

УДК 532.59:539.3

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕЧЕНИЯ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

© 2024 г. Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 30.01.2024 г.

После доработки 14.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Исследуется дифракция плоских поверхностных и изгибно-гравитационных волн на кромке плавающей упругой полубесконечной пластины при нормальном набегании в жидкости конечной глубины при наличии течения со сдвигом скорости. Построено явное аналитическое решение этой задачи методом Винера–Хопфа. Получены простые точные формулы для коэффициентов отражения и прохождения, энергетические соотношения. Приведены результаты численных расчетов по полученным формулам.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, дифракция, сдвиговой поток.

DOI: 10.31857/S1024708424030139, **EDN:** PEVMAI

Задача о поведении на волнах плавающей упругой пластины, моделирующей ледяной покров, привлекает интерес исследователей в связи с освоением арктических районов с целью добычи полезных ископаемых, а также в связи с проектированием искусственных островов и плавающих платформ различного назначения. Задача гидроупругости плавающих упругих пластин является связанной: уравнения упругости и движения жидкости должны решаться одновременно. Для решения таких задач разработаны аналитические, полуаналитические, численные и экспериментальные методы исследований. В настоящее время существует множество работ по этой теме (обзоры [1–6]). Одно из направлений исследований по взаимодействию волн с ледяным покровом – задача дифракции волн на кромке ледяного покрова и линейных неоднородностях ледяного покрова: трещинах, торосах, полыньях и т.д. [7–43].

Из аналитических методов наиболее часто используется метод Винера–Хопфа (например, [7–19]). Ледяной покров обычно моделируется тонкой пластиной Кирхгофа–Лява, а в работах [12, 17] использовалась более сложная модель Миндлина–Тимошенко. Особенностью задачи является высокий порядок производной – пятый в краевом условии для уравнения Лапласа. Это приводит к тому, что решение зависит от констант, которые необходимо определить из условий в кромке. Коэффициенты системы имеют сложный вид, поэтому расчеты по полученным формулам проведены только в более поздних работах [12–19]. В [13, 14], отбросив малый член, характеризующий инерцию пластины, которая мала по сравнению с инерцией жидкости, для случаев нормального и косоугольного набегания эту систему удалось точно обратить и получить решение в явном виде. Получены простые формулы для коэффициентов отражения и прохождения. В [15, 17] метод Винера–Хопфа применен к решению задачи о дифракции волн на упругой пластине конечной ширины – полуполосе. Получение решения сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В [20, 21] использован аналитический метод вычетов (residues calculus), также позволяющий получить решение в явном виде. В [22] рассмотрен случай бесконечной глубины жидкости. Краевая задача сведена к сингулярному уравнению типа Карлемана, затем к задаче Римана–Гильберта. Исследования в [18, 19] обобщают все предыдущие работы. В [18] двумя методами: Винера–Хопфа и вычетов решена задача о дифракции волн на пластине, состоящей из трех частей с различными характеристиками, в частности может быть свободная поверхность. В [19] в аналогичной постановке получены два связанных интегральных уравнения. Одно из них типа Винера–Хопфа решается аналитически, а второе численно. В [23] в случае более простой постановки, когда однородная пластина разделена трещиной,

путем разделения задачи на симметричную и антисимметричную части также получено решение в явном виде.

В работах [24–30] используется разложение потенциала скорости течения жидкости по собственным функциям с неизвестными коэффициентами в отдельных областях и склейка их различными способами, в основном интегральная склейка. В результате получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов. В [30] введено неортогональное произведение собственных функций, с помощью которого построено решение. В [31, 32] для случая пластины конечной длины прогиб ее раскладывается по полной системе ортогональных функций, для каждой из которых решается гидродинамическая задача. Решение также сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В работе [33] сформулировано вариационное уравнение, которое решалось методом Рэлея–Ритца. Использовался также метод сведения краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с помощью функции Грина [34] или к интегрально-дифференциальному уравнению [35, 36]. Методы граничных и конечных элементов применялись в работах [37–40]. Экспериментальные результаты и сравнение с теоретическими расчетами приведены в [41–43]. Существует также большое число исследований по усложнению моделей: нескольких пластин, переменной толщины, составных пластин с различными условиями закрепления, с учетом неровного дна, нескольких линейных неоднородностей, влияния сжатия и пористой структуры и т.д.

В большинстве этих работ жидкость в невозмущенном состоянии находится в покое или имеется течение с постоянной скоростью. Однако в действительности в морях и океанах наблюдаются течения, где скорость жидкости меняется с глубиной как по величине, так и по направлению. Поэтому необходимы исследования с учетом таких факторов. Только в одной из работ [10] рассматривалась дифракция волн на полубесконечном ледяном покрове при наличии течения с линейным сдвигом скорости. Решение строилось методом Винера–Хопфа, но оно не закончено, не было проведено расчетов. В настоящей работе эта задача решена также методом Винера–Хопфа, но другим способом. Решение получено в явном виде. Для коэффициентов отражения и прохождения получены простые точные формулы и энергетические соотношения, проведены расчеты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается полубесконечный ледяной покров, плывущий на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H с линейным сдвигом скорости. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной постоянной толщины. Плоская волна малой амплитуды набегаем под прямым углом к пластине, причем длина волны значительно больше толщины пластины. Схема течения изображена на рис. 1а. Осадкой пластины в воду будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды. Предполагается, что колебания малы, не происходит отрыва пластины от жидкости. Задача решается в линейной постановке.

Введем декартову систему координат Oxy , связанную с пластиной, с центром O в кромке пластины и осью y , направленной вертикально вверх (рис. 1б). Вектор скорости жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v}(x, y, t) = (U(y) + u, v), \quad U(y) = \gamma y$$

где γ – константа. Основное течение жидкости $U(y)$ не потенциально, имеет постоянную завихренность, u, v – возмущенные компоненты скорости, малые по сравнению с основным течением.

Рассмотрим движение жидкости. Вектор скорости течения жидкости удовлетворяет уравнениям Эйлера и неразрывности

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P / \rho - \mathbf{g}\mathbf{i}_y, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad P = -\rho gy + p$$

Здесь d/dt – полная производная по времени, P – гидродинамическое давление, которое складывается из гидростатической части и возмущенного гидродинамического давления p , ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, \mathbf{i}_y – единичный орт оси Oy . В работе [10] показано, что в плоском случае возмущенное течение жидкости на основном течении с линейным сдвигом скорости является потенциальным

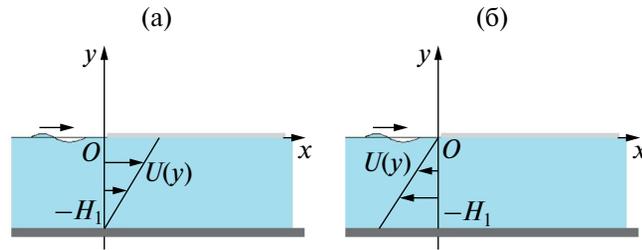


Рис. 1. Схема течения: (а) в неподвижной системе координат, (б) в системе координат, связанной с пластиной.

$$u = \partial\phi / \partial x, \quad v = \partial\phi / \partial y, \quad \Delta\phi = 0 \quad (1.1)$$

Уравнения движения жидкости имеют интеграл [10]

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + U(y)\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] - \gamma\psi + \frac{p}{\rho} + gy = f(t) \quad (1.2)$$

где ψ – функция тока.

Ставятся граничные условия: условие непротекания на дне

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, -H, t) = 0 \quad (1.3)$$

а на верхней границе жидкости кинематическое условие

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad (1.4)$$

где η – вертикальное смещение верхней границы жидкости.

На свободной поверхности жидкости полагаем $P = 0$, $f(t) = 0$, $U(0) = 0$. Из (1.2) в линейном приближении получаем уравнение

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \gamma\psi + g\eta = 0, \quad (-\infty < x < 0, y = 0) \quad (1.5)$$

Прогиб ледяного покрова $\eta(x, t)$ описывается уравнением изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа-Лява

$$D\partial^4\eta / \partial x^4 + \rho_0 h d^2\eta / dt^2 = -\rho g\eta + p(x, 0, t), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.6)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ρ_0 , h – плотность и толщина льда, ν – коэффициент Пуассона. Из уравнений (1.2), (1.6) получаем динамическое условие на верхней границе жидкости под пластиной

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \gamma\psi + g\eta + \frac{D}{\rho} \frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + \frac{\rho_0 h}{\rho} \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0, \quad (0 < x < \infty, y = 0) \quad (1.7)$$

В кромке пластины ставятся условия свободного края

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0, \quad (x = 0, y = 0) \quad (1.8)$$

В задаче дифракции периодических волн все функции зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$. Кроме того, должны выполняться условия излучения при $|x| \rightarrow \infty$ и условие регулярности решения вблизи кромки (локальная ограниченность энергии).

2. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Введем безразмерные переменные, параметры и функции по формулам

$$(x', y', H') = (x, y, H) / L, \quad t' = t\sqrt{g/L}, \quad L = \left(\frac{D}{\rho g}\right)^{1/4}$$

$$S = \gamma\sqrt{L/g}, \quad \delta = \frac{\rho_0 h}{\rho L}, \quad \lambda = \omega\sqrt{L/g}$$

$$U' = \frac{U}{\sqrt{gL}}, \quad (u', v') = \frac{(u, v)}{A\sqrt{g/L}}, \quad (\phi', \psi') = \frac{(\phi, \psi)}{A\sqrt{gL}}, \quad \eta' = \frac{\eta}{A}, \quad p' = \frac{p}{\rho g A}$$

где A – характерная амплитуда волн. Штрихи далее опускаем. Среди всех безразмерных параметров задачи параметр δ , который характеризует инерцию пластины, является малым и несущественным, инерция пластины мала по сравнению с инерцией жидкости. Для упрощения выражений можно положить его равным нулю, $\delta = 0$. Основными параметрами в этой задаче являются безразмерные частота λ и глубина жидкости H , параметр сдвига S .

Граничные условия на верхней границе жидкости после дифференцирования (1.5), (1.7) по времени принимают вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - S \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (-\infty < x < 0, y = 0). \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - S \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (0 < x < \infty, y = 0) \quad (2.2)$$

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим решения уравнения Лапласа в виде периодических плоских волн

$$\phi = C e^{i(\alpha x - \lambda t)} \frac{\text{ch} \alpha(y + H)}{\text{ch} \alpha H}, \quad \psi = i C e^{i(\alpha x - \lambda t)} \frac{\text{sh} \alpha(y + H)}{\text{ch} \alpha H}$$

Тогда из уравнений (2.1), (2.2) получаем дисперсионные соотношения для волн на свободной поверхности жидкости и под пластиной в виде

$$K_1(\alpha) = \alpha \text{th} \alpha H - \lambda S \text{th} \alpha H - \lambda^2 = 0 \quad (3.1)$$

$$K_2(\alpha) = (\alpha^4 + 1) \alpha \text{th} \alpha H - \lambda S \text{th} \alpha H - \lambda^2 = 0 \quad (3.2)$$

Графики зависимости безразмерной частоты λ от волнового числа α приведены на рис. 2 для поверхностных волн (а) и для изгибно-гравитационных волн (б) при различных значениях параметра сдвига S для пластины толщиной $h = 1$ м, остальные значения входных параметров приведены в разделе 7. Видно, что с увеличением параметра S симметрия нарушается все сильнее. Поскольку уравнения (3.1) и (3.2) являются квадратными относительно λ , то существуют два решения, отличающиеся знаком. Верхние ветви соответствуют знаку плюс перед корнем в решении квадратного уравнения, а нижние – знаку минус.

Уравнение (3.1) имеет два действительных корня: $k_0^- < 0$, $k_0^+ > 0$ и счетное множество комплексных корней k_j^+ , $j = 1, 2, \dots$ в верхней полуплоскости. Сопряженные значения $k_j^- = \bar{k}_j$, $j = 1, 2, \dots$ являются

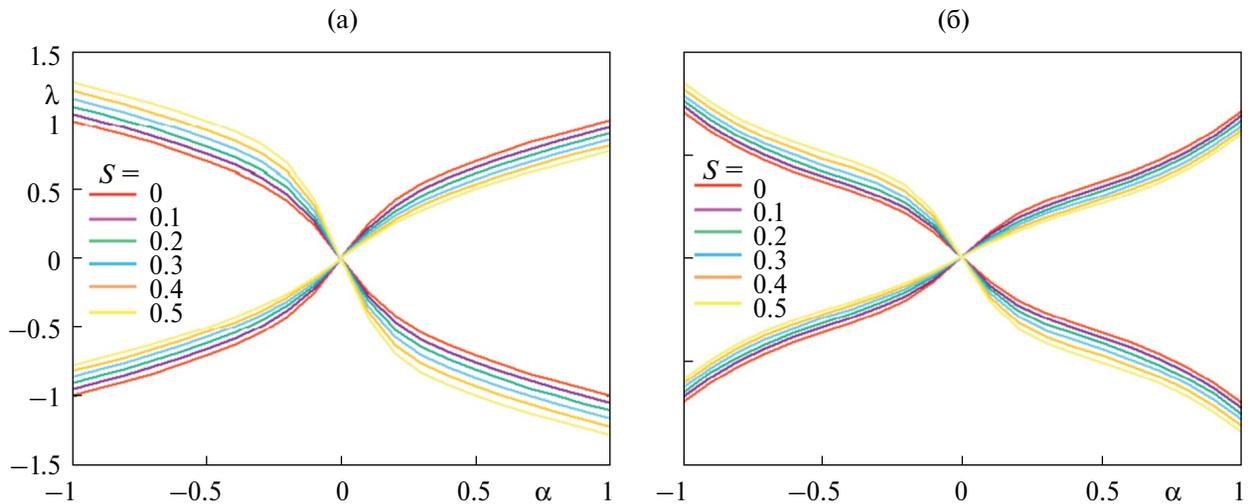


Рис. 2. Зависимости безразмерной частоты λ от волнового числа α при различных параметрах сдвига S (а) для поверхностных волн, (б) для изгибно-гравитационных волн.

корнями в нижней полуплоскости. Аналогично уравнение (3.2) имеет два действительных корня: $\alpha_0^- < 0$, $\alpha_0^+ > 0$ и счетное множество комплексных корней α_j^+ , $j = 1, 2, \dots$ в верхней полуплоскости, сопряженные значения $\alpha_j^- = \bar{\alpha}_j$, $j = 1, 2, \dots$ являются корнями в нижней полуплоскости. Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся волны, остальные корни определяют краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от кромки пластины.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Представим потенциал ϕ в виде

$$\phi(x, y, t) = (\phi_0(x, y) + \phi_1(x, y))e^{-i\lambda t}, \quad \phi_0(x, y) = e^{ikx} \operatorname{ch}k(y + H) / \operatorname{ch}kH, \quad k = k_0^+$$

где ϕ_0 – потенциал падающей волны, ϕ_1 – дифрагированный потенциал. Функция $\phi_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и следующим граничным условиям, полученным из уравнений (1.3)–(2.2):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, -H, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + i\lambda S \psi_1 - \lambda^2 \phi_1 = 0, \quad (-\infty < x < 0, y = 0) \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + i\lambda S \psi_1 - \lambda^2 \phi_1 = B e^{ikx}, \quad (0 < x < \infty, y = 0), \quad B = -k^5 \operatorname{th}kH \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (x = 0, y = 0) \quad (4.4)$$

Решение задачи будем строить методом Винера–Хопфа аналогично тому, как изложено в [13], но с некоторыми изменениями. Введем в рассмотрение функции комплексной переменной α

$$\Phi_-(\alpha, y) = \int_0^\infty e^{-i\alpha x} \phi_1(x, y) dx, \quad \Phi_+(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 e^{-i\alpha x} \phi_1(x, y) dx \quad (4.5)$$

$$\Phi(\alpha, y) = \Phi_-(\alpha, y) + \Phi_+(\alpha, y)$$

Функция $\Phi_+(\alpha, y)$ определена в верхней полуплоскости $\text{Im}\alpha > 0$, а функция $\Phi_-(\alpha, y)$ – в нижней полуплоскости $\text{Im}\alpha < 0$ [44]. С помощью аналитического продолжения эти функции можно определить во всей комплексной плоскости. Функция $\Phi(\alpha, y)$ представляет собой образ Фурье для функции $\phi_1(x, y)$ и удовлетворяет уравнению

$$\partial^2 \Phi / \partial y^2 - \alpha^2 \Phi = 0$$

Общее решение этого уравнения с условием (4.1) на дне имеет вид

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha)Y(\alpha, y), \quad Y(\alpha, y) = \text{ch}\alpha(y + H) / \text{ch}\alpha H \quad (4.6)$$

Исследуем поведение функций $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. При $x \rightarrow -\infty$ дифрагированный потенциал представляет собой отраженную волну вида $Re^{ik_0^- x} Y(k_0^-, y)$ и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню k_1^+ с наименьшей мнимой частью. Поэтому $\Phi_+(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im}\alpha > -\text{Im}k_1^+$, за исключением полюса при $\alpha = k_0^-$. При $x \rightarrow \infty$ потенциал ϕ_1 представляет собой проходящую волну с волновым числом α_0^+ , волну с волновым числом k , компенсирующую ϕ_0 , и множество экспоненциально затухающих мод. Поэтому функция $\Phi_-(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im}\alpha < \text{Im}\alpha_1^+$, за исключением полюсов в точках $\alpha = \alpha_0^+$ и $\alpha = k$.

Обозначим через $D_{\pm}(\alpha)$ интегралы типа (4.5), где функция ϕ_1 под интегралом заменяется левой частью краевого условия (4.2), а через $F_{\pm}(\alpha)$ – аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть выражения (4.3). Эти интегралы представляют собой преобразование Фурье обобщенных функций [45]. Для них выполняются соотношения

$$D_-(\alpha) + D_+(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad F_-(\alpha) + F_+(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha) \quad (4.7)$$

Из краевых условий (4.2), (4.3) имеем

$$D_+(\alpha) = 0, \quad F_-(\alpha) = \frac{B}{i(\alpha - k)}$$

Тогда

$$D_-(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad F_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - k)} = C(\alpha)K_2(\alpha)$$

Исключая функцию $C(\alpha)$, получаем уравнение

$$D_-(\alpha) = K(\alpha)\left(F_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - k)}\right), \quad K(\alpha) = \frac{K_1(\alpha)}{K_2(\alpha)} \quad (4.8)$$

Факторизуем функцию $K(\alpha)$

$$K(\alpha) = K_-(\alpha)K_+(\alpha) \quad (4.9)$$

где функции $K_{\pm}(\alpha)$ регулярны в тех же областях, что и функции $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. Функция $K(\alpha)$ имеет соответственно нули и полюса на действительной оси в точках $k = k_0^+$, k_0^- , α_0^- и α_0^+ . Поэтому будем рассматривать области аналитичности Π_+ и Π_- , Π_+ – полуплоскость $\text{Im}\alpha > -c$ с разрезами, исключаяющими точки α_0^- и k_0^- , Π_- – полуплоскость $\text{Im}\alpha < c$ с разрезами, исключаяющими точки k_0^+ и α_0^+ (рис. 3), $c = \min\{\text{Im}k_1^+, \text{Im}\alpha_1^+\}$.

Введем функцию

$$g(\alpha) = \frac{K(\alpha)(\alpha - \alpha_0^+)(\alpha - \alpha_0^-)(\alpha^4 + 1)}{(\alpha - k_0^+)(\alpha - k_0^-)}$$

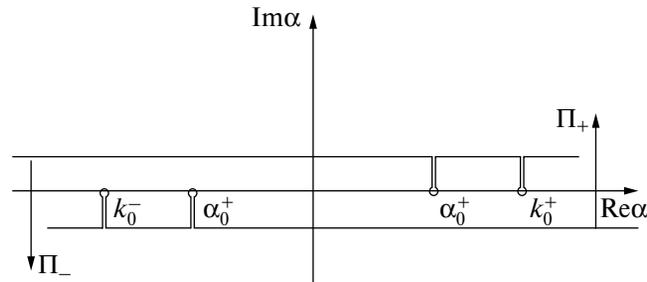


Рис. 3. Области Π_{\pm} аналитичности функций Φ_{\pm} .

Функция $g(\alpha)$ не имеет нулей на действительной оси, ограничена и стремится на бесконечности к единице. Факторизуем $g(\alpha)$ следующим образом [44]

$$g(\alpha) = g_-(\alpha)g_+(\alpha), \quad g_{\pm}(\alpha) = \exp\left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp id}^{\infty \mp id} \frac{\ln g(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta\right], \quad d < c \quad (4.10)$$

Функции $K_{\pm}(\alpha)$ определяются выражениями

$$K_+(\alpha) = \frac{g_+(\alpha)(\alpha - k_0^-)}{(\alpha - \alpha_0^-)(\alpha - e^{i5\pi/4})(\alpha - e^{i7\pi/4})} \quad (4.11)$$

$$K_-(\alpha) = \frac{g_-(\alpha)(\alpha - k_0^+)}{(\alpha - \alpha_0^+)(\alpha - e^{i\pi/4})(\alpha - e^{i3\pi/4})}$$

Уравнение (4.8) запишем в виде

$$K_+(\alpha)(F_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - k)}) = \frac{D_-(\alpha)}{K_-(\alpha)}$$

Преобразуем его следующим образом

$$K_+(\alpha)F_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - k)}(K_+(\alpha) - K_+(k)) = \frac{D_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{BK_+(k)}{i(\alpha - k)}$$

В левой части этого равенства имеем функцию, аналитическую в области Π_+ , а в правой – функцию, аналитическую в Π_- . Их аналитическим продолжением можно определить функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля эта функция является полиномом. Степень полинома определяется поведением функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность не выше $O(r^{-\epsilon})$ ($\epsilon < 1$, r – расстояние до кромки пластины). Тогда функция $F_+(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеет порядок не выше $O(|\alpha|^{\epsilon+3})$, а $D_-(\alpha)$ – не выше $O(|\alpha|^{\epsilon-1})$ [45]. Функции $K_{\pm}(\alpha)$ имеют на бесконечности порядок $O(|\alpha|^{-2})$, так как $g_{\pm}(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Следовательно, степень полинома равна единице и

$$\frac{D_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{BK_+(k)}{i(\alpha - k)} = \frac{BK_+(k)}{i}(a + b\alpha)$$

где a и b – неизвестные константы, которые будем определять из условий (4.4).

Выражая из последнего уравнения $D_-(\alpha)$, с учетом (4.6)–(4.8) находим

$$\phi_1(x, y) = \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{K_-(\alpha) \operatorname{ch} \alpha(y + H)}{K_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha H} \left(a + b\alpha + \frac{1}{\alpha - k}\right) d\alpha \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) = e^{ikx} k \operatorname{th} k H + \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{K_-(\alpha) \alpha \operatorname{th} \alpha H}{K_1(\alpha)} \left(a + b\alpha + \frac{1}{\alpha - k} \right) d\alpha \quad (4.13)$$

Контур интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей Π_+ и Π_- . Можно выбрать контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0^+ и k_0^+ снизу, а точки α_0^- и k_0^- сверху.

Рассмотрим случай $x > 0$. Используя (4.9), выражение (4.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) = e^{ikx} k \operatorname{th} k H + \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{\alpha \operatorname{th} \alpha H}{K_+(\alpha) K_2(\alpha)} \left(a + b\alpha + \frac{1}{\alpha - k} \right) d\alpha$$

Интеграл вычисляем методом вычетов. Замыкаем контур интегрирования в верхней полуплоскости и получаем полюса в точках k , α_0^+ , α_j^+ , $j = 1, 2, \dots$. Вычет в точке k компенсируется набегающей волной.

Получаем выражение

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) = BK_+(k) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j^+ x} \alpha_j^+ \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+)} \left(a + b\alpha_j^+ + \frac{1}{\alpha_j^+ - k} \right)$$

Подставляя данное выражение в краевые условия (4.4), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Коэффициенты матрицы вычисляются по формулам

$$A_{11} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^3 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+)}, \quad A_{12} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^4 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+)}$$

$$A_{21} = A_{12}, \quad A_{22} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^5 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+)}$$

$$C_1 = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^3 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+) (\alpha_j^+ - k)}, \quad C_2 = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^4 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+) (\alpha_j^+ - k)}$$

Систему (4.14) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -kG_3 + G_4 & -kG_4 + G_5 \\ -kG_4 + G_5 & -kG_5 + G_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_3 \\ -G_4 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$G_m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^m \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+) (\alpha_j^+ - k)}$$

Покажем, что суммы G_5 и G_6 равны нулю. Тогда полученную систему можно точно обратить. Используя подстановку $(\alpha_j^+)^5 \operatorname{th} \alpha_j^+ H = -K_1(\alpha_j^+)$ и заменяя ряд интегралом, получаем при $m \geq 5$

$$G_m = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^{m-5} K_1(\alpha_j^+)}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+) (\alpha_j^+ - k)} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{m-5} K_1(\alpha) d\alpha}{K_+(\alpha) K_2(\alpha) (\alpha - k)} +$$

$$+ k^{m-5} K_-(k) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{m-5} K_-(\alpha) d\alpha}{\alpha - k} + k^{m-5} K_-(k) = 0$$

т.к. $K_-(k) = 0$. Из второго уравнения системы (4.15) находим $a = 1/k$, а из первого уравнения определяем $b = 1/k^2$.

Подставляя значения коэффициентов a и b в (4.12), получим

$$\phi_1(x, y) = \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{\alpha^2 K_-(\alpha) \operatorname{ch}\alpha(y+H)}{k^2(\alpha-k) K_1(\alpha) \operatorname{ch}\alpha H} d\alpha =$$

$$= \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{\alpha^2 \operatorname{ch}\alpha(y+H) d\alpha}{k^2(\alpha-k) K_+(\alpha) K_2(\alpha) \operatorname{ch}\alpha H}$$

Теперь можно найти отраженную волну и прошедшую. При $|x| \rightarrow \infty$ потенциал имеет вид $\phi_1(x, 0) = \operatorname{Re}^{ik_0^+ x}$, $x \rightarrow -\infty$, $\phi(x, 0) = \operatorname{Te}^{i\alpha_0^+ x}$, $x \rightarrow \infty$. Для R и T получим следующие выражения:

$$R = (k_0^-)^2 k^3 \operatorname{th} k H \frac{K_+(k) K_-(k_0^-)}{(k_0^- - k) K_1'(k_0^-)}, \quad T = \frac{(\alpha_0^+)^2 k^3 \operatorname{th} k H K_+(k)}{(k - \alpha_0^+) K_+(\alpha_0^+) K_2'(\alpha_0^+)}$$

Найдем амплитуды потенциала скорости отраженных и проходящих волн $|R|$ и $|T|$. Интеграл в формуле (4.10) можно снести на действительную ось [44]. В результате получим

$$|g_+(k)| = \sqrt{g(k)} = \sqrt{\frac{K_1'(k)(k - \alpha_0^+)(k - \alpha_0^-)(k^4 + 1)}{K_2(k)(k - k_0^-)}}$$

$$|g_+(k_0^-)| = \sqrt{g(k_0^-)} = \sqrt{\frac{K_1'(k_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^-)(k_0^- - \alpha_0^-)((k_0^-)^4 + 1)}{K_2(k_0^-)(k - k_0^-)}}$$

Подставляем эти выражения в формулы (4.11) и находим

$$|K_+(k)| = \sqrt{\frac{K_1'(k)(k - k_0^-)(k - \alpha_0^+)}{(k - \alpha_0^-) K_2(k)}}, \quad |K_-(k_0^-)| = \sqrt{\frac{K_1'(k_0^-)(k - k_0^-)(k_0^- - \alpha_0^-)}{(\alpha_0^+ - k_0^-) K_2(k_0^-)}}$$

$$|R| = \sqrt{\frac{K_1'(k)(k - \alpha_0^+)(k_0^- - \alpha_0^-) k \operatorname{th} k H}{K_1'(k_0^-)(k - \alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^-) k_0^- \operatorname{th} k_0^- H}}$$

$$|K_+(\alpha_0^+)| = \sqrt{\frac{K_1(\alpha_0^+)(\alpha_0^+ - k_0^-)}{K_2'(\alpha_0^+)(\alpha_0^+ - \alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k)}}$$

$$|T| = \sqrt{\frac{K_1'(k)(k - k_0^-)(\alpha_0^+ - \alpha_0^-) k \operatorname{th} k H}{K_2'(\alpha_0^+)(k - \alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^-) \alpha_0^+ \operatorname{th} \alpha_0^+ H}}$$

При $S = 0$ формулы для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн совпадают с теми формулами, которые получены ранее [8, 12, 13] в отсутствие течения ($k_0^- = -k$, $\alpha_0^- = -\alpha_0^+$).

Коэффициенты отражения R^* и прохождения T^* определяются как отношения амплитуд возвышения верхней границы жидкости к соответствующей амплитуде в набегающей волне

$$R^* = \frac{|R| k_0^- \operatorname{th} k_0^- H}{k_0^+ \operatorname{th} k_0^+ H}, \quad T^* = \frac{|T| \alpha_0^+ \operatorname{th} \alpha_0^+ H}{k_0^+ \operatorname{th} k_0^+ H}$$

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ СООТНОШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В [8] получено точное энергетическое соотношение между амплитудами $|R|$ и $|T|$ в отсутствие течения. Аналогичным образом можно получить энергетическое соотношение при наличии течения с линейным сдвигом. Используем формулу Грина для аналитических функций

$$\int_{-H-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} (\phi \Delta \bar{\phi} - \bar{\phi} \Delta \phi) dx dy = \int_C (\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} - \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial n}) ds = 0$$

где n – внешняя нормаль, контур C ограничивает объем жидкости. Из последнего соотношения следует,

$$\operatorname{Im} \int_C \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} ds = 0 \quad (5.1)$$

поскольку вычитаются комплексно-сопряженные величины. Интеграл по дну обращается в нуль, поэтому (5.1) можно записать в виде

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} dx + \operatorname{Im} \int_{-H}^0 (\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}) \Big|_{x \rightarrow \infty} dy - \operatorname{Im} \int_{-H}^0 (\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}) \Big|_{x \rightarrow -\infty} dy = 0 \quad (5.2)$$

Первый интеграл в (5.2) перепишем следующим образом

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx = \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx + \operatorname{Im} \frac{iS}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx \quad (5.3)$$

поскольку

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx = 0$$

Применяем интегрирование по частям к первому интегралу в правой части (5.3)

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx = \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \Big|_{\infty} - \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \Big|_{\infty}$$

Остальные члены обращаются в нуль из-за граничного условия на кромке или являются действительными.

При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\phi \rightarrow Te^{i\alpha_0^+ x} \frac{\operatorname{ch} \alpha_0^+(y+H)}{\operatorname{ch} \alpha_0^+ H}, \quad \psi \rightarrow iTe^{i\alpha_0^+ x} \frac{\operatorname{sh} \alpha_0^+(y+H)}{\operatorname{ch} \alpha_0^+ H}$$

при $x \rightarrow -\infty$

$$\phi \rightarrow Ie^{ik_0^+ x} \frac{\operatorname{ch} k_0^+(y+H)}{\operatorname{ch} k_0^+ H} + Re^{ik_0^- x} \frac{\operatorname{ch} k_0^-(y+H)}{\operatorname{ch} k_0^- H}$$

$$\psi \rightarrow iI e^{ik_0^+ x} \frac{\text{sh}k_0^+(y+H)}{\text{ch}k_0^+ H} + iR e^{ik_0^- x} \frac{\text{sh}k_0^-(y+H)}{\text{ch}k_0^- H}$$

Поэтому

$$\text{Im} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx = -2\text{Im}i \frac{|T|^2}{\lambda^2} (\alpha_0^+)^5 \text{th}^2 \alpha_0^+ H$$

Второй интеграл в (5.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \text{Im} \frac{iS}{\lambda} \int_{-\infty}^\infty \psi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx &= \text{Im} \frac{iS}{\lambda} \int_{-\infty}^\infty \psi \left(-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}\right) dx = -\text{Im} \frac{iS}{2\lambda} |\psi|^2|_{-\infty}^\infty = \frac{S}{2\lambda} [-|T|^2 \text{th}^2 \alpha_0^+ H + \\ &+ |I|^2 \text{th}^2 k_0^+ H + |R|^2 \text{th}^2 k_0^- H + (R\bar{I} e^{i(k_0^- - k_0^+)x} + \bar{R}I e^{i(k_0^+ - k_0^-)x}) \text{th}k_0^+ H \text{th}k_0^- H] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Далее вычисляем интеграл по y при $x \rightarrow \infty$

$$\text{Im} \int_{-H}^0 \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}\right) \Big|_{x \rightarrow \infty} dy = -\text{Im} \frac{i|T|^2}{2} \left(\text{th}\alpha_0^+ H + \frac{\alpha_0^+ H}{\text{ch}^2 \alpha_0^+ H}\right)$$

Интеграл по y при $x \rightarrow -\infty$ принимает вид

$$\begin{aligned} \text{Im} \int_{-H}^0 \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}\right) \Big|_{x \rightarrow -\infty} dy &= \text{Im} \frac{i|I|^2}{2} \left(\text{th}k_0^+ H + \frac{k_0^+ H}{\text{ch}^2 k_0^+ H}\right) + \text{Im} \frac{i|R|^2}{2} \left(\text{th}k_0^- H + \frac{k_0^- H}{\text{ch}^2 k_0^- H}\right) + \\ &+ \text{Im}i \frac{\bar{R}\bar{I}k_0^- e^{i(k_0^+ - k_0^-)x} + \bar{I}Rk_0^+ e^{i(k_0^- - k_0^+)x}}{2\text{ch}k_0^- H \text{ch}k_0^+ H} \left[\frac{\text{sh}(k_0^- + k_0^+)H}{k_0^- + k_0^+} + \frac{\text{sh}(k_0^+ - k_0^-)H}{k_0^+ - k_0^-}\right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Выпишем все члены при $x \rightarrow \infty$

$$-\frac{|T|^2}{2} \left(\frac{4(\alpha_0^+)^5 \text{th}\alpha_0^+ H + \lambda S \text{th}\alpha_0^+ H}{((\alpha_0^+)^4 + 1)\alpha_0^+ - \lambda S} + \text{th}\alpha_0^+ H + \frac{\alpha_0^+ H}{\text{ch}^2 \alpha_0^+ H}\right) = -\frac{|T|^2}{2\lambda^2} K_2'(\alpha_0^+) \alpha_0^+ \text{th}\alpha_0^+ H$$

Преобразуем третий член в (5.5). Обозначим $k_0^* = (k_0^- + k_0^+) / 2$, $\Delta_k = (k_0^+ - k_0^-) / 2$. Тогда $k_0^- = k_0^* - \Delta_k$, $k_0^+ = k_0^* + \Delta_k$,

$$\begin{aligned} &\text{Im}i(\bar{I}\bar{R}(k_0^* - \Delta_k) e^{i(k_0^+ - k_0^-)x} + \bar{I}R(k_0^* + \Delta_k) e^{i(k_0^- - k_0^+)x}) = \\ &= \text{Im}i k_0^* (\bar{I}\bar{R} e^{i(k_0^+ - k_0^-)x} + \bar{I}R e^{i(k_0^- - k_0^+)x}) + \text{Im}i \Delta_k (\bar{I}\bar{R} e^{i(k_0^- - k_0^+)x} - \bar{I}R e^{i(k_0^+ - k_0^-)x}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Второй член в правой части (5.6) обращается в нуль, поскольку это вещественное выражение. Сложим перекрестные члены в выражениях (5.4), (5.5) с учетом (5.6). Используя подстановки

$$k_0^+ - \lambda S = \lambda^2 \text{cth}k_0^+ H, \quad k_0^- - \lambda S = \lambda^2 \text{cth}k_0^- H, \quad k_0^+ - k_0^- = \lambda^2 (\text{cth}k_0^+ H - \text{cth}k_0^- H)$$

можно показать, что перекрестные члены обращаются в нуль

$$(k_0^+ + k_0^-) \frac{\bar{I}\bar{R} e^{i(k_0^+ - k_0^-)x} + \bar{I}R e^{i(k_0^- - k_0^+)x}}{4\text{ch}k_0^- H \text{ch}k_0^+ H} \left(\frac{\text{sh}(k_0^+ + k_0^-)H}{k_0^+ + k_0^-} + \frac{\text{sh}(k_0^+ - k_0^-)H}{k_0^+ - k_0^-}\right) +$$

$$+\frac{S}{2\lambda}(R\bar{I}e^{i(k_0^- - k_0^+)x} + \bar{R}Ie^{i(k_0^+ - k_0^-)x})\text{th}k_0^+ H \text{th}k_0^- H = 0$$

Сложим все члены при $x \rightarrow -\infty$. Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{|I|^2}{2}(\text{th}k_0^+ H + \frac{k_0^+ H}{\text{ch}^2 k_0^+ H}) + \frac{|R|^2}{2}(\text{th}k_0^- H + \frac{k_0^- H}{\text{ch}^2 k_0^- H}) + \\ & + \frac{S}{2\lambda}(|I|^2 \text{th}^2 k_0^+ H + |R|^2 \text{th}^2 k_0^- H) = \frac{|I|^2 K_1'(k_0^+)k_0^+ \text{th}k_0^+ H}{2\lambda^2} + \frac{|R|^2 K_1'(k_0^-)k_0^- \text{th}k_0^- H}{2\lambda^2} \end{aligned}$$

Окончательно находим энергетическое соотношение между амплитудами потенциала ϕ на бесконечности

$$|I|^2 K_1'(k_0^+)k_0^+ \text{th}k_0^+ H + |R|^2 K_1'(k_0^-)k_0^- \text{th}k_0^- H - |T|^2 K_2'(\alpha_0^+)\alpha_0^+ \text{th}\alpha_0^+ H = 0$$

Легко убедиться, что полученные выражения для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн точно удовлетворяют этому соотношению.

6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Аналогичным образом, как в разделах 4, 5, можно получить решение задачи о дифракции изгибно-гравитационных волн. Представим потенциал ϕ в виде

$$\phi(x, y, t) = (\phi_0(x, y) + \phi_1(x, y))e^{-i\lambda t}, \quad \phi_0(x, y) = e^{i\alpha_0^- x} \text{ch}\alpha_0^- (y + H) / \text{ch}\alpha_0^- H$$

где ϕ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа и краевым условиям:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + i\lambda S \psi_1 - \lambda^2 \phi_1 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi_0}{\partial y}, \quad (-\infty < x < 0, y = 0). \quad (6.1)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + i\lambda S \psi_1 - \lambda^2 \phi_1 = 0, \quad (0 < x < \infty, y = 0) \quad (6.2)$$

а также (4.1), (4.4).

Из краевых условий (6.1), (6.2) для функций D_{\pm} , F_{\pm} получаем соотношения

$$F_-(\alpha) = 0, \quad F_+(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha), \quad D_+(\alpha) = -\frac{(\alpha_0^-)^5 \text{th}\alpha_0^- H}{i(\alpha - \alpha_0^-)}$$

$$D_-(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - \alpha_0^-)} = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad B = -(\alpha_0^-)^5 \text{th}\alpha_0^- H$$

Исключая $C(\alpha)$, выписываем уравнение

$$K(\alpha)(D_-(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - \alpha_0^-)}) = F_+(\alpha), \quad K(\alpha) = \frac{K_2(\alpha)}{K_1(\alpha)} = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$$

Преобразуем это уравнение после факторизации функции $K(\alpha)$

$$K_-(\alpha)D_-(\alpha) + \frac{B[K_-(\alpha) - K_-(\alpha_0^-)]}{i(\alpha - \alpha_0^-)} = \frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{BK_-(\alpha_0^-)}{i(\alpha - \alpha_0^-)} \quad (6.3)$$

Левая часть уравнения (6.3) аналитична в нижней полуплоскости, а правая часть – в верхней полуплоскости. Следовательно

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{BK_-(\alpha_0^-)}{i(\alpha - \alpha_0^-)} = \frac{BK_-(\alpha_0^-)}{i}(a + b\alpha)$$

$$\phi_1(x, y) = \frac{BK_-(\alpha_0^-)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{K_+(\alpha) \operatorname{ch}\alpha(y+H)}{K_2(\alpha) \operatorname{ch}\alpha H} \left(a + b\alpha + \frac{1}{\alpha - \alpha_0^-}\right) d\alpha \quad (6.4)$$

Подставляем выражение для потенциала ϕ в граничные условия (4.4) и находим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a и b . Решаем систему аналогично тому, как в разделе 4, и получаем

$$a = 1 / \alpha_0^-, \quad b = 1 / (\alpha_0^-)^2$$

На бесконечности потенциал скорости возмущенного течения жидкости имеет вид: при $x \rightarrow \infty$

$$\phi \rightarrow I e^{i\alpha_0^- x} \frac{\operatorname{ch}\alpha_0^-(y+H)}{\operatorname{ch}\alpha_0^- H} + R e^{i\alpha_0^+ x} \frac{\operatorname{ch}\alpha_0^+(y+H)}{\operatorname{ch}\alpha_0^+ H}$$

$$\psi \rightarrow i(I e^{i\alpha_0^- x} \frac{\operatorname{sh}\alpha_0^-(y+H)}{\operatorname{ch}\alpha_0^- H} + R e^{i\alpha_0^+ x} \frac{\operatorname{sh}\alpha_0^+(y+H)}{\operatorname{ch}\alpha_0^+ H})$$

при $x \rightarrow -\infty$

$$\phi \rightarrow T e^{ik_0^- x} \frac{\operatorname{ch}k_0^-(y+H)}{\operatorname{ch}k_0^- H}, \quad \psi \rightarrow iT e^{ik_0^- x} \frac{\operatorname{sh}k_0^-(y+H)}{\operatorname{ch}k_0^- H}$$

Для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн находим выражения

$$|R| = \sqrt{\frac{K_2'(\alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^+)(\alpha_0^- - k_0^-)\alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H}{K_2'(\alpha_0^+)(\alpha_0^+ - k_0^-)(k_0^+ - \alpha_0^-)\alpha_0^+ \operatorname{th}\alpha_0^+ H}}$$

$$|T| = \sqrt{\frac{K_2'(\alpha_0^-)(\alpha_0^+ - \alpha_0^-)(k_0^+ - k_0^-)\alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H}{K_1'(k_0^-)(k_0^+ - \alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^-)k_0^- \operatorname{th}k_0^- H}}$$

Энергетическое соотношение для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн получается в виде

$$|I|^2 K_2'(\alpha_0^-)\alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H + |R|^2 K_2'(\alpha_0^+)\alpha_0^+ \operatorname{th}\alpha_0^+ H - |T|^2 K_1'(k_0^-)k_0^- \operatorname{th}k_0^- H = 0$$

Легко убедиться, что полученные выражения для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн точно удовлетворяют этому соотношению. Коэффициенты отражения R^* и прохождения T^* определяются в этом случае формулами

$$R^* = \frac{|R| \alpha_0^+ \operatorname{th}\alpha_0^+ H}{|I| \alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H}, \quad T^* = \frac{|T| k_0^- \operatorname{th}k_0^- H}{|I| \alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H}$$

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проводились для морского льда при следующих входных параметрах задачи: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922.5$ кг/м³, $\nu = 0.3$, толщина льда $h = 1$ м, глубина жидкости $H = 100$ м.

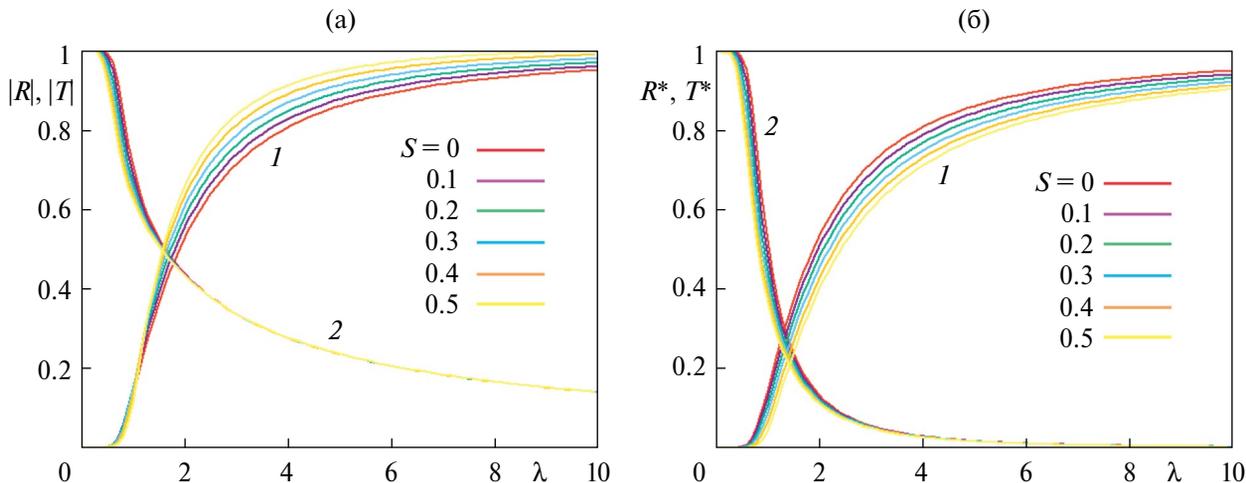


Рис. 4. Амплитуды потенциала скорости на бесконечности $|R|$ и $|T|$ (а, кривые 1, 2) и коэффициенты отражения и прохождения (б, кривые 1, 2) в случае набегающих поверхностных волн для различных значений параметра сдвига S .

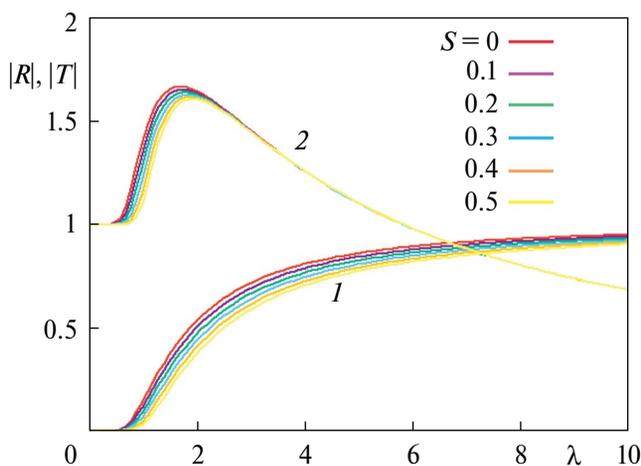


Рис. 5. Амплитуды потенциала скорости на бесконечности $|R|$ и $|T|$ (кривые 1, 2) в случае набегающих изгибно-гравитационных волн для различных значений параметра сдвига S .

На рис. 4 изображены зависимости от безразмерной частоты λ амплитуд потенциала скорости на бесконечности $|R|$, $|T|$ (кривые 1 и 2), а также коэффициентов отражения и прохождения R^* , T^* (кривые 1 и 2) в случае набегающих поверхностных волн с моря для различных значений параметра сдвига S . Интересно, что при $S = 0$ амплитуда потенциала $|R|$ является наименьшей, а коэффициент отражения наибольший. С увеличением параметра S амплитуда потенциала отраженных волн $|R|$ растет, а амплитуда возвышения жидкости на бесконечности уменьшается, т.к. $|k_0^-| < |k_0^+|$ и отношение $|k_0^-| / |k_0^+|$ уменьшается с увеличением параметра S . Для проходящих волн амплитуда потенциала и амплитуда прогиба пластины на бесконечности максимальны при $S = 0$ и уменьшаются с увеличением параметра S .

На рис. 5 представлены зависимости от безразмерной частоты λ амплитуд потенциала скорости на бесконечности $|R|$ и $|T|$ (кривые 1 и 2) в случае набегающих изгибно-гравитационных волн. График коэффициента отражения в этом случае ведет себя аналогично графику для амплитуды потенциала, а коэффициент прохождения резко возрастает с увеличением частоты, т.к. при больших частотах амплитуды возвышения жидкости во много раз больше амплитуд колебаний пластины. Из рисунка видно, что

амплитуды потенциала на бесконечности $|R|$ и $|T|$ максимальны при $S = 0$ и уменьшаются с увеличением параметра S .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено аналитическое решение задачи дифракции поверхностных и изгибно-гравитационных волн на кромке полубесконечного ледяного покрова при наличии течения с линейным сдвигом скорости по глубине. Получены точные простые формулы для коэффициентов отражения и прохождения. Очень длинные волны проходят в другую среду, почти не отражаясь. С уменьшением длины волн коэффициент отражения увеличивается. С увеличением градиента сдвига коэффициенты отражения и прохождения уменьшаются. Полученное точное решение применимо для тестирования численных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squire V.A., Dugan J.P., Wadhams P., Rottier P.J., Liu A.K.* Of ocean waves and sea ice // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1995. V. 27. P. 115–168.
2. *Марченко А.В.* Изгибно-гравитационные волны // *Тр. Ин-та общ. физики РАН.* 1999. Т. 56: Динамика волн на поверхности жидкости. С. 65–111
3. *Kashiwagi M.* Research on hydroelastic responsees of VLFS: recent progress and future work // *Intern. J. Offshore and Polar Engineering.* 2000. V. 10. № 2. P. 81–90.
4. *Watanabe E., Utsunomia T., Wang C.M.* Hydroelastic analysis of ponton-type VLFS: a literature survey // *Engineering Structures.* 2004. V. 26. № 2. P. 245–256.
5. *Squire V.A.* Of ocean waves and sea-ice revisited // *Cold Regions Science and Technology.* 2007. V. 49. № 2. P. 110–133.
6. *Ni B.Y., Han D.F., Di S.C., Xue Y.Z.* On the development of ice-water-structure interaction // *J. Hydrodynamics.* 2020. V. 32. № 4. P. 629–652.
doi.org/10.1007/s42241-020-0047-8
7. *Коузов Д.П.* Дифракция плоской гидроакустической волны но трещине в упругой пластине // *ПММ.* 1963. Т. 27. В. 6. С. 1037–1043.
8. *Evans D.V., Davies T.V.* Wave-ice interaction: Report / Davidson lab.; Stevens Inst. of Technol. № 1313. New Jersey, 1968.
9. *Гольдштейн Р.В., Марченко А.В.* Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // *ПММ.* 1989. Т. 53. № 6. С. 924–930.
10. *Марченко А.В., Прохоров И.В.* О линейных волнах в потоке жидкости с постоянной завихренностью, находящейся под ледяным покровом // *ПММ.* 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 242–249.
11. *Марченко А.В.* Дифракция изгибно-гравитационных волн на линейных неоднородностях в ледяном покрове // *Изв. РАН. МЖГ.* 1997. № 4. С. 97–112.
12. *Balmforth N.J., Craster R.V.* Ocean waves and ice sheets // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 395. P. 89–124.
13. *Ткачева Л.А.* Рассеяние поверхностных волн краем плавающей упругой пластины // *ПМТФ.* 2001. Т. 42. № 4. С. 88–97.
14. *Ткачева Л.А.* Дифракция поверхностных волн на плавающей упругой пластине при косом набегании // *ПММ.* 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 475–487.
15. *Ткачева Л.А.* Плоская задача о дифракции поверхностных волн на упругой плавающей пластине // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 3. С. 131–149.
16. *Chung H., Fox C.* Calculation of wave-ice interaction using the Wiener – Hopf technique // *NZ J. Math.* 2002. V. 31. P. 1–18.
17. *Zhao C., Hu C., Wei Y., Zhang J., Huang W.* Diffraction of surface waves by floating elastic plates // *J. Fluids Struct.* 2008. V. 24. P. 231–249.
18. *Williams T., Squire V.A.* Scattering of flexural–gravity waves at the boundaries between three floating sheets with applications // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 569. P. 113–140.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006002552>
19. *Williams T., Squire V.A.* Wave scattering at the sea-ice/ice-shelf transition with other applications // *SIAM J. Appl. Math.* 2007. V. 67. № 4. P. 938–959.

20. *Linton C.M., Chung H.* Reflection and transmission at the ocean/sea-ice boundary // *Wave Motion*. 2003. V. 38. P. 43–52.
21. *Chung H., Linton C.M.* Reflection and transmission of waves across a gap between two semi-infinite plates on water // *Q.J. Mech. Appl. Math.* 2005. V. 58. № 1. P. 1–15.
22. *Chakrabarti A.* On the Solution of the Problem of Scattering of Surface-Water Waves by the Edge of an Ice Cover // *Proc. Roy. Soc. London. A.* 2000. V. 456. № 1997. P. 1087–1099.
23. *Evans D.V., Porter R.* Wave scattering by narrow cracks in ice sheets floating on water of finite depth // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 484. P. 143–165.
24. *Fox C., Squire V.A.* Reflection and transmission characteristics at the edge of short fast sea ice // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95. № C7. P. 11.629–11.639.
25. *Fox C., Squire V.A.* On the oblique reflection and transmission of ocean waves at short fast sea ice // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1994. V. 347. № 1682. P. 185–218.
26. *Букатов А.Е., Завьялов Д.Д.* Набегание поверхностных волн на кромку сжатого льда // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 3. С. 121–126.
27. *Wu C., Watanabe E., Utsunomia T.* An eigenfunction expansion-matching method for analyzing wave-induced responses of an elastic floating plate // *Appl. Ocean Res.* 1995. V. 17. № 5. P. 301–310.
28. *Barrett M., Squire V.A.* Ice-coupled wave propagation across an abrupt change in ice rigidity, density or thickness // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101. P. 20825–20832.
29. *Стурова И.В.* Косое набегание поверхностных волн на упругую полосу // *ПМТФ.* 1999. Т. 40. № 4. С. 62–68.
30. *Sahoo T., Yip T.L., Chwang A.T.* Scattering of surface waves by a semi-infinite floating elastic plate // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. № 11. P. 3215–3222.
doi: 10.1063/1.1408294
31. *Коробкин А.А.* Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидроупругом поведении плавающей пластины на волнах // *ПМТФ.* 2000. Т. 41. № 2. С. 90–96.
32. *Хабашнашева Т.И.* Плоская задача об упругой плавающей пластине // *Динамика сплошной среды.* 2000. Вып. 116. С. 166–169.
33. *Meylan M.H.* A variational equation for the wave forcing of floating thin plates // *Appl. Ocean Res.* 2001. V. 23. № 4. P. 195–206.
34. *Meylan M., Squire V.A.* The response of ice floes to ocean waves // *J. Geophys. Res. Atmospheres.* 1994. V. 99. № C1. P. 891–900.
DOI:10.1029/93JC02695
35. *Andrianov A.I., Hermans A.J.* The influence of water depth on the hydroelastic response of a very large floating platform // *Marine Structures.* 2003. V. 16. № 5. P. 355–371.
36. *Mohapatra S.C., Ghoshal R., Sahoo T.* Effect of compression on wave diffraction by a floating elastic plate // *J. Fluids Struct.* 2013. V. 36. P. 124–135.
37. *Hermans A.J.* A boundary element method for the interaction of free surface waves with a very large floating flexible platform // *J. Fluids Struct.* 2000. V. 14. № 7. P. 943–956.
38. *Лавренов И.В., Новаков А.В.* Численное моделирование взаимодействия гравитационных волн с упругими льдинами // *Изв РАН. МЖГ.* 2000. № 3. С. 123–131.
39. *Wang C.D., Meylan M.H.* A higher-order-coupled boundary element and finite element method for the wave forcing of a floating elastic plate // *J. Fluids Struct.* 2004. V. 19. № 4. P. 557–572.
40. *Wang C.D., Meylan M.H.* The linear wave response of a floating thin plate on water of variable depth // *Appl. Ocean Res.* 2002. V. 24. P. 163–174.
41. *Kagemoto H., Masataka F., Motohiko M.* Theoretical and experimental predictions of the hydroelastic response of a very large floating structure in waves // *Appl. Ocean Res.* 1998. V. 20. № 3. P. 135–144.
42. *Meylan M.H., Bennetts L.G., Cavaliere C., Alberello A., Toffoli A.* Experimental and theoretical models of wave-induced flexure of a sea ice floe // *Phys. Fluids.* 2015. V. 27. P. 041704.
43. *Nelli F., Bennetts L.G., Skene D.M., Monty J.P., Lee J.F., Meylan M.H., Toffoli A.* Reflection and transmission of regular water waves by a thin, floating plate // *Wave Motion.* 2017. V. 70. P. 209–221.
doi: 10.1016/j.wavemoti.2016.09.003
44. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
45. *Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

Wave Diffraction on an Ice Sheet in the Presence of Shear Current

L. A. Tkacheva*

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

**e-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru*

The diffraction of plane surface and flexural-gravity waves during their normal incidence at the edge of a floating elastic semi-infinite plate in fluid of finite depth in the presence of a current with velocity shear is studied. The explicit analytical solution to this problem is constructed using the Wiener–Hopf technique. Simple exact formulas for the reflection and transmission coefficients and the energy relations are obtained. The results of numerical calculations using the obtained formulas are presented.

Keywords: thin elastic floating plate, surface waves, flexural-gravity waves, diffraction, shear current.