

УДК 532.546

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА ЛЕГКОЙ ЖИДКОСТИ В НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© 2024 г. А. А. Афанасьев*, Е. А. Веденеева**, И. Е. Михеев

МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*e-mail: afanasyev@imec.msu.ru

**e-mail: el_vedeneeva@imec.msu.ru

Поступила в редакцию: 16.04.2024 г.

После доработки: 10.06.2024 г.

Принята к публикации: 11.06.2024 г.

Исследуется течение легкой жидкости в пористой среде, насыщенной другой тяжелой жидкостью. Рассмотрена одномерная постановка задачи, описывающей двухфазное течение в вертикальной изолированной пористой колонне. Предполагая, что объем легкой жидкости конечен, оценено ее максимальное перемещение вверх под действием силы Архимеда. Предложен простой метод приближенной оценки этого перемещения. Показано, что в широком диапазоне параметров жидкостей и пористой среды оно определяется всего одним критерием подобия, а влияние других параметров мало. Рассчитана зависимость максимального перемещения от выделенного критерия подобия. Результаты исследования могут быть полезны при оценке максимального расстояния, на которое закачиваемый газ распространяется от скважины по водонасыщенному пласту.

Ключевые слова: фильтрация, критическая насыщенность, фазовая проницаемость, гистерезис, закачка газа.

DOI: 10.31857/S1024708424050048 **EDN:** NQXRGA

Климатические изменения стимулируют исследование процессов, сопровождающих размещение углекислого газа (CO_2) в проницаемых геологических пластах [1]. Закачка в недра парниковых газов, в частности CO_2 , снижает воздействие человека на окружающую среду и, в перспективе, способствует замедлению эффекта глобального потепления. Водонасыщенные пласты являются перспективными объектами для геологического хранения CO_2 , так как они повсеместно распространены в осадочных бассейнах. Выбор наиболее перспективного объекта сопряжен с оценкой различных показателей хранения, например, емкости — объема газа, который может быть размещен в пласте, или приемистости — максимального темпа нагнетания газа. Также важна оценка безопасности размещения CO_2 , т.е. целостности и герметичности объекта хранения [2, 3].

При закачке CO_2 в пласт важно учитывать эффект плавучести газа, представляющего собой более легкую фазу. Под действием силы Архимеда CO_2 стремится перетечь в зоны меньших глубин. Газ всплывает в водонасыщенной пористой среде. Если пласт имеет структурный наклон, то сила Архимеда приводит к течению газа вдоль пласта в направлении уменьшения глубины. В результате CO_2 может переместиться на значительное расстояние от скважины. Это напрямую влияет на безопасность хранения, так как в направлении течения могут быть геологические разломы и заброшенные скважины, представляющие собой возможные пути утечки CO_2 . В этой связи актуальна оценка максимального расстояния, на которое CO_2 переместится от скважины [4–6].

В работе [6] проведено обширное параметрическое исследование максимального перемещения CO_2 в наклонном пласте. Методом Монте-Карло рассчитывались различные сценарии закачки CO_2 с учетом многих осложняющих факторов, как, например, гистерезис относительной фазовой проницаемости [7]. Показано, что максимальное перемещение CO_2 от скважины определяется критерием подобия, характеризующим силу Архимеда, и разностью критических насыщенных газа в процессах пропитки и дренажа. Эта разность фактически характеризует эффект гистерезиса.

Настоящая работа направлена на подробное исследование влияния гистерезиса на максимальное перемещение CO_2 . Цель работы — определить критерии подобия, имеющие наибольшее влияние, и разработать методы оценки максимального расстояния, на которое газ распространится от скважины. Для того чтобы упростить исследование и сконцентрироваться на влиянии гистерезиса, рассмотрена упрощенная одномерная постановка задачи с осью x , направленной вдоль наклонного пласта (рис. 1). Предполагается, что газ и вода являются несмешивающимися несжимаемыми жидкостями, далее обозначаемыми символами g и l . Закачка CO_2 приводит к образованию локализованной зоны, насыщенной газом. При этом объем размещенного в пласте газа конечен. Считая, что такое состояние существует при $t = 0$, исследуется течение CO_2 вдоль пласта (т.е. в направлении оси x) и оценивается его максимальное перемещение $x_{\max}$.

Сделанное предположение о несжимаемости жидкостей не является ограничительным для приложений, связанных с геологическим хранением CO_2 . Во-первых, коэффициент сжимаемости воды мал, а, во-вторых, в пластовых условиях (при давлении более 100 бар) CO_2 — сверхкритическая жидкость, имеющая плотность 500–800 кг/м³ [1]. Коэффициент сжимаемости этой жидкости значительно меньше, чем у совершенного газа. Предполагается, что газ остается в пласте на глубинах более 1000 м, где он находится в сверхкритическом состоянии, поэтому сделанное предположение будем считать не слишком грубым.

Предположение о несмешивающейся фильтрации конечно же можно назвать сильным, учитывая, что 10–20% закачанного CO_2 растворяется в воде [3]. Однако подробное исследование влияния растворения на максимальное перемещение, проведенное нами ранее в [5, 6], не является целью настоящей теоретической работы. Еще одним упрощающим допущением рассматриваемой модельной постановки задачи является предположение о равенстве фазовых давлений в жидкости и газе. Фактически рассматривается фильтрация в пределе бесконечно больших чисел Бонда. Оценка влияния капиллярного давления может являться предметом отдельных исследований. Предварительные результаты показывают, что при уменьшении числа Бонда максимальное перемещение газа уменьшается.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим фильтрацию в бесконечной вертикальной колонне, наполненной пористой средой. Предполагаем, что пористость и проницаемость имеют однородное распределение и не изменяются со временем. Введем координатную ось x , направленную вдоль колонны вверх против направления действия силы тяжести (рис. 1). В начальный момент времени, $t = 0$, пористая среда при $0 \leq x \leq L$ насыщена легкой жидкостью g (газом). При $x < 0$ и $x > L$ среда насыщена тяжелой жидкостью l (водой). Полагаем, что на значительном удалении от зоны $0 \leq x \leq L$, т.е. при $|x|/L \gg 1$, жидкость l покоится. Это может

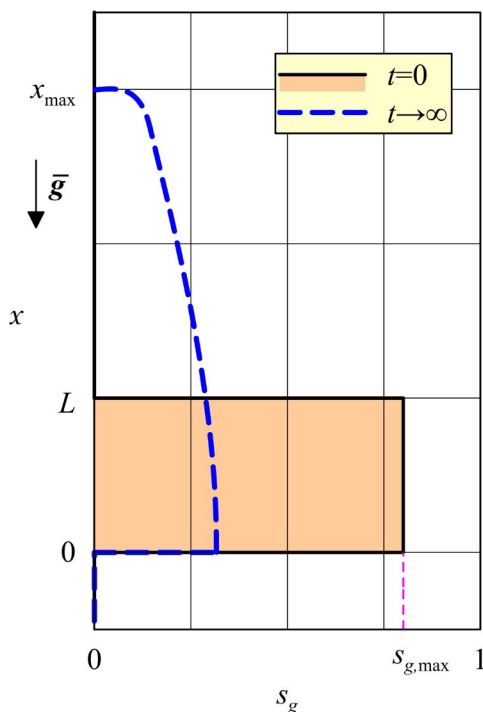


Рис. 1. Схема распределения насыщенности легкой жидкости g при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$. Сила тяжести действует в противоположном оси x направлению.

достигаться установкой при $|x / L| \gg 1$ непроницаемых стенок, препятствующих течению жидкости вдоль оси x .

Предполагается, что обе жидкости l и g — несжимаемые несмешивающиеся среды, характеризующиеся постоянными значениями плотности ρ_l и ρ_g , причем $\rho_l > \rho_g$. Также жидкости характеризуются постоянными динамическими вязкостями μ_l и μ_g .

Так как $\rho_l > \rho_g$, то на жидкость g действует сила Архимеда. Следовательно, при $t > 0$ она начнет перемещаться вверх. Это движение будет сопровождаться капиллярным захватом жидкости g в виде неподвижных пузырьков при их относительно малом критическом объемном содержании в поровом пространстве. Таким образом, подвижный объем фазы g будет уменьшаться со временем. В результате при $t \rightarrow \infty$ вся жидкость g будет обездвижена, так как ее насыщенность при любом x будет меньше или равна критическому значению. При этом g достигнет некоторой максимальной координаты x , которую дальше обозначим $x_{\max}$. Цель настоящей работы заключается в получении простых оценок для $x_{\max}$ при различных параметрах жидкостей и пористой среды.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задачу рассматриваем в одномерном приближении, предполагая, что при каждом x параметры течения имеют одинаковые значения в поперечном сечении колонны. Также предположим, что давления в обеих жидкостях одинаковые. Тогда уравнения, описывающие двухфазную фильтрацию жидкостей, принимают вид [8-10]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_i s_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = 0, \quad i = g, l \quad (1)$$

$$u_i = -k \frac{k_{ri}}{\mu_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_i g \right) \quad (2)$$

$$s_g + s_l = 1 \quad (3)$$

где ϕ — пористость, ρ — плотность, s — насыщенность, u — скорость фильтрации, k — абсолютная проницаемость, k_r — относительная фазовая проницаемость, μ — динамическая вязкость, p — поровое давление, g — проекция ускорения свободного падения на направление оси x , а индексами g и l обозначены параметры фаз g и l . Уравнения (1) — законы сохранения массы, записанные для каждой жидкости, (2) — закон фильтрации Дарси, а (3) — замыкающее соотношение для насыщенностей.

Так как обе жидкости предполагаются несжимаемыми однородными средами, то ρ_i можно сократить в левой части (1). Таким образом, уравнения (1) фактически представляют собой условия сохранения объема каждой из фаз. Несжимаемость среды также означает, что постановка задачи не требует задания начального распределения давления. Это распределение мгновенно вырабатывается при $t > 0$ и фактически оно определяется с точностью до прибавления произвольной константы. Таким образом, начальные условия сводятся к

$$\begin{aligned} s_g &= s_{g,\max} \quad (0 \leq x \leq L), \\ s_g &= 0 \quad (x < 0 \cup x > L) \end{aligned} \quad (4)$$

где $s_{g,\max}$ — максимальная насыщенность фазы g .

Условие отсутствия потока при больших x записывается в виде:

$$|x / L| \gg 1: \quad u_i = 0 \quad (5)$$

Характерный вид кривых относительной фазовой проницаемости приводится на рис. 2. Предполагается, что кривая $k_{rl}(s_g)$ не зависит от направления изменения насыщенности s_g . Фазовая проницаемость k_{rl} равна 1 при $s_g = 0$. Она убывает с ростом s_g , обращаясь в ноль при $s_g = s_{g,\max} = 1 - s_{lc}$, где s_{lc} — крити-

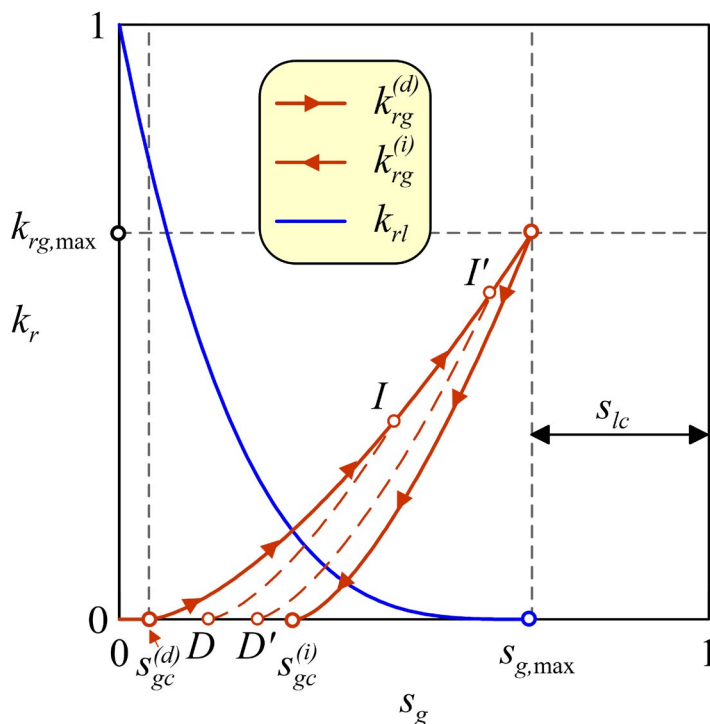


Рис. 2. Схема кривых относительной фазовой проницаемости для условий дренажа и пропитки.

ческая насыщенность жидкости l [9]. Отметим, что согласно (4), при $t = 0$ насыщенность s_g не превышает максимального значения $s_{g,\max}$.

Фазовая проницаемость k_{rg} зависит от направления изменения насыщенности s_g , т.е. она проявляет гистерезисное поведение. Предположим, что при заданном $x_{s_g} = 0$ и далее s_g начинает расти, т.е. полагая, что g — газ, происходит процесс дренажа. В этом случае $k_{rg}(s_g) = k_{rg}^{(d)}(s_g)$ (рис. 2). Если s_g меньше критического значения $s_{gc}^{(d)}$, то $k_{rg}^{(d)} = 0$, т.е. жидкость g не движется. При $s_g > s_{gc}^{(d)}$, $k_{rg}^{(d)}$ растет с s_g , достигая максимального значения $k_{rg,\max}$ при $s_g = s_{g,\max}$. Если далее процесс дренажа сменяется на процесс пропитки, т.е. s_g уменьшается, то $k_{rg} = k_{rg}^{(i)}$. Кривая пропитки $k_{rg}^{(i)}(s_g)$ лежит ниже кривой дренажа $k_{rg}^{(d)}(s_g)$. Фазовая проницаемость $k_{rg}^{(i)}$ обращается в ноль при $s_g = s_{gc}^{(i)} \geq s_{gc}^{(d)}$. Таким образом, если s_g достигла значения $s_{g,\max}$, то она уже не может опуститься ниже значения $s_{gc}^{(i)}$.

Фактически кривые $k_{rg}^{(d)}(s_g)$ и $k_{rg}^{(i)}(s_g)$ соответствуют максимальной петле гистерезиса, в которой s_g достигает значения $s_{g,\max}$. Предположим что в процессе дренажа s_g достигает меньшего значения, которому на рис. 2 соответствует точка I при $s_g = s_{g,hy}$. Если далее дренаж сменяется пропиткой, то k_{rg} соответствует кривая DI , расположенная между $k_{rg}^{(d)}(s_g)$ и $k_{rg}^{(i)}(s_g)$. Уменьшению s_g соответствует движение от I к D , где точка D определяет критическую насыщенность s_{gc} , а точка I — исторически максимальную насыщенность $s_{g,hy}$. Если пропитка сменяется дренажем, то k_{rg} возрастает вдоль отрезка DI пока s_g не достигнет значения $s_{g,hy}$, а $k_{rg}(s_g)$ не совпадет с $k_{rg}^{(d)}(s_g)$. При дальнейшем росте s_g выполняется равенство $k_{rg} = k_{rg}^{(d)}$. Если в чередующихся процессах пропитки и дренажа достигается следующее максимальное значение, которому, например, соответствует точка I' , то процессу пропитки соответствует кривая $D'I'$.

Таким образом, гистерезис k_{rg} определяется кривыми $k_{rg}^{(d)}(s_g)$ и $k_{rg}^{(i)}(s_g)$ и исторически максимальным значением $s_{g,hy}$, достигнутым к данному моменту времени. Для математического описания гистерезиса k_{rg} используется модель [7], которая основывается на следующих соотношениях:

$$s_{gc} = s_{gc}^{(d)} + \frac{s_{g,hy} - s_{gc}^{(d)}}{1 + C(s_{g,hy} - s_{gc}^{(d)})}, \quad C = \frac{1}{s_{gc}^{(i)} - s_{gc}^{(d)}} - \frac{1}{s_{g,max} - s_{gc}^{(d)}} \quad (6)$$

$$k_{rg}(s_g) = k_{rg}^{(i)}(s_g^*) \frac{k_{rg}^{(d)}(s_{g,hy})}{k_{rg,max}} \quad (s_g < s_{g,hy}), \quad (7)$$

$$s_g^* = s_{gc}^{(i)} + (s_{g,max} - s_{gc}^{(i)}) \frac{s_g - s_{gc}}{s_{g,hy} - s_{gc}}$$

где уравнения (6) определяют критическую насыщенность s_g , т.е. абсциссу точки D на рис. 2, а уравнения (7) — кривую DI .

В настоящей работе положим, что

$$k_{rg}^{(j)} = k_{rg,max} \left(\frac{s_g - s_{gc}^{(j)}}{s_{g,max} - s_{gc}^{(j)}} \right)^{n_g} \quad (s_g \geq s_{gc}^{(j)})$$

$$k_{rl} = \left(\frac{s_{g,max} - s_g}{s_{g,max}} \right)^{n_l}$$

где n_g и n_l — константы [11], а $j = d, i$.

3. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

Выберем L в качестве характерного масштаба длины. Так как фильтрация жидкости g происходит под действием силы Архимеда, то в качестве масштаба давления естественно взять $(\rho_l - \rho_g)gL$. Тогда $u_{scl} = (k / \mu_l)(\rho_l - \rho_g)g$ есть характерная скорость фильтрации (2). Масштаб u_{scl} характеризует интенсивность течения, вызванного силой Архимеда. Так как истинная скорость течения жидкости характеризуется $u_{scl} / \phi(1 - s_{lc})$, то в качестве масштаба времени естественно выбрать $\phi(1 - s_{lc})L / u_{scl}$.

В соответствии с выбранными масштабами введем безразмерные переменные

$$x = \hat{x}L, \quad t = \hat{t}\phi(1 - s_{lc})L / u_{scl}, \quad u = \hat{u}u_{scl},$$

$$p + \rho_l gx = \hat{p}(\rho_l - \rho_g)gL, \quad s_i = (1 - s_{lc})\hat{s}_i, \quad k_{rg} = k_{rg,max}\hat{k}_{rg} \quad (8)$$

где «крышкой» обозначены безразмерные и масштабированные величины. Выбор $1 - s_{lc}$ в качестве масштаба насыщенности обусловлен тем, что доля s_{lc} порового пространства всегда остается насыщенной неподвижной связанной фазой l . Эта доля фактически не влияет на течение и, таким образом, может быть исключена из рассмотрения с помощью введения масштабного коэффициента.

Подставляя (8) в уравнения (1) — (5) и для упрощения обозначений опуская у безразмерных переменных знак «крышки», получим

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad i = g, l \quad (9)$$

$$u_g = -Mk_{rg} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - 1 \right), \quad u_l = -k_{rl} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (10)$$

$$t = 0: \quad s_g = 1 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad s_g = 0 \quad (x < 0 \cup x > 1) \quad (11)$$

$$|x| \gg 1: \quad s_g = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$M = k_{rg,\max} \frac{\mu_l}{\mu_g} \quad (13)$$

где M — отношение подвижностей жидкостей.

Складывая уравнения (9) и учитывая, что сумма насыщенностей равна единице, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_g + u_l) = 0 \quad (14)$$

Подставляя (10) в (14) и интегрируя получившееся соотношения с учетом граничных условий (12), получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{Mk_{rg}}{Mk_{rg} + k_{rl}} \quad (15)$$

Подставляя (15), (10) в (9) для $i = g$, получим одно уравнение на насыщенность s_g

$$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$G(s_g, s_{g,hy}) = \frac{Mk_{rg}(s_g, s_{g,hy})k_{rl}(s_g)}{Mk_{rg}(s_g, s_{g,hy}) + k_{rl}(s_g)} \quad (17)$$

$$s_{g,hy}(t, x) = \max_{t' \leq t} s_g(t', x) \quad (18)$$

Таким образом, исследование фильтрации сводится к решению одного уравнения гиперболического типа (16), в котором функция потока G (17) зависит не только от значения s_g в данный момент времени t , но и от исторически максимального значения насыщенности $s_{g,hy}$ (18). При $s_g = s_{g,hy}$ имеем кривую $G(s_g, s_g)$ для процесса дренажа, а при $s_{g,hy} = 1$ кривая $G(s_g, 1)$ описывает процесс пропитки (рис. 3).

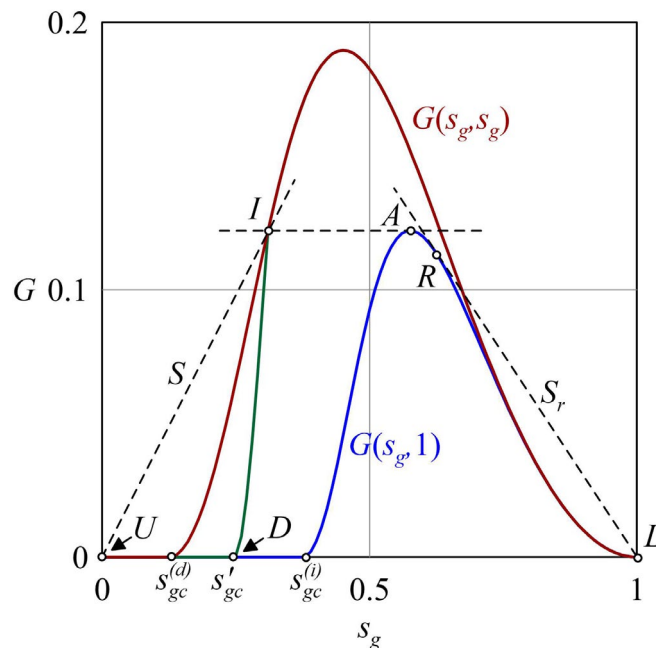


Рис. 3. Типичный вид функции $G(s_g, s_{g,hy})$ при $s_g = s_{g,hy}$ (дренаж) и $s_{g,hy} = 1$ (пропитка). Используются масштабированные в соответствии с (8) значения s_g .

Решение уравнения (16) при начальных условиях (11) может быть получено методом характеристик, скорость которых пропорциональна производной $\partial G / \partial s_g$ при $s_{g,hy} = \text{const}$ в случае пропитки или $s_{g,hy} = s_g$ в случае дренажа [8, 9]. Зависимость G от $s_{g,hy}$ существенно осложняет процесс аналитического решения задачи. В этой связи дальше построим приближенное решение задачи и оценим его точность с помощью сравнения с численным решением уравнения (16) при начальных условиях (11).

4. ПРИМЕР ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим результаты прямого численного моделирования течения при $M = 3.7$, $n_l = n_g = 2$, $s_{gc}^{(d)} = 0.125$ и $s_{gc}^{(i)} = 0.375$. В соответствии с (11), при $t = 0$ вся жидкость g находится при $0 \leq x \leq 1$, причем ее насыщенность равна 1. Таким образом, безразмерный объем жидкости

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} s_g dx = 1 \quad (19)$$

равен единице при $t = 0$. Так как газ моделируется несжимаемой средой, интеграл (19) не изменяется со временем. Следовательно площадь под графиком функции $s_g(x)$ при любом t равна 1.

При $0 < t \ll 1$ изменения s_g со временем сконцентрированы при $x = 1$. Эти изменения происходят из-за распада разрыва, который при $t = 0$ находится при $x = 1$. В положительном направлении оси x распространяется сильный разрыв S , на котором s_g скачком возрастает от 0 до некоторого значения s'_g (рис. 4, $t = 2.2$). Причем, при выбранных параметрах течения $s_g = s'_g = \text{const}$ во всей области, простирающейся от $x = 1$ до S . В отрицательном направлении оси x от $x = 1$ распространяется последовательность волн, состоящая из сильного разрыва S_r и присоединенной к нему волны Римана. Таким образом, сила Архимеда приводит к распаду начального разрыва при $x = 1$ за счет течения легкой жидкости g вверх, а тяжелой жидкости l вниз.

Начальный разрыв при $x = 0$ устойчивый, так как на нем s_g возрастает с x , т.е. тяжелая жидкость расположена под легкой.

В соответствии с общими принципами графического решения задачи о распаде произвольного разрыва в среде, описываемой уравнением (16), необходимо на плоскости $\{s_g, G\}$ построить огибающую к функции G [9]. В рассматриваемом случае нахождение решения осложняется тем, что G зависит не только от s_g , но и от $s_{g,hy}$. Опуская детали, опишем решение задачи при $x \sim 1$, которое является автомодельным относи-

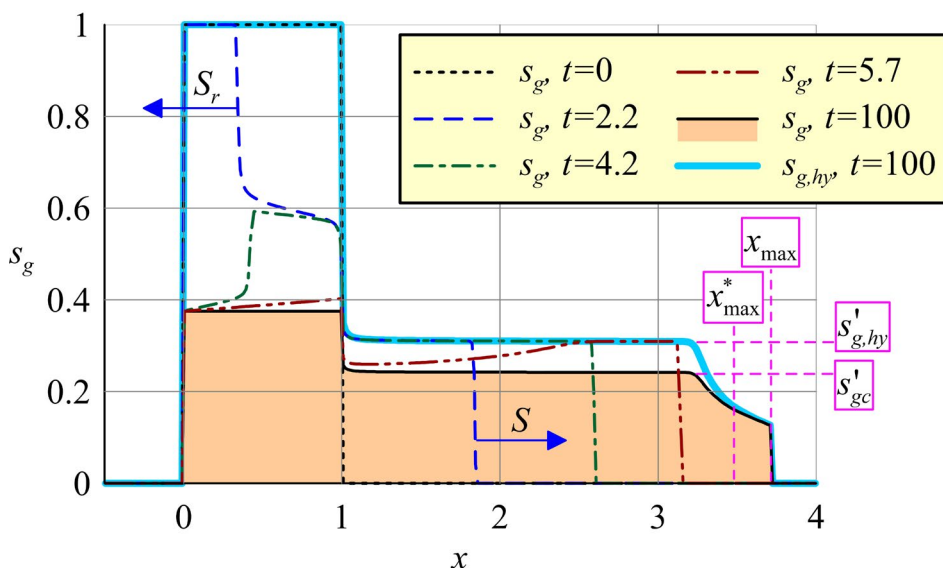


Рис. 4. Рассчитанные распределения $s_g(x)$ в последовательные моменты времени. При $t \geq 100$ параметры течения практически не изменяются со временем. Жирная кривая показывает распределение $s_{g,hy}$ при $t \gg 1$.

тельно переменной $\xi = (x - 1) / t$. Состоянию сверху и снизу от начального разрыва на плоскости $\{s_g, G\}$ соответствуют точки U и L при $s_g = 0$ и $s_g = 1$ (рис. 3).

При малых t и $0 \leq x \leq 1$ происходит пропитка, а $s_{g,hy} = 1$. Следовательно, течение в этой области описывается кривой $G(s_g, 1)$. Разрыву S_r соответствует касательная к $G(s_g, 1)$, проведенная из точки L (рис. 3). Точка касания R соответствует состоянию за разрывом S_r . Отрезок RA кривой $G(s_g, 1)$ соответствует присоединенной к S_r волне Римана, которая простирается от S_r до $x = 1$. В точке A при $x = 1$ характеристическая скорость $\partial G / \partial s_g$ равна нулю.

При малых t и $x > 1$ происходит процесс дренажа, а $s_{g,hy} = s_g$. Следовательно, течение в этой зоне описывается кривой $G(s_g, s_g)$. Разрыву при $x = 1$ и $t > 0$ соответствует переход с линии $G(s_g, 1)$ из зоны пропитки при $x \leq 1$ на линию $G(s_g, s_g)$ в зоне дренажа при $x > 1$. Причем, так как скорость этого разрыва равна нулю, то на плоскости $\{s_g, G\}$ ему соответствует горизонтальный отрезок AI (рис. 3). Разрыву S , распространяющемуся в область $x > 1$, соответствует отрезок UI . Таким образом, решение задачи о распаде произвольного разрыва описывается кривой $LRAIU$, огибающей LRA и UI .

Описанная волновая конфигурация существует только при малых t , до тех пор пока разрыв S_r не достигнет границы $x = 0$. После взаимодействия с этой границей от $x = 0$ вверх распространяются отраженные волны, которые догоняют разрыв S (рис. 4, $t = 4.2$ и 5.7). В зависимости от вида функции $G(s_g, s_{g,hy})$, в частности от расположения ее точек перегиба, это могут быть различные последовательности сильных разрывов и волн Римана. Их взаимодействие с S приводит к снижению s_g за разрывом S . Таким образом, $s_{g,hy}$ тоже опускается ниже s_g у верхнего края зоны, насыщенной жидкостью g .

С ростом t насыщенность s_g при каждом x за передним фронтом газа S снижается, приближаясь к критическому значению s_{gc} , а скорость фильтрации стремится к нулю. Скорость разрыва S также снижается по мере того как S достигает максимальной координаты $x_{\max}$. Фактически при $t \geq 100$ распределение s_g можно уже считать не зависящим от t (рис. 4, $t = 100$). В значительном диапазоне x , исключая малую зону за фронтом S , это распределение кусочно-постоянное. При $0 \leq x \leq 1$ $s_g = s_{gc}^{(i)}$, а при $x > 1$ $s_g = s_{gc}'$.

Заметим, что последовательности волн, в том числе и в задаче о распаде произвольного разрыва при $x \sim 1$ и $t \ll 1$, могут отличаться от описанных. Например, при $s_{gc}^{(i)} \approx s_{gc}^{(d)}$ в область $x > 1$ будет распространяться не уединенный разрыв S , а разрыв с присоединенной волной Римана. Однако, такие изменения — детали, не имеющие значительного влияния на проводимые ниже рассуждения.

5. СЛУЧАЙ $s_{gc}^{(i)} = s_{gc}^{(d)}$

При отсутствии гистерезиса фазовой проницаемости можно получить точную формулу для $x_{\max}$. В этом случае во всей области, насыщенной жидкостью g , при $t \rightarrow \infty$ имеем $s_g = s_{gc}^{(d)}$. Учитывая интеграл (19), получим, что $1 = s_{gc}^{(d)} x_{\max}$. Следовательно

$$x_{\max} = \frac{1}{s_{gc}^{(d)}} \quad (20)$$

Согласно (20), уменьшение критической насыщенности приводит к увеличению $x_{\max}$. Действительно, если жидкость g обездвиживается при меньшей насыщенности $s_{gc}^{(d)}$, то g очевидно может переместиться выше по колонне.

6. ОЦЕНКА ДЛЯ $x_{\max}$

В случае общего положения $s_{gc}^{(i)} \neq s_{gc}^{(d)}$ получить простое уравнение для $x_{\max}$ не представляется возможным. Выведем приближенное соотношение для $x_{\max}$, предположив кусочно-постоянное распределение $s_g(x)$ при $t \rightarrow \infty$ (рис. 4). Пренебрежем неоднородным распределением s_g в малой окрестности за разрывом S , положив $s_g = s_{gc}'$ всюду при $x > 1$. Тогда площадь под графиком $s_g(x)$ можно представить в виде:

$$s_{gc}^{(i)} + s_{gc}' (x_{\max}^* - 1) = 1 \quad (21)$$

где $x_{\max}^*$ — оценка длины $x_{\max}$, полученная в сформулированном приближении. Выражая $x_{\max}^*$ из уравнения (21), получим:

$$x_{\max}^* = 1 + \frac{1 - s'_{gc}}{s_{gc}^{(i)}} \quad (22)$$

где s'_{gc} — абсцисса точки D на рис. 3. Величину s'_{gc} можно легко найти, используя уравнение (6) и графическое построение на рис. 3. Очевидно, что $x_{\max}^* < x_{\max}$ (рис. 4). Таким образом, уравнение (22) дает заниженную оценку для $x_{\max}$.

Для оценки точности оценки (22) сравним рассчитанные в соответствии с (22) $x_{\max}^*$ и значения $x_{\max}$, полученные с помощью прямого численного моделирования фильтрации. Предварительный анализ результатов моделирования показал, что их удобно представить на плоскости $\{H, s_{gc}^{(d)} x_{\max}\}$, где

$$H = \frac{s_{gc}^{(i)} - s_{gc}^{(d)}}{s_{gc}^{(d)}}. \quad (23)$$

На рис. 5, а представлены результаты расчетов при $M = 3.7$, $n_l = n_g = 2$ и различных значениях $s_{gc}^{(d)}$ и $s_{gc}^{(i)}$. Действительно, кривые соответствуют фиксированным значениям $s_{gc}^{(d)}$, а различным значениям критерия подобия H тогда соответствуют различные $s_{gc}^{(i)}$. Согласно (20), при $H = 0$, т.е. при $s_{gc}^{(i)} = s_{gc}^{(d)}$, имеем $s_{gc}^{(d)} x_{\max} = 1$.

Результаты расчетов демонстрируют, что при увеличении H перемещение $x_{\max}$ снижается. Действительно, большим H соответствуют большие критические насыщенности $s_{gc}^{(i)}$ и, следовательно, большие объемы фазы g , обездвиживаемой при $s_{gc} \leq s_{gc}^{(i)}$. Таким образом, меньший объем g остается в подвижном состоянии, что в свою очередь снижает $x_{\max}$. Этот результат сохраняется в широком диапазоне M , n_l и n_g (рис. 5, б–г).

Согласно рис. 5, $x_{\max}^*$ служит очень хорошей оценкой снизу для $x_{\max}$. Действительно, результаты численного моделирования лежат выше соответствующих $x_{\max}^*$. Однако, ошибка $s_{gc}^{(d)}(x_{\max} - x_{\max}^*)$ не превосходит 0.05 и она меньше в большинстве рассмотренных случаев. Таким образом, уравнение (22) позволяет рассчитать $x_{\max}$ с погрешностью не более 5%.

Проведенные расчеты демонстрируют, что $x_{\max}$ зависит от каждого из параметров $s_{gc}^{(d)}$, $s_{gc}^{(i)}$, M , n_l и n_g . Например, при увеличении M длина $x_{\max}$ увеличивается (рис. 5, б). Это связано с тем, что согласно (13), большим M соответствуют малые вязкости жидкости g . Можно ожидать, что менее вязкая жидкость g распространится дальше по вертикальное колонне. Малое влияние числа M на $x_{\max}$ связано с параметрами сильных разрывов и волн Римана, характеризующихся числом M . Так как процесс фильтрации зависит от максимальной насыщенности $s_{g,hy}$, которая в свою очередь зависит от M , то и при больших t расстояние $x_{\max}$ тоже зависит от M .

Несмотря на нелинейную зависимость $x_{\max}$ от $s_{gc}^{(d)}$, $s_{gc}^{(i)}$, M , n_l и n_g , при малых значениях параметра H все рассчитанные кривые $x_{\max}(H)$ (и $x_{\max}^*(H)$) подобны друг другу (рис. 5). При $H < 2$, $x_{\max}$ сильно зависит только от H и слабо зависит от других критериев подобия. Действительно, увеличению H от 0 до 2 соответствует снижение $s_{gc}^{(d)} x_{\max}$ от 1 до 0.4, т.е. на 0.6 безразмерных единиц. При этом изменению других параметров (например, M) соответствуют гораздо меньшие изменения $x_{\max}$. Таким образом, при $H < 2$ перемещение $x_{\max}$ фактически зависит только от критерия подобия H . При $H \geq 2$ кривые $x_{\max}(H)$ на рис. 5 выполаживаются. При таких H влияние других критериев подобия может быть важным для точной оценки $x_{\max}$. Тем не менее, один из основных результатов проведенных расчетов заключается в том, что для оценки $x_{\max}$ наиболее важным является критерий подобия H .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано течение в насыщенной пористой среде конечного объема легкой жидкости, на которую действует сила Архимеда. В виде конечного соотношения предложена оценка максимального расстояния, на которое жидкость распространится вверх по пористой среде. Показано, что полученное соотношение для максимального расстояния дает заниженную оценку, которая тем не менее имеет погрешность не более 5%. Показано, что расстояние наиболее чувствительно к одному критерию подобия, пропорциональ-

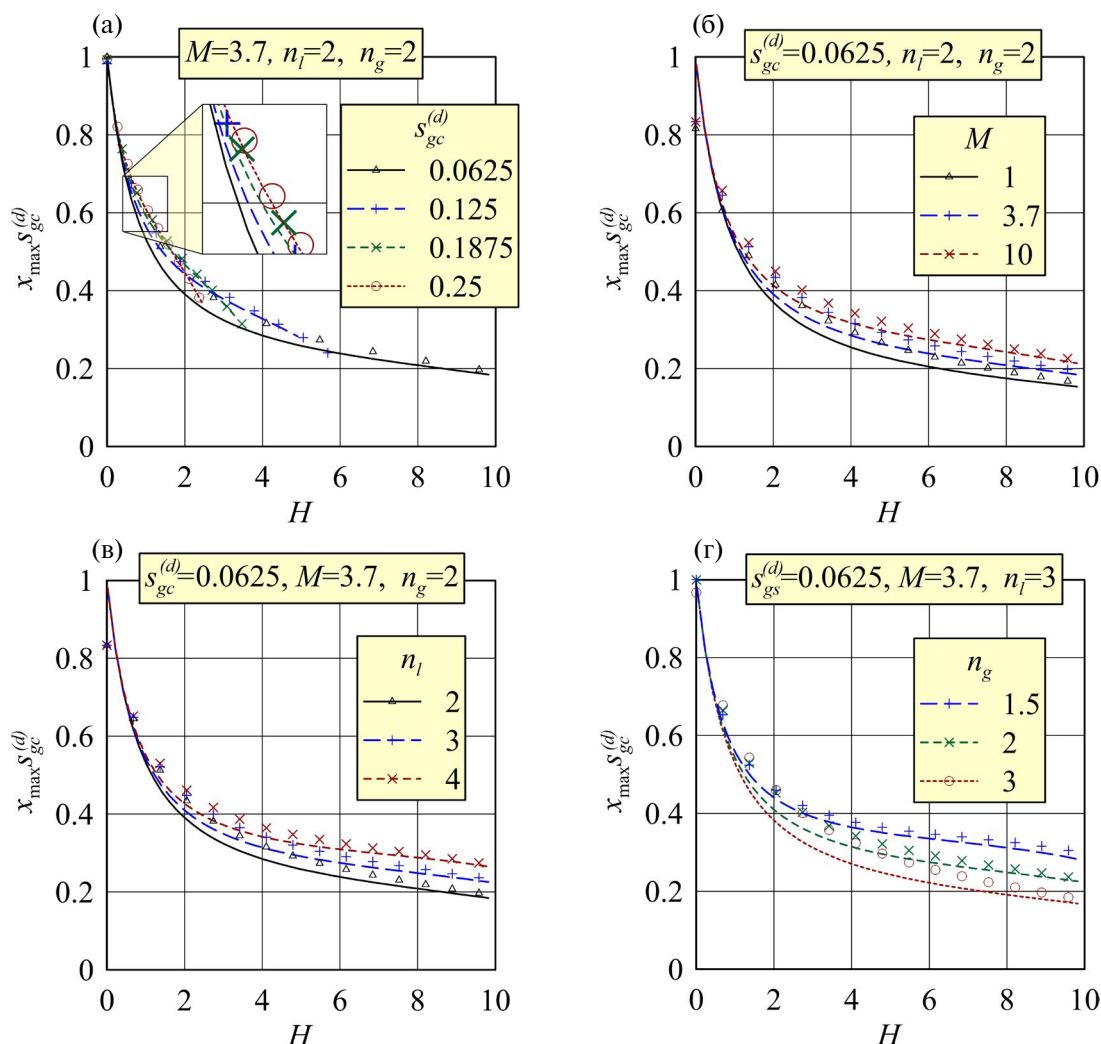


Рис. 5. Рассчитанные перемещения легкой жидкости g при различных критериях подобия. Точки соответствуют результатам численного моделирования, а кривые — приближенной оценке $x_{\max}^*$.

ному разности критических насыщенных в процессах пропитки и дренажа. Оценено влияние других критериев подобия, которое остается малым в широком диапазоне параметров течения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-10051, <https://rscf.ru/project/19-71-10051/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bickle M.J. Geological carbon storage // Nat. Geosci. 2009. V. 2. № 12. P. 815–818. DOI: 10.1038/ngeo687.
2. Bachu S., Bonijoly D., Bradshaw J., Burruss R., Holloway S., Christensen N.P., Mathiassen O.M. CO₂ storage capacity estimation: Methodology and gaps // Int. J. Greenh. Gas Control. 2007. V. 1. № 4. P. 430–443. DOI: 10.1016/S1750-5836(07)00086-2.
3. Afanasyev A., Penigin A., Dymochkina M., Vedeneeva E., Grechko S., Tsvetkova Yu., Mikheev I., Pavlov V., Boronin S., Belovus P., Osipov A. Reservoir simulation of the CO₂ storage potential for the depositional environments of West Siberia // Gas Sci. Eng. 2023. V. 114. 204980. DOI: 10.1016/j.jgsce.2023.204980.
4. Huppert H.E., Neufeld J.A. The fluid mechanics of carbon dioxide sequestration // Annu. Rev. Fluid Mech. 2014. V. 46. P. 255–272. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140627.
5. Afanasyev A., Vedeneeva E., Grechko S. Scaling analysis for a 3-D CO₂ plume in a sloping aquifer at a late stage of injection // J. Nat. Gas Sci. Eng. 2022. V. 106. 104740. DOI: 10.1016/j.jngse.2022.104740.

6. *Afanasyev A., Vedeneeva E., Mikheev I.* Monte Carlo simulation of the maximum migration distance of CO₂ in a sloping aquifer // *Gas Sci. Eng.* 2023. V. 117. 205078. DOI: 10.1016/j.jgsce.2023.205078.
7. *Killough J.E.* Reservoir Simulation With History-Dependent Saturation Functions // *Soc. Pet. Eng. J.* 1976. V. 16. № 1. P. 37–48. DOI: 10.2118/5106-pa.
8. *Buckley S.E., Leverett M.C.* Mechanism of fluid displacement in sands // *Trans.* 1942. V. 146. P. 107-116. DOI: 10.2118/942107-G.
9. *Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
10. *Афанасьев А.А., Султанова Т.В.* Исследование нестационарного двухмерного вытеснения в пористой среде в автомодельной постановке // *Изв. РАН МЖГ.* 2017. № 4. С. 62-72. DOI: 10.7868/S0568528117040065.
11. *Brooks R., Corey A.* Hydraulic properties of porous media // *Hydrology Papers*, Colorado State University. 1964. № 3. 27 p.

ESTIMATION OF THE MAXIMUM MIGRATION DISTANCE OF A FINITE VOLUME OF LIGHT FLUID IN A SATURATED POROUS MEDIUM

A. A. Afanasyev*, E .A. Vedeneeva, and I. E. Mikheev**

Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia

**e-mail: afanasyev@imec.msu.ru*

***e-mail: el-vedeneeva@imec.msu.ru*

Flow of a light fluid through a porous medium saturated with another (heavy) fluid is studied. The one-dimensional formulation of the problem describing two-phase flow in a vertical isolated porous column is considered. Assuming that the volume of light liquid is finite, its maximum upward motion under the action of the buoyancy force is estimated. A simple method for approximate estimate of this migration distance is proposed. It is shown that it is determined by only a single dimensionless number (similarity criterion) over a wide range of fluid and porous medium parameters, and the effect of other parameters is small. The dependence of the maximum migration distance on the distinguished similarity criterion is calculated. The results of study can be useful in estimating the maximum distance over which the injected gas propagates from the well through a water-saturated formation.

Keywords: flow through a porous medium, critical saturation, phase permeability, hysteresis, gas injection.