

УДК 532.526:544.015.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТАЯНИЯ-НАМЕРЗАНИЯ ЛЬДА В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ЖИДКОСТЬЮ МАЛОЙ НЕРОВНОСТИ

© 2023 г. Р. К. Гайдуков^{a,*}, В. Г. Данилов^{a,**}, А. В. Фонарева^{a,***}

^aНациональный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*E-mail: roma1990@gmail.com

**E-mail: vgdanilov@mail.ru

***E-mail: afonareva@hse.ru

Поступила в редакцию 25.10.2022 г.

После доработки 25.04.2023 г.

Принята к публикации 10.05.2023 г.

Исследуется фазовый переход при обтекании жидкостью ледяной поверхности с малой локализованной неровностью при больших числах Рейнольдса. В рамках двухпалубной структуры пограничного слоя на основе системы фазового поля построена математическая модель, описывающая динамику фазового перехода, и приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: двухпалубная структура пограничного слоя, теплоперенос, фазовый переход, локализованные возмущения, асимптотика, численное моделирование

DOI: 10.31857/S1024708422600841, **EDN:** OFZPCX

В работе рассматривается течение вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости вдоль неровной ледяной поверхности при достаточно больших значениях числа Рейнольдса Re в отсутствие силы тяжести, см. рис. 1. А именно, предполагается, что на плоской ледяной поверхности в точке x_0 локализована малая неровность (типа горбика или ямки), амплитуда которой порядка $O(\epsilon^{4/3})$ и ширина порядка $O(\epsilon)$, где $\epsilon = Re^{-1/2}$ — малый параметр. Также предполагается, что набегающий поток есть плоскопараллельный поток, сонаправленный с осью Ox , имеющий скорость $U_\infty = (u_\infty, 0)$, плотность ρ_l и температуру $\hat{T}_\infty$, а точка x_0 удалена на от края поверхности на столько, что перед неровностью сформировался пограничный слой Прандтля (т.е. скорость в пограничном слое описывается функцией Блазиуса).

Основной целью данной работы является исследование фазового перехода (лед–вода): таяние льда при обтекании поверхности теплой водой, и, наоборот, намерзание льда при обтекании поверхности переохлажденной водой.

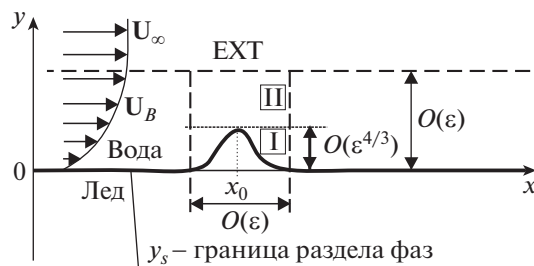


Рис. 1. Обтекаемая ледяная поверхность с малой неровностью и двухпалубная структура пограничного слоя: I — нижняя палуба (тонкий пограничный слой), II — средняя палуба (классический пограничный слой Прандтля), EXT — область внешнего (потенциального) течения, U_B — течение с профилем скорости Блазиуса.

Таблица 1. Физические постоянные [23, 33–36] и характерные масштабы

Физическая величина	Вода	Лед
Удельная теплоемкость	$c_l = 4.2 \times 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	$c_s = 2.05 \times 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
Удельная теплопроводность	$\lambda_l = 0.56 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	$\lambda_s = 2.25 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
Плотность	$\rho_l = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$	$\rho_s = 0.9 \times 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$
Поверхностное натяжение	$\sigma = 3.3 \text{ Н}/\text{м}$	
Кинематическая вязкость	$\nu = 1.79 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	
Кинетический коэффициент роста		$m = 7.3 \times 10^{-3} \text{ м}/(\text{с} \cdot \text{К})$
Температура плавления		$T_m = 273 \text{ К}$
Скрытая теплота плавления		$l = 3.3 \times 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$
Характерный масштаб		$x_0 = 1 \text{ м}$
Характерная скорость		$u_\infty = 1 \text{ м}/\text{с}$

Перейдем к математической постановке задачи. Введем характерный пространственный масштаб x_0 , характерную скорость u_∞ , характерное давление $p_\infty = \rho_l u_\infty^2$, характерное время $t_0 = x_0/u_\infty$, характерную температуру $T_0 = l/c_l \approx 78.6 \text{ К}$, где l – скрытая теплота плавления, c_l – удельная теплоемкость жидкости, а значения всех физических постоянных см. в табл. 1. Теперь введем безразмерные пространственные переменные $(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})/x_0$, безразмерное время $t = \hat{t}/t_0$, безразмерную скорость $U = \hat{U}/u_\infty$, безразмерное давление $p = \hat{p}/p_\infty$, безразмерную температуру

$$T = \frac{\hat{T} - T_m}{T_0} = (\hat{T} - T_m) \frac{c_l}{l}, \quad (1)$$

где T_m – температура плавления твердой фазы (льда), в случае, когда разделяющая лед и воду поверхность плоская, а все переменные с “крышками” размерные (над физическими постоянными “крышки” не ставились, их значения приведены в табл. 1). Следовательно, число Рейнольдса $Re = u_\infty x_0/\nu$, где ν – кинематическая вязкость рассматриваемой жидкости, а безразмерная температура набегающего потока равна $T_{\text{water}} = (\hat{T}_\infty - T_m)/T_0$.

Тогда неровность на обтекаемой поверхности будет локализована в точке $x = 1$, и будем считать, что обтекаемая поверхность y_s (поверхность льда) задается следующим образом:

$$y_s = \varepsilon^{4/3} h(t, (x-1)/\varepsilon), \quad (2)$$

где $h(t, \xi)$ – некоторая быстроубывающая по ξ функция ($h|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$), описывающая форму неровности, которая меняется во времени в силу фазового перехода (процессов плавления-кристаллизации), см. рис. 1.

Отметим, что выбранные геометрические масштабы в (2) (амплитуда $O(\varepsilon^{4/3})$ и ширина неровности $O(\varepsilon)$) порождают двухпалубную структуру пограничного слоя, см. [1–4] и рис. 1. Многопалубные (трех- и двухпалубные) структуры пограничного слоя в задачах обтекания малых неровностей известны довольно давно, начиная с работ В.Я. Нейланда [5], К. Стюартсона [6], Ф.Т. Смита [7], и исследованы во множестве работ известных ученых. В рамках трехпалубной модели в цикле работ И.И. Липатова и М.В. Коротеева [8–10] исследовался теплоперенос в задаче обтекания газом пластины с плоскими локальными нагреваемыми зонами. Также в рамках трехпалубной модели в работах А.Ф. Алджохани и Дж.С.Б. Гаджара [11, 12] изучалась задача обтекания газом нагреваемых неровностей в форме горбиков на поверхности пластины для дозвукового и трансзвукового течений. Однако задача о фазовом переходе в рамках многопалубных структур ранее не исследовалась.

С точки зрения гидродинамики, исследуемая задача представляет собой нестационарную задачу обтекания неровности с изменяемой во времени формой. Такая задача описывается (безразмерной) системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \langle \mathbf{U}, \nabla \rangle \mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{U}, \quad \langle \nabla, \mathbf{U} \rangle = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями прилипания к обтекаемой поверхности и условиями согласования с набегающим потоком:

$$\mathbf{U}|_{y=y_s} = 0, \quad \mathbf{U}|_{y \rightarrow \infty} = \mathbf{U}|_{x \leq 0} = (1, 0), \quad (4)$$

и некоторым гладким начальным условием, где $\mathbf{U} = (u(t, x, y), v(t, x, y))$ – двумерный вектор скорости, $p = p(t, x, y)$ – давление.

ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ НЕРОВНОСТИ

В работе [4] был проведен асимптотический анализ рассматриваемой гидродинамической задачи (3), (4) с помощью комбинации метода погранслойных разложений, основанного на идеях из работы М.И. Вишика и Л.А. Люстерника [13], и метода построения локализованных асимптотических решений (малое возмущение границы – наличие неровности на обтекаемой поверхности не влияет на поток далеко до и после нее), и в результате было получено асимптотическое решение с двухпалубной структурой пограничного слоя. В рамках данной работы представляет интерес течение лишь около обтекаемой неровности – в области тонкого пограничного слоя (см. область I на рис. 1), которое описывается системой уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением (см. подробнее в [4]):

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} \right) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} = - \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{\theta}^2} + \varepsilon^{2/3} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} = 0, \quad (6)$$

$$u^*|_{\bar{\theta}=0} = v^*|_{\bar{\theta}=0} = 0, \quad u^*|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = f''(0)\bar{\theta}, \quad v^*|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} \Big|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty} = f''(0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} = f''(0)v^*|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty}, \quad (8)$$

$$u^*|_{t=0} = U_0(\xi, \bar{\theta}), \quad (9)$$

где $u^* = u^*(t, \xi, \bar{\theta})$ и $v^* = v^*(t, \xi, \bar{\theta})$ – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости, $f = f((y - y_s)/(\varepsilon\sqrt{x}))$ – функция Блазиуса; U_0 – некоторая гладкая функция; $\bar{\theta} = (y - y_s)/\varepsilon^{4/3}$ – вертикальная погранслойная переменная (она вводится так, что обтекаемая поверхность $y = y_s$ становится плоской, т.е. граница раздела фаз есть $\bar{\theta} = 0$); $\xi = (x - 1)/\varepsilon$ – горизонтальная быстрая переменная. Отметим, что данная система уравнений эффективно решается численно [4].

Наличие коэффициента $\varepsilon^{2/3}$ в уравнении (5) обусловлено выбором временного масштаба. Дело в том, что в нестационарных многопалубных структурах, помимо пространственной разномасштабности, возникает также иерархия времен в слоях структуры, см. [14–17], и рассмотрение течения на конечных временах во всей задаче (в уравнениях Навье–Стокса (3)) приводит к тому, что течение около обтекаемой поверхности (на нижней палубе, см. область I на рис. 1) нужно рассматривать на больших временах $t \sim \varepsilon^{-2/3}$ (т.е. выбор временного масштаба в исходной задаче приводит к появлению данного коэффициента в (5)).

Масштабы двухпалубной структуры пограничного слоя порождают следующие характеристические масштабы скоростей в пристеночной области:

$$u_0^* = \varepsilon^{1/3} u_\infty, \quad v_0^* = \varepsilon^{2/3} u_\infty, \quad (10)$$

где u_0^*, v_0^* – характерные значения скоростей в пристеночной области (см. [1, 18]). Обезразмеривание уравнения теплопроводности в пристеночной области проводится в соответствии с характерными масштабами, приведенными в (10) и на рис. 1.

Уравнение теплопроводности в движущейся несжимаемой жидкости имеет следующий вид [19]:

$$c_l \rho_l \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\lambda_l \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\lambda_l \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right) + \nu \rho_l \left[2 \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right], \quad (11)$$

где переменные с “крышками” – размерные, λ_l – удельная теплопроводность жидкости, ее значение и значения остальных физических величин приведены в табл. 1.

Проведем обезразмеривание уравнения (11) обычным способом. Положим $\hat{x} = \varepsilon \xi x_0$, $\hat{y} = \varepsilon^{4/3} \theta x_0$, где (ξ, θ) – безразмерные координаты в тонком пограничном слое (I на рис. 1); $(\hat{u}, \hat{v}) = (u_0^* u^*, v_0^* v^*)$, где (u^*, v^*) – безразмерный вектор скорости в тонком пограничном слое (см. (5)–(9)), u_0^*, v_0^* определены выше (10), а значения характерных величин приведены в табл. 1. Тогда, например,

$$c_l \rho_l \hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = c_l \rho_l \frac{u_0^* T_0}{\varepsilon x_0} u^* \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad c_l \rho_l \hat{v} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = c_l \rho_l \frac{v_0^* T_0}{\varepsilon^{4/3} x_0} v^* \frac{\partial T}{\partial \theta},$$

и т.д., где $T = \hat{T}/T_0$ – безразмерная температура (см. (1)). В результате уравнение (11) примет вид:

$$\frac{u_0^* T_0}{\varepsilon x_0} \left[\frac{\varepsilon x_0}{u_0^* t_0} \frac{\partial T}{\partial t} + u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{v_0^*}{\varepsilon^{1/3} u_0^*} v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] = \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \frac{T_0}{\varepsilon^2 x_0^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \frac{T_0}{\varepsilon^{8/3} x_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\nu}{c_l} \left[2 \frac{(u_0^*)^2}{\varepsilon^2 x_0^2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{(v_0^*)^2}{\varepsilon^{8/3} x_0^2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{(u_0^*)^2}{\varepsilon^{8/3} x_0^2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \frac{u_0^* v_0^*}{\varepsilon^{7/3} x_0^2} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \frac{(v_0^*)^2}{\varepsilon^2 x_0^2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \xi} \right)^2 \right].$$

Разделим его на коэффициент перед скобкой в левой части и подставим выражения для масштабов, $u_0^* \varepsilon^{-1}/x_0 = \varepsilon^{-2/3} u_\infty/x_0$, учитывая что $t_0 = x_0/u_\infty = 1$, получим

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\nu}{c_l T_0} \varepsilon^{-4/3} \left[2 \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \varepsilon^{2/3} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \varepsilon^{4/3} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \xi} \right)^2 \right], \quad (12)$$

где λ – безразмерный коэффициент теплопроводности (обезразмерен на λ_l , т.е. в воде $\lambda = 1$).

Подставляя значения постоянных из табл. 1, получим $\varepsilon \approx 1.3 \times 10^{-3}$, $\varepsilon^{2/3} \approx 1.2 \times 10^{-2}$ и следующие значения для коэффициентов в уравнении (12):

$$\frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \approx 7.5 \times 10^{-2}, \quad \frac{\nu}{c_l T_0} \varepsilon^{-4/3} \approx 3.7 \times 10^{-8}.$$

Очевидно, что диссипативная часть уравнения (12) мала, и ею можно пренебречь. В итоге уравнение теплопроводности в безразмерной форме примет следующий вид:

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (13)$$

Аналогично, в области льда имеем уравнение

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_l}{c_s \rho_s} \varepsilon^{-2} \left[\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right], \quad (14)$$

где $\lambda = \lambda_s/\lambda_l$; c_s, ρ_s, λ_s – удельная теплоемкость, плотность и удельная теплопроводность льда, их значения приведены в табл. 1.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Перейдем теперь к рассмотрению задачи о фазовом переходе типа плавления-кристаллизации. Классической моделью для описания таких процессов является задача Стефана–Гиббса–

Томсона — это дальнейшее развитие классической задачи Стефана [20], учитывающая поверхностное натяжение на (искривленной) границе раздела фаз.

Напомним, что (ξ, θ) — декартова система координат с учетом введенных масштабов. Тогда граница раздела фаз $h(t, \xi)$ в каждый момент времени

$$\Gamma_t = \{\theta = h(t, \xi)\} = \{S = 0\}, \quad (15)$$

где $S = S(t, \theta, \xi) = \theta - h(t, \xi)$.

Температура жидкой фазы определяется из уравнения (13), температура твердой фазы определяется из уравнения (14). Заметим, что если продолжить поле скоростей (u^*, v^*) (которые определяются из задачи (5)–(9), где $\bar{\theta} = \theta - h(t, \xi)$) нулями в область льда, получим уравнение, описывающее теплоперенос во всей задаче:

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right], \quad (16)$$

где λ — разрывный коэффициент теплопроводности, $\lambda = 1$ в жидкой фазе и $\lambda = \lambda_s / \lambda_l$ в твердой. Заметим, что $u^* = v^* = 0$ на поверхности лед–вода (см. (7)), поэтому слагаемые со скоростями в (16) непрерывны на границе раздела фаз.

Уравнение (16) дополняется граничными условиями

$$T|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = T_g, \quad T|_{\theta \rightarrow -\infty} = T_{\text{ice}} = \text{const}, \quad T|_{\theta \rightarrow \infty} = T_{\text{water}} = \text{const}, \quad (17)$$

где $T_g = T_{\text{ice}}$ в твердой фазе и $T_g = T_{\text{water}}$ в жидкой фазе, и некоторым начальным условием

$$T|_{t=0} = T_{\text{init}}(\xi, \theta), \quad (18)$$

и условиями Стефана и Гиббса–Томсона на границе раздела фаз $\{\theta = h(t, \xi)\}$ (см. (22) и (23) ниже).

Хорошо известно [21–23], что при учете поверхностного натяжения нагревание поверхности фазового перехода жидкость — твердое тело (будем для определенности писать “вода–лед”) приводит к отклонению температуры на границе лед–вода от равновесной температуры T_m на плоской границе раздела фаз. Отсюда следует, что условие Стефана в задаче о плавлении–кристаллизации, в котором температура на границе фазового перехода считается равной T_m , следует видоизменить. Принято вместо условия Стефана ставить на искривленной границе фазового перехода условие Гиббса–Томсона, связывающее отклонение $\hat{T}_m - T_m$ ($\hat{T}_m$ — неизвестная теперь температура на искривленной границе раздела фаз) с кривизной и поверхностным натяжением. Например, [24–26], для сферы радиуса $\hat{R}$ это условие имеет вид

$$\hat{T}_m - T_m = -2\sigma \frac{T_m}{\hat{R}l\rho_l}, \quad (19)$$

где σ — поверхностное натяжение воды на границе лед–вода. Равенство (19) в общем случае можно записать в виде [24] так:

$$\hat{T}_m - T_m = -\frac{\sigma T_m \hat{K}}{\rho_l l}, \quad (20)$$

где $\hat{K}$ — средняя кривизна поверхности фазового перехода. Можно сказать, что условие Гиббса–Томсона является общепринятым, несмотря на продолжающееся до настоящего времени его обсуждение [24, 27].

Модифицированное условие Гиббса–Томсона записывается так [28]:

$$\hat{T}_m - T_m = -\frac{\sigma T_m \hat{K}}{\rho_l l} - \frac{1}{m} \hat{v}_n, \quad (21)$$

где m — кинетический коэффициент роста льда [29], $\hat{v}_n$ — скорость точек границы фазового перехода в направлении нормали из твердой фазы в жидкую.

На самом деле (21) является комбинацией термодинамического и кинетического подходов к выводу условия на свободной границе (в последнем вместо правой части (20) появляется $-\hat{v}_n/m$). Равенство (21) является употребительным, но грубым описанием процесса фазового перехода с учетом кривизны границы раздела фаз. Коэффициент m определен только для небольшого

числа материалов (в основном, металлов) и в последнее время может быть определен методами молекулярной динамики (см. [28]).

Итак, уравнение (16) следует дополнить следующими условиями Стефана и Гиббса–Томсона на границе раздела фаз Γ_t :

$$\rho_l l \hat{v}_n = \left[\lambda_i \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{n}} \right]_{\Gamma_t}, \quad (22)$$

$$(\hat{T}|_{\Gamma_t} - T_m) + d \hat{K} + m^{-1} \hat{v}_n = 0. \quad (23)$$

Здесь $[f]$ – скачок функции f по нормали из твердой фазы в жидкую.

В безразмерном виде с учетом введенных выше масштабов (10), условие Гиббса–Томсона (23) имеет вид:

$$T|_{\Gamma_t} + \frac{\sigma T_m}{l \rho_l T_0 \varepsilon^{4/3} x_0} K + \frac{v_0^*}{m T_0} v_n = 0. \quad (24)$$

Здесь $\varepsilon^{4/3} x_0$ – характерное вертикальное расстояние (см. подробнее выше), v_n и K – безразмерные нормальная скорость точки на границе раздела фаз и средняя кривизна этой границы, а все значения физических и характерных величин приведены в табл. 1. Отметим, что ноль безразмерной температуры T совпадает с температурой плавления, см. (1). Подставляя характерные величины в (24), получим условие Гиббса–Томсона в безразмерной форме

$$T|_{\Gamma_t} = -\alpha v_n - \beta K, \quad (25)$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon^{2/3}}{m T_0} \approx 2.1 \times 10^{-2}, \quad \beta = \varepsilon^{-4/3} \frac{\sigma \hat{T}_m}{l \rho_l T_0} \approx 2.3 \times 10^{-4}. \quad (26)$$

Аналогично, следует перейти к безразмерной форме в (22):

$$\rho_l l v_0^* v_n = \frac{\lambda_l T_0}{\varepsilon^{4/3} x_0} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma_t}.$$

Здесь n – вектор нормали к границе $\theta = h(t, \xi)$, $n = (-h'_\xi, 1)$, а вектор ∇T в соответствии с масштабами в пристеночной области имеет вид

$$\nabla T = \left(\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial \xi}, \frac{\partial T}{\partial \theta} \right).$$

Подставляя характерные величины, получим

$$v_n = \frac{\lambda_l T_0}{\rho_l l} \varepsilon^{-2} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma_t}, \quad (27)$$

где n вычисляется в координатах (ξ, θ) , а разрывный коэффициент λ точно такой же, как и в уравнении (16).

Однако задача Стефана–Гиббса–Томсона (5)–(9), (16)–(18), (25)–(27) сложна в вычислительном плане – требуется применение различных ресурсоемких численных методов для точного определения положения свободной границы. Существует другой подход, основанный на введении функции порядка $\phi = \phi_\zeta(t, \xi, \theta)$, где ζ – параметр регуляризации (сглаживания), такой, что

$$\phi_\zeta(t, \xi, \bar{\theta}) = \begin{cases} +1, & \theta > h(t, \xi) \\ -1, & \theta < h(t, \xi), \end{cases} \quad (28)$$

т.е. внутри твердой фазы принимает значение -1 , внутри жидкой $+1$, а ζ – параметр регуляризации. В ζ -окрестности границы фазового перехода функция ϕ быстро меняется от -1 до 1 . Обозначим через Ω_s область, занятую твердой фазой, а через Ω_l – жидкой, и $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_l$.

Система уравнений фазового поля [21, 22, 30], из которой в данном подходе определяются температура среды T и функция порядка φ_ζ , имеет вид

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + A \left[u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] - \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left(\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_\zeta}{\partial t}, \quad (29)$$

$$\zeta^2 \alpha \frac{\partial \varphi_\zeta}{\partial t} = \zeta^2 \beta \Delta_{\xi, \theta} \varphi_\zeta + \varphi_\zeta (1 - \varphi_\zeta^2) + \zeta (1 - \varphi_\zeta^2) \gamma T / \sqrt{2\beta}, \quad (30)$$

где α и β определены в (26), $\gamma = 1$ – коэффициенты перед v_n , K и $T|_{\Gamma_l}$ в (25) и, в силу изложенного выше, $A = 1$ в жидкой фазе и $A = 0$ в твердой (слагаемые с коэффициентом A непрерывны на границе раздела фаз в силу того, что скорости можно гладко продолжить нулем в область твердой фазы, см. (7)).

Последнее слагаемое в правой части (29) получается так. Проинтегрируем уравнение (29) по области, включающую в себя границу раздел фаз Γ_l . В левой части, как обычно, возникнет интеграл по Γ_l от функции

$$-\frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\left\langle \lambda \varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta}, n \right\rangle \right]_{\Gamma_l},$$

где $n = (-h_\xi^l, 1)$, а через [...] обозначен скачок величины в квадратных скобках по нормали из твердой фазы в жидкую. Правая часть, как видно из (28), аппроксимирует $2 \cdot \delta(\Gamma_l)$, где δ – дельта-функция Дирака, см. ниже вывод условия Гиббса–Томсона. Поэтому, предполагая, что коэффициент при $\partial \varphi_\zeta / \partial t$ пока не определен (пусть это ω), получим равенство

$$\frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma_l} = 2v_n \cdot \omega.$$

Сравнивая последнее равенство с (27) и учитывая, что $T_0 = l/c_l$, получим $\omega = 1/2$.

Граница раздела фаз Γ_l определяется равенством

$$\Gamma_l = \{\varphi_\zeta(t, \xi, \theta) = 0\}. \quad (31)$$

Более сложное рассуждение требуется для вывода условия Гиббса–Томсона из второго уравнения в системе фазового поля – уравнении Алена–Кана (30). Приведем “наивный” вывод, принадлежащий автору этого подхода – Г. Кагинальп [21, 22]. Более точный вывод можно найти в [3–32].

Пусть Γ_l – граница раздела фаз, $\tau = \tau(t, \xi, \theta)$ – координата (расстояние) по нормали, определенная так, что в области твердой фазы координата положительная (нормаль направлена из твердой фазы в жидкую). Тогда

$$|\nabla_{\xi, \theta} \tau| = 1, \quad \text{div}(\nabla \tau) = K,$$

где K – средняя кривизна на Γ_l . Будем строить φ в виде

$$\varphi_\zeta = \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\beta}}\right), \quad z = \frac{\tau - v_n t}{\zeta}.$$

Подставив эту функцию в уравнение (30), получим

$$-\frac{\alpha \zeta v_n}{\sqrt{\beta}} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \varphi(1 - \varphi^2) + \zeta \sqrt{\beta} K \frac{d\varphi}{dz} + (1 - \varphi^2) \zeta T / \sqrt{2}.$$

Здесь z – аргумент функции φ , и слагаемые порядка ζ^2 опущены. Из последнего равенства следует

$$\varphi_{zz}'' + \varphi(1 - \varphi^2) = 0.$$

С учетом наложенных на φ_ζ условий

$$\varphi = \text{th}(z/\sqrt{2\beta}).$$

Полагая $\varphi_\zeta = \varphi + \zeta\varphi_1$, получим для φ_1 неоднородное линейаризованное уравнение

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + (1 - 3\varphi^2)\varphi_1 = -\frac{\alpha_{V_n}}{\sqrt{\beta}} \frac{d\varphi}{dz} - K\sqrt{\beta} \frac{d\varphi}{dz} - (1 - \varphi^2)T/\sqrt{2\beta} \stackrel{\text{def}}{=} F.$$

Условие его разрешимости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\varphi'_z dz = 0$$

дает в точности условие Гиббса—Томсона (25).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Перейдем к численному моделированию — будем численно решать задачу (5)–(9), (17), (29), (30), граничные условия для функции порядка φ_ζ — условия Неймана на границе области. Для численного решения этой системы не требуется каких-либо нетривиальных численных методов — она эффективно решается численно с помощью разностных схем (не приводятся в деталях в виду тривиальности).

Параметры, используемые для численного моделирования, следующие: пространственная область $\Omega = \{-50 \leq \xi \leq 50; -50 \leq \theta \leq 50\}$, время моделирования $0 \leq t \leq 200$, шаги разностной схемы $h_\xi = h_\theta = 5 \times 10^{-2}$, $h_t = 5 \times 10^{-4}$. Отметим, что ошибка, обусловленная таким обрезанием исходной неограниченной области $\bar{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}, R\}$, будет довольно малой, фактически того же порядка, что и ошибка аппроксимации разностной схемы, см. [2–4, 37, 38]. Все используемые физические постоянные, а также характерные величины, приведены в табл. 1. Параметр регуляризации $\zeta = 5h_\theta$.

В качестве начальной формы границы фаз $h(t, \xi)$ выберем

$$h|_{t=0} = B(e^{-\xi^2/4} + e^{-(\xi-8)^2/4}),$$

где $B = \text{const}$, положительным значениям которой соответствует задача обтекания нароста на поверхности льда, а отрицательным — обтекание ямки на ледяной поверхности. Отметим, что в работах [2–4] ранее было получено (для случая одного горбика $h(\xi) = Be^{-\xi^2/4}$), что при превышении $|B|$ некоторого критического значения B^* в ламинарном потоке формируется зона отрывного течения (более точно, на этот процесс, помимо амплитуды, влияет величина угла наклона боковых стенок неровности — чем они круче, тем меньше B^*), см. рис. 2.

В качестве начальных данных для поля скоростей выберем ламинарное обтекание неровности

$$u^*|_{t=0} = \begin{cases} f''(0)\bar{\theta}(1 + 0.2h(0, \xi)), & \bar{\theta} \leq 5, \\ f''(0)(\bar{\theta} + h(0, \xi)), & \bar{\theta} > 5, \end{cases} \quad \bar{\theta} = \theta - h(0, \xi). \quad (32)$$

Для функции порядка φ примем

$$\varphi_\zeta|_{t=0} = \text{th}\left(\frac{\theta - h(0, \xi)}{\zeta\sqrt{2\beta}}\right).$$

Начальное условие для температуры

$$T|_{t=0} = \frac{1}{2} \left[(T_l - T_s) \text{th}\left(\frac{\theta - h(0, \xi)}{4}\right) + (T_l + T_s) \right],$$

где T_l и T_s — постоянные температуры воды и льда на границе области.

Перейдем к результатам численного моделирования. Далее для удобства восприятия будем приводить температуру в градусах Цельсия.

Рассмотрим сначала случай обтекания ледяного нароста малой амплитуды (напомним, что в этом случае в течении не образуются зоны отрыва, см. рис. 2 (а)) течением с небольшим отличием его температуры от температуры льда. А именно, пусть в начальный момент времени амплитуда неровности $B = 1 < B^*$, а температуры воды и льда $T_l = 2^\circ\text{C}$ и $T_s = -2^\circ\text{C}$. Динамика границы раздела фаз во времени для этого случая приведена на рис. 3. Видно, что на плоской поверхности наблюдается намерзание льда, а вершинки горбиков, наоборот, плавятся. Отметим также, что

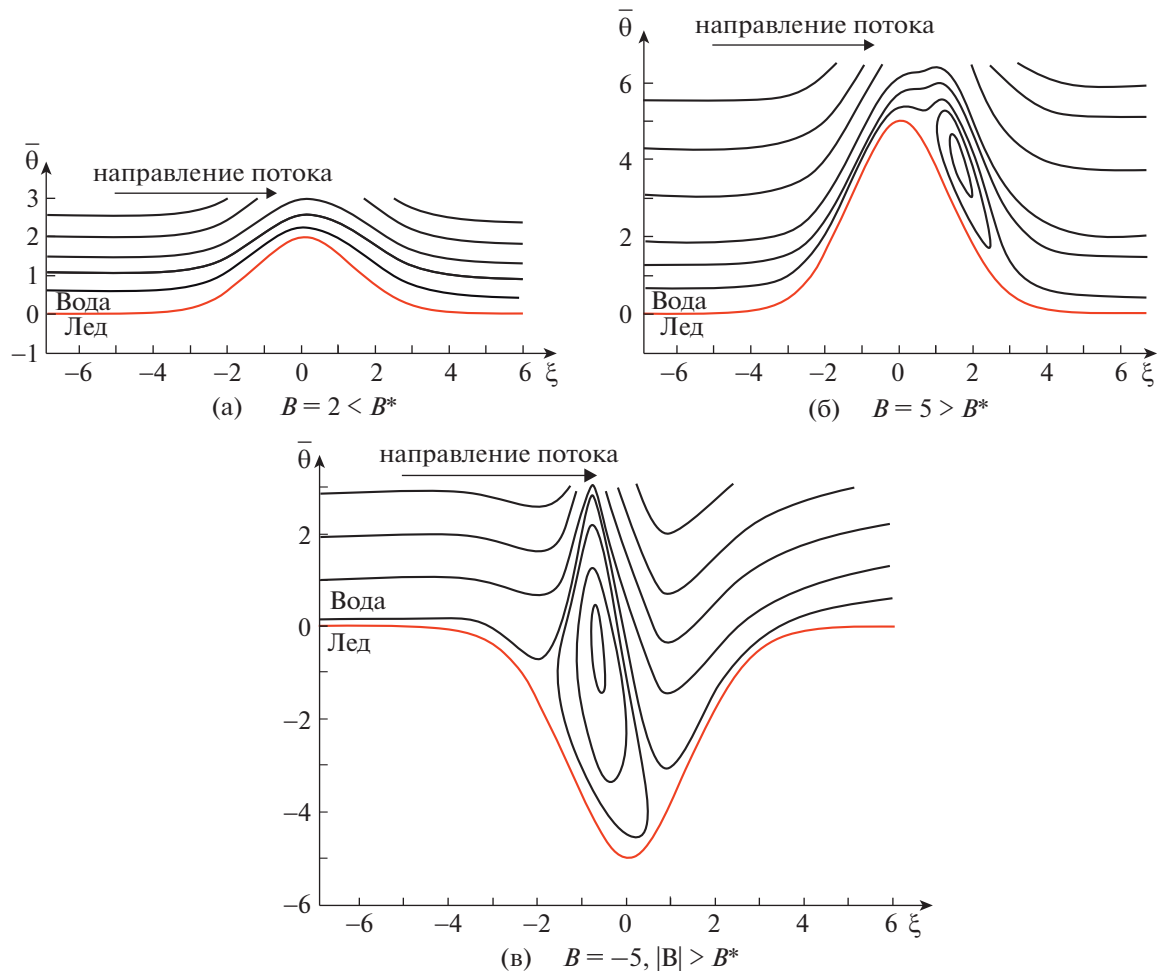


Рис. 2. Характерные линии тока при обтекании малой неровности в зависимости от амплитуды B неровности; здесь B^* — критическая амплитуда, красная линия — граница раздела фаз (лед–вода).

видна небольшая асимметрия границы раздела фаз (см. пунктирные линии), которая, очевидно, обусловлена наличием потока, см. также рис. 4. Из данных численных экспериментов получено, что безразмерные средняя скорость замерзания и средняя скорость плавления вершинок неровностей одинаковые, и по величине равны $|v_n| \approx 3 \times 10^{-4}$. Напомним, что размерная скорость движения границы раздела фаз есть $\hat{v}_n = \epsilon^{2/3} u_\infty v_n$, где $\epsilon^{2/3} u_\infty \approx 1.2 \times 10^{-2}$ м/с, см. табл. 1. В моделируемом на рис. 3 случае, $|\hat{v}_n| \approx 3.12 \times 10^{-6}$ м/с, что в целом (по порядку) согласуется со скоростью роста кристаллов льда из эксперимента [36].

На рис. 4 представлены результаты моделирования аналогичной рис. 3 задачи, но в случае отсутствия течения в воде ($u^* = v^* \equiv 0$). Можно видеть, что характер замерзания такой же, как и в случае наличия течения, но скорости движения границы раздела фаз и ее форма отличаются. А именно, в случае отсутствия потока граница движется только вдоль вертикальной оси θ (см. максимумы и минимумы, отмеченные пунктирными линиями на рис. 4), а движение в направлении горизонтальной оси ξ отсутствует. Также отличаются скорости движения границы раздела фаз в области горбиков — в случае отсутствия потока вершинки горбиков плавятся медленнее (примерно в 6.5 раза), и замерзание в ямке происходит также медленнее (примерно в 1.5 раза). Но скорости замерзания на плоской границе совпадают.

Теперь рассмотрим случай большей разницы температур воды и льда. А именно, пусть также в начальный момент $B = 1$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, но температура воды $T_l = 20^\circ\text{C}$. Динамика границы раздела фаз для этого случая приведена на рис. 5. Видно, что плавление льда происходит вдоль всей границы раздела фаз, при этом граница раздела фаз остается симметричной, но вершинки неровно-

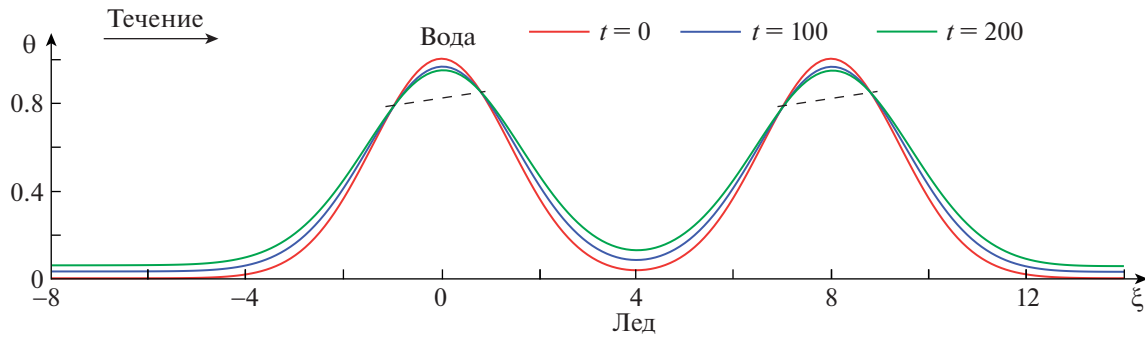


Рис. 3. Граница раздела фаз $h(t, \xi)$ в разные моменты времени: $B = 1$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 2^\circ\text{C}$.

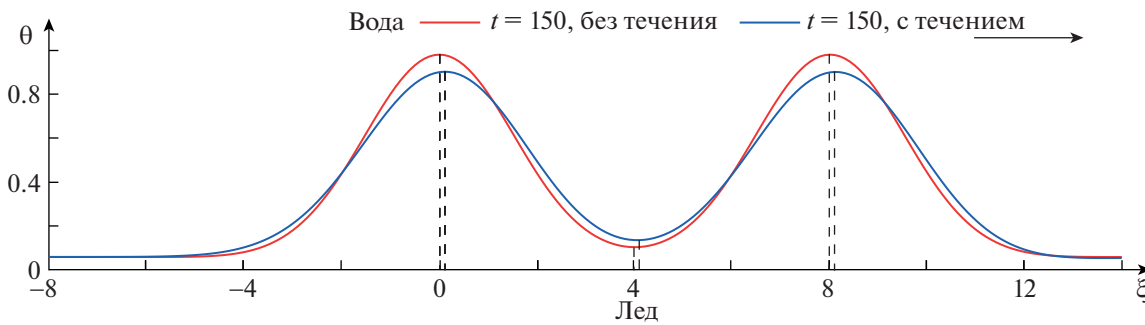


Рис. 4. Сравнение границы раздела фаз $h(t, \xi)$ при $t = 150$ для случая задач с течением и без него: $B = 5$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 2^\circ\text{C}$.

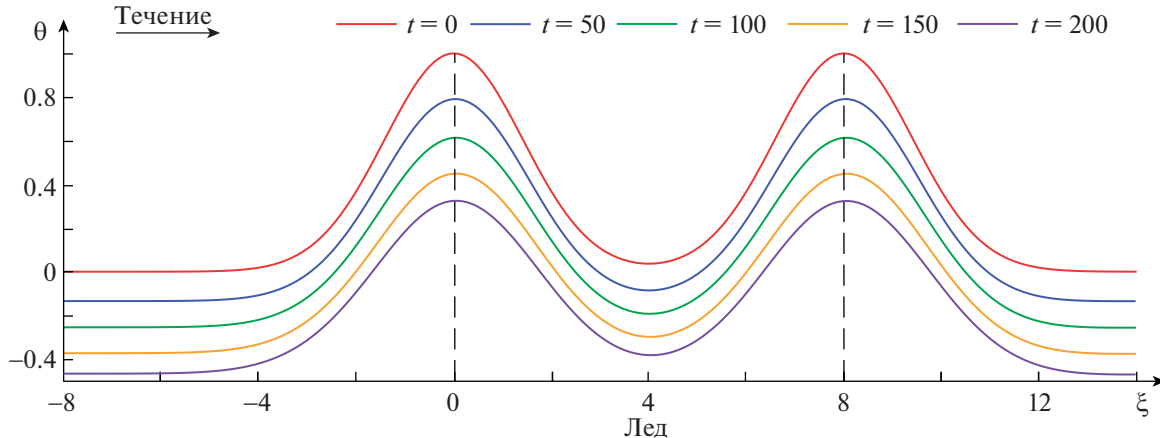


Рис. 5. Граница раздела фаз $h(t, \xi)$ в разные моменты времени: $B = 1$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 20^\circ\text{C}$.

стей плавятся немного быстрее, чем остальная поверхность. Это объясняется большим вкладом теплопереноса (из-за возросшей разности температур) относительно адвекции (скорости около обтекаемой поверхности довольно малы). Численная величина средних (безразмерных) скоростей $|v_n| \approx 3 \times 10^{-3}$ на плоской поверхности и $|v_n| \approx 5 \times 10^{-3}$ на вершинке горбиков.

При рассмотрении неровностей с амплитудой $B = 5$, что больше критической, характер процесса плавления–намерзания качественно не меняется. Например, при малой разности температур воды и льда, $T_l = 2^\circ\text{C}$ и $T_s = -2^\circ\text{C}$, наблюдается аналогичная случаю $B = 1$ динамика границы фаз (см. рис. 3), но с немного более выраженной асимметрией – на правые стенки неровностей лед намерзает интенсивнее, чем на левые, см. рис. 6. Если посмотреть картину линий тока, то, например, при $t = 100$, над вершинками горбиков появляются зоны отрыва погранич-

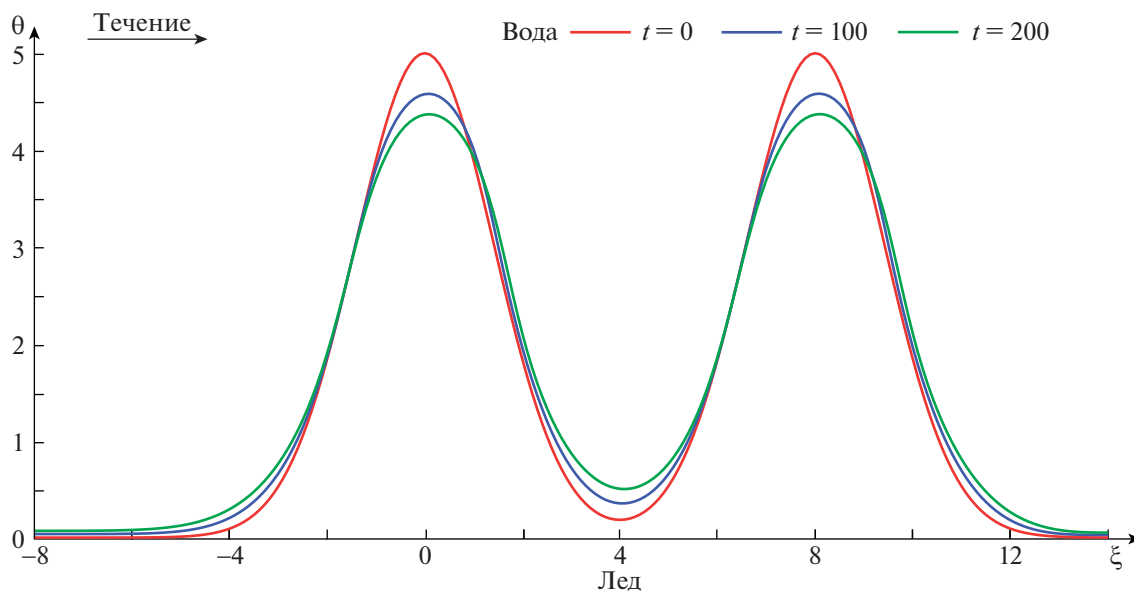


Рис. 6. Граница раздела фаз $h(t, \xi)$ в разные моменты времени: $B = 5$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 2^\circ\text{C}$.

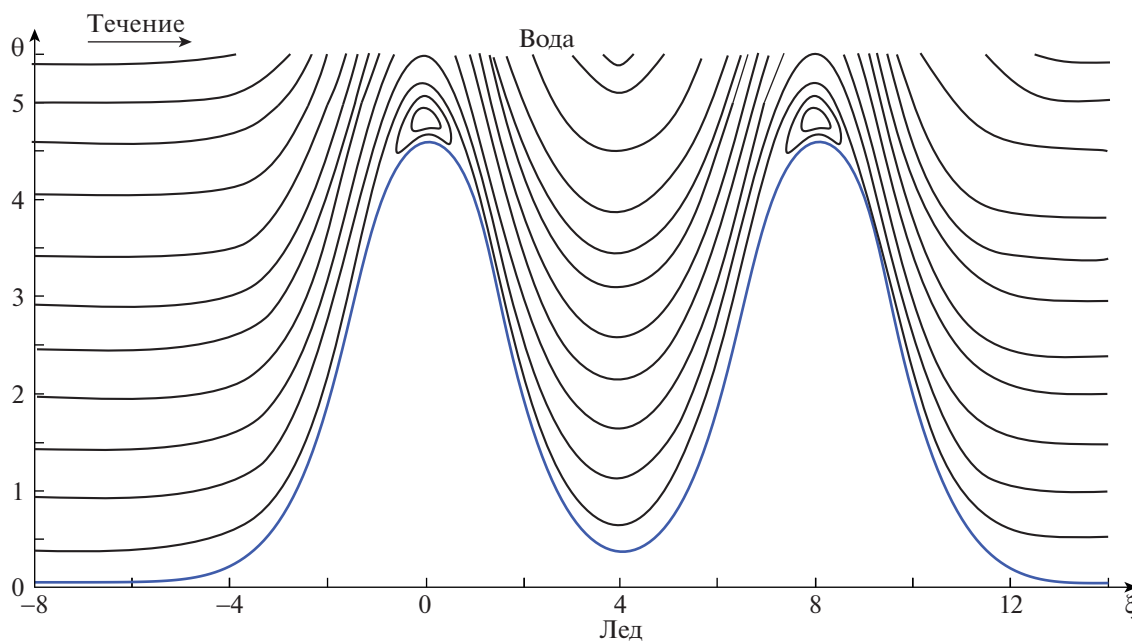


Рис. 7. Линии тока: $t = 100$, $B = 5$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 2^\circ\text{C}$.

ного слоя с вихрями, см. рис. 7. Скорость движения границы раздела фаз также отличается от случая $B = 1$ (см. рис. 3) — на рис. 6 отчетливо видно, что на плоском участке границы раздела фаз скорость замерзания примерно совпадает со случаем на рис. 3, но скорость таяния вершинки больше. Средние значения безразмерной скорости из численного эксперимента: $|v_n| \approx 3.8 \times 10^{-4}$ на плоском участке и $|v_n| \approx 2.8 \times 10^{-3}$ на вершинке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена математическая модель фазового перехода с учетом наличия течения в жидкой фазе. С помощью построенной модели исследована динамика границы раздела фаз

при обтекании малых неровностей на ледяной поверхности с масштабами, характерными для двухпалубной структуры пограничного слоя. В частности, исследовано влияние характера течения (наличие зоны с отрывом пограничного слоя) и температуры жидкости на форму ледяной поверхности при обтекании ее водой.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00186, <https://rscf.ru/project/22-21-00186/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Danilov V.G., Makarova M.V.* Asymptotic and numerical analysis of the flow around a plate with small periodic irregularities // *Russ. J. Math. Phys.* 1994. V. 2. P. 49–56.
2. *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Double-deck structure of the boundary layer in problems of flow around localized perturbations on a plate // *Math. Notes*. 2015. V. 98. № 4. P. 561–571.
3. *Gaydukov R.K.* Double-deck structure in the problem of a compressible flow along a plate with small localized irregularities on the surface // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2018. V. 71. P. 59–65.
4. *Gaydukov R.K.* Double-deck structure in the fluid flow problem over plate with small irregularities of time-dependent shape // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2021. V. 89. P. 401–410.
5. *Neiland V.Ya.* Theory of laminar boundary layer separation in supersonic flow // *Fluid Dyn.* 1969. V. 4. № 4. P. 33–35.
6. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // *Proc. Royal Soc. A*. 1969. V. 312. P. 181–206.
7. *Smith F.T.* Laminar flow over a small hump on a flat plate // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 57. P. 803–824.
8. *Lipatov I.I.* Disturbed Boundary Layer Flow with Local Time-Dependent Surface Heating // *Fluid Dyn.* 2006. V. 41. № 5. P. 725–735.
9. *Lipatov I.I., Koroteev M.V.* Local temperature perturbations of the boundary layer in the regime of free viscous-inviscid interaction // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 707. P. 595–605.
10. *Lipatov I.I., Koroteev M.V.* Supersonic Boundary Layer in Regions with Small Temperature Perturbations on the Wall // *SIAM J. Appl. Math.* 2009. V. 70. № 4. P. 1139–1156.
11. *Aljohani A.F., Gajjar J.S.B.* Subsonic flow past localised heating elements in boundary layers // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 821. P. R2.
12. *Aljohani A.F., Gajjar J.S.B.* Transonic flow over localised heating elements in boundary layers // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 844. P. 746–765.
13. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *УМН*. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
14. *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Vortices in the Prandtl boundary layer induced by irregularities on a plate // *Russ. J. Math. Phys.* 2015. V. 22. № 2. P. 161–173.
15. *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Equations for velocity oscillations in problems of a fluid flow along a plate with small periodic irregularities on the surface for large Reynolds numbers // *Proc. Int. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2018. IEEE*, 2018. P. 118–123.
16. *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Multideck structures of boundary layers in compressible flows // *Proc. Int. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2019. IEEE*, 2019. P. 51–56.
17. *Гайдуков Р.К., Данилов В.Г.* Многопалубные структуры в задачах обтекания поверхностей с малыми периодическими возмущениями // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 2: Механика жидкости и газа. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 92–94.
18. *Mauss J.* Asymptotic Modelling for separating boundary layers // *Asymptotic Modelling in Fluid Mechanics. Lecture Notes in Physics*, vol 442. Springer, 1995. P. 239–254.
19. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
20. *Meirmanov A.M.* The Stefan Problem. De Gruyter, 1992. 255 p.
21. *Caginalp G.* An analysis of a phase field model of a free boundary // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1986. V. 92. № 3. P. 205–245.
22. *Caginalp G.* Stefan and Hele-shaw type models as asymptotic limits of the phase field equations // *Phys. Rev. A*. 1989. V. 39. P. 5887–5896.
23. *Медведев Д.А., Ершов А.П.* Моделирование намерзания льда на подводной трубе газопровода // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* 2013. Т. 13. № 4. С. 96–101.
24. *Makkonen L.* On the Methods To Determine Surface Energies // *Langmuir*. 2000. V. 16. № 20. P. 7669–7672.

25. *Ward C.A., Neumann A.W.* On the surface thermodynamics of a two-component liquid-vapor-ideal solid system // *J. Colloid and Interface Sci.* 1974. V. 49. № 2. P. 286–290.
26. *Spelt J.K., Absolom D.R., Neumann A.W.* Solid surface tension: The interpretation of contact angles by the equation of state approach and the theory of surface tension components // *Langmuir*. 1986. V. 2. № 5. P. 620–625.
27. *Della Volpe C., Siboni S., Morra M.* Comments on Some Recent Papers on Interfacial Tension and Contact Angles // *Langmuir*. 2002. V. 18. № 4. P. 1441–1444.
28. *Mazhukin V.I.* Kinetics and Dynamics of Phase Transformations in Metals Under Action of Ultra-Short High-Power Laser Pulses // *Laser Pulses: Theory, Technology, and Applications*. IntechOpen, 2012. P. 219–276.
29. *Rodway G.H., Hunt J.D.* Thermoelectric investigation of solidification of lead I. Pure lead // *J. Crystal Growth*. 1991. V. 112. № 2–3. P. 554–562.
30. *Plotnikov P.I., Starovoitov V.N.* The Stefan problem with surface tension as a limit of the phase field model // *Differ. Equat.* 1993. V. 29. № 3. P. 395–404.
31. *Danilov V.G., Omel'yanov G.A., Radkevich E.V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system // *Eur. J. Appl. Math.* 1999. V. 10. P. 55–77.
32. *Danilov V.G., Omel'yanov G.A., Shelkovich V.M.* Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves // *Asymptotic Methods of Wave and Quantum Problems*. AMS Transl. Ser. 2, Vol. 208. AMS, 2003. P. 33–165.
33. *Кикоин И.К.* Таблицы физических величин. Справочник. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
34. *Григорьев И.С., Мейлихов Е.З.* Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
35. *Кузнецов В.В., Усть-Качкинцев В.Ф.* Физическая и коллоидная химия: Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1976. 390 с.
36. *Fernandez R., Barduhn A.J.* The growth rate of ice crystals // *Desalination*. 1967. V. 3. № 3. P. 330–342.
37. *Roache P.J.* Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Hermosa Publishers, 1976. 648 p.
38. *Yapalparvi R.* Double-deck structure revisited // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2012. V. 31. P. 53–70.