

УДК 532.517

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ВОДО- И НЕФТЕРАСТВОРИМЫХ ТРАССЕРОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МНОГОЗОННОГО ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

© 2024 г. А. Б. Мазо^{a, *}, М. Р. Хамидуллин^{b, **}, К. А. Поташев^{a, ***}, А. А. Ураимов^{b, ****}

^aИнститут математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, Казань, Россия

^bКазанское отделение Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН, Казань, Россия

*e-mail: abmazo1956@gmail.com

**e-mail: marseille.ksu@gmail.com

***e-mail: kpotashev@mail.ru

****e-mail: aauraimov@gmail.com

Поступила в редакцию 31.10.2023 г.

После доработки 28.01.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Предложена упрощенная математическая модель двухфазного многокомпонентного течения в системе пласт – трещины многостадийного гидроразрыва – горизонтальная скважина. На основе анализа размерностей и теории подобия упрощена формулировка задач переноса в скважине и в трещинах гидроразрыва. Показана возможность перехода к квазистационарной задаче распределения компонент смеси в высокопроницаемых трещинах гидроразрыва. Выполнено понижение размерности задачи в пласте за счет ее декомпозиции на набор задач в независимых фиксированных трубках тока. Итоговое сокращение машинного времени численного решения задачи достигает двух порядков величины и может быть далее сокращено при использовании параллельных вычислений. Ускорение решения прямой задачи является принципиально необходимым для возможности решения обратной задачи идентификации фильтрационно-емкостных параметров трещин по результатам интерпретации трассерных исследований.

Ключевые слова: нефтяной пласт, многозонный гидроразрыв, горизонтальная скважина, многокомпонентная фильтрация, высокопроизводительные вычисления, аналитическое решение, численное моделирование, трубки тока.

DOI: 10.31857/S1024708424030058, **EDN:** PFXGVK

При разработке нефтяных месторождений часто применяется бурение горизонтальных скважин (ГС) с многостадийным (многозонным) гидроразрывом пласта (МГРП) с трансверсальными трещинами [1–3]. При проектировании, оценке эффективности и прогнозе данного способа добычи нефти возникают вопросы об индивидуальных геометрических и фильтрационных свойствах каждой трещины гидроразрыва и её вкладе в суммарную продукцию скважины [4,5]. Одним из мероприятий по определению указанных свойств трещин МГРП являются индикаторные (трассерные) исследования с использованием набора химических веществ, одни из которых растворяются в воде, а другие – в нефти [6–12].

На первом этапе проводится т.н. мини-ГРП, когда на месте будущей трещины МГРП (с номером j) под действием локализованного импульса высокого давления создается небольшая трансверсальная трещина с размерами $[-h_j^{mini}, h_j^{mini}] \times [-H_j^{mini}, H_j^{mini}] \times [-\delta_j^{mini}, \delta_j^{mini}]$. Здесь и далее h – размер трещины в поперечном направлении x , H обозначает размер по вертикали z , а δ – это половина раскрытия трещины в направлении y , совпадающем с осью ГС. Образование мини-ГРП сопровождается сбросом давления, которое все же остается достаточно высоким для того, чтобы закачать через мини-трещину в пласт конечный объем V_j^{mini} флюида с растворенным в нем индикатором (с номером i и массовой концентрацией $c_i^{k,j}$, $k \in \{w, o\}$; индекс w означает водорастворимый трассер (ВРТ), а индекс o – нефтерастворимый (НРТ)). Закачка с доставкой индикатора в пласт длится t^{mini} секунд и характеризуется дебитом $q_j^{mini} = V_j^{mini} / t^{mini}$ м³/с. Характерные параметры мини-ГРП таковы: $H_j^{mini} \equiv h_j^{mini} \approx 10$ м., $\delta_j^{mini} \approx 10^{-2}$ м; $V_j^{mini} \approx 10^3$ м, $t^{mini} \approx 10^5$ с, $q_j^{mini} \approx 10^{-4}$ м³/с, $c_i^{w,j} = 2$ кг/м³.

Второй этап состоит в создании рабочей трещины МГРП (основной ГРП) размером $[-h_j, h_j] \times [-H_j, H_j] \times [-\delta_j, \delta_j]$ из трещины мини-ГРП. Как правило, вертикальный размер $2H_j$ равен толщине пласта, трансверсальный размах трещины h_j достигает 100 м, а раскрытие $\delta_j \approx 10^{-2}$ м. Создание рабочей трещины МГРП сопровождается форсированной закачкой внедряемого агента и проппанта. В принципе, и на этом этапе возможна фильтрация флюида из трещины в основной коллектор и изменение там полей насыщенности и концентрации трассеров.

На третьем этапе индикаторных исследований гидроизоляция снимается, скважина переводится в режим отбора благодаря созданию депрессии. Начинается фильтрация двухфазного (вода, нефть) многокомпонентного (фазы, трассеры) флюида из коллектора в трещины МГРП и далее в скважину. Важно, что поля водо- и нефтенасыщенности коллектора, а также концентрации ВРТ и НРТ, сформировавшиеся на первых двух этапах трассерных исследований, служат начальными условиями для математической модели фильтрации в системе коллектор-трещины-скважина в режиме отбора флюида. Продукция ГС анализируется, определяются концентрации индикаторов и строятся т.н. кривые выхода трассеров, интерпретация которых должна ответить на вопрос о геометрических и фильтрационных свойствах каждой трещины гидроразрыва и оценить её относительный вклад в продукцию скважины.

Математическая модель, положенная в основу вычислений, описывает трехмерную двухфазную (нефть, вода) многокомпонентную (нефть, вода, ВРТ, НРТ) фильтрацию с учетом сорбционного взаимодействия индикаторов с породой пласта. При моделировании выделяются две задачи:

- *прямая задача* расчета давления, водонасыщенности и концентрации индикаторов при заданных режимных параметрах скважины и фильтрационных параметров трещин МГРП во время закачки индикатора и дальнейшей эксплуатации скважины;
- *обратная задача* подбора фильтрационных параметров трещин МГРП (геометрии и проницаемости) по замеренным кривым суммарного дебита, обводненности скважины и кривых выхода индикаторов после перевода скважины на отбор.

При математическом и численном моделировании трассерных исследований выделенные и описанные выше этапы процесса рассчитываются последовательно. Поскольку результативность технологии гидравлического разрыва пласта определяется реологическими свойствами жидкости гидроразрыва и режимом размещения в трещине проппанта, за которыми осуществляется тщательный контроль, то добавление в них инородных примесей в виде трассеров, как правило, не допускается. Поэтому наиболее распространенным вариантом закачки трассеров является добавление в магистраль раствора с трассером уже вслед за необходимым объемом жидкости ГРП и проппанта. Таким образом, раствор трассера поступает через скважину в трещину ГРП, а через нее в пласт, уже после того, как эта трещина сформирована и закреплена расклинивающим агентом, то есть ее геометрические и фильтрационные свойства уже сформированы. Поэтому процесс образования трещин в горной породе пласта не моделируется, описывается только нагнетание соответствующих объемов жидкости гидроразрыва в пласт при наличии уже раскрывшихся трещин.

Одним из наиболее общих подходов к решению задач в области нефтяного пласта, содержащего множество трещин, является метод discrete fracture network (DFN) [13,14]. Однако при таком подходе возникает ряд проблем. Во-первых, DFN требует значительных вычислительных ресурсов, так как рассматриваются задачи в исходной трехмерной постановке [15,16]. Во-вторых, возникает необходимость решения дополнительной задачи о сопряжении решений на расчетных сетках в пласте и в трещинах [17–21]. Столь затратные по машинному времени методы численного моделирования течения вблизи трещин оказываются, таким образом, малоприменимыми для решения обратных задач.

Запись определяющих уравнений в безразмерных переменных, выделение и оценка критериев подобия задачи позволяет, наряду с общей трехмерной постановкой, использовать упрощенные оперативные модели индикаторных исследований ГС с МГРП.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТРЕЩИН МГРП

1.1. Основные уравнения двухфазной многокомпонентной фильтрации в пласте

Для описания двухфазной фильтрации воды и нефти в пласте используем классические уравнения переноса водонасыщенности и пьезопроводности. Задача содержит следующие масштабы: длина

l — области дренирования Ω ; p_Γ — давление на внешней границе Γ этой области; p^γ — давление в скважине. Кроме того известны характерные значения пористости m^0 , абсолютной проницаемости k^0 , вязкости $\mu^0 = \mu_w$, средней гидропроводности $\sigma^0 = k^0 / \mu^0 = k^0 / \mu_w$, по которым можно определить характерные значения скорости фильтрации и времени

$$u^0 = \frac{\sigma^0 \Delta p^0}{l}, \Delta p^0 = |p_\Gamma - p^\gamma|; t^0 = \frac{lm^0}{u^0}$$

Используя безразмерные переменные

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{l}; \bar{t} = \frac{t}{t^0}; \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u^0}, \bar{m} = \frac{m}{m^0}; \bar{k} = \frac{k}{k^0}; \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma^0}, \sigma = \frac{k(\mathbf{x})}{\mu(s)} = \frac{k(\mathbf{x})}{\mu_w} \varphi(s),$$

$$\bar{p} = \frac{p - p_\Gamma}{\Delta p^0}; \bar{\beta} = \frac{\beta \Delta p^0}{m^0} \quad (1.1)$$

и пренебрегая капиллярными и гравитационными силами, а также сжимаемостью флюида, запишем модель суммарного потока

$$\bar{m} \frac{\partial s}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (f(s) \bar{\mathbf{u}}) = 0, \bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (1.2)$$

$$\bar{\beta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.3)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = -\bar{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, s) \bar{\nabla} \bar{p}, \quad \bar{\sigma} = \bar{k}(\bar{\mathbf{x}}) \varphi(s) \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — декартовы координаты точки, t — время; s — водонасыщенность; p — давление; m — пористость, β — упругоемкость, k — абсолютная проницаемость пласта; μ , φ — вязкость и подвижность двухфазной смеси; $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$ — скорость фильтрации двухфазного потока, $\mathbf{u}_w = f\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_o = (1 - f)\mathbf{u}$ — скорость фильтрации водной и нефтяной фазы соответственно; f — доля воды в суммарном потоке. Функции $\varphi(s)$, $f(s)$ выражаются через относительные фазовые проницаемости $k_w(s)$, $k_o(s)$, которые можно аппроксимировать степенными зависимостями

$$\varphi = k_w + K_\mu k_o, \quad K_\mu = \frac{\mu_w}{\mu_o}; f(s) = \frac{k_w(s)}{\varphi(s)}$$

$$k_w(s) = \tilde{s}^a, \quad k_o(s) = (1 - \tilde{s})^a, \quad \tilde{s} = (s - s_1) / (s_2 - s_1), \quad a = 1 \div 4 \quad (1.5)$$

Здесь μ_w и μ_o — динамическая вязкость воды и нефти; s_1 , s_2 — предельные значения водонасыщенности, определяемые остаточной насыщенностью воды и нефти:

$$s_1 \leq s \leq s_2, \quad 0 \leq \tilde{s} \leq 1 \quad (1.6)$$

Для описания распределения ВРТ в пласте будем использовать две функции массовой концентрации (кг/м³): $c_i^w(\mathbf{x}, t)$, $a_i^w(\mathbf{x}, t)$, $i = 1..N^w$. Первая из них — это концентрация в водной фазе порового пространства, а вторая — концентрация трассера, накопленного в скелете пористой среды, вычисляемая как отношение такой массы трассера к общему объему пористой среды.

Изменение концентрации каждого ВРТ $i = 1..N^w$ в пористом коллекторе описывается уравнениями переноса концентрации

$$\frac{\partial}{\partial t} (m s c_i^w + a_i^w) + \nabla \cdot (c_i^w \mathbf{u}_w) = 0 \quad (1.7)$$

Механизм сорбционного обмена индикатором между подвижной водной фазой и скелетом пласта описывается уравнением кинетики сорбции

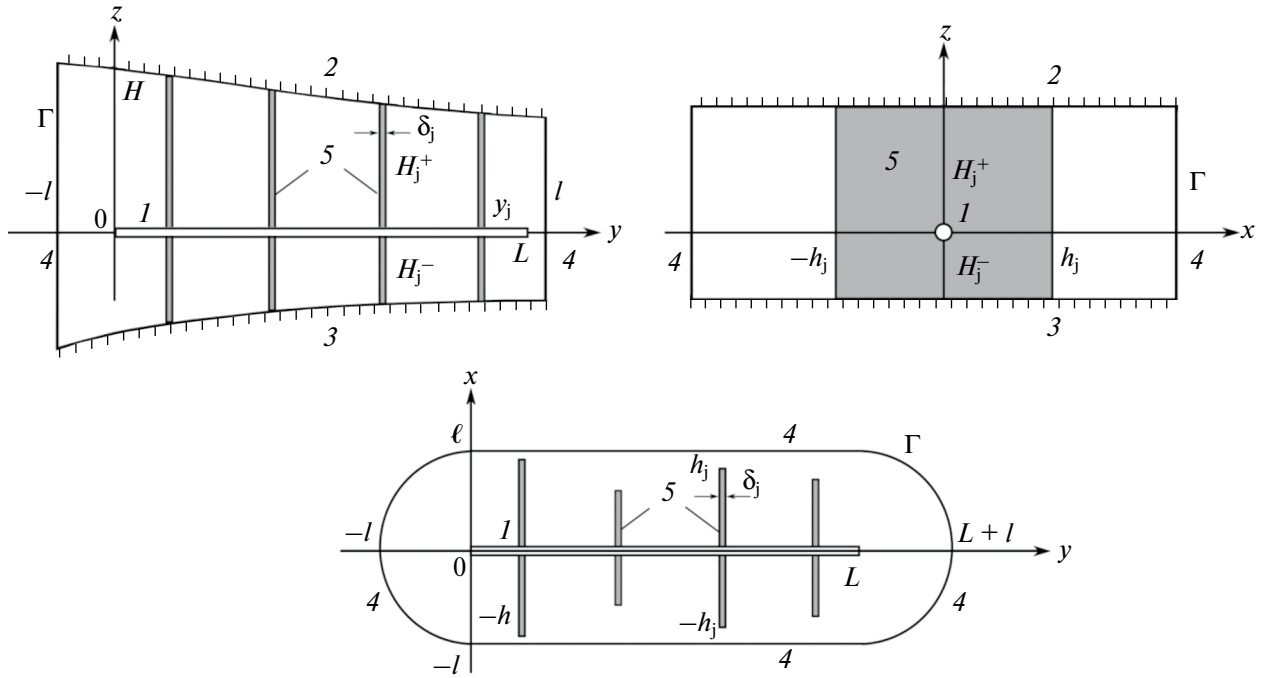


Рис. 1. Схема расчетной области Ω : вид сбоку, вид с торца, вид сверху.

$$\frac{\partial a_i^w}{\partial t} = \frac{a_i^{w,s}(c_i^w) - a_i^w}{\tau_i^w}, \quad a_i^{w,s} = \frac{A_i^w c_i^w}{B_i^w + c_i^w}, \quad (1.8)$$

в котором $\tau_i^w > 0$ – характерное время сорбции, а связь между равновесной концентрацией индикатора в твердой фазе $a_i^{w,s}$ и его концентрацией в водной фазе c_i^w задана изотермой Ленгмюра с константами A_i^w , $B_i^w > 0$.

Аналогично, для концентрации каждого НРТ имеем две функции массовой концентрации (кг/м³): $c_i^o(\mathbf{x}, t)$, $a_i^o(\mathbf{x}, t)$, $i = 1..N^o$ и два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (m(1-s)c_i^o + a_i^o) + \nabla \cdot (c_i^o \mathbf{u}_o) = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial a_i^o}{\partial t} = \frac{a_i^{o,s}(c_i^o) - a_i^o}{\tau_i^o}, \quad a_i^{o,s} = \frac{A_i^o c_i^o}{B_i^o + c_i^o} \quad (1.10)$$

Типичные значения параметров сорбции в моделях (1.8), (1.10) можно принять одинаковыми для всех индикаторов и равными $\tau_i^{w,o} = \tau^0 = 10^4$ с, $A_i^w = A_i^o = A^0 10$ кг/м³, $B_i^w = B_i^o = B^0 = 1$ кг/м³ [2–5].

Уравнения (1.2)–(1.10) определены в модельной области Ω дренирования ГС с МГРП, представленной параллелепипедом с закругленными краями 4, верхняя Z_T и нижняя Z_B грани которого проходят по кровле 2 и подошве 3 пласта (рис. 1). В области Ω имеется соответствующий скважине вырез 1 вдоль оси Oy в виде цилиндрической поверхности γ радиуса r_w длиной L . Каждая трещина МГРП интервала $j = 1..N$ ограничивается парой вертикальных поверхностей F_j^-, F_j^+ с нормальными в направлениях $n^\pm = \pm y$, расположенных на расстояниях $\pm \delta_j$ от плоскости $y = y_j$. Предполагается, что трещины рвут пласт по вертикали от подошвы Z_B до кровли Z_T , а в трансверсальном направлении их размер ограничен координатами $x = \pm h$.

Безразмерные функции концентраций и параметры сорбции введем, используя единые масштабы c^0 (например, c^0 – максимальная концентрация ВРТ при закачке) и $a^0 = m^0 c^0$:

$$\begin{aligned}\bar{c}_i^w, \bar{c}_k^o &= \frac{c_i^w, c_k^o}{c^0}; \quad \bar{a}_i^w, \bar{a}_k^o, \bar{a}_i^{w,s}, \bar{a}_k^{o,s} = \frac{a_i^w, a_k^o, a_i^{w,s}, a_k^{o,s}}{m^0 c^0} \\ \bar{A}_i^w, \bar{A}_k^o &= \frac{A_i^w, A_k^o}{m^0 c^0}; \quad \bar{B}_i^w, \bar{B}_k^o = \frac{B_i^w, B_k^o}{c^0} \\ \bar{\tau}_i^w, \bar{\tau}_k^o &= \frac{\tau_i^w, \tau_k^o}{t^0}; \quad i = 1..N^w, k = 1..N^o\end{aligned}\quad (1.11)$$

В результате замены (1.11) получим безразмерные уравнения для концентраций ВРТ и НРТ в том же виде, что и размерные (1.7)–(1.10).

1.2. Уравнения двухфазной многокомпонентной фильтрации в трещинах МГРП

Для описания фильтрационных течений в тонких трещинах ($\delta \ll L$) введем операцию осреднения произвольного параметра по раскрытию трещины j

$$\langle \cdot \rangle_j = \frac{1}{2\delta_j} \int_{y_j - \delta_j}^{y_j + \delta_j} (\cdot) dy \quad (1.12)$$

и определим средние давление, водонасыщенность и концентрацию трассеров ВРТ и НРТ, пометив их верхним индексом f (fracture)

$$p_j^f = \langle p \rangle_j, \quad s_j^f = \frac{\langle ms \rangle_j}{\langle m \rangle_j}, \quad c_{ij}^{w,f} = \frac{\langle msc_i^w \rangle_j}{\langle ms \rangle_j}, \quad c_{ij}^{o,f} = \frac{\langle m(1-s)c_i^o \rangle_j}{\langle m(1-s) \rangle_j} \quad (1.13)$$

Пористость и абсолютную проницаемость каждой трещины j будем считать постоянными и равными m_j^f, k_j^f . Приближенные уравнения для функций (1.13) получим, применив операцию (1.12) к уравнениям (1.2)–(1.10), приняв при этом следующие приближения

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j^f &= -\langle \sigma^f \nabla_{xz} p \rangle_j \approx -\sigma_j^f \nabla_{xz} p_j^f, \quad \sigma_j^f = \phi(s_j^f) k_j^f / \mu_w \\ \langle f \mathbf{u} \rangle_j &\approx f(s_j^f) \mathbf{u}_j^f \\ \langle c_i^w \mathbf{u}_w \rangle_j &\approx c_{ij}^{w,f} f(s_j^f) \mathbf{u}_j^f, \quad \langle c_i^o \mathbf{u}_o \rangle_j \approx c_{ij}^{o,f} [1 - f(s_j^f)] \mathbf{u}_j^f\end{aligned}\quad (1.14)$$

Для приведения к безразмерному виду уравнений, описывающих осредненную по раскрытию гидродинамику трещин МГРП, будем использовать в основном те же масштабы, что и в модели основного коллектора – $l, t^0, m^0, k^0, \sigma^0, \Delta p^0$, однако масштаб $u_j^{f,0}$ скорости фильтрации в трещине j индивидуален, определяется её проницаемостью k_j^f и поэтому отличается от характерной скорости u^0 в коллекторе

$$\bar{\mathbf{u}}_j^f = \frac{\mathbf{u}_j^f}{u_{j,0}^{f,0}}, \quad u_{j,0}^{f,0} = \bar{k}_j^f u^0, \quad j = 1..N$$

Пренебрегая упругоемкостью и сорбцией в трещине, будем иметь

- уравнение для давления в трещине j

$$\bar{\nabla}_{xz} \cdot \left(\phi(s_j^f) \bar{\nabla}_{xz} \bar{p}_j^f \right) + \frac{1}{2M_j} \bar{u}_y \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} = 0, \quad M_j = \bar{\delta}_j \bar{k}_j^f$$

$$\bar{p}|_{\gamma} = \pm 1, \quad \bar{x} = \pm \bar{h}_j, \quad \bar{z} = \pm \bar{H}_j : \quad \varphi_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} = 0 \quad (1.15)$$

- формулу для суммарной скорости фильтрации в трещине j

$$\bar{\mathbf{u}}_j^f = -\varphi_j^f \bar{\nabla}_{xz} \bar{p}_j^f \quad (1.16)$$

- уравнение для водонасыщенности в трещине j

$$\varepsilon_j \frac{\partial s_j^f}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla}_{xz} \cdot \left[f(s_j^f) \bar{\mathbf{u}}_j^f \right] + \frac{1}{2M_j} (f(s) \bar{u}_y) \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} = 0, \quad \varepsilon_j = \frac{\bar{m}_j^f}{\bar{k}_j^f} \quad (1.17)$$

- уравнение для концентрации индикатора $i = 1..N^w$ ВРТ в трещине j

$$\varepsilon_j \frac{\partial (s_j^f \bar{c}_{ij}^{w,f})}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla}_{xz} \cdot \left[\bar{c}_{ij}^{w,f} f(s_j^f) \bar{\mathbf{u}}_j^f \right] + \frac{1}{2M_j} (\bar{c}_i^w f(s) \bar{u}_y) \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} = 0 \quad (1.18)$$

- уравнение для концентрации индикатора $i = 1..N^o$ НРТ в трещине j

$$\begin{aligned} \varepsilon_j \frac{\partial \left[(1 - s_j^f) \bar{c}_{ij}^{o,f} \right]}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla}_{xz} \cdot \left[\bar{c}_{ij}^{o,f} (1 - f(s_j^f)) \bar{\mathbf{u}}_j^f \right] \\ + \frac{1}{2M_j} \left[\bar{c}_i^o (1 - f(s)) \bar{u}_y \right] \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} = 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Заметим, что в осредненных уравнениях (1.15), (1.17), (1.18), (1.19) последние члены (подстановки) описывают приток из коллектора в трещину соответственно двухфазного флюида, воды, ВРТ либо НРТ.

Задача (1.15) содержит один критерий подобия M_j , равный произведению малого параметра $\bar{\delta}_j$ на большое значение $\bar{k}_j^f$; реально M_j может изменяться в широких пределах.

Граничное условие в (1.15) на скважине $\bar{p}|_{\gamma} = +1$ задает режим нагнетания, а $\bar{p}|_{\gamma} = -1$ моделирует депрессию при добыче с постоянным давлением. Данное граничное условие легко обобщается на переменное во времени заданное давление на скважине: $\bar{p}|_{\gamma} = \bar{p}_{\gamma}(\bar{t})$.

Замечание. Плоская модель двухфазной многокомпонентной фильтрации в трещинах МГРП верно отражает баланс фильтрационных потоков, однако, чтобы не переоценить ее адекватность, следует отметить, что приближенные формулы (1.14) опираются на два грубых допущения. Во-первых, принято, что среднее от произведения функций равно произведению их средних. Во-вторых, полагается, что относительные фазовые проницаемости в трещинах те же, что и в коллекторе пласта, а различие в гидропроводности обеспечивается лишь разными значениями абсолютных проницаемостей k и k^f . Отметим, что в пористой среде трещин ГРП, образованной крупными зернами проппанта, функции фазовых проницаемостей могут приближаться к линейным функциям фазовой насыщенности, а неснижаемые насыщенности могут стремиться к нулю.

1.3. Уравнения движения двухфазной многокомпонентной жидкости по стволу ГС с притоком из МГРП в режиме отбора

Замеряемые значения концентраций всех индикаторов в продукции ГС (кривые выхода ВРТ и НРТ) формируются при движении двухфазного флюида с растворенными в нем трассерами в стволе скважины при отборе. Будем считать, что падение давления вдоль ГС пренебрежимо мало, и движение флюида в скважине и перенос компонент индикаторов можно рассчитать на основе упрощенных балансовых уравнений. Дебит Q горизонтальной скважины определяется суммой дебитов $q_j, j = 1..N$ всех трещин

МГРП. Обозначив через $u_{n,j}^f = -\sigma_j^f \partial p_j^f / \partial n$ среднюю скорость притока двухфазного флюида в скважину из трещины j , запишем выражения суммарного q_j и фазовых $q_j^{o,w}$ дебитов одной трещины:

$$\begin{aligned} y = y_j : q_j &= 2\delta_j 2\pi r_w u_{n,j}^f = -4\pi\delta_j r_w \sigma_j^f \frac{\partial p_j^f}{\partial n} \Big|_\gamma \\ q_j^w &= q_j f(s_j^f) \Big|_\gamma, \quad q_j^o = q_j - q_j^w, \quad m^3 / c, \quad j = 1..N \end{aligned} \quad (1.20)$$

Запишем балансовое уравнение для скорости U движения двухфазного флюида

$$\frac{\partial}{\partial y} (\pi r_w^2 U) = \sum_{j=1}^N \delta(y - y_j) q_j, \quad 0 \leq y < L; \quad U(L) = 0,$$

где r_w — радиус ГС; δ — дельта-функция Дирака. Интегрирование этого уравнения от y до L с учетом (1.20) и (1.1) дает уравнение для скорости течения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{y}, \bar{t}) &= -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{h}(\bar{y}_j - \bar{y}) \bar{M}_j \bar{u}_{n,j}^f, \quad 0 \leq \bar{y} < \bar{L}, \quad \mathbf{h}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases} \\ \bar{u}_{n,j}^f &= -\sigma_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} \Big|_\gamma; \quad \bar{U}(\bar{L}, \bar{t}) = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$M^0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N M_j, \quad \bar{M}_j = \frac{M_j}{M^0} \approx 1 \quad (1.22)$$

$$\bar{U} = \frac{U}{U^0}, \quad U^0 = N \frac{4M^0 u^0 l}{r_w}$$

где $\mathbf{h}$ — функция Хевисайда.

Балансовое уравнение для обводненности η в стволе скважины имеет вид

$$\begin{aligned} e \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U} \eta) &= -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\bar{y} - \bar{y}_j) \bar{M}_j \left(f(s_j^f) \sigma_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_\gamma \\ e &= \frac{\bar{r}_w}{4NM^0 m^0}, \quad \bar{t} > 0, \quad 0 \leq \bar{y} < \bar{L}; \quad \bar{t} = 0, \quad y = \bar{L} : \eta = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ввиду отличия вязкости и плотности водной и нефтяной фаз их скорости при совместном течении вдоль скважины могут отличаться вследствие формирования различных режимов течения — от полностью разделенных (стратифицированных) до полностью смешанных (дисперсных). Переход от стратифицированного режима течения к дисперсному определяется балансом турбулентной энергии сплошной фазы и свободной поверхностной энергии дисперсной фазы. Как показано в работе для характерных физико-химических свойств водной и нефтяной фаз, при достижении суммарной скорости течения в трубах диаметром около 0.1 м величин порядка 0.25–0.5 м/с скорости течения отдельных фаз становятся близки. Для протяженных горизонтальных скважин, простимулированных многозонным гидравлическим разрывом пласта, характерная величина дебита достигает нескольких сотен куб.м/сут. При внутреннем диаметре скважины 0.1 м прирост дебита на каждые 100 куб.м/сут соответствует увеличению средней по сечению ствола скважины скорости потока примерно на 0.15 м/с и повышению числа Рейнольдса примерно на 2500 единиц.

При близких к данным условиям параметрам исследуемой системы можно полагать, что обе фазы и все компоненты движутся в стволе ГС с одинаковой скоростью U . В противном случае можно оснастить модель дополнительной зависимостью между скоростью течения водной фазы, ее объемной долей

и расходом двухфазной смеси. Полагая скорости фаз одинаковыми, нетрудно составить уравнение для концентрации $\bar{C}_i^w$, $i = 1..N^w$ водорастворимого и нефтерастворимого трассеров в стволе ГС (размерность этой величины – кг индикатора в одном м³ скважинной жидкости). Используя, как и прежде, единый масштаб c^0 для нормировки концентраций ВРТ и НРТ ($\bar{C}_i^{w,o} = C_i^{w,o} / c^0$), получим уравнения переноса трассера в стволе ГС при $t > 0$, $0 \leq y < L$

$$e \frac{\partial \bar{C}_i^w}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U} \bar{C}_i^w) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\delta}(\bar{y} - \bar{y}_j) \bar{M}_j \left(f(s_j^f) \Phi_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} \bar{c}_{ij}^{w,f} \right) \Big|_{\gamma}, \quad i = 1..N^w \quad (1.24)$$

$$e \frac{\partial \bar{C}_i^o}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U} \bar{C}_i^o) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\delta}(\bar{y} - \bar{y}_j) \bar{M}_j \left([1 - f(s_j^f)] \Phi_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} \bar{c}_{ij}^{o,f} \right) \Big|_{\gamma}, \quad i = 1..N^o \quad (1.25)$$

с начальными и граничными условиями

$$\bar{t} = 0 : \bar{C}_i^{w,o} = \bar{C}_{i,0}^{w,o}(\bar{y}); \quad \bar{y} = \bar{L} : \bar{C}_i^{w,o} = 0$$

Очевидно, концентрация индикатора в двухфазном флюиде связана с концентрацией трассера в водной и нефтяной фазе соотношениями

$$\bar{C}_i^w = \eta \bar{c}_i^w, \quad \bar{C}_i^o = (1 - \eta) \bar{c}_i^o \quad (1.26)$$

Решение задач (1.24), (1.25) и (1.26) определяет, в частности, расчетные кривые выхода индикаторов

$$\tilde{C}_i^w(\bar{t}) = \bar{C}_i^w(0, \bar{t}), \quad i = 1..N^w; \quad \tilde{C}_i^o(\bar{t}) = \bar{C}_i^o(0, \bar{t}), \quad i = 1..N^o$$

а также кривую обводненности продукции $\tilde{\eta}(\bar{t}) = \eta(0, \bar{t})$. Другими важными показателями продуктивности ГС с МГРП служат дебит по жидкости $\bar{Q}$, по воде $\bar{Q}_w$ и по нефти $\bar{Q}_o$, формулы для которых следуют из (1.21) и (1.23)

$$\bar{Q}(\bar{t}) = \frac{\bar{Q}}{\bar{Q}^0} = \bar{U}(0, \bar{t}), \quad \bar{Q}^0 = \pi r_w^2 U^0$$

$$\bar{Q}_w(\bar{t}) = \tilde{\eta}(\bar{t}) \bar{Q}(\bar{t}), \quad \bar{Q}_o(\bar{t}) = (1 - \tilde{\eta}(\bar{t})) \bar{Q}(\bar{t})$$

Эту величину с помощью формулы (), взятой при $\bar{y} = 0$, можно выразить через дебиты трещин МГРП

$$\bar{U}(0, \bar{t}) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j \bar{u}_{n,j}^f \quad (1.27)$$

1.4. Начальные и граничные условия. Постановка краевых задач

Перейдем к формулировке краевых (начальных и граничных) условий для выписанных уравнений (1.2)–(1.10) в пласте и (1.15)–(1.19) в трещине. Условия сопряжения на внутренних границах γ , $F_i^{\pm}$ системы скважина-трещины-коллектор выражают непрерывность давления и нормальных компонент скорости фильтрации.

Начальные условия на момент времени $\bar{t} = 0$ должны быть поставлены для нестационарных уравнений

- в пласте $\mathbf{x} \in D$

$$s = s_0(\bar{\mathbf{x}}); \quad \bar{p} = \bar{p}_0(\bar{\mathbf{x}}); \quad \bar{c}_i^w = \bar{c}_{i,0}^w(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1..N^w; \quad \bar{c}_i^o = \bar{c}_{i,0}^o(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1..N^o$$

- в трещинах МГРП $\mathbf{x} \in D_j^f, j = 1..N$

$$s_j^f = s_{j,0}^f(\bar{\mathbf{x}}); \quad \bar{c}_{ij}^{w,f} = \bar{c}_{ij,0}^{w,f}(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1..N^w; \quad \bar{c}_{ij}^{o,f} = \bar{c}_{ij,0}^{o,f}(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1..N^o$$

- в скважине $0 < \bar{y} < \bar{L}$

$$\eta = \eta_0(\bar{y}); \bar{C}_i^w = \bar{C}_{i,0}^w(\bar{y}), i = 1..N^w; \bar{C}_i^o = \bar{C}_{i,0}^o(\bar{y}), i = 1..N^o$$

Специфика математического моделирования индикаторных исследований состоит в том, чтобы описать все этапы этого процесса (подготовка, мини-ГРП, закачка флюида с трассерами, выдержка, отбор жидкости). Каждый этап характеризуется определенной длительностью, и для каждого этапа относительный начальный момент $\bar{t} = 0$ имеет индивидуальное значение на шкале абсолютного времени. Формально указанные уравнения и начальные условия применимы к любому этапу, но вид функций (с нижним индексом 0) в этих условиях для каждого этапа свой.

Граничные условия зависят от режима работы ГС: закачка либо отбор жидкости из пласта. Математически это обусловлено тем, что почти все дифференциальные уравнения модели, за исключением уравнений для давления, имеют гиперболический тип.

Давление в коллекторе удовлетворяет параболическому уравнению (1.3), а в трещинах МГРП – уравнениям эллиптического типа (1.15), поэтому граничные условия для них должны быть поставлены на всех участках границы. На перфорированной поверхности ГС γ считаем заданным давление p^γ ; при этом условие сопряжения по давлению на поверхности γ можно рассматривать как граничные условия Дирихле для уравнений в основном коллекторе (1.3) и в трещинах МГРП (1.15)

$$\bar{x} \in \bar{\gamma} : \bar{p}, \bar{p}_j^f = \bar{p}^\gamma(\bar{t}), j = 1..N \quad (1.28)$$

Главные граничные условия задаются и на внешнем контуре Γ

$$\bar{x} \in \bar{\Gamma} : \bar{p} = 0$$

При этом давление p_Γ следует интерпретировать как зависящее от точки на контуре Γ .

Равенство давлений в пласте и в трещинах дает условия I-го рода для уравнения (1.3)

$$\bar{x} \in \bar{F}_j^\pm : \bar{p} = \bar{p}_j^f, j = 1..N$$

На остальных участках границы: кровле $\bar{z} = \bar{Z}_T$, подошве $\bar{z} = \bar{Z}_B$, неперфорированных участках ствола скважины γ , торцах трещин $\bar{x} = \pm \bar{h}_j$, $\bar{z} = \pm \bar{H}_j$, $j = 1..N$ (совокупность этих участков границы обозначим $\bar{\Sigma}$) – ставится условие гидроизоляции, или однородное условие Неймана для давления

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{n}} \right|_{\bar{\Sigma}} = 0$$

Вместо условия () может использоваться нелокальное условие Неймана

$$\int_{\gamma} u_n^f d\gamma = - \int_{\gamma} \sigma \frac{\partial p^f}{\partial n} d\gamma = q^\gamma(t); p^f = p^\gamma(t)$$

в котором $q^\gamma(t)$ – заданный расход двухфазного флюида, а p^γ – неизвестное заранее значение давления на скважине.

В настоящем исследовании мы ограничимся частным, но практически важным случаем, когда поверхность γ гидроизолирована вне областей контакта с трещинами, и в каждый интервал времени закачки открыта лишь одна трещина с номером j . Тогда весь объем агента закачивается именно в эту трещину, и соответствующие граничные условия для уравнений (1.17), (1.18), (1.19) имеют вид

$$\bar{x} \in \bar{\gamma}_j, \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} < 0 : s_j^f = s_j^0; \bar{c}_{ij}^{w,f} = \bar{c}_{ij}^{w,0}, i = 1..N^w; \bar{c}_{ij}^{o,f} = \bar{c}_{ij}^{o,0}, i = 1..N^o$$

Условия сопряжения на плоскостях $F_j^\pm$ по насыщенности и концентрации зависят от направления скорости фильтрации. В случае притока флюида из пласта в трещины условия ставятся для гиперболических уравнений переноса в трещинах

$$\bar{\mathbf{x}} \in \bar{F}_j^\pm, \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} > 0 : s_j^f = s; \bar{c}_{ij}^{w,f} = \bar{c}_i^w, i = 1..N^w; \bar{c}_{ij}^{o,f} = \bar{c}_i^o, i = 1..N^o$$

Если скважина нагнетает, то условия ставятся для уравнений переноса в пласте

$$\bar{\mathbf{x}} \in \bar{F}_j^\pm, \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} < 0 : s = s_j^f; \bar{c}_i^w = \bar{c}_{ij}^{w,f}, i = 1..N^w; \bar{c}_i^o = \bar{c}_{ij}^{o,f}, i = 1..N^o$$

На внешней границе Γ области Ω (рис. 1), на ее участках Γ_{in} , где $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$, в каждый момент времени задается водонасыщенность и нулевая концентрация индикаторов:

$$\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Gamma}_{in} : s = s_\Gamma; \bar{c}_i^w = 0, i = 1..N^w; \bar{c}_i^o = 0, i = 1..N^o$$

На основе уравнений математической модели фильтрационных процессов в пласте, в трещинах МГРП и в стволе скважины с начальными и граничными условиями, можно сформулировать две принципиально разных задачи.

1. *Прямая задача* расчета полей давления, скоростей фаз, насыщенности и концентраций компонентов, если параметры трещин МГРП (размеры δ_j, h_j, H_j , пористость m_j^f и проницаемость k_j^f) и режим закачки индикаторов $p^i(t); c_{ij}^{w,0}(t), i = 1..N^w; c_{ij}^{o,0}(t), i = 1..N^o, j = 1..N$ заданы. Данная задача может моделировать как нагнетание на этапе доставки трассера в трещины ГРП, так и отбор жидкости для оценки продуктивности скважины и построения кривых выхода концентрации индикаторов.

2. *Обратная задача* подбора таких параметров трещин МГРП (размеров δ_j, h_j , пористости m_j^f и проницаемости $k_j^f, j = 1..N$), которые бы обеспечили наилучшее совпадение рассчитанных по математической модели показателей продуктивности ГС $Q(t), Q_w(t)$ и кривых выхода концентрации индикаторов $\tilde{C}_i^w(t), i = 1..N^w, \tilde{C}_i^o(t), i = 1..N^o$ с соответствующими функциями $Q^*(t), Q_w^*(t), C_i^{w,*}(t), C_i^{o,*}(t)$, построенными по результатам замеров. Понятно, что для рассматриваемой сложной нелинейной модели любой алгоритм подбора параметров трещин будет итерационным, и каждое приближение к решению обратной задачи предполагает решение прямой задачи.

2. КРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И УПРОЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Уравнения модели содержат, а ее решение определяется следующими безразмерными параметрами — основными критериями подобия (табл. 1):

- упругоемкость $\bar{\beta}$, или безразмерное время распространения волн давления;
- параметры сорбции $\bar{\tau}_i^k, \bar{a}_i^k, \bar{A}_i^k, \bar{B}_i^k, i = 1..N^k, k \in \{o, w\}$;
- параметры трещин $M_j, \bar{h}_j, \bar{H}_j, j = 1..N$;
- радиус и длина скважины $\bar{r}_w, \bar{L}$;
- время переноса в трещинах $\epsilon_j, j = 1..N$;
- время переноса в скважине e ;
- отношение вязкостей K_μ .

В зависимости от значений данных критериев подобия, в тех случаях, когда некоторые из них можно считать малыми, целесообразно строить асимптотические упрощенные модели исследуемого процесса.

Ниже мы рассмотрим одну из таких моделей, в которой $\epsilon_j \rightarrow 0, j = 1..N, e \rightarrow 0$. Физически эта асимптотика означает, что возмущения в трещине и скважине распространяются гораздо быстрее, чем в коллекторе нефтяного пласта. Поэтому поля давления, насыщенности и концентраций в трещине и скважине можно считать квазистационарными, т.е. изменяющимися во времени синхронно с изменениями граничных условий, либо источниковых членов в соответствующих уравнениях.

2.1. Упрощенная фильтрационная модель трещины

Положим в уравнении (1.17) $\epsilon_j = 0$ и для простоты опустим черту над безразмерными величинами. Получим стационарное уравнение для водонасыщенности в трещине

Таблица 1. Значения размерных исходных параметров и основных критериев подобия процесса

Характерные значения исходных параметров					
Параметр	Размерность	Значения	Параметр	Размерность	Значения
l	м	$(2..5)10^2$	β	Па^{-1}	10^{-9}
L	м	10^3	Δp^0	Па	$10^6..10^7$
H^0	м	$10^1..10^2$	τ_i^k	с	$10^3..10^5$
r_w	м	10^{-1}	A_i^k	$\text{кг} / \text{м}^3$	$1..10^2$
δ_j	м	$10^{-3}..10^{-2}$	B_i^k	$\text{кг} / \text{м}^3$	$10^{-1}..10$
h_j	м	10^2	c^0	$\text{кг} / \text{м}^3$	$1..10^2$
m^0	—	0.1	N	—	$2..10$
m_j^f	—	0.3	$\sigma^0 = k^0 / \mu^0$	$\text{м}^2 / \text{Па} \cdot \text{с}$	$10^{-12}..10^{-10}$
k^0	м^2	$10^{-15}..10^{-13}$	$u^0 = \sigma^0 \Delta p^0 / l$	м/с	$10^{-8}..10^{-5}$
k_j^f	м^2	10^{-10}	$t^0 = lm^0 / u^0$	с	$10^6..10^9$
$\mu^0 = \mu_w$	$\text{Па} \cdot \text{с}$	10^{-3}	μ_o	$\text{Па} \cdot \text{с}$	$10^{-3}..10^{-2}$
Основные критерии подобия					
Параметр	Формула	Значения	Параметр	Формула	Значения
$\bar{\beta}$	$\beta \Delta p^0 / m^0$	$10^{-2}..10^{-1}$	$\bar{h}_j$	h_j / l	$10^{-1}..1$
$\bar{\tau}_i^k$	τ_i^k / t^0	$10^{-6}..10^{-1}$	$\bar{H}_j$	H_j / l	$10^{-1}..1$
$\bar{A}_i^k$	$A_i^k / (m^0 c^0)$	$10^{-1}..10^3$	M_j	$\delta_j k_j^f / (lk^0)$	$10^2..10^5$
$\bar{B}_i^k$	B_i^k / c^0	$10^{-3}..10$	$\bar{A}$	$2LH^0 / l^2$	$1..10$
$\bar{r}_w$	r_w / l	10^{-3}	ε_j	$m_j^f k^0 / (m^0 k_j^f)$	$10^{-5}..10^{-3}$
$\bar{L}$	L / l	10	e	$r_w / (4lNM^0 m^0)$	$10^{-9}..10^{-6}$
K_μ	μ_w / μ_o	$10^{-1}..1$			

$$-\nabla_{xz} \cdot \left[f(s_j^f) \mathbf{u}_j^f \right] = \frac{1}{2M_j} (f(s) \bar{u}_y) \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} \quad [2.1]$$

в правой части которого стоит скорость притока воды из коллектора к берегам трещины ГРП.

Равновесное распределение насыщенности $s^f(x, z)$ в трещине ГРП в каждый момент времени должно отыскиваться из решения двумерного дифференциального уравнения (2.1), которое с учетом (1.3) можно записать в следующей форме

$$\mathbf{u}^f \cdot \nabla \phi = -q\phi + q_w, \quad \phi(x, z) = f(s^f(x, z)) \quad [2.2]$$

$$q = q^+ + q^-, \quad q_w = q^+ f^+ + q^- f^-, \quad q^+ = -\frac{1}{2M} u_y \Big|_{F^+}, \quad q^- = \frac{1}{2M} u_y \Big|_{F^-}, \quad f^\pm = f(s) \Big|_{F^\pm}$$

Функции q, q_w являются известными функциями координат (x, z) после решения задач о распределении давления и внешнего переноса насыщенности в пласте.

Построение квазистационарных полей насыщенности (2.2) приближенно заменяет собой решение гиперболического уравнения переноса насыщенности (1.17).

Упрощение уравнений для концентраций ВРТ и НРТ проводится аналогично.

2.2. Упрощенная модель гидродинамики скважины

Средняя скорость движения флюида в стволе ГС определена равенствами (1.21)

$$U(y, t) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{h}(y_j - y) \bar{M}_j u_{n,j}^f, 0 \leq y < L; U(L, t) = 0 \quad [2.3]$$

Обводненность (1.23) и перенос ВРТ (1.24) и НРТ (1.25) вдоль ствола ГС при $e \ll 1$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, интегрирование которых от y до L дает

$$\eta(y, t) = \frac{U^w}{U} = -\frac{1}{UN} \sum_{j=1}^N \mathbf{h}(y_j - y) \bar{M}_j u_{n,j}^{w,f} \Big|_y, \quad 0 \leq y < L \quad [2.4]$$

$$C_i^w(y, t) = -\frac{1}{UN} \sum_{j=1}^N \mathbf{h}(y_j - y) \bar{M}_j \left(c_{ij}^{w,f} u_{n,j}^{w,f} \right) \Big|_y \quad [2.5]$$

$$C_i^o(y, t) = -\frac{1}{UN} \sum_{j=1}^N \mathbf{h}(y_j - y) \bar{M}_j \left(c_{ij}^{o,f} u_{n,j}^{o,f} \right) \Big|_y \quad [2.6]$$

Параметрическая зависимость обводненности от времени в (2.4) обусловлена нестационарностью притока воды из трещин в скважину. Связь безразмерной концентрации ВРТ и НРТ в двухфазном флюиде с концентрацией трассера в нефтяной фазе определяется соотношениями (2.26).

Безразмерные скорости суммарного потока, воды и нефти из трещины j в скважину в точке примыкания $y = y_j$ равны

$$u_{n,j}^f = -\varphi_j^f \frac{\partial p_j^f}{\partial n} \Big|_y, \quad u_{n,j}^{f,w} = f(s_j^f) u_{n,j}^f, \quad u_{n,j}^{f,o} = [1 - f(s_j^f)] u_{n,j}^f$$

2.3. Упрощенные формулы для дебитов и кривых выноса трассеров

Все расчетные формулы получаются из решений для скважины (2.3)–(2.6), взятых при $y = 0$

- дебит ГС по жидкости определяется формулами (2.3), (1.27), (1.22):

$$\tilde{Q}(t) = U(0, t) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j u_{n,j}^f, \quad \bar{M}^j = \frac{M^j}{M^0}, \quad M^0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N M^k$$

- обводненность продукции и дебит по воде ()

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(0, t) = \frac{Q^w(t)}{\tilde{Q}(t)}, \quad Q^w(t) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j u_{n,j}^{w,f} \Big|_y$$

- дебит по нефти

$$Q^o(t) = (1 - \tilde{\eta}(t)) \tilde{Q}(t) = \tilde{Q}(t) - Q^w(t)$$

- кривые выхода ВРТ (2.5)

$$\tilde{C}_i^w = C_i^w(0, t) = \frac{Q_i^{cw}}{\bar{Q}(t)}, Q_i^{cw} = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j \left(c_{ij}^{w,f} u_{n,j}^{w,f} \right) \Big|_{\gamma}, i = 1..N^w$$

- кривые выхода НРТ (2.6)

$$\tilde{C}_i^o = C_i^o(0, t) = \frac{Q_i^{co}}{\bar{Q}(t)}, Q_i^{co} = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j \left(c_{ij}^{o,f} u_{n,j}^{o,f} \right) \Big|_{\gamma}, i = 1..N^o$$

2.4. Упрощенная модель фильтрации в коллекторе вблизи трещины МГРП

Объем флюида с растворенным трассером V настолько мал (порядка 10 м^3), что при закачке в трещину мини-ГРП площадью $A_{min} = 2|F_{min}| = 2H_{min}h_{min} \sim 200 \text{ м}^2$ глубина проникновения агента внутрь коллектора оценивается величиной $X = V/A_{min} < 1 \text{ м}$, а соответствующий безразмерный параметр $\bar{X} = X/l < 10^{-2}$ при $l \sim 0 \text{ м}$ является малым. При индикаторных исследованиях, в отличие от промышленной эксплуатации ГС с МГРП, определяющее время процесса X/u^0 ограничено закачкой или выработкой этого тонкого слоя в окрестности трещины и намного меньше характерного времени развития фильтрационных потоков t^0 , см. (1.1). Поэтому можно отметить две особенности этих краткосрочных процессов: 1) каждая трещина может рассматриваться независимо от остальных; 2) давление в тонком пограничном слое у берегов трещины определяется давлением в трещине, градиент давления в ортогональной плоскости трещины F направлении намного превосходит градиент давления вдоль трещины. Это позволяет принять локально-одномерную схему фильтрации вдоль трубок тока ℓ^+ , ℓ^- в коллекторе вблизи трещины. При этом вместо трехмерных уравнений (1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9) принимаем одномерные уравнения вдоль трубок тока ℓ^+ , ℓ^- , примыкающих в каждой точке (x, z) к берегам $F_j^\pm$ трещин. Для удобства дуговые координаты вдоль трубок тока обозначим символом ℓ и запишем постановку задач пониженной размерности

$$t > 0, 0 < \ell < \lambda \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \ell}(\omega u) = 0, u = -\sigma \frac{\partial p}{\partial \ell} \\ m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \ell}(\omega f u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(m s c_i^{w,o} + a_i^{w,o}) + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \ell}(\omega c_i^{w,o} u) = 0 \end{cases}$$

где λ — длина трубки тока; ω — относительная ширина трубки тока.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$t = 0, 0 \leq \ell \leq \lambda : s = s_0(\ell), c_i^{w,o} = c_{i,0}^{w,o}(\ell)$$

$$t > 0, \ell = 0 : p = p^f(x, z, t); \ell = \lambda : p = 0$$

Условия на границах для насыщенности и концентраций трассеров в зависимости от режима закачки или отбора ставятся соответственно либо на берегах трещин ($\ell = 0$), либо на контуре питания ($\ell = \lambda$).

Интенсивность притока жидкости к трещинам МГРП из пласта выражается следующим образом

$$q^\pm(x, z) = \frac{k^r}{\mu} (p_0 - p^f(x, z)) \left(\int_0^{\lambda(x,z)} \frac{d\ell}{\omega^\pm(\ell; x, z)} \right)^{-1}, |z| < h, |x| < H$$

Для замыкания постановки задач в терминах трубок тока необходимо дополнительно определить функции их длины $\lambda(x, z)$ и относительной ширины $\omega(x, z)$, которые считаются стационарными. Данные

функции могут быть построены из решения вспомогательной задачи о распределении давления и построенному по нему полю скорости фильтрации, либо заданы в форме приближенных функций для типичных областей дренирования трещин МГРП.

3. АПРОБАЦИЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

Принципиальное ускорение численного моделирования двухфазной многокомпонентной фильтрации вблизи трещин МГРП с помощью изложенного подхода достигается за счет двух упрощений: предположения о квазистационарном распределении переносимых компонент в трещинах МГРП и о возможности разложения задачи фильтрации в пласте на набор одномерных задач вдоль трубок тока. Уточнение отдельных параметров модели — функций фазовых проницаемостей в пласте и в трещинах, распределения долей водной и нефтяной фаз в стволе скважины в зависимости от свойств фаз и режимов течения и др. — не ограничивает общности изложенного подхода и может повысить надежность полученного решения, не приводя, однако, к дальнейшему существенному ускорению расчетов. Поэтому ниже приведена апробация двух основных упрощений модели, позволяющих использовать предложенный подход моделирования при решении обратных задач, требующих высокой производительности вычислений.

3.1. Достоверность упрощенной модели переноса в трещинах

Для наглядной оценки достоверности упрощенной модели переноса в трещинах рассмотрим решения исходной (1.17) и квазистационарной (2.2) задач о распределении насыщенности в двух одномерных постановках, приближающих случай прямолинейно-параллельного течения в трещинах большой протяженности ($h \gg H$) и случай плоско-радиального течения в трещинах малой протяженности ($h \approx H$). Для этого выполним сравнение мгновенных распределений насыщенности в трещине в некоторый момент времени t , построенных из решения задачи заводнения в полной трехмерной постановке (1.17), с равновесными профилями насыщенности в трещине, полученными в одномерном приближении задачи. При этом функции притоков q , q_w из (2.2) задаются из трехмерной задачи по мгновенному распределению притока к трещине в тот же момент времени t . Для протяженной трещины использовалось прямолинейно-параллельное приближение. Для трещины малой протяженности использовалось плоско-радиальное приближение.

Показано, что на фоне медленного изменения внешнего распределения насыщенности в пласте перераспределение насыщенности в трещине происходит практически мгновенно (рис. 2). Таким образом, квазистационарная модель позволяет избежать численного решения задачи переноса насыщенности в области трещины, характеризующейся высокими скоростями фильтрации, что принципиально упрощает и ускоряет построение численного решения задачи двухфазной фильтрации в области дренирования трещин, повышая его устойчивость.

3.2. Надежность и быстроедействие модели трубок тока в пласте

Для выяснения преимуществ понижения размерности задач переноса в пласте за счет перехода к модели трубок тока рассматривались тестовые примеры.

В первом примере сравнивалось численное решение задачи о двухфазной фильтрации в однородном пласте вблизи одиночной трещины бесконечной проницаемости, полученное в исходной пространственной постановке (верхний индекс e , exact) и по упрощенной схеме модели трубок тока. Сравнение выполнялось по затраченному на решение машинному времени и по величинам средних за период моделирования отклонений дебита скважины и обводненности:

$$e_Q^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (\tilde{Q} - \tilde{Q}^e)^2 dt, \quad e_F^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (\tilde{\eta} - \tilde{\eta}^e)^2 dt$$

На рис. 3 показана сходимость решения задачи в исходной постановке по числу N_{xy} элементов расчетной сетки с одновременным ростом длительности расчета T , равной затрачиваемому машинному времени, отнесенному к максимальной наблюдаемой величине. Там же приведены аналогичные результаты для упрощенной модели в зависимости от числа N_{ST} трубок тока на одном берегу половины трещины.

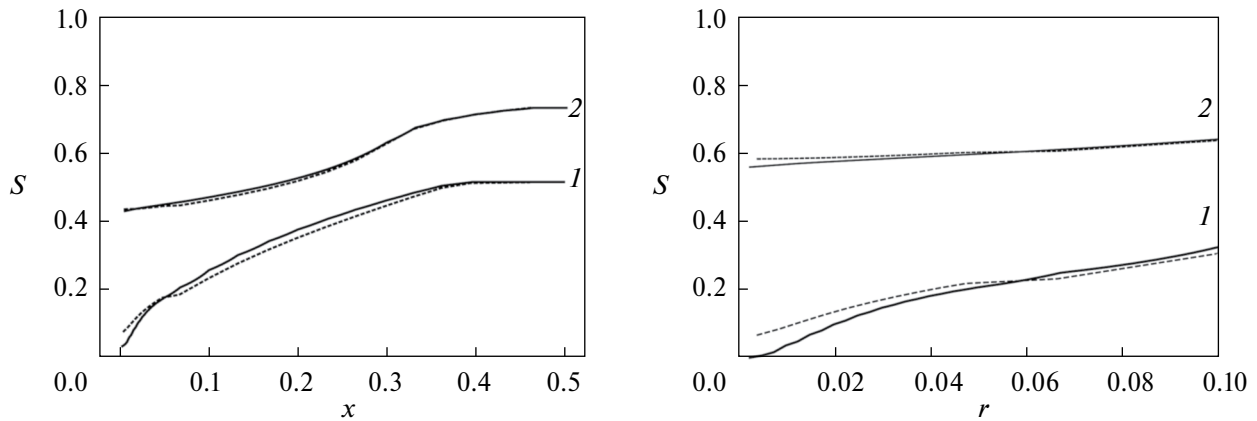


Рис. 2. Мгновенный профиль насыщенности в протяженной ($h = 10H$) (слева) и в малой ($h = H$) (справа) трещинах: сплошная линия – точное решение; пунктирная – равновесное решение в одномерном приближении; 1 – $M = 0,01$, 2 – $M = 10$.

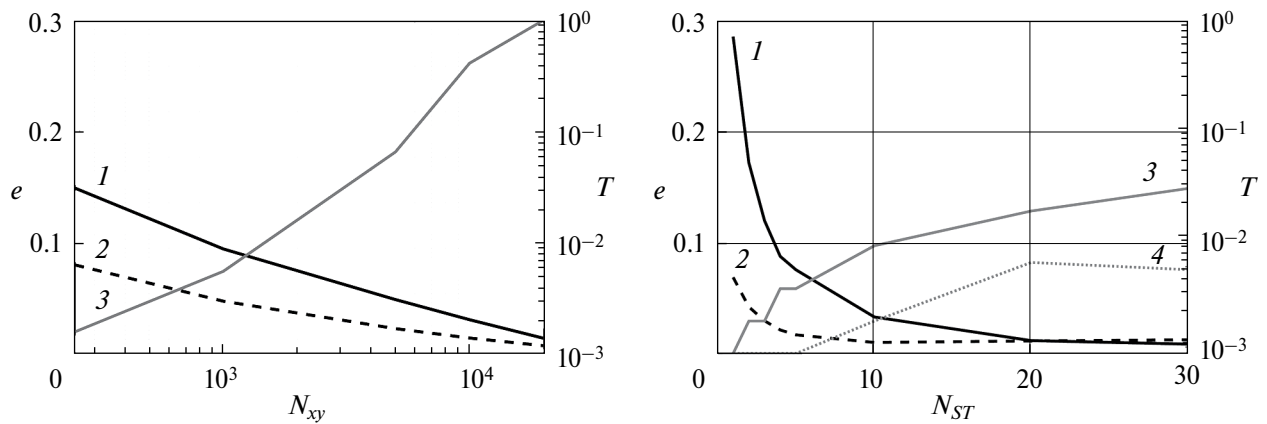


Рис. 3. Сходимость и быстродействие численного решения в исходной (слева) и упрощенной (справа) постановках: 1, 2 – погрешность расчета дебита и обводненности; 3, 4 – длительность моделирования без и с использованием параллельных вычислений.

Можно заключить, что изменчивость структуры линий тока, связанная с продвижением фронта насыщенности, незначительно влияет на погрешность упрощенной модели. При этом эффект изменения гидропроводности, приводящий к существенно нестационарному притоку, учитывается упрощенной моделью с достаточно высоким уровнем точности.

Разложение пространственной задачи на серию одномерных задач при допустимой погрешности моделирования около 1% позволяет сократить время численного решения почти на 2 порядка. Дополнительным преимуществом упрощенной модели является возможность независимого решения задач в отдельных трубках тока, за счет чего время численного моделирования может быть кардинально снижено с помощью аппарата параллельных вычислений.

Во втором примере моделировался аналогичный процесс в случае многостадийного ГРП с произвольной геометрией трещин. Вдоль каждой трещины строилась серия фиксированных трубок тока в количестве N_{ST} . С помощью упрощенной модели было получено вполне удовлетворительное воспроизведение динамики суммарного дебита и обводненности скважины (рис. 4). Ускорение счета по сравнению с исходной постановкой составило порядка 100 раз в последовательном режиме и порядка 1000 раз в режиме параллельных вычислений.

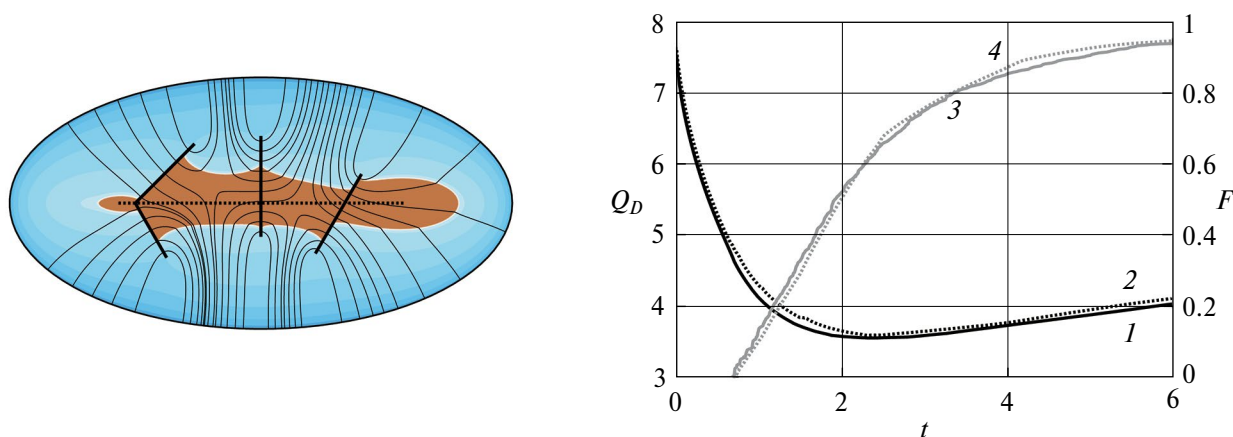


Рис. 4. Произвольная конфигурация трещин МГРП: (слева) – структура линий тока и распределение насыщенности; (справа) – приближенное (1, 3) и точное (2, 4) решение: дебит (1, 2), обводненность (3, 4)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена специальная математическая модель для воспроизведения многофазного многокомпонентного фильтрационного течения вблизи трещин многозонного гидравлического разрыва пласта вдоль горизонтальной скважины. Формулировка модели получена на основе теории подобия и анализа размерностей исходной трехмерной математической модели течения. С помощью оценки характерных величин критериев подобия задачи выполнено упрощение математической модели. Упрощена задача переноса смеси в скважине. Задачи переноса в трещинах гидроразрыва заменены на задачи о квазистационарных полях насыщенности и концентраций. В результате значительно повышена устойчивость решения по сравнению с сопряжением задач переноса в пласте и в трещинах, характеризующихся отличием скоростей течения на несколько порядков величин. С помощью модели трубок тока выполнена декомпозиция пространственной задачи о переносе фаз и компонент примеси в пласте на набор независимых одномерных задач. Такое понижение размерности решаемой задачи позволяет до двух порядков сократить необходимое для ее решения машинное время. При сохранении достаточной точности решения это обеспечивает возможность применения прямого численного моделирования фильтрационных течений с учетом их истинной пространственной структуры для решения обратной задачи интерпретации индикаторных исследований фильтрационно-емкостных параметров трещин. Выполненные оценки достоверности использованных допущений и упрощений демонстрируют применимость предложенной модели для вычисления основных гидродинамических параметров процесса.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН (Филиал ФГУ Научно-исследовательский институт системного анализа РАН) в рамках государственного задания (тема FNEF-2022-0014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gidley J.L., Holditch S.A., Nierode D.E., Veatch R.W.* Recent Advances in Hydraulic Fracturing. 318. Monograph, SPE, 1989.
2. *Ozkan E., Brown M., Raghavan R., Kazemi H.* Comparison of fractured horizontal-well performance in conventional and unconventional reservoirs. Paper presented at the SPE Western Regional Meeting, San Jose, California, March 2009: 345–360.
doi: <https://doi.org/10.2118/121290-MS>
3. *Wei Y., Economides M.J.* Transverse hydraulic fractures from a horizontal well // Proceedings. Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, October 2005 25–36.
doi: <https://doi.org/10.2118/94671-MS>

4. *Cipolla C.L., Warpinski N.R., Mayerhofer M.J., Lolon E.P., Vincent M.C.* The relationship between fracture complexity, reservoir properties, and fracture treatment design // SPE Prod & Oper. 2010. V. 25. P. 438–452.
doi: <https://doi.org/10.2118/115769-PA>
5. *Meyer B.R., Bazan L.W., Jacot R.H., Lattibeaudiere M.G.* Optimization of multiple transverse hydraulic fractures in horizontal wellbores. // SPE Unconventional Gas Conference, Pittsburgh, PA, United States, February. 2010.
doi: <https://doi.org/10.2118/131732-MS>
6. *Asadi M., Woodroof R.A., Dumas J.D.* Post-frac analysis based on flowback results using chemical frac-tracers // International Petroleum Technology Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, December 2008.
doi: <https://doi.org/10.2523/IPTC-11891-MS>
7. *Dang A.* Post-treatment horizontal hydraulic fracture modeling with integrated chemical tracer analysis, a case study // Technical Conference and Exhibition, Dubai, UAE, September 2016.
doi: <https://doi.org/10.2118/184498-STU>
8. *Gardien C.J., Pope G.A., Hi, A.D.* Hydraulic fracture diagnosis using chemical tracers. // Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, October 1996. P. 925–932.
doi: <https://doi.org/10.2118/36675-MS>
9. *Goswick R.A., Larue J.L.* Utilizing oil soluble tracers to understand stimulation efficiency along the lateral // Annual Technical Conference and Exhibition, Amsterdam, The Netherlands, October. 2014. P. 4608–4617.
doi: <https://doi.org/10.2118/170929-MS>
10. *King G.E., Leonard D.* Utilizing fluid and proppant tracer results to analyze multi-fractured well flow back in shales. // Hydraulic Fracturing Technology Conference, The Woodlands, Texas, USA, January .2011. P. 146–164.
doi: <https://doi.org/10.2118/140105-MS>
11. *Mazo A.B., Sattarov R.I., Khamidullin M.R., Potashev K.A., Trifonof T.V.* Interpretation of Indicator Studies of Multistage Fracturing // SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, October 2017.
doi: <https://doi.org/10.2118/187762-MS>
12. *Spencer J., Bucior D., Catlett R., Lolon E.* Evaluation of horizontal wells in the Eagle Ford using oil-based chemical tracer technology to optimize stimulation design. // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, The Woodlands, Texas, USA, February 2013.
doi: <https://doi.org/10.2118/163846-MS>
13. *Long J.C.S., Remer J.S., Wilson C.R., Witherspoon P.A.* Porous Media Equivalents for Networks of Discontinuous Fractures // Water Resources Research. 1982. V. 18. P. 645–658.
doi: <https://doi.org/10.1029/WR018i003p00645>
14. *Robinson P.C.* Connectivity, flow and transport in network models of fractured media // AERE Rep. TP1072, Theor. Phys. Div., Harwell, Oxfordshire, United Kingdom, 1984.
15. *Hyman J.D., Karra S., Makedonska N., Gabel C.W., Painter S.L., Viswanathan H.S.* A discrete Fracture network framework for modeling subsurface flow and transport // Computers & Geoscience, 2015. V. 84. P. 10–19.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2015.08.001>
16. *Xing F., Masson R., Lopez S.* Parallel vertex approximate gradient discretization of hybrid dimensional Darcy flow and transport in discrete fracture networks. Computer Geoscience. 2017. V. 21. P. 595–617.
doi: <https://doi.org/10.1007/s10596-016-9606-z>
17. *Frih N., Martin V., Roberts J.E., Saāda A.* Modeling fractures as interfaces with nonmatching grids// Computer Geosciences. 2012. V. 16. P. 1043–1060.
doi: <https://doi.org/10.1007/s10596-012-9302-6>
18. *Jiami J., Younis R.M.* Hybrid Coupled Discrete-Fracture/Matrix and Multicontinuum Models for Unconventional-Reservoir Simulation // SPE J.2016. V. 21. P. 1009–1027.
doi: <https://doi.org/10.2118/178430-PA>
19. *Maryška J., Severýn O., Vohralík M.* Numerical simulation of fracture flow with a mixed-hybrid FEM stochastic discrete fracture network model // Computer Geosciences. 2005. V. 8. P. 217–234.
doi: <https://doi.org/10.1007/s10596-005-0152-3>
20. *Xia Y., Jin Y., Chen M., Chen K.P.* An Enriched Approach for Modeling Multiscale Discrete-Fracture/Matrix Interaction for Unconventional-Reservoir Simulations // SPE J. 2019. V. 24. P. 349–374.
doi: <https://doi.org/10.2118/194012-PA>
21. *Tan X.-H., Jiang L., Li X.-P., Zhang B.-J., Li X.-C.* Flow model of a multi-stage hydraulic fractured horizontal well based on tree-shaped fractal fracture networks // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2018. V. 169: 494–503.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.06.008>

22. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
23. Мазо А.Б., Поташев К.А., Хамидуллин М.Р. Фильтрационная модель притока жидкости к горизонтальной скважине с многостадийным гидравлическим разрывом пласта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки. 2015. Т. 157. № 4. С. 133–148.
24. Atmaca S., Sarica C., Zhang H.-Q., Al-Sarkhi A.S. Characterization of Oil/Water Flows in Inclined Pipes// SPE Projects, Facilities & Construction. 2009. V. 4(02). P. 41–46.
doi: 10.2118/115485-pa
25. Mazo A.B., Khamidullin M.R., Potashev K.A., Modeling of the Two-Phase Flow Through the Hydraulic Fractures in an Oil Reservoir // Lobachevskii J Math. 2023. V. 44. P. 1700–1706.
26. Potashev K.A., Mazo A.B. Numerical modeling of local effects on the petroleum reservoir using fixed streamtubes for typical waterflooding schemes // Georesursy = Georesources. 2020. V. 22(4). P. 70–78.
doi: <https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.70-78>
27. Поташев К.А., Мазо А.Б., Мухина М.В., Ураимов А.А., Маклаков Д.В., Хамидуллин М.Р. Моделирование притока пластового флюида к трещинам бесконечной проницаемости многозонного гидроразрыва пласта с помощью трубок тока // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. V. 164(1). P. 101–121.
doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.101-121

Mathematical Model of Water- and Oil-Soluble Tracers Transfer in Studying Multistage Hydraulic Fracturing

A. B. Mazo^{a,*}, M. R. Khamidullin^{b,**}, K. A. Potashev^{a,***}, and A. A. Uraimov^{b,****}

^a*Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kazan, Russia*

^b*Scientific Research Center “Kurchatov Institute,” Moscow, Russia*

*e-mail: abmazo1956@mail.com

**e-mail: marseille.ksu@gmail.com

***e-mail: kpotashev@mail.ru

****e-mail: aaauraimov@gmail.com

A simplified mathematical model of two-phase multicomponent flow in the reservoir – multistage hydraulic fractures – horizontal well system is proposed. The formulation of transport problems in the well and in hydraulic fractures is simplified based on the dimensional analysis and similarity theory. The possibility of transition to a quasi-steady-state problem of distribution of the mixture components in high-permeability hydraulic fractures is shown. The dimension of the problem in reservoir is reduced by decomposing the problem into a set of problems in independent fixed stream tubes. For numerical solution of the problem, the resulting reduction in computer time reaches two orders of magnitude and can be further reduced by using parallel computing. Accelerating the solution of the direct problem is fundamentally necessary for the possibility of solving the inverse problem of identifying the porosity and permeability properties of fractures from the results of interpretation of tracer studies.

Keywords: petroleum reservoir, multistage hydraulic fracturing, horizontal well, multi-component flow through porous medium, high-performance computing, analytical solution, numerical simulation, stream tubes.