single-layer and three-layer networks of coupled FitzHugh–Nagumo oscillators. The coupling strength between the elements varied in order to investigate its impact. Although the study only provided a broad understanding of the spike activity of excitable neurons in the two network models examined, it adequately demonstrated the crucial role of coupling in the spiking activity of these neurons.

**Keywords:** neuron, FitzHugh–Nagumo oscillator, firing frequency, synchronization.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-12-00103, <https://rscf.ru/project/23-12-00103/>).

**For citation:** Novichkova VA, Rybalova EV, Ponomarenko VI, Vadivasova TE. Influence of coupling topology and noise on the possibility of frequency tuning in ensembles of FitzHugh–Nagumo oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(2):266–282. DOI: 10.18500/0869-6632-003146

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## **Введение**

Коллективное поведение осцилляторных ансамблей и сетей в течение последних лет продолжает оставаться одним из важнейших направлений в нелинейной динамике. Исследования в этой области особенно актуальны в связи с задачами моделирования динамики нейронных ансамблей как в связи с изучением функционирования ансамблей биологических нейронов и установления механизмов высшей нервной деятельности [1–7], так и в свете перспектив

применения искусственных осцилляторных нейронных сетей для решения задач распознавания и обработки сигналов [8–11].

В коллективном поведении множества нелинейных осцилляторов важнейшую роль играет фундаментальное явление синхронизации [12–14], приводящее к согласованию частот, фаз и характерных времен всех или части осцилляторов, формированию различных волновых режимов и кластерных структур. В связанных распределенных системах и слоях многослойной сети наблюдается явление синхронизации как колебаний во времени, так и пространственных структур [15–19]. Следует отметить, что синхронизация частот колебаний (синхронизация в смысле Гюйгенса) является свойством автоколебательных систем, генерирующих колебательный процесс без внешних воздействий, в то время как полная (синфазная) синхронизация наблюдается при взаимодействии любых идентичных нелинейных осцилляторов, включая системы с дискретным временем, описываемые точечными отображениями [12].

Эффекты синхронизации принципиальны и для взаимодействующих нейронов и нейронных ансамблей [20–25]. Формирование кластеров нейронов, имеющих близкие частоты и фазы зажигания (генерации импульсов возбуждения), может не только играть важную роль в когнитивных процессах [26–30], но и приводить к патологическим явлениям [31–34]. Таким образом, изучение эффектов синхронизации, согласования спайковой активности определенных групп нейронов или, напротив, разрушение такого согласования является весьма важной задачей.

Отдельные (невзаимодействующие) нейроны чаще всего являются возбудимыми осцилляторами [3, 35, 36]. Автоколебательный режим для них нетипичен, и для возникновения колебаний необходимы внешние импульсы, величина которых превышает некоторый порог. Сами колебания представляют собой последовательность коротких импульсов, называемых спайками. Частота спайков в ансамбле нейронов определяется не только частотой воздействующих импульсов, но также зависит от связей между нейронами. Для биологических нейронов характерны различные типы связи, которые пока далеко не полностью изучены. В том числе предполагается, что определенные группы нейронов могут иметь отталкивающие связи [3, 37, 38]. При отталкивающем взаимодействии (активная связь с отрицательным коэффициентом) в ансамбле нейронов возможна спайковая активность без внешних воздействий, то есть отталкивающая связь приводит к возникновению автоколебательного режима [39, 40]. Различные группы нейронов в ансамблях и сетях, связанные отталкивающими и притягивающими (диссипативными) взаимодействиями, даже в случае идентичности самих нейронов могут проявлять спайковую активность с различной средней частотой. Меняя параметры связи, можно добиться подстройки средних частот зажигания (спайков) вследствие возбуждения вынужденных спайков или эффекта синхронизации. Поведение ансамблей и сетей из осцилляторов, одновременно испытывающих как притягивающие, так и отталкивающие взаимодействия, мало исследовано. Имеющиеся данные свидетельствуют о том, что оно может быть достаточно сложным [41–45].

Целью настоящей работы является исследование спайковой активности и эффектов подстройки средних частот зажигания нейронов с притягивающим и отталкивающим взаимодействием на примере небольших ансамблей идентичных элементов с простой топологией связей. Рассматриваются две модели: кольцо из пяти локально связанных нейронов, взаимодействующих с общим хабом, в качестве которого используется аналогичный нейрон, и два кольца нейронов, связанных через общий хаб (нейрон). Связь групп нейронов с общим хабом достаточно типична в системах биологических нейронов [46, 47]. В рассматриваемых в работе моделях все нейроны полагаются идентичными, описываются моделью ФитцХью–Нагумо и в отсутствие связей находятся в возбудимом режиме. При изменении параметров связи внутри колец и между элементами колец и хабом можно наблюдать различные режимы спайковой активности, отличающиеся средними частотами зажигания нейронов колец и хаба, а также режим частотной синхронизации.

# 1. Динамика однослойной сети нейронов ФитцХью–Нагумо

В данном разделе рассмотрим результаты исследования однослойной сети пяти локально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо с наличием центрального элемента (хаба). Данная система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_i &= u_i - \frac{u_i^3}{3} - v_i + \sigma(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + k(u_{\text{hub}} - u_i), \\ \dot{v}_i &= u_i + a, \\ \varepsilon \dot{u}_{\text{hub}} &= u_{\text{hub}} - \frac{u_{\text{hub}}^3}{3} - v_{\text{hub}} + k \sum_{j=1}^5 (u_j - u_{\text{hub}}), \\ \dot{v}_{\text{hub}} &= u_{\text{hub}} + a_{\text{hub}} + \sqrt{2D}\eta(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u_i$  и  $v_i$  — переменные, задающие динамику во времени активатора (быстрой переменной) и ингибитора (медленной переменной)  $i$ -го нейрона соответственно,  $i = 1, 2, \dots, 5$  — номер элемента в кольце. Начальные значения для всех нейронов выбираются случайным образом из области значений, удовлетворяющей условию:  $u^2 + v^2 < 2^2$ . Отметим, что в статье все графики рассчитаны для одного набора случайных начальных условий. Однако исследования показали, что динамика системы принципиально не меняется с изменением начальных условий при выбранных значениях управляющих параметров. Малый параметр  $\varepsilon = 0.01$  отвечает за разделение временных масштабов быстрой и медленной переменных. Параметр  $a$  определяет характер динамики элемента: при  $|a| < 1$  осциллятор ФитцХью–Нагумо находится в автоколебательном режиме, а при  $|a| > 1$  — в возбуждимом. Сила связи между элементами кольца задается коэффициентом  $\sigma$ , а сила связи с центральным элементом изменяется посредством изменения параметра  $k$ . На рис. 1 приведена схема связей исследуемой в данном разделе системы. Отметим, что все связи являются симметричными, и в уравнении (1) отсутствует нормировка на количество связей, что приводит к тому, что энергия связи хаба всегда больше, чем энергия связи элементов кольца. Предполагается, что связь может быть как притягивающей (диссипативной), так и отталкивающей. В первом случае коэффициент связи принимает положительные значения, во втором — отрицательные. В уравнения, описывающие поведение хаба, аддитивно добавлен источник нормированного нормального белого шума  $\eta(t)$  с нулевым средним значением и корреляционной функцией  $\langle v(t)v(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$  — функция Дирака. Параметр  $D$  отвечает за интенсивность шума. Для численного решения дифференциальных уравнений были использованы метод Рунге–Кутты 4-го порядка (для детерминированной части) и метод Эйлера–Маруямы (для стохастической части).

В связи с тем, что исследуется малый ансамбль связанных элементов, говорить о какой-то пространственной динамике и выделять кластеры с различной динамикой в нем затруднительно, поэтому будет рассмотрено поведение кольца нейронов в целом. Для описания поведения кольца

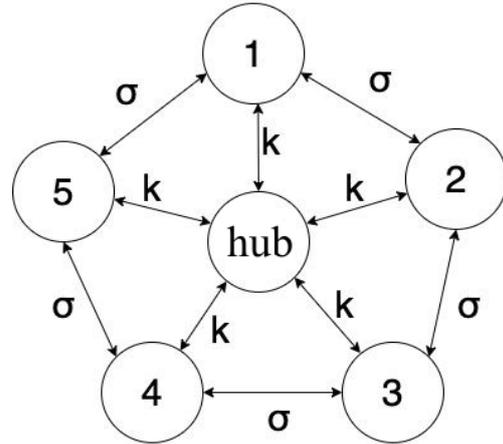


Рис. 1. Схематическое представление связей в ансамбле (1). Параметры  $\sigma$  соответствуют силе локальной связи между элементами кольца,  $k$  — сила связи с хабом  
Fig. 1. Scheme of coupling in the ensemble (1). The parameters  $\sigma$  correspond to the local coupling strength between elements of the ensemble,  $k$  is the coupling strength with the hub

нейронов и анализа изменений спайковой активности в кольце при вариации управляющих параметров использовалась средняя частота зажиганий (спайков), которая рассчитывалась усреднением по времени и по элементам кольца. Для хаба также рассчитывалась средняя по времени частота зажиганий. Средняя по времени частота спайков отдельного  $i$ -го нейрона (в том числе хаба) рассчитывается по формуле

$$f_i = \frac{M_i}{\Delta T}, \quad (2)$$

где  $M_i$  — это количество зажиганий  $i$ -го осциллятора ФитцХью–Нагумо за время  $\Delta T$  после периода установления. Средняя частота зажиганий в кольце определяется как  $f_1 = \frac{1}{5} \sum_i f_i$ .

Обратим также внимание, что в ранее проведенном исследовании [40] было показано, что в ансамбле из пяти локально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, находящихся в возбужденном режиме, возможно возбуждение колебаний только при отрицательной связи между элементами. Поэтому в ходе данного исследования мы рассматриваем, как дополнительная связь с хабом может изменить область зажигания системы на плоскости управляющих параметров.

### 1.1. Динамика ансамбля без шумового возмущения центрального элемента (хаба).

Перейдем к исследованию динамики кольца локально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо с центральным элементом (хабом) без шумового воздействия на хаб. Все нейроны сети, включая хаб, идентичны и в отсутствие связей находятся в возбужденном режиме в соответствии со значением параметра  $a = 1.05$ . На рис. 2 приведены распределения средних частот зажиганий в кольце и в хабе, а также разность этих частот на плоскости параметров связи, позволяющие определить области, в которых эти частоты совпадают.

Когда связи между нейронами кольца и нейронами кольца с хабом являются диссипативными (положительные значения  $\sigma$  и  $k$ ), в отсутствие внешнего шума спайки в системе (1) не возникают (рис. 2,  $a, b$ ).

В случае диссипативной связи нейронов в кольце ( $\sigma > 0$ ) отталкивающая связь с хабом при  $k < -0.02$  приводит к возбуждению колебаний в системе (см. рис. 2,  $a, b$ ). При этом отталкивающее взаимодействие гораздо сильнее влияет на хаб, чем на элементы кольца, в результате чего в хабе возникают автоколебания, а элементы кольца зажигаются под воздействием хаба. Поэтому частоты зажиганий элементов кольца и хаба одинаковы во всей области  $\sigma > 0, k < -0.02$

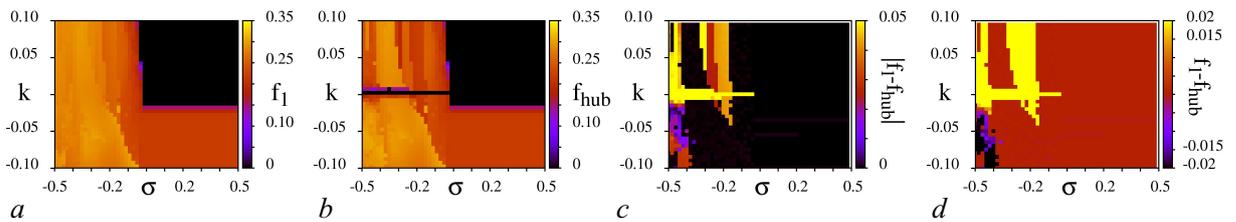


Рис. 2. Распределение средних частот спайков в сети (1) на плоскости параметров связи ( $\sigma, k$ ) в отсутствие шумового воздействия на центральный элемент (хаб):  $a$  — средняя частота элементов кольца,  $b$  — средняя частота хаба,  $c$  — абсолютная величина разности средних частот спайков в кольце и хабе,  $d$  — полное значение разности средних частот в кольце и хабе. Другие параметры:  $a = 1.05, \varepsilon = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Distribution of average spike frequencies in the network (1) in the ( $\sigma, k$ ) plane of coupling parameters without noise influence on the central element (hub):  $a$  — average frequency of the ring elements,  $b$  — average frequency of the hub,  $c$  — absolute value of the difference in average spike frequencies between the ring and the hub,  $d$  — total difference in average spike frequencies between the ring and the hub. Other parameters:  $a = 1.05, \varepsilon = 0.01$  (color online)

(рис. 2, *c*, *d*). Однако этот эффект не является синхронизацией, так как активность элементов кольца является вынужденной.

Отталкивающая связь между элементами кольца ( $\sigma < 0$ ) приводит к возникновению автоколебаний в кольце без взаимодействия с хабом. При введении связи с хабом на среднюю частоту спайков влияют оба коэффициента связи:  $\sigma$  и  $k$ . При этом зависимость частоты зажигания от сил связи является немонотонной, хотя можно видеть, что частота в основном растет при увеличении (по модулю) значений коэффициентов связи между всеми элементами сети. Отметим тривиальный результат, представленный на рис. 2, *b*: необходима некоторая ненулевая сила связи элементов кольца с хабом, чтобы возбудить спайковую активность в последнем, на что указывает небольшая область отсутствия спайков хаба для значений коэффициента  $k$  вблизи нуля.

Если при  $\sigma < 0$  имеется отталкивающая связь с хабом ( $k < 0$ ), то при слабой отталкивающей связи в кольце ( $0 > \sigma > -0.5$ ) можно наблюдать синхронизацию среднего числа зажигания в кольце и в хабе (рис. 2, *c*). С дальнейшим увеличением отталкивающей связи в кольце синхронизация кольца и хаба нарушается. При диссипативной связи с хабом ( $k > 0$ ) в хабе также устанавливается автоколебательный режим. Имеется ограниченный интервал значений  $\sigma < 0$ , в котором наблюдается синхронизация и средние частоты спайков в кольце и в хабе совпадают. Данная область находится в интервале  $-0.4 < \sigma < -0.3$  и напоминает язык синхронизации (рис. 2, *c*).

Проанализируем абсолютное значение разности средних частот зажигания в кольце и в хабе (рис. 2, *d*). Обратим внимание, что при  $k > -0.02$  хаб имеет частоту спайков ниже, чем элементы кольца (рис. 2, *d*). Обратная ситуация наблюдается, когда связь с хабом является отрицательной (отталкивающей) и коэффициент  $k$  меньше  $-0.02$ .

## 1.2. Динамика ансамбля при шумовом воздействии на центральный элемент (хаб).

В связи с тем, что все элементы исследуемой системы находятся в возбужденном состоянии, только связи между элементами и внешнее воздействие могут вызвать в системе спайковую активность. Рассмотрим, как изменится поведение системы, описанное в предыдущем разделе, при введении в хаб (центральный элемент) шума и изменении его интенсивности, задаваемой параметром  $D$ .

На рис. 3 приведены распределения средних частот зажигания в кольце и в хабе, а также разницы этих частот на плоскости параметров связи  $\sigma$  и  $k$  при введении шума в хаб с интенсивностью  $D = 0.001$ . При сравнении рис. 3 и 2 можно видеть, что область существования спайков

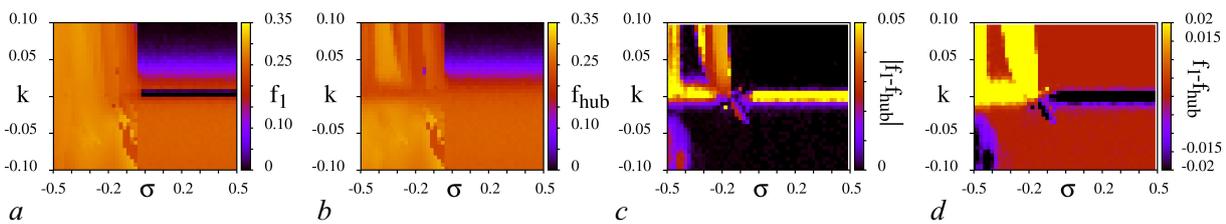


Рис. 3. Распределение средних частот спайков в сети (1) на плоскости параметров связи ( $\sigma$ ,  $k$ ) при наличии шумового воздействия на хаб с интенсивностью  $D = 0.001$ : *a* – средняя частота элементов кольца, *b* – средняя частота хаба, *c* – абсолютная величина разности средних частот спайков в кольце и хабе, *d* – полное значение разности средних частот в кольце и хабе. Другие параметры:  $a = 1.05$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 3. Distribution of average spike frequencies in the network (1) in the ( $\sigma$ ,  $k$ ) plane of coupling parameters in the presence of noise influence on the hub with intensity  $D = 0.001$ : *a* – average frequency of the ring elements, *b* – average frequency of the hub, *c* – absolute value of the difference in average spike frequencies between the ring and the hub, *d* – total difference in average spike frequencies between the ring and the hub. Other parameters:  $a = 1.05$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (color online)

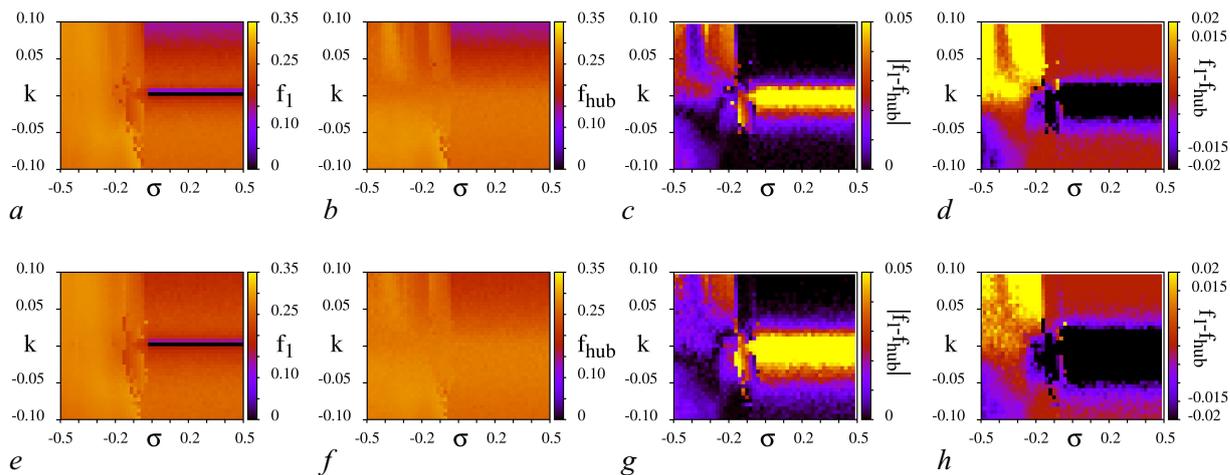


Рис. 4. Распределение средних частот спайков в сети (1) на плоскости параметров связи  $(\sigma, k)$  при наличии шумового воздействия на хаб с интенсивностью  $D = 0.005$  ( $a-d$ ),  $D = 0.01$  ( $e-h$ ):  $a, e$  — средняя частота элементов кольца,  $b, f$  — средняя частота хаба,  $c, g$  — абсолютная величина разности средних частот спайков в кольце и хабе,  $d, h$  — полное значение разности средних частот в кольце и хабе. Другие параметры:  $a = 1.05$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 4. Distribution of average spike frequencies in the network (1) in the  $(\sigma, k)$  plane of coupling parameters in the presence of noise influence on the hub with intensity  $D = 0.005$  ( $a-d$ ),  $D = 0.01$  ( $e-h$ ):  $a, e$  — average frequency of the ring elements,  $b, f$  — average frequency of the hub,  $c, g$  — absolute value of the difference in average spike frequencies between the ring and the hub,  $d, h$  — total difference in average spike frequencies between the ring and the hub. Other parameters:  $a = 1.05$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (color online)

в системе увеличилась, а также немного сгладилось распределение частот при отталкивающей связи между элементами кольца. Деструктивным аспектом влияния шума на динамику системы является уменьшение области частотной синхронизации (сравните рис. 2,  $c$  и 3,  $c$ ).

Была также исследована динамика системы (1) при других значениях интенсивности шума в хабе. При сравнении распределения частот, представленных на рис. 3, 4, можно увидеть, что кольцо и хаб меньше синхронизированы. Например, перестает существовать язык синхронизации, который наблюдался ранее в области  $\sigma < 0$  и  $k > 0$ . С другой стороны, за счет шума в сети (1) могут возникать спайки даже при положительных коэффициентах связи. Очевидно, что спайки в кольце происходят одновременно во всех элементах и с той же частотой, что и в хабе, поскольку возникают под воздействием случайных зажиганий хаба (рис. 3, 4,  $\sigma > 0$ ,  $k > 0$ ). Также обратим внимание, что в случае  $\sigma > 0$  размер области и степень рассинхронизации (величина разности между средними частотами) не зависят от силы связи между элементами контура. И эта область рассинхронизации только увеличивается с увеличением интенсивности шума, подаваемого на центральный элемент исследуемой системы.

## 2. Динамика трехслойной сети нейронов ФитцХью–Нагумо

Перейдем к исследованию трехслойной системы, в которой внешние слои — кольца локально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо (5 элементов), а средний (передающий) — одиночный осциллятор. На рис. 5 приведена схема исследуемой сети. Данная система описывается той же системой уравнений, что была введена ранее (1), однако добавляются дополнительные уравнения,

которые описывают еще один слой в системе. Таким образом, уравнения трехслойной сети осцилляторов ФитцХью–Нагумо имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \dot{u}_{1i} &= u_{1i} - \frac{u_{1i}^3}{3} - v_{1i} + \sigma_1(u_{1i-1} - 2u_{1i} + u_{1i+1}) + k_1(u_{\text{hub}} - u_{1i}), \\
 \dot{v}_{1i} &= u_{1i} + a_1, \\
 \varepsilon \dot{u}_{2i} &= u_{2i} - \frac{u_{2i}^3}{3} - v_{2i} + \sigma_2(u_{2i-1} - 2u_{2i} + u_{2i+1}) + k_2(u_{\text{hub}} - u_{2i}), \\
 \dot{v}_{2i} &= u_{2i} + a_2, \\
 \varepsilon \dot{u}_{\text{hub}} &= u_{\text{hub}} - \frac{u_{\text{hub}}^3}{3} - v_{\text{hub}} + k_1 \sum_{j=1}^5 (u_{1j} - u_{\text{hub}}) + k_2 \sum_{j=1}^5 (u_{2j} - u_{\text{hub}}), \\
 \dot{v}_{\text{hub}} &= u_{\text{hub}} + a_{\text{hub}} + \sqrt{2D}\eta(t),
 \end{aligned} \tag{3}$$

Переменные  $u_{1i}$ ,  $v_{1i}$  задают состояния нейронов первого слоя (кольца), переменные  $u_{2i}$ ,  $v_{2i}$  задают состояния нейронов второго слоя (кольца), переменные  $u_{\text{hub}}$ ,  $v_{\text{hub}}$  описывают состояние общего элемента (хаба), через который осуществляется взаимодействие внешних слоев сети,  $i = 1, 2, \dots, 5$  — номер элемента в кольце. Элементы колец и общий элемент (хаб) полагались идентичными со значением параметров  $a_1 = a_2 = a_{\text{hub}} = 1.05$ , соответствующим возбуждимо-му режиму в отдельном нейроне. Коэффициент связи элементов второго кольца был зафиксирован  $\sigma_2 = -0.15$ , а коэффициент связи первого кольца  $\sigma_1$  менялся. При таких значениях параметра возбудимости и силы связи между элементами в этом ансамбле в отсутствие связи с хабом наблюдаются колебания. Для наблюдения эффекта синхронизации первого и второго ансамблей силы внутрислойной связи первого кольца изменялась в окрестности значения силы связи во втором кольце  $\sigma_1 \in [-0.25, -0.05]$ , а сила межслойной связи  $k_1 = k_2 = k \in [-0.01, 0.01]$ .

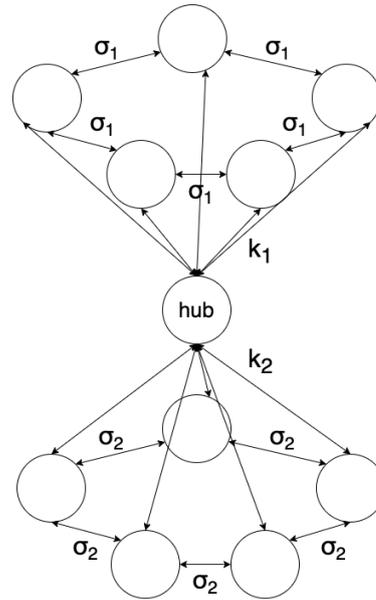


Рис. 5. Схематическое представление связей в ансамбле (3). Параметры  $\sigma_{1,2}$  соответствуют силе локальной связи между элементами внешних слоев,  $k_{1,2}$  — сила связи с хабом

Fig. 5. Scheme of coupling in the ensemble (3). The parameters  $\sigma_{1,2}$  correspond to the local coupling strength between elements of the outer ensemble,  $k_{1,2}$  is the coupling strength with the hub

**2.1. Динамика трехслойной системы в отсутствие шума в хабе.** При выбранном значении  $\sigma_2 = -0.15$  в первом кольце в отсутствие взаимодействия с хабом наблюдается автоколебательный режим. Во втором кольце при соответствующих значениях  $\sigma_1$  также могут возникнуть автоколебания. В режим автоколебаний может перейти и хаб, если хотя бы один из коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  будет отрицательным. Соответственно, в трехслойной сети можно наблюдать синхронизацию спайковой активности колец, взаимодействующих через хаб и самого хаба. Исследования показали, что при введении как диссипативной, так и отталкивающей межслойной связи возможно получить совпадение средних частот элементов системы, при этом амплитуды, фазы и фазовые портреты элементов системы отличны друг от друга.

Для более детального исследования влияния внутрислойной силы связи в первом кольце и силы межслойной связи на возможность синхронизации элементов в такой системе были

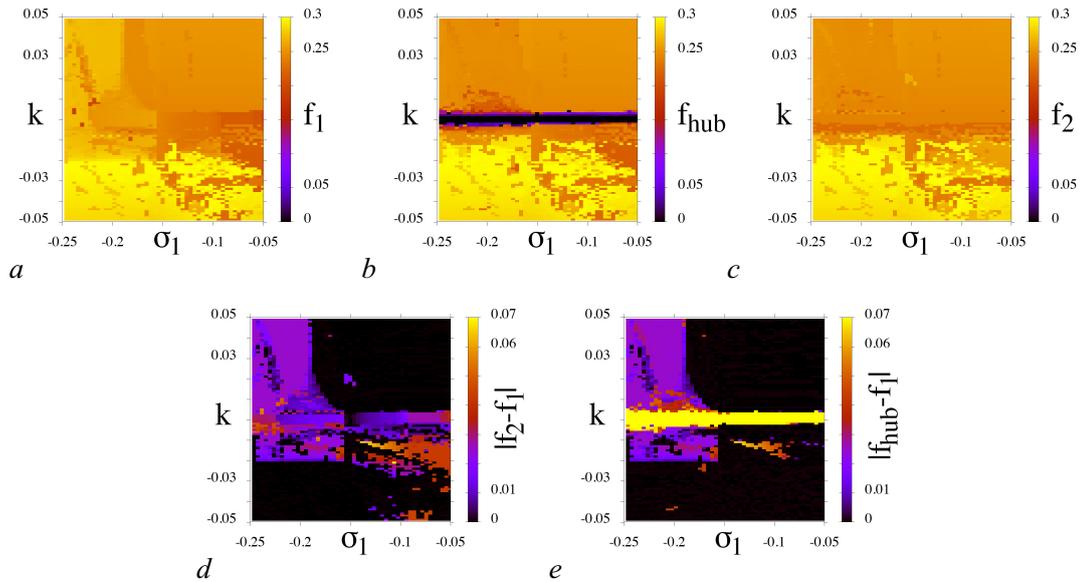


Рис. 6. Распределение средних частот спайков в сети (3) на плоскости параметров связи  $(\sigma_1, k)$  при отсутствии шумового воздействия на хаб:  $a$  — средняя частота элементов первого слоя,  $b$  — средняя частота хаба,  $c$  — средняя частота элементов второго слоя,  $d$  — абсолютная величина разности средних частот спайков в первом и втором слоях,  $e$  — абсолютная величина разности средних частот спайков в первом слое и хабе. Другие параметры:  $a_1 = a_2 = a_{\text{hub}} = 1.05$ ,  $\sigma_2 = -0.15$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Distribution of average spike frequencies in the network (3) in the  $(\sigma_1, k)$  plane of coupling parameters without noise influence on the hub:  $a$  — average frequency of the elements of the first layer,  $b$  — average frequency of the hub,  $c$  — average frequency of the elements of the second layer,  $d$  — absolute value of the difference in average spike frequencies between the first layer and the second one,  $e$  — absolute value of the difference in average spike frequencies between the first layer and the hub. Other parameters:  $a_1 = a_2 = a_{\text{hub}} = 1.05$ ,  $\sigma_2 = -0.15$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (color online)

построены распределения средних частот и разностей средних частот между разными слоями (рис. 6). В связи с тем, что хаб находится в возбуждимом режиме ( $a_{\text{hub}} = 1.05$ ), необходима небольшая ненулевая сила межслойной связи, чтобы возбудить в нем колебания, и только после этого возможна синхронизация элементов сети (рис. 6,  $b$ ). Обратим внимание, что при введении положительной (диссипативной) межслойной связи средняя частота колебаний элементов в первом и втором кольцах почти не изменяется, в то время как при  $k < 0$  она увеличивается с увеличением силы межслойной связи по модулю (рис. 6,  $a, c$ ).

Как можно видеть из рисунков 6,  $d, e$ , в системе возможно наблюдение синхронизации элементов сети по частоте. Совпадение средних частот является следствием синхронизации автоколебаний, возникших в слоях сети и в хабе. Синхронизация имеет место в широкой области значений параметров связи, за исключением полосы значений  $k$  вблизи нуля (см. рис. 6,  $d$ ). При этом синхронизация между внешними слоями достигается за счет синхронизации с хабом (см. рис. 6,  $e$ ).

**2.2. Динамика трехслойной системы в присутствии шума в хабе.** Было проведено исследование влияния аддитивного белого гауссовского шума, введенного в хаб (источник шума  $\eta(t)$  с интенсивностью  $D$ ), на возможность синхронизации внешних слоев. Как и следовало ожидать, шум в хабе ухудшает синхронизацию слоев, для ее наблюдения требуется большая сила межслойной связи (рис. 7). Обратим внимание, что в отсутствие шума на плоскости параметров  $(\sigma_1, k)$  в отрицательной области межслойной связи присутствовал дополнительный язык синхронизации, который находится не в окрестности  $\sigma_1 = \sigma_2$ , а отходит от него в сторону  $\sigma_1 < \sigma_2$  (см. рис. 6).

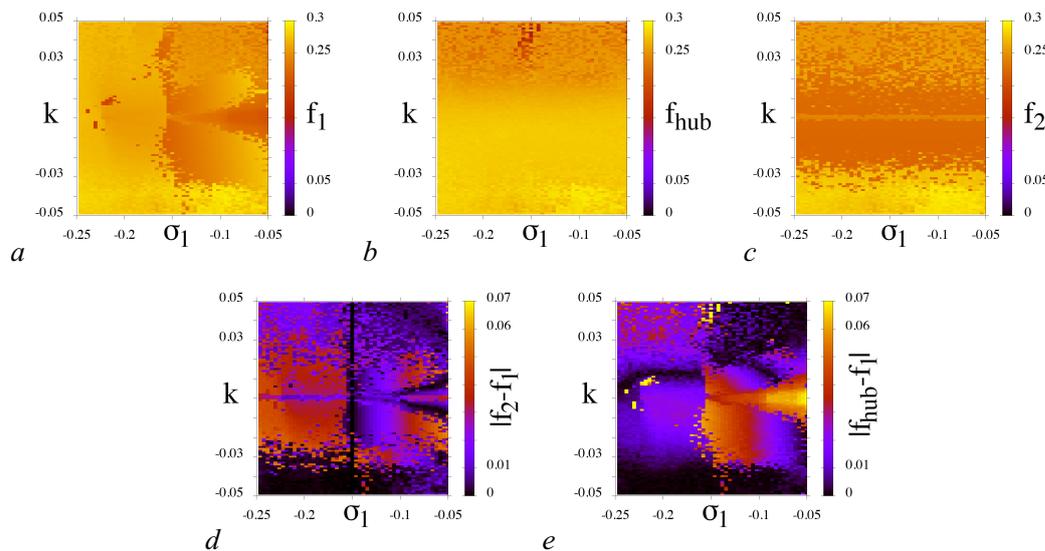


Рис. 7. Распределение средних частот спайков в сети (3) на плоскости параметров связи  $(\sigma_1, k)$  в присутствии шумового воздействия на хаб с интенсивностью  $D = 0.01$ :  $a$  — средняя частота элементов первого слоя,  $b$  — средняя частота хаба,  $c$  — средняя частота элементов второго слоя,  $d$  — абсолютная величина разности средних частот спайков в первом и втором слоях,  $e$  — абсолютная величина разности средних частот спайков в первом слое и хабе. Другие параметры:  $a_1 = a_2 = a_{\text{hub}} = 1.05$ ,  $\sigma_2 = -0.15$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 7. Distribution of average spike frequencies in the network (3) in the  $(\sigma_1, k)$  plane of coupling parameters in the presence of noise influence on the hub with intensity  $D = 0.01$ :  $a$  — average frequency of the elements of the first layer,  $b$  — average frequency of the hub,  $c$  — average frequency of the elements of the second layer,  $d$  — absolute value of the difference in average spike frequencies between the first layer and the second one,  $e$  — absolute value of the difference in average spike frequencies between the first layer and the hub. Other parameters:  $a_1 = a_2 = a_{\text{hub}} = 1.05$ ,  $\sigma_2 = -0.15$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (color online)

Данный язык синхронизации становится более ярко выраженным при введении в систему шума (см. рис. 7), при этом симметрично ему такая же области синхронизации наблюдается при  $k > 0$ . В этой области синхронизация внешних слоев частота колебаний хаба отличается от средней частоты колебаний внешних слоев.

### Заключение

Проведенные исследования спайковой активности нейронов в двух простых моделях нейронных сетей показали, что даже в небольших ансамблях, состоящих из идентичных возбудимых нейронов с простой топологией связей, можно получить разнообразные проявления спайковой активности в зависимости от характера и силы связей. Важную роль играет наличие отталкивающих взаимодействий, которые могут вызвать переход нейронов в режим автоколебаний, в котором нейроны будут генерировать спайки в отсутствие шума и внешних импульсов.

Первая рассмотренная модель представляет собой кольцо локально связанных нейронов, взаимодействующих с центральным элементом (хабом). Кольцо нейронов и хаб составляют две различающиеся части системы, в которых при определенных параметрах связи могут возникнуть автоколебания с разными частотами. В работе было установлено, что в этом случае в некоторой области значений параметров связи наблюдается эффект синхронизации средних частот спайков в кольце и хабе. Возможно также возбуждение автоколебаний только в кольце или только в хабе. В этом случае в другой части системы также будут возникать одновременные спайки как результат воздействия автоколебаний на пассивную часть системы. Таким образом, средние частоты

зажиганий в кольце и в хабе могут совпадать. Величина частот зажиганий, их совпадение или различие в кольце и хабе управляются коэффициентами связи нейронов в кольце и нейронов кольца и хаба. Введение слабого шума в хаб мало влияет на картину распределения средних частот, однако с ростом интенсивности шума эффект синхронизации разрушается, а в области диссипативных связей возникают индуцированные шумом стохастические спайки.

Вторая модель представляла собой два кольца нейронов, связанных через общий хаб. В этом случае у системы выделяются три части: два кольца (внешних слоя) и хаб. Все нейроны колец и хаб полагались идентичными, и их параметры соответствуют возбудимой динамике. В зависимости от выбора связей можно наблюдать разные частоты спайковой активности в трех частях системы или режим, когда средние частоты спайков совпадают. Для данной модели был рассмотрен случай только отталкивающих связей внутри колец, в то время как взаимодействие с хабом могло быть и отталкивающим, и диссипативным. В результате отталкивающего характера связей в кольцах устанавливался автоколебательный режим и возникала спайковая активность, причем частота зажиганий определялась коэффициентами связей и была различной для невзаимодействующих колец. Взаимодействие колец через общий хаб при соответствующем выборе параметров связи приводило к синхронизации средних частот зажиганий в двух кольцах. Эффект синхронизации наблюдался как при диссипативной, так и при отталкивающей связи колец с хабом, при этом в обоих случаях синхронизация колец наблюдалась при условии синхронизации хаба. Шум, добавленный в хаб, ухудшает синхронизацию слоев. В то же время при воздействии шума была обнаружена небольшая новая область синхронизации на плоскости параметров связи, в которой средняя частота зажиганий в обоих кольцах одинакова, причем она отличается от средней частоты зажиганий в хабе.

Следует отметить, что в данном исследовании была получена лишь самая общая картина спайковой активности возбудимых нейронов в двух рассмотренных моделях сети, и многие детали поведения нейронов остались невыясненными. Дальнейшие исследования позволят уточнить неясные детали поведения, механизмы возникновения спайков и особенности их синхронизации. Однако уже сейчас можно сделать вывод о том, что связи играют важную роль в формировании спайковой активности возбудимых нейронов, которые в отсутствие отталкивающих взаимодействий находятся в состоянии покоя. Контроль силы связей позволяет управлять спайковой активностью сети, добиваясь синхронизации средних частот зажиганий разных групп нейронов или их рассогласования.

## Список литературы

1. *Buzsaki G.* Rhythms of the Brain. Oxford: Oxford University Press, 2006. 464 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001.
2. *Rabinovich M. I., Varona P., Selverston A. I., Abarbanel H. D.* Dynamical principles in neuroscience // *Reviews of modern physics*. 2006. Vol. 78. P. 1213. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.1213.
3. *Izhikevich E. M.* Dynamical Systems in Neuroscience. Cambridge: MIT Press, 2007. 441 p. DOI: 10.7551/mitpress/2526.001.0001.
4. *Kaiser M., Hilgetag C. C., Kötter R.* Hierarchy and dynamics of neural networks // *Front. Neuroinform.* 2010. Vol. 4. P. 112. DOI: 10.3389/fninf.2010.00112.
5. *Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A., Antonopoulos C. G.* Chimera-like states in modular neural networks // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6. P. 19845. DOI: 10.1038/srep19845.
6. *Herbet G., Duffau H.* Revisiting the functional anatomy of the human brain: toward a meta-networking theory of cerebral functions // *Physiological Reviews*. 2020. Vol. 100, iss. 3. P. 1181–1228. DOI: 10.1152/physrev.00033.2019.
7. *Храмов А. Е., Фролов Н. С., Максименко В. А., Куркин С. А., Казанцев В. Б., Писарчик А. Н.* Функциональные сети головного мозга: от восстановления связей до динамической интегра-

ции // Успехи физических наук. 2021. Т. 191, № 6. С. 614–650. DOI: 10.3367/UFNr.2020.06.038807.

8. *Ghosh-Dastidar S., Adeli H.* Spiking neural networks // *International Journal of Neural Systems*. 2009. Vol. 19, no. 04. P. 295–308. DOI: 10.1142/S0129065709002002.
9. *Pfeiffer M., Pfeil T.* Deep learning with spiking neurons: opportunities and challenges // *Frontiers in Neuroscience*. 2018. Vol. 12. P. 774. DOI: 10.3389/fnins.2018.00774.
10. *Han J. K., Yun S. Y., Lee S. W., Yu J. M., Choi Y. K.* A review of artificial spiking neuron devices for neural processing and sensing // *Advanced Functional Materials*. 2022. Vol. 32, iss. 33. P. 2204102. DOI: 10.1002/adfm.202204102.
11. *Yamazaki K., Vo-Ho V. K., Bulsara D., Le N.* Spiking neural networks and their applications: A review // *Brain Sciences*. 2022. Vol. 12, iss. 7. P. 863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
12. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
13. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. New York: Courier Dover Publications, 2003. 176 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
14. *Boccaletti S., Pisarchik A., del Genio C., Amann A.* Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 264 p. DOI: 10.1017/9781107297111.
15. *Boccaletti S., Bragard J., Arecchi F. T., Mancini H.* Synchronization in non-identical extended systems // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83. P. 536–539. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.536.
16. *Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Sendiña-Nadal I., Gutiérrez R., Buldú J. M., Boccaletti S.* Inter-layer synchronization in non-identical multi-layer networks // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7. P. 45475. DOI: 10.1038/srep45475.
17. *Andrzejak R. G., Ruzszen G., Malvestio I.* Generalized synchronization between chimera states // *Chaos*. 2017. Vol. 27, iss. 5. P. 053114. DOI: 10.1063/1.4983841.
18. *Bukh A., Rybalova E., Semenova N., Strelkova G., Anishchenko V.* New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps // *Chaos*. 2017. Vol. 27, iss. 11. P. 111102. DOI: 10.1063/1.5009375.
19. *Rybalova E. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Anishchenko V. S., Zakharova A. S.* Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode // *Chaos*. 2019. Vol. 29, iss. 3. P. 033134. DOI: 10.1063/1.5090184.
20. *Elson R. C., Selverston A. I., Huerta R., Rulkov N. F., Rabinovich M. I., Abarbanel H. D.* Synchronous behavior of two coupled biological neurons // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81. P. 5692. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.5692.
21. *Kopell N., Ermentrout G. B., Whittington M. A., Traub R. D.* Gamma rhythms and beta rhythms have different synchronization properties // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2000. Vol. 97, no. 4. P. 1867–1872. DOI: 10.1073/pnas.97.4.1867.
22. *Nowotny T., Huerta R., Rabinovich M. I.* Neuronal synchrony: peculiarity and generality // *Chaos*. 2008. Vol. 18. P. 5692. DOI: 10.1063/1.2949925.
23. *Uhlhaas P., Pipa G., Lima B., Melloni L., Neuenschwander S., Nikolić D., Singer W.* Neural synchrony in cortical networks: history, concept and current status // *Front. Integr. Neurosci.* 2009. Vol. 3. P. 17. DOI: 10.3389/neuro.07.017.2009.
24. *RamLOW L., Sawicki J., Zakharova A., Hlinka J., Claussen J. C., Schöll E.* Partial synchronization in empirical brain networks as a model for unihemispheric Sleep // *Europhysics Letters*. 2019. Vol. 126, iss. 5. P. 50007. DOI: 10.1209/0295-5075/126/50007.
25. *Andreev A. V., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Synchronization of interacted spiking neuronal networks with inhibitory coupling // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. Vol. 146. P. 110812. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110812.

26. *Ward L. M.* Synchronous neural oscillations and cognitive processes // *Trends Cogn. Sci.* 2003. Vol. 7, iss. 12. P. 553–559. DOI: 10.1016/j.tics.2003.10.012.
27. *Cantero J. L., Atienza M.* The role of neural synchronization in the emergence of cognition across the wake-sleep cycle // *Rev Neurosci.* 2005. Vol. 16, iss. 1. P. 69–83. DOI: 10.1515/revneuro.2005.16.1.69
28. *Чук Д., Борисюк Р. М., Казанович Я. Б.* Режимы синхронизации в сети нейронов Ходжкина–Хаксли с центральным элементом // *Математическая биология и биоинформатика.* 2008. Т. 3, № 1. С. 16–35.
29. *Fell J., Axmacher N.* The role of phase synchronization in memory processes // *Nat. Rev. Neurosci.* 2011. Vol. 12. P. 105–118. DOI: 10.1038/nrn2979.
30. *Gansel K. S.* Neural synchrony in cortical networks: mechanisms and implications for neural information processing and coding // *Front Integr Neurosci.* 2022. Vol. 16. P. 900715. DOI: 10.3389/fnint.2022.900715.
31. *Dominguez L. G., Wennberg R. A., Gaetz W., Cheyne D., Snead O. C., Velazquez J. L. P.* Enhanced synchrony in epileptiform activity? Local versus distant phase synchronization in generalized seizures // *J. Neurosci.* 2005. Vol. 25. P. 8077–8084. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1046-05.2005.
32. *Lehnertz K.* Epilepsy and nonlinear dynamics // *J. Biol. Phys.* 2008. Vol. 34. P. 253–266. DOI: 10.1007/s10867-008-9090-3.
33. *Perez Velazquez J., Guevara E. R., Rosenblum M.* The epileptic thalamocortical network is a macroscopic self-sustained oscillator: evidence from frequency-locking experiments in rat brains // *Sci. Rep.* 2015. Vol. 5. 8423. DOI: 10.1038/srep08423.
34. *Gerster M., Berner R., Sawicki J., Zakharova A., Škoch A., Hlinka J., Lehnertz K., Schöll E.* FitzHugh–Nagumo oscillators on complex networks mimic epileptic-seizure-related synchronization phenomena // *Chaos.* 2020. Vol. 30, iss. 12. P. 123130. DOI: 10.1063/5.0021420.
35. *Izhikevich E. M.* *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting.* Cambridge: MIT Press, 2006. 458 p. DOI: 10.7551/mitpress/2526.001.0001.
36. *Stiefel K., Ermentrout B.* Neurons as oscillators // *Journal of Neurophysiology.* 2016. Vol. 116. P. 00525. DOI: 10.1152/jn.00525.2015.
37. *Smallridge R.* Repulsive or attractive? // *Nat Rev Neurosci.* 2003. Vol. 4. P. 522. DOI: 10.1038/nrn1169.
38. *Liu C., Trush O., Han X., Wang M., Takayama R., Yasugi T., Hayashi T., Sato M.* Dscam1 establishes the columnar units through lineage-dependent repulsion between sister neurons in the fly brain // *Nat Commun.* 2020. Vol. 11. P. 4067. DOI: 10.1038/s41467-020-17931-w.
39. *Yanagita T., Ichinomiya T., Oyama Y.* Pair of excitable FitzHugh–Nagumo elements: Synchronization, multistability, and chaos // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. P. 056218. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.056218.
40. *Рыбалова Е. В., Богатенко Т. Р., Бух А. В., Вадивасова Т. Е.* Роль связей, шумового и гармонического воздействий в колебательной активности сетей возбудимых осцилляторов ФитцХью–Нагумо // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика.* 2023. Т. 23, вып. 4. С. 295–306. DOI: 10.18500/1817-3020-2023-23-4-294-306.
41. *Ullner E., Zaikin A., Volkov E., Ojalvo J.* Multistability and clustering in a population of synthetic genetic oscillators via phase-repulsive cell-to-cell communication // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. 148103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.148103
42. *Hens C. R., Pal P., Bhowmick S. K., Roy P. K., Sen A., Dana S. K.* Diverse routes of transition from amplitude to oscillation death in coupled oscillators under additional repulsive links // *Phys. Rev. E.* Vol. 89, iss. 3. P. 032901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032901.
43. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89. P. 060901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.060901.

44. Mishra A., Hens C., Bose M., Roy P.K., Dana S.K. Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive global coupling // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92, no. 6. P. 062920. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062920.
45. Shepelev I. A., Muni S. S., Vadivasova T. E. Spatiotemporal patterns in a 2D lattice with linear repulsive and nonlinear attractive coupling // *Chaos*. 2021. Vol. 31. P. 043136. DOI: 10.1063/5.004832.
46. van den Heuvel P. M., Sporns O. Network hubs in the human brain // *Trends in Cognitive Science / Special issue: The Connectome – Feature review*. 2013. Vol. 17, iss. 12. P. 683–696. DOI: 10.1016/j.tics.2013.09.012.
47. Arnatkeviciute A., Fulcher B. D., Pockock R., Fornito A. Hub connectivity, neuronal diversity, and gene expression in the *Caenorhabditis elegans* connectome // *PLoS Comput. Biol.* 2018. Vol. 14. P. e1005989. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1005989.

## References

1. Buzsaki G. *Rhythms of the Brain*. Oxford: Oxford University Press; 2006. 464 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001.
2. Rabinovich MI, Varona P, Selverston AI, Abarbanel HD. Dynamical principles in neuroscience. *Reviews of Modern Physics*. 2006;78:1213. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.1213.
3. Izhikevich EM. *Dynamical systems in neuroscience*. Cambridge: MIT Press; 2007. 441 p. DOI: 10.7551/mitpress/2526.001.0001.
4. Kaiser M, Hilgetag CC, Kötter R. Hierarchy and dynamics of neural networks. *Front. Neuroinform.* 2010;4:112. DOI: 10.3389/fninf.2010.00112.
5. Hizanidis J, Kouvaris NE, Zamora-López G, Díaz-Guilera A, Antonopoulos CG. Chimera-like states in modular neural networks. *Scientific Reports*. 2016;6:19845. DOI: 10.1038/srep19845.
6. Herbet G, Duffau H. Revisiting the functional anatomy of the human brain: toward a meta-networking theory of cerebral functions. *Physiological Reviews*. 2020;100(3):1181–1228. DOI: 10.1152/physrev.00033.2019.
7. Hramov AE, Frolov NS, Maksimenko VA, Kurkin SA, Kazantsev VB, Pisarchik AN. Functional networks of the brain: from connectivity restoration to dynamic integration. *Physics-Uspekhi*. 2021;64(6):584–616. DOI: 10.3367/UFNe.2020.06.038807.
8. Ghosh-Dastidar S, Adeli H. Spiking neural networks. *International Journal of Neural Systems*. 2009;19(04):295–308. DOI: 10.1142/S0129065709002002.
9. Pfeiffer M, Pfeil T. Deep learning with spiking neurons: opportunities and challenges. *Frontiers in Neuroscience*. 2018;12:774. DOI: 10.3389/fnins.2018.00774.
10. Han JK, Yun SY, Lee SW, Yu JM, Choi YK. A review of artificial spiking neuron devices for neural processing and sensing. *Advanced Functional Materials*. 2022;32(33):2204102. DOI: 10.1002/adfm.202204102.
11. Yamazaki K, Vo-Ho VK, Bulsara D, Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sciences*. 2022;12(7):863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
12. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press; 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
13. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. New York, NY: Courier Dover Publications; 2003. 176 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
14. Boccaletti S, Pisarchik A, del Genio C, Amann A. *Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks*. Cambridge: Cambridge University Press; 2018. 264 p. DOI: 10.1017/9781107297111.
15. Boccaletti S, Bragard J, Arecchi FT, Mancini H. Synchronization in non-identical extended systems. *Phys. Rev. Lett.* 1999;83:536–539. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.536.

16. Leyva I, Sevilla-Escoboza R, Sendiña-Nadal I, Gutiérrez R, Buldú JM, Boccaletti S. Inter-layer synchronization in non-identical multi-layer networks. *Scientific Reports*. 2017;7:45475. DOI: 10.1038/srep45475
17. Andrzejak RG, Ruzzene G, Malvestio I. Generalized synchronization between chimera states. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2017;27(5):053114. DOI: 10.1063/1.4983841.
18. Bukh A, Rybalova E, Semenova N, Strelkova G, Anishchenko V. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps. *Chaos*. 2017;27(11):111102. DOI: 10.1063/1.5009375.
19. Rybalova EV, Vadivasova TE, Strelkova GI, Anishchenko VS, Zakharova AS. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode. *Chaos*. 2019;29(3):033134. DOI: 10.1063/1.5090184.
20. Elson RC, Selverston AI, Huerta R, Rulkov NF, Rabinovich MI, Abarbanel HD. Synchronous behavior of two coupled biological neurons. *Phys. Rev. Lett.* 1998;81:5692. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.5692.
21. Kopell N, Ermentrout GB, Whittington MA, Traub RD. Gamma rhythms and beta rhythms have different synchronization properties. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2000;97(4):1867–1872. DOI: 10.1073/pnas.97.4.1867
22. Nowotny T, Huerta R, Rabinovich MI. Neuronal synchrony: peculiarity and generality. *Chaos*. 2008;18:5692. DOI: 10.1063/1.2949925.
23. Uhlhaas P, Pipa G, Lima B, Melloni L, Neunschwander S, Nikolić D, Singer W. Neural synchrony in cortical networks: history, concept and current status. *Front. Integr. Neurosci.* 2009;3:17. DOI: 10.3389/neuro.07.017.2009
24. Ramlow L, Sawicki J, Zakharova A, Hlinka J, Claussen JC, Schöll E. Partial synchronization in empirical brain networks as a model for unihemispheric Sleep. *Europhysics Letters*. 2019;126(5):50007. DOI: 10.1209/0295-5075/126/50007.
25. Andreev AV, Maksimenko VA, Pisarchik AN, Hramov AE. Synchronization of interacted spiking neuronal networks with inhibitory coupling. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;146:110812. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110812.
26. Ward LM. Synchronous neural oscillations and cognitive processes. *Trends Cogn. Sci.* 2003;7:553–559. DOI: 10.1016/j.tics.2003.10.012.
27. Cantero JL, Atienza M. The role of neural synchronization in the emergence of cognition across the wake-sleep cycle. *Rev Neurosci*. 2005;16(1):69–83. DOI: 10.1515/revneuro.2005.16.1.69.
28. Chick D, Borisyuk RM, Kazanovich YB. Synchronization in a neural network of Hodgkin–Huxley neurons with a central element. *Mat. Biolog. Bioinform.* 2008;3(1):16–35.
29. Fell J, Axmacher N. The role of phase synchronization in memory processes. *Nat. Rev. Neurosci.* 2011;12:05–118. DOI: 10.1038/nrn2979.
30. Gansel KS. Neural synchrony in cortical networks: mechanisms and implications for neural information processing and coding. *Front Integr Neurosci*. 2022. Vol.16. P. 900715. DOI: 10.3389/fnint.2022.900715.
31. Dominguez LG, Wennberg RA, Gaetz W, Cheyne D, Snead OC, Velazquez JLP. Enhanced synchrony in epileptiform activity? Local versus distant phase synchronization in generalized seizures. *J. Neurosci.* 2005;25:8077–8084. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1046-05.2005.
32. Lehnertz K. Epilepsy and nonlinear dynamics. *J. Biol. Phys.* 2008;34:253–266. DOI: 10.1007/s10867-008-9090-3.
33. Perez Velazquez J, Guevara ER, Rosenblum M. The epileptic thalamocortical network is a macroscopic self-sustained oscillator:evidence from frequency-locking experiments in rat brains. *Sci. Rep.* 2015;5:8423. DOI: 10.1038/srep08423.

34. Gerster M, Berner R, Sawicki J, Zakharova A, Škoch A, Hlinka J, Lehnertz K, Schöll E. FitzHugh–Nagumo oscillators on complex networks mimic epileptic-seizure-related synchronization phenomena. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020;30(12):123130. DOI: 10.1063/5.0021420.
35. Izhikevich EM. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press; 2006. DOI: 10.7551/mitpress/2526.001.0001.
36. Stiefel K, Ermentrout B. Neurons as oscillators. *Journal of neurophysiology*. 2016;116:00525. DOI: 10.1152/jn.00525.2015.
37. Smallridge R. Repulsive or attractive? *Nat Rev Neurosci*. 2003;4:522. DOI: 10.1038/nrn1169.
38. Liu C, Trush O, Han X, Wang M, Takayama R, Yasugi T, Hayashi T, Sato M. Dscam1 establishes the columnar units through lineage-dependent repulsion between sister neurons in the fly brain. *Nat Commun*. 2020;11:4067. DOI: 10.1038/s41467-020-17931-w.
39. Yanagita T, Ichinomiya T, Oyama Y. Pair of excitable FitzHugh–Nagumo elements: Synchronization, multistability, and chaos. *Phys. Rev. E*. 2005;72:056218. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.056218.
40. Rybalova EV, Bogatenko TR, Bukh AV, Vadivasova TE. The role of coupling, noise and harmonic impact in oscillatory activity of an excitable FitzHugh–Nagumo oscillator network. *Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2023;23(4):295–306. DOI: 10.18500/1817-3020-2023-23-4-294-306.
41. Ullner E, Zaikin A, Volkov E, Ojalvo J. Multistability and clustering in a population of synthetic genetic oscillators via phase-repulsive cell-to-cell communication. *Phys. Rev. Lett*. 2007;99:148103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.148103.
42. Hens CR, Pal P, Bhowmick SK, Roy PK, Sen A, Dana SK. Diverse routes of transition from amplitude to oscillation death in coupled oscillators under additional repulsive links. *Phys. Rev. E*. 2014;89(3):032901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032901.
43. Maistrenko Y, Penkovsky B, Rosenblum M. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions. *Phys. Rev. E*. 2014;89:060901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.060901.
44. Mishra A, Roy PK, Dana SK. Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive global coupling. *Phys. Rev. E*. 2015;92(6):062920. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062920.
45. Shepelev IA, Muni SS, Vadivasova TE. Spatiotemporal patterns in a 2D lattice with linear repulsive and nonlinear attractive coupling. *Chaos*. 2021;31:043136. DOI: 10.1063/5.004832.
46. van den Heuvel PM., Sporns O. Network hubs in the human brain. *Trends in Cognitive Science. Special issue: The Connectome – Feature review*. 2013;17(12):683–696. DOI: 10.1016/j.tics.2013.09.012.
47. Arnatkeviciute A, Fulcher BD, Pockock R, Fornito A. Hub connectivity, neuronal diversity, and gene expression in the *Caenorhabditis elegans* connectome. *PLoS Comput. Biol*. 2018;14:e1005989. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1005989



*Новичкова Валентина Алексеевна* – родилась в р. п. Степное Советского района, Саратовской области. В 2024 году окончила бакалавриат Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Научные интересы: нелинейная динамика, статистическая физика, анализ временных рядов.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский  
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: novichkovava@mail.ru  
 ORCID: 0009-0009-3352-3936



*Рыбалова Елена Владиславовна* – окончила бакалавриат и магистратуру Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Радиофизика». Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 2023 году. Ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Научные интересы: нелинейная динамика и теория колебаний, синхронизация, влияние флуктуаций, ансамбли связанных осцилляторов, химерные и уединенные состояния. В соавторстве опубликовано более 35 научных статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: rybalovaev@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-3008-1078  
AuthorID (eLibrary.Ru): 57189659228  
ScopusID: 57189659228



*Пономаренко Владимир Иванович* – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Доктор физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1579-6465  
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981). Доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и стохастической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: vadivasovate@yandex.ru  
ORCID: 0000-0002-8081-2820  
AuthorID (eLibrary.Ru): 34840  
ScopusID: 6701738949

## EDITOR-IN-CHIEF

*Yu. V. Gulyaev*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

## DEPUTY EDITORS

*I. V. Sysoev*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

## MANAGING EDITOR

*M. V. Sysoeva*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*S. Boccaletti*, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

*A. M. Bykov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

*N. S. Ginzburg*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*O. I. Kanakov*, Ph.D., Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

*N. V. Kuznetsov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

*G. van Luijelaar*, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

*A. Lüttjohann*, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

*G. G. Malinetskii*, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*I. I. Mokhov*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

*A. B. Neiman*, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

*V. I. Nekorkin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

*V. V. Tuchin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*E. Ya. Frisman*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

*V. A. Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

*V. A. Cherepenin*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

Для оформления обложки журнала использовано изображение, находящееся в открытом доступе.

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >