

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 1, 2024

Развитие полного лагранжева подхода для моделирования течений разреженных дисперсных сред (обзор)	
<i>А. Н. Осипцов</i>	3
Аномальная интенсификация вихревого теплообмена при отрывном обтекании воздухом наклонной канавки на нагретом изотермическом участке пластины	
<i>С. А. Исаев, С. З. Сапожников, Д. В. Никущенко, В. Ю. Митяков, В. В. Сероштанов, Е. Б. Дубко</i>	52
Диффузионная устойчивость кавитационного пузырька в жидком микровключении под действием внешней вынуждающей силы	
<i>К. В. Леонов, И. Ш. Ахатов</i>	63
Диагностика ионизационных процессов в углеводородном пламени с использованием вольтамперных характеристик	
<i>В. А. Полянский, И. Л. Панкратьев</i>	77
Анализ структуры течения в сверхзвуковом канале с каверной	
<i>Р. К. Селезнев</i>	83
Колебания жидкости в круговом цилиндре с возвышением на дне	
<i>С. В. Нестеров, В. А. Калинин</i>	91
Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии слоя жидкости со сдвиговым течением	
<i>Л. А. Ткачева</i>	99
Численное решение краевой задачи для инерционно-гравитационных внутренних волн	
<i>Д. И. Воротников, А. М. Савченко</i>	112
Конические тела с волнообразным поперечным контуром, имеющие минимальное волновое сопротивление	
<i>С. А. Таковицкий</i>	123
Моделирование нестационарных аэродинамических характеристик профиля NASA 0015 по данным численного расчета обтекания	
<i>К. А. Абрамова, Д. А. Алиева, В. Г. Судаков, А. Н. Храбров</i>	131
Диффузионно-дрейфовая модель поверхностного тлеющего разряда в сверхзвуковом потоке газа	
<i>С. Т. Суржиков</i>	145

CONTENTS

No. 1, 2024

Development of the Full Lagrangian Approach for Modeling Dilute Dispersed Media Flows (a Review) <i>A. N. Osipov</i>	3
Anomalous Intensification of Vortex Heat Transfer in the Case of Separated Air Flow over an Inclined Groove in a Hot Isothermal Region of a Flat Plate <i>S. A. Isaev, S. Z. Sapozhnikov, D. V. Nikushchenko, V. Yu. Mityakov, V. V. Seroshtanov, E. B. Dubko</i>	52
Diffusion Stability of an Externally Driven Cavitation Bubble in Micro-Confinement <i>I. Sh. Akhatov, K. V. Leonov</i>	63
Diagnostics of the Ionization Processes in Hydrocarbon Flame with the Use of the Current-Voltage Characteristics <i>V. A. Polyanskii, I. L. Pankrat'ev</i>	77
Analysis of the Flow Structure in a Supersonic Channel with Cavity <i>R. K. Seleznev</i>	83
Fluid Oscillations in a Circular Cylinder with a Bottom Elevation <i>S. V. Nesterov, V. A. Kalinichenko</i>	91
Load Motion on an Ice Cover in the Presence of a Liquid Layer with Velocity Shear <i>L. A. Tkacheva</i>	99
Numerical Solution of the Boundary Value Problem for Inertia-Gravity Internal Waves <i>D. I. Vorotnikov, A. M. Savchenko</i>	112
Conical Bodies with Star-Shaped Transverse Contour Having the Minimum Wave Drag <i>S. A. Takovitskii</i>	123
Modeling of the Unsteady Aerodynamic Characteristics of the NACA 0015 Airfoil from the Data of Numerical Calculations of the Flow <i>K. A. Abramova, D. A. Alieva, V. G. Sudakov, A. N. Khrabrov</i>	131
Diffusion-Drift Model of the Surface Glow Discharge in Supersonic Gas Flow <i>S. T. Surzhikov</i>	145

УДК 532.529

РАЗВИТИЕ ПОЛНОГО ЛАГРАНЖЕВА ПОДХОДА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННЫХ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД (ОБЗОР)

© 2024 г. А. Н. Осипцов

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия*

E-mail: osiptsov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 01.10.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Континуальные модели сред без собственного давления широко используются в различных разделах физики и механики, в том числе при исследовании многофазных течений для описания разреженной диспергированной фазы. В средах без давления возможно пересечение траекторий частиц среды, формирование “складок” и “сборок” фазового объема, а также появление каустик (оггибающих траекторий частиц), вблизи которых плотность среды резко возрастает. В последние десятилетия явления кластеризации и аэродинамической фокусировки инерционной примеси в потоках газа и жидкости привлекают все большее внимание исследователей. Это обусловлено важностью учета неоднородностей концентрации примеси при описании распространения аэрозольных загрязнений в окружающей среде, механизмов роста капель в дождевых облаках, рассеивания излучения дисперсными включениями, инициирования детонации в двухфазных смесях, а также при решении задач двухфазной аэродинамики, интерпретации измерений, полученных методами LDV и PIV, и во многих других приложениях. Перечисленные проблемы стимулируют значительный рост числа публикаций, посвященных процессам аккумуляции и кластеризации инерционных частиц в потоках газа и жидкости. В рамках классических двухжидкостных моделей и стандартных эйлеровых подходов, предполагающих однозначность континуальных параметров сред, оказывается невозможным описать зоны многозначности полей скорости и сингулярности плотности среды в течениях с пересекающимися траекториями частиц. Одной из альтернатив является полный лагранжев подход, предложенный автором ранее. В последние годы этот подход получил дальнейшее развитие в комбинации с осредненными эйлеровыми и лагранжевыми (метод вихревых доменов) методами описания динамики несущей фазы. Такие комбинированные подходы позволили исследовать структуру локальных зон накопления инерционных частиц в вихревых, нестационарных и турбулентных потоках. Описаны базовые идеи полного лагранжева подхода, даны примеры полученных наиболее существенных результатов, иллюстрирующие уникальные возможности метода, и дан обзор основных направлений его развития применительно к нестационарным, вихревым и турбулентным течениям сред типа газ–частицы. Часть обсуждаемых идей и представленных результатов имеет более общее значение, поскольку применима и к другим моделям сред без собственного давления.

Ключевые слова: среда без давления, многофазный поток, частица, “каустика”, сингулярность плотности, полный лагранжев метод, вихревой поток, вихревой домен, турбулентность, область аккумуляции частиц
DOI: 10.31857/S1024708424010012 **EDN:** SEELUM

ВВЕДЕНИЕ

В различных разделах физики и механики используются континуальные бесстолкновительные модели сред, лишенных собственного давления [1]. Пренебрежение “напряжениями” при введении континуального описания среды, состоящей из дискретных элементов (частиц), справедливо в случае, когда флуктуационными скоростями соседних частиц можно пренебречь по сравнению с их среднemasсовой скоростью. Такие модели успешно применялись для описания динамики самогравитирующих дискретных масс (крупномасштабное распределение вещества во Вселенной, “блины Зельдовича” [2], формирование планетных систем, волны плотности и спиральная структура галактик [3]), “холодной” и пылевой компонент в плазме [4], коллективного движения птиц, насекомых и микроорганизмов [5], моделирования транспортных потоков [6] и ряда других систем.

Значительный вклад в понимание формирования особенностей плотности и каустик на границах областей пересекающихся траекторий частиц в средах без давления внесли труды В.И. Арнольда и его последователей (см., например, работу [7]). В указанных работах была проведена классификация основных типов возникающих каустик и сингулярностей плотности в двумерных и трехмерных течениях сред без

давления, однако при этом изучались лишь движения сред по инерции либо в потенциальных силовых полях.

Можно упомянуть также работы [8, 9], в которых рассматривались среды без давления (либо с давлением, зависящим только от времени [10]) с условием “слипания” частиц среды при пересечении их траекторий. Иногда в литературе такое условие, применимое при значительных объемных концентрациях частиц, называется условием запрещенного обгона [1]. При таком ограничении возникает необходимость вводить в рассмотрение сильные разрывы [9], несущие конечную массу, импульс и энергию поверхностной фазы, движущейся вдоль разрыва [8].

Течения разреженных двухфазных сред типа “газ/жидкость — инерционные частицы/капли/пузырьки”, как правило, описываются в рамках двухконтинуального подхода, при этом несущая фаза, в общем случае, описывается уравнениями Навье—Стокса с источниковыми членами, учитывающими обратное влияние частиц, а дисперсная фаза моделируется континуумом, лишенным собственных напряжений [11–16]. Такой континуум является чрезвычайно “сжимаемым”. Более того, как отмечалось ранее, в разреженной “холодной” среде возможно возникновение зон пересекающихся траекторий частиц, на границах которых возникают каустики — огибающие траекторий. Вблизи каустик, а также точек или линий “сборки” континуума частиц происходит резкое возрастание числовой концентрации (осредненной плотности) среды частиц в силу локального схлопывания трубок тока дисперсной фазы [1, 7, 17].

В литературе для расчета параметров дисперсной фазы часто используются конечно-разностные методы, основанные на эйлеровом описании среды частиц. Такой подход предполагает однозначность полей континуальных параметров дисперсной фазы, поэтому он неприменим для исследования течений с пересекающимися траекториями частиц. Другой известный подход — использование лагранжева метода типа “частицы-в-ячейках” [18], основанного на отслеживании многих траекторий отдельных частиц без учета уравнения неразрывности дисперсной фазы. Концентрация дисперсной фазы при этом вычисляется путем суммирования всех частиц, приходящихся на одну эйлерову ячейку несущей фазы. Иногда малый лагранжев объем дисперсной среды заменяют “крупной частицей”, представляющей группу соседних частиц. Масса “крупной частицы” считается неизменной в процессе движения.

Указанный подход требует расчета неоправданно большого числа траекторий частиц для адекватного описания поля концентрации дисперсной фазы в областях пересекающихся траекторий и зонах больших градиентов концентрации, где даже малый лагранжев объем среды частиц испытывает очень большие деформации.

Альтернативой является полный лагранжев подход (ПЛП), предложенный автором ранее — см., например, работы [17, 19, 20]. Этот подход использует лагранжево описание полей скорости и числовой плотности дисперсной фазы. При этом уравнение неразрывности среды частиц, записанное в лагранжевой форме, решается путем привлечения дополнительных уравнений для нахождения компонент якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным. Эти уравнения решаются совместно с уравнениями динамики частиц на выбранных траекториях дисперсной фазы.

Такой подход позволяет свести задачу определения всех континуальных параметров дисперсной фазы (включая плотность среды частиц) к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений в лагранжевых переменных на выбранных траекториях частиц и рассчитать с контролируемой точностью поле осредненной плотности дисперсной фазы, в том числе в областях пересекающихся траекторий и вблизи каустик. По сути, ПЛП является методом характеристик для уравнений дисперсной фазы, реализованным в лагранжевых переменных, с учетом возможности пересечения этих характеристик в физическом пространстве.

Наша статья содержит обзор основных результатов, полученных с использованием ПЛП и его модификаций. В разд. 1–6 описаны базовые предположения используемой бесстолкновительной модели среды, основные идеи ПЛП и варианты его модификации для течений с рождающимися и исчезающими частицами, для отслеживания лагранжевых материальных поверхностей и линий, расчета дифференциальных характеристик полей континуальных параметров среды частиц, в том числе вычисления якобиана и гессиана перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, а также для решения кинетического уравнения бесстолкновительной среды частиц с фазовыми переходами.

В разд. 7 сформулирована замкнутая эйлерово-лагранжева модель двухфазной среды, обобщающая классическую модель запыленного газа на случай пересекающихся траекторий частиц.

В разд. 8 приведены примеры наиболее интересных особенностей распределения концентрации среды частиц в стационарных и нестационарных течениях, иллюстрирующие возможности ПЛП. Обсуждаются каустики в сталкивающихся дисперсных потоках, задачах обтекания тел газодисперсным потоком, фокусировка частиц в течениях с ударными волнами, в узких каналах и пограничных слоях, локальные зоны накопления примеси в течениях типа торнадо, каустики космической пыли в гелиосфере и других течениях. В основном приведены примеры распределений концентрации частиц, которые невозможно описать с использованием стандартных эйлеровых подходов.

Разделы 9–11 посвящены развитию бессеточных, полностью лагранжевых подходов для расчета параметров несущей и дисперсной фазы при исследовании нестационарных вихревых газодисперсных течений с несжимаемой вязкой несущей фазой. Описан бессеточный лагранжев метод, основанный на комбинации ПЛП для дисперсной фазы и метода вязких вихревых доменов для несущей фазы. Обсуждаются примеры расчета плоских вихревых двухфазных течений, течений с вихревыми кольцами и импульсных газодисперсных струй, в том числе — с учетом полидисперсности и испарения дисперсной фазы.

Наконец, в заключительном разд. 12 приведены примеры использования модифицированного ПЛП для расчета зон предпочтительной аккумуляции инерционных частиц в пульсирующих и турбулентных потоках.

1. О МОДЕЛИ РАЗРЕЖЕННОЙ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Рассматривается смесь, состоящая из несущей фазы (жидкости или газа) и сферических включений, имеющих радиус σ и массу m . В общем случае при учете фазовых переходов радиус и масса частиц могут изменяться в процессе движения среды. Температура вещества частиц T_s предполагается однородной по объему частицы. Объемная концентрация дисперсной фазы считается пренебрежимо малой, столкновениями частиц и броуновскими эффектами пренебрегается. Режим обтекания отдельных частиц может варьировать в широких пределах: от континуального до свободномолекулярного. В общем случае при наличии распределения частиц по размерам, скоростям и температурам осредненное поведение дисперсной фазы может быть описано с помощью бесстолкновительного кинетического уравнения для одночастичной функции распределения $f^{(1)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}, T_s, \sigma)$:

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{f}/m)}{\partial \mathbf{c}} + \frac{\partial f^{(1)}(q/c_s m)}{\partial T_s} + \frac{\partial f^{(1)}j}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь t — время, \mathbf{c} — скорость, \mathbf{r} — радиус-вектор, \mathbf{f} — сила, действующая на пробную частицу, q — приток тепла к частице со стороны несущей фазы, c_s — теплоемкость вещества частицы, j — скорость изменения радиуса частицы (за счет испарения, горения или конденсации). Частные производные по векторным переменным для краткости обозначают дивергенцию по компонентам соответствующих векторов. В общем случае в число фазовых переменных могут быть добавлены и другие параметры, например, угловая скорость вращения частиц, параметр формы и пр.

Числовая концентрация n_s и макроскопическая скорость \mathbf{V}_s дисперсной фазы определяются стандартным образом:

$$n_s(t, \mathbf{r}) = \int f^{(1)} d\mathbf{c} d\sigma dT_s, \quad n_s \mathbf{V}_s = \int f^{(1)} \mathbf{c} d\mathbf{c} d\sigma dT_s.$$

Индекс s здесь и далее относится к макропараметрам среды частиц.

На макромасштабе несущая фаза в общем случае описывается уравнениями Навье–Стокса с дополнительными источниковыми членами Q_1 , Q_2 и Q_3 , которые учитывают межфазный обмен массой, импульсом и энергией. Если массообмен отсутствует ($j = Q_1 = 0$), источниковые члены в правых частях уравнения импульса и уравнения энергии, записанного в форме уравнения притока тепла, имеют вид

$$Q_2 = -\int f^{(1)} \mathbf{f} d\mathbf{c} d\sigma dT_s, \quad Q_3 = -\int f^{(1)} q d\mathbf{c} dT_s d\sigma + \int f^{(1)} \mathbf{f}(\mathbf{c} - \mathbf{V}) d\mathbf{c} dT_s d\sigma.$$

Здесь \mathbf{V} — скорость несущей фазы. В последнем соотношении первый член описывает приток тепла от частиц к несущей фазе, а второй — работу сил трения на относительном перемещении фаз. В частном

случае отсутствия фазовых переходов и распределения частиц по температурам кинетико-континуальное описание двухфазной среды использовалось, например, в работах [21–23]. В абсолютном большинстве публикаций по моделированию дисперсных сред используются дальнейшие упрощения: считается, что фазовые переходы отсутствуют, а среду частиц можно разбить на конечное число сортов частиц с концентрациями n_{sk} . Частицы каждого сорта имеют одинаковый размер, одинаковые локальные скорости \mathbf{V}_{sk} и температуру T_{sk} (k — номер сорта частиц). Здесь, как и ранее, T_{sk} — температура материала частиц, а не термодинамическая температура континуума частиц, которая для каждого сорта частиц в принятых предположениях равна нулю. Предполагается, что функция распределения по скоростям и температурам для частиц k -го сорта имеет вид дельта-функции Дирака

$$f^{(1)} = n_{sk}(t, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{c} - \mathbf{V}_{sk}) \delta(T_s - T_{sk}).$$

Для такой функции распределения из кинетического уравнения для k -го сорта частиц стандартным образом, после интегрирования по скоростям и температурам, получаются уравнения “холодного” континуума (индекс k в дальнейшем опущен)

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \operatorname{div}(n_s \mathbf{V}_s) = 0, \quad m \frac{d\mathbf{V}_s}{dt} = \mathbf{f}_s, \quad c_s m \frac{dT_s}{dt} = q_s. \quad (1.2)$$

При формулировке уравнений “холодной” среды вместо числовой плотности частиц n_s часто используют массовую плотность $\rho_s = mn_s$ и переписывают уравнения (1.2) в более привычном для механики сплошной среды виде:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{V}_s) = 0, \quad \rho_s \frac{d\mathbf{V}_s}{dt} = \mathbf{F}_s, \quad c_s \rho_s \frac{dT_s}{dt} = Q_s, \quad \mathbf{F}_s = n_s \mathbf{f}_s, \quad Q_s = n_s q_s.$$

В данном случае скорость континуума частиц \mathbf{V}_s совпадает с реальной скоростью пробной частицы, \mathbf{f}_s — осредненная сила, действующая на пробную частицу (в зависимости от условий обтекания частиц \mathbf{f}_s может задаваться различными выражениями и включать составляющие негидродинамической природы), q_s — осредненный тепловой поток к пробной частице. В качестве \mathbf{f}_s и q_s обычно используют выражения для силы и притока тепла для одиночной сферы в вязком потоке несущей фазы, параметры которого (\mathbf{V} и T) находятся из осредненных уравнений несущей фазы. Выражения для \mathbf{f}_s и q_s зависят от локальных условий обтекания частицы, т. е., в основном, от локальных значений чисел Рейнольдса и Маха обтекания частиц:

$$\operatorname{Re}_s = \frac{2\sigma\rho|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{\mu}, \quad M_s = \frac{|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{a}.$$

Здесь ρ , μ и a — плотность, динамическая вязкость и скорость звука несущей фазы. Например, при обтекании малой частицы (капли, пузырька) вязкой средой при малых числах Рейнольдса суммарная сила, действующая на частицу со стороны несущей фазы, имеет вид [24]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &= \mathbf{f}_{St} + \mathbf{f}_{Ar} + \mathbf{f}_{vm} + \mathbf{f}_{BB}; \quad \mathbf{f}_{St} = 6\pi\sigma\mu(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s), \quad \mathbf{f}_{Ar} = \frac{4}{3}\pi\sigma^3\rho\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \mathbf{g}\right), \\ \mathbf{f}_{vm} &= \frac{2}{3}\pi\sigma^3\rho\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \frac{d_s\mathbf{V}_s}{dt}\right); \quad \mathbf{f}_{BB} = 6\sigma^2\sqrt{\pi\rho\mu}\int_0^t \frac{d_s(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)/d\tau}{\sqrt{t-\tau}}/d\tau. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{f}_{St} , \mathbf{f}_{Ar} , \mathbf{f}_{vm} и \mathbf{f}_{BB} — силы Стокса, Архимеда, присоединенных масс и Бассэ–Буссинеска соответственно. Индекс s при производной здесь обозначает дифференцирование вдоль траектории частицы. Для газозвесей и аэрозолей первая сила (сила аэродинамического сопротивления при стационарных условиях обтекания) значительно превосходит все остальные. При конечных числах Рейнольдса обтекания частицы ее принято представлять в виде

$$\mathbf{f}_d = \frac{1}{2}C_d\rho|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)\pi\sigma^2.$$

Здесь C_d — коэффициент сопротивления, в общем случае зависящий от чисел Re_s и M_s обтекания частицы. При малых числах Маха для C_d часто используется формула Л.С. Клячко [25], удовлетворительно аппроксимирующая стандартную кривую сопротивления сферы до $\operatorname{Re}_s \sim 10^3$:

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}_s} \left(1 + \frac{1}{6} \text{Re}_s^{2/3} \right).$$

В условиях обтекания частицы в режиме сплошной среды при конечных M_s для C_d широко используются аппроксимационная формула из работы [26]. Выражение для C_d при свободномолекулярном режиме обтекания частиц можно найти, например, в работе [27]. При учете вращения частиц и движении частиц в узких областях с большими градиентами продольной скорости (пограничных слоях, слоях смещения, узких каналах) важную роль играют подъемные силы, действующие на частицы (см. примеры в разд. 8). Среди сил негидродинамической природы, влияющих на динамику частиц, часто учитываются сила тяжести $m\mathbf{g}$ (здесь \mathbf{g} — в общем случае, градиент гравитационного потенциала) и сила Лоренца (в системе СИ), действующая на заряженную частицу с зарядом e во внешнем электромагнитном поле с напряженностями \mathbf{E} и \mathbf{B} [23, 28]

$$\mathbf{f}_L = e[\mathbf{E} + (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)\mathbf{B}].$$

Для теплового потока к частице чаще всего используется аппроксимационная формула Ранца—Маршалла [29]:

$$q_s = 4\pi\sigma\lambda(T - T_s)G(\text{Re}_s, \text{Pr}, M_s), \quad G = 1 + 0.3 \text{Re}_s^{1/2} \text{Pr}^{1/3}.$$

В случае конечных чисел Маха обтекания частиц для поправочной функции G можно использовать аппроксимационную формулу из [26].

В уравнениях несущей фазы источниковые члены, соответствующие одному сорту частиц, принимают вид

$$Q_2 = -n_s \mathbf{f}_s, \quad Q_3 = -n_s q_s + n_s \mathbf{f}_s (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}). \quad (1.4)$$

В общем случае уравнения (1.2) должны решаться для каждого сорта частиц, а источниковые члены в уравнениях несущей фазы равняются сумме выражений (1.4) по всем сортам частиц.

Решение уравнений “холодного” континуума (1.2) является важнейшим элементом моделирования разреженных дисперсных потоков для большинства используемых в настоящее время моделей многофазных сред. При конечных массовых концентрациях частиц их влияние на несущую фазу обычно учитывается путем итераций по величине источниковых членов (1.4), при этом на каждом шаге итераций поля параметров несущей фазы в (1.2) считаются известными.

Как отмечалось во введении, аналогичные модели среды без собственного давления (с другими выражениями для сил, действующих на частицы) используются во многих разделах физики и механики, поэтому часть результатов, представленных ниже, применима не только в механике многофазных сред.

При использовании уравнений типа (1.2) основные математические трудности связаны с очень высокой “сжимаемостью” континуума невзаимодействующих частиц. Более того, в некоторых областях течения траектории частиц могут пересекаться в одних и тех же точках пространства, формируя “сборки” и “складки”, на границах которых (каустиках) концентрация дисперсной фазы неограниченно возрастает [1, 7, 17].

Вопрос о границах применимости модели невзаимодействующих частиц при наличии зон накопления или пересечения траекторий частиц обычно решается на основе дополнительного микроструктурного анализа. Примеры такого анализа приведены в работе [17], где с использованием элементов теории вероятности, в предположении пуассоновского распределения числа частиц в конечном объеме, получены выражения для среднего значения (математического ожидания) расстояния между частицами $M(l)$ и его дисперсии $D(l)$ в точках неограниченного роста числовой плотности частиц на каустиках:

$$\frac{\sigma}{M(l)} = \frac{s}{\Gamma(1/s)} \left[\frac{3k}{4\pi} \varphi_{s\infty} \left(\frac{L}{\sigma} \right)^{3-s} \right]^{1/s}, \quad \frac{D(l)}{M^2(l)} = \frac{2s\Gamma(2/s)}{\Gamma^2(1/s)} - 1. \quad (1.5)$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера, L — макромасштаб длины для рассматриваемой задачи, на котором среда частиц описывается континуальными уравнениями, $\varphi_{s\infty} = (4/3)\pi\sigma^3 n_{s\infty}$ — характерная объемная доля среды частиц вдали от сингулярности концентрации, а положительные константы (интегральные характеристики сингулярности) k и s определяются из следующих соображений.

Рассмотрим точку \mathbf{x}_0 , лежащую на каустике, в которой числовая плотность среды частиц неограниченно (но интегрируемым образом) возрастает, и окружим эту точку сферой Ω_r радиуса r . Предположим, что при малых r/L среднее число частиц в сфере Ω_r имеет следующее асимптотическое представление:

$$N_s(r/L) = \int_{\Omega_r} n_s dv = k \left(\frac{r}{L} \right)^s + o \left(\frac{r}{L} \right)^s.$$

Из выражения (1.5) следует, что, несмотря на неограниченный рост числовой плотности на каустике, среднее расстояние между частицами остается конечным, поскольку конечный лагранжевый объем среды частиц “схлопывается” не в точку, а в конечный элемент поверхности с конечной поверхностной плотностью среды частиц. Оценки показывают [17], что для большинства типичных сингулярностей плотности среды частиц, возникающих при моделировании течений газозвесей в условиях, представляющих интерес для приложений, среднее расстояние между частицами в точках сингулярности числовой плотности остается много больше размера частиц, т. е. бесстолкновительная модель дисперсной фазы остается применимой.

На каустиках, являющихся огибающими траекторий частиц в точках разворота траекторий и лежащих в области конечных значений скорости несущей фазы, числовая плотность частиц имеет интегрируемую сингулярность типа $1/\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$ [30], где $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ — расстояние до точки сингулярности \mathbf{x}_0 . При учете небольшого распределения частиц по скоростям (малого отличия исходной функции распределения частиц по скоростям от дельта-функции) числовая плотность среды частиц вблизи каустики становится конечной, оставаясь достаточно большой [31].

Имеющиеся в литературе оценки границ применимости бесстолкновительной среды для моделирования течений с локальными зонами пересекающихся траекторий частиц показывают, что в условиях, представляющих интерес для большинства приложений, для инерционных частиц (размером более 1 мкм) бесстолкновительная модель остается применимой при исходной объемной концентрации, не превосходящей величину $\sim 10^{-4} - 10^{-5}$ (см., например, работы [31–32]).

С увеличением концентрации дисперсной фазы возрастает вероятность столкновений между частицами, движущимися по пересекающимся траекториям, например, вблизи тела, обтекаемого запыленным газом с инерционными частицами, отражающимися от обтекаемой поверхности. Существует довольно много публикаций, посвященных построению полуэмпирических столкновительных моделей дисперсных систем (см., например, [33–35]), в которых используются статистические и кинетические подходы и предположения, во многом аналогичные теории газовых смесей. В частности, как правило, предполагается быстрая “максвеллизация” функции распределения сталкивающихся частиц по скоростям.

Последнее предположение является необоснованным при учете гидродинамического взаимодействия частиц в несущей вязкой среде, где локальная функция распределения частиц по скоростям существенно зависит от предыстории скоростной релаксации частиц и их начального пространственного распределения [36].

Наиболее перспективными представляются подходы, использующие кинетико-континуальные модели двухфазной среды с расчетами неупругих столкновений частиц методом Монте-Карло [37], при этом описание межчастичных столкновений при наличии вязкой несущей фазы требует привлечения эмпирической информации о коэффициентах аккомодации импульсов и моментов импульсов сталкивающихся частиц. Несмотря на обилие публикаций, построение обоснованных моделей дисперсных систем с конечным объемным содержанием частиц при учете их гидродинамического взаимодействия и контактных столкновений является очень сложной и не решенной до настоящего времени проблемой механики многофазных сред.

Ниже рассматривается предельная модель полностью бесстолкновительной среды частиц, справедливая для достаточно разреженных дисперсных систем.

2. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ПОЛНОГО ЛАГРАНЖЕВА ПОДХОДА

Для вычисления концентрации частиц в зонах пересекающихся траекторий (“складок”) частиц и вблизи каустик естественно перейти от эйлерова к лагранжеву описанию среды частиц. В качестве лагранжевых координат для простоты используем значения декартовых координат выбранной лагранжевой частицы

x_0, y_0, z_0 в некоторый момент, принятый за начало отсчета $t = 0$. Рассматривая радиус-вектор выбранной частицы \mathbf{r}_s , скорость \mathbf{V}_s и температуру T_s как функции лагранжевых координат $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и времени t , уравнения (1.2) можно записать в лагранжевой форме:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial t} = \mathbf{V}_s, \quad m \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} = \mathbf{f}_s, \quad c_s m \frac{\partial T_s}{\partial t} = q_s, \quad n_s(\mathbf{r}_0, t) |\det(J)| = n_{s0}(\mathbf{r}_0, 0). \quad (2.1)$$

Здесь компоненты матрицы Якоби J имеют вид $J_{ij} = \partial x_i / \partial x_{0j}$ ($i, j = 1, 2, 3$; $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$). При фиксированном значении \mathbf{r}_0 первые три уравнения превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющих рассчитать данную траекторию частиц и распределение скорости и температуры дисперсной фазы вдоль этой траектории. Если бы компоненты якобиана J_{ij} на траектории были известны, то из последнего соотношения (2.1) можно было бы найти распределение концентрации частиц вдоль данной траектории. В большинстве моделей разреженных дисперсных сред межфазная сила \mathbf{f}_s считается известной функцией координат, скоростей и температур фаз (а также производных параметров несущей фазы по эйлеровым координатам и времени), но не зависит явно от концентрации частиц. Последнее условие позволяет вывести замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент J_{ij} на траектории частиц. Продемонстрируем вывод на примере стоксовой межфазной силы. Пусть

$$\mathbf{f}_s = \frac{m}{\tau} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s), \quad \tau = \frac{m}{6\pi\sigma\mu} = \frac{2\sigma^2\rho_s^0}{9\mu}.$$

Здесь τ — время скоростной релаксации частиц, ρ_s^0 — плотность вещества частиц. Дифференцируя первые два векторных уравнения (2.1) по лагранжевым координатам x_{0j} и меняя порядок дифференцирования по времени и x_{0j} , получаем систему

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial t} = \Omega_{ij}, \quad \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left(\sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} J_{kj} - \Omega_{ij} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial v_{si}}{\partial x_{0j}}. \quad (2.2)$$

Таким образом, если скорость несущей фазы и ее производные по эйлеровым координатам известны, уравнения (2.1) совместно с (2.2) составляют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и конечного соотношения, позволяющих определить все параметры дисперсной фазы, включая концентрацию, на выбранной траектории частиц.

Для трехмерных неустановившихся течений порядок системы ОДУ для расчета одной траектории, компонент скорости, температуры и вспомогательных функций J_{ij}, Ω_{ij} , необходимых для расчета концентрации частиц вдоль этой траектории, равен 25, для двумерных — 13. Начальные условия для указанной системы ОДУ получают естественным образом из граничных условий для рассматриваемого течения. Например, если расчет траектории начинается из области однородного потока частиц, направленного вдоль оси x , то при $t = 0$ имеем $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, T_s = T_{s0}, n_s = n_{s0}, u_s = u_{s0}, v_s = 0, w_s = 0, J_{ii} = 1, J_{ij} (i \neq j) = 0, \Omega_{ij} = 0$. При использовании других моделей межфазного взаимодействия уравнения для вспомогательных функций Ω_{ij} имеют более сложный вид (см., например, [23, 27, 38–41]), но описанная выше процедура вывода этих уравнений остается неизменной.

Предложенный метод расчета концентрации частиц устраняет проблему пересекающихся траекторий, так как различным траекториям, пересекающимся в одной и той же точке физического пространства, соответствуют различные значения лагранжевых координат \mathbf{r}_0 и t . Границы областей пересекающихся траекторий (каустики) легко определяются в процессе расчета, поскольку на них якобиан обращается в ноль.

Расчет концентрации можно продолжить за точку пересечения траекторий частиц, при этом для автоматического учета возникновения “складки” определитель в уравнении неразрывности среды частиц, в общем случае, следует взять по модулю, как это сделано в выражении (2.1), поскольку за точкой пересечения траекторий меняется направление обхода лагранжева элемента. Если траектория частиц пересекает поверхность сильного разрыва параметров несущей фазы (например, ударную волну [41]), правые части ОДУ (2.1)–(2.2) и переменные J_{ij}, Ω_{ij} , также претерпевают разрывы. При этом для продолжения расчетов параметров дисперсной фазы после разрыва на выбранной траектории следует учитывать непрерывность координат и скоростей среды частиц, а также их производных вдоль поверхности разрыва.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛНОГО ЛАГРАНЖЕВА ПОДХОДА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Если для описания движения дисперсной смеси используются криволинейные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то уравнение неразрывности среды частиц в лагранжевой форме имеет вид [42]

$$n_s(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, t) \sqrt{g} = n_s(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, 0) \sqrt{g_0}, \quad g = \det \|g_{ij}\|. \quad (3.1)$$

Здесь g_{ij} — компоненты метрического тензора лагранжевой системы координат, индекс ноль отмечает значение координат и определителя при $t = 0$. Используя векторные уравнения из (2.1), можно вывести замкнутую систему ОДУ на фиксированной траектории для определения текущего значения n_s . В общем случае эта процедура слишком громоздка, поэтому приведем ее для криволинейных ортогональных координат, наиболее часто встречающихся в приложениях. В этом случае уравнение неразрывности среды частиц (2.1) принимает вид

$$n_s(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, t) H_1 H_2 H_3 \det \|\partial \xi_i / \partial \xi_{i0}\| = n_{s0}(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, 0) H_{10} H_{20} H_{30}. \quad (3.2)$$

Здесь H_i — коэффициенты Ламе. Введем в рассмотрение физические компоненты скорости v_{si} и ускорения a_{si} частицы. Воспользуемся известным представлением компонент ускорения материальной точки единичной массы через ее кинетическую энергию K :

$$a_{si} = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial \xi_i} \right], \quad K = \frac{|V|_s^2}{2}. \quad (3.3)$$

Здесь точка над ξ_i обозначает производную по времени. С использованием выражения (3.3) можно записать уравнения траектории и импульса частиц в проекциях на оси криволинейной ортогональной системы координат следующим образом:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{v_{si}}{H_i}, \quad \frac{\partial v_{si}}{\partial t} = \sum_k \frac{v_{sk}}{H_i H_k} \left(v_{sk} \frac{\partial H_k}{\partial \xi_i} - v_{si} \frac{\partial H_i}{\partial \xi_k} \right) + \frac{f_{si}}{m}. \quad (3.4)$$

В уравнениях (3.4) суммирование по i отсутствует, искомые функции ξ_i и v_{si} считаются зависящими от времени t и лагранжевых координат ξ_{j0} , f_{si} — соответствующая компонента силы, действующей на частицу. Дифференцируя уравнения (3.4) по лагранжевым координатам ξ_{j0} и изменяя порядок дифференцирования, получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{ij}}{\partial t} &= \frac{\Omega_{ij}}{H_i} - \frac{v_i}{H_i^2} \sum_k \frac{\partial H_j}{\partial \xi_k} J_{kj}, \quad J_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_{j0}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial v_{si}}{\partial \xi_{j0}}, \\ \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi_{j0}} \left\{ \sum_k \frac{v_{sk}}{H_i H_k} \left(v_{sk} \frac{\partial H_k}{\partial \xi_i} - v_{si} \frac{\partial H_i}{\partial \xi_k} \right) \right\} + \frac{1}{m} \frac{\partial f_{si}}{\partial \xi_{j0}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для заданной модели силового взаимодействия фаз (f_{si} — известные функции параметров несущей фазы и скоростей частиц) и фиксированной системы координат (H_i — известные функции координат) дифференцирование выражения в фигурных скобках и f_{si} по лагранжевым координатам следует проводить по правилам дифференцирования сложных функций. Полученные в результате уравнения (3.2), (3.4)–(3.5) при $\xi_{i0} = \text{const}$ превращаются в замкнутую систему ОДУ для $\xi_i, v_{si}, J_{ij}, \Omega_{ij}$ и конечного соотношения для n_s , позволяющих рассчитывать концентрацию одновременно с расчетом траектории частиц.

В случае очень сложных выражений для силы, действующей на частицы (например, при учете подъемных сил Магнуса, Сэфмана, термофоретической силы и др.), для расчета компонент якобиана вместо дифференцирования и вывода дополнительных уравнений (3.5) может быть применена численная процедура. Например, можно одновременно рассчитывать нескольких соседних траекторий частиц (у которых начальные координаты отличаются на малую величину) и вычислять частные производных $\partial x_i / \partial x_{i0}, \partial v_{si} / \partial x_{j0}$ с помощью конечно-разностной аппроксимации. Такая процедура была предложена в работе [40].

4. ВАЖНЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Установившееся течение несущей фазы. В этом случае траектории среды частиц стационарны, что позволяет выразить часть компонентов якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным через

компоненты скорости частиц и существенно сократить число искомым функций при вычислении концентрации дисперсной фазы. Выберем траекторию частиц $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$. В силу ее стационарности, имеем

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t + dt) = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{l}_0, t), \quad d\mathbf{l}_0 = \mathbf{V}_{s0} dt.$$

Здесь \mathbf{V}_{s0} — скорость частиц в точке \mathbf{r}_0 . Следовательно, производная радиуса-вектора вдоль лагранжева направления \mathbf{l}_0 может быть вычислена как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l_0}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{V_{s0}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\mathbf{V}_s}{V_{s0}}. \quad (4.1)$$

Отсюда можно выразить три компонента якобиана преобразования от эйлеровых к лагранжевым переменным через остальные компоненты якобиана и компоненты вектора скорости. Например, при использовании декартовых координат из (4.1) получаем соотношения

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_0} = \frac{v_{si}}{V_{s0} n_1} - \frac{n_2}{n_1} \frac{\partial x_i}{\partial y_0} - \frac{n_3}{n_1} \frac{\partial x_i}{\partial z_0}, \quad n_i = \cos(\mathbf{V}_{s0}, \mathbf{e}_i), \quad (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.2)$$

Здесь \mathbf{e}_i — орты осей координат. После подстановки (4.2) в выражение для якобиана уравнение неразрывности для среды частиц упрощается

$$n_s(\mathbf{r}_0, t) \det \begin{vmatrix} u_s & \partial x / \partial y_0 & \partial x / \partial z_0 \\ v_s & \partial y / \partial y_0 & \partial y / \partial z_0 \\ w_s & \partial z / \partial y_0 & \partial z / \partial z_0 \end{vmatrix} = n_{s0}(\mathbf{r}_0, 0) u_{s0}. \quad (4.3)$$

Соответственно, порядок системы ОДУ, которую необходимо решать на выбранной траектории частиц, сокращается на шесть уравнений.

Стационарность траекторий частиц позволяет также значительно упростить процедуру нахождения нестационарного поля концентрации в случае, когда граничные условия для концентрации известным образом зависят от времени ($n_{s0}(\mathbf{r}_0, t_g) = G(t_g)$, t_g — “глобальное” время) (например, при исследовании эволюции неоднородностей концентрации в стационарном поле скоростей несущей фазы [43]). В этом случае, как следует из выражения (4.3), мгновенное значение концентрации на выбранной траектории в момент t (здесь t — время движения частицы по траектории от точки \mathbf{r}_0) выражается через функцию G и значение концентрации $n_{st}(\mathbf{r}_0, t)$, найденное для стационарного граничного условия $n_{s0} = 1$: $n_s(\mathbf{r}_0, t) = G(t_g - t) n_{st}(\mathbf{r}_0, t)$.

Течения с рождением или исчезновением частиц. В случае заданных источников/стоков количества частиц уравнение неразрывности в лагранжевой форме принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [n_s(\mathbf{r}_0, t) \det(J)] = j_n \det(J). \quad (4.4)$$

Здесь j_n — мощность объемного источника/стока числа частиц. Таким образом, в данном случае вместо конечного соотношения (2.1) на выбранной траектории частиц следует решать дополнительное обыкновенное дифференциальное уравнение (4.4).

Эволюция материальных поверхностей и линий. При исследовании эволюции материальных поверхностей или линий удобно вводить поверхностную n_{sur} или линейную n_l числовую плотность частиц. Закон сохранения числа частиц для элемента поверхности (линии) имеет вид

$$n_{sur} d\Sigma = n_{sur0} d\Sigma_0, \quad n_l dl = n_{l0} dl_0.$$

Если использовать декартовы координаты и ввести параметризацию поверхности (I) (линии (II)) в начальный момент

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad z_0 &= s(x_0, y_0), \\ \text{(II)} \quad y_0 &= g(x_0), \quad z_0 = h(x_0), \end{aligned}$$

то уравнения неразрывности в лагранжевой форме можно записать в виде

$$\text{(I)} \quad n_{sur}(x_0, y_0, t) \sqrt{|J|^2 + |J|_1^2 + |J|_2^2} = n_{sur0}(x_0, y_0, 0) \sqrt{1 + s_{x_0}^2 + s_{y_0}^2},$$

$$|J| = \det \begin{vmatrix} \partial x / \partial x_0 & \partial y / \partial x_0 \\ \partial x / \partial y_0 & \partial y / \partial y_0 \end{vmatrix}, \quad |J|_1 = \det \begin{vmatrix} \partial z / \partial x_0 & \partial y / \partial x_0 \\ \partial z / \partial y_0 & \partial y / \partial y_0 \end{vmatrix}, \quad |J|_2 = \det \begin{vmatrix} \partial x / \partial x_0 & \partial z / \partial x_0 \\ \partial x / \partial y_0 & \partial z / \partial y_0 \end{vmatrix};$$

$$(II) \quad n_l(x_0, t) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)^2} = n_{l0}(x_0, 0) \sqrt{1 + g'_{x_0}{}^2 + h'_{x_0}{}^2}.$$

В данные соотношения входит лишь часть компонентов якобиана. Таким образом, при исследовании эволюции материальных поверхностей и линий число ОДУ, которые необходимо решать на выбранной траектории для одновременного вычисления концентрации, существенно сокращается: в случае (I) порядок системы — 18, а в случае (II) — 12.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЕЙ КОНТИНУАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Вдоль выбранных траекторий частиц можно вычислять и дифференциальные характеристики континуальных параметров дисперсной фазы, содержащие их производные по эйлеровым координатам. При известном законе деформирования среды частиц в декартовых координатах $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ выражения для градиентов концентрации, температуры, дивергенции и ротора скорости среды частиц в эйлеровых и лагранжевых координатах связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla n_s(\mathbf{r}, t) &= J_T^{-1} \nabla_0 n_s(\mathbf{r}_0, t), \quad \nabla T_s(\mathbf{r}, t) = J_T^{-1} \nabla_0 T_s(\mathbf{r}_0, t), \quad \operatorname{div}(\mathbf{V}_s(\mathbf{r}, t)) = \nabla \mathbf{V}_s(\mathbf{r}, t) = J_T^{-1} \nabla_0 \mathbf{V}_s(\mathbf{r}_0, t), \\ \boldsymbol{\omega}_s(\mathbf{r}, t) &= [\nabla \times \mathbf{V}_s(\mathbf{r}, t)] = [J_T^{-1} \nabla_0 \times \mathbf{V}_s(\mathbf{r}_0, t)], \quad \nabla = \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad \nabla_0 = \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_0}, \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_0}, \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_0} \right\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь J_T^{-1} — матрица, обратная транспонированной матрице Якоби; выражения в левых частях содержат частные производные по эйлеровым переменным (x, y, z) , а в правых — по лагранжевым (x_0, y_0, z_0) . Правые части в уравнениях для завихренности и дивергенции скорости в системе (5.1) содержат компоненты матриц J_{ij} и Ω_{ij} , которые при стоксовом законе сопротивления частиц вычисляются на выбранной траектории частиц из решения обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2).

Приведем пример вычисления градиента температуры дисперсной фазы на выбранной траектории частиц для случая малых чисел Пекле, когда выражение для теплового потока на частицу имеет вид

$$q_s = 4\pi\sigma\lambda(T - T_s).$$

Дифференцируя третье уравнение в выражении (1.2) по лагранжевым координатам, можно получить векторное уравнение переноса для градиента температуры частиц по лагранжевым переменным:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_0 T_s(\mathbf{r}_0, t)) = \theta \{ J_T \nabla T[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)] - \nabla_0 T_s \}, \quad \theta = \frac{6\pi\sigma\lambda}{mc_s}. \quad (5.2)$$

Градиент температуры по эйлеровым координатам пересчитывается с использованием второй формулы из выражения (5.1).

Для вычисления градиента числовой плотности частиц на выбранной траектории применим оператор ∇_0 к уравнению неразрывности среды частиц

$$n_s(\mathbf{r}_0, t) \det(J) = n_{s0}(\mathbf{r}_0, 0).$$

В результате получим

$$\nabla_0 n_s(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\nabla_0 n_{s0}(\mathbf{r}_0, 0) - n_s(\mathbf{r}_0, t) \nabla_0 \det(J)}{\det(J)}. \quad (5.3)$$

Видно, что уравнение (5.3) содержит градиент якобиана перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым. Его вычисление на выбранной траектории частиц требует знания вторых производных $\partial^2 x_i / \partial x_0_j \partial x_0_k$, т. е. компонент гессиана H_{ijk} перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным.

При стоксовском законе сопротивления частиц, дифференцируя уравнения (2.2) по лагранжевым координатам и меняя порядок дифференцирования, получим дополнительные уравнения для вычисления компонент гессиана H_{ijl} на выбранной траектории частиц:

$$\frac{\partial H_{ijl}}{\partial t} = \Psi_{ijl}, \quad \frac{\partial \Psi_{ijl}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left(\sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} H_{kjl} + \sum_{k,m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_m} J_{kj} J_{ml} - \Psi_{ijl} \right), \quad H_{ijl} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_{j0} \partial x_{l0}}, \quad \Psi_{ijl} = \frac{\partial^2 v_{si}}{\partial x_{0j} \partial x_{0l}}. \quad (5.4)$$

Как и ранее, при использовании уравнений (5.1)–(5.4) совместно с системой (2.1)–(2.2) на выбранной траектории частиц предполагается, что поля температуры и скорости известны (вплоть до вторых частных производных по координатам). Начальные условия $H_{ijl}(\mathbf{r}_0, 0)$, $\Psi_{ijl}(\mathbf{r}_0, 0)$ для уравнений (5.4) в различных задачах должны задаваться в соответствии с граничными условиями на входном участке течения. Следует отметить, что компоненты гессиана могут быть использованы для вычисления относительной деформации малого лагранжева элемента на каустике, где якобиан матрицы J равен нулю. Примеры такого подхода можно найти в работах [44, 45].

Для несжимаемых стратифицированных течений с малоинерционной дисперсной примесью, которая движется фактически со скоростью несущей фазы ($\tau = 0$, $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}$), якобиан $\det(J)$ становится равным единице и процедура вычисления градиента концентрации значительно упрощается. Например, первое соотношение из выражения (5.1) принимает простой вид:

$$\nabla n_s(\mathbf{r}, t) = J_T^{-1}(\mathbf{r}, t) \nabla_0 n_{s0}(\mathbf{r}_0, 0).$$

В качестве примеров приведем расчет градиента плотности в несжимаемом течении при безотрывном потенциальном обтекании сферы единичного радиуса невязким стратифицированным потоком, в котором безразмерный градиент плотности среды в набегающем потоке направлен вниз и равен единице [46]. В данном случае расчет градиентов плотности среды эквивалентен расчету градиентов числовой концентрации примеси. На рис. 1а показаны изолинии продольной компоненты безразмерного градиента плотности среды в вертикальном центральном сечении потока, вычисленные с помощью описанной лагранжевой процедуры. Видно формирование характерной “четырёхлепестковой” структуры поля градиента.

Для качественного сравнения на рис. 1б приведена теневая фотография аналогичного поля продольной компоненты градиента плотности при обтекании вихревого кольца стратифицированным потоком из работы [47]. Внешнее течение в таком потоке (за исключением следа) качественно соответствует невязкому обтеканию сферы.

На рис. 2 приведен пример расчета с помощью лагранжева подхода мгновенной картины модуля градиента плотности $|\nabla \rho|$ в горизонтально стратифицированном потоке при потенциальном обтекании круглого цилиндра единичного радиуса. Предполагается, что безразмерный градиент плотности в набегающем потоке изменяется по гармоническому закону $\nabla \rho = \{\sin(kx), 0\}$.

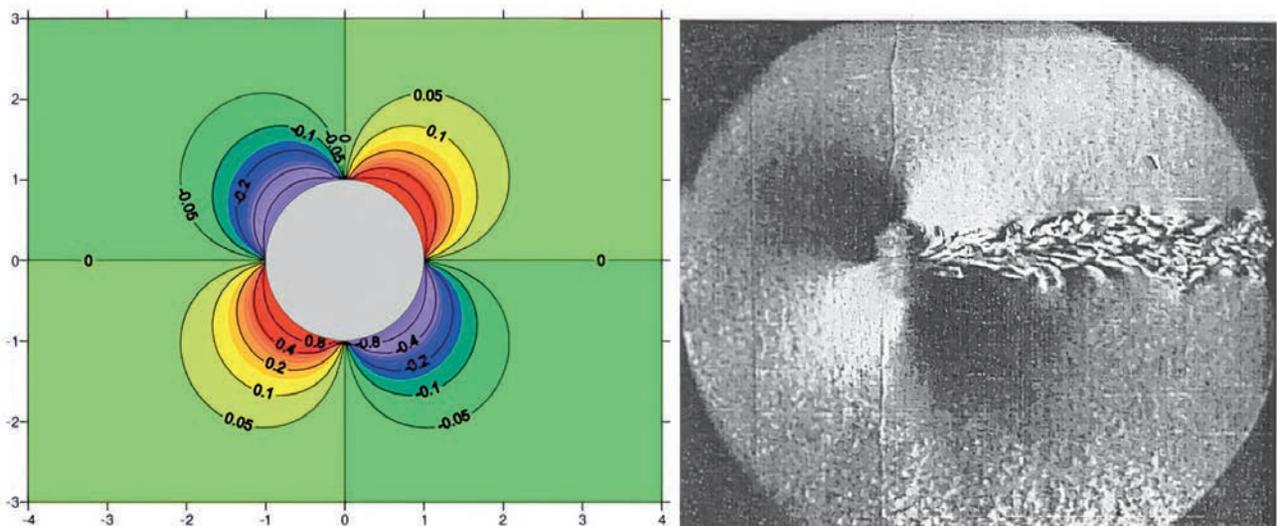


Рис. 1. Пример расчета $d\rho/dx$ при обтекании сферы вертикально стратифицированным потоком в вертикальной срединной плоскости лагранжевым методом (а) и теневая фотография из работы [47] (б).

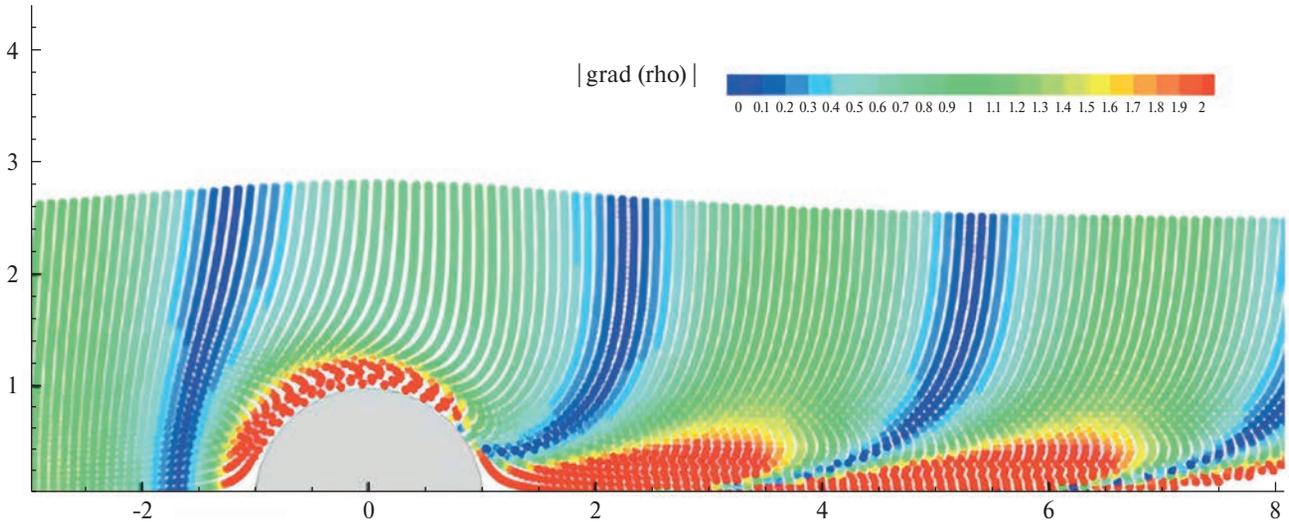


Рис. 2. Мгновенная картина модуля градиента плотности при обтекании цилиндра горизонтально стратифицированным потоком с гармоническими колебаниями плотности.

Расчеты показывают, что картина распределения градиентов плотности зависит от времени. Вблизи передней критической точки тела градиент плотности неограниченно нарастает со временем, а позади тела образуется протяженный градиентный след.

6. ПОЛНЫЙ ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

В случае кинетического описания более сложных бесстолкновительных систем частиц предложенный лагранжев подход может быть применен для вычисления одночастичной функции распределения частиц. Для этого уравнения движения частиц и (1.1) следует переписать в лагранжевой форме, а затем вывести уравнения для соответствующих компонент якобиана путем дифференцирования уравнений движения частиц по лагранжевым координатам.

В качестве примера рассмотрим случай, когда частицы полидисперсны, размер частиц изменяется в силу фазовых переходов, но частицы одинакового размера имеют одинаковые скорости и температуру. Тогда одночастичная функция распределения частиц, удовлетворяющая кинетическому уравнению (1.1), имеет вид

$$f^{(1)} = N(t, \mathbf{r}, \sigma) \delta(\mathbf{c} - \mathbf{V}_s) \delta(T - T_s).$$

Для простоты выкладок рассмотрим одномерный случай и введем лагранжевы координаты x_0, σ_0 (индекс 0 отмечает значения соответствующих величин в начальный момент). Уравнение (1.1) в лагранжевых переменных примет вид

$$N(t, x_0, \sigma_0) \det(J) = N(0, x_0, \sigma_0),$$

$$J_{11} = \partial x / \partial x_0, \quad J_{12} = \partial x / \partial \sigma_0, \quad J_{21} = \partial \sigma / \partial x_0, \quad J_{22} = \partial \sigma / \partial \sigma_0.$$

Это уравнение позволяет найти функцию N , если значения компонент якобиана известны. Как и в разд. 2, уравнения для этих компонент могут быть выведены путем дифференцирования уравнений движения и испарения частицы по лагранжевым координатам. В результате на фиксированной “траектории” в фазовом пространстве получаем систему ОДУ:

$$\frac{dx}{dt} = u_s, \quad \frac{du_s}{dt} = F(x, \sigma, u_s), \quad \frac{d\sigma}{dt} = j(x, \sigma), \quad F = \frac{f_{sx}}{m};$$

$$\frac{dJ_{11}}{dt} = A_1, \quad \frac{dJ_{12}}{dt} = A_2, \quad \frac{dJ_{21}}{dt} = \frac{\partial j}{\partial x} J_{11} + \frac{\partial j}{\partial \sigma} J_{21}, \quad \frac{dJ_{22}}{dt} = \frac{\partial j}{\partial x} J_{12} + \frac{\partial j}{\partial \sigma} J_{22};$$

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} J_{11} + \frac{\partial F}{\partial \sigma} J_{21}, \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} J_{12} + \frac{\partial F}{\partial \sigma} J_{22}.$$

Для течений большей размерности и случаев, когда используют дополнительные фазовые переменные (например, температура или угловая скорость вращения частиц), метод может быть легко модифицирован на основе идей данного раздела. Полный лагранжевый подход для расчета функции распределения полидисперсных испаряющихся капель в нестационарных двухфазных вихревых течениях был использован в работе [48].

7. БАЗОВАЯ ЭЙЛЕРОВО-ЛАГРАНЖЕВА МОДЕЛЬ СРЕДЫ “ГАЗ / ЖИДКОСТЬ — ИНЕРЦИОННЫЕ ЧАСТИЦЫ” И ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ

Сформулируем замкнутую систему уравнений для смешанного эйлерово-лагранжевого описания газодисперсных сред с вязкой, сжимаемой несущей фазой. В общем случае в эйлеровых координатах несущая фаза описывается уравнениями Навье–Стокса с источниковыми членами, учитывающими обратное влияние дисперсной фазы, а среда частиц описывается моделью “холодного” континуума с помощью полного лагранжевого подхода. Тогда эйлерово-лагранжевые уравнения двухфазной среды в декартовых координатах x, y, z и x_0, y_0, z_0 принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla_i \tau^{ij} \mathbf{e}_j - \sum_k n_{sk} \mathbf{f}_{sk}, \quad c_v \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T \right) = \\ &= -p \operatorname{div}(\mathbf{V}) + \operatorname{div}(\lambda \nabla T) - \sum_k [n_{sk} q_{sk} - n_{sk} \mathbf{f}_{sk} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_{sk})], \quad n_s(t, \mathbf{r}_0) |\det(J)| = n_{s0}(0, \mathbf{r}_0), \\ \frac{\partial \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} &= \mathbf{V}_s, \quad m \frac{\partial \mathbf{V}_s(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} = \mathbf{f}_s, \quad c_s m \frac{\partial T_s(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} = q_s, \quad \frac{\partial J_{ij}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} = \Omega_{ij}, \\ m \frac{\partial \Omega_{ij}(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} &= \frac{\partial f_{si}}{\partial x_{0j}}, \quad \tau^{ij} = 2\mu e^{ij} - \frac{2}{3} \mu \delta^{ij} \operatorname{div}(\mathbf{V}), \quad e^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial r_j} + \frac{\partial V_j}{\partial r_i} \right), \quad J_{ij} = \frac{\partial r_i(t, \mathbf{r}_0)}{\partial r_{0j}}, \\ p &= \rho RT, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^\kappa, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\}, \quad \mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь δ^{ij} — символы Кронекера, R — газовая постоянная, \mathbf{e}_j — базисные векторы системы координат, κ — показатель степенной зависимости вязкости и теплопроводности несущей фазы от температуры, индекс 0 относится к параметрам, заданным граничными условиями, суммирование по k означает суммирование по числу “складок” среды частиц в областях пересекающихся траекторий. Заранее неизвестные границы этих областей находятся в процессе решения уравнений дисперсной фазы в лагранжевых координатах. В случае несжимаемой несущей фазы вместо уравнения состояния совершенного газа имеем $\rho = \text{const}$, при этом система (7.1) значительно упрощается: уравнение неразрывности несущей фазы примет вид $\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0$, а выражение для касательных напряжений $\tau^{ij} = 2\mu e^{ij}$.

Система (7.1) представляет собой более общую формулировку классической модели “запыленного газа” [14], учитывающую возможность многозначности полей континуальных параметров среды частиц при возникновении “складок” и “сборок” в дисперсной фазе. Для замыкания модели (7.1) требуется конкретизировать выражения для сил \mathbf{f}_s и притока тепла к частице q_s , вычислить частные производные $\partial f_{si} / \partial x_{0j}$ (дифференцируя $f_{si}(\mathbf{V}[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)], \mathbf{V}_s(\mathbf{r}_0, t)) \dots$) как сложные функции), а также задать начальные и граничные условия.

Для параметров несущей фазы \mathbf{V}, p, T граничные и начальные условия задаются так же, как в случае течения чистой фазы, а для среды частиц, описываемой системами обыкновенных дифференциальных уравнений на выбранных траекториях частиц, следует задавать все необходимые начальные значения $\mathbf{V}_s, n_s, T_s, J_{ij}, \Omega_{ij}$ в области втекания дисперсной фазы. Формально не требуется задавать граничные условия для среды частиц на обтекаемых твердых поверхностях, однако при различных условиях взаимодействия частиц/капель со стенкой (формирование жидкой пленки, регулярный либо диффузный отскок и пр.) следует вводить в рассмотрение пристеночные структуры (пленку жидкости, плотный поверхностный слой дисперсной фазы, слой отраженных частиц).

При формулировке уравнений модели в безразмерном виде, в дополнение к стандартным параметрам подобия для уравнений Навье–Стокса (числам Маха M , Рейнольдса Re , Прандтля Pr , показателю адиабаты γ и показателю степени κ), добавляется ряд параметров, характеризующих дисперсную фазу.

При стоксовском законе сопротивления частиц такими параметрами являются (см., например, работу [43]) относительная массовая концентрация частиц $\alpha = mn_{s0} / \rho_0$, параметр инерционности частиц β , равный отношению макромасштаба рассматриваемой задачи L к характерной длине скоростной релаксации частиц $mV_0 / 6\pi\sigma\mu_0$ (в некоторых работах авторы вводят параметр, обратный β и называемый числом Стокса частиц Stk), а также отношение теплоемкости несущей фазы при постоянном давлении к теплоемкости вещества частиц $\chi = c_p / c_s$.

Параметр инерционности частиц характеризует важность двухскоростных эффектов в рассматриваемой задаче. Так, при $\beta \rightarrow 0$ (или $Stk \rightarrow \infty$) очень инерционные частицы практически не реагируют на несущую фазу, сохраняя исходные значения своих параметров на рассматриваемом масштабе, а при $\beta \rightarrow \infty$ (или $Stk \rightarrow 0$) малоинерционные частицы “вморожены” в среду и движутся без скоростного проскальзывания с несущей фазой. В последнем случае двухконтинуальная модель (7.1) вырождается в односкоростную модель “эффективного газа” [14], характеризуемого измененными (эффективными) значениями параметров подобия Re_{ef} , Pr_{ef} и γ_{ef} [14]:

$$Re_{ef} = (1 + \alpha)Re, \quad M_{ef}^2 = M^2 \frac{(1 + \alpha)(1 + \alpha\gamma\chi)}{(1 + \alpha\chi)}, \quad Pr_{ef} = Pr \frac{(1 + \alpha\chi)}{(1 + \alpha)}, \quad \gamma_{ef} = \gamma \frac{1 + \alpha\chi}{1 + \alpha\gamma\chi}.$$

Относительная массовая концентрация частиц α определяет масштаб источниковых членов, описывающих обратное влияние частиц в уравнениях импульса и энергии несущей фазы. При малых α можно пренебречь влиянием частиц на несущую фазу, при этом задачи определения параметров несущей и дисперсной фаз разделяются. Отношение теплоемкостей фаз χ характеризует отношение длин тепловой и скоростной релаксации газа и частиц, в большинстве приложений χ близко к единице.

В случае более сложных выражений для межфазной силы (при учете нестоксовского режима обтекания частиц, силы тяжести, подъемных сил, заряда частицы и др.) в число параметров подобия добавляются характерные числа обтекания частиц Рейнольдса, Маха и Кнудсена [27, 41], число Фруда, безразмерные коэффициенты при подъемной силе Сэфмана [39], силе Лоренца [23] и др. Дополнительные параметры подобия для несущей фазы могут возникать при задании тепловых граничных условий на неадиабатической стенке, а также при учете других внешних силовых полей.

При конечных массовых концентрациях дисперсной фазы α , численные расчеты по модели (7.1), как правило, осуществляются с помощью итераций по источниковым членам, учитывающим обратное влияние частиц. На каждом шаге итерации при расчете параметров дисперсной фазы параметры несущей фазы считаются известными на эйлеровой сетке. Такие численные алгоритмы использовались, например, в работах [49–51]. При этом в исследовании [51] учитывались также эффекты полидисперсности и испарения дисперсной фазы.

8. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЕ ВОЗМОЖНОСТИ И ПРЕИМУЩЕСТВА ПОЛНОГО ЛАГРАНЖЕВА МЕТОДА

За последние два десятилетия полный лагранжев подход приобрел значительную популярность при расчетах распределения концентрации инерционной примеси в газодисперсных потоках применительно к различным приложениям. В ряде работ вычислительного характера (см., например, [51–57]) на основе сравнения различных численных методов подчеркивались значительные преимущества ПЛП по сравнению с другими методами нахождения поля концентрации инерционной дисперсной фазы. В литературе уже появились примеры успешного внедрения вариантов процедуры полного лагранжева подхода в большие вычислительные пакеты OpenFoam и Ansys Fluent [51, 58].

Поскольку при движении инерционной примеси в сопротивляющейся несущей среде межфазная сила не является потенциальной, типы возникающих каустик могут быть значительно сложнее и многообразнее, чем описанные в известных математических работах [1, 7].

Далее приведен ряд характерных примеров течений с зонами пересекающихся траекторий частиц и сингулярностями их числовой плотности вблизи каустик. Распределение концентрации среды частиц в этих течениях рассчитывалось с помощью ПЛП. Нахождение полей концентрации дисперсной фазы в таких течениях с помощью стандартных эйлеровых подходов невозможно в силу многозначности полей континуальных параметров, а методы типа “частицы-в-ячейках” или Монте-Карло требуют расчета на много большего числа траекторий частиц.

Перехлест траекторий инерционных частиц при опрокидывании волны сжатия и в зонах сходящихся линий тока несущей фазы. Самый простой пример течения, в котором возникает каустика в среде частиц — одномерная задача о распространении волны сжатия, т. е. возмущения скорости частиц, созданного затухающим импульсом несущей фазы. В такой задаче “задние быстрые” частицы, получившие большее ускорение, в силу их инерционности со временем догоняют “передние медленные”, и в среде частиц возникает “складка”, на фронте которой появляется каустика с бесконечным значением числовой плотности частиц [1, 7, 17, 31].

В обычном газе, с ненулевым давлением, при опрокидывании волны сжатия вместо перехлеста траекторий частиц среды появляется сильный разрыв — ударная волна. В разреженной дисперсной среде ничто не препятствует возникновению пересечений траекторий частиц и формированию “складки” среды. Характерным примером такого поведения среды частиц могут служить задачи о распространении взрывных волн в запыленном газе, в которых за фронтом расширяющейся и затухающей ударной волны формируется выраженный слой повышенной концентрации частиц [59, 60].

В стационарном потоке перехлест траекторий частиц может происходить в локальных областях сходящихся линий тока несущей фазы за счет инерционности частиц. Типичный пример — стационарное двумерное течение аэрозоля в окрестности пробоотборника, засасывающего аэрозоль из набегающего двухфазного потока [61]. На рис. 3 видно, что траектории инерционных частиц начинают пересекаться внутри пробоотборника, в точке пересечения траекторий концентрация частиц обращается в бесконечность.

В работе [61] поля концентрации частиц (в том числе при появлении каустик) находились с помощью полного лагранжева метода в окрестности и внутри плоского тонкостенного пробоотборника при различных значениях определяющих параметров (числа Стокса частиц и отношения скорости набегающего потока к скорости аспирации U_∞/U_a).

Слоистые структуры в сталкивающихся потоках [62, 63]. Вблизи критических точек, возникающих при столкновении противоположно направленных потоков (рис. 4), структура поля концентрации примеси может быть очень сложной. Это обусловлено возникновением локальных зон многократного пересечения траекторий инерционных частиц, связанного с последовательными разворотами траекторий частиц, попадающих во встречный поток. Распределение концентрации частиц в окрестности критической точки достаточно общего вида (сталкиваются два потока под разными углами, потоки имеют различные плотности и вязкости, частицы примеси имеют различные параметры инерционности) исследовано в [62].

Рисунки 4 и 5 соответствуют случаю, когда частицы присутствуют только в верхнем потоке (индекс 1),

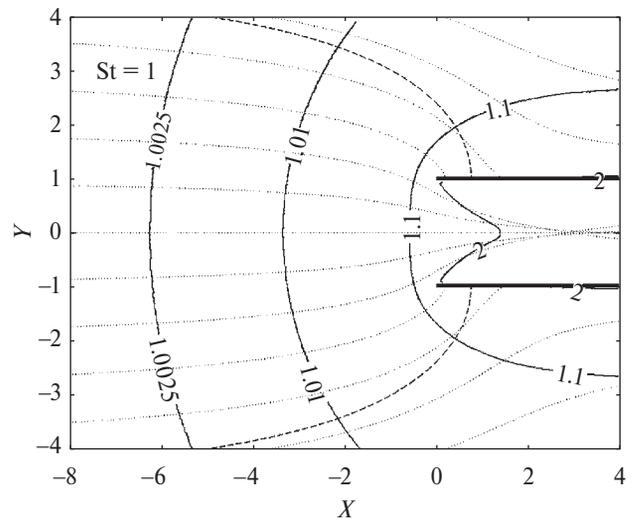


Рис. 3. Траектории частиц (пунктир) и изолинии безразмерной концентрации частиц (сплошные линии с цифрами) в потенциальном течении вблизи пробоотборника аэрозоля; стенки пробоотборника — жирные линии; $K = U_\infty/U_a = 0.2$, $Stk = 1$.

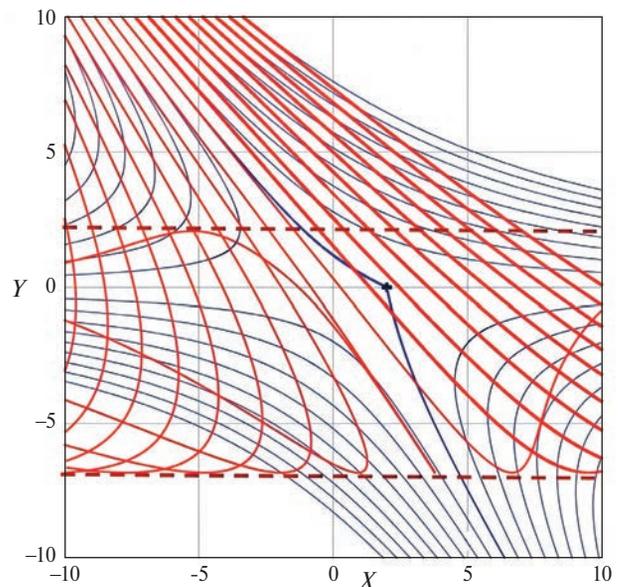


Рис. 4. Течение в окрестности “косой” критической точки [62]. Синие линии — линии тока несущей среды, красные — траектории частиц, пунктир — огибающие траектории частиц (каустики).

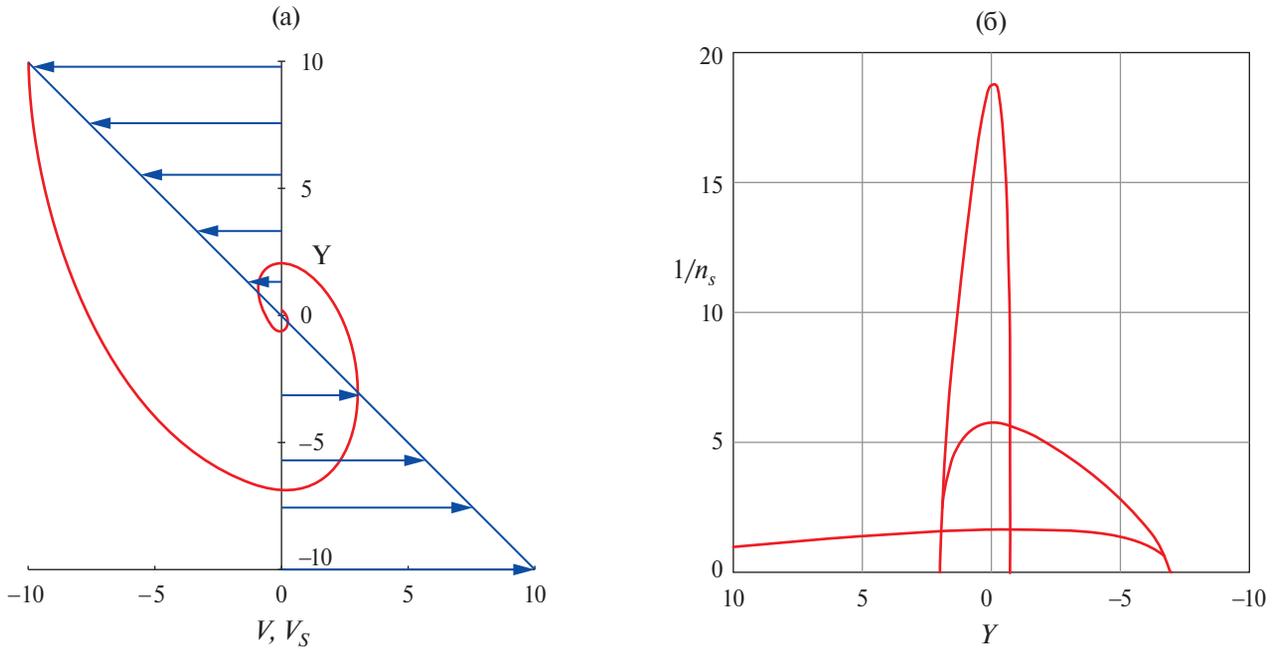


Рис. 5. Распределения вертикальных скоростей несущей фазы (синие линии), частиц (красные линии) (а) и безразмерной концентрации частиц (б) в окрестности критической точки [62].

причем потоки имеют одинаковые плотности, но разные коэффициенты вязкости: вязкость нижнего потока в десять раз превосходит вязкость верхнего потока.

В работе [62] поле скорости несущей фазы найдено численно из решения автомодельной задачи для окрестности неортогональной критической точки. Масштабы скорости и длины: $V = (\mu_1 C_1 / \rho_1)^{1/2}$, $L = (\mu_1 / C_1 \rho_1)^{1/2}$, где C_1 — “скорость растекания” (продольный градиент скорости вдали от критической точки) верхнего потока. Инерционные частицы неоднократно пересекают контактную поверхность, при этом возникают многослойные “складки” в среде частиц, а на огибающих траекторий (каустиках) и на контактной поверхности возникают узкие зоны накопления частиц. Таким образом, в поле суммарной концентрации формируются слоистые структуры, расчет которых другими методами вряд ли возможен.

Близкая слоистая структура формируется и в сталкивающихся осесимметричных течениях. Например, в работе [63] с помощью ПЛП проведены расчеты распределения пылевой компоненты в окрестности оси симметрии течения, формирующегося при столкновении гиперзвукового потока солнечного ветра со сверхзвуковым газопылевым потоком, истекающим из ядра кометы. Обнаружена слоистая структура зон повышенной концентрации пыли в атмосфере кометы. При увеличении инерционности частиц также растет количество “складок” в среде частиц и слоев их накопления вблизи каустик.

Следует отметить, что структура зоны накопления частиц вблизи ортогональной критической точки в невязком потоке и характеристики возникающей интегрируемой сингулярности концентрации частиц в зависимости от их инерционности были подробно исследованы аналитически в работе [17].

Формирование каустик и зон накопления частиц при обтекании затупленных тел запыленным потоком. Другой наглядный пример формирования каустик и локальных зон накопления частиц — обтекание затупленного тела запыленным газом. Публикаций, в которых использовался ПЛП для расчета распределения концентрации инерционных частиц в задачах двухфазного обтекания тел до- и сверхзвуковыми газодисперсными потоками, довольно много, здесь ограничимся упоминанием лишь трех трудов [32, 40, 64], в которых продемонстрированы основные особенности поведения дисперсной фазы вблизи поверхности обтекаемого тела.

В работе [32] исследовалось гиперзвуковое обтекание сферы невязким слабозапыленным потоком. Течение в ударном слое описывалось приближенным аналитическим решением Хейза [65]. Показано, что существует два качественно различных режима обтекания тела: 1) режим отсутствия инерционного осаждения частиц, соответствующий малоинерционным частицам и 2) режим, при котором формируется слой отраженных от тела частиц, соответствующий достаточно инерционным частицам.

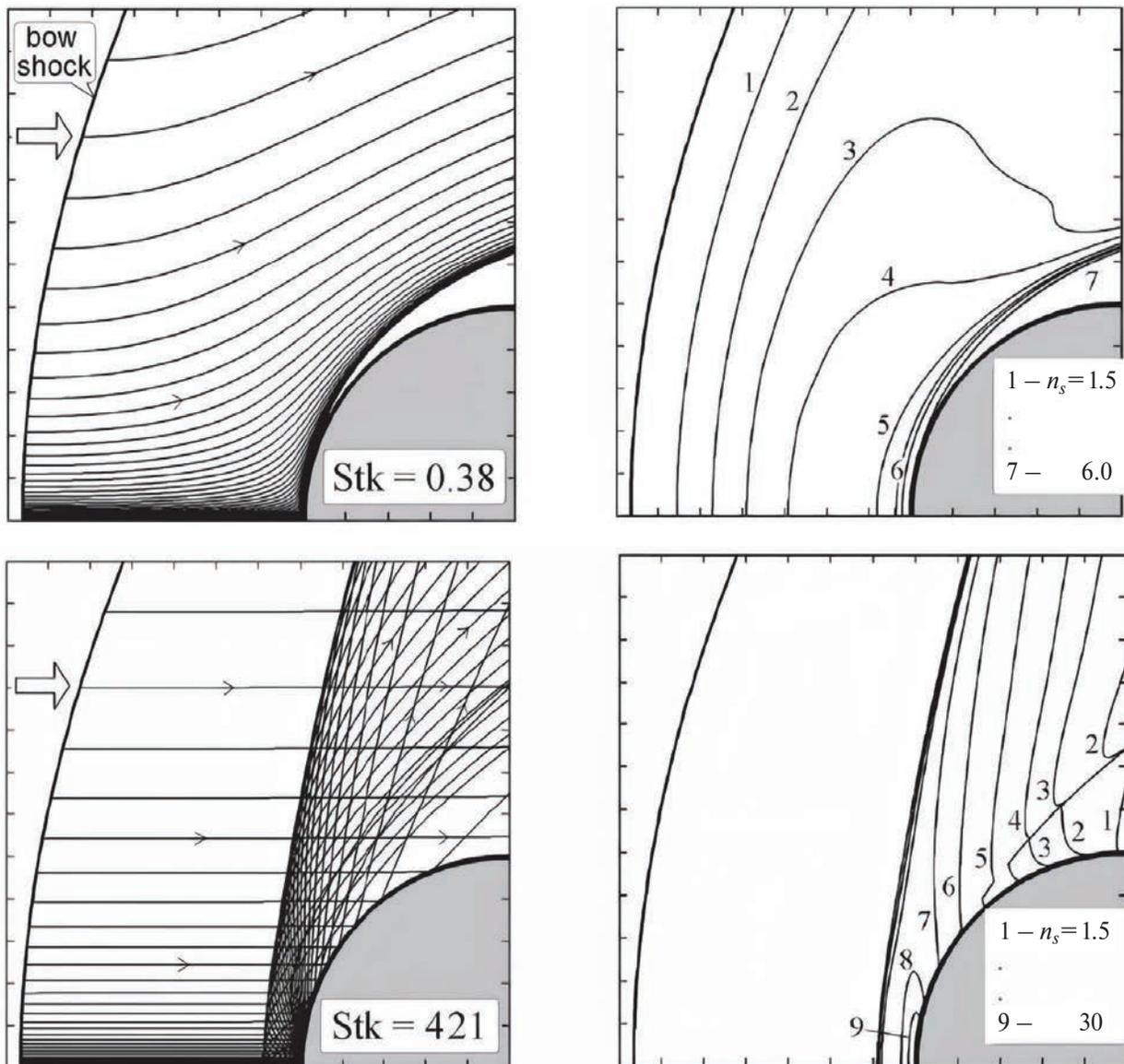


Рис. 6. Картины траекторий частиц (левые рисунки) и изолиний безразмерной концентрации частиц (правые рисунки) при обтекании цилиндра невязким сверхзвуковым потоком [64]. Верхние рисунки соответствуют режиму отсутствия инерционного осаждения частиц, а нижние — режиму с отражением частиц.

В первом случае предельная траектория частиц, не совпадающая с поверхностью тела, отделена от обтекаемой поверхности тонким слоем чистого газа. Вблизи предельной траектории частиц формируется тонкий слой повышенной концентрации дисперсной фазы с интегрируемой сингулярностью на самой предельной траектории [17].

Во втором случае, при зеркальном отражении частиц от обтекаемой поверхности, на огибающей траектории отраженных частиц возникает каустика с интегрируемой сингулярностью концентрации частиц [30]. Внутри слоя отраженных частиц в различных сечениях могут возникать разрывы концентрации частиц, соответствующие границам зон отраженных частиц, содержащим различное число “складок”, т.е. различное количество отраженных траекторий, приходящих в одну точку пространства. Количество “складок” увеличивается с приближением к оси симметрии.

Указанные особенности распределения концентрации частиц продемонстрированы на рис. 6 из работы [40] ($Stk = 1/\beta$ — число Стокса частиц), в которой авторы с помощью полного лагранжева подхода рассчитывали поля параметров дисперсной фазы при сверхзвуковом обтекании плоского цилиндра невязким запыленным газом. Параметры несущей фазы при этом рассчитывались на эйлеровой сетке.

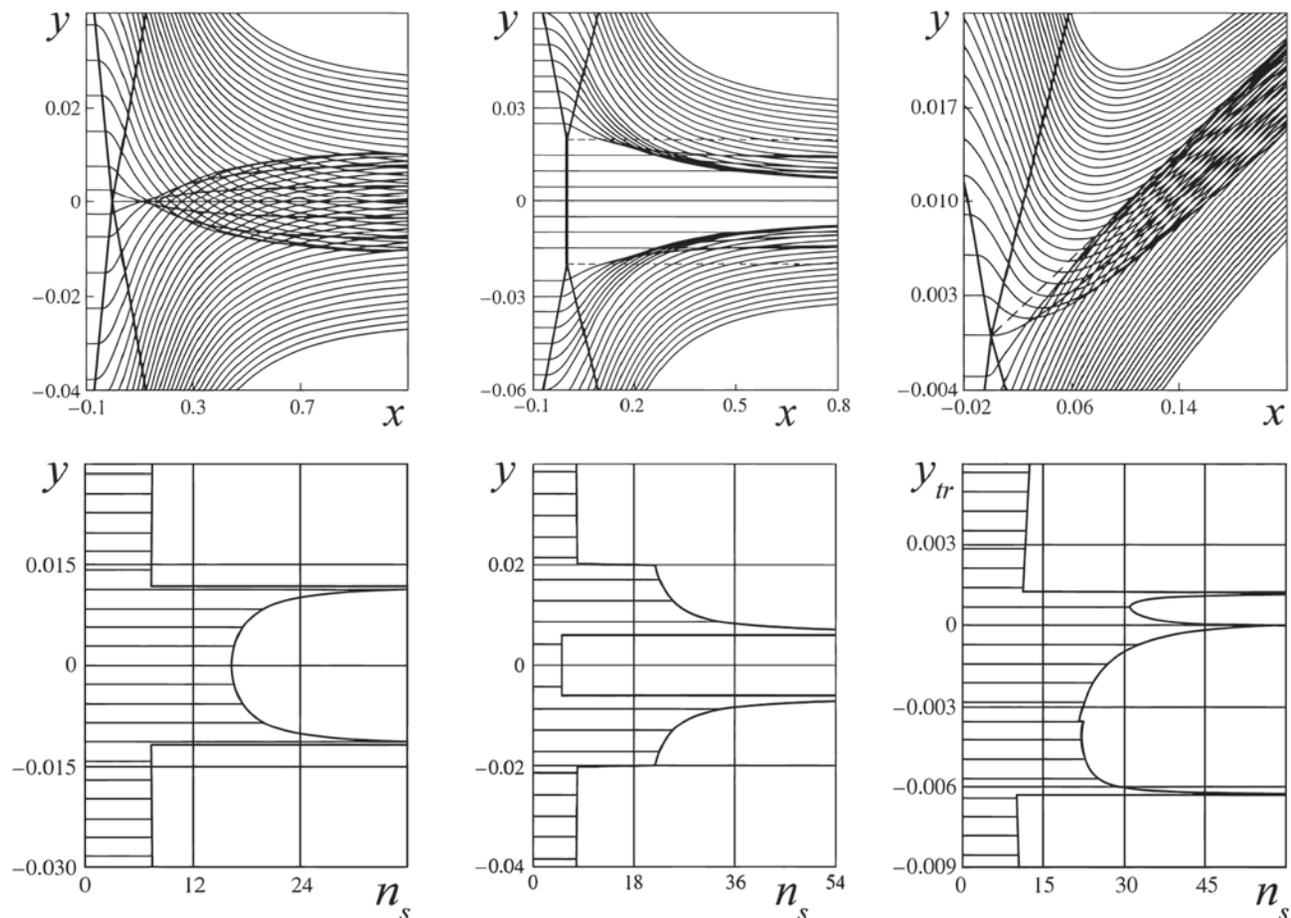


Рис. 7. Картины траекторий частиц (верхние рисунки) и соответствующие профили суммарной концентрации частиц (нижние рисунки), формирующиеся вдали за точкой взаимодействия волн; y_{tr} на последнем рисунке отсчитывается по нормали к контактной поверхности.

Более подробное исследование сверхзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел запыленным газом проведено в [64], где параметры несущей фазы в ударном слое рассчитывались численно в рамках полных уравнений Навье–Стокса, а параметры дисперсной фазы находились с помощью ПЛП. При этом авторы определили границы режима инерционного осаждения частиц в пространстве определяющих параметров, рассчитали влияние накопления частиц вблизи предельной траектории на тепловые потоки к телу, а также дали предельную оценку тепловых потоков в критической точке тела для режима инерционного осаждения частиц.

В работе [32] на основе вычисления вероятности столкновения падающих и отраженных частиц на оси симметрии было показано, что для частиц размером более 1 мкм и сферы радиуса 1 м столкновениями частиц можно пренебречь, когда объемная доля частиц в набегающем потоке не превосходит величин $\sim 10^{-5}$.

Фокусировка частиц за точкой пересечения ударных волн. Как отмечалось ранее, возникновения зон пересекающихся траекторий инерционных частиц следует ожидать в локальных областях сходящихся линий тока несущей фазы. Расчеты траекторий и поля концентрации частиц в окрестности точки взаимодействия косых стационарных ударных волн показывают [41], что как при регулярном, так и при маховском взаимодействии волн за точкой взаимодействия происходит аэродинамическая фокусировка инерционных частиц, формируется узкая область, в которой траектории частиц пересекаются, а концентрация частиц резко возрастает. Примеры расчета траекторий и профилей суммарной концентрации частиц, формирующихся в области, удаленной вниз по потоку, приведены на рис. 7. Число Маха волн равно пяти, для симметричного регулярного взаимодействия угол между волнами равен 120° . Концентрация частиц отнесена к ее значению в невозмущенном потоке, единица длины — длина релаксации частицы при стоксовском законе сопротивления, вычисленная для параметров невозмущенного потока.

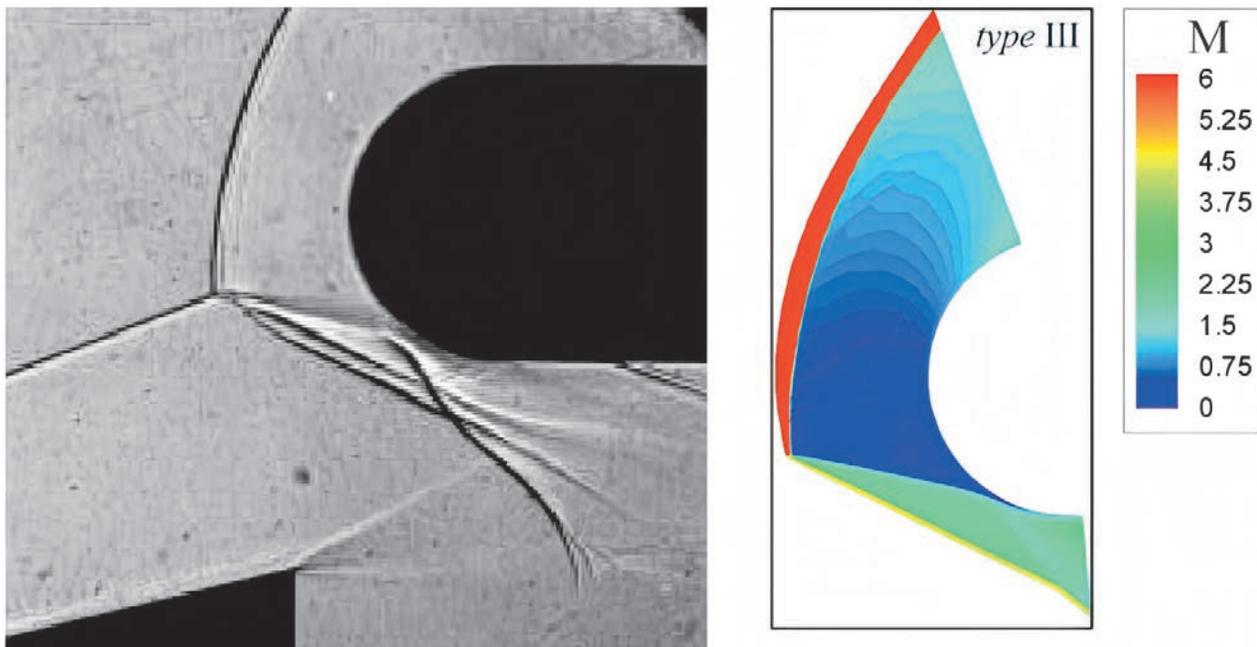


Рис. 8. Теневая фотография из работы [67] и расчеты распределения числа Маха в ударном слое из работы [66] для случая, когда на боковую поверхность цилиндра приходит контактный разрыв.

Как видно на рис. 7, за точкой взаимодействия волн формируется узкая зона (пучок) пересекающихся траекторий частиц с очень высокой концентрацией частиц на границах этой зоны. При симметричном столкновении ударных волн в каждую точку области пересекающихся траекторий приходят три различные траектории частиц, а при несимметричном число пересекающихся в одной точке траекторий может достигать семи, что делает практически невозможным использование других методов расчета поля концентрации частиц в таком течении.

Существует оптимальный режим фокусировки частиц, при котором конечный объем дисперсной фазы “схлопывается” в поверхность, создавая коллимированный пучок частиц [41]. Формирование таких пучков может быть использовано в технологиях газодисперсного напыления, но в некоторых случаях этот эффект может представлять серьезную опасность. Например, в работе [66] проведено численное исследование сверхзвукового обтекания плоского круглого цилиндра слабозапыленным потоком в условиях, когда на головную ударную волну падает косой скачок уплотнения (рис. 8, 9). Условия течения несущей фазы, соответствовали экспериментальной работе [67], число Маха набегающего потока равно шести.

Для расчета параметров несущей фазы в рамках уравнений Навье–Стокса применялся вариант TVD-схемы, построенной на основе метода конечного объема. Использовалась многоблочная сетка с сильным сгущением в областях больших градиентов параметров. Для расчета движения частиц использовался полный лагранжев подход, при этом параметры несущей фазы, рассчитанные в узлах эйлеровой сетки, и их производные по эйлеровым координатам находились с помощью билинейной интерполяции.

На основании параметрических численных расчетов выявлена возможность аэродинамической фокусировки и формирования пучков умеренно инерционных частиц в ударном слое цилиндра за точкой пересечения головной и приходящей ударных волн (см. рис. 9). Проведены расчеты максимальных тепловых потоков на поверхности цилиндра, обусловленных выпадающими на обтекаемую поверхность инерционными частицами. Показано, что даже при массовой концентрации частиц в набегающем потоке порядка одного процента происходит значительное (на порядок) увеличение локальных тепловых потоков на боковой поверхности цилиндра по сравнению с чистым газом.

В работе [68] на основании параметрических численных расчетов обтекания затупленного тела сверхзвуковым запыленным потоком обнаружена возможность аэродинамической фокусировки полидисперсных частиц в ударном слое. Данный эффект связан с различием длин скоростной релаксации частиц различных фракций, что может приводить к кумулятивному эффекту при торможении частиц в ударном

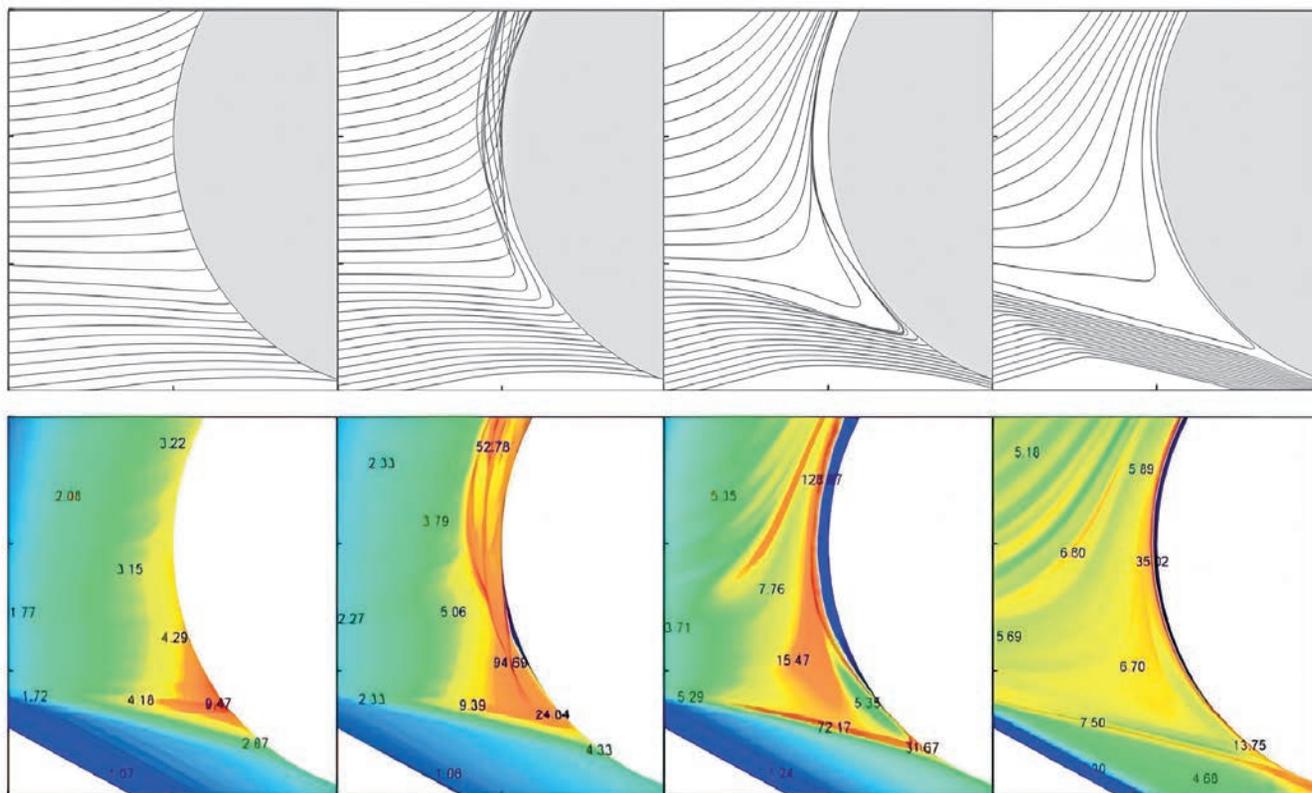


Рис. 9. Типичные картины траекторий частиц различной инерционности и поля безразмерной концентрации дисперсной фазы, соответствующие расчетам из работы [66] (отраженные частицы не учитывались).

слое в условиях, когда частицы различных размеров одновременно достигают лобовой поверхности тела и резко увеличивают локальные силовые и тепловые нагрузки обтекаемой поверхности.

Фокусировка частиц в сдвиговых потоках за счет действия подъемных сил. Еще один важный механизм фокусировки частиц связан с действием на частицы боковых (подъемных) сил. Их возникновение обусловлено двумя основными механизмами — неоднородностью потока, обтекающего частицу, и возможным вращением частиц. “Шнурование” частиц (т. е. формирование сгустков частиц) на оси дозвуковой струи, истекающей из узкого канала, отмечалось еще в экспериментах [69]. Этот эффект обычно связывают с действием подъемной силы Магнуса, обусловленной большой скоростью вращения, которую достаточно крупные инерционные частицы приобретают за счет столкновений со стенками канала, из которого истекает струя.

В большинстве сдвиговых течений дисперсных сред с мелкими частицами (течения в узких каналах, пограничных слоях, слоях смешения) угловая скорость вращения частиц, как правило, имеет порядок ротора скорости несущей фазы. В этих условиях подъемные силы, связанные с наличием поперечного градиента скорости потока, обтекающего частицу, значительно превосходят силу Магнуса, обусловленную вращением частицы. Даже при очень малых рассогласованиях скоростей фаз при течении суспензии с частицами той же плотности, что и плотность несущей фазы, в круглой трубе имеет место боковая миграция частиц к равновесному положению, отстоящему от оси трубы приблизительно на 0.6 ее радиуса [70].

Для объяснения этого явления следует одновременно учитывать целый ряд, на первый взгляд, малых эффектов: конечность отношения радиуса частицы к радиусу трубы, неоднородность и конечность числа Рейнольдса у потока, обтекающего частицу. В течениях, в которых можно считать, что частица локально обтекается неограниченным сдвиговым потоком при малых, но конечных числах Рейнольдса, для вычисления подъемной силы можно пользоваться выражением Сэфмана [71]:

$$\mathbf{F}_{Saf} = 6.46\sigma^2 \sqrt{\mu\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| (u - u_s) \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{j}. \quad (8.1)$$

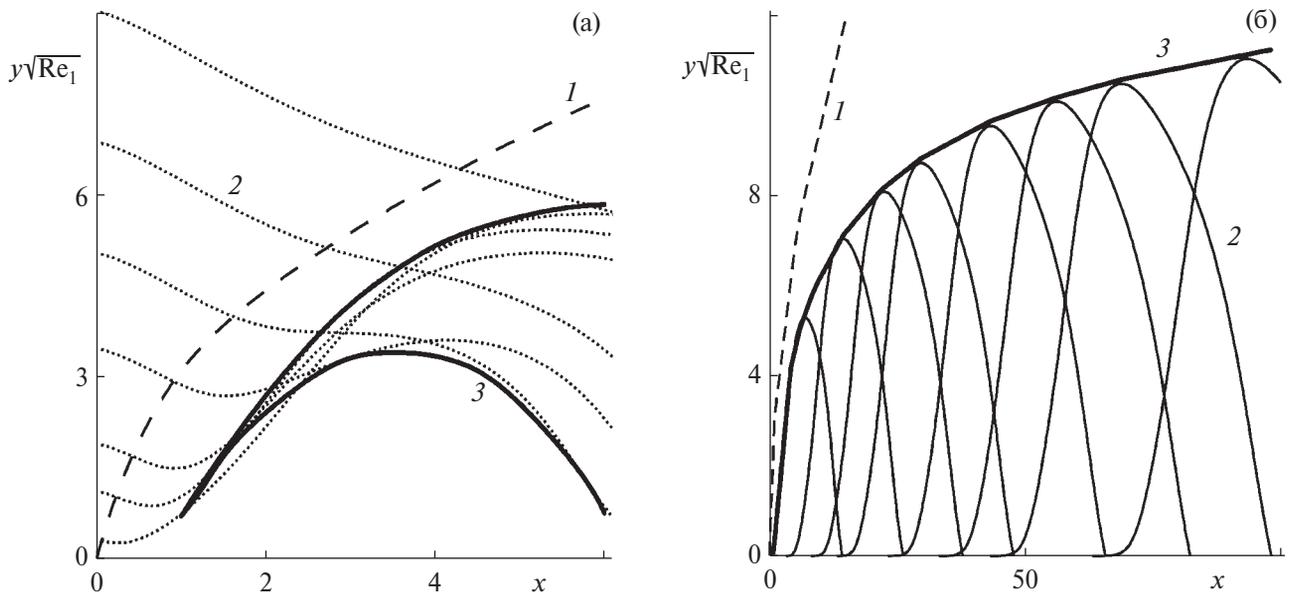


Рис. 10. Траектории частиц (линии 2) и каустики (жирные линии 3) в системе отсчета, связанной с движущейся ударной волной вдоль стенки [39] (граница пограничного слоя — линия 1); (а) — частицы поступают в пограничный слой из внешнего потока; (б) — частицы поступают с поверхности разрушающегося слоя дисперсной фазы, лежащего на стенке.

Здесь u и u_s — продольные скорости газа и частиц, \mathbf{j} — единичный вектор, направленный перпендикулярно потоку. Как видно из выражения (8.1), направление действия силы Сэфмана зависит от направления градиента поперечной скорости потока, обтекающего частицу в системе отсчета, связанной с частицей.

В работах [39] и [50] исследована структура пограничного слоя запыленного газа, формирующегося за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью вдоль плоской поверхности. В межфазном обмене импульсом, кроме силы аэродинамического сопротивления, учитывалась подъемная сила Сэфмана (8.1). Частицы могут поступать в пограничный слой как из внешнего потока (случай движения волны в запыленном газе вдоль твердой стенки на рис. 10а), так и с подстилающей поверхности (случай движения волны над эродирующим слоем дисперсного осадка на рис. 10б). В обоих случаях в пристеночной зоне за ударной волной возникают области многократного пересечения траекторий частиц и протяженные зоны повышенной концентрации дисперсной фазы.

На рис. 10а, 10б приведены типичные примеры расчетов “фонтанирующих” и “сальтирующих” траекторий частиц в движущейся системе отсчета, связанной с фронтом волны. Продольная координата отнесена к длине скоростной релаксации частиц, а поперечная — к характерной толщине пограничного слоя на этой длине. На каустиках (жирные линии 3) концентрация частиц неограниченно, но интегрируемым образом возрастает, а под нижней ветвью каустики на рис. 10а концентрация частиц равна нулю.

В работах [72, 73] в рамках модели взаимопроникающих континуумов при малой концентрации частиц решена задача о течении вязкого запыленного газа за ударной волной, движущейся с постоянной скоростью в узком плоском или осесимметричном микроканале. В межфазном обмене импульсом, кроме силы аэродинамического сопротивления частиц, также учтена подъемная сила Сэфмана.

Параметры несущей фазы за волной рассчитывались в приближении узкого канала в рамках параболизированных уравнений Навье–Стокса, а параметры частиц рассчитывались с помощью полного лагранжева подхода. На основании численных расчетов показано, что по мере увеличения инерционности частиц могут реализоваться три различных режима их движения:

- 1) частицы монотонно мигрируют по направлению к стенкам канала;
- 2) частицы движутся по направлению к оси симметрии канала (рис. 11а);
- 3) траектории частиц многократно пересекают ось симметрии канала с постепенно уменьшающейся амплитудой (рис. 11б).

Различным режимам соответствуют различные соотношения между силой аэродинамического сопротивления и подъемной силой. Малоинерционные частицы движутся к стенкам канала. Для более инер-

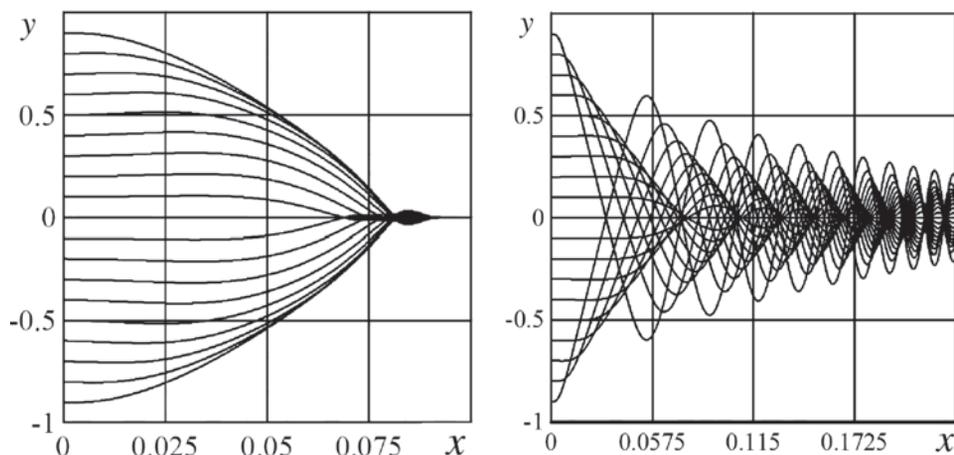


Рис. 11. Типичные траектории частиц различной инерционности в системе отсчета, связанной с ударной волной, движущейся в узком канале (поперечная координата отнесена к радиусу канала, продольная — к длине скоростной релаксации частиц).

ционных частиц эффект фокусировки под действием поперечных сил, возникающих из-за неоднородности потока на масштабе частицы, более выражен.

Для каналов диаметром порядка 10^{-3} м и слабых ударных волн эффект фокусировки имеет место для частиц с диаметром порядка 10^{-5} м.

Фокусировка частиц за счет силы Сэфмана происходит также при стационарном течении аэрозоля с несжимаемой вязкой несущей фазой в профилированном сужающемся микроканале. На рис. 12 приведен пример типичного поведения траекторий инерционных частиц в осесимметричном сужающемся канале, при этом канал можно спрофилировать таким образом, чтобы на выходе получить идеально коллимированный пучок частиц. Подобный эффект фокусировки и создания коллимированных пучков частиц используется в технологиях прямого нанесения вещества (direct-write) [74].

Еще один пример исследования фокусировки частиц под действием боковых сил сдвиговой природы содержится в работе [75], где рассмотрено горизонтальное ламинарное течение разреженной суспензии в вертикальной ячейке Хеле–Шоу. Течения такого типа представляют интерес для описания поведения частиц проппанта в трещинах гидроразрыва нефтяных пластов.

С использованием метода сращиваемых асимптотических разложений в работе [75] построена асимптотическая модель поперечной миграции оседающих частиц. В межфазном обмене импульсом учтены силы Стокса, Архимеда, присоединенных масс, а также инерционная боковая сила, возникающая за счет осаждения частиц и сдвигового характера течения жидкости.

В данном случае, в отличие от решения Сэфмана [71], частица движется перпендикулярно сдвигу скорости несущей фазы. Для такого течения коэффициент подъемной силы был вычислен в [76]. В работе [75] был найден характерный продольный масштаб длины, на котором частицы мигрируют поперек течения на расстояние порядка полуширины канала. Эволюция полей числовой концентрации и скорости среды частиц вдоль ячейки исследована с помощью полного лагранжева метода. В зависимости от параметра инерционности частиц обнаружены различные режимы поперечной миграции: с пересечением и без пересечения частицами средней линии канала.

В случае малоинерционных частиц в дисперсном континууме возникают две “складки”, граничащие с пристеночными слоями чистой жидкости. В случае очень инерционных частиц формируются множественные “складки” в дисперсном континууме, и траектории частиц многократно пересекают среднюю линию канала.

Найдено критическое значения параметра инерционности частиц, при котором происходит смена режимов миграции. На огибающих траекторий частиц (каустиках) числовая концентрация неограниченно возрастает, но данные особенности интегрируемы. Найденный в работе поперечный профиль концентрации, формирующийся вдали от входного сечения, может быть использован для замыкания макромасштабных моделей переноса частиц проппанта в трещинах гидроразрыва.

Каустики в стационарных вихревых течениях. Движение одиночных инерционных включений в стационарных модельных вихревых течениях, поля скорости которых заданы аналитическими формулами, исследовали во многих публикациях (см., например, работы [77–79] и обзор [80]). В [77] показано, что легкие включения (например, пузырьки газа в жидкости) под действием сил Архимеда и присоединенных масс собираются в центре вихрей. Более тяжелые частицы под действием центробежной силы, наоборот, стремятся покинуть центр вихря и собраться на его периферии [78].

В исследованиях [81, 82] поля концентрации дисперсной фазы в модельных вихревых течениях находятся в приближении малого рассогласования скоростей фаз из решения уравнения неразрывности среды частиц, записанного в эйлеровых переменных. Такая постановка задачи применима лишь в случае очень малоинерционных частиц, поскольку она априори исключает возможность пересечения траекторий частиц и формирования каустик. Тем не менее приведенные решения также подтверждают формирование узких зон накопления частиц на периферии вихревых областей. В плоских периодических системах вихрей инерционные включения, первоначально равномерно распределенные по пространству, могут собираться в очень узкие зоны вблизи сепаратрис, разделяющих вихри. При этом остальная область течения очищается от дисперсной фазы.

В случае более инерционных включений в вихревых полях типичным является пересечение траекторий частиц и формирование каустик, а также возникновение разрывов концентрации частиц, что значительно затрудняет анализ полей концентрации дисперсной фазы. Наиболее подробное исследование полей концентрации частиц в стационарной системе плоских вихрей проведено в работе [83] с использованием полного лагранжева подхода. Авторы рассмотрели формирование каустик в среде частиц в нескольких модельных двумерных полях скорости несущей фазы, соответствующих твердотельному вращению, точечному вихрю в идеальной жидкости и гауссовым распределениям завихренности и периодической системе локализованных вихрей. В результате расчетов были определены параметры инерционности частиц и области начала их траекторий, которые соответствуют условиям формирования зон наибольшей концентрации дисперсной фазы и появления каустик.

Пространственное вихревое течение газодисперсной среды рассматривалось в работе [84], где с помощью полного лагранжева подхода было исследовано поведение инерционной дисперсной примеси в осесимметричном стационарном течении вязкой несжимаемой среды, формирующемся при взаимодействии вертикальной полубесконечной вихревой нити с горизонтальной подстилающей поверхностью. Такие двухфазные течения представляют интерес в связи с моделированием атмосферных явлений типа торнадо, течений в вихревых сепараторах, а также оптимизацией работы воздухозаборных устройств вблизи подстилающей поверхности.

Параметры несущей фазы находились из численного решения уравнений Навье–Стокса в предположении автомодельного характера течения [85]. На периферии вихря скорости обеих фаз совпадают, а концентрация частиц постоянна. Были рассмотрены различные схемы межфазного силового взаимодействия, соответствующие различным отношениям плотностей фаз и учитывающие, помимо силы аэродинамического сопротивления, силы Архимеда, присоединенных масс и силу тяжести.

Расчеты показали, что в случае частиц, превосходящих по плотности несущую фазу вдали от оси вихря, существует разделяющая (“критическая”) высота начала трубки тока дисперсной фазы. Характерное поведение траекторий частиц, начинающихся на внешней границе расчетной области выше и ниже этой высоты в отсутствие силы тяжести, показано на рис. 13а и 13б соответственно.

Траектории из некоторого конечного по толщине слоя, стартующие выше критического уровня, приближаются к поверхности накопления частиц, имеющей форму осесимметричной “чашки”, внутри которой частиц нет. Тра-

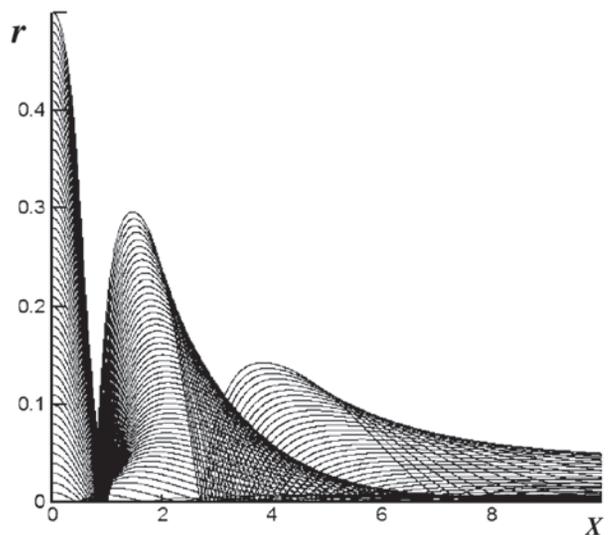


Рис. 12. Типичная картина траекторий частиц в цилиндрических координатах в осесимметричном сужающемся микроканале. Каустики и области накопления частиц формируются на огибающих траектории частиц.

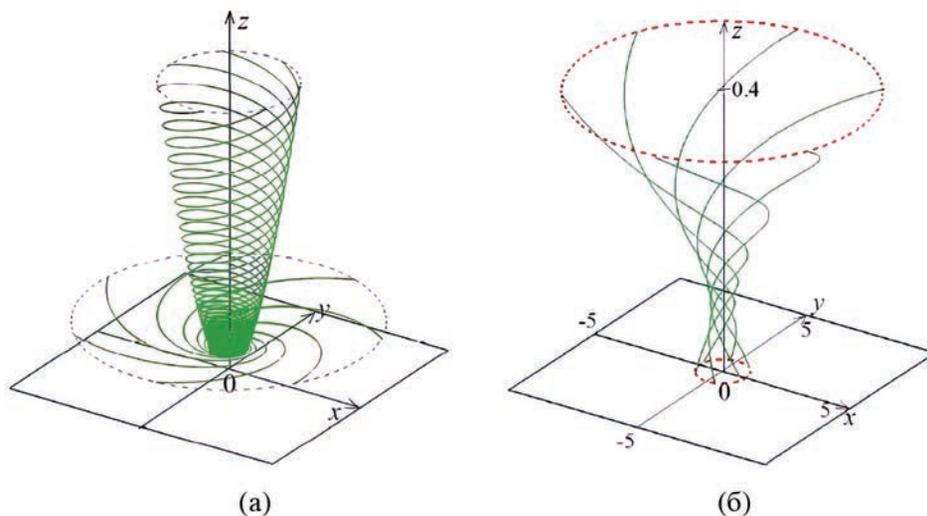


Рис. 13. Типичные восходящие (а) и нисходящие (б) траектории “тяжелых” частиц в течении типа торнадо [84].

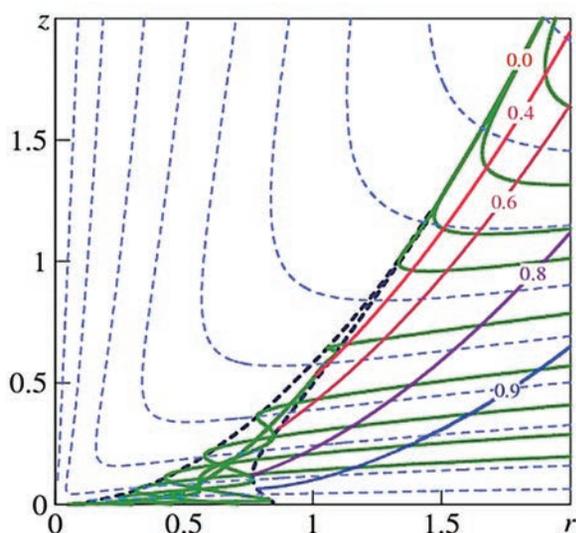


Рис. 14. Картина трубок тока несущей фазы (синие пунктирные линии), трубок тока среды “тяжелых” частиц (зеленые сплошные линии), каустика (зеленые пунктирные линии) и изолиний величины, обратной концентрации дисперсной фазы (разноцветные сплошные линии с числами), в плоскости r, z [84].

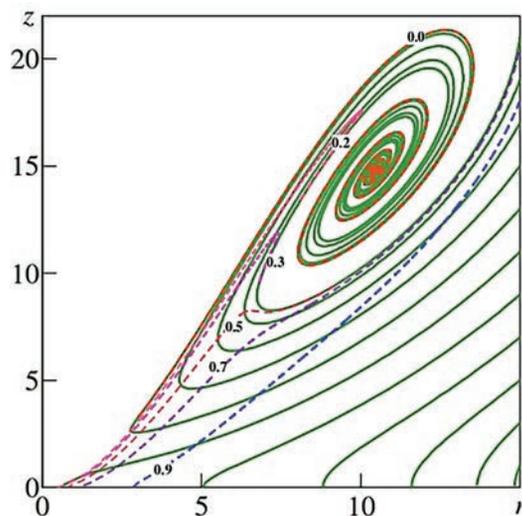


Рис. 15. Формирование спиралевидной верхней части “чашеобразной” зоны накопления частиц в течении типа торнадо [84]. Зеленые сплошные линии — трубки тока частиц, цветные пунктирные линии с числами — изолинии величины, обратной концентрации дисперсной фазы.

ектории, стартующие ниже критического уровня, стремятся к основанию вихря, при этом сечения соответствующих трубок тока частиц плоскостью (r, z) многократно пересекаются между собой (рис. 14).

Частицы, движущиеся по нисходящим траекториям, могут выпадать на подстилающую поверхность. По мере приближения к оси числовая плотность дисперсной фазы возрастает. Вблизи чашеобразной поверхности накопления частиц происходит разделение потока примеси. Трубки тока, состоящие из восходящих траекторий, формируют “сборку” в дисперсном континууме, на которой числовая концентрация неограниченно возрастает. Трубки тока частиц, состоящие из нисходящих траекторий, имеют несколько точек разворота и образуют “складки” в континууме частиц. На огибающих поверхностях (каустиках) числовая плотность частиц также неограниченно возрастает, при этом все особенности плотности интегрируемы.

При учете силы тяжести верхний край чашеобразной поверхности накопления частиц закручивается в спираль вокруг некоторой окружности, положение которой определяется нулевым балансом сил гидродинамической, гравитационной и инерционной природы, действующих на частицы в вихревом течении (рис. 15).

По-видимому, такая чашеобразная каустика из жидких капель и визуализирует торнадо над поверхностью моря. В случае легких частиц (например, пузырьков в жидкости) действие сил Архимеда приводит к аккумуляции включений в окрестности оси вихря. В случае частиц нейтральной плавучести трубки тока дисперсной фазы осциллируют с затухающей амплитудой, касаясь узкой расширяющейся кверху осесимметричной поверхности, внутри которой дисперсная фаза отсутствует.

Можно упомянуть еще одну публикацию [54], где авторы сравнивают три численных алгоритма для расчета полей концентрации дисперсных частиц в заданном вихревом поле, индуцируемом несколькими соосными тороидальными вихрями, лежащими на подстилающей поверхности, с которой частицы поступают в расчетную область. Целью этой работы был выбор экономичного алгоритма для расчета так называемого эффекта просадки вертолета при его взлете или посадке в условиях пустыни, когда вихри от винта вертолета поднимают облако песка, что приводит к резкому уменьшению подъемной силы. На основании параметрических расчетов распределения концентрации песка в приповерхностной зоне течения авторы приходят к выводу, что полный лагранжев метод имеет существенные преимущества и в будущем может быть использован для практических расчетов рассматриваемого эффекта.

Формирование зон аккумуляции и каустик в среде частиц под действием сил негидродинамической природы. Приведем два примера использования полного лагранжева подхода в задачах, где основными силами, действующими на частицы среды, являются силы негидродинамической природы.

В работе [23] исследовано распределение частиц космической пыли в гелиосфере. Движение заряженных частиц межзвездной среды происходит под действием электромагнитных сил, сил гравитационного притяжения Солнца и радиационного давления.

В качестве модели межпланетного магнитного поля используется модель Паркера, в которой области разной полярности магнитного поля разделены гелиосферным токовым слоем. Расчеты параметров среды частиц, включая концентрацию, проводятся с помощью полного лагранжева подхода.

Как показали расчеты, мелкие частицы (меньше 0.01 мкм) вовсе не проникают внутрь гелиосферы из-за воздействия на них межзвездного магнитного поля. Более крупные частицы проникают в область гелиосферного интерфейса (область взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой), при этом пространственное распределение межзвездной пыли внутри гелиосферы очень неоднородно.

В рамках использованной модели был обнаружен эффект скопления пыли в тонких слоях, расположенных на расстоянии 0.03–1 а.е. (для частиц 0.41 мкм) и 1–10 а.е. (для частиц 0.17 мкм) по обе стороны от токового слоя. Эти плотные слои в распределении пыли, совпадающие с каустиками на границах зон пересекающихся траекторий частиц, формируются, в основном, из-за фокусирующего воздействия солнечного магнитного поля.

Пример расчета траекторий движения частиц межзвездной пыли размером 0.41 мкм в срединной плоскости, перпендикулярной токовому слою, показан на рис. 16а. Трубки тока частиц имеют множественные пересечения, из-за чего формируются “складки”, на границах которых (каустиках) числовая плотность частиц принимает бесконечно большие значения. Структура взаимного расположения каустик очень сложна. Пример картины зон накопления частиц в срединной плоскости, перпендикулярной токовому слою, показан на рис. 16б. Обнаруженный эффект формирования плотных слоев космической пыли в гелиосфере представляет интерес при планировании будущих запусков космических аппаратов для исследования структуры гелиосферы.

В работе [86] в гидродинамическом приближении рассматривается центробежная сепарация инородных включений (частиц) во вращающемся сферическом объеме самогравитирующей жидкой или газообразной среды. Отдельно рассмотрен случай наличия твердого ядра у вращающегося объема. В данном случае существенное влияние на движение частиц оказывают переменная по радиусу сферы сила гравитации, а также центробежная сила и сила Кориолиса.

Для твердотельного распределения скоростей несущей фазы с использованием полного лагранжева подхода исследованы траектории и профили радиальной концентрации частиц. Рассмотрены случаи обтекания частиц в режиме сплошной среды и в свободномолекулярном режиме. Исследована сепарация “тяжелой” (перемещающейся к центру) и “легкой” (легче несущей фазы и перемещающейся к периферии) примесей. Найдены аналитические и численные решения, соответствующие стационарным сферически симметричным граничным условиям появления дисперсной фазы на границе (тяжелая примесь) и в центре

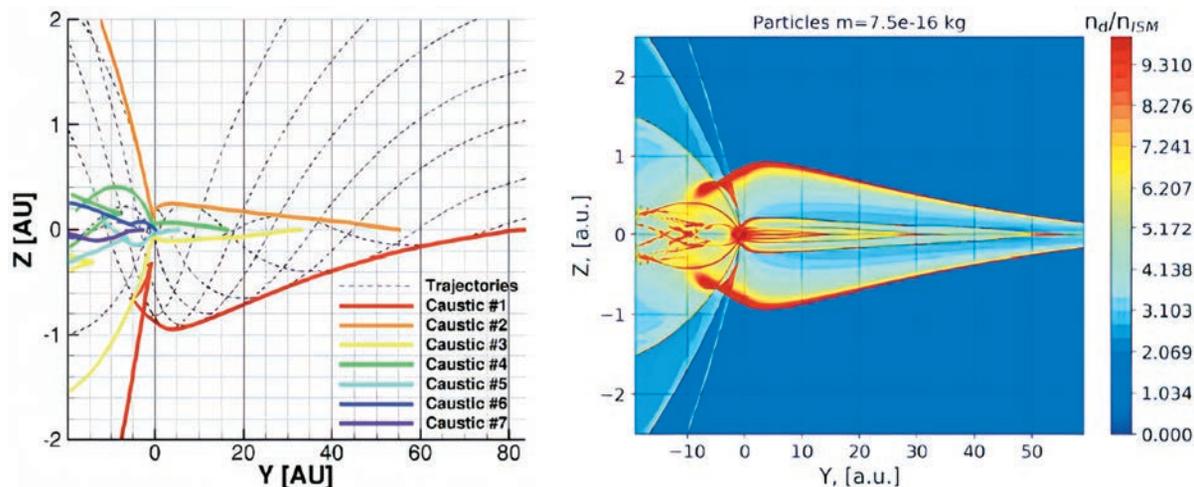


Рис. 16. Траектории (а) и каустики (б) космической пыли в срединной плоскости гелиосферы, перпендикулярной токовому слою магнитного поля. Солнце находится в начале координат, координаты измеряются в астрономических единицах.

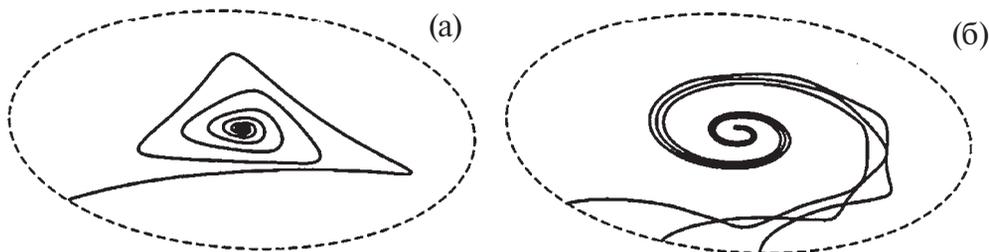


Рис. 17. Траектории частиц одинаковой инерционности в экваториальной плоскости при различных вкладах центростремительной силы; (а) — меньший вклад центростремительной силы, (б) — больший вклад центростремительной силы.

(легкая примесь) сферы. Показано, что наличие вращения может приводить к значительной угловой анизотропии радиальных распределений концентрации частиц, в частности к образованию кольцевых зон накопления частиц в экваториальной плоскости.

Концентрация “тяжелых частиц” увеличивается по мере приближения частиц к центру объема, при этом вблизи экваториальной плоскости концентрация намного больше, чем на оси симметрии. Для тяжелых инерционных частиц характерно формирование многочисленных “складок” в континууме, описывающем дисперсную фазу, при этом в экваториальной плоскости образуется дискообразная область аккумуляции частиц.

В общем случае картины распределения дисперсной фазы достаточно сложны, они зависят от трех безразмерных параметров, характеризующих инерционность частиц, вклад центростремительной силы и вклад силы гравитации. Рисунок 17 из работы [86] иллюстрирует формирование складок в экваториальной плоскости при различном вкладе центростремительной силы для частиц с одинаковыми инерционными свойствами. На рис. 18 показана типичная пространственная траектория инерционной частицы и сечения трубок тока дисперсной фазы вертикальной плоскостью. Огибающие трубок тока частиц (каустики) представляют собой вложенные друг в друга эллиптические поверхности, число которых возрастает с приближением к оси симметрии. Внутри области накопления частиц в экваториальной плоскости формируются концентрические окружности с неограниченно растущей числовой плотностью частиц. Для “легких” включений, перемещающихся к периферии объема, концентрация максимальна вблизи оси симметрии.

Предложенная модель может быть использована для объяснения механизмов возникновения неоднородностей плотности в жидких ядрах планет на стадии их формирования, для анализа фазового разделения в протопланетных облаках, поведения космического мусора на орбите Земли и для описания пылевых структур в атмосферных вихрях.

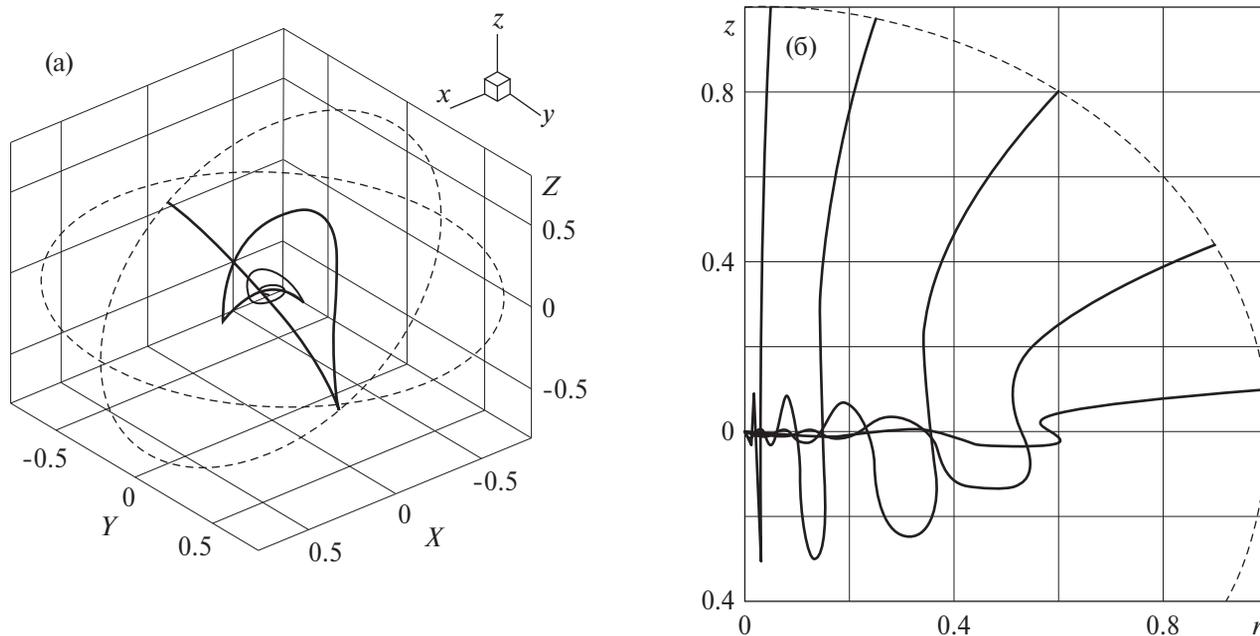


Рис. 18. Типичная пространственная траектория инерционной частицы (сплошная линия) (а) и сечения трубок тока частиц вертикальной плоскостью (б) из [86].

9. КОМБИНИРОВАННЫЙ БЕССЕТОЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВИХРЕВЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГАЗОДИСПЕРСНЫХ ТЕЧЕНИЙ

При использовании эйлерово-лагранжева описания газодисперсной среды значительную техническую трудность представляет пересчет параметров фаз с эйлеровой на лагранжеву сетку и обратно. Особенно остро стоит проблема оптимизации этой процедуры при расчете нестационарных течений, когда поле скоростей несущей фазы изменяется на каждом шаге по времени. Причем при использовании полного лагранжева подхода, кроме поля скорости несущей фазы, требуется с хорошей точностью вычислять в промежуточных точках и производные компонент скорости по эйлеровым координатам.

Для преодоления проблемы пересчета параметров фаз в ряде работ [87–89] был предложен полностью лагранжев (бессеточный) метод расчета параметров обеих фаз. Указанный метод основан на сочетании и модификации двух лагранжевых подходов: вихревого метода для решения уравнений Навье–Стокса/Эйлера для несущей фазы и полного лагранжева метода для расчета параметров дисперсной среды.

В предыдущие годы активно развивались бессеточные лагранжевы подходы к численному моделированию течений чистой жидкости. Это, в частности, методы гидродинамики сглаженных частиц (smoothed-particle hydrodynamics, SPH) [90–91], в которых используют стандартные переменные скорость–давление, а также различные варианты вихревых методов, использующие переменные скорость–завихренность и обобщающие методы дискретных вихрей на случай вязкой среды (см., например, книги [92–93], статьи [94–97] и цитированную в них литературу).

Вихревые методы зарекомендовали себя в качестве удобных инструментов для решения плоских и осесимметричных задач динамики вязкой жидкости, в которых завихренность локализована в пространстве, что позволяет экономично вычислять нестационарные поля скоростей жидкости.

В развиваемом в работах [87–89] бессеточном методе расчета параметров вязкой несжимаемой несущей фазы используют вариант вихревого метода, основанный на введении “диффузионной скорости завихренности” и дивергентной форме записи уравнения переноса завихренности в вязкой среде [97–98]. Для нахождения параметров инерционной дисперсной фазы используется полный лагранжев метод.

Оба этих подхода комбинируют на каждом временном шаге общего алгоритма: сначала на основе вихревого метода определяют поле скоростей несущей фазы и его производные, а затем при помощи полного лагранжева метода вычисляют поля скоростей и концентрации дисперсной примеси. В отличие от стан-

дартных лагранжево-эйлеровых методов, широко используемых в коммерческих пакетах программ, предлагаемый комбинированный лагранжев подход позволяет избежать громоздкой процедуры пересчета параметров несущей фазы с лагранжевой сетки на эйлерову.

Следует отметить, что в литературе появляются публикации (см., например, работы [98–99] и цитируемую в них литературу), посвященные развитию методов, сочетающих различные варианты вихревых методов для несущей фазы и лагранжев траекторный подход для моделирования примеси. Однако в этих работах рассчитывают лишь траектории частиц и отсутствует аккуратный расчет поля концентрации примеси, учитывающий пересечения траекторий частиц и существенную деформацию элементарного фазового объема дисперсной среды.

Лагранжев вихревой метод для несущей фазы [87–89]. В качестве основы математического описания двухфазной среды используется модель (7.1) с несжимаемой вязкой несущей фазой. В межфазном взаимодействии учитываются силы Стокса, присоединенных масс, Архимедова сила и сила тяжести. Если не оговорено противное, массовая концентрация примеси считается малой, и влиянием частиц на течение несущей фазы пренебрегается. Сделанные предположения позволяют решать задачу о расчете вихревого течения несущей фазы независимо от течения дисперсной среды.

Для расчета параметров несущей фазы используется вариант вихревого метода на основе введения диффузионной скорости завихренности [94, 95]. Рассматриваются нестационарные плоские или осесимметричные течения без закрутки в неограниченной области. В этом случае имеется единственная ненулевая компонента ротора скорости ω (называемая далее завихренностью), направленная перпендикулярно плоскости течения в плоском случае и по направлению изменения азимутального угла j в осесимметричном случае. В переменных скорость– ω уравнения Навье–Стокса переписываются в дивергентной форме в декартовых $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (I) либо цилиндрических координатах $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$ (II), где ось симметрии совпадает с осью Oz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(u_x + u_{dx})\omega] + \frac{\partial}{\partial y}[(u_y + u_{dy})\omega] = 0 \quad (I), \\ \frac{\partial}{\partial r}(u_r r) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z r) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}[(u_r + u_{dr})\omega] + \frac{\partial}{\partial z}[(u_z + u_{dz})\omega] = 0 \quad (II). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u_x, u_y, 0)$ (I) и $\mathbf{v} = (u_r, 0, u_z)$ (II) — конвективная скорость несущей фазы в декартовых и цилиндрических координатах; $\mathbf{v}_d = (u_{dx}, u_{dy}, 0)$ (I) и $\mathbf{v}_d = (u_{dr}, 0, u_{dz})$ (II) — соответствующая диффузионная скорость завихренности, которая в рассматриваемых случаях имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_d = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\nabla \omega}{\omega}, \quad \omega = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \nabla \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, 0 \right) \quad (I), \\ \mathbf{v}_d = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\nabla(r\omega)}{r\omega}, \quad \omega = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \nabla(r\omega) = \left(\frac{\partial(r\omega)}{\partial r}, 0, \frac{\partial(r\omega)}{\partial z} \right) \quad (II). \end{aligned} \quad (9.2)$$

В отличие от идеальной жидкости, в вязкой завихренность не является “вмороженной” в среду, а переносится со скоростью, равной сумме скорости среды и диффузионной скорости. Здесь и далее все уравнения записаны в безразмерном виде, для масштабирования использованы некоторые характерные значения скорости U , длины L , времени L/U , завихренности U/L и циркуляции UL . Число Рейнольдса имеет вид $\text{Re} = LU\rho/\mu$. Для конкретных примеров характерные масштабы длины и скорости будут пояснены далее.

Для конкретных начальных распределений завихренности поле завихренности в текущий момент рассчитываем из уравнения переноса завихренности (9.1). При найденной завихренности конвективная скорость \mathbf{v} в плоском течении может быть восстановлена из интеграла Био–Савара в форме

$$\mathbf{v}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \omega(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^2} dS. \quad (9.3)$$

Здесь \mathbf{R} — радиус-вектор рассматриваемой точки течения, Ω — область ненулевой завихренности, dS — дифференциал площади в этой области.

В случае осесимметричного течения без закрутки из формулы Био–Савара имеем следующие выражения для компонент скорости [100]:

$$u_r(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi r} \iint \omega(R, Z) f'(k) \frac{\partial k}{\partial z} (rR)^{1/2} dR dZ, \quad (9.4)$$

$$u_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi r} \iint \omega(R, Z) \left(\frac{f(k)}{2r} + f'(k) \frac{\partial k}{\partial r} \right) (rR)^{1/2} dR dZ,$$

$$f(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k), \quad k(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \left(\frac{4rR}{(r+R)^2 + (z-Z)^2} \right)^{1/2}.$$

Здесь радиус-векторы \mathbf{r} и \mathbf{R} рассматриваются на плоскости и имеют координаты (r, z) и (R, Z) . Интегрирование по Z ведется от минус до плюс бесконечности, а по R — от нуля до бесконечности, $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} d\theta, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \cos^2 \theta)^{1/2} d\theta.$$

При численном расчете параметров дисперсной фазы с помощью полного лагранжева подхода значения компонент скорости несущей фазы и их производных по эйлеровым координатам, входящие в выражения для силового взаимодействия фаз, должны быть известны в точках рассчитываемой траектории частиц.

Опишем дискретный вариант процедуры нахождения параметров несущей фазы в рамках бессеточного вихревого метода. Область начальной ненулевой завихренности Ω в плоскости (x, y) (в плоском случае) или (r, z) (в осесимметричном случае) разбивается на совокупность N малых лагранжевых элементов с площадями ΔS_i и координатами центров (x_i, y_i) и (r_i, z_i) соответственно $(i = 1, \dots, N)$.

В осесимметричном случае каждому такому элементу в пространстве можно поставить в соответствие тороидальное вихревое кольцо, характеризуемое радиусом r_i , координатой вдоль оси симметрии z_i , малым радиусом сечения $a_i \ll r_i$ и циркуляцией скорости γ_i , равной потоку завихренности через ΔS_i . Радиус сечения кольца удовлетворяет соотношению $\pi a_i^2 = \Delta S_i$.

В силу дивергентной формы уравнения переноса завихренности в (9.1) вихревые лагранжевы элементы, движущиеся с суммарной скоростью $\mathbf{v} + \mathbf{v}_d$, сохраняют поток завихренности, а значит, и свое значение циркуляции скорости. Поэтому циркуляции выбранных элементов γ_i постоянны, при этом $\sum \gamma_i = \Gamma$, где Γ — суммарная циркуляция области завихренности Ω . В лагранжевых переменных t и $\mathbf{r}_{i0} = \mathbf{r}_i(t=0)$ уравнения движения центров выбранных малых вихревых элементов можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i(t, \mathbf{r}_{i0})}{\partial t} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_i) + \mathbf{v}_d(t, \mathbf{r}_i). \quad (9.5)$$

Здесь \mathbf{r}_i — радиус вектор i -го лагранжева элемента в плоскости (x, y) (в плоском случае) или (r, z) (в осесимметричном случае). Значения компонент скорости среды в точках \mathbf{r}_i находятся из дискретного аналога интеграла Био–Савара. В плоском случае (9.3) имеем

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2\delta} \sum_{k=1}^N \gamma_k \mathbf{e}_z \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^2}. \quad (9.6)$$

В осесимметричном случае из выражения (9.4) получаем

$$u_r(\mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2\pi r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_j f'(k_{ij}) \frac{\partial k_{ij}}{\partial z_i} \sqrt{r_i r_j}, \quad k_{ij} = \left(\frac{4r_i r_j}{(r_i + r_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \right)^{1/2}, \quad (9.7)$$

$$u_z(\mathbf{r}_i) = \frac{\gamma_i}{4\pi r_i} \left(\ln \frac{8r_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2\pi r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_j \left(\frac{f(k_{ij})}{2r_i} + f'(k_{ij}) \frac{\partial k_{ij}}{\partial r_i} \right) \sqrt{r_i r_j}.$$

Здесь первое слагаемое в выражении $u_z(\mathbf{r}_i)$ отвечает за самоиндуцированную скорость i -го вихревого кольца [101].

Для нахождения завихренности и ее градиента по эйлеровым координатам, необходимых для вычисления диффузионной скорости \mathbf{v}_d (9.5) в произвольной точке \mathbf{r} , используется интерполяция, основанная на идеях метода SPH [90–92].

$$\omega(\mathbf{r}) = \int \omega(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\mathbf{R} \approx \int \omega(\mathbf{R}) \delta_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\mathbf{R} \approx \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i), \quad (9.8)$$

$$\nabla \omega(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^N \gamma_i \nabla \delta_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i). \quad (9.9)$$

Здесь δ — дельта-функция, δ_ε — приближение дельта-функции “шапочкой”, обеспечивающее слабую сходимость к дельта-функции при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для улучшения точности аппроксимации значения малого параметра ε_i выбирают различными для окрестностей различных вихревых элементов (с индексом i), поскольку они зависят от расстояния до центра ближайшего элемента. Вид “шапочки” может быть выбран достаточно произвольно при соблюдении необходимого баланса между громоздкостью вычислений и требуемой точностью. В различных расчетах использовались “шапочки” как первого порядка аппроксимации

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{\varepsilon_i} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}{\varepsilon_i}\right),$$

так и более высоких порядков, например

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{3\pi\varepsilon_i^2} \left(4 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}{\varepsilon_i^2}\right) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}{\varepsilon_i^2}\right).$$

В осесимметричном случае дополнительно также используются соотношения для малого переменного радиуса сечения вихревого элемента $a_i = a_i(t)$: $a_i^2 \omega_i = a_{i0}^2 \omega_{i0} = \text{const}_i$. Эти соотношения получены из условия постоянства потока завихренности через выбранное сечение лагранжева вихревого элемента, центр которого движется с суммарной скоростью $\mathbf{v} + \mathbf{v}_d$. В соответствии с рекомендациями [92] величина “носителя” шапочки ε_i берется пропорциональной расстоянию до ближайшего вихревого элемента $l_i(t)$: $\varepsilon_i(t) = Cl_i(t)$, где C — константа больше единицы.

Начальная дискретизация области ненулевой завихренности подразумевает выбор соответствующих значений \mathbf{r}_{i0} , γ_i (и a_{i0} в осесимметричном случае), которые должны обеспечивать удовлетворительную аппроксимацию поля начальной завихренности согласно формуле (9.8).

Описанный ранее вихревой метод сводит задачу решения уравнений Навье–Стокса для нахождения поля скорости несущей фазы к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9.5) для координат вихревых элементов. С учетом постоянства циркуляций скорости для указанных элементов γ_i из выражения (9.9) (при заданном выражении для “шапочки”) получают явные выражения для диффузионной скорости завихренности, а скорость несущей фазы на каждом шаге по времени восстанавливается с помощью вычисления конечных сумм типа (9.6)–(9.7). Технические детали реализации алгоритма можно найти в работах [87–89].

При использовании полного лагранжева подхода для дисперсной фазы для нахождения межфазной силы и ее производных необходимо вычислять значения скорости несущей фазы и ее производных по эйлеровым координатам в точках нахождения пробной частицы, траектория которой рассчитывается. Для этого используются формулы, аналогичные (9.6)–(9.7), и их производные по пространственным координатам.

Таким образом, вычисление всех параметров несущей и дисперсной фаз на выбранных траекториях частиц сводится, по существу, к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка (порядок зависит от выбранного числа вихревых элементов и рассчитываемых траекторий пробных частиц) и вычислению конечных алгебраических сумм. Указанная система решается с использованием метода Рунге–Кутты.

Отметим важное преимущество предлагаемого комбинированного полностью лагранжева метода по сравнению со стандартными лагранжево-эйлеровыми методами, в которых поле скорости несущей фазы

рассчитывается в фиксированных узлах эйлеровой сетки. В общем случае узлы сетки не совпадают с текущими положениями дисперсных частиц \mathbf{r}_s , поэтому в точках $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ необходимо интерполировать значения требуемых функций с эйлеровой сетки. Это приводит к дополнительной погрешности, порядок которой зависит от порядка интерполяционного многочлена.

Часто используется квадратичная интерполяция (см., например, работу [53]). В предложенном комбинированном бессеточном подходе значения скоростей в любой точке находятся без внесения дополнительной погрешности.

Следует отметить, что предложенный метод может применяться для описания динамики дисперсных смесей с несжимаемой вязкой и эффективно невязкой несущей фазой. В последнем случае диффузионная скорость завихренности полагается равной нулю, и метод расчета параметров несущей фазы сводится к известному классу вихревых методов.

10. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ЛАГРАНЖЕВА ПОДХОДА ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Вихрь Ламба–Озеена. В качестве тестового примера в работе [87] была исследована эволюция двухфазного вихря Ламба–Озеена, поле завихренности и азимутальной скорости которого выражается известными аналитическими формулами

$$\omega = \frac{\text{Re}}{4\pi t} \exp\left(-\text{Re} \frac{r^2}{4t}\right), \quad v_\varphi = \frac{1}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\text{Re} \frac{r^2}{4t}\right)\right].$$

Уравнения записаны в безразмерной форме. В качестве масштабов при обезразмеривании длины, скорости, времени и завихренности приняты соответственно следующие величины:

$$l_v = \sqrt{\frac{m\Gamma}{6\pi\sigma\mu}}, \quad U = \frac{\Gamma}{l_v}, \quad T = \frac{l_v^2}{\Gamma}, \quad \Omega = \frac{\Gamma}{l_v^2}.$$

Здесь Γ — циркуляция скорости; l_v — длина скоростной релаксации частицы. В межфазном обмене импульсом, кроме силы Стокса, учитываются силы присоединенных масс, Архимеда и сила тяжести (1.3). Задача зависит от трех безразмерных параметров: числа Рейнольдса $\text{Re} = \Gamma\rho/\mu$, числа Фруда $\text{Fr}^2 = U^2/gl_v$ и отношения плотностей фаз $\eta = \rho/\rho_{s0}$.

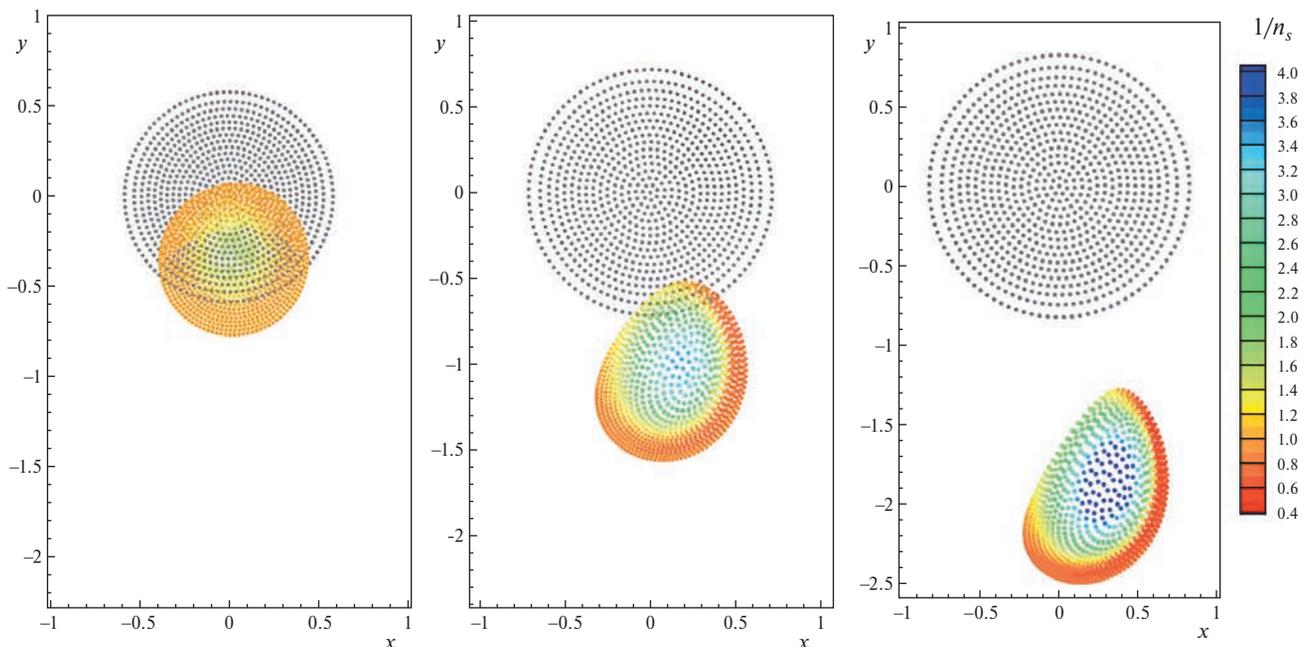


Рис. 19. Вихревые домены (серые точки) и пробные частицы дисперсной фазы (цветные точки, цвет соответствует локальной концентрации частиц) в вихре Ламба–Озеена для “тяжелых” стоксовских частиц в моменты $t = 2, 3, 4$ при $\text{Re} = 100$, $\text{Fr} = 1$, $\eta = 0$.

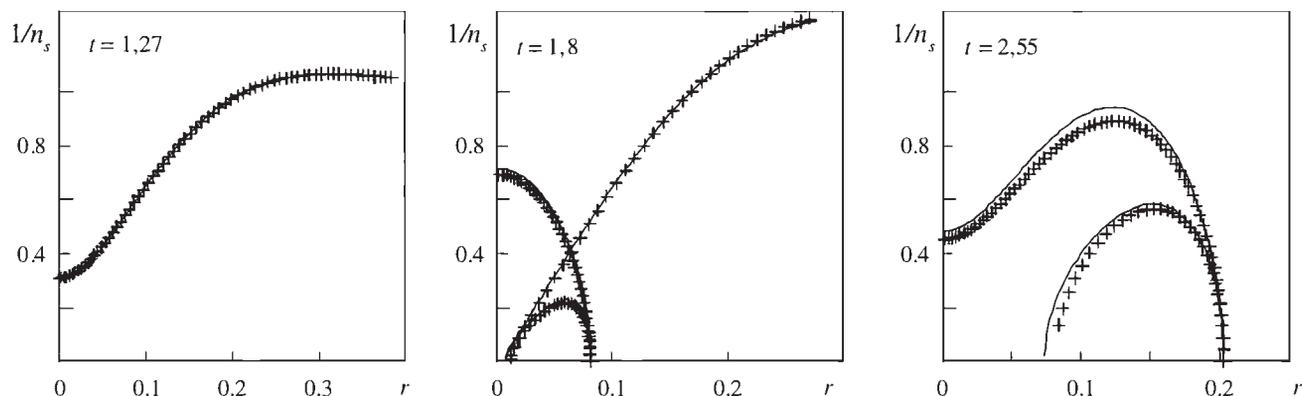


Рис. 20. Распределения концентрации “легких” частиц в начальные моменты времени при $Re = 100$, $Fr = \infty$, $\eta = 1.2$. Сплошные линии соответствуют использованию аналитических формул для параметров несущей фазы, крестики — расчету с помощью метода вихревых доменов.

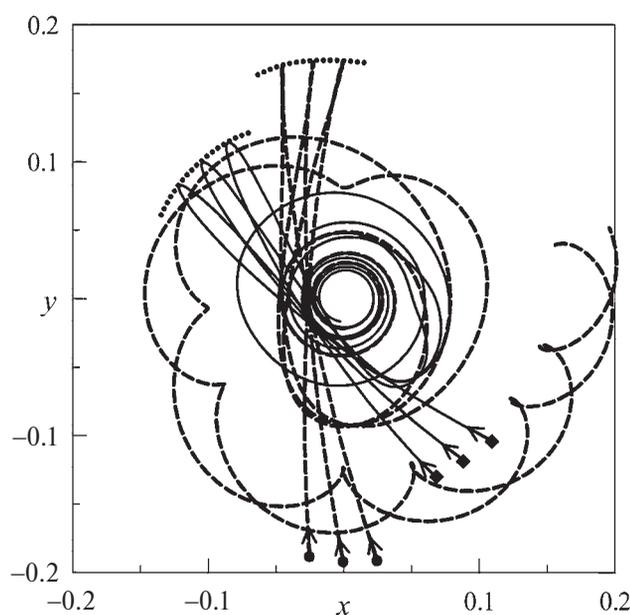


Рис. 21. Типичные траектории “легких” частиц в вихре Ламба–Озеена при $Re = 100$, $Fr = \infty$, $\eta = 1.2$. Сплошные линии — траектории до начала расширения облака, пунктир — после начала расширения облака. Огибающие показаны точечной линией, начала траекторий показаны стрелочками.

В типичном расчете участвует порядка 10^3 вихревых доменов и столько же пробных траекторий частиц дисперсной фазы. Расчет начинается от безразмерного момента $t = 1$, начальная безразмерная концентрация частиц однородна в конечном круге и равна единице. В расчетах было получено хорошее соответствие теоретических и численных значений скорости и производных скорости несущей фазы по времени и пространству, а также завихренности. Сравнились значения концентрации частиц, вычисленные на основе полного лагранжева подхода с использованием точных формул для параметров несущей фазы и расчетов методом вихревых доменов. Примеры расчетов концентрации и траекторий частиц приведены на рис. 19–21.

Видно, что за счет силы тяжести облако оседает и становится несимметричным, при этом за счет центробежной силы на границе облака формируется область накопления частиц. Поведение “легких частиц”, для которых важны силы Архимеда и присоединенных масс, в вихре оказывается гораздо более сложным. Уже на начальном этапе в облаке формируются зоны пересекающихся траекторий частиц и каустики (рис. 20).

При исследовании течений с легкими частицами, плотность материала которых меньше плотности несущей фазы, для получения приемлемой точности необходимо использовать более мелкую начальную дискретизацию поля завихренности несущей фазы. Это обусловлено тем, что для таких частиц в межфазном обмене импульсом, помимо силы Стокса, участвуют силы Архимеда и присоединенных масс, содержащие производные скорости несущей фазы.

С течением времени в вихре возникают многочисленные зоны пересечения траекторий легких частиц и зоны их аккумуляции. Сначала силы Архимеда и присоединенных масс увлекают частицы к центру вихря, а затем центробежная сила выбрасывает их на периферию, при этом облако частиц как бы выворачивается наизнанку. Траектории легких частиц ведут себя очень сложным образом (рис. 21). На границе огибающих траекторий частиц возникают концентрические области накопления дисперсной фазы, радиусы этих областей осциллируют со временем.

Импульсная двухфазная струя. Другой пример применения развитого комбинированного лагранжева метода — исследование эволюции двухфазного течения, индуцированного плоской импульсной струей,

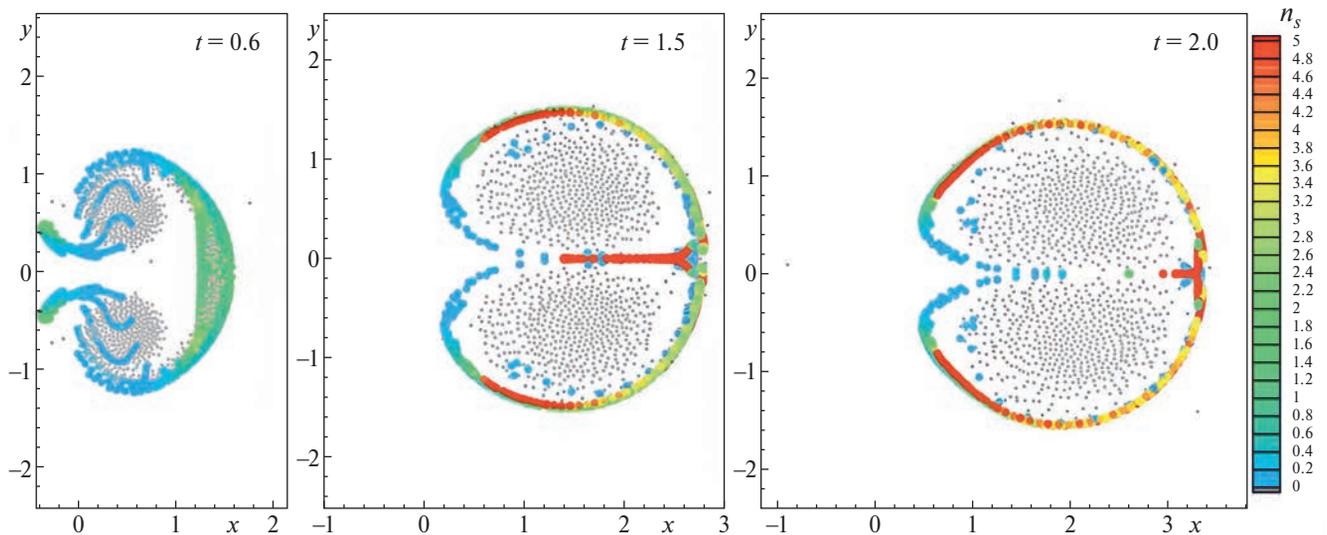


Рис. 22. Вихревые домены (серые точки) и пробные частицы дисперсной фазы (цветные точки, цвет соответствует местной концентрации частиц) в плоской импульсной струе; $Re = 100$, $\beta = 10$.

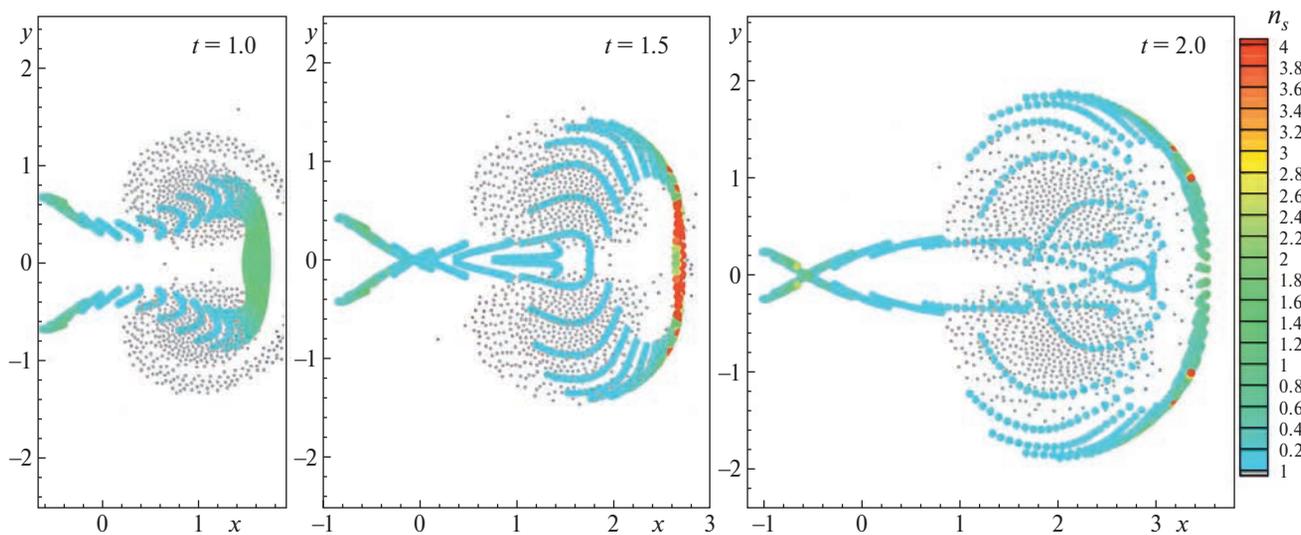


Рис. 23. То же, что на рис. 22. $Re = 100$, $\beta = 1$.

втекающей в покоящуюся чистую жидкость через источник фиксированной ширины в течение небольшого промежутка времени [87–88].

Завихренность поступающей струи соответствует профилю скорости, заданному решением Пуазейля. Рассмотрено два варианта начального распределения примеси: когда частицы поступают в течение вместе с потоком завихренной жидкости и когда втекающая струя разбивает облако частиц, первоначально покоящееся перед входом струи.

В качестве межфазной силы используется сила сопротивления Стокса. Для умеренных чисел Рейнольдса течение несущей фазы представляет собой движение вихревой пары вдоль оси симметрии с убывающей со временем скоростью. Исследование зависимости поля скорости от числа вихревых доменов показало, что приемлемая точность достигается при использовании уже 10^3 вихревых элементов. Результаты моделирования дисперсной фазы показали, что деформация лагранжева объема примеси может быть очень сложной и способна приводить к формированию множественных складок и разрывов сплошности в рассматриваемом течении.

Примеры численных расчетов распределения концентрации в струе в различные моменты времени показаны на рис. 22–23.

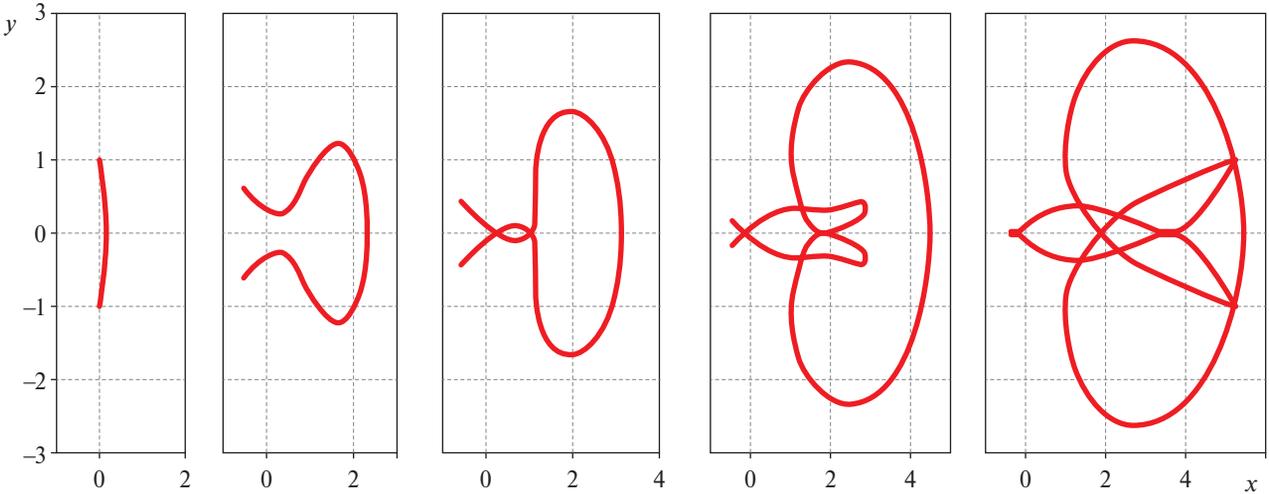


Рис. 24. Типичное поведение лагранжевой поверхности, состоящей из одних и тех же частиц, в плоской импульсной струе.

Рисунок 22 соответствует достаточно малоинерционным частицам, которые, как видно, накапливаются на границе вихревых областей. При обезразмеривании масштаб скорости — скорость на оси струи в момент впрыска, масштаб длины — ширина канала инжектора.

Параметр инерционности стоксовых частиц также посчитан для этих параметров. Безразмерная длительность впрыска $\Delta t = 0.2$. Для более инерционных частиц картина распределения концентрации примеси изменяется (рис. 23).

Инерционные частицы сначала собираются в головной части вихревой зоны, а с течением времени — в крестообразной области позади вихрей. Интересно поведение во времени лагранжевой поверхности, состоящей из одних и тех же инерционных частиц (рис. 24).

Как видно, лагранжева поверхность претерпевает многочисленные самопересечения, что свидетельствует о формировании множественных складок в среде частиц. Этот пример, как и картина траекторий частиц в вихре Ламба–Озеена на рис. 21, иллюстрируют невозможность использования стандартных эйлеровых моделей для описания подобных задач. В то же время предложенный комбинированный лагранжев подход успешно справляется с расчетом распределения концентрации в таких течениях.

Обнаруженные особенности в распределении концентрации частиц могут быть важны для анализа ряда многофазных течений с вихревыми парами в разнообразных инженерных приложениях, в том числе при моделировании процессов в двигателях внутреннего сгорания.

Перенос примеси вихревыми кольцами. Еще один пример использования комбинированного лагранжева подхода — расчет ряда двухфазных течений с вихревыми кольцами и системами вихревых колец [89, 102]. В работе [89] численно исследовалась эволюция облака инерционных частиц на фоне движения системы тонких соосных вихревых колец одинаковой циркуляции в невязкой жидкости. В частности, был рассмотрен так называемый режим чехарды, при котором вихревые кольца периодически изменяют свой радиус и проходят друг сквозь друга. На фоне такого течения конечное облако инерционных частиц, движущихся с отставанием от скорости несущей фазы, испытывает существенные деформации.

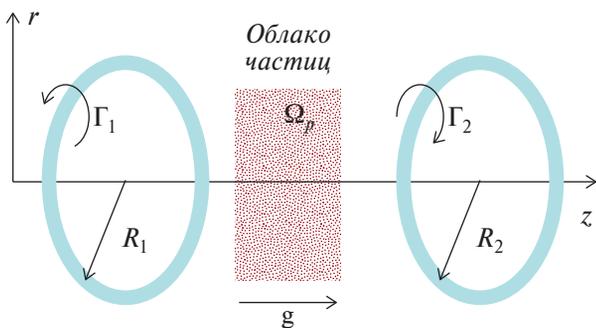


Рис. 25. Постановка задачи о перемешивании дисперсной примеси двумя сталкивающимися вихревыми кольцами в вязкой среде.

В случае течения с четырьмя вихревыми кольцами можно наблюдать фрагментацию выделенного объема частиц. На начальном этапе сначала наблюдается деформация объема примеси, затем происходит отделение и унос части объема двумя более быстрыми вихрями. Расчеты показывают, что с увеличением числа локализованных вихревых элементов (достаточно удаленных

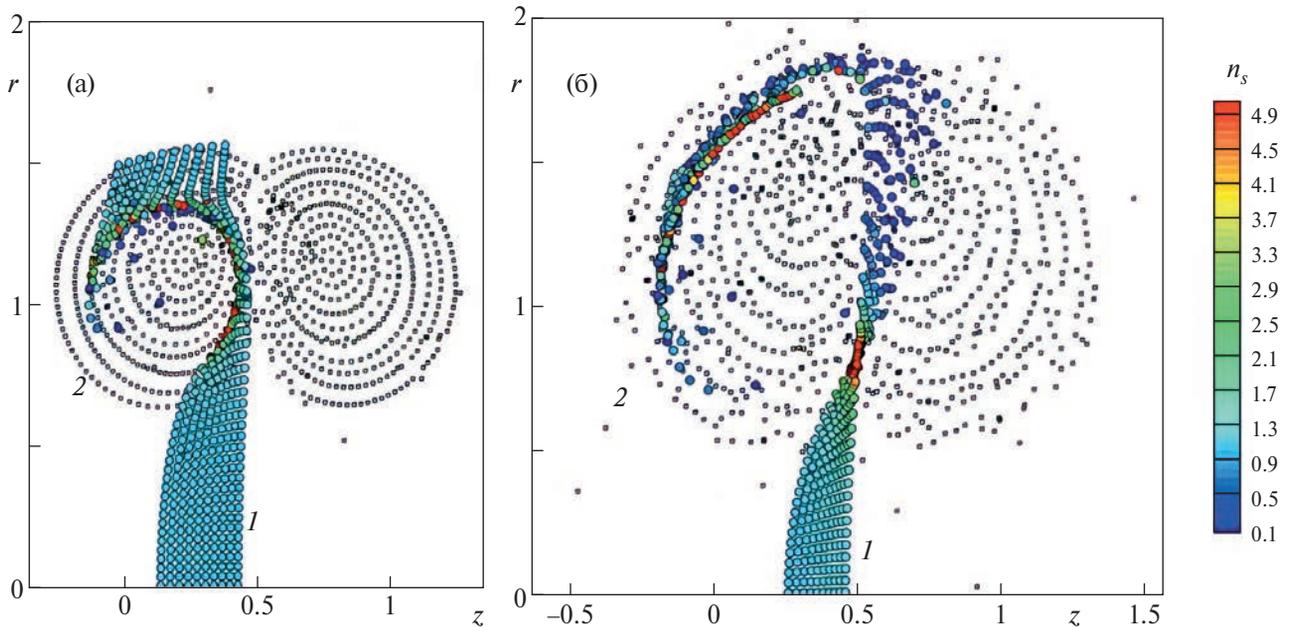


Рис. 26. Вихревые элементы (серые точки) и распределение безразмерной концентрации инерционных частиц (цветные точки) в задаче о столкновении двух вихревых колец. $Re = 100$, $\beta = 1$; безразмерное время $t = 1$ (а) и $t = 2$ (б).

друг от друга вихрей) степень фрагментации облака частиц возрастает. При этом во всех расчетах наблюдаются множественные пересечения траекторий частиц, которые позволяет успешно отслеживать предлагаемый комбинированный лагранжев метод.

В качестве следующего примера рассматривалось газодисперсное течение, индуцированное движением одиночного вихревого кольца конечной толщины, проходящее через конечное облако частиц в вязкой среде при умеренных числах Рейнольдса. Было показано, что с течением времени облако частиц вытягивается и “наматывается” на вихрь, при этом возникают локализованные зоны повышенной концентрации дисперсной фазы.

В работе [102] численно моделировалось поведение инерционной примеси в задаче о столкновении двух вязких вихревых колец при умеренных числах Рейнольдса, посчитанных по начальной циркуляции скорости в вихревом кольце. Общая постановка задачи показана на рис. 25.

Облако частиц конечной ширины с однородной концентрацией частиц в начальный момент покоится. На него с двух сторон набегают два, в общем случае различных, вихревых кольца в поле силы тяжести.

Пример расчета концентрации примеси с помощью комбинированного лагранжева метода для столкновения одинаковых вихревых колец показан на рис. 26.

Следует отметить, что во всех перечисленных примерах для достаточно инерционных частиц типично множественное пересечение лагранжевых поверхностей, состоящих из одних и тех же частиц, что делает практически невозможным использование стандартных эйлеровых или эйлерово-лагранжевых подходов для аккуратного расчета распределения концентрации дисперсной фазы в вихревых кольцах. При этом развитый комбинированный полностью лагранжев метод позволяет успешно справиться с указанными проблемами.

11. РАЗВИТИЕ КОМБИНИРОВАННОГО ЛАГРАНЖЕВА ПОДХОДА НА СЛУЧАЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Метод, аналогичный методу вязких вихревых доменов, может быть использован для расчета поля температуры несжимаемой несущей фазы в неизо термических газодисперсных течениях. В работах [103–104] такой метод назван методом тепловых доменов. Уравнение конвективной теплопроводности несущей фазы переписывается в безразмерном дивергентном виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}[T(\mathbf{V} + \mathbf{V}_{TD})] = 0, \quad \mathbf{V}_{TD} = -\frac{\gamma}{Pr Re} \frac{\nabla T}{T}.$$

Здесь V_{TD} — диффузионная скорость тепловых доменов, γ — показатель адиабаты. Далее исходная область течения разбивается на N малых лагранжевых элементов (тепловых доменов), центры которых движутся со скоростью $V_i + V_{TDi}$.

Для вычисления температуры и градиента температуры по эйлеровым координатам, входящего в определение диффузионной скорости, применяется процедура метода сглаженных частиц, аналогичная процедуре, использованной в методе вязких вихревых доменов (9.8)–(9.9). Вместо циркуляций скорости Γ_i в данном случае в формулах будут фигурировать сохраняющиеся в процессе движения интегралы от температуры по площади тепловых доменов Θ_i .

Таким образом, задача определения поля температур несущей фазы сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений движения центров тепловых доменов. Эти уравнения должны решаться совместно с системами уравнений комбинированного лагранжева подхода, описанного в предыдущем разделе. С помощью такого подхода в работах [103–104] исследовались поля концентрации и изменение размеров испаряющихся капель в неизотермической импульсной двухфазной струе с холодными каплями, впрыскиваемой в область горячего пара.

12. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНОГО ЛАГРАНЖЕВА ПОДХОДА В СЛУЧАЕ ПУЛЬСИРУЮЩИХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В силу большого круга разнообразных прикладных задач (от экологии и физики облаков до ядерных технологий и медицины) проблеме неоднородного распределения дисперсной примеси в турбулентных потоках посвящено много десятков статей (см., например, обзоры [105–108]). Особый интерес в минувшие годы вызывало выяснение физических механизмов формирования локальных зон предпочтительной аккумуляции и высоких градиентов концентрации частиц в турбулентных потоках. Далее упомянем лишь несколько наиболее важных публикаций, посвященных указанной тематике, а основное внимание уделим попыткам применения полного лагранжева подхода для моделирования поведения концентрации частиц в пульсирующих и турбулентных газодисперсных течениях.

При описании распределения дисперсной примеси на больших пространственных масштабах (перенос загрязнений в атмосфере и океане, течения промышленных аэрозолей в системах вентиляции и тепло-энергетических установках) широко применяют инженерные модели на базе уравнения конвективной диффузии с полуэмпирическими коэффициентами турбулентной диффузии частиц [109]. Неоднородность осредненных характеристик турбулентности при этом учитывается за счет переменности коэффициента турбулентной диффузии, а также так называемого эффекта турбофореза — осредненной миграции частиц из более турбулентных зон в менее турбулентные [110].

При детальном анализе структуры поля концентрации дисперсной примеси на мезомасштабах (масштабах когерентных структур в неоднородной турбулентности, колмогоровском масштабе в изотропной турбулентности) оказывается, что мгновенные картины распределения примеси крайне неоднородны даже при очень малой инерционности частиц. Этот факт подтверждается многочисленными расчетами и экспериментами [111].

В известной работе [112] на основе анализа поведения стоксовых частиц в модельном случайном поле скорости с гауссовой статистикой показано заметное увеличение осредненной скорости гравитационного осаждения частиц по сравнению с их осаждением в покоящейся среде. Этот эффект объясняется тем, что частицы покидают области высокой завихренности и собираются в зонах больших скоростей деформации потока.

К аналогичному выводу приходят и авторы исследования [113] на основе прямого численного моделирования динамики миллиона стоксовых частиц различной инерционности в трехмерном поле изотропной турбулентности.

Авторы работы [114] указывают на эффект центробежной силы, выбрасывающей частицы даже из малых турбулентных вихрей, что может играть ключевую роль в процессе роста дождевых капель.

В работе [115] на основании численных расчетов траекторий многих частиц в случайном поле скорости, моделирующем изотропную турбулентность, показано, что с течением времени траектории малоинерционных частиц, первоначально равномерно распределенных в объеме, стремятся в фазовом пространстве к аттрактору, проекция которого на физическое пространство имеет фрактальную размерность. Это озна-

часть, что малоинерционные частицы в однородной турбулентности с течением времени собираются в областях фрактальной структуры. Этот эффект имеет место для частиц, инерционность которых ниже некоторого порогового значения, за счет диссипативного характера их движения в вязкой среде. Более инерционные частицы при перемешивании продолжают оккупировать все физическое пространство.

Следует отметить, что перечисленные результаты относятся к случаю “тяжелых” частиц, плотность которых больше плотности несущей фазы. В случае “легких” частиц, например газовых пузырьков в жидкости, имеет место обратная ситуация: под действием архимедовой силы пузырьки стремятся собраться в центре вихрей.

В некоторых работах (например, [116]) отмечается возможность образования каустик на огибающих мгновенных линий тока инерционных частиц в однородной турбулентности. Типичная качественная картина распределения дисперсных частиц в поле однородной турбулентности показана на рис. 27.

Интересный механизм кластеризации инерционных частиц в однородном турбулентном поле несущей фазы, существенный на инерционных масштабах, превосходящих колмогоровский масштаб турбулентности, указан в работах [117–120]. В двух- и трехмерном однородных турбулентных полях скорости несущей фазы, в пределе больших чисел Рейнольдса, авторы обнаружили существование лагранжевых точек среды, имеющих нулевое ускорение, и выдвинули гипотезу о связи зон аккумуляции инерционных частиц с этими точками.

Гипотеза подтверждается авторами на основе численных расчетов поведения траекторий частиц. Было показано, что точки нулевого ускорения являются точками притяжения траекторий частиц. Такой механизм кластеризации проявляется у достаточно инерционных частиц, числа Стокса которых, посчитанные по колмогоровскому масштабу, превышают единицу.

Для менее инерционных частиц авторы подтвердили справедливость механизма аккумуляции, связанного с центрифугированием дисперсной фазы из областей высокой завихренности в зоны больших скоростей деформации. При этом в расчетах были получены зоны, практически свободные от частиц. Размер таких зон увеличивается с ростом инерционности частиц.

В связи с работами [117–120] в диссертации [121] с помощью полного лагранжева подхода была исследована модельная задача о нестационарной (пульсирующей) критической точке скорости в газопылевой среде. Точки нулевого ускорения должны двигаться с постоянными скоростями, поэтому можно перейти в инерциальную систему отсчета, связанную с такой точкой. В этой системе отсчета скорость несущей фазы в начале координат равняется нулю, а локальное поле скоростей несущей фазы в простейшем случае будет линейно зависеть от координат с коэффициентом (скоростью растекания), пульсирующим во времени. Взяв одну гармонику во временном законе изменения скорости растекания, локальное двумерное поле безразмерной скорости несущей фазы можно записать в виде

$$x = x \sin(\omega t), \quad y = -y \sin(\omega t).$$

В работе [121] рассматривалось поведение конечного облака дисперсной фазы радиуса L в окрестности такой точки, масштабы скорости и времени при этом были AL и A^{-1} , где A — максимальная размерная скорость растекания в критической точке. На основании параметрических расчетов поведения облака частиц с помощью полного лагранжева метода было показано, что в зависимости от значений параметра инерционности частиц (числа Стокса) и безразмерной частоты колебания ω с течением времени облако частиц либо стягиваются в точку в начале координат, либо неограниченно расширяется. При этом существует критическое значение инерционности частиц Stk_c , такое что менее инерционные частицы притя-

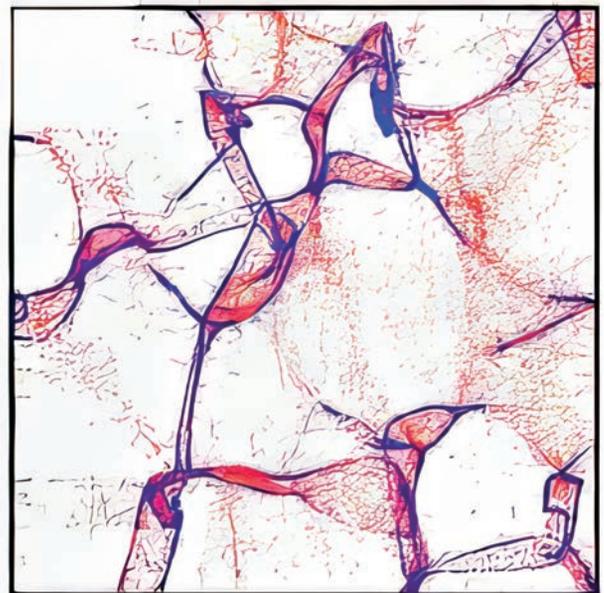


Рис. 27. Схематическая картина мгновенного распределения концентрации малоинерционных частиц и каустик [116] в поле однородной турбулентности. Каустики показаны синим цветом.

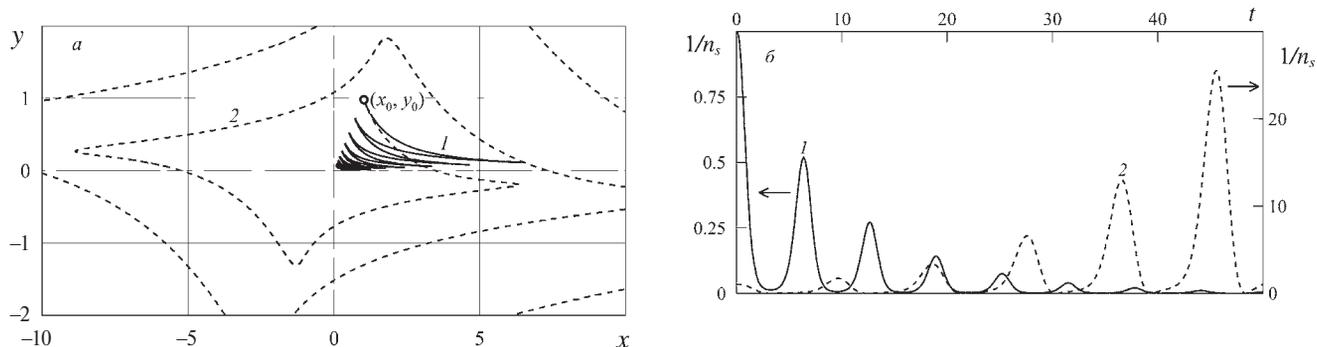


Рис. 28. Примеры поведения траекторий (а) и концентрации (б) частиц в окрестности пульсирующей особой точки в случае, когда точка является притягивающей (сплошные линии 1) или отталкивающей (пунктир 2).

гиваются к особой точке при любых частотах колебаний. В обоих случаях происходят гармонические колебания облака частиц с периодическим появлением неограниченных значений концентрации частиц (рис. 28), при этом внутри облака концентрация частиц остается однородной и зависит только от времени. При переходе через ноль якобиана $\det(J)$ облако частиц как бы выворачивается наизнанку.

Проведенные в исследовании [121] расчеты подтвердили, что точки нулевой скорости и нулевого ускорения в пульсирующих потоках могут играть ключевую роль как в процессе кластеризации частиц, так и в появлении зон, свободных от частиц.

Полный лагранжев метод был впервые применен для исследования аккумуляции частиц в турбулентном потоке в работе [122], где авторы рассматривали развитое турбулентное течение газозвеси в плоском канале при малой концентрации частиц.

Течение несущей фазы рассчитывалось на основе полных трехмерных нестационарных уравнений Навье—Стокса на эйлеровой сетке, а параметры среды частиц, включая концентрацию, рассчитывали с помощью полного лагранжева подхода. Авторы неявно предполагали, что при записи уравнений движения и неразрывности дисперсной фазы в лагранжевых координатах флуктуационными скоростями частиц можно пренебречь, т. е. считалось, что приближение “холодной среды” применимо для частиц и в турбулентном потоке.

На основании расчетов было показано, что частицы мигрируют по направлению к стенкам канала (аналог турбофореза), а обращение в ноль якобиана перехода от эйлеровых координат к лагранжевым позволяет аккуратно отслеживать появление локальных зон накопления частиц (каустик) в пристеночной области течения.

Далее в ряде работ [55, 123, 124] с помощью полного лагранжева подхода исследовалась кластеризация частиц в модельных двумерных случайных полях скорости, заданных отрезками рядов Фурье (всего порядка 200 гармоник) со случайными коэффициентами. Распределения коэффициентов выбирали из условия удовлетворения законам подобия однородных турбулентных течений. Такие поля являются удобным инструментом для моделирования однородной изотропной турбулентности.

В работах [125, 126] также использовался полный лагранжев подход для дисперсной фазы, но поле однородной турбулентности несущей фазы находили из прямого решения трехмерных уравнений Навье—Стокса псевдоспектральным методом. Распределением частиц по скоростям в малом локальном объеме в этих работах также пренебрегалось.

На основании массовых численных расчетов авторы установили, что частота появления сингулярностей якобиана перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым (а значит, и каустик) максимальна для частиц, длина скоростной релаксации которых приблизительно равна колмогоровскому масштабу ($Stk \sim 1$). При этом отрезки времени между появлением сингулярностей плотности на выбранной траектории частиц подчиняются пуассоновскому распределению.

Авторы установили также, что существует критическое значение числа Стокса частиц ($Stk_{cr} \sim 0.7$), выше которого происходит смена знака производной осредненного по времени значения якобиана перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым (как характеристики сжимаемости среды частиц).

При $Stk < Stk_{cr}$ осредненный по времени локальный объем среды частиц непрерывно уменьшается, т.е. со временем происходит кластеризация частиц. При $Stk > Stk_{cr}$ осредненный по времени локальный объем дисперсной фазы непрерывно расширяется. При этом по-прежнему могут формироваться как мгновенные зоны кластеризации, так и зоны разрежения частиц.

Было также подчеркнuto, что механизм кластеризации, связанный с выносом частиц из локальных областей высокой завихренности в зоны высоких скоростей деформации, справедлив лишь для достаточно малоинерционных частиц. Отмечалось, что процесс формирования зон аккумуляции достаточно инерционных частиц существенно зависит от предыстории их взаимодействия с более крупными вихрями, пересекаемыми траекторией частицы.

Чтобы описать и предысторию взаимодействия инерционных частиц с крупными вихрями на длинах скоростной релаксации, сравнимых с макромасштабом задачи, и отклик частиц на мелкомасштабные флуктуации скорости, в подробной и информативной работе [44] предпринята попытка построить синтетическую лагранжево-эйлерову модель для описания динамики и кластеризации частиц в турбулентном потоке. Основные предположения, положенные в основу этой модели, можно сформулировать следующим образом:

- 1) в осредненном (или фильтрованном) поле скорости несущей фазы, полученном из решения осредненных уравнений (уравнений Рейнольдса или LES) осредненная динамика среды, состоящей из достаточно инерционных частиц, может быть описана уравнениями “холодного” континуума;
- 2) при осредненном описании переноса массы среды частиц в лагранжевой форме учитывается дополнительный поток массы за счет мелкомасштабных (подсеточных) флуктуаций скорости частиц, вызванных мелкомасштабными флуктуациями скорости несущей фазы;
- 3) этот дополнительный поток массы описывается законом Фика с использованием одной из известных моделей для коэффициента турбулентной диффузии частиц;
- 4) при расчете числовой плотности частиц вдоль выбранной траектории пространственные производные плотности числа частиц (в диффузионном слагаемом) находятся путем проецирования решения, получаемого с помощью полного лагранжева подхода, на эйлерову сетку, что приводит к гибриднему лагранжево-эйлерову алгоритму.

Справедливость первого (основного) предположения, позволяющего использовать для осредненного описания динамики среды частиц модель “холодного” континуума, была подтверждена на модельном примере одномерного пульсационного движения газозвеси с наложенными мелкомасштабными флуктуациями скорости.

Итак, в работе [44] предполагается, что осредненная по пространству реализации (или каким-то другим способом) скорость среды частиц в турбулентном потоке есть $\langle \mathbf{V} \rangle_s(\mathbf{r}, t)$, соответствующие этой скорости осредненные траектории частиц носят детерминированный характер и являются достаточно гладкими (рис. 30).

Выбрав замкнутый лагранжев объем дисперсной фазы $\Omega_s(t)$ с границей $\Sigma_s(t)$, перемещающийся с осред-

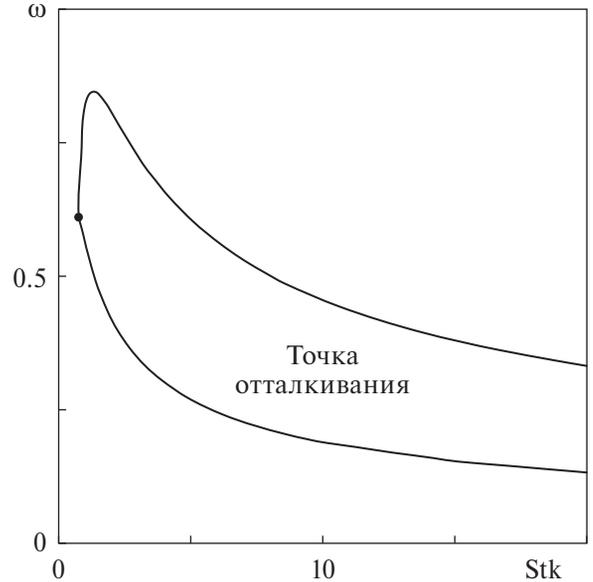


Рис. 29. Области притяжения (внутри кривой) и отталкивания (вне кривой) рассматриваемой особой точки в пространстве безразмерных определяющих параметров, точка на кривой соответствует критическому числу Stk_c .

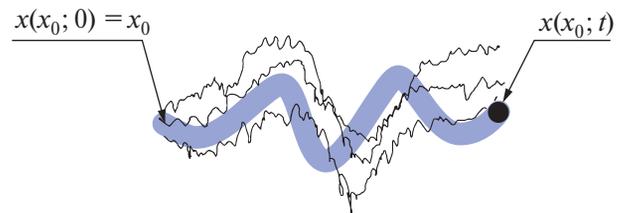


Рис. 30. Осредненная траектория среды частиц (жирная линия) и реальные траектории частиц (ломаные линии) в турбулентном потоке.

ненной скоростью $\langle \mathbf{V} \rangle_s(\mathbf{r}, t)$, и учитывая предположения 1)–3), можно записать закон сохранения массы среды частиц в интегральной и в дифференциальной лагранжевой форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} n_s d\Omega_s &= - \int_{\Sigma_s} \mathbf{j}_{sD} \mathbf{n} d\Sigma_s = \int_{\Sigma_s} (D_{sT} \nabla n_s) \mathbf{n} d\Sigma_s = \int_{\Omega_s} \operatorname{div}(D_{sT} \nabla n_s) d\Omega_s, \\ \frac{d}{dt} [n_s(\mathbf{r}_0, t) |\det J|] &= \operatorname{div}(D_{sT} \nabla n_s) |\det J|. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Здесь \mathbf{j}_{sD} — вектор диффузионного потока массы на границе лагранжева объема $\Omega_s(t)$ за счет подсеточных флуктуаций скорости среды частиц, D_s — коэффициент турбулентной диффузии частиц, $|\det(J)|$ — модуль якобиана перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым. Якобиан, как и ранее в выражении (2.1), взят по модулю для автоматического учета смены ориентации объема при пересечении осредненных траекторий среды частиц.

При стоксовском законе сопротивления частиц для осредненных траекторий и скорости среды частиц имеем уравнения, аналогичные (2.1):

$$\frac{\partial \langle \mathbf{r} \rangle(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} = \langle \mathbf{V} \rangle_s, \quad \frac{\partial \langle \mathbf{V} \rangle_s(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (\langle \mathbf{V} \rangle - \langle \mathbf{V} \rangle_s). \quad (12.2)$$

Чтобы осредненное уравнение импульса частиц (12.2) было справедливо, значения корреляций флуктуационных скоростей частиц $\langle v'_{si} v'_{sj} \rangle$ должны быть пренебрежимо малы по сравнению с величинами $\langle V_{si} \rangle \langle V_{sj} \rangle$. Если поле осредненной (фильтрованной) скорости несущей фазы $\langle \mathbf{V} \rangle(\mathbf{r}, t)$ известно, то можно применить полный лагранжев подход и вычислить вдоль выбранной осредненной траектории частиц скорость и компоненты якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным из уравнений, аналогичных (2.2).

Отличие от ранее рассмотренных случаев состоит в том, что для нахождения текущего значения концентрации частиц на выбранной траектории теперь следует решать дифференциальное уравнение (второе уравнение в выражении (12.1)). Чтобы замкнуть такую постановку задачи, необходимо выбрать модель для коэффициента турбулентной диффузии частиц D_{sT} и алгоритм вычисления на выбранной траектории частиц производных по пространственным координатам от n_s , входящих в правую часть второго уравнения (12.1). Например, если фильтрованное поле скоростей несущей фазы $\langle \mathbf{V} \rangle(\mathbf{r}, t)$ находится с помощью метода LES, то истинное поле скорости можно представить в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{V} \rangle(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}'(\mathbf{r}, t),$$

где \mathbf{v}' — скорость флуктуаций, определяемая масштабом пространственного фильтра Δ . В работе [44] для вычисления коэффициента турбулентной диффузии частиц была принята часто используемая модель

$$D_{sT} = \Lambda \left(\frac{2}{3} K \right)^{1/2} \Delta, \quad K = \frac{\langle \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle}{2}, \quad \Lambda = \frac{U_s}{U}.$$

Здесь Λ — функция числа Стокса частицы, равная отношению масштабов флуктуационных скоростей фаз U_s и U ; K — кинетическая энергия пульсаций скорости несущей фазы.

В случае очень инерционных частиц коэффициент турбулентной диффузии обнуляется, и модель среды частиц превращается в модель “холодного” континуума, движущегося на фоне осредненного поля скорости несущей фазы. В противоположном случае малоинерционных частиц модель переходит в уравнение конвективной диффузии пассивной примеси. В работе [44] при вычисления диффузионного члена в уравнении для концентрации частиц (12.1) значения концентрации на лагранжевой сетке пересчитывались на эйлерову сетку, используемую для вычисления параметров несущей фазы. Таким образом, алгоритм полного лагранжева подхода дополнялся процедурой лагранжево-эйлерова пересчета параметров дисперсной фазы.

Для проверки гипотезы о возможности пренебрегать тензором напряжений в среде инерционных частиц при ее осредненном описании и оценки работоспособности предложенного ранее алгоритма вычисления концентрации частиц был рассмотрен модельный пример одномерного пульсационного течения газозвеси в вертикальной трубе, где на стоячую волну наложены мелкомасштабные гармонические колебания скорости несущей фазы.

Подробные вычисления были проведены для случая, когда амплитуда и длина волны наложенных высокочастотных колебаний составляет 1/16 от соответствующих параметров основной стоячей волны. В этом случае суммарная безразмерная скорость несущей фазы описывается суммой двух колебаний:

$$U(x,t) = \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)\sin(\delta x) + \frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi t}{160}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{16}\right).$$

В качестве характерных масштабов при обезразмеривании взяты максимальная скорость основного колебания и линейный масштаб L , равный четверти начальной высоты слоя частиц.

Параметрические численные расчеты были проведены тремя различными способами. В первом случае напрямую рассчитывались траектории одного миллиона частиц, а концентрация вычислялась путем суммирования числа частиц, находящихся в малом объеме, линейный размер которого был принят за масштаб фильтрации высокочастотных пульсаций. Во втором случае параметры среды частиц, включая концентрацию, рассчитывались полным лагранжевым методом на фоне полного (“нефильтрованного”) поля скоростей несущей фазы. Наконец, в третьем случае траектории, скорость и концентрация частиц рассчитывались полным лагранжевым методом на фоне фильтрованного поля скорости, описываемого лишь первой (крупномасштабной) гармоникой.

Вычислялись также отношение продольной компоненты тензора пульсационных напряжений в среде частиц к потоку импульса, переносимого со среднemasсовой скоростью, и отношение диффузионного потока частиц к среднему потоку массы. Показано, что для достаточно инерционных частиц (число $Stk = 5$) вкладом пульсационных скоростей частиц в поток импульса вполне можно пренебречь, но при этом следует учитывать диффузионный вклад в перенос массы частиц. Типичный расчет траекторий и концентрации частиц на фоне “фильтрованного” поля скоростей несущей фазы показан на рис. 31.

Видно, что траектории среды частиц на фоне “фильтрованного” поля скоростей многократно пересекаются и возникают локальные зоны повышенной концентрации частиц. Сравнение расчетов концентрации тремя различными методами показало вполне удовлетворительную работоспособность предложенного выше алгоритма вычисления плотности среды частиц на фоне “фильтрованного” поля скорости. При этом оказалось, что при прямом вычислении концентрации частиц даже одного миллиона пробных частиц недостаточно для корректного отслеживания локальных пиков концентрации дисперсной фазы в рассматриваемом течении. В то же время предложенный обобщенный лагранжев подход обеспечивает аккуратное отслеживание сингулярностей концентрации частиц.

Наконец, разработанный обобщенный лагранжев подход был применен к расчету полей концентрации частиц различной инерционности в трехмерном поле однородной изотропной затухающей турбулентности. Поле скоростей несущей фазы находилось на основе численного решения полных уравнений Навье—Стокса псевдоспектральным методом в трехмерной кубической области с периодическими граничными условиями. Поля концентрации дисперсной фазы находили предложенным ранее лагранжевым методом с использованием как полного, так и “фильтрованных” полей скорости несущей фазы при различных пространственных размерах фильтра.

Параметрические численные расчеты показали применимость гипотезы о диффузионном характере перемешивания частиц на достаточно малых пространственных масштабах. Была также продемонстрирована удовлетворительная работоспособность предложенного модифицированного лагранжево-эйлерова алгоритма подсчета концентрации частиц для частиц умеренной инерционности. Примеры расчетов полей концентрации частиц в однородной изотропной турбулентности с помощью предложенного метода показаны на рис. 32.

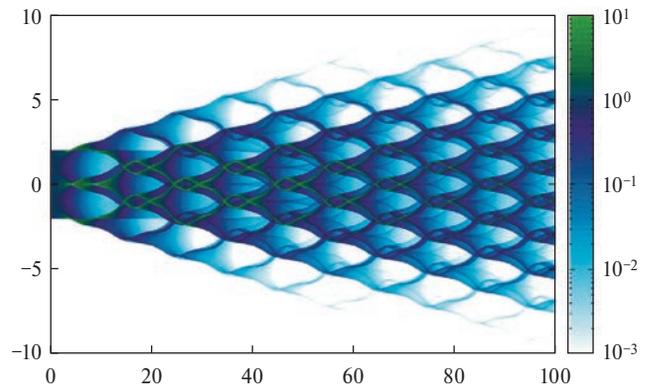


Рис. 31. Расчет траекторий и концентрации частиц в “фильтрованном” пульсирующем поле скоростей в вертикальной трубе; ось абсцисс — безразмерное время, ось ординат — безразмерная координата, цветом показана величина безразмерной концентрации частиц.

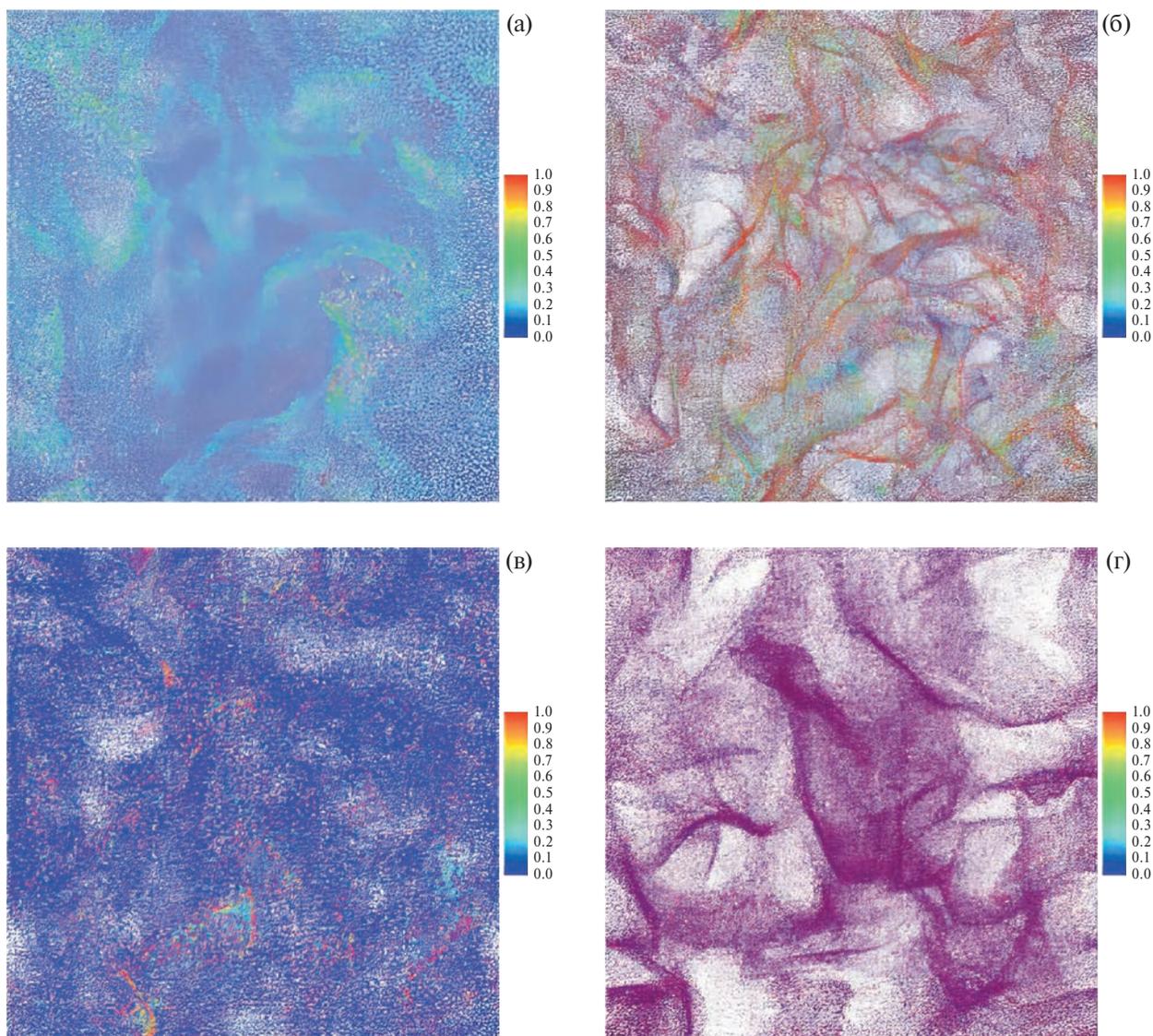


Рис. 32. Рассчитанные мгновенные поля безразмерной концентрации частиц (цвет соответствует величине $\log(n_s)$) различной инерционности в различные моменты безразмерного времени: (а) $Stk = 0.01, t = 1$; (б) $Stk = 0.1, t = 1$; (в) $Stk = 1, t = 1$; (г) $Stk = 1, t = 23$.

Видно, что с течением времени формируются зоны высокой концентрации и области, свободные от частиц. Сравнение расчетов концентрации с помощью развитого лагранжева метода с прямыми расчетами концентрации методом box counting показало возможность существенного (на порядки) сокращения числа отслеживаемых траекторий частиц. Следует отметить, что развитый лагранжев подход позволяет учитывать пересечения осредненных траекторий инерционных частиц, рассчитанных на фоне “фильтрованного” поля скоростей несущей фазы.

В работе [44] был также предложен так называемый полный лагранжев метод второго порядка, основанный на вычислении, наряду с компонентами якобиана преобразования от эйлеровых переменных к лагранжевым, компонент гессиана соответствующего преобразования. Такой подход позволяет вычислять среднее значение числа частиц в малом, но конечном лагранжевом объеме вблизи каустик, где якобиан стремится к нулю. В недавно опубликованной работе [127] этот метод был применен к расчету концентрации микрокапель в трехмерных вихревых образованиях, формирующихся при кашле больного COVID-19.

В завершение обзора отметим недавнюю публикацию [128], в которой авторы предложили эффективный алгоритм пересчета концентрации дисперсной примеси, рассчитанной на выбранных пересекающихся лагранжевых траекториях частиц, на фиксированную эйлерову сетку. Этот алгоритм объединяет идеи

полного лагранжева подхода и метода SPH: предлагается выбирать величину носителя “шапочки”, аппроксимирующей дельта-функцию в методе SPH, пропорциональной значению якобиана перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым. Такой подход позволил авторам резко сократить число рассчитываемых траекторий частиц при сохранении требуемой точности вычисления концентрации частиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный обзор развития полного лагранжева подхода и его модификаций для расчета концентрации инерционной дисперсной примеси в двухфазных потоках с пересекающимися траекториями среды частиц показывает уникальные возможности и преимущества данного подхода по сравнению с другими алгоритмами, не использующими явно уравнение неразрывности среды частиц. Полный лагранжев подход является удобным инструментом для численного исследования течений дисперсных сред с множественными пересечениями траекторий частиц, формированием каустик, локальных зон повышенной концентрации дисперсной фазы и областей, свободных от частиц. Он позволяет рассчитывать как стационарные, так и нестационарные течения практически без изменения алгоритма. Положение каустик, на которых якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, обращается в ноль, находится с контролируемой точностью.

Главные достоинства метода — его простота и экономичность, обусловленные возможностью построения полей концентрации частиц в сложных неоднородных и нестационарных потоках на основе расчета небольшого числа траекторий. Во многих публикациях подчеркивается значительная (на порядки) экономия времени вычисления концентрации частиц при использовании полного лагранжева подхода. Например, в работе [53] отмечено, что для повышения относительной точности расчета концентрации дисперсной фазы в зонах пересекающихся траекторий частиц на 0.1% с помощью стандартных лагранжевых подходов требуется расчет порядка 10^4 траекторий частиц, приходящихся на одну ячейку эйлеровой сетки, на которой рассчитаны параметры несущей фазы. В то же время при использовании полного лагранжева подхода достаточно расчета одной траектории частиц из каждого слоя “складки”.

Дальнейшее развитие полного лагранжева подхода, по-видимому, будет связано с учетом фазовых переходов, полидисперсности и влияния частиц на параметры несущей фазы, моделированием коллективного поведения активных (“самодвижущихся”) частиц, анализом механизмов кластеризации частиц в трехмерных вихревых потоках и когерентных структурах турбулентных двухфазных потоков, а также объединением идей полного лагранжева подхода с идеями метода SPH.

Следует подчеркнуть и естественные ограничения обсуждаемого подхода, обусловленные границами применимости континуального описания среды, состоящей из дискретных элементов, и предположением об отсутствии межчастичных столкновений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность кандидатам физико-математических наук И.В. Голубкиной, Н.А. Лебедевой и О.Д. Рыбдыловой, а также доктору А. Папоуцакису (A. Papoutsakis) (Великобритания) и профессору Ван Бо-И (Wang Bo-Yi) (КНР), принимавшим активное участие в совместных работах по развитию полного лагранжева подхода. Автор благодарен также профессорам Ю.М. Циркунову и В.В. Измоденову, любезно предоставившим иллюстрации из своих работ.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по открытому плану МГУ им. М.В. Ломоносова.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц. М.: Наука, 1973. 352 с.
2. *Shandarin S.F., Zel'dovich Y.B.* The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium // *Rev. Modern Phys.* 1989. V. 61:2. P. 185–222. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.61.185>.

3. *Lin C.C., Shu F.H.* On the spiral structure of disk Galaxies // *Astrophys. J.* 1964. V. 140. P. 646–655. <https://doi.org/10.1086/147955>.
4. *Amiranashvili Sh., Yu M.Y.* Lagrangian approach for bounded plasmas // *Phys. Scripta.* 2004. V. T. 113. P. 9–12. <https://doi.org/10.1238/Physica.Topical.113a00009>.
5. *Vicsek T., Zafeiris A.* Collective motion // *Phys. Rep.* 2012. V. 517. P. 71–140. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.03.004>.
6. *Moutari S., Herty M., Klein A., Oeser M., Steinauer B., Schleper V.* Modelling road traffic accidents using macroscopic second-order models of traffic flow // *IMA J. Appl. Mathem.* 2013. V. 78. P. 1087–1108. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxs012>.
7. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
8. *Крайко А.Н.* О поверхностях разрыва в среде, лишенной собственного давления // *Прикладная математика и механика.* 1979. Т. 43. № 3. С. 500–510.
9. *Nilsson B., Rozanova O.S., Shelkovich V.M.* Mass, momentum, and energy conservation laws in zero-pressure gas dynamics and δ -shocks: II. *Applicable Analysis.* 2011. V. 90(5). P. 831–842. <https://doi.org/10.1080/00036811.2010.524156>.
10. *Ovsyannikov L.V., Chupakhin A.P.* Regular partly invariant submodels of gas dynamics equations // *J. Nonlinear Math. Phys.* 1995. V. 2. № 3/4. P. 236–246. <https://doi.org/10.2991/jnmp.1995.2.3-4.3>.
11. *Carrier G.F.* Shock waves in dusty gas // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4(4). P. 376–382. <https://doi.org/10.1017/S0022112058000513>.
12. *Крайко А.Н., Стернин Л.Е.* К теории течений двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // *ПММ.* 1965. Т. 29. № 3. С. 418–429.
13. *Soo S.-L.* Fluid dynamics of multiphase systems. Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1967. 524 p.
14. *Marble F.E.* Dynamics of dusty gases // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1971. V. 2. № 1. P. 397–446. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.02.010170.002145>.
15. *Нугматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
16. *Crowe C.T., Schwarzkopf J.D., Sommerfeld M., Tsuji Y.* Multiphase flows with droplets and particles. CRS Press, 2011. 509 p.
17. *Осипцов А.Н.* Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // *Изв. АН СССР, МЖГ.* 1984. № 3. С. 46–52.
18. *Crow C.T.* Review — Numerical models for dilute gas-particle flows. *ASME J. Fluid Engineering.* 1982. V. 104. P. 297–303. <https://doi.org/10.1115/1.3241835>.
19. *Osipov A.N.* Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // *Astrophys. Space Sci.* 2000. V. 274. P. 377–386. <https://doi.org/10.1023/A:1026557603451>.
20. *Осипцов А.Н.* Развитие лагранжева подхода для моделирования течений дисперсных сред // *Проблемы современной механики (к 85-летию акад. Г.Г. Черного).* М.: МГУ, 2008. С. 390–407.
21. *Мясников В.П.* Статистическая модель механического поведения дисперсных систем // *Механика многокомпонентных сред в технологических процессах.* М.: Наука. 1978. С. 70–101.
22. *Киселев С.П., Фомин В.М.* Континуально-дискретная модель для смеси газ-твердые частицы при малой объемной концентрации частиц // *Прикл. мех. техн. физ.* 1986. № 2. С. 96–101.
23. *Mishchenko A.V., Godenko E.A., Izmodenov V.V.* Lagrangian fluid approach for the modelling of peculiarities of the interstellar dust distribution in the astrospheres/heliosphere // *Month. Not. Roy. Acad. Sci.* 2020. V. 491. P. 2808–2821. <https://doi.org/10.1093/mnras/stz3193>.
24. *Maxey M.R., Riley J.J.* Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Phys. Fluids.* 1983. V. 26. P. 883–891. <https://doi.org/10.1063/1.864230>.
25. *Клячко Л.С.* Уравнение движения пылевых частиц в пылеприемных устройствах // *Отопление и вентиляция.* 1934. № 4. С. 27–29.
26. *Carlson D.J., Hoglund, R.F.* Particle drag and heat transfer in rocket nozzles // *AIAA J.* 1964. V. 2. P. 1980–1984. <https://doi.org/10.2514/3.2714>.
27. *Wang B.Y., Osipov A.N., Egorova L.A., Sakharov V.I.* Supersonic dusty-gas flows with Knudsen effect in interphase momentum exchange // *Acta Mech. Sinica.* 2004. V. 20(5). P. 465–470. <https://doi.org/10.1007/BF02484268>.
28. *Ватажин А.Б., Грабовский В.И., Лихтер В.А., Шульгин В.И.* Электрогазодинамические течения. М.: Наука, 1983. 344 с.
29. *Ranz W.E., Marshall W.R.* Evaporation from drops // *Chem. Eng. Prog.* 1952. V. 48. P. 141–146.
30. *Чернышенко С.И.* Среднее расстояние между частицами в запыленном газе при наличии особенностей размозанной плотности частиц // *Вестник МГУ. Математика. Механика.* 1984. № 1. С. 69–70.

31. Киселев С.П., Фомин В.М. Исследование каустик в двухфазной среде газ — частицы // Ж. прикл. мех. техн. физ. 1987. № 4. С. 164–170.
32. Осипцов А.Н., Шаниро Е.Г. Обтекание сферы запыленным газом с большой сверхзвуковой скоростью // Исследования газодинамики и теплообмена сложных течений однородных и многофазных сред. М.: МГУ, 1990. С. 89–105.
33. Бабуха Г.А., Шрайбер А.А. Взаимодействие частиц полидисперсного материала в двухфазных потоках. Киев: Наукова думка, 1972. 176 с.
34. Sommerfeld M. Analysis of collision effects for turbulent gas-particle flow in a horizontal channel: Part I. Particle transport // Int. J. Multiphase Flow. 2003. V. 29. P. 675–699. [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(03\)00031-4](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(03)00031-4).
35. Вараксин А.Ю. Столкновения в потоках газа с твердыми частицами. М.: Физматлит, 2008. 312 с.
36. Осипцов А.Н. К учету конечности объема и гидродинамического взаимодействия частиц в газовзвесах // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 5. С. 1073–1076.
37. Volkov A.N., Tsirkunov Yu.M., Oesterle B. Numerical simulation of a supersonic gas-solid flow over a blunt body: The role of inter-particle collisions and two-way coupling effects // Int. J. Multiphase Flow, 2005. V. 31. P. 1244–1275. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2005.07.002>.
38. Осипцов А.Н. Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Изв. АН СССР, МЖГ. 1988. № 6. С. 179–181.
39. Ван Бо-И, Осипцов А.Н. Пристеночный пограничный слой за ударной волной в запыленном газе // Изв. АН СССР, МЖГ. 1999. № 4. С. 61–73.
40. Tsirkunov Y.M., Volkov A.N., Tarasova N.V. Full Lagrangian approach to the calculation of dilute dispersed-phase flows: advantages and application // Proc. Joint US ASME-European Fluids Engineering Division Summer Meeting (ASME FEDSM'02), July 14–18, 2002, Montreal, Canada, CD, p. 1–14. <https://doi.org/10.1115/FEDSM2002-31224>.
41. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Аэродинамическая фокусировка инерционных частиц в области пересечения ударных волн // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 86–100.
42. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
43. Осипцов А.Н. Нестационарный пограничный слой на затупленном теле в гиперзвуковом потоке неоднородно запыленного газа // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 107–120.
44. Papoutsakis A., Rybdylova O.D., Zaripov T.S., Danaila L., Osiptsov A.N., Sazhin S.S. Modelling of the evolution of a droplet cloud in a turbulent flow // Int. J. Multiphase Flow. 2018. V. 104. P. 233–257. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.02.014>.
45. Papoutsakis A., Gavaises M. A model for the investigation of the second-order structure of caustic formations in dispersed flows // J. Fluid Mech. 2020. V. 892. P. 1–21. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.176>.
46. Лебедева Н.А. Развитие лагранжева метода для исследования эволюции пассивного скаляра // Докл. РАН. 2011. Т. 438. № 1. С. 51–54.
47. Прохоров В.Е. Присоединенные возмущения вокруг вихревого кольца в стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 4. С. 59–68.
48. Li Y., Rybdylova O. Application of the generalised fully Lagrangian approach to simulating polydisperse gas-droplet flows // Int. J. Multiphase Flow. 2021. V. 142. P. 103716. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103716>.
49. Осипцов А.Н., Шаниро Е.Г. Двухфазный вдув с лобовой поверхности затупленного тела в гиперзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 60–66.
50. Wang B.Y., Xiong Y., Osiptsov A.N. Two-way coupling model for shock-induced laminar boundary layer flows of a dusty gas // Acta Mech. Sinica. 2005. V. 21. P. 551–563. <https://doi.org/10.1007/s10409-005-0068-0>.
51. Stafford C., Rybdylova O. The generalised fully Lagrangian approach for polydisperse sprays. Implementation of a two-way coupling model in OpenFOAM // Proc. ILASS–Europe 2023, 32nd Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, 4–7 September 2023, Napoli, Italy. P. 1–7.
52. Healy D.P., Young J.B. Calculation of inertial particle transport using the Osiptsov Lagrangian method // Proc. 4-th Int. Conf. on Multiphase Flow, USA, New Orleans, 2001. Paper DJ4.
53. Healy D.P., Young J.B. Full Lagrangian methods for calculating particle concentration fields in dilute gas-particle flows // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 2005. V. 461. № 2059. P. 2197–2225. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1413>.
54. Govindarajan B., Leishman J.G., Gumerov N.A. Particle-clustering algorithms for the prediction of brownout dust clouds // AIAA J. 2013. V. 51. № 5. P. 1080–1094. <https://doi.org/10.2514/1.J051907>.
55. Ijzermans H.A., Reeks M.W., Meneguz E., Picciotto M., Soldati A. Measuring segregation of inertial particles in turbulence by a full Lagrangian approach // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. P. 015302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.015302>.
56. Гильфанов А.К., Зарипов Ш.Х. Математические модели аспирации аэрозолей в тонкостенные пробоотборники. Казань: Казан. ун-т. 2012. 120 с.

57. *Gilfanov A.K., Zaripov T.S., Sazhin S.S., Rybdylova O.* The analysis of particle number densities in dilute gas-particle flows: the Eulerian and Lagrangian methods // *Lobachevskii J. Mathem.* 2022. V. 43. P. 2938–2947. <https://doi.org/10.1134/S1995080222130145>.
58. *Zaripov T.S., Rybdylova O.D., Sazhin S.S.* A model for heating and evaporation of a droplet cloud and its implementation into ANSYS Fluent // *Intern. Commun. Heat Mass Transfer.* 2018. V. 97. P. 85–91. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2018.06.007>.
59. *Коробейников В.П., Марков В.В., Меньшов И.С.* Задача о сильном взрыве в запыленном газе // *Тр. МИАН СССР.* 1983. Т. 163. С. 104–107.
60. *Igra O., Elpirin T., Ben-Dor G.* Blast waves in dusty gas // *Proc. Royal Soc. A.* 1987. V. 414. P. 197–219. <https://doi.org/10.1098/rspa.1987.0140>.
61. *Zaripov S.K., Vanyunina M.V., Osiptsov A.N., Skvortsov E.V.* Calculation of concentration of aerosol particles around a slot sampler // *Atmos. Environ.* 2007. V. 41(23). P. 4773–4780. <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2007.03.009>.
62. *Лебедева Н.А., Осипцов А.Н.* Течения вблизи критических точек при несимметричном столкновении дисперсных потоков // *Изв. РАН. МЖГ.* 2007. № 5. С. 75–87.
63. *Осипцов А.Н., Теверовский М.А.* Гиперзвуковое обтекание сверхзвукового двухфазного источника // *Изв. РАН. МЖГ.* 1998. № 3. С. 135–147.
64. *Егорова Л.А., Осипцов А.Н., Сахаров В.И.* О границах режима инерционного осаждения частиц и теплообмене при сверхзвуковом обтекании тел вязким запыленным газом // *Изв. РАН. МЖГ.* 2001. № 6. С. 111–124.
65. *Hayes W.D., Probstein R. F.* Hypersonic Flow Theory. New York: Acad. Press, 1959. 624 p.
66. *Голубкина И.В., Осипцов А.Н., Сахаров В.И.* Обтекание плоского цилиндра сверхзвуковым слабозапыленным потоком при взаимодействии головной ударной волны с косым скачком уплотнения // *Изв. РАН. МЖГ.* 2011. № 1. С. 70–84.
67. *Borovoy V.Ya., Chinilov A.Yu., Gusev V.N., Struminskaya I.V., Détery J., Chanetz B.* Interference between a cylindrical bow shock and a plane oblique shock // *AIAA J.* 1997. V. 35. № 11. P. 1721–1728. <https://doi.org/10.2514/2.41>.
68. *Егорова Л.А., Осипцов А.Н., Сахаров В.И.* Аэродинамическая фокусировка полидисперсных частиц при обтекании тел запыленным газом // *Доклады РАН.* 2004. Т. 395. № 6. С. 767–771.
69. *Гиршович Т.А., Картушинский А.И., Лаатс М.К.* Экспериментальное исследование турбулентной струи, несущей тяжелые примеси // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1981. № 5. С. 26–31.
70. *Segre G., Silberberg A.* Radial particle displacements in Poiseuille flow of suspensions // *Nature.* 1961. V. 189. P. 209–210. <https://doi.org/10.1038/189209a0>.
71. *Saffman P.G.* The lift on a small sphere in a slow shear flow // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 22(2). P. 385–400. <https://doi.org/10.1017/S0022112065000824>. Corrigendum: *J. Fluid Mech.* 1968. V. 31. P. 638.
72. *Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д.* Эффект фокусировки аэрозольных частиц за ударной волной, движущейся в микроканале // *Докл. РАН.* 2010. Т. 433. № 3. С. 346–349.
73. *Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д.* Фокусировка аэрозоля за ударной волной, движущейся в микроканале // *Теор. осн. хим. техн.* 2011. № 2. С. 178–186.
74. *Akhatov I.S., Hoey J.M., Thomson D., Swenson O.F., Schulz D.L., Osiptsov A.N.* Aerosol flow in microscale: theory, experiment, and application to direct-write microfabrication // *Proc. ECI Int. Conf. Heat Transfer and Fluid Flow in Microscale.* Whistler, Canada, 2008. P. 1–8.
75. *Асмолов Е.С., Лебедева Н.А., Осипцов А.А.* Инерционная миграция осаждающихся частиц при течении суспензии в ячейке Хеле-Шоу // *Изв. РАН. МЖГ.* 2009. № 3. С. 85–101.
76. *Asmolov E.S., Osiptsov A.A.* The inertial lift on a spherical particle settling in a horizontal viscous flow through a vertical slot // *Phys. Fluids.* 2009. V. 21. № 8. P. 063301. <https://doi.org/10.1063/1.3148277>.
77. *Ruetsch G.R., Meiburg E.* On the motion of small spherical bubbles in two-dimensional vortical flows // *Phys. Fluids.* 1993. A5. P. 2326. <https://doi.org/10.1063/1.858750>.
78. *Raju N., Meiburg E.* Dynamics of small, spherical particles in vortical and stagnation point flow fields // *Phys. Fluids.* 1997. V. 9. P. 299–314. <https://doi.org/10.1063/1.869150>.
79. *Tio K.-K., Linán A., Lasheras J.C., Ganán-Calvo A.M.* On the dynamics of buoyant and heavy particles in a periodic Stuart vortex flow // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 671. <https://doi.org/10.1017/S0022112093002307>.
80. *Varaksin A.Y., Ryzhkov S.V.* Vortex flows with particles and droplets (A Review) // *Symmetry.* 2022. V. 14. P. 2016–2037. <https://doi.org/103390/sym14102016>.
81. *Druzhinin O.A.* Concentration waves and flow modification in a particle-laden circular vortex // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. P. 3276–3284. <https://doi.org/10.1063/1.868060>.
82. *Druzhinin O.A.* On the two-way interaction in two-dimensional particle-laden flows: the accumulation of particles and flow modification // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 297. P. 49–76. <https://doi.org/10.1017/s0022112095003004>.

83. *Ravichandran S., Govindarajan R.* Caustics and clustering in the vicinity of a vortex // *Phys. Fluids*. 2015. V. 27. P. 033305. <https://doi.org/10.1063/1.4916583>.
84. *Лебедева Н.А., Осипцов А.Н.* Структура зон аккумуляции инерционной примеси в течении типа торнадо // *Изв. РАН. МЖГ*. 2009. № 1. С. 83–96.
85. *Гольдштик М.А.* Одно парадоксальное решение уравнений Навье–Стокса // *ПММ*. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 610–621.
86. *Ахуджа Р., Белоножко А.Б., Йоханссон Б., Осипцов А.Н.* Инерционное разделение фаз во вращающихся самогравитирующих средах // *Изв. РАН. МЖГ*. 2004. № 6. С. 86–100.
87. *Lebedeva N.A., Osipov A.N., Sazhin S.S.* A combined fully Lagrangian approach to mesh-free modelling of transient two-phase flows // *Atom. Sprays*. 2013. V. 23. № 1. P. 47–69. <https://doi.org/10.1615/AtomizSpr.2013006269>.
88. *Лебедева Н.А.* Комбинированный полностью лагранжев подход для моделирования дисперсных течений // *Докл. РАН*. 2013. Т. 450. № 4. С. 408–412. <https://doi.org/10.7868/8086956521316010X>.
89. *Лебедева Н.А., Осипцов А.Н.* Комбинированный лагранжев метод для моделирования осесимметричных вихревых газодисперсных течений // *Изв. РАН. МЖГ*. № 5. С. 72–85. <http://doi.org/10.7868/S0568528116050133>.
90. *Monaghan J.J.* An introduction to SPH // *Comp. Phys. Commun.* 1988. V. 48. P. 89–96. [http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655\(88\)90026-4](http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655(88)90026-4).
91. *Koumoutsakos P.* Multiscale flow simulations using particles // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2005. V. 37. P. 457–487. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175753>.
92. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D.* *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge Univ. Press, 2000. 313 p.
93. *Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Моск. ун-т, 2006. 184 с.
94. *Ogami Y., Akamatsu T.* Viscous flow simulation using the discrete vortex method — the diffusion velocity method // *Computers and Fluids*. 1991. V. 19. № 3/4. P. 433–441. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(91\)90068-S](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90068-S).
95. *Дынникова Г.Я.* Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // *Докл. АН*. 2004. Т. 399. № 1. С. 42–46.
96. *Ramesh K., Gopalathnam A., Granlund K., Ol M.V., Edwards J.R.* Discrete-vortex method with novel shedding criterion for unsteady aerofoil flows with intermittent leading-edge vortex shedding // *J. Fluid Mechanics*. 2014. V. 751. P. 500–538. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.297>.
97. *Rossi E., Colagrossi A., Bouscasse B., Graziani G.* The diffused vortex hydrodynamics method // *Commun. Comput. Phys.* 2015. V. 18. № 2. P. 351–379. <https://doi.org/10.4208/cicp.271014.200415a>.
98. *Chen H., Marshall J.A.* Lagrangian vorticity method for two-phase particulate flows with two-way phase coupling // *J. Comp. Phys.* 1999. V. 148. P. 169–198. <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.6116>.
99. *Walther J., Koumoutsakos P.* Three-dimensional vortex method for particle-laden flows with two-way coupling // *J. Comp. Phys.* 2001. V. 167. P. 39–71. <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6656>.
100. *Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003. 504 с.
101. *Saffman P.G.* *Vortex dynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1992. 311 p.
102. *Lebedeva N.A., Osipov A.N.* Modeling of inertial-admixture accumulation zones in vortex ring-like flows by fully Lagrangian method // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. V. 891. P. 012030. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012030>.
103. *Rybdylova O., Osipov A.N., Sazhin S.S., Begg S., Heikal M.* A fully meshless method for ‘gas — evaporating droplet’ flow modeling // *PAMM. Proc. Appl. Math. Mech.* 2015. V. 15. P. 685–686. <https://doi.org/10.1002/pamm.201510332>.
104. *Rybdylova O., Osipov A.N., Sazhin S.S., Begg S., Heikal M.* A combined viscous-vortex, thermal-blob and Lagrangian method for non-isothermal, two-phase flow modelling // *Intern. J. Heat Fluid Flow*. 2016. V. 58. P. 93–102. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2015.12.003>.
105. *Balachandar S., Eaton J.K.* Turbulent dispersed multiphase flow // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2010. V. 42. P. 111–33. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165243>.
106. *Monchaux R., Bourgoin M., Cartellier A.* Analyzing preferential concentration and clustering of inertial particles in turbulence // *Intern. J. Multiphase Flow*. 2012. V. 40. P. 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.12.001>.
107. *Reeks M.W.* Transport, mixing and agglomeration of particles in turbulent flows // *J. Phys. Conf. Series*. 2014. V. 530. P. 012003–012024. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/530/1/012003>.
108. *Вараксин А.Ю.* Кластеризация частиц в турбулентных и вихревых двухфазных потоках // *ТВТ*. 2014. Т.52. Вып. 5. С. 777–796. <https://doi.org/10.7868/S0040364414050214>.

109. Фукс *H.A.* Механика аэрозолей. М.: Изд. АН СССР, 1955. 353 с.
110. Медников *Е.П.* Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 174 с.
111. *Salazar J.P.L.C., de Jong J., Cao L., Woodward S., Meng H., Collins L.R.* Experimental and numerical investigation of inertial particle clustering in isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* 2008. V. 600. P. 245–56. <https://doi.org/10.1017/S0022112008000372>.
112. *Maxey M.R.* The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 174. P. 441–465. <https://doi.org/10.1017/S0022112087000193>.
113. *Squires K.D., Eaton J.K.* Preferential concentration of particles by turbulence // *Phys. Fluids A.* 1991. V. 3. P. 169. <https://doi.org/10.1063/1.858045>.
114. *Falkovich G., Fouxon A., Stepanov M.G.* Acceleration of rain Initiation by cloud turbulence // *Nature.* 2002. V. 419. P. 151. <https://doi.org/10.1038/nature00983>.
115. *Bec J.* Fractal clustering of inertial particles in random flows // *Phys. Fluids.* 2003. V. 15(11). P. 16–20. <https://doi.org/10.1063/1.1612500>.
116. *Wilkinson M., Mehlig B.* Caustics in turbulent aerosols // *Europhys. Lett.* 2005. V. 71. P. 186–92. <https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10532-7>.
117. *Chen L., Goto S., Vassilicos J.C.* Turbulent clustering of stagnation points and inertial particles // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 553. P. 143–154. <https://doi.org/10.1017/S0022112006009177>.
118. *Goto S., Vassilicos J.C.* Self-similar clustering of inertial particles and zero-acceleration points in fully developed two-dimensional turbulence // *Phys. Fluids.* 2006. V. 18. P. 115103. <https://doi.org/10.1063/1.2364263>.
119. *Goto S., Vassilicos J.C.* Sweep-stick mechanism of heavy particle clustering in fluid turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 100. P. 035504. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.054503>.
120. *Coleman S.W., Vassilicos J.C.* A unified sweep-stick mechanism to explain particle clustering in two- and three-dimensional homogeneous, isotropic turbulence // *Phys. Fluids.* 2009. V. 21. P. 113301. <https://doi.org/10.1063/1.3257638>.
121. *Лебедева Н.А.* Исследование зон аккумуляции инерционных частиц в дисперсных потоках: дис. канд. физ.-мат. наук. М., МГУ, 2009. 121 с.
122. *Picciotto M., Marchioli C., Reeks M.W., Soldati A.* Statistics of velocity and preferential accumulation of micro-particles in boundary layer turbulence // *Nuclear Engin. Design.* 2005. V. 235. P. 1239–1249. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2005.01.013>.
123. *Ijzermans R.H.A., Reeks M.W., Meneguz E., Picciotto M., Soldati A.* Measuring segregation of inertial particles in turbulence by a full Lagrangian approach // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 80. P. 015302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.015302>.
124. *Ijzermans R.H.A., Meneguz E., Reeks M.W.* Segregation of particles in incompressible random flows: singularities, intermittency and random uncorrelated motion // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 653. P. 99–136. <https://doi.org/10.1017/S0022112010000170>.
125. *Meneguz E., Reeks M.W.* Statistical properties of particle segregation in homogeneous isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 686 P. 338–351. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.333>.
126. *Gustavsson K., Meneguz E., Reeks M., Mehlig B.* Inertial-particle dynamics in turbulent flows: caustics, concentration fluctuations and random uncorrelated motion // *New. J. Phys.* 2012. V. 14. P. 115017. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/14/11/115017>.
127. *Papoutsakis A., Danaila I., Luddens F., Gavaises M.* Droplet nuclei caustic formations in exhaled vortex rings // *Sci. Rep.* 2022. V. 12. P. 3892–3908. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-07717-z>.
128. *Stafford C.P., Rybdylova O.* Robust interpolation for dispersed gas-droplet flows using statistical learning and the fully Lagrangian approach // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2023. V. 1. P. 1–28. <https://doi.org/10.1002/fld.5225>.

DEVELOPMENT OF THE FULL LAGRANGIAN APPROACH FOR MODELING DILUTE DISPERSED MEDIA FLOWS (A REVIEW)

© 2024 A. N. Osiptsov

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia

E-mail: osiptsov@imec.msu.ru

Continuum models of media with zero pressure are widely used in various branches of physics and mechanics, including studies of a dilute dispersed phase in multiphase flows. In zero-pressure media, the particle trajectories may intersect, “folds” and “puckers” of the phase volume may arise, and “caustics” (the envelopes of particle trajectories) may appear, near which the density of the medium sharply increases. In recent decades, the phenomena of clustering and aerodynamic focusing of inertial admixture in gas and liquid flows have attracted increasing attention of researchers. This is due to the importance of taking into account the inhomogeneities in the impurity concentration when describing the transport of aerosol pollutants in the environment, the mechanisms of droplet growth in rain clouds, scattering of radiation by dispersed inclusions, initiation of detonation in two-phase mixtures, as well as when solving problems of two-phase aerodynamics, interpretation of measurements obtained by LDV or PIV methods, and in many other applications. These problems gave an impetus to a significant increase in the number of publications devoted to the processes of accumulation and clustering of inertial particles in gas and liquid flows. Within the framework of classical two-fluid models and standard Eulerian approaches assuming single-valuedness of continuum parameters of the media, it turns out impossible to describe zones of multi-valued velocity fields and density singularities in flows with crossing particle trajectories. One of the alternatives is the full Lagrangian approach proposed by the author earlier. In recent years, this approach has been further developed in combination with averaged Eulerian and Lagrangian (vortex-blob method) methods for describing the dynamics of the carrier phase. Such combined approaches made it possible to study the structure of local zones of accumulation of inertial particles in vortex, transient, and turbulent flows. This article describes the basic ideas of the full Lagrangian approach, provides examples of the most significant results which illustrate the unique capabilities of the method, and gives an overview of the main directions of further development of the method as applied to transient, vortex, and turbulent flows of “gas-particle” media. Some of the ideas discussed and the results presented below are of a more general interest, since they are also applicable to other models of zero-pressure media.

Keywords: zero-pressure media, multiphase flows, particles, caustics, density singularities, full Lagrangian method, vortex flows, vortex blobs, turbulence, particle accumulation regions

УДК 532.517:2.4

АНОМАЛЬНАЯ ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ВИХРЕВОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ВОЗДУХОМ НАКЛОННОЙ КАНАВКИ НА НАГРЕТОМ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ УЧАСТКЕ ПЛАСТИНЫ

© 2024 г. С. А. Исаев^{a, b, *}, С. З. Сапожников^c, Д. В. Никущенко^a, В. Ю. Митяков^c, В. В. Сероштанов^c, Е. Б. Дубко^b

^a Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
Санкт-Петербург, Россия

^b Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
им. главного маршала авиации А.А. Новикова, Санкт-Петербург, Россия

^c Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: isaev3612@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.09.2023 г.

После доработки 20.09.2023 г.

Принята к публикации 20.09.2023 г.

Экспериментально и численно выявлена аномальная интенсификация теплообмена при турбулентном отрывном обтекании воздухом удлиненной канавки умеренной глубины на пластине, наклоненной под углом 45° к набегающему потоку. Область исследования включала прямоугольный участок, нагретый до 100°C насыщенным водяным паром. Число Рейнольдса менялось от 10^3 до 3×10^4 . Методом градиентной теплотметрии установлено двукратное — в сравнении с плоской пластиной — возрастание коэффициента теплоотдачи на дне канавки при числе Рейнольдса $Re = 3 \times 10^4$. Относительное число Нуссельта для различных участков канавки определялось как в ходе физического эксперимента, так и расчетом на основе RANS-подхода с применением многоблочных вычислительных технологий и SST-модели в пакете VP2/3. Результаты удовлетворительно совпали в турбулентном режиме течения при $Re = (5, 10 \text{ и } 30) \times 10^3$.

Ключевые слова: аномальная интенсификация, наклонная канавка, пластина, отрывное течение, вихревой теплообмен, воздух, градиентная теплотметрия, RANS-подход, SST-модель

DOI: 10.31857/S1024708424010023 **EDN:** SECFMF

ВВЕДЕНИЕ

Явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных овально-траншейных лунках-канавках, выполненных на стенках структурированных каналов и пластин открыто численно (см. [1–3] и др.) при решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS), замкнутых с помощью модели переноса сдвиговых напряжений (SST). На участке стабилизированного турбулентного течения воздуха в канале установлено снижение минимального отрицательного трения (в 4–6 раз) и повышение коэффициента теплоотдачи (в 7–9 раз) в срединном продольном сечении наклонной канавки. Все канавки находились в плотном пакете на нагретой стенке.

Базой сравнения служили параметры, рассчитанные для гладкой стенки плоскопараллельного канала. Физический механизм аномальной интенсификации обусловлен экстраординарными перепадами давления и взаимосвязанными ультравысокими скоростями возвратного и вторичного течения, сопоставимыми и превосходящими среднюю скорость потока в канале. Причиной перепадов давления является торможение входящего в канавку внешнего потока и самоорганизация высокоинтенсивного торнадоподобного вихря в канавке.

Вначале открытое явление не связывалось с обтеканием единичных наклонных канавок, хотя теплообмен в узком канале с единичной наклонной овально-траншейной лункой численно исследован довольно подробно (например, в работе [4]). Однако в публикации [5] установлена взаимосвязь аномальной интенсификации отрывного течения и экстраординарных перепадов давления в канавке на пластине при изменении угла наклона от 0 до 90° . Это подтверждает действие описанного механизма для единичных наклонных канавок.

Экспериментальное обоснование нового явления получено только для аэродинамических характеристик [5–7]. Измерены экстраординарные перепады статического давления в наклонных канавках, инициирующие ультравысокие скорости возвратного и вторичного течения. Абсолютные величины скоростей сравнимы, а подчас и превосходят среднемассовую скорость течения в канале, а минимальные величины трения многократно превосходят трение на стенке гладкого канала. Открытое явление объясняет установленное численно и подтвержденное экспериментально локальное ускорение потока над входом в наклонную лунку в одно- и двухрядном пакете при скорости, до полутора раз превосходящей максимальную скорость в плоскопараллельном канале.

Однако до сих пор не было подтверждено многократное увеличение коэффициента теплоотдачи на дне наклонной канавки по сравнению с коэффициентом теплоотдачи на гладкой стенке. В данной статье этот эффект экспериментально подтвержден на основе градиентной термометрии [8]. Выполнено и численное моделирование отрывного течения и теплообмена для цифрового аналога теплофизического стенда.

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЙ СТЕНД. ГРАДИЕНТНЫЕ ДАТЧИКИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

Эксперимент проводили в аэродинамической трубе научно-образовательного центра “Теплофизика в энергетике” СПбПУ Петра Великого [9], поток воздуха в которой создается центробежным вентилятором с частотным регулированием. Хонейкомб, установленный перед соплом, выравнивает поле скорости и обеспечивает степень турбулентности набегающего потока $Tu < 1\%$ во всем диапазоне скоростей. Диаметр выходного сопла составляет 0.45 м, длина рабочей зоны — 0.8 м.

Ключевая особенность трубы НОЦ “Теплофизика в энергетике” — наличие теплообменника, расположенного в поворотном колене за вентилятором. Теплообменник подключен к системе холодного водоснабжения и обеспечивает практически постоянную температуру набегающего потока воздуха ($\Delta T = 0.2$ К).

В рабочей зоне трубы размещалась модель — пластина с канавкой шириной $D = 0.04$ м, относительной глубиной $h/D = 0.25$ и удлинением цилиндрической части 5 (рис. 1а). В качестве характерного размера при определении числа Рейнольдса $Re = UD/\nu$ и как нормирующая величина для линейных размеров выбрана ширина канавки D . Здесь U — скорость набегающего потока, выбранная в качестве масштаба статического давления и трения, ν — кинематическая вязкость воздуха. Угол наклона продольной оси канавки к вектору скорости набегающего потока составил 45° .

Канавка выполнена из медного листа толщиной 2×10^{-4} м, который впаян в круглую пластину диаметром 0.3 м, выполненную из стального листа толщиной 4×10^{-4} м (см. рис. 1б). Круглая пластина с канавкой припаяна к прямоугольной коробке с размерами в плане 0.475×0.415 м, обогреваемой насыщенным водяным паром при атмосферном давлении. Таким образом, температура на поверхности теплообмена поддерживалась постоянной и близкой к 100°C . Обогреваемая коробка с канавкой помещалась на прямоугольную теплоизолированную пластину размерами 0.71×0.6 м. Такая конструкция позволила стабилизировать гидродинамический и тепловой пограничный слой перед канавкой.

Измерения плотности теплового потока проводились с помощью градиентных датчиков теплового потока (ГДТП) [8]. Действие ГДТП основано на поперечном эффекте Зеебека: при прохождении теплового потока через пластину с анизотропией тепло- и электрофизических свойств в ней возникает термоЭДС, нормальная вектору плотности теплового потока и пропорциональная его модулю [10].

В работе использовали батарейные ГДТП на основе монокристаллического висмута чистоты 0.9999. Размеры датчиков составили $(2.5 \times 2.5 \times 0.2) \times 10^{-3}$ м, а их вольт-ваттная чувствительность — 5 мВ/Вт. Сигналы ГДТП регистрировали и архивировали с помощью аналого-цифрового преобразователя NI 9216 фирмы National Instruments. ГДТП установлены с постоянным шагом в срединном сечении канавки и в характерном сечении перехода от входного сферического сегмента к цилиндрической траншее. Опыты проводились для чисел Рейнольдса Re , равных 10^3 , 5×10^3 , 10^4 и 3×10^4 .

Для расчета коэффициента теплоотдачи необходимо знать температуру воздушного потока и поверхности теплообмена. Температура набегающего потока измерялась на выходе из сопла аэродинамической трубы с помощью многофункционального устройства testo-450i, а температура на поверхности теплообмена — с помощью тепловизора testo 875.

Оценка неопределенности измерений, выполненная по ГОСТ 34100.1-2017/ISO/IEC Guide98-1:2009 “Неопределенность измерения” [11] показала, что суммарная стандартная относительная неопределенность измерений местного коэффициента теплоотдачи не превышает 10%.

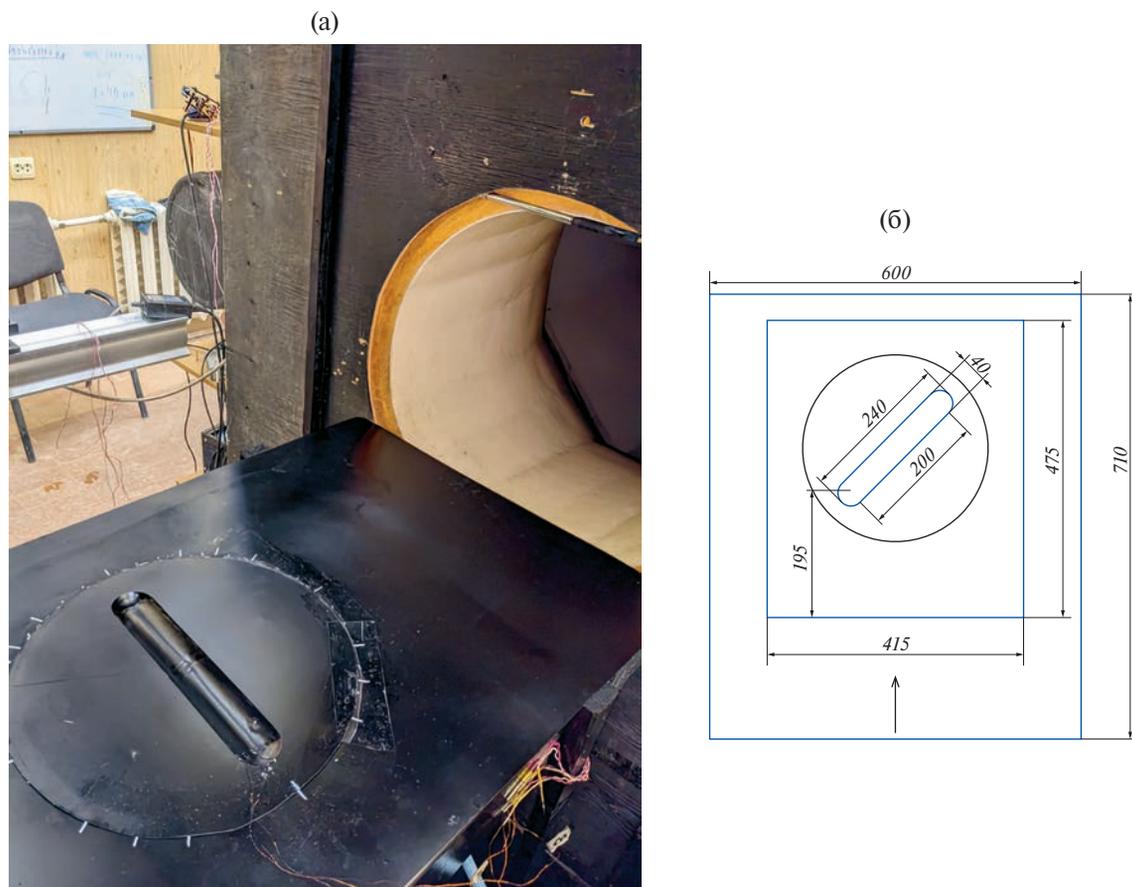


Рис. 1. Фото теплофизического стенда (а) и схема экспериментальной установки с нанесенными размерами, мм.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. МЕТОДОЛОГИЯ РАСЧЕТА

Рассматривается конвективный теплообмен при стационарном обтекании воздухом единичной канавки под углом наклона 45° на нагретой пластине – цифровом аналоге теплофизического стенда (рис. 2а). В качестве характерных параметров выбраны ширина канавки D и скорость набегающего потока U . Ламинарное течение воздуха рассматривается при $Re = 1000$ и 5000 , а турбулентное при $Re = 5000$, 10000 и 30000 .

Форма канавки описана ранее. Степень турбулентности задается близкой к экспериментальной (1%), а масштаб турбулентности имеет порядок характерного размера. Относительный радиус скругления кромки равен 0.025 . Число Прандтля Pr принимается равным 0.71 .

Численное решение стационарных уравнений Навье–Стокса (NS) в случае ламинарного течения и осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) при расчете турбулентного обтекания пластины, а также уравнения энергии основывается на концепции расщепления по физическим процессам [12] с применением процедуры коррекции давления SIMPLEC [13] и многоблочных структурированных сеток с их частичным перекрытием. В случае турбулентного течения уравнения движения замыкаются с помощью полуэмпирической модели переноса сдвиговых напряжений (SST), предложенной Ментером [14].

Обобщенное уравнение переноса записывается в приращениях зависимых переменных, аналогично [12]. В явной части уравнения для дискретизации конвективных членов уравнений применяются схемы второго порядка аппроксимации (противопоточная схема с квадратичной интерполяцией Леонарда [15] для уравнений количества движения и схема TVD [16] для уравнений характеристик турбулентности).

Для представления диффузионных членов используется центрально-разностная схема. В неявной части обобщенного уравнения применяется противопоточная схема с односторонними разностями. Центрированные сетки с зависимыми переменными в центрах расчетных ячеек требуют монотонизации поля давления за счет введения коррекции Рхи–Чоу [17, 18]. Для решения алгебраических уравнений используется

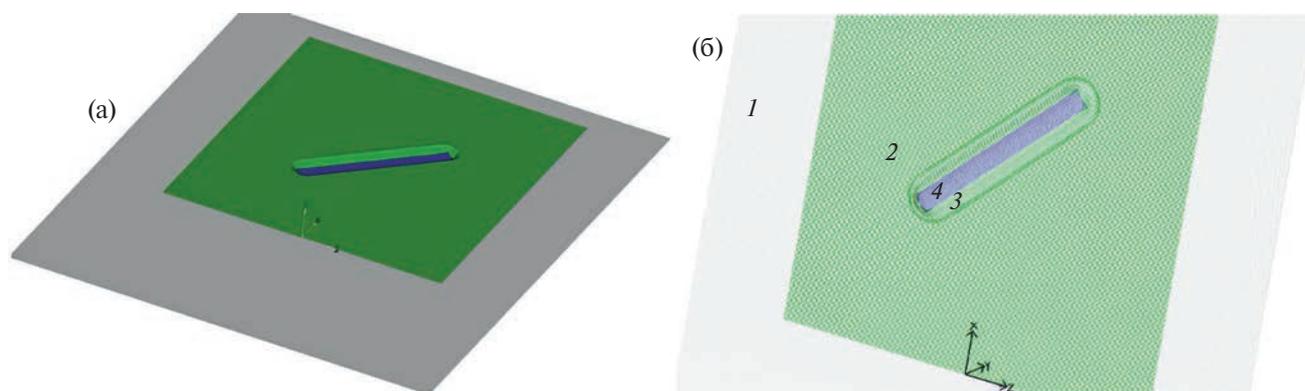


Рис. 2. Расчетный аналог экспериментальной теплоизолированной пластины с нагреваемым изотермическим участком с $T = 373$ К, в центре которого располагается наклонная канавка (а), и многоблочная расчетная сетка из четырех фрагментов: 1 — внешняя декартова сетка высотой 8.8; 2 — прилегающая к нагретому участку пристеночная сетка высотой 0.7; 3 — криволинейная согласованная с поверхностью канавки эллиптическая сетка О-типа; 4 — «заплатка» на центральную зону канавки (б).

предобусловленный метод BiCGSTAB [19] с алгебраическим многосеточным ускорителем из библиотеки Демидова (amgcl) [20] для поправки давления и ILU0 для остальных переменных.

Оригинальный пакет теплофизического профиля VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D) основывается на многоблочных вычислительных технологиях (МБТ), описанных в работе [12]. Совокупность разномасштабных, ярусных и пересекающихся структурированных сеток, согласованных со структурными элементами соответствующих масштабов физической задачи, является базисом МБТ. В двух рядах приграничных ячеек каждой из пересекающихся или накладываемых сеток параметры находятся с помощью линейной интерполяции [12].

В качестве компьютерного аналога пластины рассматривается прямоугольный участок плоской стенки длиной 19.625 и шириной 15.675. Центр канавки располагается на расстоянии 12.688 от входного сечения, в котором формируется равномерный поток. Расчетная область строится на прямоугольном участке пластины и имеет вертикальный размер 8.8. Область пристенного потока отображается на внешней декартовой сетке MG, сгущающейся к стенке (см. рис. 2б). Внутри области выделяется прилегающая к стенке прямоугольная зона в окрестности наклонной канавки протяженностью 11.875, шириной 10.375 и высотой 0.7. Температура выделенной зоны стенки фиксируется и равняется 373 К, как в эксперименте. Остальная поверхность пластины принимается теплоизолированной.

В выделенной прямоугольной зоне строится косоугольная сетка MR. В окрестности канавки для базового варианта сетки A ячейки сеток MG и MR задаются квадратными с шагом 0.07 и 0.05 в продольном и поперечном направлениях. В направлении входной, выходной и боковых границ размеры ячеек сетки MG увеличиваются. Криволинейные эллиптические сетки Ring и Rec вводятся для отображения пространственного течения внутри канавки. Ring является сеткой О-типа, а Rec выступает в качестве заплатки в центральной зоне. Таким образом, расчет течения и теплообмена в расчетной области производится на многоблочной сетке из четырех фрагментарных разномасштабных сеток с частичным пересечением. Размер пристеночного шага сеток равен 10^{-5} .

Для анализа сеточной сходимости сравниваются численные прогнозы интегральных характеристик течения и теплообмена на сетках с различным количеством расчетных ячеек. Базовая сетка A содержит 8.8 млн ячеек, сетка B — 6.25 млн ячеек, сетка C — 4.18 млн ячеек, сетка D — 3 млн ячеек.

Центр декартовой системы координат x, y, z находится в срединном сечении канала на расстоянии 6.25 от входа. На боковых и верхней границах расчетной области ставятся условия скольжения. В выходном сечении задаются мягкие граничные условия — условия продолжения решения на границу, а на омываемой поверхности пластины ставятся условия прилипания. Внутри канавки вводится связанная система координат s, y, t , ориентированных в срединном продольном сечении, вертикальном направлении и в поперечном характерном сечении перехода от входного сферического сегмента к цилиндрической траншее.

Верхняя граница — изотермическая, с температурой T_{ref} , принятой в качестве масштаба (293 К). На входе температура T задается постоянной и равной T_{ref} , а на выходе из расчетной области для температуры

ставятся мягкие граничные условия. Безразмерная температура на изотермическом участке стенки принимается равной 1.273.

Процесс решения задачи итерационный. На каждом шаге решается уравнение поправки давления и рассчитываются поля декартовых составляющих скорости, давления, а также характеристик турбулентности. Вычислительный процесс заканчивается при достижении максимальных погрешностей зависимых переменных уровня 10^{-5} и при выходе на стабилизацию экстремальных локальных и интегральных параметров, включая силу сопротивления и средний коэффициент теплоотдачи на участке с канавкой.

Анализируются экстремальные локальные и интегральные характеристики течения и теплообмена на пластине с канавкой. В их число входят продольные и поперечные распределения перепада статического давления $P - P_{pl}$, относительного безразмерного коэффициента теплоотдачи Nu/Nu_{pl} , относительного трения f/f_{pl} в характерных сечениях омываемой пластины с канавкой, осредненные по поперечным полосам относительные числа Нуссельта Nu_m/Nu_{mpl} для контрольного участка и прямоугольного контура, окружающего канавку. Индекс pl относится к параметрам на гладкой пластине. Сравниваются также экстремальные характеристики течения P_{min} , P_{max} , U_{min} , U_{max} , V_{min} , V_{max} , W_{min} , W_{max} , турбулентности K_{max} , μt_{max} , тепловой эффективности Nu_{mm}/Nu_{mmp} , а также относительных коэффициентов лобового сопротивления Cx/Cx_{pl} . Профили продольной составляющей скорости в связанной системе координат $Q = U \cos 45^\circ + W \sin 45^\circ$ рассчитываются в центре характерного сечения канавки.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 3–6 и в табл. 1, 2 представлены некоторые из полученных результатов.

В таблице 1 сравниваются численные прогнозы тепловой эффективности Nu_{mm}/Nu_{mmp} и относительных коэффициентов лобового сопротивления Cx/Cx_{pl} для контрольного участка с наклонной канавкой размерами 7×7 и участка, ограничивающего контур канавки, с размером 6×1 , на многоблочных сетках одной топологии и различной насыщенностью расчетными ячейками N при $Re = 10^4$. Продемонстрирована сеточная сходимость результатов, причем интегральные показатели мало изменяются в пределах варьирования количеством ячеек от 3 до 9 млн.

Таблица 1. Прогнозы тепловой эффективности и коэффициентов лобового сопротивления

N , млн	Nu_{mm}	$10^2 Cx$	Nu_{mmd}	$10^2 Cx_d$
8.8	28.32	0.6978	27.64	1.596
6.25	28.35	0.6980	27.71	1.597
4.18	28.34	0.6985	27.74	1.603
3	28.36	0.6961	27.81	1.606

Наибольший интерес представляет сравнение измеренных и рассчитанных зависимостей относительных чисел Нуссельта $Nu/Nu_{pl}(t)$ в характерном поперечном сечении перехода от входного сферического сегмента к цилиндрической траншее при числах Рейнольдса в диапазоне $(5-30) \times 10^3$ (см. рис. 3а). Достижение близкого к двукратному росту относительного коэффициента теплоотдачи на дне канавки при $Re = 3 \times 10^4$ является центральным результатом экспериментального исследования.

Подтверждена аномальная интенсификация теплообмена, ранее открытая методами численного моделирования. С ростом числа Рейнольдса Re отмечается рост относительного коэффициента теплоотдачи. Так, при $Re = 10^4$ в срединном сечении уровень этого коэффициента заметно ниже, чем при 3×10^4 , а при $Re = 5 \times 10^3$ вообще $Nu/Nu_{pl} < 1$. На подветренном склоне наблюдается ослабление теплообмена, а на наветренном — его интенсификация. Численные прогнозы на основе RANS-подхода удовлетворительно согласуются с данными измерений тепловых потоков, что делает градиентную теплометрию применимой для решения задач сложного вихревого теплообмена.

Интересно отметить, что интенсификация ламинарного теплообмена внутри канавки оказывается намного слабее, чем при турбулентном режиме обтекания, хотя при $Re = 5 \times 10^3$ в узкой окрестности наветренной кромки относительный коэффициент теплоотдачи превышает 4.0.

Аномальная интенсификация течения и теплообмена в наклонной канавке на пластине при высоком числе Рейнольдса (~ 67000) обусловлена экстраординарными перепадами давления [5]. Они возникают

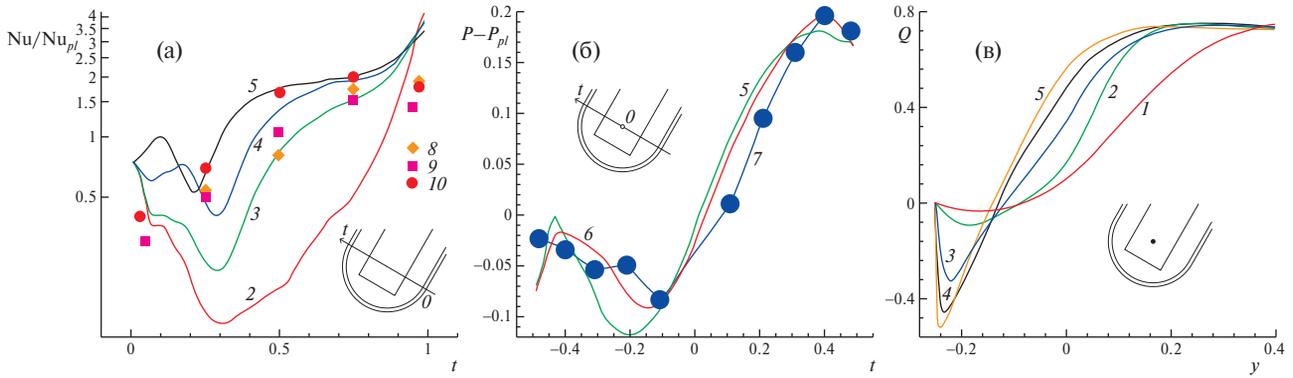


Рис. 3. Сравнительный анализ рассчитанных (1–6) и измеренных (7–10) относительных чисел Нуссельта Nu/Nu_{pl} (а) и перепадов статического давления $P - P_{pl}$ (б) в характерном сечении перехода от входного сферического сегмента к цилиндрической траншее, а также профилей продольной составляющей скорости $Q(y)$ в связанной системе координат (s, y, t) в центральной точке характерного сечения (в) при различных числах Рейнольдса. 1 – $Re = 10^3$; 2 – 5×10^3 (1, 2 – ламинарный режим); 3, 8 – 5×10^3 ; 4, 9 – 10^4 ; 5, 1 – 3×10^4 ; 6, 7 – 6.7×10^4 [5] (3–10 турбулентный режим).

между областью торможения входящего в канавку потока и зоной отрицательного избыточного давления в самоорганизующемся торнадоподобном вихре на поверхности сферического сегмента. На рис. 3б сравниваются результаты расчетов перепада давления в характерном сечении канавки при $Re = 3 \times 10^4$ с численными прогнозами и замерами статического давления в такой же канавке при близких условиях обтекания ($Re = 6.7 \times 10^4$ и толщина турбулентного пограничного слоя 0.17). Согласие представленных данных указывает на их достоверность, сочетание интенсификации тепловых и гидродинамических процессов.

Анализ профилей продольной составляющей скорости $Q(y)$ в связанной системе координат (см. рис. 3в), построенных в центре характерного поперечного сечения канавки при числах Рейнольдса от 10^3 до 3×10^4 , показывает их хорошее согласие с аналогичными профилями в канавке при варьировании углом наклона от 0 до 90° при $Re = 6.7 \times 10^4$ [5]. Слабое отрывное течение при ламинарных числах Re с неразвитыми профилями скорости скачкообразно трансформируется в сложное турбулентное течение, профиль которого сочетает пристеночный профиль усиливающегося возвратного потока со струйным профилем развивающегося закрученного течения возрастающей интенсивности. Точка нулевой скорости $Q(y)$ с ростом Re приближается к стенке, а минимальная скорость возвратного тока приближается к -0.5 .

В таблицу 2 сведены данные об экстремальных аэродинамических характеристиках: статическом давлении P_{min} , P_{max} , продольной U_{min} , U_{max} , вертикальной V_{min} , V_{max} , трансверсальной W_{min} , W_{max} декартовым составляющим скорости, а также энергии турбулентности K_{max} и вихревой вязкости $\mu_{t,max}$ для различных чисел Рейнольдса при ламинарном (отмечен знаком *) и турбулентном режимах.

Таблица 2. Данные об экстремальных аэродинамических характеристиках

Re	10^{3*}	$5 \times 10^{3*}$	5×10^3	10^4	3×10^4
P_{min}	-0.08442	-0.07721	-0.1474	-0.1630	-0.2210
P_{max}	0.2225	0.09863	0.1152	0.1430	0.1905
U_{min}	-0.03868	-0.1044	-0.2554	-0.3417	-0.3951
U_{max}	1.112	1.072	1.071	1.057	1.065
V_{min}	-0.04809	-0.1276	-0.1429	-0.1851	-0.2528
V_{max}	0.1117	0.09661	0.2172	0.3056	0.3486
W_{min}	-0.02980	-0.09794	-0.1492	-0.2113	-0.2418
W_{max}	0.1395	0.3114	0.4972	0.6067	0.7259
K_{max}	0.00015	0.00015	0.02369	0.02724	0.02594
$\mu_{t,max}$	0.000025	0.000025	0.002446	0.002699	0.002775

Анализ экстремальных характеристик отрывного течения показывает растущую с увеличением Re интенсификацию возвратного, вторичного течения, восходящих и нисходящих потоков. Максимальная

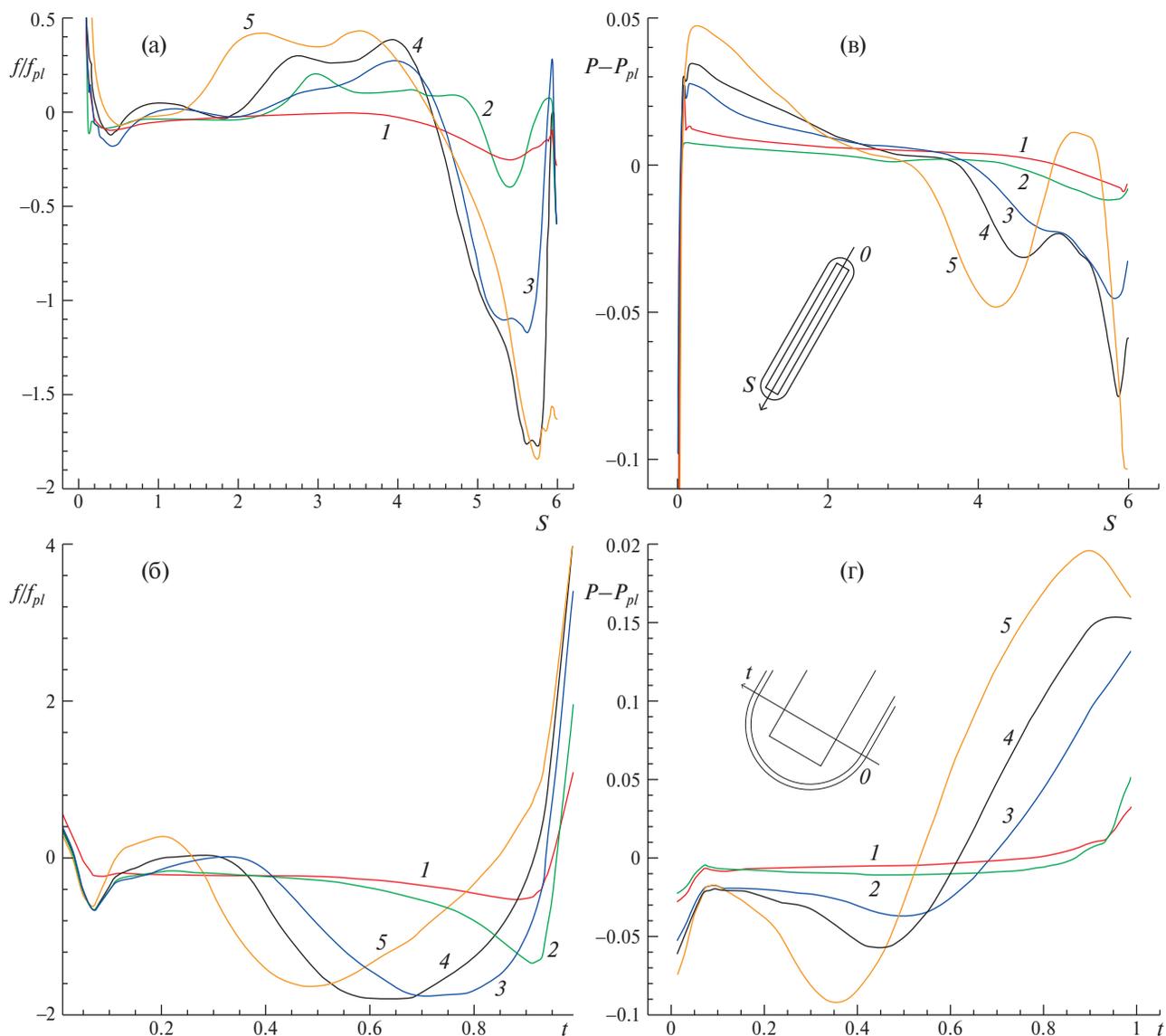


Рис. 4. Сравнение рассчитанных распределений относительного трения f/f_{pl} (а, б) и перепада статического давления $P-P_{pl}$ (в, г) в продольном срединном сечении канавки (а, в) и характерном сечении перехода от входного сферического сегмента к цилиндрической траншее (б, г) при различных числах Рейнольдса. 1 — $Re = 10^3$; 2 — 5×10^3 (1, 2 — ламинарный режим); 3 — 5×10^3 ; 4 — 10^4 ; 5 — 3×10^4 (3–5 — турбулентный режим).

скорость вторичного закрученного потока при $Re = 3 \times 10^4$ приближается к скорости набегающего потока. Интересна и стабилизация максимальной энергии турбулентности при высоких числах Рейнольдса.

Аномальная интенсификация отрывного течения в наклонной канавке, как отмечалось ранее при рассмотрении профилей составляющей скорости в связанной системе координат, наблюдается при турбулентном течении. Это подтверждается рис. 4, где представлены распределения относительного трения f/f_{pl} и перепады статического давления $P-P_{pl}$ в срединном продольном сечении канавки и в ее характерном поперечном сечении в месте перехода от сферического сегмента к цилиндрической траншее. Установлен диапазон чисел Рейнольдса — от 5×10^3 до 3×10^4 , в котором минимум относительного трения на дне канавки в поперечном характерном сечении приближается к -2 (рис. 4а, 4б). При этом на наветренном склоне и в конце канавки отмечено возрастание относительного трения до ~ 4 .

Аномально высокие экстраординарные перепады статического давления формируются при турбулентном обтекании наклонной канавки (см. рис. 4в, 4г). С ростом Re отрицательное давление на входе в канавку значительно снижается. В то же время положительное давление на выходе, в конце канавки возрастает.

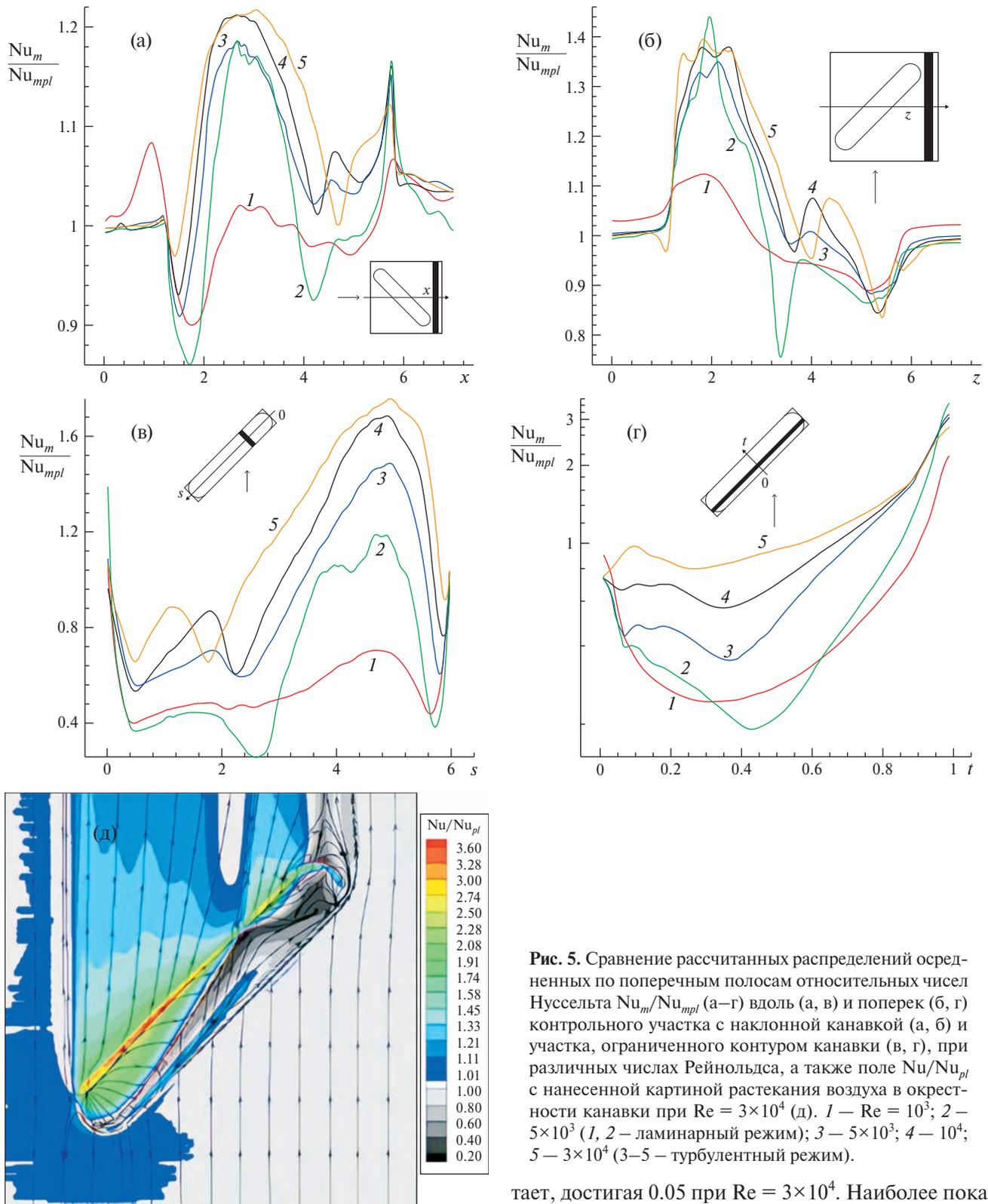


Рис. 5. Сравнение рассчитанных распределений осредненных по поперечным полосам относительных чисел Нуссельта Nu_m/Nu_{mpl} (а–г) вдоль (а, в) и поперек (б, г) контрольного участка с наклонной канавкой (а, б) и участка, ограниченного контуром канавки (в, г), при различных числах Рейнольдса, а также поле Nu/Nu_{pl} с нанесенной картиной растекания воздуха в окрестности канавки при $Re = 3 \times 10^4$ (д). 1 – $Re = 10^3$; 2 – 5×10^3 (1, 2 – ламинарный режим); 3 – 5×10^3 ; 4 – 10^4 ; 5 – 3×10^4 (3–5 – турбулентный режим).

тает, достигая 0.05 при $Re = 3 \times 10^4$. Наиболее показательные перепады давления возникают в характерном поперечном сечении канавки в месте перехода от сферического сегмента к траншее. С ростом Re в турбулентном режиме они возрастают от 0.13 до 0.29.

Линейные распределения проинтегрированных по поперечным полосам относительных чисел Нуссельта определяют неоднородность тепловой эффективности структурированной поверхности (рис. 5).

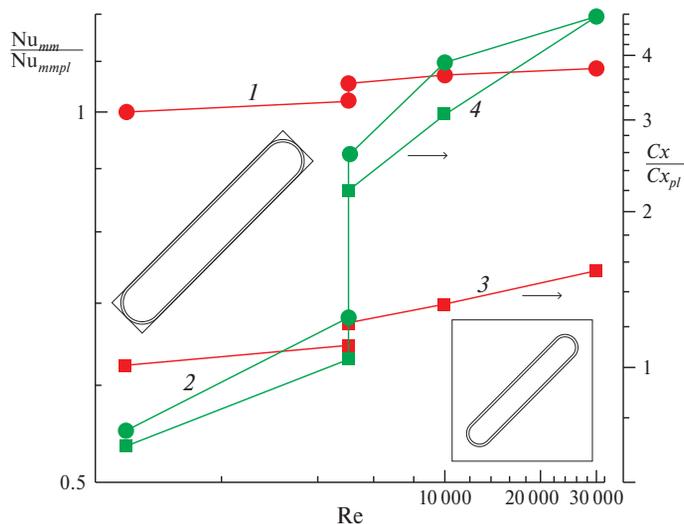


Рис. 6. Зависимости от числа Re тепловой эффективности Nu_{mm}/Nu_{mpl} 1, 2 и относительного лобового сопротивления Cx/Cx_{pl} 3, 4 контрольного участка пластины с канавкой — 1, 3 и участка, ограниченного контуром канавки, — 2, 4.

(s отсчитывается от конца канавки). За провалом относительного коэффициента теплоотдачи на входе в канавку на поперечной полосе контрольного участка — и, что примечательно, внутри канавки для ламинарного (при $Re = 5 \times 10^3$) и турбулентного (Re свыше 5×10^3) режимов течения — установлено увеличение относительного коэффициента теплоотдачи примерно на 20% для контрольного участка и на 20–75% для внутренней поверхности канавки. За центром канавки относительный коэффициент теплоотдачи снижается, однако в окрестности задней кромки виден его пик. Внутри канавки величина Nu_m/Nu_{mpl} в задней части уменьшается ниже единицы, причем тем ниже, чем меньше число Рейнольдса. Так, для ламинарного режима при $Re = 5 \times 10^3$ Nu_m/Nu_{mpl} снижается до 0.3, а при турбулентном режиме — до 0.6. Тем не менее на контрольном участке в окрестности канавки Nu_m/Nu_{mpl} превышает единицу, что свидетельствует о компенсации снижения относительного коэффициента теплоотдачи его повышением в следе за канавкой.

Линейные распределения осредненных по продольным полосам относительных чисел Нуссельта поперек контрольного участка с канавкой (координата z) и прямоугольного контура (координата t), окружающего канавку, лучше всего демонстрируют зоны наиболее интенсивного теплообмена. Достигнутый уровень максимального осредненного коэффициента теплоотдачи Nu_m/Nu_{mpl} для обоих участков оказался в 1.4–3.6 раза выше, чем на поперечных полосах. Пик относительного коэффициента теплоотдачи на квадратном участке пришелся на входную часть канавки и следовую зону повышенного теплосъема, а по поперечной координате t в канавке пиковые величины Nu_m/Nu_{mpl} реализуются на наветренном склоне.

В правосторонней окрестности канавки, а также в ее придонной части и на подветренном склоне теплообмен угнетен, и $Nu_m/Nu_{mpl} < 1$. Падение коэффициента для окрестности канавки не превышает 15% при всех числах Re , а внутри канавки этот параметр сильно зависит от Re и минимален для ламинарного течения при $Re = 5 \times 10^3$, принимая значение 0.2. С ростом Re минимальный относительный коэффициент теплоотдачи повышается и при $Re = 3 \times 10^4$ приближается к единице.

Поле относительных чисел Нуссельта с нанесенными линиями тока в пристенном слое (компьютерной визуализации картины растекания воздуха по криволинейной стенке), рассчитанное при $Re = 3 \times 10^4$, отражает взаимосвязь структуры вихревого течения и теплообмена вблизи изотермической стенки (см. рис. 5д). В области безотрывного течения на пластине перед наклонной канавкой интенсивность теплообмена почти не отличается от теплообмена на гладкой стенке. Лишь с левой стороны контрольного участка возникает зона слегка (на 1%) повышенного относительного коэффициента теплоотдачи, охватывающая входную часть канавки.

В статье рассматривается контрольный квадратный участок длиной 7 с центром, совпадающим с центром канавки, и прямоугольный участок, ограничивающий контур канавки и определяющий теплоотдачу от ее внутренней поверхности. Осреднения по поперечной декартовой координате z и координате t в связанной системе демонстрируют зависимости Nu_m/Nu_{mpl} от продольных координат x контрольного участка и s в срединном сечении канавки позволяют определить наиболее теплонапряженные поперечные полосы в окрестности канавки и на ее внутренней поверхности.

При ламинарном течении ($Re = 10^3$) интенсификация теплообмена в окрестности канавки незначительна, причем в полосе входа в канавку наблюдается снижение относительного коэффициента теплоотдачи (на 10% при $Re = 10^3$ и на 14% при $Re = 5 \times 10^3$). Внутри канавки вблизи входа в нее осредненная по ширине канавки плотность теплового потока снижается на 60% по сравнению с плотностью на гладкой стенке

Внутри канавки формируется сложное пространственное течение с линией отрыва набегающего потока, совпадающей с подветренной кромкой. Выраженная линия присоединения располагается вблизи наветренной кромки, причем видна точка растекания входящего в канавку потока на наветренном склоне и узкая зона возвратного придонного течения. Зона наветренной кромки — теплонапряженная, с максимальным уровнем относительного коэффициента теплоотдачи 3.6.

На входе в канавку возникает высокоинтенсивный торнадоподобный вихрь, в ядре которого зона отрицательного давления способствует эжекции возвратного пристенного потока. Вихрь формирует закрученный ускоряющийся поток в канавке, причем перед подветренным склоном он отрывается, и возникает зона ослабленного теплообмена. Она распространяется до конца канавки. Аномально высокий по сравнению с лунками относительный коэффициент теплоотдачи в канавке — около двух — характерен для области интенсивного закрученного потока, покидающего канавку, не доходя до ее конца. Отметим следовую область интенсификации теплообмена, в которой теплосъем падает по мере удаления от наветренной кромки.

С ростом Re интегральный относительный теплосъем с контрольного участка окрестности канавки и с зоны внутри канавки увеличиваются, но различными темпами (рис. 6). Осредненное по площади контрольного участка с канавкой относительное число Нуссельта Nu_{mm}/Nu_{mmp} растет медленно, и к $Re = 3 \times 10^4$ достигает 1.09. Осредненное по площади прямоугольного участка, ограничивающего контур канавки, относительное число Нуссельта Nu_{mmd}/Nu_{mmdpl} при ламинарном, а также турбулентном режиме течения для $Re = 5 \times 10^3$ не превосходит единицы, однако при Re свыше 10^4 оно возрастает, достигая при 3×10^4 величины 1.19.

При этом относительное лобовое сопротивление Cx/Cx_{pl} участка пластины с канавкой и отдельно канавки растет опережающим темпом и достигает значений 1.54 и 4.8, соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение экспериментальных, полученных методом градиентной теплотометрии, и рассчитанных с помощью численного моделирования данных о теплообмене в наклонной канавке на нагретом изотермическом участке пластины при обтекании воздухом для различных чисел Рейнольдса показало их близость.

Центральный результат — достижение двукратного превосходства относительного коэффициента теплоотдачи на дне наклонной канавки при $Re = 3 \times 10^4$. Наблюдается согласие расчетных прогнозов экстраординарного перепада давления на входе в рассматриваемую канавку с данными измерений на стенде института механики МГУ в близких условиях обтекания пластины. Установлен диапазон чисел Рейнольдса (с 5×10^3 до 3×10^4), в котором максимум относительного коэффициента теплоотдачи на дне канавки достигает 1.5–2, что соответствует аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в единичной канавке. Продемонстрирована приемлемость RANS-подхода для прогнозирования характеристик высокоинтенсивных закрученных потоков и параметров теплообмена.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда по грантам 22-19-00056 (эксперименты) 23-19-00083 (расчеты).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isaev S., Gritckevich M., Leontiev A., Popov I.* Abnormal enhancement of separated turbulent air flow and heat transfer in inclined single-row oval-trench dimples at the narrow channel wall // *Acta Astronautica*. 2019. Vol. 163 (part. A). P. 202–207.
2. *Исаев С.А.* Генезис аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках на структурированных поверхностях // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2022. № 5. С. 13–24.
3. *Исаев С.А.* Аэрогидродинамические механизмы интенсификации физико-энергетических процессов на структурированных энергоэффективных поверхностях с вихревыми генераторами // *Теплофизика и аэромеханика*. 2023. Т. 30. № 1. С. 83–88.

4. *Isaev S.A., Schelchkov A.V., Leontiev A.I., Gortyshov Yu.F., Baranov P.A., Popov I.A.* Tornado-like heat transfer enhancement in the narrow plane-parallel channel with the oval-trench dimple of fixed depth and spot area // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2017. V. 109. P. 40–62.
5. *Исаев С.А., Гувэрнюк С.В., Никущенко Д.В., Судаков А.Г., Синявин А.А., Дубко Е.Б.* Взаимосвязь аномальной интенсификации отрывного течения и экстраординарных перепадов давления в канавке на пластине при изменении угла наклона от 0 до 90° // *Письма в ЖТФ*. 2023. Т. 49. Вып. 15. С. 39–42.
6. *Зубин М.А., Зубков А.Ф.* Структура отрывного обтекания цилиндрической каверны на стенке плоского канала // *Механика жидкости и газа*. 2022. № 1. С. 81–89.
7. *Isaev S., Leontiev A., Gritskovich M., Nikushchenko D., Guvernnyuk S., Sudakov A., Chung K.-M., Tryaskin N., Zubin M., Sinyavin A.* Development of energy efficient structured plates with zigzag arrangement of multirow inclined oval trench dimples // *Int. J. Thermal Sciences*. 2023. V. 184. № 107988.
8. *Sapozhnikov S.Z., Mityakov V.Yu., Mityakov A.V.* Heatmetry: The Science and practice of heat flux measurement. Springer International Publishing, 2020. 209 p.
9. *Seroshtanov V., Gusakov A.* Gradient heatmetry and PIV investigation of heat transfer and flow near circular cylinders // *Inventions*. 2022. № 7(3). P. 80. <https://doi.org/10.3390/inventions7030080>.
10. *Sapozhnikov S.Z., Mityakov V.Y., Mityakov A.V., Gusakov A.A., Zainullina E.R., Grekov M.A., Seroshtanov V.V., Bashkatov A., Babich A.Y., Pavlov A.V.* Gradient heatmetry advances // *Energies*. 2020. № 13. P. 6194. <https://doi.org/10.3390/en13236194>.
11. ISO/IEC Guide 98-1:2009 – Uncertainty of Measurement – Part 1: Introduction to the Expression of Uncertainty in Measurement.
12. *Isaev S.A., Baranov P.A., Usachov A.E.* Multiblock computational technologies in the VP2/3 package on aerothermodynamics. LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrucken, 2013. 316 p.
13. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // *Numerical Heat Transfer*. 1984. V. 7. P. 147–163.
14. *Menter F.R.* Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // *AIAA Paper*. 1993. № 93. P. 21.
15. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1979. V. 19. № 1. P. 59–98.
16. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method // *J. Comp. Phys.* 1979. V. 32. P. 101–136.
17. *Rhie C.M., Chow W.L.* A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation // *AIAA J.* 1983. V. 21. P. 1525–1532.
18. *Pascau A., Garcia N.* Consistency of SIMPLEC scheme in collocated grids. V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010. Lisbon, Portugal, 2010. 12 p.
19. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems, 2nd ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003. 567 p.
20. *Demidov D.* AMGCL: C++ library for solving large sparse linear systems with algebraic multigrid method. <http://amgcl.readthedocs.org/>.

ANOMALOUS INTENSIFICATION OF VORTEX HEAT TRANSFER IN THE CASE OF SEPARATED AIR FLOW OVER AN INCLINED GROOVE IN A HOT ISOTHERMAL REGION OF A FLAT PLATE

**S. A. Isaev^{a, b, *}, S. Z. Sapozhnikov^c, D. V. Nikushchenko^a, V. Yu. Mityakov^c,
V. V. Seroshtanov^c, E. B. Dubko^b**

^a *St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia*

^b *St. Petersburg State University of Civil Aviation, St. Petersburg, Russia*

^c *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*

* *e-mail: isaev3612@yandex.ru*

Anomalous heat transfer intensification in turbulent separated air flow over a long groove of moderate depth made in a plate inclined at an angle of 45° to the freestream is revealed both experimentally and numerically. The region under investigation includes a rectangle heated to 100°C by saturated water vapor. The Reynolds number varied from 10³ to 3×10⁴. Using the gradient heatmetry the twofold increase, as compared with the case of a flat plate, of the heat transfer coefficient on the groove bottom is established at the Reynolds number $Re = 3 \times 10^4$. The relative Nusselt number in different regions of the groove is determined both in the physical experiment and in the RANS calculations with the application of multiblock computational technologies and the SST model in the VP2/3 software package. The results are in good agreement in the turbulent flow regime at $Re = (5, 10, \text{ and } 30) \times 10^3$.

Keywords: anomalous intensification, inclined groove, flat plate, separation flow, vortex heat transfer, air, gradient heat measurements, RANS approach, SST model

УДК 532.529.6

ДИФФУЗИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОМ МИКРОВКЛЮЧЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ

© 2024 г. К. В. Леонов*, И. Ш. Ахатов

Башкирский государственный медицинский университет, Уфа, Россия

**E-mail: k.leonoff@inbox.ru*

Поступила в редакцию 03.08.2023 г.

После доработки 10.09.2023 г.

Принята к публикации 21.09.2023 г.

Рассматривается задача диффузионной устойчивости одиночного кавитационного пузырька в сферической ячейке жидкости (жидком микровключении), окруженной бесконечным упругим твердым телом. В качестве внешней вынуждающей силы используется периодическое во времени давление в твердом теле вдали от ячейки жидкости, которое инициирует колебания пузырька, сопровождающиеся процессом диффузии газа в системе пузырь–в–ячейке. Использовано инженерное приближение, согласно которому увеличение/уменьшение пузырька рассматривается в среднем в предположении, что за период внешнего воздействия масса газа в пузырьке заметно не меняется. Разработанная теория предсказывает существование устойчиво осциллирующих пузырьков в ограниченной жидкости под действием внешней вынуждающей силы. Выявлены три возможных режима диффузии: 1) полное растворение пузырька, 2) частичное растворение пузырька и 3) частичный рост пузырька; последние два режима соответствуют диффузионной устойчивости в системе пузырь–в–ячейке. Проведено параметрическое исследование влияния концентрации газа, растворенного в жидкости, на результирующий устойчивый размер пузырька. Полученные результаты сравниваются с результатами для случая устойчивых колебаний пузырька в звуковом поле давления в бесконечной жидкости. Теоретические выводы могут быть использованы для совершенствования современных приложений ультразвуковых технологий.

Ключевые слова: динамика пузырька, кавитация, ультразвук, диффузия

DOI: 10.31857/S1024708424010032 **EDN:** SEBZVR

Пузырьки изучали с разных точек зрения, поскольку их поведение имеет решающее значение для самых разных технологий пищевой промышленности, очистки воды, добычи нефти и т.д. [1]. Пузырьки, подверженные воздействию акустических волн, связаны с технологиями дегазации жидкости путем инициации кавитации газосодержащих полостей [2] и используются во многих процессах ультразвуковой очистки, например в очистке кремниевых пластин и компьютерных компонент [3, 4].

Акустически возбуждаемые пузырьки могут нарушать локальное поле течения, что приводит к усилению химических реакций [5] и перемешиванию в микрофлюидных системах [6]. Использование высокоэнергетического ультразвука может вызвать кавитационный эффект в сверхтяжелой нефти, что приведет к расщеплению крупных молекул на молекулы легких углеводородов, снижая вязкость раствора и улучшая транспортные свойства [7].

Микропузырьки в настоящее время используют в клинической практике в качестве эффективных ультразвуковых контрастных агентов, которые состоят из плохо растворимого газового ядра со стабилизирующей оболочкой [8]. Размер позволяет им свободно проникать в кровеносную систему, а их газовое ядро обеспечивает усиление контрастности ультразвукового изображения из-за разницы акустического импеданса между газом и окружающей кровью с мягкими тканями. Кроме того, ультразвуковое поле может вызвать объемные колебания микропузырьков, что приводит к увеличению рассеяния и повышению контрастности изображения. Этот эффект может быть усилен за счет возбуждения пузырьков на их резонансной частоте, что обычно происходит в клинически одобренном диапазоне частот для диагностического ультразвука.

Микропузырьки также широко изучали на предмет их способности совершенствовать доставку лекарств в ткани для лечения заболеваний [8–11]. В сочетании с ультразвуком они способны локально увеличивать проницаемость клеточной мембраны для улучшения приема лекарственного препарата — процесс из-

вестный как сонопорация. Лекарственные препараты также могут быть непосредственно включены в сами пузырьки, а их высвобождение инициировано с помощью ультразвука высокой интенсивности, который вызывает расширение и последующий коллапс пузырьков, разрушающий стабилизирующую оболочку. Усовершенствованная локальная доставка позволила усилить терапевтический эффект при более низких дозах лекарств и, следовательно, снизить интоксикацию за пределами участка воспаления.

В большинстве упомянутых примеров кавитационная активность, вызванная акустическим воздействием, имеет место в сильно ограниченных пространствах. В экспериментах было показано, что диффузия газа через микропузырьки в ультразвуковом поле и в ограниченном пространстве нано- и микроканалов может (частично) блокировать их и препятствовать их корректному использованию [12]. При этом пузырьки обычно образуются либо из растворенного в жидкости газа, либо из паров жидкости, возникающих при кипении или химических процессах вдоль канала.

С одной стороны, следует отметить, что в отсутствие внешнего звукового поля пузырьки любого размера неустойчивы, так как давление внутри пузырька больше, чем в жидкости, из-за поверхностного натяжения, и пузырек имеет тенденцию к медленному растворению. С другой стороны, колебания пузырька, вызванные периодическим акустическим полем, инициируют потоки газа в пузырек и из него. Это явление называется ректифицированной диффузией и обычно приводит к росту пузыря [13].

Одним из наиболее показательных примеров влияния ректифицированной диффузии в ограниченной жидкости на промышленные приложения является технология струйной печати (см. работу [14] и ссылки в ней). В промышленных условиях пьезоакустическая струйная печать по требованию является широко распространенным технологическим применением микрофлюидики, которое используется в полиграфической промышленности. В этом методе пьезоакустическая печатающая головка может по требованию подавать отдельные капли из сопла, вытесняя чернила за счет деформации пьезоэлектрического элемента и возникающего в результате поля давления. При определенных условиях пузырек воздуха может оказаться в сопле, в частности при больших частотах струйной печати, превышающих 20 кГц.

Было показано, что пузырьки зарождаются на несмачиваемых частицах грязи, взвешенных в чернилах. Другие механизмы возникновения пузырей включают отрыв пузырька от входящей газовой струи, формирующейся на колеблющемся воздушно-чернильном мениске за счет фокусировки потока, и возникновение кавитации в фазе разрежения волны давления [15].

Большинство чернил не являются чистыми жидкостями и имеют сложный состав, содержащий несколько жидкостей с различными свойствами, пигменты, коллоидные частицы, латекс, сшивающие агенты, поверхностно-активные вещества и полимеры, что также увеличивает вероятность образования пузырьков на взвешенных частицах в чернилах. После этого пузырек растет за счет ректифицированной диффузии, так как чернила содержат некоторое количество растворенного газа, что приводит к модификации процесса формирования капель и нарушению технологии печати.

Как только пузырек оказался в чернилах, практически он может быть удален вместе с каплей чернил за несколько циклов работы пьезоэлемента или ликвидирован путем диффузионного растворения, т. е. выключением пьезовозбуждения на несколько минут [16]. Эти методы потребляют как чернила, так и рабочее время и поэтому крайне нежелательны. Таким образом, образование пузырьков и последующая ректифицированная диффузия в ограниченной жидкости являются важными технологическими проблемами современной промышленной цифровой печати.

Задача о массопереносе газа, растворенного в бесконечной жидкости, вокруг пузырька, совершающего объемные колебания, широко исследована [17–22]. Теоретические изыскания ректифицированной диффузии в ограниченной жидкости до сих пор привлекали мало внимания.

В настоящее время существует несколько моделей трехслойной геометрии ограниченных пузырьков [23–28], которые предполагают фиксированное количество газа в пузырьке. В работе [28] исследуется динамика пузырька в сферической ячейке жидкости, заключенной в бесконечное упругое твердое тело, когда в качестве управляющего динамического параметра используется давление в твердом теле вдали от пузырька. Авторы провели анализ колебаний пузырька и рассмотрели динамический отклик малых и больших пузырьков в состояниях ниже и выше порога кавитации соответственно.

Динамика кавитационного пузырька в ограниченной жидкости представляет особый интерес с точки зрения ректифицированной диффузии, которая зависит от объемных колебаний пузырька. В работе [29] исследователи расширили модель, развитую в работе [28], и рассмотрели влияние растворенного газа на динамику кавитационного пузырька в ограниченной жидкости.

Анализ показал существование режимов динамики пузырька, которые могут обеспечить формирование результирующего устойчивого пузырька. Говоря о таковом, авторы имеют в виду, что размер пузырька остается постоянным в течение объемных осцилляций в среднем. В этом случае масса растворенного газа обеспечивает взаимную компенсацию потоков массы в пузырек и из него.

В работе [29] пузырек меняет свой размер начиная с зародыша пузыря, который растет/растворяется за счет ректифицированной диффузии. В нашей работе построена равновесная диаграмма диффузионной устойчивости пузырька и проанализировано влияние концентрации растворенного газа в ограниченной жидкости на динамику пузырька, сопровождающую формирование результирующего устойчивого пузырька. Показано, что возможны три режима диффузии: 1) полное растворение пузырька, 2) частичное растворение и 3) частичный рост пузырька, где два последних режима могут сопровождаться тремя динамическими режимами пузырька: 1) при наличии кавитационного отклика пузырька, 2) при отсутствии такового и 3) сочетание двух предыдущих динамических режимов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1.1. Динамическая модель для пузырька в жидкой ячейке. Случай фиксированной массы газа в пузырьке

Для начала введем и далее разовьем модель, представленную в работе [29], исходя из концепции неразрывного пузыря, где сферическая ячейка жидкости с пузырьком внутри заключена в бесконечную упругую твердую среду и подвергается растяжению или отрицательному давлению, как это показано на рис. 1.

Система уравнений динамики ограниченного пузырька постоянной массы с учетом давления вдали от пузырька в качестве параметра вынуждающей силы была предложена в работе [28]:

$$\begin{cases} \frac{R_l^3 - R_{l0}^3}{R_{l0}^3} = -\frac{p_\infty(t) - p_0}{K} + \frac{3}{4G}(p_l - p_\infty(t)), & R_b \frac{d^2 R_b}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR_b}{dt} \right)^2 A_1(R_b, R_l) + \frac{dR_b}{dt} \frac{dR_l}{dt} A_2(R_b, R_l) + \\ + \left(\frac{dR_l}{dt} \right)^2 A_3(R_b, R_l) + R_l \frac{d^2 R_l}{dt^2} A_4(R_b, R_l) = \frac{1}{\rho_l \Phi(R_b, R_l)} \left(p_g + p_V(T) - \frac{2\sigma}{R_b} - p_l - 4\mu \frac{\dot{R}_b/R_b - \dot{R}_l/R_l}{1 - (R_b/R_l)^3} \right), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\rho_l = \rho_{l0} \frac{R_{l0}^3 - R_{b0}^3}{R_l^3 - R_b^3}, \quad \Phi(R_b, R_l) = \frac{1 - (9/5)\varepsilon + \varepsilon^3 - (1/5)\varepsilon^6}{(1 - \varepsilon^3)^2}, \quad \varepsilon = \frac{R_b}{R_l},$$

$$A_1(R_b, R_l) = \frac{1 + (8/5)\varepsilon + (2/5)\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)(1 + (6/5)\varepsilon + (3/5)\varepsilon^2 + (1/5)\varepsilon^3)}, \quad A_2(R_b, R_l) = -\frac{3\varepsilon(2\varepsilon^2 + 8\varepsilon + 5)}{(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 5)},$$

$$A_3(R_b, R_l) = \frac{3\varepsilon^2(2\varepsilon^2 + 8\varepsilon + 5)}{2(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 5)}, \quad A_4(R_b, R_l) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1 + 3\varepsilon + \varepsilon^2}{1 + (6/5)\varepsilon + (3/5)\varepsilon^2 + (1/5)\varepsilon^3},$$

где R_{b0} и $R_b(t)$ — начальный и текущий радиусы пузырька соответственно, R_{l0} и $R_l(t)$ — начальный и текущий радиусы жидкой ячейки соответственно, $R_{b0} \ll R_{l0}$, ρ_{l0} и $\rho_l(t)$ — плотность жидкости в начальном и текущем состояниях, p_0 — начальное атмосферное давление, $p_\infty(t)$ — давление внешней вынуждающей силы, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости на границе раздела с газом/паром, μ — динамическая вязкость жидкости, K и G — модули всестороннего сжатия и сдвига упругого тела соответственно. Верхними точками обозначены производные по времени.

Предполагается, что пузырек содержит фиксированное количество неконденсируемого и нерастворимого газа и насыщенный пар постоянного давления $p_V(T)$, соответствующего фиксированной температуре системы. Диапазон давлений, рассматриваемый в этом исследовании, намного ниже, чем модуль всестороннего сжатия жидкости E_V , и поэтому последний предполагается постоянным. Таким образом, уравнения состояния жидкости и газа имеют вид

$$p_l = p_0 - E_V \frac{R_l^3 - R_b^3 - R_{l0}^3 + R_{b0}^3}{R_{l0}^3 - R_{b0}^3}, \quad p_g = \left(p_0 - p_V(T) + \frac{2\sigma}{R_{b0}} \right) \left(\frac{R_{b0}}{R_b} \right)^3.$$

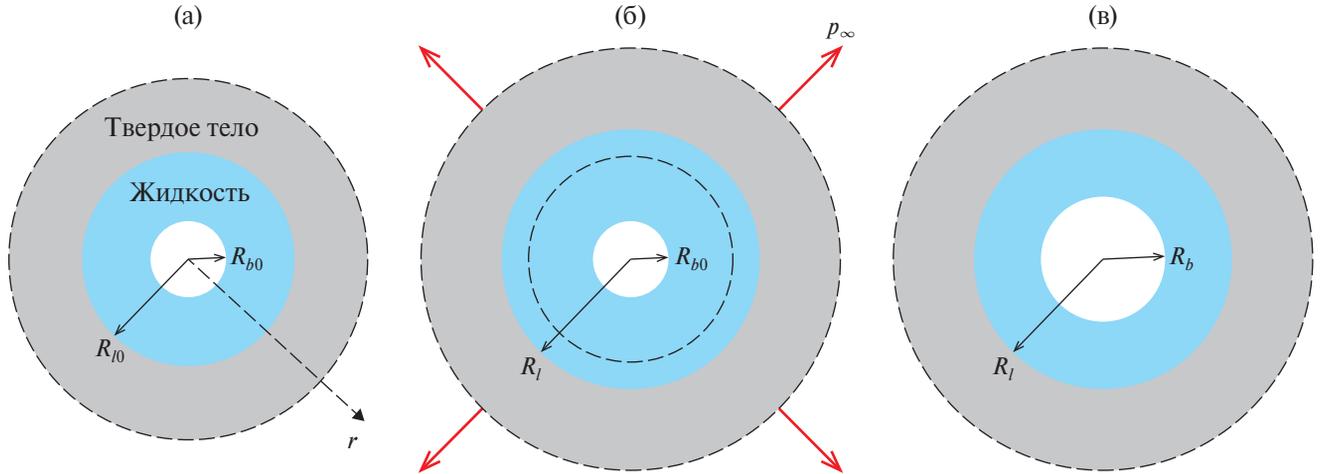


Рис. 1. Конфигурация квазистатических состояний системы: (а) исходное состояние, (б) равномерное расширение жидкой ячейки при растяжении p_∞ , (в) новое состояние равновесия.

Движение жидкости считается сферически-симметричным, и поле скорости жидкости в этом случае имеет только радиальную составляющую v_r [28]:

$$v_r(r, t) = \frac{R_l^3 - r^3}{R_l^3 - R_b^3} \frac{R_b^2 \dot{R}_b}{r^2} + \frac{r^3 - R_b^3}{R_l^3 - R_b^3} \frac{R_l^2 \dot{R}_l}{r^2}, \tag{1.2}$$

где r обозначает радиальное расстояние от центра пузырька.

Квазистатическое поведение системы пузырь–в–ячейке можно рассмотреть, задав все производные по времени в системе уравнений (1.1) равными нулю, что приводит к следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{R_l^3 - R_{l0}^3}{R_{l0}^3} = -\frac{p_\infty - p_0}{K} + \frac{3}{4G}(p_l - p_\infty), \\ p_l + \frac{2\sigma}{R_b} = p_g + p_V(T), \end{cases} \tag{1.3}$$

где первое выражение представляет собой уравнение изменения размера ячейки жидкости, а второе — уравнение баланса давления для ограниченного пузырька.

Решение системы (1.3) представлено на рис. 2а в виде зависимости напряжения в твердом теле $\overline{p_\infty} = p_\infty/p_0$ от радиуса пузырька.

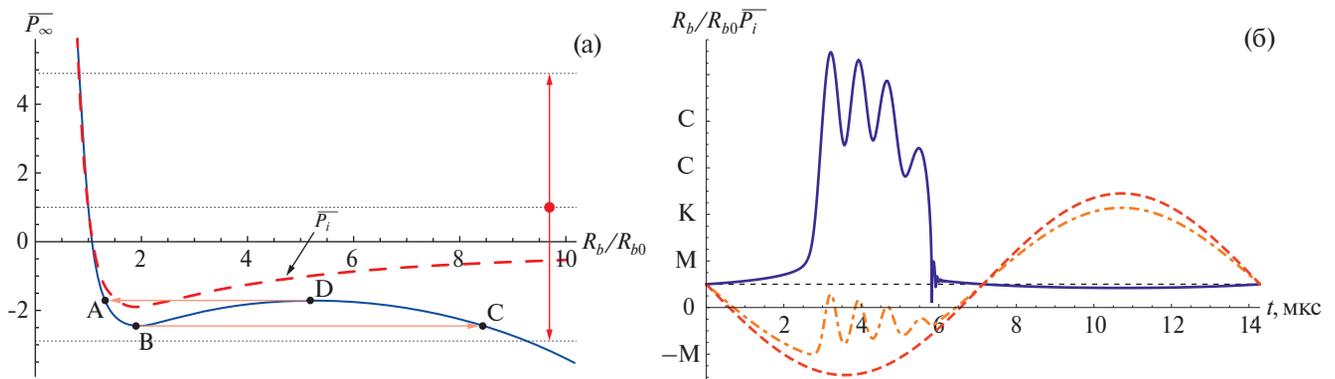


Рис. 2. (а) Зависимость безразмерного напряжения в твердом теле от радиуса пузырька для $R_{b0} = 272$ нм (или $\mathfrak{R}_{b0}^* \approx 0.19$ на рис. 3, большой закрашенный круг). Линия из точек $p_\infty = 1$ соответствует начальному состоянию. Пунктирная линия – давление жидкости $p_l = p_l/p_0$. Двойная стрелка показывает амплитуду давления внешнего воздействия $\Delta p = 390$ кПа. (б) Изменение радиуса пузырька (сплошная линия), давления жидкости (штрихпунктирная линия) и внешнего воздействия (пунктирная линия) при $\Delta p = 390$ кПа, $f_{ext} = 70$ кГц.

Численные расчеты проводились для $R_{b0} = 272$ нм, $R_{l0} = 40$ мкм, $\sigma = 0.07286$ Н/м, $\rho_{l0} = 10^3$ кг/м³, $p_0 = 0.1$ МПа, $p_V = 2338$ Па, $E_V = 2.2$ ГПа, $K = 4.5$ ГПа и $G = 0.74$ ГПа для воды как жидкости и азота как газа при $T = 293$ К. Значения модуля сдвига G и модуля всестороннего сжатия K твердого тела выбраны в соответствии с экспериментами по кавитации в жестком полимерном гидрогеле [30].

Точки A и B на рис. 2а соответствуют стабильному (ниже порога кавитации) и критическому (порог кавитации) состояниям пузырька соответственно. Критический пузырек будет расти до конечного размера, отмеченного точкой C , тогда как в модели бесконечной жидкости пузырек испытывает бесконечный рост (см. работу [31]).

Состояния $B-D$ являются неустойчивыми. После точки C при увеличении натяжения пузырек будет непрерывно расти, в противном случае он будет непрерывно сжиматься до радиуса в метастабильной точке D и коллапсировать до радиуса в точке A с последующим непрерывным сжатием пузырька. В данной модели пузырек содержит фиксированную массу газа, которая сопротивляется полному сжатию пузырька.

Нелинейная динамика пузырька определяется решением системы уравнений (1.1) и показана на рис. 2б сплошной линией вместе с давлением в жидкой ячейке (штрихпунктирная линия) и периодическим внешним воздействием в твердом теле (штриховая линия), которое задается в виде

$$p_{\infty}(t) = p_0 - \Delta p \sin(2\pi f_{\text{ext}} t),$$

где $f_{\text{ext}} = 70$ кГц — частота внешней вынуждающей силы, $\Delta p = 390$ кПа — амплитуда осцилляций давления внешней вынуждающей силы, которая обеспечивает возникновение и исчезновение кавитации [31] и отмечена двойной стрелкой на рис. 2а. Для расчетов динамики пузырька динамическую вязкость воды брали по формуле $\mu = 10^{-3}$ Па · с.

1.2. Учет диффузии газа

Чтобы включить диффузию газа в эту модель, авторы в работе [29] предположили, что в жидкой ячейке присутствует некоторое количество растворенного газа, который участвует в переносе массы через динамическую границу, связанную с колеблющимся пузырьком, так что общее количество газа в системе пузырька—ячейке считается постоянным, и потоки массы во внешнюю среду отсутствуют. Постановка задачи включает следующие определяющие уравнения:

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + v_r(r, t) \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} \right), \quad (1.4)$$

$$\tilde{c}|_{r=R_b(t)} = H \left(p_0 - p_V(T) + \frac{2\sigma}{R_{b0}} \right) \left(\frac{R_{b0}}{R_b(t)} \right)^3, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} \Big|_{r=R_l(t)} = 0, \quad (1.6)$$

$$\tilde{c}|_{t=0} = c_{\infty}, \quad (1.7)$$

$$\frac{dm_g}{dt} = 4\pi R_b^2(t) D \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} \Big|_{r=R_b(t)}. \quad (1.8)$$

Здесь уравнение (1.4) описывает конвективную диффузию, где \tilde{c} — массовая концентрация газа, растворенного в жидкой ячейке; $v_r(r, t)$ — радиальное поле скоростей в жидкой ячейке (см. (1.2)) и D — коэффициент диффузии газа в жидкости. Уравнения (1.5) и (1.6) — граничные условия на поверхностях пузырька и жидкой ячейки соответственно, где H — постоянная Генри. Уравнение (1.7) — начальное условие, где c_{∞} — однородная концентрация газа в жидкости, при которой предполагается образование пузырька. Уравнение (1.8) — скорость массопереноса через поверхность пузырька, где m_g — масса газа в пузырьке.

Эта задача о переносе массы была решена приближенно для большого числа Пекле $Pe = R_{b*}^2 \Omega_* / D \gg 1$, используя нормированные лагранжевы координаты, чтобы избежать трудностей из-за подвижных граничных условий

$$\eta = \frac{\xi^3 - x^3(\tau)}{\beta(\tau) - (1 - \alpha)x^3(\tau)},$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + (4G/3E_V)(1 - (R_{b0}/R_{l0})^3)}, \quad \beta(\tau) = \left(\frac{R_{l0}}{R_{b*}}\right)^3 - \alpha \left(\left(\frac{R_{b0}}{R_{b*}}\right)^3 + \left(1 + \frac{4G}{3K}\right) \frac{R_{l0}^3 - R_{b0}^3}{R_{b*}^3} \frac{p_\infty(\tau) - p_0}{E_V} \right),$$

где $R_{b*} = 2\sigma/p_0$ — типичный размер пузырька в жидкости при атмосферном давлении p_0 [32]; $\xi = r/R_{b*}$, $x(\tau) = R_b(\tau)/R_{b*}$; $\tau = t\Omega_*$, где Ω_* — собственная частота радиальных колебаний пузырька с характерным радиусом R_{b*} [28]:

$$\Omega_* = \frac{1}{2\pi R_{b*}} \sqrt{\frac{3}{\rho_{l0}} \left(p_0 - p_V(T) + \frac{4\sigma}{3R_{b*}} \right)}.$$

Следуя работе [29], мы используем инженерное приближение, в котором колебания пузырька предполагаются быстрыми, а рост/уменьшение среднего размера пузырька считается медленным, так что можно разделить задачу массопереноса на две части.

В первой части отсутствует влияние массопереноса в системе на быстрые колебания пузырька, тогда как во второй рост/уменьшение пузырька рассматривается в среднем, предполагая незначительное изменение массы газа в пузырьке за период внешней вынуждающей силы.

Последнее характеризуется медленной диффузией, усиленной конвекцией, и рассматривается во втором масштабе времени $\lambda = tD/R_{b*}^2$, который отражает медленное диффузионное поведение. В работе [29] показано, что массоперенос в системе пузырь-в-ячейке состоит из двух последовательных физически согласованных режимов: 1) растущего обедненного слоя и 2) диффузии газа внутри жидкой ячейки. Оба режима характеризуются схожей зависимостью усредненной по времени скорости изменения массы газа в пузырьке, которая имеет вид

$$\frac{dm_g^*}{d\lambda} = \frac{c_\infty - C^*(\lambda)}{T_{rd}}, \quad (1.9)$$

где $m_g^* = m_g/m_{liq}^*$ — масса газа в пузырьке, деленная на массу жидкости, вытесненной объемом характерного пузырька: $m_{liq}^* = \rho_{l0} \frac{4\pi R_{b*}^3}{3}$. Функция $C^*(\lambda)$ — усредненная концентрация газа на поверхности пузырька:

$$C^*(\lambda) \equiv c_{sb} \langle x^{-3}(\tau) \rangle_{\tau_1},$$

$$c_{sb} = c_{sp} \left(1 + \frac{8}{p_0^* R_{b0}^* We} \right)^{-3}, \quad p_0^* = \frac{p_0 - p_V(T)}{(1/2)\rho_{l0} R_{b0}^{*2} \Omega_*^2}, \quad R_{b0}^* = \frac{R_{b0}}{R_{b*}}, \quad We = \frac{2\rho_{l0} (R_{b0}^* \Omega_*)^2 R_{b*}}{\sigma},$$

где $c_{sp} = H^* p_0^*$ — концентрация насыщения в жидкости, отделенной от газа при давлении p_0^* плоской границей, $H^* = \frac{1}{2} \rho_{l0} R_{b0}^{*2} \Omega_*^2 H$; c_{sb} — концентрация насыщения в жидкости, отделенной от газа сферическим пузырьком безразмерного радиуса $x = 1$; We — число Вебера. Функция T_{rd} — безразмерное характерное время скорости роста пузырька ($T_{rd} > 0$), которое зависит от режима массопереноса.

В этом подходе используются две разные процедуры усреднения для решения диффузионной задачи. Первая — обычное усреднение по безразмерному периоду T_{ext} акустического поля:

$$\langle f(\eta, \tau) \rangle_{\tau} = \frac{1}{T_{ext}} \int_0^{T_{ext}} f(\eta, \tau) d\tau,$$

которое включено в функцию T_{rd} . Вторая — процедура “нелинейного усреднения” в определенном нелинейном масштабе времени:

$$\langle f(\eta, \tau) \rangle_{\tau_1} = \frac{1}{\int_0^{T_{ext}} \left\{ 9x^4(\tau) / [\beta(\tau) - (1 - \alpha)x^3(\tau)]^2 \right\} d\tau} \int_0^{T_{ext}} f(\eta, \tau) \frac{9x^4(\tau)}{[\beta(\tau) - (1 - \alpha)x^3(\tau)]^2} d\tau.$$

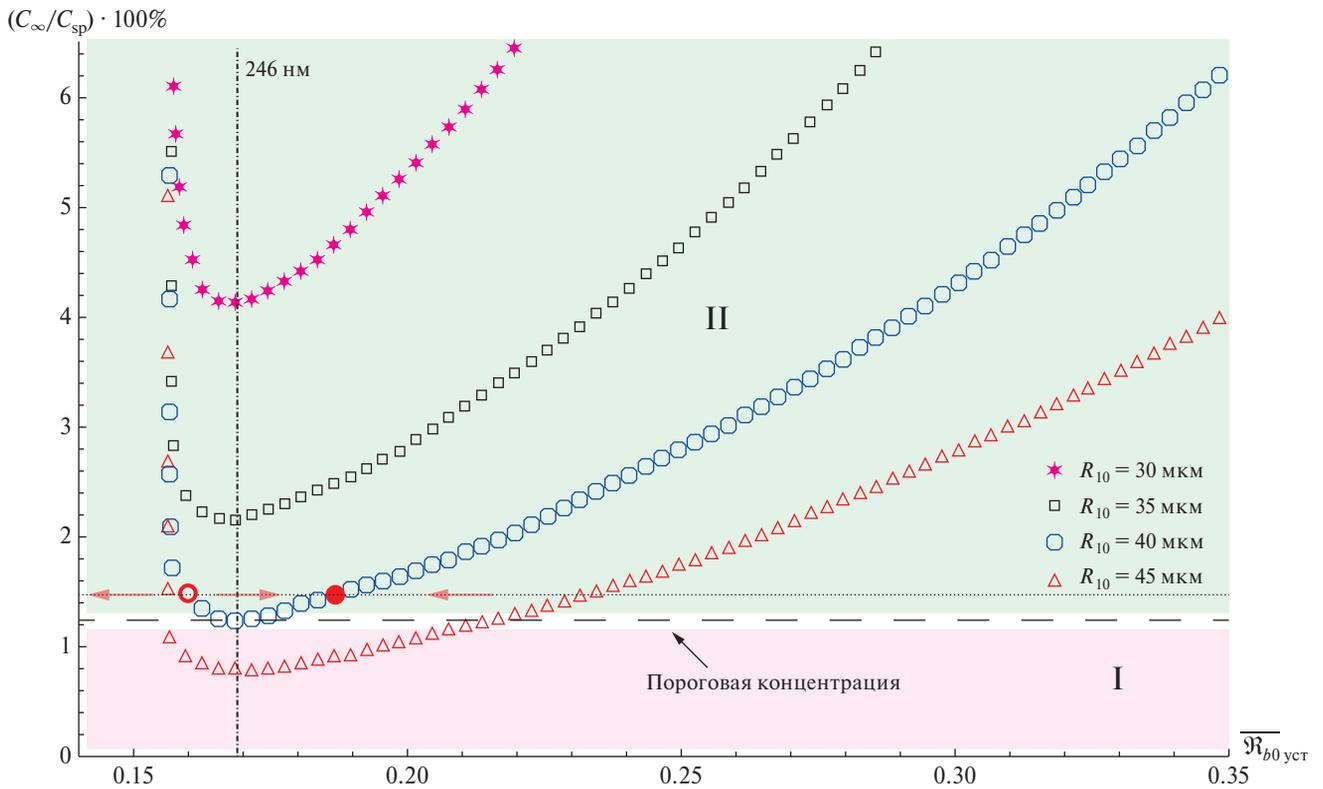


Рис. 3. Зависимость концентрации газа в жидкой ячейке от результирующего устойчивого размера пузырька $\overline{\mathfrak{R}}_{b0} = \mathfrak{R}_{b0}/R_{b^*}$ для различных размеров жидкой ячейки в диапазоне $R_{10} = 30 \div 45$ мкм ($\Delta p = 390$ кПа, $f_{\text{ext}} = 70$ кГц).

По сравнению с исследованием [29] в нашей работе не рассматривается эволюция размера пузырька в процессе массопереноса, а предполагается, что зародыш пузырька уже достиг результирующий устойчивый размер \mathfrak{R}_{b0} . В результате скорость массопереноса (1.9) равна нулю, что позволяет рассмотреть равновесную диаграмму диффузионной устойчивости пузырька — см. рис. 3. Набор физических параметров и форма внешнего воздействия выбраны такими же, как введено ранее.

2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

В качестве примера рассмотрен случай размера жидкой ячейки $R_{10} = 40$ мкм (показано полыми кружками на рис. 3). Полное растворение пузырька любого размера ожидается при концентрации газа c_∞ в диапазоне $0 \div 1.24\%$ от c_{sp} (область I на рис. 3), где потоки массы из осциллирующего пузырька в среднем превышают потоки массы в пузырек.

Концентрация газа 1.25% от c_{sp} является пороговой, обеспечивающей формирование устойчивого ненулевого размера пузырька $\mathfrak{R}_{b0}^{thres} = 246$ нм (или $\overline{\mathfrak{R}}_{b0}^{thres} \approx 0.17$ на рис. 3). Это означает, что при фиксированной концентрации газа в жидкости пузырек любого ненулевого размера изменяется так, что результирующий устойчивый размер пузырька будет равен $\mathfrak{R}_{b0}^{thres}$. Для концентрации газа c_∞ превышающей 1.25% от c_{sp} , существует устойчивое состояние пузырька, которое зависит от определенного значения концентрации газа в жидкости (область II на рис. 3).

Как пример рассмотрен случай, когда концентрация газа c_∞ равна 1.48% от c_{sp} (линия из точек, рис. 3). Этой концентрации газа соответствуют два значения радиуса пузырька: $\mathfrak{R}_{b0}^\circ = 233$ нм (или $\overline{\mathfrak{R}}_{b0}^\circ \approx 0.16$ на рис. 3, большой жирный круг) и $\mathfrak{R}_{b0}^\bullet = 272$ нм (или $\overline{\mathfrak{R}}_{b0}^\bullet \approx 0.19$ на рис. 3, большой закрашенный круг).

Радиус $\mathfrak{R}_{b0}^\circ = 233$ нм является неустойчивым, и пузыри с радиусом $\mathfrak{R}_{b0} < \mathfrak{R}_{b0}^\circ$ растворяются за счет диффузионного потока из пузырька в жидкость. Частичный рост наблюдается для пузырьков с радиусом $\mathfrak{R}_{b0}^\circ < \mathfrak{R}_{b0} < \mathfrak{R}_{b0}^\bullet$, которые будут расти до тех пор, пока не достигнут устойчивого радиуса $\mathfrak{R}_{b0}^\bullet$. Если размер пузырька больше $\mathfrak{R}_{b0}^\bullet$, пузырек сжимается до радиуса $\mathfrak{R}_{b0}^\bullet$, т.е. реализуется частичное растворение пу-

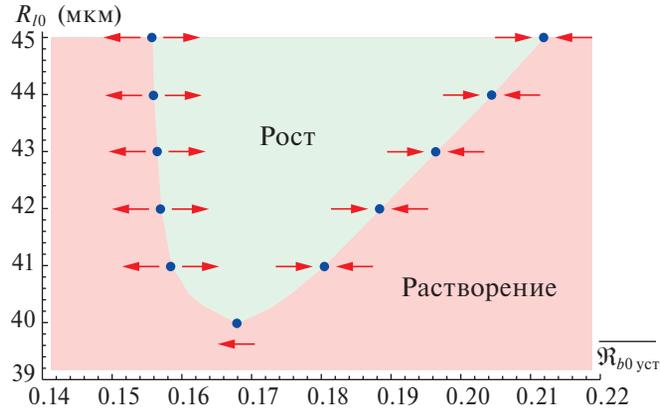


Рис. 4. Пространство параметров $(\overline{\mathfrak{R}}_{b0}, R_{l0})$ для фиксированной концентрации газа 1.25% от c_{sp} (пунктирная линия на рис. 3).

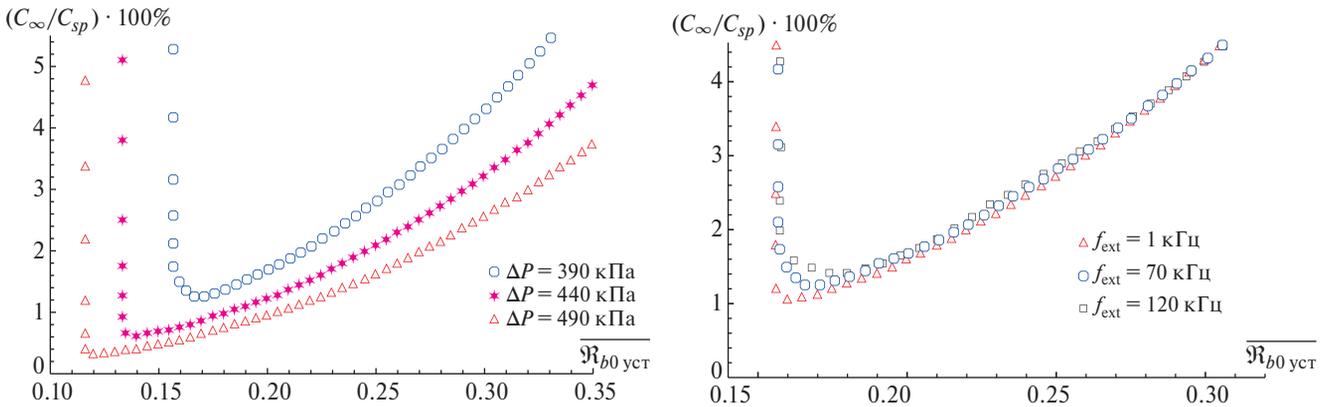


Рис. 5. Зависимость концентрации газа в жидкой ячейке от результирующего устойчивого размера пузырька для различных параметров внешнего воздействия: (а) — амплитуда давления в диапазоне $\Delta p = 390 \div 490$ кПа, $R_{l0} = 40$ мкм, $f_{ext} = 70$ кГц; (б) — частота в диапазоне $f_{ext} = 1 \div 120$ кГц, $R_{l0} = 40$ мкм, $\Delta p = 390$ кПа.

зрышка. Таким образом, размер пузырька $\mathfrak{R}_{b0} > \mathfrak{R}_{b0}^{\circ}$ является необходимым условием диффузионной устойчивости пузырька в ограниченной жидкости.

Полученные результаты качественно аналогичны результатам, представленным в работе [20], где авторы рассмотрели задачу массопереноса для осциллирующего пузырька при внешнем воздействии в модели бесконечной сжимаемой жидкости: при малой концентрации газа пузырек полностью растворяется в жидкости, а при большой концентрации газа, превышающей пороговую, пузырек имеет аттрактороподобное состояние, которое обеспечивает ненулевой результирующий устойчивый размер пузырька.

Следует отметить, что пузыри с радиусом $\mathfrak{R}_{b0}^{\circ} < \mathfrak{R}_{b0} < \mathfrak{R}_{b0}^{thres}$ растут, тогда как в работе [29] авторы показали, что пузырьки (зародыши) с начальным радиусом меньше $\mathfrak{R}_{b0}^{thres}$ растворяются независимо от величины концентрации газа в жидкости. На рис. 3 также представлен случай различных размеров ячеек жидкости в диапазоне $R_{l0} = 30 \div 45$ мкм. Анализ показывает, что пороговый радиус пузырька не зависит от размера жидкой ячейки и равен $\mathfrak{R}_{b0}^{thres} = 246$ нм, тогда как пороговая концентрация газа увеличивается с уменьшением размера жидкой ячейки, что согласуется с результатами работы [29]. Ожидается, что последующее уменьшение размера жидкой ячейки потребует значительного увеличения концентрации газа для образования пузырька порогового размера.

Рисунок 3 может быть представлен также в пространстве параметров $(\overline{\mathfrak{R}}_{b0}, R_{l0})$ — см. рис. 4. Для фиксированной концентрации газа 1.25% от c_{sp} можно рассмотреть равновесную диаграмму поведения пузырька для различных размеров ячейки жидкости. Небольшие значения R_{l0} приводят к полному растворению пузырьков любого размера, тогда как при критическом значении $R_{l0} = 40$ мкм возникает устойчивый радиус пузырька $\mathfrak{R}_{b0}^{thres} = 246$ нм ($\overline{\mathfrak{R}}_{b0}^{thres} \approx 0.17$). Диаграмма на рис. 4 содержит области роста (светлое окра-

шивание) и растворения (темное закрашивание), где устойчивые и неустойчивые состояния пузырька обозначены сходящимися и расходящимися стрелками соответственно. При этом результирующий устойчивый размер пузырька монотонно растет с увеличением размера жидкой ячейки, что также сопровождается расширением области роста.

Аналогичный подход был использован в работе [20] при рассмотрении необходимого условия для устойчивых колебаний пузырька с помощью $(\mathfrak{R}_{b0}, \Delta p)$ — параметрического пространства. Следует отметить, что увеличение размера жидкой ячейки имеет такой же эффект, как и увеличение амплитуды давления внешней вынуждающей силы в бесконечной жидкости, что приводит к увеличению устойчивого размера пузырька.

Случай различных амплитуд давления в диапазоне $\Delta p = 390 \div 490$ кПа для $R_{j0} = 40$ мкм и $f_{\text{ext}} = 70$ кГц представлен на рис. 5а.

Анализ показывает, что по сравнению с изменением размера жидкой ячейки (см. рис. 3), уменьшение амплитуды давления приводит не только к увеличению пороговой концентрации газа, но и к образованию большего порогового радиуса пузырька. Это качественно согласуется с результатами работы [20], где авторы показали, что пороговая концентрация газа (как и соответствующий пороговый размер пузырька) увеличивается с уменьшением амплитуды давления внешней вынуждающей силы. На рис. 5б показан случай разных частот внешней вынуждающей силы в диапазоне $f_{\text{ext}} = 1 \div 120$ кГц для $R_{j0} = 40$ мкм и $\Delta p = 390$ кПа. При концентрации газа, превышающей 3% от c_{sp} , зависимость от частоты возбуждения отсутствует, и образующийся устойчивый пузырек формируется с одинаковым размером. Незначительное отличие возникает при небольшой концентрации газа, так что пороговая концентрация газа (как и пороговый радиус пузырька) имеет тенденцию к уменьшению с уменьшением частоты возбуждения.

3. РЕЖИМЫ ДИНАМИКИ УСТОЙЧИВОГО ПУЗЫРЯ

В предыдущем разделе было показано, что диффузионная устойчивость пузырька обеспечивается двумя режимами диффузии (частичный рост и частичное растворение). В текущем разделе рассматривается влияние концентрации газа в жидкой ячейке на переходную динамику пузырька, которая сопровождает формирование устойчивого пузырька.

Параметрическое пространство $(\overline{\mathfrak{R}_{b0}}, R_{j0})$ для концентраций газа $c_{\infty}/c_{sp} = 2.8, 4.8\%$ и размера жидкой ячейки в диапазоне $R_{j0} = 40 \div 45$ мкм показано на рис. 6. Здесь диаграмма равновесия качественно соответствует усеченной зависимости на рис. 4, так как при данных концентрациях газа пороговый радиус пузырька формируется при меньшем размере жидкой ячейки, что выходит за рамки диапазона $R_{j0} = 40 \div 45$ мкм (см. рис. 3).

Неустойчивые состояния для обеих концентраций газа почти одинаковы и обозначены полыми кружками. Сплошная линия рассчитана с использованием подхода, разработанного в работе [28], где предполагается фиксированная масса газа в пузырьке (см. уравнение (27) в этой ссылке). Эта линия соответствует пороговым состояниям пузырька, которые делят параметрическое пространство на две области.

В первой, обозначенной как наличие кавитации, динамика пузырька характеризуется как возникновением, так и исчезновением кавитации, как это показано на рис. 2б, тогда как во второй области (отсутствии кавитации) кавитация полностью подавляется жидким микровключением, и колебания пузырька проходят нелинейным (невзрывным) образом, что аналогично поведению пузырька, представленному в работе [31].

Анализ показывает, что пузырек с размером $\overline{\mathfrak{R}_{b0}} < 0.16$ будет подвергаться полному растворению при обеих концентрациях газа. В этом случае начальная динамика пузырька характеризуется явлениями кавитации, включающими возникновение и исчезновение кавитации.

В работе [29] авторы показали, что уменьшение массы газа в пузырьке приводит к повышению порога кавитации, и амплитуда давления внешнего воздействия становится недостаточной для возникновения кавитации, так что пузырек колеблется вокруг своего начального состояния нелинейным (невзрывным) образом. После этого поверхностное натяжение усиливает растворение пузырька в силу закона Генри, что приводит к полному растворению пузырька.

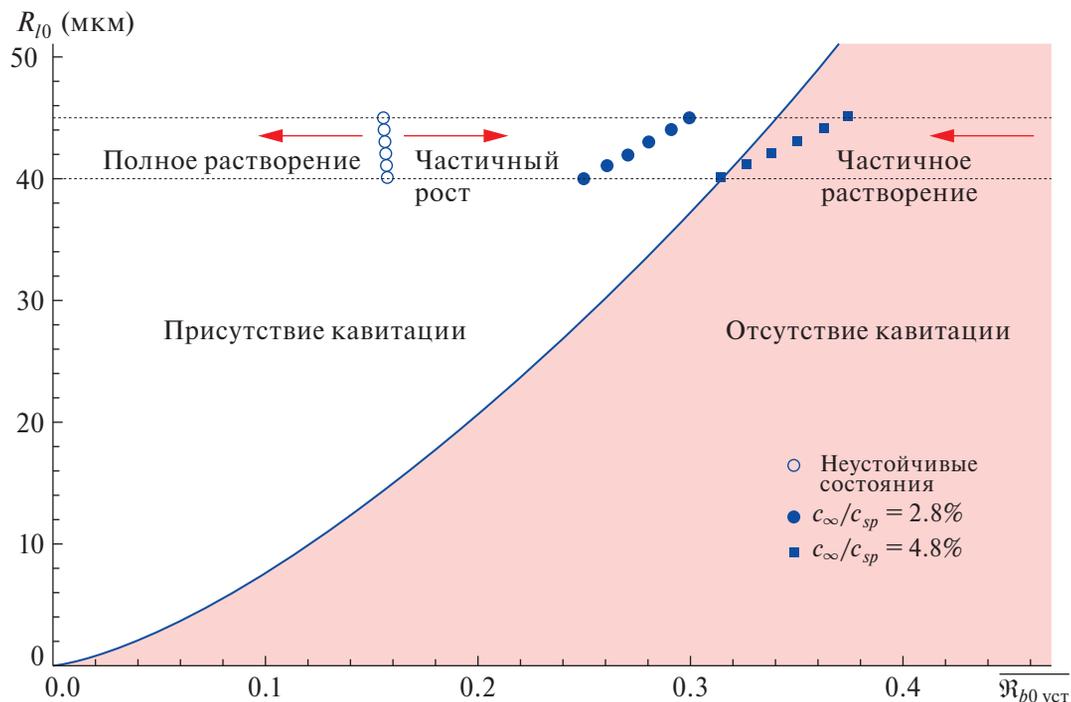


Рис. 6. Карта режимов динамики пузырька и равновесная диаграмма его поведения при различных концентрациях газа в ячейках жидкости размером $R_{10} = 40 \div 45$ мкм. Сплошной линией показаны пороговые состояния пузырька, обеспечивающие наличие/отсутствие кавитации в системе при фиксированной массе газа в пузырьке.

Режим частичного роста также реализуется для обеих концентраций газа при $\overline{Re}_{b0} > 0.16$ и ограничен устойчивым размером пузырька для соответствующего размера жидкой ячейки и концентрации газа в жидкости. С одной стороны, когда концентрация газа $c_{\infty}/c_{sp} = 2.8\%$, увеличение массы газа в пузырьке не приводит к заметному изменению его динамики, что обеспечивает возникновение кавитации в системе. С другой стороны, пузырек подвергается частичному растворению, когда его размер превышает устойчивый размер пузырька для соответствующего размера жидкой ячейки, как это показано на рис. 3.

Область, заключенная между устойчивыми размерами пузырька и сплошной линией ($0.24 < \overline{Re}_{b0} < 0.30$), также характеризуется динамикой пузырька с возникновением кавитации. Следует отметить, что крупные пузырьки $\overline{Re}_{b0} > 0.30$ осциллируют без возникновения кавитации. В результате в режиме частичного растворения переходная динамика пузырька реализуется таким образом, что начиная с относительно малых нелинейных колебаний уменьшение массы газа в пузырьке усиливает отклик пузырька на внешнее воздействие, и кавитация возникает в точке пересечения сплошной линии на рис. 6.

Другой случай переходной динамики пузырька представлен на рис. 6 для концентрации газа $c_{\infty}/c_{sp} = 4.8\%$. Здесь диффузионная устойчивость обеспечивается динамикой пузырька в отсутствие кавитации. В этом случае частичное растворение сопровождается нелинейной динамикой пузырька без резкого кавитационного роста. Однако в режиме частичного роста пузырек изначально подвергается кавитационному зарождению, которое непрерывно затухает и исчезает при пересечении сплошной линии.

Таким образом, концентрация газа в ограниченной жидкости оказывает существенное влияние на динамику пузырька, сопровождающую диффузионные режимы в системе пузырь–в–ячейке. При фиксированной концентрации газа диффузионные режимы, обеспечивающие диффузионную устойчивость (частичный рост и частичное растворение), могут формироваться при условии трех режимов динамики пузырька: 1) при наличии зарождения кавитации, 2) в условиях отсутствия кавитации и 3) прямом или обратном сочетании двух предыдущих динамических режимов. В результате концентрация газа играет роль управляющего параметра, который позволяет выбрать определенный режим динамики при формировании устойчивого пузырька.

4. ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Принимая во внимание теоретические выводы, полученные в настоящем исследовании, можно предположить, что диффузионные и динамические режимы пузырька в ограниченной жидкости имеют потенциал для дальнейшего изучения и использования в промышленных приложениях ультразвука. Возможные применения кратко обсуждаем далее.

Доставка лекарств

Переходная динамика пузырька напоминает его поведение в состоянии резонанса, когда наблюдается многократное увеличение радиуса пузырька при достижении определенного размера за счет ректифицированной диффузии при фиксированной частоте возбуждения. В этом случае расширение пузырька в ограниченной жидкости лимитируется конечным размером, что позволяет управлять динамикой пузырька по сравнению с взрывным его ростом при реальном резонансе.

Такое поведение может быть рассмотрено при изучении доставки лекарств, разработке стратегии смягчения последствий коллапса пузырьков в кровеносной сети с последующим разрушением стабилизирующей оболочки и высвобождением лекарственного препарата.

Переходная динамика пузырька также может быть полезна для инициирования химических и физических процессов, а также увеличения скорости химических реакций за счет эффектов массопереноса.

Дегазация эпоксидной смолы при производстве композитных материалов

Газообразные компоненты, растворенные в смоле при комнатных условиях, являются основным источником пузырьков, когда давление смолы оказывается ниже атмосферного. Этот механизм образования пузырьков представляет интерес при производстве композитных материалов с помощью технологии вакуумной инфузии смолы, где этапы инфузии и постзаполнения происходят при давлении значительно ниже атмосферного [33].

Наличие пузырьков в этом процессе может существенно ухудшить механические свойства композитных материалов. Для предотвращения образования пузырьков используют стандартную процедуру дегазации, при которой образцы смолы помещают в вакуумную камеру, и давление в ней снижается до заданного уровня. Тем не менее пузырьки воздуха все еще могут быть захвачены во время стадии пропитки из-за разницы в скоростях распространения смолы между волокнами армирующего материала.

Некоторые производители предпочитают нагревать смолу во время инфузии, так как это может помочь смоле течь за счет снижения вязкости, что также сокращает время отверждения [34]. В то же время вязкость смолы может постепенно увеличиваться за счет отверждения, особенно в местах застоя потока, что может иметь место в крупногабаритных композитных конструкциях со сложной геометрией [35]. В результате на этапе (пост-)заполнения, когда смола частично отверждена, пузырьки могут быть эффективно захвачены во временных образованиях жидких включений смолы внутри композитного образца. В этом случае акустическое излучение может локально воздействовать на смолу для растворения пузырьков при определенных условиях, обеспечивающих режим полного растворения.

Растворение пузырьков в канале с чернилами

Другой пример — пьезоакустическая струйная печать по требованию, где типичные динамические и геометрические параметры включают частоту возбуждения в диапазоне 10–100 кГц, давление в сопле, превышающее 150 кПа, чтобы обеспечить струйную печать с требуемыми скоростями, размер сопла диаметром и длиной около 20–30 мкм, диаметр капли около 20 мкм и др. [14].

Учитывая близость масштабов управляющих параметров в технологии струйной печати и в нашем исследовании, можно предположить, что диффузионные режимы потенциально могут быть реализованы при некоторых вспомогательных условиях, которыми являются несколько измененные управляющие параметры основной вынуждающей силы.

Подобная гипотеза была предложена в работе [14], где автор подчеркнул, что для оптимизации процесса струйной печати необходимо найти способы либо избежать захвата воздуха в канал с чернилами, либо

избавиться от пузырька быстрее, чем его пассивное растворение, например путем подачи восстановительного импульса на пьезоэлектрический привод в ранней фазе после захвата пузырька.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена диффузионная устойчивость осциллирующего сферического пузырька в сжимаемой сферической жидкой ячейке, окруженной бесконечно упругой твердой средой. Предполагается, что в жидкости имеется некоторое количество растворенного газа, который участвует в массопереносе за счет зависящего от времени периодического давления в твердом теле вдали от жидкой ячейки, обеспечивая возбуждение в системе.

Используется инженерное приближение, согласно которому рост/уменьшение пузырька рассматривается в среднем, так что за период внешнего воздействия масса газа в пузырьке заметно не меняется. Определяющее уравнение получено в предположении, что средний поток массы в пузырек равен нулю и размер пузырька в среднем остается постоянным при объемных колебаниях. Это позволяет рассмотреть равновесную диаграмму диффузионной устойчивости пузырька в ограниченной жидкости под действием внешней вынуждающей силы.

Выявлены три возможных режима диффузии: 1) полное растворение пузырька, 2) частичное его растворение и 3) частичный рост пузырька, где последние два режима соответствуют диффузионной устойчивости в системе пузырь–в–ячейке.

Анализ показывает, что режимы частичного растворения и частичного роста могут формироваться при условии трех динамических режимов пузырька: 1) при зарождении кавитации, где реализуются как ее возникновение, так и исчезновение; 2) при отсутствии кавитации, когда она полностью подавляется жидким микровключением и колебания пузырька проходят нелинейным (невзрывным) образом, и 3) при сочетании двух предыдущих динамических режимов, что соответствует переходной динамике пузырька с активацией/деактивацией зарождения кавитации. При этом концентрация растворенного газа в жидкости играет роль управляющего параметра, который позволяет регулировать режимом динамики при формировании устойчивого размера пузырька.

Рассмотрено влияние концентрации газа в жидкой ячейке на результирующий устойчивый размер пузырька при различных размерах жидкой ячейки, амплитудах давления и частотах внешнего воздействия. Полученные результаты сопоставлены с результатами случая устойчивых колебаний пузырька в звуковом поле давления в бесконечной жидкости.

Работа обеспечивает теоретическую основу для развития ультразвуковых технологий, связанных с приложениями массопереноса для пузырьков в ограниченных системах, а также проверки более сложных численных моделей и кодов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа профинансирована из средств бюджета института (учреждения, организации). Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clift R., Grace J., Weber M.* Bubbles, Drops and Particles. N. Y.: Academic Press, 1978. 380 p.
2. *Gondrexon N., Renaudin V., Boldo P., Gonthier Y., Bernis A., Pettier C.* Degassing effect and gas-liquid transfer in a high frequency sonochemical reactor // *J. Chem. Eng.* 1997. V. 66(1). P. 21–26. [https://doi.org/10.1016/S1385-8947\(96\)03124-5](https://doi.org/10.1016/S1385-8947(96)03124-5)
3. *Kim W., Kim T.-H., Choi J., Kim H.-Y.* Mechanism of particle removal by megasonic waves // *Appl. Phys. Lett.* 2009. V. 94 (8). P. 081908. <https://doi.org/10.1063/1.3089820>
4. *Lauterborn W., Kurz T.* Physics of bubble oscillations // *Rep. Prog. Phys.* 2010. V. 73. P. 106501. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/73/10/106501>

5. *Crum L.A., Mason T.J., Reisse J.L., Suslick K.S.* Sonochemistry and Sonoluminescence. Springer Dordrecht. 1999. 404 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9215-4>
6. *Wang S.S., Jiao Z.J., Huang X.Y., Yang C., Nguyen N.T.* Acoustically induced bubbles in a microfluidic channel for mixing enhancement // *Microfluid Nanofluidics*. 2009. V. 6. P. 847–852. <https://doi.org/10.1007/s10404-008-0357-6>
7. *Avvaru B., Venkateswaran N., Uppara P., Iyengar S.B., Katti S.S.* Current knowledge and potential applications of cavitation technologies for the petroleum industry // *Ultrason. Sonochem.* 2018. V. 42. P. 493–507. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2017.12.010>
8. *Batchelor D.V.B., Armistead F.J., Ingram N., Peyman S.A., McLaughlan J.R., Coletta P.L., Evans S.D.* The Influence of Nanobubble Size and Stability on Ultrasound Enhanced Drug Delivery // *Langmuir*. 2022. V. 38. P. 13943–13954. <https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.2c02303>
9. *Marmottant P., Hilgenfeldt S.* Controlled vesicle deformation and lysis by single oscillating bubbles // *Nature*. 2003. V. 423. P. 153–156. <https://doi.org/10.1038/nature01613>
10. *Coussios C.C., Roy R.A.* Applications of Acoustics and Cavitation to Noninvasive Therapy and Drug Delivery // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2008. V. 40. P. 395–420. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.40.111406.102116>
11. *Stride E., Coussios C.* Nucleation, mapping and control of cavitation for drug delivery // *Nat. Rev. Phys.* 2019. V. 1. P. 495–509. <https://doi.org/10.1038/s42254-019-0074-y>
12. *Moreno Soto Á., Lohse D., Van der Meer D.* Diffusive growth of successive bubbles in confinement // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 882. P. A6. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.806>
13. *Hsieh D., Plesset M.S.* Theory of Rectified Diffusion of Mass into Gas Bubbles // *J. Acoust. Soc. Am.* 1961. V. 33. P. 206–215. <https://doi.org/10.1121/1.1908621>
14. *Lohse D.* Fundamental Fluid Dynamics Challenges in Inkjet Printing // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2022. V. 54. P. 349–382. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-022321-114001>
15. *Reinten H., Jethani Y., Fraters A., Jeurissen R., Lohse D., Versluis M., Segers T.* Resonance behavior of a compliant piezo-driven inkjet channel with an entrained microbubble // *J. Acoust. Soc. Am.* 2022. V. 151. P. 2545–2557. <https://doi.org/10.1121/10.0009784>
16. *Fraters A., van den Berg M., de Loore Y., Reinten H., Wijshoff H., Lohse D., Versluis M., Segers T.* Inkjet Nozzle Failure by Heterogeneous Nucleation: Bubble Entrainment, Cavitation, and Diffusive Growth // *Phys. Rev. Appl.* 2019. V. 12. P. 064019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.12.064019>
17. *Eller A., Flynn H.G.* Rectified Diffusion during Nonlinear Pulsations of Cavitation Bubbles // *J. Acoust. Soc. Am.* 1965. V. 37. P. 493–503. <https://doi.org/10.1121/1.1909357>
18. *Fyrrillas M.M., Szeri A.J.* Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 277. P. 381–407. <https://doi.org/10.1017/S0022112094002806>
19. *Brenner M.P., Lohse D., Oxtoby D., Dupont T.F.* Mechanisms for Stable Single Bubble Sonoluminescence // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. P. 1158–1161. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.1158>
20. *Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.D., Parlitz U., Lauterborn W.* The role of surface tension in stable single-bubble sonoluminescence // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. P. 227–230. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.227>
21. *Hilgenfeldt S., Brenner M.P., Grossmann S., Lohse D.* Analysis of Rayleigh-Plesset dynamics for sonoluminescing bubbles // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 365. P. 171–204. <https://doi.org/10.1017/S0022112098001207>
22. *Brenner M.P., Hilgenfeldt S., Lohse D.* Single-bubble sonoluminescence // *Rev. Mod. Phys.* 2002. V. 74. P. 425–484. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.425>
23. *Church C.C.* The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 97. P. 1510–1521. <https://doi.org/10.1121/1.412091>
24. *Obreschkow D., Kobel P., Dorsaz N., de Bosset A., Nicollier C., Farhat M.* Cavitation bubble dynamics inside liquid drops in microgravity // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 97. P. 094502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.094502>
25. *Fourest T., Laurens J.M., Deletombe E., Dupas J., Arrigoni M.* Confined Rayleigh-Plesset equation for Hydrodynamic Ram analysis in thin-walled containers under ballistic impacts // *Thin-Walled Struct.* 2015. V. 86. P. 67–72. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.10.003>
26. *Vincent O., Marmottant P.* On the statics and dynamics of fully confined bubbles // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 827. P. 194–224. <https://doi.org/10.1017/jfm.2017.487>
27. *Wang Q.X.* Oscillation of a bubble in a liquid confined in an elastic solid // *Phys. Fluids*. 2017. V. 29. P. 072101. <https://doi.org/10.1063/1.4990837>
28. *Leonov K., Akhatov I.* Dynamics of an externally driven cavitation bubble in an elastic microconfinement // *Phys. Rev. E*. 2021. V. 104. P. 015105. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.015105>
29. *Leonov K., Akhatov I.* The influence of dissolved gas on dynamics of a cavitation bubble in an elastic micro-confinement // *J. Heat Mass Transf. Res.* 2022. V. 196. P. 123295. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123295>

30. Doinikov A.A., Marmottant P. Natural oscillations of a gas bubble in a liquid-filled cavity located in a viscoelastic medium // *J. Sound Vibr.* 2018. V. 420. P. 61–72. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.01.034>
31. Leonov K., Akhatov I. Towards a theory of dynamics of a single cavitation bubble in a rigid micro-confinement // *Int. J. Multiph. Flow.* 2020. V. 130. P. 103369. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103369>
32. Brennen C.E. *Cavitation and Bubble Dynamics*. N.Y.: Cambridge University Press, 2013. 268 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107338760>
33. Van Oosterom S., Schreier A., Battley M., Bickerton S., Allen T. Influence of Dissolved Gasses in Epoxy Resin on Resin Infusion Part Quality // *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.* 2020. V. 132. P. 105818. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2020.105818>
34. Afendi Md, Banks W.M., Kirkwood D. Bubble free resin for infusion process // *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.* 2005. V. 36(6). P. 739–746. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2004.10.030>
35. Shevtsov S., Zhilyaev I., Chang S-H., Wu J-K., Huang J-P., Snezhina N. Experimental and Numerical Study of Vacuum Resin Infusion for Thin-Walled Composite Parts // *Appl. Sci.* 2020. V. 10(4). P. 1485. <https://doi.org/10.3390/app10041485>

THE DIFFUSION STABILITY OF AN EXTERNALLY DRIVEN CAVITATION BUBBLE IN MICRO-CONFINEMENT

K. V. Leonov^{a,*} and I. Sh. Akhatov^a

^a*Bashkir State Medical University, Ufa, Russia*

* e-mail: k.leonoff@inbox.ru

Received August 03, 2023; revised September 10, 2023; accepted September 21, 2023

The diffusion stability of a single cavitation bubble in a spherical liquid cell surrounded by an infinite elastic solid is considered. The time-periodic pressure in the solid far away from the liquid cell is used as an external driving, which initiates bubble oscillations along with the gas diffusion process in the bubble-in-cell system. The work is based on the engineering approximation according to which the bubble growth/reduction is considered on average, assuming that during the period of the external driving the mass of gas in the bubble does not noticeably change. This theory predicts the existence of stably oscillating bubbles in confined liquid undergoing an external driving force. Three possible diffusion regimes are revealed: 1) total bubble dissolution, 2) partial bubble dissolution, and 3) partial bubble growth, where the last two regimes provide the diffusion stability in the bubble-in-cell system. The parametric study of the influence of the gas concentration dissolved in the liquid on the resulting stable bubble size is conducted. The obtained results are compared with the results for the case of the stable bubble oscillations in the pressure sound field in a bulk (infinite) liquid. The theoretical findings of the present study can be used for improvement of the modern applications of ultrasound technology.

Keywords: bubble dynamics, cavitation, ultrasound, diffusion

УДК 532.5:537.3

ДИАГНОСТИКА ИОНИЗАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В УГЛЕВОДОРОДНОМ ПЛАМЕНИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

© 2024 г. В. А. Полянский*, И. Л. Панкратьева

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия*

** E-mail: ilpan@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 17.09.2023 г.

После доработки 25.09.2023 г.

Принята к публикации 25.09.2023 г.

Рассматривается возможность оценки ионизационных параметров высокотемпературных газовых смесей, образующихся в результате процессов горения, на основе вольтамперных характеристик, измеренных с помощью электродов, создающих в исследуемых средах внешнее электрическое поле.

Ключевые слова: высокотемпературная газовая смесь, хемоионизация, объемный электрический заряд, вольтамперная характеристика, электрогидродинамика

DOI: 10.31857/S1024708424010049 EDN: SDUWDG

Проблемы, связанные с повышением эффективности горения различного типа газовых смесей, привлекают внимание исследователей длительное время и до сих пор не теряют своей актуальности. Один из путей в этом направлении основан на применении внешних электрических полей для воздействия на горящую среду [1, 2].

Механизмы взаимодействия пламени с электрическим полем рассмотрены в работах [3, 4]. Показано, что даже в отсутствии приложенного поля в области больших градиентов интенсивности источника ионизации горячей газовой смеси образуются зоны некомпенсированного электрического заряда, где возникают объемные кулоновские силы. При наличии внешнего электрического воздействия эти силы могут тем или иным образом влиять на поведение пламени.

Для их расчета, очевидно, необходимо иметь информацию об электрических свойствах среды, в частности о степени ионизации пламени. Для этой цели можно использовать вольтамперную характеристику (ВАХ), измеряемую с помощью электродов, создающих в среде внешнее электрическое поле. Далее на основе теоретических расчетов предложен способ их обработки, позволяющий получить оценку ионизационных параметров горячей газовой смеси.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Электрогидродинамическая модель среды и общая постановка задачи о взаимодействии горячей газовой смеси с внешним электрическим полем подробно описаны в работах [3, 4], поэтому здесь мы ограничимся краткой постановкой задачи.

Рассматривается многокомпонентная химически реагирующая газовая смесь, содержащая заряженные частицы двух сортов: с положительным и отрицательным знаком заряда (однократно положительно заряженные доминирующие ионы и свободные электроны).

В уравнениях для заряженных частиц учитывается диффузия и дрейф в электрическом поле, объемные реакции химической ионизации и диссоциативной рекомбинации. Объемный источник заряженных частиц зависит от концентраций реагирующих компонент смеси и от констант скоростей реакций хемоионизации и диссоциативной рекомбинации, величина которых, в основном, определяется температурой и сортом доминирующих ионов.

В окрестности границ пламени и в нем самом, очевидно, имеются большие градиенты концентраций компонент и температуры, следовательно, существует сильная неоднородность источника заряженных

частиц. В данной работе, как и в исследованиях [3, 4], для анализа ЭГД-характеристик среды пространственная неоднородность задается в виде некоторой модельной ступенчатой функции $W(x)$. Считается, что эта функция зависит только от координаты x , поперечной к стенкам плоского канала. По порядку величины в области максимальных значений W_{\max} использованная модельная функция соответствует наблюдаемым в экспериментах значениям.

Для исследования ВАХ на основе расчета электрогидродинамических свойств среды выбрана следующая упрощенная схема: область тепловыделения и ионизации за счет экзотермических реакций горения и реакций хемоионизации располагается между пристеночными холодными слоями, где величина ионизационного источника мала, хотя там и содержатся заряженные частицы из-за переноса их из горячей области. Область, где $W(x) \neq 0$, включает в себя как фронт горения, так и область продуктов горения, а ее ширина L , как и высота ступеньки W_{\max} , являются варьируемыми параметрами задачи.

Система уравнений в размерных переменных для концентраций ионизованных компонент реагирующей среды, характеризующих электрические свойства ее самой, электрического потенциала и напряженности электрического поля, в стационарном приближении имеет вид [5]

$$\frac{d}{dx}(n_i U_i) = W(x) - a n_1 n_2, \quad i=1,2; \quad (1.1)$$

$$n_i U_i = \text{sign}(e_i) b_i n_i E - D_i \frac{d}{dx} n_i; \quad (1.2)$$

$$E = -\frac{dF}{dx}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dx} \right) = -4\pi q, \quad q = \sum_i e_i n_i; \quad e_1 > 0, \quad e_2 < 0; \quad (1.3)$$

$$J_s = \sum_i e_i n_i U_i.$$

Здесь величины n_i , U_i , D_i , b_i — соответственно концентрации ионов ($i=1$) и электронов ($i=2$), нормальные к стенкам компоненты диффузионной скорости этих частиц, коэффициенты диффузии и подвижности; $W(x)$ — эффективная скорость объемной реакции ионизации, a — константа скорости объемной электрон-ионной диссоциативной рекомбинации, E — поперечная компонента напряженности электрического поля, e_i — заряд частицы, F — электрический потенциал, q — плотность объемного заряда, J_s — плотность полного тока.

При записи уравнений сделано предположение, что процесс стационарный, конвективный перенос не учитывается, все параметры среды зависят только от координаты x , перпендикулярной стенкам канала. Стенки канала проводящие и идеально каталитические для заряженных частиц. Расчеты проводятся для различных отрицательных потенциалов одной из стенок. Потенциал другой стенки принимается нулевым. В соответствии с этим граничные условия для уравнений (1.1)–(1.3) запишем в виде ($x=0$, h — координаты стенок канала):

$$F(0)=Fw, \quad F(h)=0, \quad n_i(0)=n_i(h)=0, \quad i=1,2. \quad (1.4)$$

Задача (1.1)–(1.4) решается численно методом установления по неявным разностным схемам с применением матричной прогонки (использовался разработанный авторами пакет CELL).

Уравнения и граничные условия предварительно записываются в безразмерном виде с характерными значениями входящих в задачу параметров. При этом координата отнесена к ширине канала h , концентрации заряженных частиц отнесены к $n_0 = (w_0/a_0)^{0.5}$, где $w_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$, $a_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$, скорость ионизации — к величине w_0 , объемный заряд — к en_0 , подвижности компонент — к подвижности ионов b_0 , электрический потенциал — к тепловому kT_0/e , поле — к kT_0/eh , $T_0 = 1300 \text{ К}$. Плотность электрического тока J_s отнесена к характерному току ионной компоненты $J_0 = (kT_0 b_0 w_0^{0.5})/a_0^{0.5} h$.

Еще раз отметим принимаемую в расчетах модель явления: область горения создает источник заряженных частиц W , между электродами задается от внешних источников постоянная во времени разность электрического потенциала, при этом учитывается также индуцированное ионизованной средой электрическое поле. В процессе решения вычисляется плотность полного тока на электроды для разных значений приложенного напряжения. Далее все результаты численных расчетов приведены для безразмерных параметров.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В расчетах используются ступенчатые функции $W(x)$ разной конфигурации [3], задающие неоднородный источник заряженных частиц между электродами. Детали кинетического процесса на границах и внутри источника для построения ВАХ большого значения не имеют и в расчетах не учитываются. Электроды, создающие внешнее электрическое поле, имеют безразмерные координаты $x = 0$ и $x = 1$. Распределения ЭГД- параметров среды для различных значений приложенного напряжения приведены в [4].

Результаты расчетов ВАХ для разных конфигураций источника $W(x)$ представлены на рис. 1. Видно, что есть слабо нелинейный участок ВАХ, когда растет по абсолютной величине ток на отрицательно заряженный электрод с увеличением напряжения на нем, и участок насыщения с постоянным значением тока при дальнейшем росте напряжения. На нелинейность ВАХ оказывают влияние ширина и высота ступеньки.

Величина тока насыщения J_{sat} также зависит от параметров функции $W(x)$, моделирующей факел. Ток насыщения есть во всех вариантах расчетов.

Заметим, что в традиционных зондовых измерениях угол наклона линейной части ВАХ применяется для определения концентрации электронов в среде. В данном исследовании для диагностики используется зависимость тока насыщения от характеристик среды.

На рис. 2, 3 можно видеть, что высота ступеньки и ширина, т. е. интенсивность ионизации W_{max} и размер зоны ионизации L , сильно влияют на величину тока насыщения. При этом имеют место линейные зависимости от каждого из этих параметров. Эти факторы дают возможность написать следующее соотношение для тока насыщения:

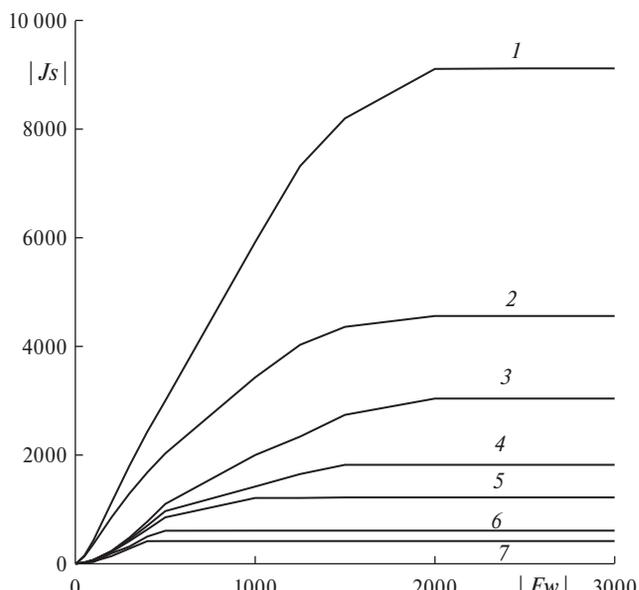


Рис. 1. Вольтамперные характеристики для трех различных конфигураций факела по ширине и интенсивности (высоты ступеньки) источника ионизации W . Линии: 1 — $W = 10, 0.2 < x < 0.8$; 2 — $W = 5, 0.2 < x < 0.8$; 3 — $W = 10, 0.4 < x < 0.6$; 4 — $W = 6, 0.4 < x < 0.6$; 5 — $W = 4, 0.4 < x < 0.6$; 6 — $W = 10, 0.47 < x < 0.53$; 7 — $W = 4, 0.47 < x < 0.53$.

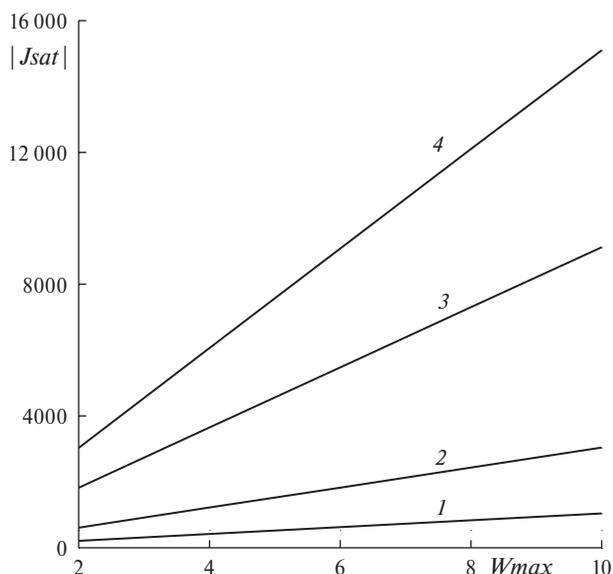


Рис. 2. Зависимость тока насыщения от интенсивности источника заряженных частиц W для разной ширины горячей области L . Линии: 1 — $L = 0.06$, 2 — $L = 0.2$, 3 — $L = 0.6$, 4 — $L = 1$.

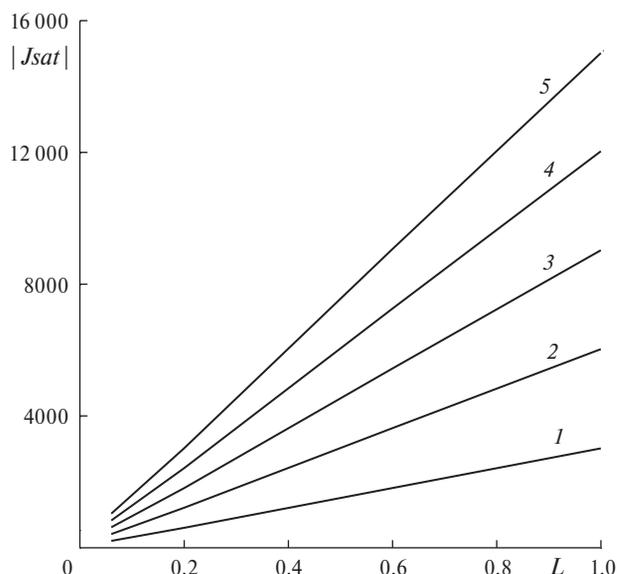


Рис. 3. Зависимость тока насыщения J_{sat} от характерного размера источника заряженных частиц L для разных W . Линии: 1 — $W = 2$, 2 — $W = 4$, 3 — $W = 6$, 4 — $W = 8$, 5 — $W = 10$.

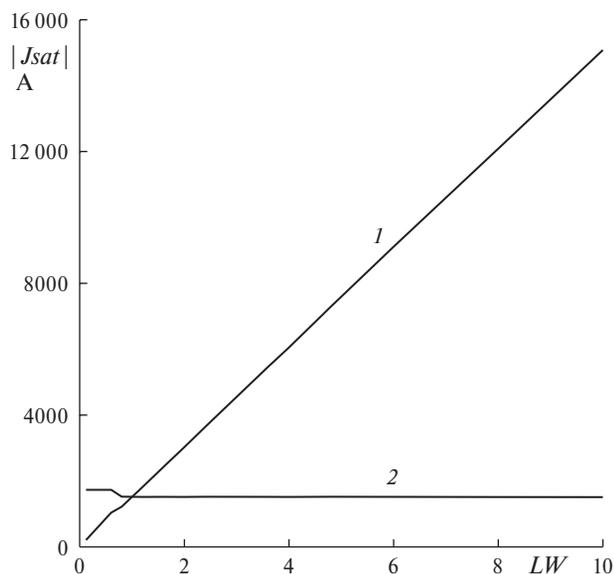


Рис. 4. Зависимость тока насыщения J_{sat} от произведения LW (линия 1); линия 2 – величина A в соотношении (2.1) для разных значений LW .

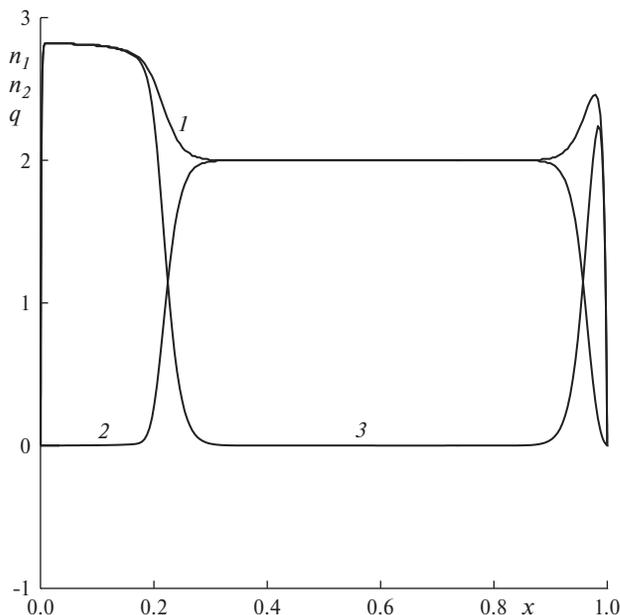


Рис. 5. Электроды полностью погружены в область горения. Распределения концентраций заряженных частиц и объемного заряда q в слабом приложенном поле ($W=4$, $L=1$, $F_w=-100$). Линии: 1 – n_1 , 2 – n_2 , 3 – q .

$$|J_{sat}| = ALW_{max}. \quad (2.1)$$

Здесь A – некоторый коэффициент пропорциональности, который нужно определить из расчетов, L – задаваемая из экспериментальных данных ширина ступеньки, W_{max} – высота ступеньки (принимаемая в модели эффективная величина источника заряженных частиц в области горения).

Зависимость (2.1) представлена на рис. 4 (линия 1).

Проведенные расчеты для широких диапазонов значений W_{max} и L позволяют найти величину коэффициента пропорциональности: $A = 1500$. Как можно видеть (линия 2), значение этого коэффициента не меняется почти во всем диапазоне изменений произведения LW .

Таким образом, измеряя в эксперименте ток насыщения и ширину области горения, можно получить в безразмерном виде величину эффективной скорости ионизации в пламени

$$W_{max} = |J_{sat}| / 1500L. \quad (2.2)$$

Это соотношение можно использовать для количественной оценки ионизационного процесса при горении газовых смесей.

В размерных величинах скорости ионизации, плотности тока и ширины факела (обозначенных звездочкой) соотношение (2.2) записывается в виде $W_{max}^* = B(|J_{sat}^*| / L^*)$, где $B = h^2(w_0 a_0)^{0.5} / 1500 b_0 k T_0$, нижний индекс $_0$ обозначает задаваемые характерные значения параметров задачи.

Если электроды полностью погружены в реагирующую среду и нет неоднородности источника заряженных частиц, области объемного заряда образуются в среде за счет граничных условий на поверхностях электродов и представляют собой обычные дебаевские слои, деформируемые приложенными электрическими полями.

Заметим, что в большинстве описанных в литературе экспериментов по изучению влияния поля на пламя электроды располагаются вне зоны горения. В слабом приложенном поле распределения безразмерных электрогидродинамических параметров среды для случая погруженных электродов представлено на рис. 5, 6.

Видно, что за счет разной подвижности заряженных частиц у стенок появляются дебаевские слои объемного заряда, образуемого положительными ионами. Более подвижные электроны быстрее поглощаются

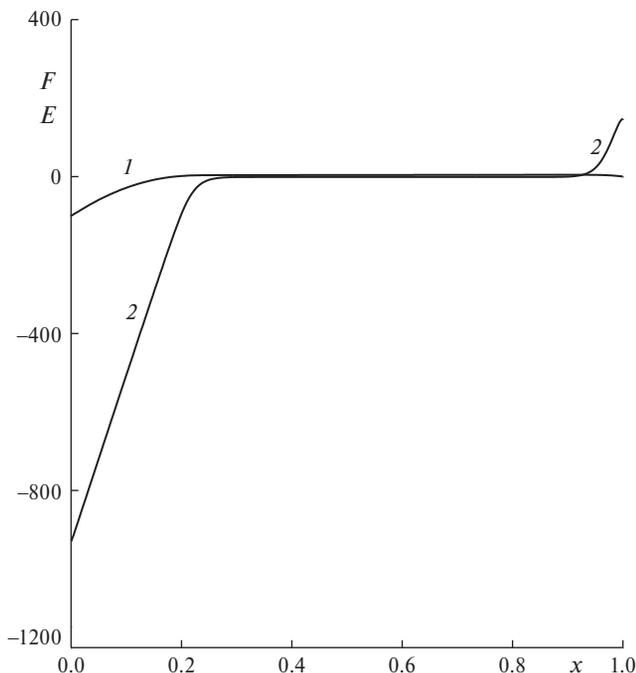


Рис. 6. Электроды полностью погружены в область горения. Распределения электрического потенциала F (линия 1) и напряженности поля E (линия 2) в слабом приложенном поле ($W = 4, L = 1, F_w = -100$).

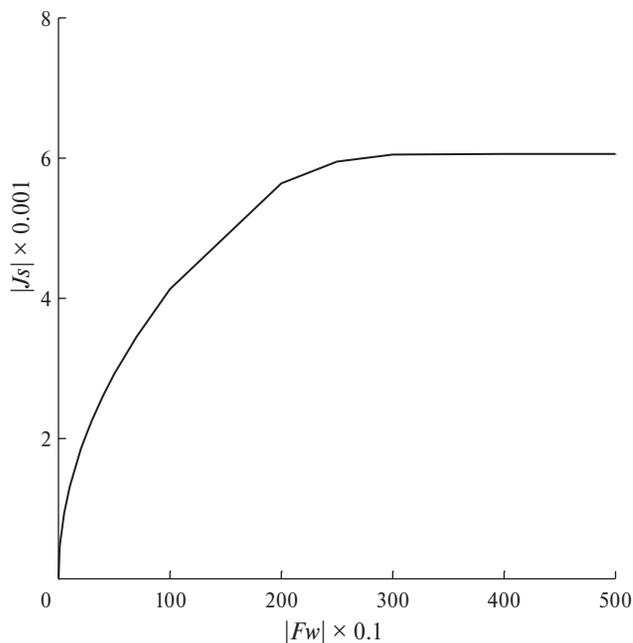


Рис. 7. Вольтамперные характеристики электродов, полностью погруженных в область ионизации ($W = 4, L = 1$).

стенками в процессе установления стационарного состояния среды. Максимальное значение концентрации ионов у стенок выше их равновесного значения.

Вольтамперная характеристика для конфигурации, когда электроды полностью погружены в область ионизации, аналогична ВАХ для других рассмотренных расположений электродов. На рис. 7 приведена ВАХ для этого случая при значении $W = 4, (0 < x < 1)$. Здесь можно видеть нелинейность на всем участке ВАХ до значений напряжения, при которых начинается насыщение тока.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В отличие от зондового подхода к диагностике ионизированной газовой смеси, когда угол наклона линейной части зондовой ВАХ на участке роста тока позволяет найти концентрацию заряженных частиц в среде, в рассматриваемом случае факела пламени информативной является величина тока насыщения, которая дает возможность оценить эффективное значение источника заряженных частиц W_{max} .

Величину W_{max} можно использовать при оценке справедливости кинетических расчетов процесса горения, где учитываются десятки компонент и большое количество констант скоростей химических реакций, а также для оценки степени ионизации в пламени из решения уравнения сохранения для квазинейтральной концентрации заряженных частиц.

Заметим, что угол наклона ВАХ на начальном участке может быть полезен для оценки W_{max} , если в эксперименте не удастся достичь тока насыщения раньше электрического пробоя среды из-за слишком сильного приложенного напряжения.

Следует отметить, что в рассматриваемых условиях отсутствия инъекции заряженных частиц с поверхности электродов с увеличением приложенного напряжения на ВАХ нет участка кривой Никурадзе с экспоненциальным ростом тока в очень сильных полях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При изучении способов воздействия на пламя приложенным электрическим полем в целях повышения эффективности процессов горения газовой смеси можно использовать электроды, создающие напряжение,

для построения ВАХ-среды. В работе показано, что участок ВАХ, соответствующий току насыщения, дает возможность получить оценку величины эффективной скорости ионизации в зоне горения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа финансирована за счет средств бюджета института (учреждения, организации). Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karnani S, Dunn-Rankin D.* Detailed characterization of DC electric field effects on small non-premixed flames // *Combust. Flame.* 2015. V. 162(7). P. 2865–2872.
2. *Gan Y.H., Wang M., Luo Y.L., Chen X.W., Xu J.L.* Effects of direct-current electric fields on flame shape and combustion characteristics of ethanol in small scale // *Adv. Mech. Eng.* 2016. V. 8(1). P. 1–14.
3. *Власов П.А., Панкратьева И.Л., Полянский В.А.* Исследование ЭГД-структуры течения высокотемпературной газовой смеси с неоднородным источником заряженных частиц // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 6. С. 94–100.
4. *Власов П.А., Панкратьева И.Л., Полянский В.А.* Исследование механизмов взаимодействия углеводородного пламени с электрическим полем // *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 4. С. 108–116.
5. *Pankratieva I.L., Polyanskii V.A.* Modeling electrohydrodynamic flows in slightly conducting liquids // *J. Applied Mechanics and Technical Physics.* 1995. V. 36. № 4. P. 513–519.

DIAGNOSTICS OF THE IONIZATION PROCESSES IN HYDROCARBON FLAME WITH THE USE OF THE CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTICS

V. A. Polyanskii^{a,*} and I. L. Pankrat'eva^a

^a *Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia*

^{*} *e-mail: ilpan@imec.msu.ru*

The possibility of estimating the ionization parameters of high-temperature gas mixtures formed as a result of combustion processes is considered on the basis of the current-voltage characteristics measured using electrodes that generate an external electric field in the media under consideration.

Keywords: high-temperature gas mixture, chemoionization, space electric charge, current-voltage characteristic, electrohydrodynamics

УДК 532.529

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ КАНАЛЕ С КАВЕРНОЙ

© 2024 г. Р. К. Селезнев^{a, b}

^a *Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова, Москва, Россия*

^b *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

E-mail: rkseleznev@gmail.com

Поступила в редакцию 29.09.2023 г.

После доработки 10.11.2023 г.

Принята к публикации 15.11.2023 г.

Представлены результаты численного исследования сверхзвукового канала с каверной. Рассчитанные спектры колебаний анализируются с использованием быстрого преобразования Фурье. В полученном периодическом автоколебательном режиме можно выделить два типа колебательных мод. Первый тип мод соответствует акустическим колебаниям, вызванных прохождением звуковых волн вдоль каверны и рассчитанных с помощью модифицированной формулы Росситера. Второй тип мод соответствует частотам расходных колебаний, которые вызваны массообменом между каверной и внешним потоком. Показано изменение структуры течения при подаче топлива перед каверной. Активное горение происходит в слое смешения топлива и кислорода из воздуха. Картина течения демонстрирует возникновение неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на границе раздела основного потока и прореагировавшего газа. Показано, что увеличение давления подаваемого топлива приводит к уменьшению частоты колебаний и увеличению характерного размера колебаний.

Ключевые слова: каверна, автоколебательный процесс, сверхзвуковой поток, горение, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца

DOI: 10.31857/S1024708424010052 **EDN:** SDUTVS

ВВЕДЕНИЕ

Течение в сверхзвуковых каналах с кавернами вызывает значительный интерес из-за его актуальности в аэрокосмической технике и динамике горения [1, 2]. Наличие каверн приводит к взаимодействию сложной структуры течения, приводящим к возникновению колебаний. Эти колебания могут иметь критические значения для стабильной работы различных инженерных систем [3], что требует детального понимания лежащих в их основе механизмов. Несмотря на то, что расчетно-теоретические и экспериментальные исследования ведутся с середины прошлого века, до сих пор не существует однозначного понимания о сложных взаимодействующих явлениях в такой каверне и обоснования спектра колебаний давления. Большинство исследований опирались на концепцию Росситера [4] с последующими обобщениями теории Хеллером и Блиссом [5] на случай сверхзвукового канала как на основу для понимания механизмов нестационарного течения внутри каверн. Формула Росситера позволяет определить частоты колебаний, вызванных прохождением звуковых волн вдоль каверны

$$f_{rossiter}^m = \frac{m - \alpha}{M_\infty / \sqrt{1 + [(\gamma_\infty - 1)/2]M_\infty^2} + 1/k} \cdot \frac{U_\infty}{L}, \quad (0.1)$$

где m — номер моды колебаний ($m = 1, 2, 3, \dots$); U_∞ и M_∞ — скорость и число Маха основного потока соответственно; $\alpha = 0.25$ и $k = 0.57$ — эмпирические константы, определенные Хиллером и Дефсом для каверн с $L/D = 4$; L — длина каверны.

Однако последующие экспериментальные и численные исследования нестационарных течений в каналах с кавернами выявили существенные различия по сравнению с широко принятой теоретической базой [5–12]. Следовательно, возникает острая необходимость выяснения основных характеристик потока, окружающего упомянутую полость.

В работе [8] по моделированию сверхзвукового канала $M = 1.5$ появляются частоты колебаний, которые нельзя объяснить формулой Росситера. Объяснение природы этих колебаний дано в работе [7]. Расходные

колебания, которые вызваны массообменом между полостью и внешним потоком и связаны со скоростью газа в каверне. В статье [7] сделана попытка оценить эту скорость, используя три предположения.

Во-первых, предполагается, что давление в ударном слое на задней стенке каверны p_c при формировании ударной волны определяется из законов сохранения на ударной волне

$$\frac{p_c}{p_\infty} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (0.2)$$

где M — местное число Маха потока, набегающего на заднюю кромку.

Во-вторых, считается, что среднее давление в каверне в этот момент равно давлению основного потока p_∞ , тогда перепад давления в каверне равен $p_c - p_\infty$. Скорость V , с которой газ движется внутри каверны от задней стенки к передней, зависит от скорости звука a_∞ и определяется так

$$V = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/2} \frac{p_c/p_\infty - 1}{\sqrt{\gamma - 1 + (\gamma + 1) p_c/p_\infty}} a_\infty = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M^2 - 1}{M} a_\infty. \quad (0.3)$$

В-третьих, делается предположение, что скорость течения газа от задней стенки к передней сохраняет свое значение и при движении в обратном направлении. В этом случае частота расходных колебаний определяется следующим соотношением

$$f_{mass}^m = \frac{m(M^2 - 1)a_\infty}{(\gamma + 1)ML}. \quad (0.4)$$

Для определения числа Маха потока, набегающего на заднюю кромку каверны, в работе из численного эксперимента была получена следующая приближенная зависимость:

$$M = 1 + \frac{(2M_\infty - 2)^{1/3}}{2.2}. \quad (0.5)$$

В данной работе с учетом полученных численных результатов эта формула была скорректирована

$$M = 1 + \frac{(2M_\infty - 2)^{1/3}}{3.2}. \quad (0.6)$$

Современные вихререзающие методы моделирования [6, 13] также показывают, что возникающие автоколебания имеют различную физическую природу (гидродинамическую, расходно-волновую, резонансную) и взаимосвязаны.

Каверны активно используют в качестве стабилизаторов горения в сверхзвуковых каналах. Что горение может существенно влиять на частоты колебаний в канале с каверной, было показано в экспериментальной работе [12]. Влияние горения на частоты колебаний в сверхзвуковом канале с каверной исследовали в расчетно-теоретических работах Чоя [14–16].

Часто высокоскоростное горение проходит в области стенки. В результате могут образовываться двухслойные течения и неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на границе [17–19]. В работах [20, 21] возникают подобные колебания в камерах сгорания на водородном [20] и углеводородном топливе [22]. В данной работе проведен углубленный численный анализ колебательных процессов в сверхзвуковом канале с каверной без горения и с горением.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве исследуемой геометрии был выбран прямоугольный канал, как и в работах Чоя [14–16], длиной 131 см и высотой 10 см, показанный на рис. 1.

Каверна длиной 20 см и глубиной 5 см ($L/D = 4$) располагалась на расстоянии 20 см ниже по потоку от инжектора. Подача водорода осуществлялась со звуковой скоростью перпендикулярно потоку через миллиметровую щель. Набегающий поток газа поступал в камеру со скоростью 3 Маха, температурой 600 К и давлением 0.1 МПа. Давление подаваемого топлива P_{inj} было 0.5, 1, и 1.5 МПа, а коэффициент избытка топлива равнялся 0.167, 0.33 и 0.5, соответственно. В отличие от работ Чоя [14–16], в которой осуществля-

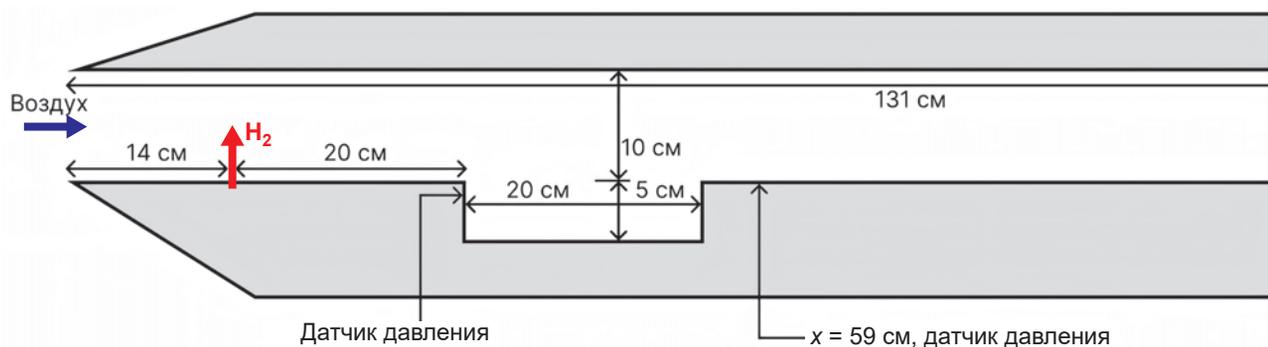


Рис. 1. Схема камеры сгорания. Стрелками показаны направления основного воздушного потока, места подачи топлива и двух зон измерения давления.

лась подача холодного (151 К) водорода, в данной работе температура подаваемого топлива задавалась 800 К. Измерения давления производились после каверны на нижней стенке при $x = 59$ см, а также возле всех углов каверны.

В качестве граничных условий на левой границе расчетной области задавались постоянные условия набегающего потока. На стенках камеры задавались граничные условия прилипания. Стенки считались адиабатическими. На правой границе, где течение всегда было сверхзвуковым, задавались нулевые производные компонент скорости, плотности, давления и концентраций химических компонент.

Для численного моделирования использовалась авторская компьютерная программа [23–28], которая реализует численное интегрирование системы уравнений механики вязкого теплопроводного химического реагирующего газа в двумерной постановке. Математическая модель подобно описана в работах [20–23, 29, 30]. На каждом шаге по времени последовательно интегрировались система уравнений неразрывности, усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, уравнения сохранения энергии, уравнения сохранения массы химических компонент и уравнений химической кинетики. Уравнения неразрывности и Навье–Стокса интегрировались явным конечно-разностным методом по схеме AUSM [31] с использованием квадратичной аппроксимации чисел Маха и давления для определения параметров течения при приближенном решении задачи о распаде разрыва [32]. Уравнения диффузии и сохранения энергии решались с использованием неявной конечно-разностной схемы 2-го порядка аппроксимации Кранка–Николсона. В качестве модели турбулентности использовалась RANS совместно с алгебраической $q-\omega$ -моделью смешения [33]. Как и в работе [20] вводилось искусственное ограничение на максимальную величину турбулентной вязкости ($\mu_T < 500$).

В качестве модели горения водородовоздушной смеси выбрана предложенная Эвансом и Шекснайдером [34] упрощенная кинетическая схема состоящая из 7 компонент и 8 реакций. Метод решения системы уравнений химической кинетики описан в работе [35].

Численное решение конечно-разностных уравнений проводилось с использованием многоблочной технологии. Количество используемых блоков в данной технологии определяется сложностью геометрии расчетной области. В данном случае была использована расчетная шестиблочная структурированная расчетная сетка размерностью 200×200 в каждом блоке для случая без горения и 100×100 для случая с горением.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На первом этапе моделирования проведен расчет течения в канале без вдува топлива. Для того, чтобы проследить за механизмом образования пульсаций давления представлены мгновенные картины рассчитанных параметров числа Маха (рис. 2) и давления (рис. 3) в типичном цикле колебаний. В произвольно выбранный характерный момент времени возникает неустойчивость сдвигового слоя над каверной (рис. 2). Взаимодействие неустойчивости сдвигового слоя с задней стенкой каверны происходит затекание массы газа основного потока внутрь каверны, что приводит к образованию ударной волны на задней стенке (рис. 3а). Эта волна давления впоследствии движется к передней стенке, выпрямляясь на своем пути (рис. 3б). Волна давления также заставляет верхний сдвиговый слой сдвига изгибаться наружу в свободный поток. Этот изгиб наружу приводит к тому, что фронт ударной волны тянется вместе с волной давления

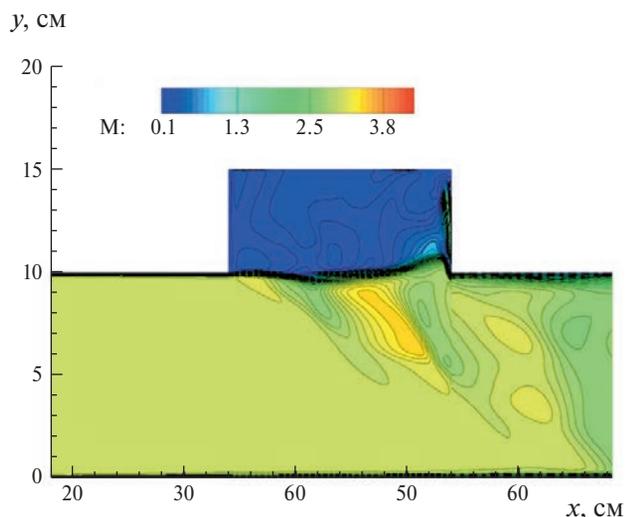


Рис. 2. Распределение числа Маха в расчетной области в момент затекания внешнего сверхзвукового течения в область каверны. Анимационный файл поля числа Маха в последовательные моменты времени представлен в приложении Fig_02_Mach_no_H2.avi.

вверх по течению. Поскольку этот фронт ударной волны движется против набегающего потока со скоростью волны внутреннего давления в каверне (примерно со скоростью звука в каверне), эффективная скорость против набегающего потока выше скорости набегающего потока. Следовательно, фронт ударной волны наклонен больше, чем это соответствовало бы углу Маха набегающего потока. При достижении передней стенки (рис. 3в) внутренняя волна давления частично отражается и распространяется обратно по каверне (рис. 3г) рассеивая свою энергию внутри каверны, а частично приводит к вытеканию массы из каверны и отклонению сдвигового слоя. Далее процесс циклически повторяется.

Рассчитанные колебания давления внутри каверны (на передней стенке возле уступа) и после каверны (на стенке при $x = 59$ см) носят периодический характер. Представляет интерес выделить основные частоты колебаний и сравнить с аналитическими значениями. Применяя быстрое преобразование Фурье к рассчитанным временным профилям давления, получим спектр колебаний представленный на рис. 4. Заметим, что колебания внутри каверны более интенсивные (рис. 4а), чем колебания после (рис. 4б). Зелеными пунктирными линиями обозначены частоты расходных колебаний (842, 1685, 2527, 3370, 4212, 5055 Гц), рассчитанные по формуле (0.4). Синей пунктирной линией с точкой обозначены частоты акустических колебаний Росситера (1569, 3661, 5754 Гц), рассчитанных по формуле (0.1). Можно заметить, что вторая мода расходных колебаний близка к первой моде акустических, и поэтому на этот интервал частот приходятся наибольшие уровни пульсации (~ 1600 Гц). При этом вторую моду акустических колебаний (3661 Гц) и четвертую расходных (3370 Гц) удастся разрешить (но только в каверне), и поэтому на рис. 4а каждой из них соответствует свой пик. Таким образом, результаты численного исследования позволяют утверждать, что в каверне реализуется одновременно сразу несколько нестационарных процесса.

Вторая серия расчетных данных получена при моделировании подачи топлива ($P_{inj} = 0.5, 1, 1.5$ МПа) с его последующим горением. Так как водород подается нагретым до 800 К, то самовоспламенение топлива происходит сразу в области вдува. В этом случае картинка течения сильно отличается от результатов,

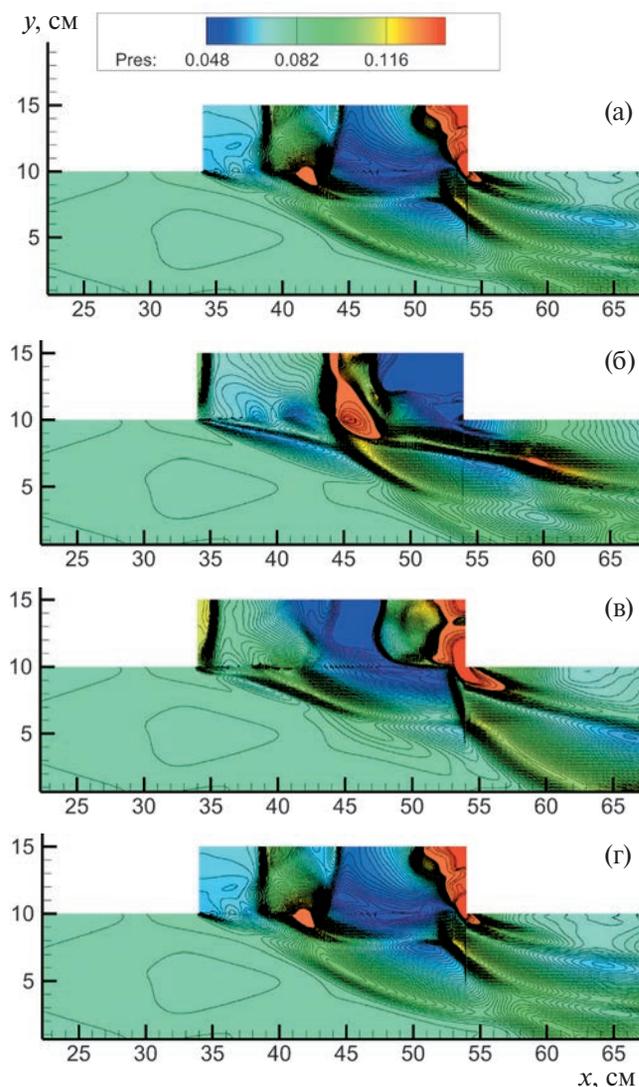


Рис. 3. Распределение давления в расчетной области в последовательные моменты. Анимационный файл поля давления в последовательные моменты представлен в приложении Fig_03_Pres_no_H2.avi.

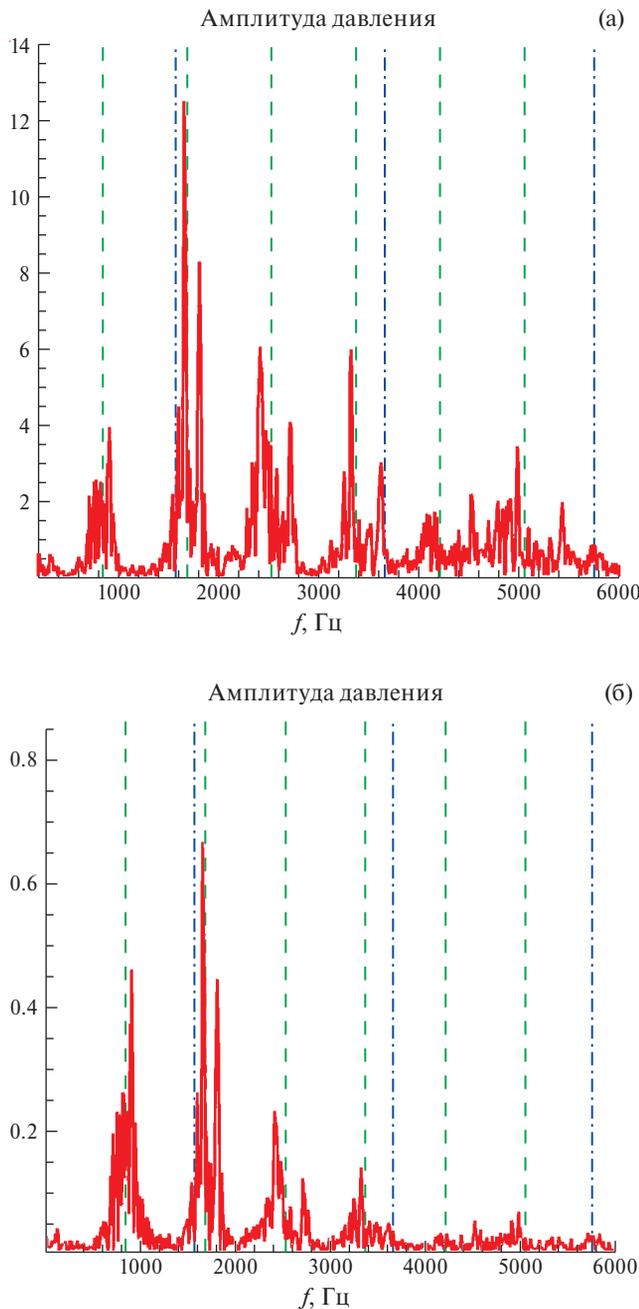


Рис. 4. Спектр колебаний давления (а) внутри каверны (б) на стенке камеры на расстоянии 59 см от начала камеры. Зелеными пунктирными линиями обозначены частоты расходных колебаний (842, 1685, 2527, 3370, 4212, 5055 Гц). Синей пунктирной линией с точкой обозначены частоты акустических колебаний Росситера (1569, 3661, 5754 Гц).

Рассчитанные колебания давления на стенке при $x = 59$ см при давлении подачи топлива $P_{inj} = 1$ и 1.5 МПа имеют явно выраженный периодический характер (рис. 7). В спектре колебаний давления можно четко выделить частоту первой моды колебаний 4960 Гц и 3200 Гц, соответственно. Таким образом, при увеличении давления подаваемого топлива частота колебаний уменьшается, а характерный размер колебаний увеличивается.

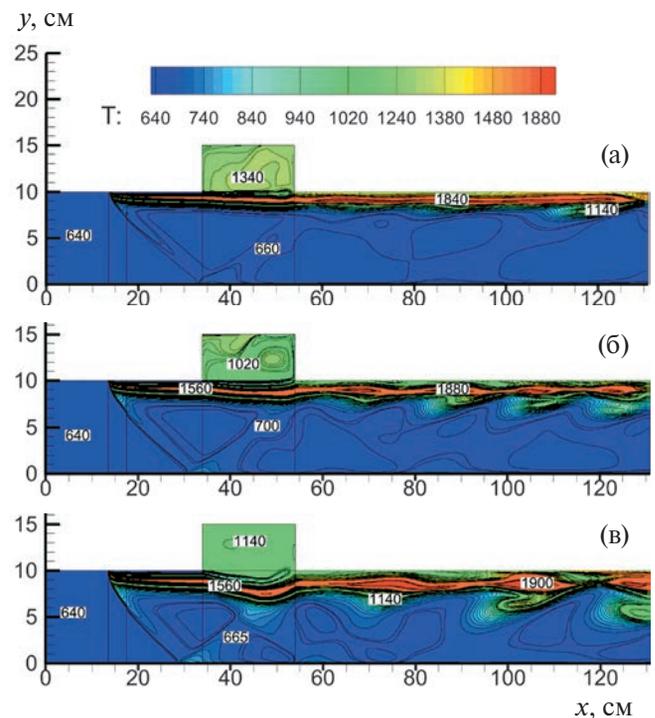


Рис. 5. Распределение температуры в расчетной области для различных давлений подачи топлива: (а) $P_{inj} = 0.5$ МПа, (б) $P_{inj} = 1$ МПа, (в) $P_{inj} = 1.5$ МПа. Анимационный файл рассчитанного поля температуры для давления подачи топлива $P_{inj} = 1$ МПа представлен в приложении Fig_05_Temp_H2.avi.

описанных выше. Активное горение происходит в слое смешения топлива и кислорода из воздуха. Мгновенная картина течения демонстрирует возникновение неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на границе раздела основного потока и прореагировавшего газа (рис. 5 и рис. 6).

При давлении подачи топлива 0.5 МПа колебания давления на стенке камеры происходят с различной частотой (рис. 7). Однако быстрое преобразование Фурье позволяет выделить основную частоту колебаний 5550 Гц. Одна из причин этому в том, что горение в этом случае хоть и влияет на течение газа в каверне, однако частично можно наблюдать колебательный процесс, наблюдаемый в случае без горения. Этот колебательный процесс приводит к увеличению потока массы из основного потока в каверну, что поднимает температуру в каверне до 1340 К, что превышает значения температуры 1120 К и 1140 К при более высоком давлении подаваемого топлива.

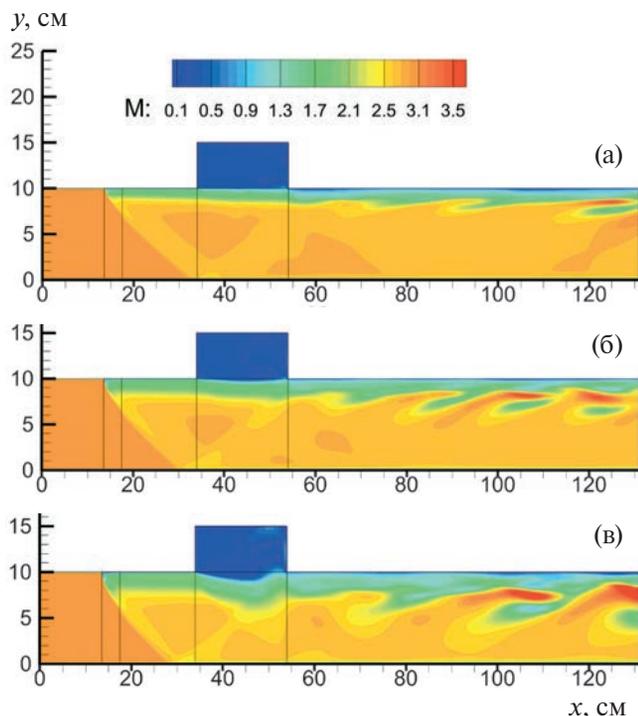


Рис. 6. Распределение числа Маха в расчетной области для различных давлений подачи топлива: (а) $P_{inj}=0.5$ МПа, (б) $P_{inj}=1$ МПа, (в) $P_{inj}=1.5$ МПа. Анимационный файл рассчитанного числа Маха для давления подачи топлива $P_{inj}=1$ МПа представлен в приложении Fig_05_Mach_H2.avi.

Анимационный файл рассчитанного поля температуры для давления подачи топлива $P_{inj}=1$ МПа представлен в приложении Fig_05_Temp_H2.avi.

В экспериментальной работе [12] для продолговатой каверны ($L/D = 7$) наоборот с увеличением давления частота колебаний увеличивалась. Это можно объяснить тем, что структура течения в продолговатой каверне ($L/D = 7$) отличается от течения в исследуемой ($L/D = 4$) каверне. Экспериментаторами [12] была отмечена сложность стабилизации горения каверной с $L/D = 4$. Данное предложение требует дальнейших численных исследований. В работе [21], в которой численно исследуется эксперимент UTRC (с более сложной геометрией расчетной области и каверны) увеличение давления подаваемого топлива увеличивает зону горения, что приводит к увеличению характерного масштаба колебаний, как и в данной работе.

Проведем оценку частоты колебаний, вызванную возникшей неустойчивостью при давлении подачи топлива $P_{inj}=1.5$ МПа. Для этого оценим скорость звука в области прореагировавшего потока возле стенки.

В расчете по области возле стенки средний молекулярный вес M_{Σ} равен 13 г/моль, а температура T_{Σ} примерно равна 1100 К. Тогда скорость звука в этой области примерно равна 1000 м/с. Среднее расстояние между гребнями волн неустойчивости Кельвина–Гельмгольца ~ 20 см. Таким образом, частота колебаний вызванная неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца ~ 5000 Гц, что соответствует полученному спектру.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи нестационарного сверхзвукового обтекания каверны позволило определить основные структурные особенности течения. Показано, что в камере формируется периодический автоколебательный режим, в котором можно выделить два типа колебательных мод. Первый тип мод соответствует акустическим колебаниям, вызванных прохождением звуковых волн вдоль каверны и рассчитанных с помощью модифицированной формулы Росситера. Второй тип мод соответствует частотам расходных колебаний, которые вызваны массообменом между каверной и внешним потоком.

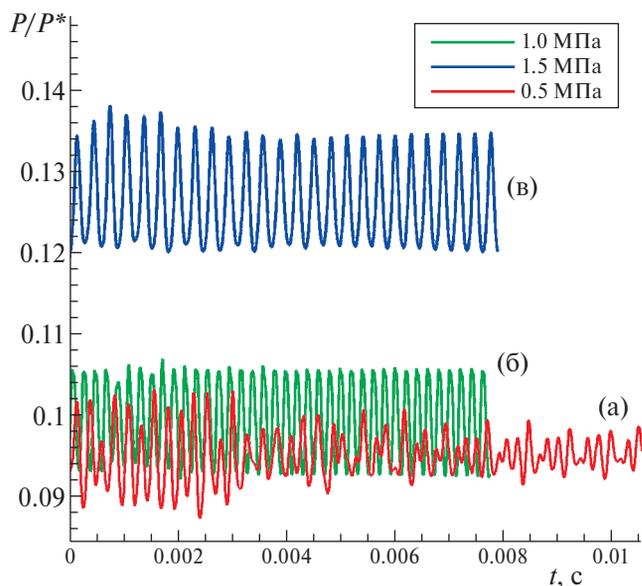


Рис. 7. Временная зависимость безразмерных показаний датчика давления ($x = 59$ см) для различных давлений подачи топлива: (а) $P_{inj}=0.5$ МПа, (б) $P_{inj}=1$ МПа, (в) $P_{inj}=1.5$ МПа.

Показано, что подача топлива с последующим горением сильно влияет на автоколебательный режим. Активное горение происходит в слое смешения топлива и кислорода из воздуха. Мгновенная картина течения демонстрирует возникновение неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на границе раздела основного потока и прореагировавшего газа. Увеличение давления подаваемого топлива приводит к уменьшению частоты колебаний и увеличению характерного размера колебаний. При самом низком давлении подаваемого топлива ($P_{inj}=0.5$ МПа) в спектре колебаний наблюдаются дополнительные частоты.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа финансирована из средств бюджета института. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Seleznev R.K., Surzhikov S.T., Shang J.S.* A review of the scramjet experimental data base // Prog. Aerosp. Sci. Elsevier Ltd, 2019. V. 106. № February. P. 43–70.
2. *Seleznev R.K.* History of scramjet propulsion development // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 1009. № 1. P. 012028.
3. *Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л., Дядькин А.А., Михайлов М.В., Рыбак С.П., Даньков Б.Н., Косенко А.П.* Двухэтапная RANS-DDES-модель и результаты расчета нестационарных воздействий на возвращаемый аппарат и двигательный отсек космического корабля при их аварийном разделении // Математическое моделирование. 2021. Т.33. № 7. С. 121–138.
4. *Rossiter J.E.* Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds // Aeronautical Research Council Reports & Memoranda. October 1964. № 3438.
5. *Beranek B.* Aerodynamically induced pressure oscillations in cavities – physical mechanisms and suppression concepts // Airf. flight Dyn. Lab. 1975.
6. *Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Анализ автоколебательных процессов в каверне с открытым типом течения на основе данных вихреразрезающих расчетов // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 4. С. 156–166.
7. *Заугольников Н.Л., Коваль М.А., Швеиц А.И.* Пульсации потока газа в кавернах при сверхзвуковом обтекании // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 121–127.
8. *Hankey W.L., Shang J.S.* Analyses of Pressure Oscillations in an Open Cavity // AIAA J. 1980. Vol. 18, № 8. P. 892–898.
9. *Vakili A.D., Gauthier C.* Control of cavity flow by upstream mass injection // AIAA 22nd Fluid Dyn. Plasma Dyn. Lasers Conf. 1991. 1991. V. 31. № 1.
10. *Vakili A.D. et al.* Active control of cavity aeroacoustics in high speed flows // 33rd Aerosp. Sci. Meet. Exhib. 1995.
11. *Pandian S., Desikan S.L.N., Niranjan S.* Experimental investigation of starting characteristics and wave propagation from a shallow open cavity and its acoustic emission at supersonic speed // Phys. Fluids. 2018. V. 30. № 1.
12. *Wang H., Wang Z., Sun M.* Experimental study of oscillations in a scramjet combustor with cavity flameholders // Exp. Therm. Fluid Sci. Elsevier Inc. 2013. V. 45. P. 259–263.
13. *Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Численное моделирование возникновения автоколебательного процесса возле трехмерного обратного уступа при трансзвуковом режиме обтекания // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 4. P. 108–119.
14. *Choi J.Y., Ma F., Yang V.* Combustion oscillations in a scramjet engine combustor with transverse fuel injection // Proc. Combust. Inst. 2005. V. 30 II. P. 2851–2858.
15. *Choi J.Y., Yang V.* Dynamics of reactive fuel-jet in scramjet combustor with a flame-holding cavity // 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Jt. Propuls. Conf. Exhib. 2003. № July. P. 1–7.
16. *Choi J.Y. et al.* Detached Eddy simulation of combustion dynamics in scramjet combustors // Collect. Tech. Pap. – 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Jt. Propuls. Conf. 2007. V. 1. № July. P. 231–237.
17. *Калашиник М.В., Чхетиани О.Г.* Генерация волн на поверхности раздела вихревыми возмущениями в сдвиговом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 3. С. 98–109.
18. *Липатов И.И., Тугазаков Р.Я.* Образование когерентных структур при сверхзвуковом обтекании пластины конечного размаха // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 6. С. 93–99.
19. *Липатов И.И., Тугазаков Р.Я.* Механизм образования поперечных структур при обтекании тела сверхзвуковым потоком газа // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 5. С. 134–141.

20. *Surzhikov S.T.* On two-dimensional numerical modeling of the Burrows — Kurkov experimental data on hydrogen combustion in a supersonic air flow using NS/RANS equations // *Phys. Kinet. Gas Dyn.* 2021. V. 22. № 4. P. 88–124.
21. *Суржииков С.Т.* Термогазодинамика модельной камеры сгорания этилена в сверхзвуковом потоке // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 3. С. 115–134.
22. *Surzhikov S.T.* Results of the Use of Algebraic Models of Turbulence in the Framework of the RANS Model of Heating the Surface of a Sharp Plate in a Supersonic Flow Результаты использования алгебраических моделей турбулентности в рамках RANS модели нагрева поверхности ос. 2023. V. 24. № 3. P. 1–49.
23. *Seleznev R.K.* Numerical study of the flow structure in the supersonic inlet-isolator // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. V. 1009. P. 012034.
24. *Селезнев Р.К.* Численное исследование ПВРД и ГПВРД режимов работы камеры сгорания HIFiRE-2 // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 6. С. 64–73.
25. *Seleznev R.K.* Validation of 3D model by the example of a supersonic inlet-isolator // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. V. 1009. P. 012031.
26. *Seleznev R.K.* Validation of two-dimensional model by the example of a supersonic inlet-isolator // *J. Phys. Conf. Ser.* 2018. V. 1009. P. 012030.
27. *Surzhikov S. et al.* Unsteady Thermo-Gasdynamic Processes in Scramjet Combustion Chamber with Periodical Input of Cold Air // 50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014. P. 25.
28. *Селезнев Р.К.* Исследование структуры течения в модельном воздухозаборнике ГПВРД с поперечной подачей водородного топлива в сверхзвуковой поток // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 3. С. 30–38.
29. *Суржииков С.Т.* Аэрофизика обтекания затупленного клина конечных размеров // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 5. P. 89–102.
30. *Суржииков С.Т.* Теплообмен и ионизация при неравновесном обтекании затупленной пластины гиперзвуковым потоком // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 6. P. 109–124.
31. *Edwards J. et al.* Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds // 13th Computational Fluid Dynamics Conference. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1997. V. 36. № 9.
32. *Суржииков С.Т.* Метод расчета сверхзвукового обтекания сферы на основе AUSM конечно-разностных схем // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана.* 2005. V. 3. № 60. P. 7–34.
33. *Coakley T.* Turbulence modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations // 16th Fluid and Plasmadynamics Conference. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1983.
34. *Evans J.S., Schexnayder C.J.* Influence of Chemical Kinetics and Unmixedness on Burning in Supersonic Hydrogen Flames // *AIAA J.* 1980. V. 18. № 2. P. 188–193.
35. *Seleznev R., Surzhikov S.* Generalized Newton Method For Solving Differential Equations of Chemical Kinetics // 44th AIAA Thermophysics Conference. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics. 2013. P. 1–17.

ANALYSIS OF THE FLOW STRUCTURE IN A SUPERSONIC CHANNEL WITH CAVITY

R. K. Seleznev^{a, b}

^a *Dukhov Automatics Research Institute, Moscow, Russia*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

E-mail: rkseleznev@gmail.com

The results of numerical study of supersonic flow in a channel with cavity are given. The calculated oscillation spectra are analyzed using the fast Fourier transform. Two types of oscillatory modes can be distinguished in the resulting periodic self-oscillatory regime. The first type of the modes corresponds to acoustic vibrations caused by the passage of sound waves along the cavity and calculated using the modified Rossiter formula. The second type of the modes corresponds to the frequencies of flow-rate oscillations caused by mass transfer between the cavity and the external flow. It is shown that the flow structure is modified when fuel is supplied in front of the cavity. Active combustion occurs in the layer of mixing fuel and oxygen from air. The flow pattern demonstrates the onset of Kelvin–Helmholtz instability on the interface between the main flow and the reacted gas. It is shown that an increase in the supplied fuel pressure leads to a decrease in the oscillation frequency and an increase in the characteristic size of oscillations.

Keywords: cavity, self-oscillating process, supersonic flow, combustion, Kelvin–Helmholtz instability

УДК 532.59

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ С ВОЗВЫШЕНИЕМ НА ДНЕ

© 2024 г. С. В. Нестеров, В. А. Калиниченко*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* E-mail: kalin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 22.09.2023 г.

После доработки 20.10.2023 г.

Принята к публикации 25.10.2023 г.

В приближении длинных волн сформулирована и численно при использовании алгоритма ускоренной сходимости решена задача о стоячих волнах в круговом цилиндрическом сосуде с возвышением на дне. В результате проведенных расчетов с высокой точностью определена собственная частота основной волновой моды. Для сравнения теоретических результатов представлены новые экспериментальные данные по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в круговом цилиндрическом сосуде с параболическим и коническим возвышениями на дне. Показано совпадение рассчитанных и измеренных значений собственной частоты основной волновой моды в сосудах с профилированным дном.

Ключевые слова: стоячая поверхностная волна, круговой цилиндрический сосуд, собственная частота, приближение длинных волн, метод ускоренной сходимости

DOI: 10.31857/S1024708424010063 EDN: SDUEAZ

При рассмотрении волновых движений жидкости со свободной поверхностью в сосудах произвольной формы одна из гидродинамических задач состоит в определении собственных частот колебаний. В классических работах [1, 2] рассмотрен случай колебаний жидкости в круговом цилиндрическом сосуде с горизонтальным дном.

В середине прошлого столетия было опубликовано большое количество работ, в которых определены собственные частоты и формы колебаний жидкости в круговом цилиндре с коническим, параболическим и сферическим дном — см., например [3–6]. Указанное направление исследований, проведенных в основном вариационными методами, связано с потребностями космической техники — расчет колебаний топлива в баках. Отметим, что особое значение авторы названных исследований придавали основной моде колебаний, имеющей одну диаметрально узловую линию.

В приближении теории длинных волн в работе [2] рассмотрена задача о стоячих волнах в круговом цилиндре при убывании глубины жидкости от оси сосуда к стенкам по параболическому закону. Указанная геометрия дна сосуда использована в работах [7, 8] для получения изохронных колебаний жидкости, при которых частота волн (аналогично маятнику Гюйгенса) не зависит от амплитуды.

В нашей работе рассмотрено влияние возвышения на дне кругового цилиндра на собственные частоты низших волновых мод на свободной поверхности жидкости. Все количественные оценки получены методом ускоренной сходимости в приближении мелкой воды. Проводится сравнение результатов теоретической модели и лабораторного эксперимента. Отметим, что метод ускоренной сходимости [9] был успешно апробирован авторами в работах [10–12] для стоячих волн в прямоугольных сосудах с переменной глубиной и шириной.

1. ВОЛНЫ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Решение задачи о гравитационных волнах на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости в жестком круговом цилиндре радиуса R_0 с горизонтальным дном приведено во многих публикациях (напр., [4–6]). Потенциал скоростей $\varphi(r, \varphi, z, t)$ и смещение свободной поверхности $\eta(r, \varphi, t)$ определяются следующими выражениями:

$$\varphi(r, \varphi, z, t) = [\alpha_{nm} \cos n\varphi + \beta_{nm} \sin n\varphi] J_n(k_{nm}r) \frac{\operatorname{ch}(k_{nm}(z+h))}{\operatorname{ch}(k_{nm}h)},$$

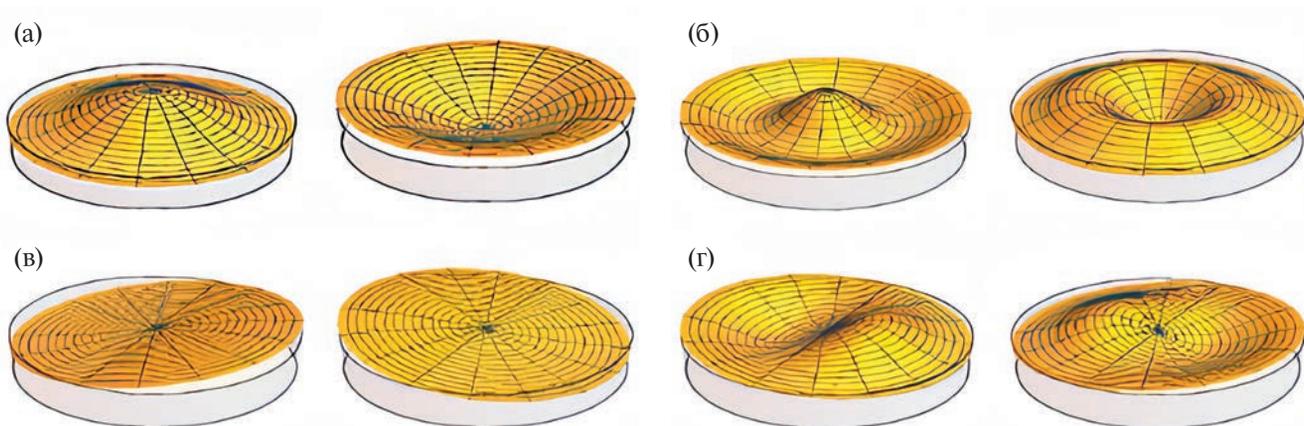


Рис. 1. Профили волн максимального развития для осесимметричных и асимметричных мод при $t=0, \pi/\omega$ ($A_{nm}=3$ см, $B_{nm}=0$; $R_0=9.8$ см; $h=4$ см): (а–г) — (0, 1), (0, 2), (1, 1) и (1, 2).

$$\eta(r, \varphi, t) = [A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi] J_n(k_{nm}r) \cos \omega_{nm}t \quad \text{при } (n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots), \quad (1.1)$$

где (r, φ, z) — цилиндрические координаты, причем z отсчитывается вертикально вверх от невозмущенной поверхности жидкости; h — глубина жидкости; $J_n(k_{nm}r)$ — функция Бесселя; α_{nm}, β_{nm} — зависящие от времени t коэффициенты, которые могут быть выражены через гармонические функции $\sin \omega_{nm}t$.

Выражение для собственной частоты имеет вид

$$\omega_{nm} = \sqrt{gk_{nm} \operatorname{th}(k_{nm}h)}. \quad (1.2)$$

Используя граничное условие на стенках сосуда $\partial\varphi/\partial r|_{r=R_0} = J'_n(k_{nm}R_0) = 0$, для первых двух осесимметричных мод, получаем $k_{01}R_0 = 3.832$ и $k_{02}R_0 = 7.015$, а для асимметричных мод — $k_{11}R_0 = 1.841$ и $k_{12}R_0 = 5.335$.

Рассчитанные по (1.1) профили волн максимального развития для осесимметричных (0,1), (0,2) и асимметричных мод (1,1) и (1,2) приведены на рис. 1. Расчет проведен для сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см при глубине жидкости $h = 4$ см и $A_{nm} = 3$ см, $B_{nm} = 0$.

Рассмотрим случай, когда глубина бассейна $H = H_0 f(r/R_0)$ зависит от расстояния, измеряемого от центра бассейна. Обозначим через $\eta = \eta(x, y, t)$ возвышение свободной поверхности над уровнем покоящейся жидкости.

Согласно работе [2], смещение свободной поверхности отвечает дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right], \quad (1.3)$$

где g — ускорение свободного падения.

Поскольку стоячие волны представляют собой периодические во времени движения свободной поверхности, будем искать решение уравнения (1.3) в виде

$$\eta = u(x, y) e^{i\omega t}. \quad (1.4)$$

После подстановки (1.4) в уравнение (1.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\omega^2}{g} u = 0. \quad (1.5)$$

Так как предполагается, что глубина жидкости зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то, переходя к полярным координатам (r, φ) , получаем для (1.5)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Hr \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} H \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{g} u = 0.$$

В дальнейшем полагаем, что $u = U_m(r) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$, где n — целое число. Функция $U(r)$ подчиняется следующим краевым условиям:

$$|U_m(0)| \leq M; \quad \left. \frac{dU_m}{dr} \right|_{r=R_0} = 0.$$

Вводя безразмерную переменную $z = r/R_0$, приходим к следующей задаче Штурма—Лиувилля:

$$\frac{d}{dz} \left[z f(z) \frac{dU_m}{dz} \right] + \left[\lambda z - \frac{n^2}{z} f(z) \right] U_m = 0, \quad (1.6)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_{n,m} = \frac{\omega^2 R_0^2}{gH_0}$.

Требуется найти такие значения $\lambda_{n,m}$, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.6), удовлетворяющие краевым условиям

$$|U_m(0)| \leq M; \quad U'_m(1) = 0. \quad (1.7)$$

Искомые значения $\lambda_{n,m}$ принято называть собственными числами, а соответствующие решения краевой задачи (1.6), (1.7) — собственными функциями, или формами (модами) колебаний.

Введем следующим образом регуляризирующий параметр a задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[(z+a) f(z) \frac{dU_m}{dz} \right] + \left(\lambda z - \frac{n^2}{z+a} f(z) \right) U_m &= 0, \\ |U_m(0)| \leq M; \quad U'_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Для нахождения собственных чисел применяется метод ускоренной сходимости, подробно описанный в работе [9]. Отметим, что с помощью этого метода при $a = 10^{-7}$ удастся получить собственные числа с точностью до 10^{-6} .

Если найдены собственные числа $\lambda_{n,m}$, то размерные собственные частоты колебаний определяются формулой

$$\omega_{n,m} = \frac{\sqrt{\lambda_{n,m}}}{R_0} \sqrt{gH_0}.$$

Все вычисления проводятся в предположении, что глубина бассейна задается формулами

$$f(z) = \begin{cases} 1 + bz^2; \\ 1 + bz. \end{cases}$$

Указанные формы дна бассейна (параболоид или конус) достаточно просто реализовать в экспериментальных условиях. Описание проведенных опытов и сравнение измеренных и рассчитанных значений частоты приводятся далее.

На рис. 2а приведены зависимости безразмерной собственной частоты $\sqrt{\lambda_{0,1}}$ и $\sqrt{\lambda_{0,2}}$ от параметра b . Соответствующие формы свободной поверхности в случае волновых мод (0,1) и (0,2) при $b=0$ (горизонтальное дно бассейна) представлены на рис. 1а и 1б.

На рис. 2б приведены зависимости безразмерной собственной частоты $\sqrt{\lambda_{1,1}}$ и $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ от параметра b . Соответствующие формы свободной поверхности в случае волновых мод (1, 1) и (2, 2) при $b=0$ (горизонтальное дно бассейна) представлены на рис. 1в, г.

Из рис. 2 следует, что с увеличением параметра b , характеризующего возвышение на дне сосуда, безразмерные собственные частоты $\sqrt{\lambda_{n,m}}$ симметричных и асимметричных волновых мод монотонно растут. Далее полученные результаты сравниваются с данными лабораторного эксперимента.

Отметим, что приведенные на рис. 2 численные значения $\sqrt{\lambda_{n,m}}$ проверялись с помощью метода Рэлея—Ритца для решения краевой задачи (1.6), (1.7). В качестве тестовых функций использовались функции

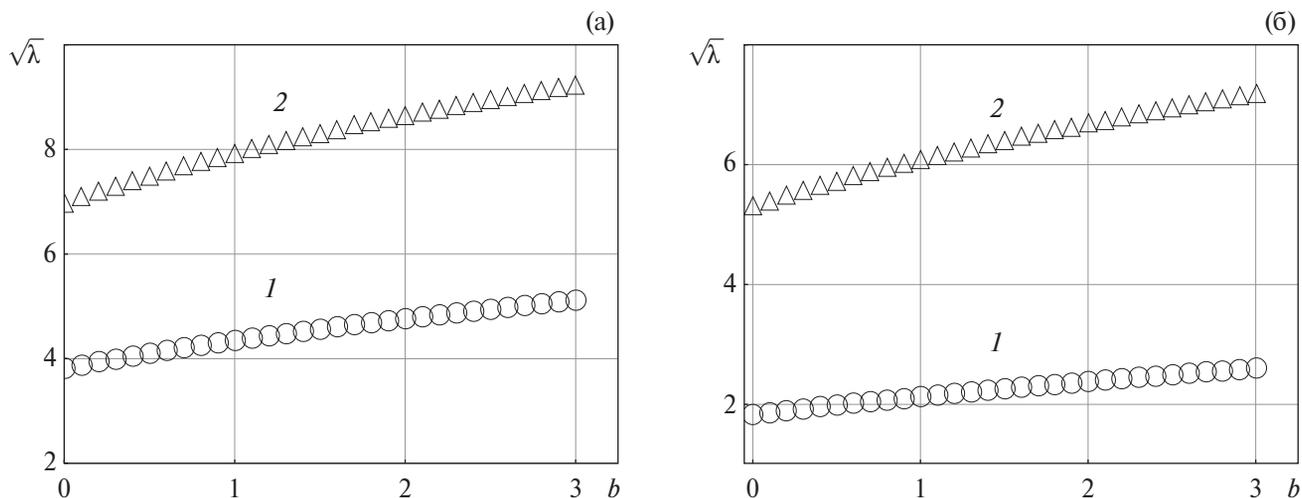


Рис. 2. Зависимости безразмерных собственных частот от параметра b : (а) — осесимметричные волновые моды $\sqrt{\lambda_{0,1}}$ (1) и $\sqrt{\lambda_{0,2}}$ (2); (б) — асимметричные волновые моды $\sqrt{\lambda_{1,1}}$ (1) и $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ (2).

Бесселя. Собственные частоты, полученные методом Рэлея–Ритца, несколько превышали приведенные на рис. 2 — совпадали первые три знака после запятой. Кроме того, вычисления по методу Рэлея–Ритца потребовали больших временных затрат по сравнению с методом ускоренной сходимости.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для верификации численно-аналитической модели проведена серия экспериментов на электромеханическом вибростенде Динамики и структуры осциллирующих течений [13], входящем в состав Уникальных исследовательских установок ГФК ИПМех РАН.

Волновые движения жидкости исследовались в режиме основного и гармонического резонансов Фарадея [14, 15]. В первом случае для моды (1.1) частота вертикальных колебаний сосуда в два раза превышала частоту возбуждаемых волн ($\Omega \sim 2\omega$); при гармоническом резонансе для моды (0.1) эти частоты совпадали ($\Omega \sim \omega$). При фиксированной амплитуде сосуда $s = 0.7$ см вариации Ω обеспечивали возбуждение соответствующей волновой моды (n, m) . В качестве рабочей жидкости использовали воду.

Волновая картина регистрировалась цифровой камерой Canon PowerShot SX50HS (скорость видеосъемки 30 и 120 кадров в секунду). Разрешение видеоизображения составляло 0,15 мм/пиксель. Последующая обработка видеок кадров производили при использовании программы ImageJ. Все эксперименты проводили при комнатной температуре 21–22 °С.

В опытах собственная частота гравитационных волн определялась следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась волновая мода (n, m) . Затем вибростенд выключали и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводили видеосъемку затухания волновых движений воды. Поскольку частота волн существенно превосходит коэффициент затухания, предполагалось, что затухание волн проходит с собственной частотой. Это позволило по материалам видеосъемки затухающих волн оценить собственную частоту.

В экспериментах использовали два сосуда с радиусами $R_0 = 7$ и 9.8 см при глубине воды $h = 3.7$ и 4 см соответственно. Оценивалась собственная частота волновых мод (0, 1) и (1, 1) в сосудах с горизонтальным и профилированным дном.

Профилированное дно представляло собой симметричное относительно оси сосуда возвышение, изготовленное из технического пластилина. На рис. 3а и 3б приведены фотографии дна сосудов с $R_0 = 7$ и 9.8 см соответственно.

Для получения описывающих форму дна функций с помощью программы ImageJ проведена оцифровка профиля, данные которой позволили получить следующие аппроксимирующие зависимости:

$$y = 2.66 - 0.05r^2 \text{ при } R_0 = 7 \text{ см;}$$

$$y = 1.45 - 0.15r \text{ при } R_0 = 9.8 \text{ см,}$$

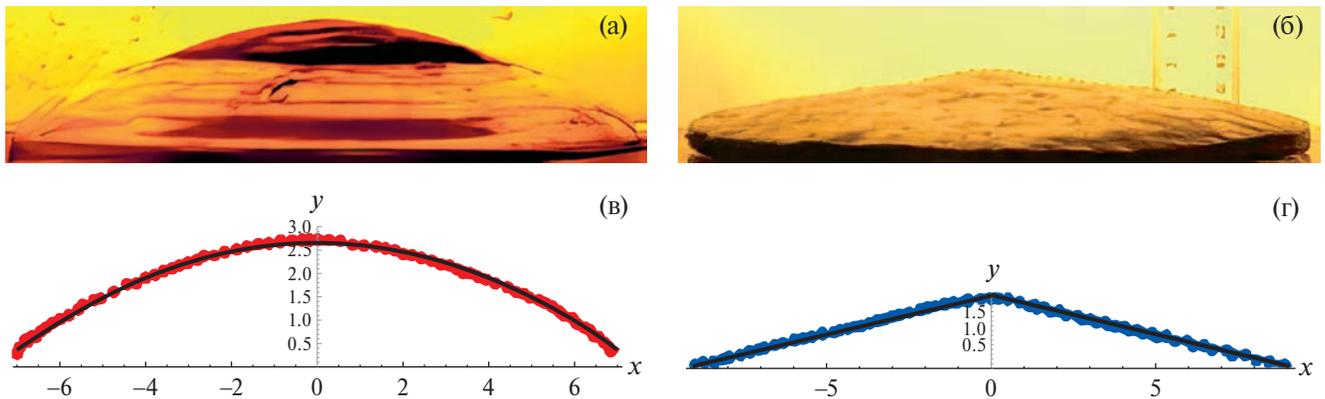


Рис. 3. Форма возвышения на дне сосуда (а, б) и графики аппроксимирующих профиль дна функций (в, г): (а, в), (б, г) — $R_0 = 7$ и 9.8 см; точки — данные оцифровки фотографий (а, б).

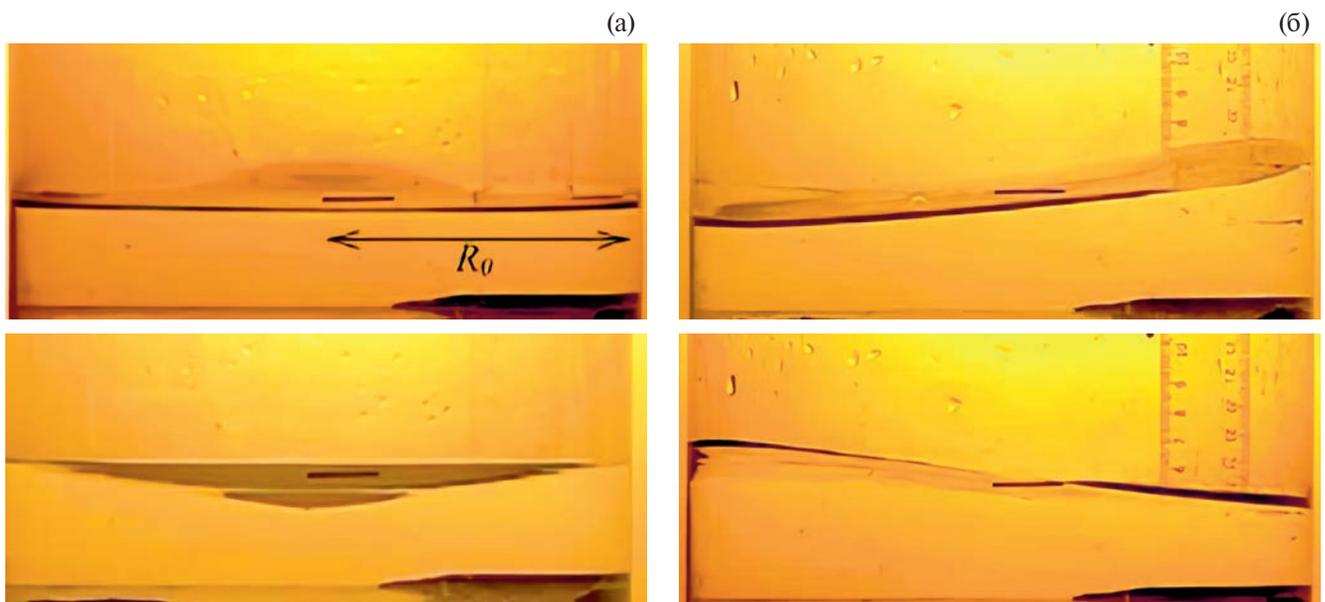


Рис. 4. Профили волн максимального развития в круговом цилиндре радиуса $R_0 = 9.8$ см с горизонтальным дном при глубине жидкости $h = 4$ см: (а, б) — осесимметричная (0, 1) и асимметричная (1, 1) волновые моды.

графики которых приведены на рис. 3в и 3г. Таким образом, если для цилиндра с $R_0 = 7$ см форма возвышения описывалась квадратичной функцией, то в случае $R_0 = 9.8$ см имеем линейную зависимость от радиальной координаты r .

Экспериментально проведены оценки собственных частот волновых мод (0, 1) и (1, 1) в сосудах с горизонтальным дном. Фотографии волновых профилей в случае сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см представлены на рис. 4. Видно полное их соответствие формам рис. 1а и 1в.

Измеренные по описанной методике собственные частоты волн в сосудах с горизонтальным дном приведены в табл. 1. Средняя частота и соответствующая погрешность оценивались по 15–20 экспериментальным значениям. В таблице также приведены частоты, рассчитанные по формуле (1.2) и полученные при решении краевой задачи (1.8).

Видно, что классическая теория и метод ускоренной сходимости в случае сосудов указанных размеров с горизонтальным дном дают практически совпадающие значения собственных частот волновых мод на свободной поверхности воды малой глубины. Данные эксперимента с учетом погрешности измерений частоты неплохо соответствуют численно-аналитическим оценкам.

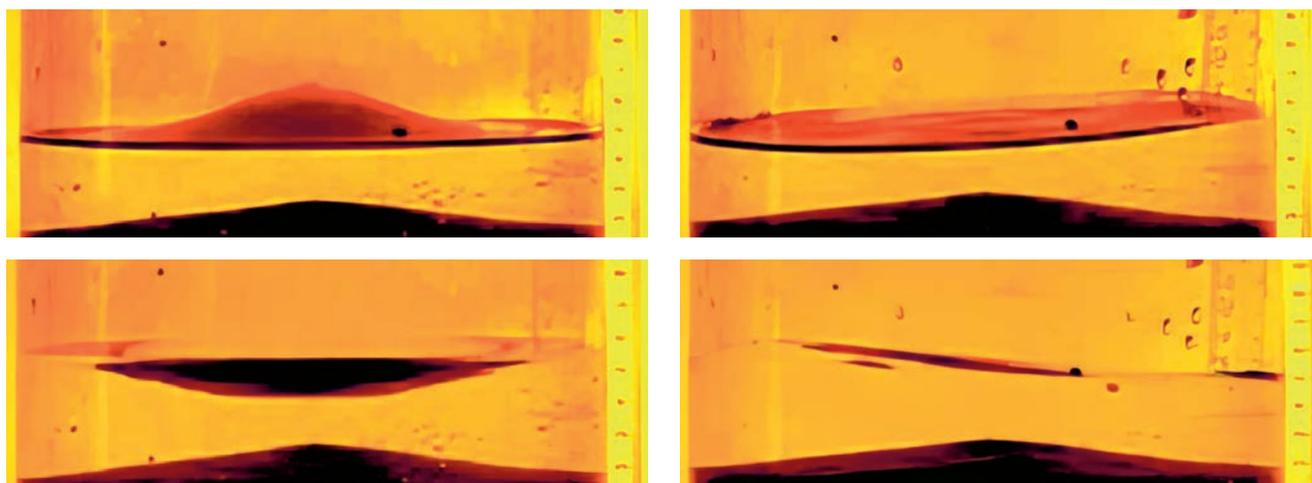
Перейдем к рассмотрению волновых движений жидкости в круговых цилиндрах с профилированным дном. Фотографии волновых мод (0, 1) и (1, 1) в случае сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см представлены на рис. 5.

Таблица 1. Собственные частоты волновых мод в сосудах с горизонтальным и профилированным дном

Горизонтальное дно				Профилированное дно		
$R_0 = 7 \text{ см}, h = 3.7 \text{ см}$						
Мода (n, m)	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ эксперимент	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ расчет		Мода (n, m)	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ эксперимент	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ расчет, краевая задача (1.8)
		Формула (1.2)	Краевая задача (1.8)			
(0, 1)	22.60 ± 0.99	22.72	22.76	(0, 1)	20.92 ± 1.85	22.75
(1, 1)	13.84 ± 0.23	13.96	13.90	(1, 1)	11.73 ± 0.72	11.43
$R_0 = 9.8 \text{ см}, h = 4 \text{ см}$						
Мода (n, m)	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ эксперимент	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ расчет		Мода (n, m)	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)}$ эксперимент	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ расчет, краевая задача (1.8)
		Формула (1.2)	Краевая задача (1.8)			
(0, 1)	19.22 ± 0.65	18.82	18.74	(0, 1)	18.20 ± 0.35	22.21
(1, 1)	11.03 ± 0.54	10.82	10.82	(1, 1)	10.20 ± 0.50	10.75

(a)

(б)

**Рис. 5.** Профили волн максимального развития в круговом цилиндре радиуса $R_0 = 9.8 \text{ см}$ с коническим возвышением на дне при максимальной глубине жидкости $h = 4 \text{ см}$: (а, б) — осесимметричная (0, 1) и асимметричная (1, 1) волновые моды.

Визуально эти профили не отличаются от показанных на рис. 4. Однако собственные частоты, как следует из табл. 1, существенно ниже значений, отвечающих сосуду с горизонтальным дном — уменьшение частоты порядка 10–15%.

Дадим интерпретацию экспериментальных результатов об уменьшении собственных частот волновой моды (1, 1) в сосудах с возвышением на дне в рамках модели мелкой воды — краевая задача (1.8).

Сосуд радиуса $R_0 = 7 \text{ см}$ имел профиль дна $y = 2.66 - 0.05r^2$, которому соответствовала глубина жидкости $H = H_0(1 + 0.054192 R_0^2 z^2) = 1.0122(1 + 2.6553z^2)$. Здесь $z = r/R_0$, $H_0 = 1.0122 \text{ см}$.

Вычисленная безразмерная частота волновой моды (1, 1) $\sqrt{\lambda_{1,1}} = 2.54037$. Соответствующая размерная частота

$$\omega_{1,1} = \frac{\sqrt{\lambda_{1,1}}}{R_0} \sqrt{gH_0} = 11.43 \text{ с}^{-1}.$$

Измеренная в эксперименте (см. табл. 1) собственная частота волновой моды (1, 1) $\omega_{1,1} = 11.73 \text{ с}^{-1}$.

Таким образом, различие между данными эксперимента и численными оценками составляет 2.6%.

Сосуд радиуса $R_0 = 9.8 \text{ см}$ имел профиль дна $y = 1.45 - 0.15r$ что соответствовало глубине жидкости $H = 2.5488(1 + 0.4694z)$, $H_0 = 2.5488$. Отметим, что глубина жидкости в этом эксперименте изменяется линейно, в отличие от первого сосуда.

Вычисленная безразмерная частота волновой моды (1, 1) $\sqrt{\lambda_{1,1}} = 2.1078$. Соответствующая размерная частота $\omega_{1,1} = 10.75 \text{ с}^{-1}$. Измеренная в эксперименте (см. табл. 1) собственная частота волновой моды (1, 1) $\omega_{1,1} = 10.20 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, различие между данными эксперимента и численными оценками составляет 5.3%.

Таким образом, представленная в разд. 1 численно-аналитическая модель неплохо описывает экспериментальные результаты по измерению собственных частот стоячих поверхностных гравитационных волн в том случае, когда возбуждается волна с одной узловой линией, проходящей через центр сосуда, — волновая мода (1, 1) — рис. 1в и 5б. Эта волна соответствует безразмерной собственной частоте $\sqrt{\lambda_{1,1}}$. Кроме того, для волновой моды (1, 1) достаточно хорошо выполняется требование теории длинных волн.

Отметим, что в проведенных экспериментах волны с частотами $\sqrt{\lambda_{0,1}}$, $\sqrt{\lambda_{0,2}}$, $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ и т. п. уже не удовлетворяют длинноволновому приближению ($k_{nm}h < 1$). Поэтому измеренные и рассчитанные собственные частоты волн (0, 1) совпадают гораздо хуже по сравнению со случаем моды (1, 1) — см. табл. 1.

При формулировке краевой задачи (1.8) был введен безразмерный регуляризирующий параметр a , который в расчетах собственной частоты волновой моды (1, 1) для сосудов с $R_0 = 7$ и 9.8 см принимал значения порядка 10^{-7} . Физически это соответствует колебаниям жидкости в зазоре между двумя концентрическими цилиндрами с внешним радиусом R_0 и бесконечно малым внутренним R^* . Значение $R^* = aR_0$ для использованных в эксперименте сосудов составляли величину порядка 10^{-6} см.

В эксперименте для оценки эффекта внутреннего цилиндра на частоту волновых мод в цилиндре с $R_0 = 9.8$ см в центр донного возвышения помещалась стальная проволочка диаметром $2R^* = 0.1$ см, что соответствовало безразмерному параметру $a = 0.005$. Измеренные собственные частоты равны $\omega_{0,1} = 18.30 \pm 0.41 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_{1,1} = 10.42 \pm 0.63 \text{ с}^{-1}$ и с учетом погрешности измерений совпали с частотой для кругового цилиндра радиуса $R_0 = 9.8$ см (см. табл. 1). Этот экспериментальный факт подтверждает правомерность введения в краевую задачу (1.8) безразмерного регуляризирующего параметра a .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В приближении длинных волн сформулирована и численно решена задача о стоячих волнах в круговом цилиндрическом сосуде переменной глубины при использовании алгоритма ускоренной сходимости. В результате проведенных расчетов с высокой точностью определена собственная частота основной волновой моды.

Для сравнения теоретических результатов представлены новые экспериментальные данные по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в круговом цилиндрическом сосуде с параболическим и коническим возвышениями на дне. Показано совпадение рассчитанных и измеренных значений собственной частоты основной волновой моды в сосудах с профилированным дном.

Получено экспериментальное подтверждение эффекта влияния донного возвышения на частоту основной моды в круговом цилиндре.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по темам государственных заданий № 123021700050-1 и 123021700044-1. Эксперименты проводились на стенде ДСО (уникальная научная установка Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh L.* On waves // Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci. 1876. V. 1. No. 4. P. 257–279. DOI: 10.1080/14786447608639037
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Lawrence H.R., Wang C.J., Reddy R.B.* Variational solution of fuel sloshing modes // J. Jet Propuls. 1958. V. 28. No. 11. P. 729–736. DOI: 10.2514/8.7443

4. *Мусеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. Серия «Математические методы в динамике космических аппаратов». Вып. 3. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
5. *Abramson H.N.* The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers // NASA SP-106. 1966.
6. *Ibrahim R.A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
7. *Калашник М.В., Кахиани В.О., Ломинадзе Дж.Г., Патарашвили К.И., Свиркунов П.Н., Цакадзе С.Д.* Нелинейные изохронные колебания жидкости в параблоиде. Теория и эксперимент // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 131–142.
8. *Weidman P.* New axisymmetric containers for isochronous sloshing: a tribute to B. Andreas Troesch // Inverse Probl. Sci. Eng. 2016. V. 24. No. 7. P. 1240–1248. DOI: 10.1080/17415977.2016.1160394
9. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
10. *Акуленко Л.Д., Калиниченко В.А., Нестеров С.В.* Сейши в канале с резким изменением рельефа дна // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 103–111.
11. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н.* Стоячие поверхностные волны в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями стенок и дна // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 65–74. DOI: 10.7868/S0568528117020104
12. *Нестеров С.В.* Собственные частоты и формы сейш в канале переменной глубины // ПММ. 2022. Т. 86. № 3. С. 365–369. <https://doi.org/10.31857/S0032823522030080>
13. Стенд «Исследования динамики и структуры осциллирующих течений» (ДСО). УИУ ГФК ИПМех РАН. <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#aboutDSO>
14. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 122–129.
15. *Калиниченко В.А., Кравцов А.В., Родригес-Мижангес Р., Секерж-Зенькович С.Я., Флорес-Эспиноза Р.* Гармоническая неустойчивость поверхности маловязкой жидкости в вертикально колеблющемся сосуде // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 285–292.

OSCILLATIONS OF A FLUID IN A CIRCULAR CYLINDER WITH BOTTOM ELEVATION

S. V. Nesterov^a and V. A. Kalinichenko^{a,*}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**e-mail: kalin@ipmnet.ru*

Received September 22, 2023; revised October 20, 2023; accepted October 25, 2023

The problem of standing waves in a circular cylindrical vessel with an elevation on the bottom is formulated and numerically solved in the long wave approximation using an accelerated convergence algorithm. As a result of the calculations, the natural frequency of the fundamental wave mode is determined with a high accuracy. To compare the theoretical results, new experimental data on the excitation of standing surface gravity waves in a circular cylindrical vessel with parabolic and conical elevations at the bottom are presented. It is shown that the calculated and measured natural frequencies of the fundamental wave mode in vessels with the profiled bottom coincide between themselves.

Keywords: standing surface wave, circular cylindrical vessel, natural frequency, long wave approximation, accelerated convergence method

УДК 532.59:539.3

ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ ПРИ НАЛИЧИИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ СО СДВИГОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 19.09.2023 г.

После доработки 25.09.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Исследовано поведение ледяного покрова на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием движущейся прямолинейно с постоянной скоростью области давления при наличии в верхнем слое потока со сдвигом скорости. Предполагается, что в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, прогиб льда установившийся. Использован метод преобразования Фурье в рамках линейной теории волн. Исследованы критические скорости, прогиб ледяного покрова и волновые силы в зависимости от градиента скорости течения, толщины сдвигового слоя, направления движения и коэффициента сжатия.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационная волна, сдвиговой поток, движущаяся нагрузка

DOI: 10.31857/S1024708424010074 EDN: SDQOMI

В настоящее время ведутся активные работы по освоению Арктики. Задача о поведении ледяного покрова под действием движущейся нагрузки изучается, в целях исследования, с одной стороны, способов разрушения ледяного покрова с помощью судов на воздушной подушке, а с другой — возможности использования ледяного покрова в качестве переправ, плавающих платформ различного назначения. Для безопасности работ на льду необходимо изучать закономерности его поведения при механическом воздействии.

В настоящее время задача о поведении ледяного покрова под действием прямолинейно движущейся нагрузки изучена достаточно хорошо при ее стационарном и нестационарном движении. Имеется значительное число работ о влиянии различных физических факторов на характер распространения изгибно-гравитационных волн в плавающем ледяном покрове. Однако влияние подледного течения со сдвигом скорости изучено недостаточно.

Данная статья является продолжением работы [1], в которой исследованы критические скорости и прогиб ледяного покрова с учетом равномерного сжатия в ближнем и дальнем поле при наличии течения с постоянным сдвигом скорости по всей толщине жидкости. Однако в реальных условиях скорость течения жидкости может меняться произвольным образом и по величине, и по направлению. Поэтому необходимы дальнейшие исследования с учетом таких факторов. Обзор предыдущих источников по указанной теме можно найти в работе [1].

Достаточно хорошо изучено влияние течения с вертикальным сдвигом скорости общего вида на поверхностные волны. Аналитические результаты по волнам при наличии течения со сдвигом скорости получены только для нескольких типов распределения скорости течения по глубине: линейного [2], экспоненциального [3], степенного со степенью $1/7$ [4], в виде суммы гиперболических функций [5]. Различные приближенные модели использовались для описания взаимодействия волн и течений с применением разложений по малому параметру [6–10].

Другой приближенный метод решения задач при сдвиговом течении с произвольным профилем по глубине жидкости основан на приближении его ломаной линией и делении области жидкости на слои [11–16]. В каждом слое завихренность постоянна, и решение строится аналитически.

Сходимость такого приближения к точному решению при $N \rightarrow \infty$ (N — число слоев) доказана в работе [15]. Метод кусочно-линейной аппроксимации прост и эффективен, но он приводит к системе уравнений

порядка $N + 2$ Дисперсионное соотношение в этом случае приближается полиномом порядка $N + 1$, которое имеет дополнительные корни. Смысл этих дополнительных собственных значений и векторов выяснен в работах [14, 15]. При этом непрерывное распределение скорости течения заменяется кусочно-линейным распределением с наличием $N - 1$ тангенциальных разрывов. Устойчивость такого течения к возмущениям необходимо дополнительно исследовать.

Далее приведено решение задачи о поведении плавающего ледяного покрова под действием прямолинейно, с постоянной скоростью движущейся нагрузки при наличии верхнего слоя жидкости с линейным сдвигом скорости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный ледяной покров на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H . Предполагается, что имеется два слоя жидкости, из которых нижний слой толщиной H_2 покоится, а верхний толщиной $H_1 = H - H_2$ имеет постоянный сдвиг скорости γ . Ледяной покров моделируется упругой бесконечной пластиной постоянной толщины, плывущей по поверхности жидкости.

Если в неподвижной системе координат ось Ox' направлена вдоль течения жидкости, то в подвижной декартовой системе координат, связанной с пластиной, жидкость течет в противоположном направлении.

Введем декартову систему координат $Oxyz$, связанную с пластиной, с центром O на верхней границе жидкости и осью Oz , направленной вертикально вверх. Вектор скорости жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = U(z) + u, v, w, \quad U(z) = \begin{cases} \gamma z, & -H_1 < z < 0, \\ -\gamma H_1, & -H < z < -H_1. \end{cases}$$

Основное течение жидкости $U(z)$ не потенциально, имеет постоянную завихренность γ в верхнем слое; u, v, w — возмущенные компоненты скорости, малые по сравнению с основным течением. Предполагается, что заданное внешнее давление p_0 равномерно распределено по области прямоугольной формы шириной $2b$ и длиной $2a$. Область давления движется с постоянной скоростью V под углом ψ к оси Ox . Давление внешней нагрузки равно $p_0 = gM/(4ab)$, где M — масса движущегося тела, g — ускорение свободного падения. Данная нагрузка моделирует судно на воздушной подушке.

Рассмотрим движение жидкости. Скорость ее течения удовлетворяет уравнениям Эйлера и неразрывности:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P/\rho - g\mathbf{i}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad P = -\rho gz + p. \quad (1.1)$$

Здесь d/dt — полная производная по времени, P — гидродинамическое давление, которое складывается из гидростатической части и возмущенного гидродинамического давления p , ρ — плотность жидкости, \mathbf{i}_z — единичный орт оси Oz . Прогиб ледяного покрова $\eta(x, y, t)$ описывается уравнением изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа–Лява

$$D\Delta^2\eta + Q\Delta\eta + \rho_0 h d^2\eta/dt^2 = -\rho g\eta + p(x, y, 0, t) - p_0(x, y, t), \quad (1.2)$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины, Q — сжимающие усилия в пластине, ρ_0, h — плотность и толщина льда, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Ставятся граничные условия: условие непротекания на дне

$$w(x, y, -H, t) = 0, \quad (1.3)$$

а на верхней границе жидкости — кинематическое условие

$$w(x, y, 0, t) = d\eta/dt \quad (1.4)$$

и динамическое условие (1.2). На границе между слоями ставятся условия непрерывности вертикальной скорости и давления.

2. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введем безразмерные переменные, параметры и функции по формулам

$$(x', y', z', H', H_1', H_2', a', b') = (x, y, z, H, H_1, H_2, a, b) / L, \quad t' = t \sqrt{g / L}, \quad L = a,$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{gL}}, \quad S = \gamma \sqrt{L/g}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g L^4}, \quad q = \frac{Q}{\rho g L^2}, \quad \chi = \frac{\rho_0 h}{\rho L},$$

$$(U', u', v', w') = (U, u, v, w) / \sqrt{gL}, \quad \eta' = \eta / L, \quad (p', p'_0) = (p, p_0) / (\rho g L).$$

Штрихи далее опускаем. Среди всех безразмерных параметров задачи параметр χ , который характеризует инерцию пластины, является малым и несущественным, инерция пластины мала по сравнению с инерцией жидкости. Для упрощения выражений можно положить его равным нулю.

Введем вертикальную координату в каждом слое:

$$z_1 = z, \quad z_2 = z + H_1,$$

так что на верхней границе каждого слоя $z_j = 0$, а на нижней границе $z_j = -H_j$. Скорость течения в каждом слое имеет вид

$$U_1(z_1) = S_1 z_1, \quad U_2 = -S_1 H_1.$$

Рассмотрим волновые линейные возмущения вида

$$(\eta, u, v, w, p) = (\bar{\eta}, \bar{u}(z), \bar{v}(z), \bar{w}(z), \bar{p}(z)) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)},$$

$$\Omega = \omega \sqrt{L/g}, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad \mathbf{r} = (x, y),$$

где ω — частота в размерных переменных. Тогда система уравнений (1.1) линеаризуется и записывается в каждом слое в виде

$$i(-\Omega + k_x U_j(z_j)) \bar{u}_j + S_j \bar{w}_j = -ik_x \bar{p}_j,$$

$$i(-\Omega + k_x U_j(z_j)) \bar{v}_j = -ik_y \bar{p}_j, \tag{2.1}$$

$$i(-\Omega + k_x U_j(z_j)) \bar{w}_j = -\bar{p}'_j,$$

$$ik_x \bar{u}_j + ik_y \bar{v}_j + \bar{w}'_j = 0,$$

где $j = 1, 2$; $S_2 = 0$, штрих означает дифференцирование по z .

После преобразований в каждом слое получаем уравнение

$$\bar{w}''_j - k^2 \bar{w}_j = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Общее решение имеет вид

$$\bar{w}_j = A_j \text{sh}(k(z_j + H_j)) + B_j \text{ch}(k(z_j + H_j)).$$

Для определения четырех неизвестных констант A_j, B_j имеем два уравнения на границе между слоями, а также условия на дне (1.3) и верхней границе (1.2). Из условия (1.3) и условия непрерывности вертикальной скорости следует

$$B_2 = 0, \quad B_1 = A_2 \text{sh} k H_2.$$

Для давления получаем формулу

$$k^2 p_j = [i(\Omega - k_x U_j(z_j)) k \text{ch} k(z_j + H_j) + ik_x S_j \text{sh} k(z_j + H_j)] A_j + [i(\Omega - k_x U_j(z_j)) k \text{sh} k(z_j + H_j) + ik_x S_j \text{ch} k(z_j + H_j)] B_j. \tag{2.2}$$

Из условия непрерывности давления на границе слоев находим ($z_1 = -H_1, z_2 = 0, S_2 = 0, S_1 = S$)

$$i(\Omega + k_x S H_1) A_1 k + ik_x S B_1 = i(\Omega + k_x S H_1) k A_2 \text{ch} k H_2.$$

Подставляем выражение для A_2 через B_1 :

$$i(\Omega + k_x S H_1) k A_1 + i k_x S B_1 - i(\Omega + k_x S H_1) k \operatorname{cth} k H_2 B_1 = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (1.2) на верхней границе с помощью выражения для гидродинамического давления (2.2) и условия (1.4) при $p_0 = 0$ преобразуется к виду

$$[k^2(\beta k^4 - qk^2 + 1) \operatorname{th} k H_1 - \Omega^2 k - \Omega k_x S \operatorname{th} k H_1] A_1 + [k^2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - \Omega^2 k \operatorname{th} k H_1 - \Omega k_x S] B_1 = 0. \quad (2.4)$$

Уравнения (2.3), (2.4) образуют однородную систему линейных алгебраических уравнений. Чтобы она имела нетривиальное решение, определитель должен быть равен нулю. Этот определитель и является дисперсионным соотношением, определяющим зависимость частоты от волнового числа k и направления распространения. В данном случае это полином третьего порядка. Приравнявая его нулю и вводя цилиндрические координаты в плоскости волновых чисел $k_x = k \cos \alpha$, после преобразований получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \Omega^3 + \Omega^2 S \cos \alpha \left(k H_1 + \frac{\operatorname{sh} k H_1 \operatorname{ch} k H_2}{\operatorname{ch} k H} \right) - \\ & - \Omega \left[k(\beta k^4 - qk^2 + 1) \operatorname{th} k H - S^2 \cos^2 \alpha \left(k H_1 \operatorname{th} k H - \frac{\operatorname{sh} k H_1 \operatorname{sh} k H_2}{\operatorname{ch} k H} \right) \right] - \\ & - k(\beta k^4 - qk^2 + 1) S \cos \alpha \left(k H_1 \operatorname{th} k H - \frac{\operatorname{sh} k H_1 \operatorname{sh} k H_2}{\operatorname{ch} k H} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Можно эту систему свести к обобщенной задаче на собственные значения для системы удвоенного порядка.

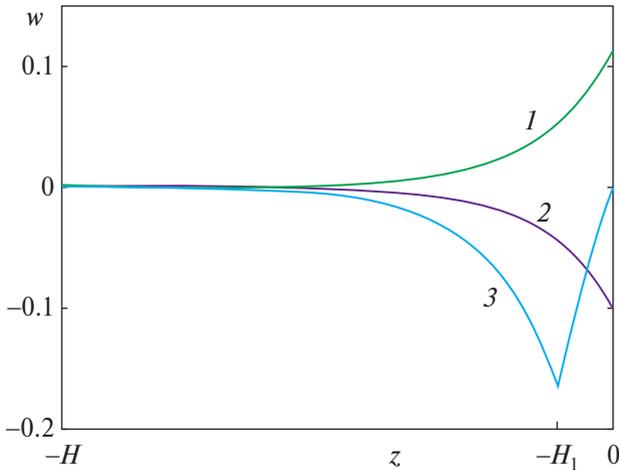


Рис. 1. Пример собственных векторов дисперсионного соотношения для системы уравнений (2.3), (2.4).

Проведенные расчеты (исходные данные приведены в разд. 4) показали, что в системе есть две частоты, соответствующие изгибно-гравитационным волнам в жидкости под упругой пластиной, а также дополнительная частота малой величины, соответствующая волнам на границе слоев. Различить частоты можно по их собственным векторам [14].

Собственные векторы, соответствующие изгибно-гравитационным волнам, имеют максимум на верхней поверхности, а собственный вектор дополнительной частоты имеет максимум на границе слоев. Пример таких векторов показан на рис. 1. Из рисунка видно, что векторы с номерами 1, 2 соответствуют изгибно-гравитационным волнам, а с номером 3 — волнам на границе слоев.

Исследовалась линейная устойчивость двуслойного течения к малым возмущениям в зависимости от толщины сдвигового слоя. Если кубическое уравнение (2.5) имеет только один действительный корень при некоторых параметрах задачи, то два других корня являются комплексно-сопряженными, одно из них дает растущее со временем решение.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение строится аналогично работе [14]. Поскольку мы ищем стационарное решение в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, в исходной системе координат, связанной с ледяной пластиной, возмущенные скорости движения жидкости имеют вид

$$(u, v, w) = (u(\mathbf{r}_1, z), v(\mathbf{r}_1, z), w(\mathbf{r}_1, z)), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{F}t, \quad \mathbf{F} = (F \cos \psi, F \sin \psi).$$

Применяем преобразование Фурье по переменным x, y . Неизвестные функции u, v, w, η, p ищем в виде

$$(u, v, w)(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y),$$

$$\eta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y,$$

$$p(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}(k, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y.$$

Функцию $p_0(\mathbf{r}_1)$ также представим в виде

$$p_0(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y.$$

Решение строим таким же образом, как в разд. 2, только в уравнениях (2.1)–(2.3) $\Omega = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})$. Уравнение движения пластины теперь содержит в правой части движущуюся область давления

$$\left[k^2(\beta k^4 - qk^2 + 1) \operatorname{th}kH_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 k - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})k_x S \operatorname{th}kH_1 \right] A_1 +$$

$$+ \left[k^2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 k \operatorname{th}kH_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})k_x S \right] B_1 = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})k^2 \bar{p}_0 / \operatorname{ch}kH_1.$$

После преобразований, вводя полярные координаты $k_x = k \cos \alpha$, $k_y = k \sin \alpha$, получаем уравнение

$$\left[(\beta k^4 - qk^2 + 1) \left(k - \frac{S \cos \alpha S_H}{SH_1 \cos \alpha + F \cos(\alpha - \psi)} \right) - k^2 F^2 \cos^2(\alpha - \psi) \operatorname{cth}kH + \right.$$

$$\left. + \frac{SF \cos \alpha \cos(\alpha - \psi)}{SH_1 \cos \alpha + F \cos(\alpha - \psi)} [kF \cos(\alpha - \psi) + S \cos \alpha \operatorname{th}kH_1] C_H - \right.$$

$$\left. - kSF \cos \alpha \cos(\alpha - \psi) \right] B_1 = \frac{ik^2 F \cos(\alpha - \psi) \operatorname{sh}kH_2}{\operatorname{sh}kH} \bar{p}_0,$$

где

$$S_H = \frac{\operatorname{sh}kH_1 \operatorname{sh}kH_2}{\operatorname{sh}kH}, \quad C_H = \frac{\operatorname{ch}kH_1 \operatorname{sh}kH_2}{\operatorname{sh}kH}.$$

Перейдем в систему координат $Ox_1 y_1 z$, движущуюся вместе с нагрузкой, повернутую на угол ψ относительно исходной системы, с осью Ox_1 направленной вдоль линии движения, осью Oy_1 — перпендикулярной к ней. Получаем

$$f(k, \sigma) B_1 = \frac{ik^2 F \cos \sigma \operatorname{sh}kH_2}{\operatorname{sh}kH} \bar{p}_0, \tag{3.1}$$

$$\sigma = \alpha - \psi,$$

$$\bar{p}_0(k) = 4p_0 \frac{\sin(ka \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma)}{k^2 \cos \sigma \sin \sigma},$$

$$f(k, \sigma) = (\beta k^4 - qk^2 + 1) \left(k - \frac{S \cos(\sigma + \psi) S_H}{SH_1 \cos(\sigma + \psi) + F \cos \sigma} \right) - k^2 F^2 \cos^2 \sigma \operatorname{cth}kH -$$

$$- kSF \cos \sigma \cos(\sigma + \psi) + \frac{SF \cos \sigma \cos(\sigma + \psi)}{SH_1 \cos(\sigma + \psi) + F \cos \sigma} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi) \operatorname{th}kH_1] C_H.$$

Из условий (1.4), (2.3) находим

$$\bar{\eta} = \frac{A_1 \operatorname{sh}kH_1 + B_1 \operatorname{ch}kH_1}{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})} = -\frac{\bar{p}_0 [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)]}{f(k, \sigma) [F \cos \sigma + SH_1 \cos(\sigma + \psi)]}.$$

С помощью обратного преобразования Фурье из (3.1) получаем

$$\eta(x_1, y_1) = -\frac{2p_0}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(ka \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma)}{k \cos \sigma \sin \sigma f_1(k, \sigma)} \cos(k(x_1 \cos \sigma + y_1 \sin \sigma)) g(k, \sigma) dk d\sigma, \quad (3.2)$$

$$g(k, \sigma) = kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H),$$

$$f_1(k, \sigma) = (\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] - \\ - [k^2 F^2 \cos^2 \sigma \operatorname{cth} kH + kSF \cos \sigma \cos(\sigma + \psi)] [F \cos \sigma + SH_1 \cos(\sigma + \psi)] + \\ + SF \cos \sigma \cos(\sigma + \psi) [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi) \operatorname{th} kH_1] C_H.$$

В частных случаях $\psi = 0, \pi$ формулы упрощаются: при $\psi = 0$

$$g(k, \sigma) = kF + S(kH_1 - S_H),$$

$$f_1(k, \sigma) = (\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF + S(kH_1 - S_H)] - \cos^2 \sigma [(k^2 F^2 \operatorname{cth} kH + kSF)(F + SH_1) - SF(kFC_H + SS_H)];$$

при $\psi = \pi$

$$g(k, \sigma) = kF - S(kH_1 - S_H),$$

$$f_1(k, \sigma) = (\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF - S(kH_1 - S_H)] - \cos^2 \sigma [(k^2 F^2 \operatorname{cth} kH - kSF)(F - SH_1) + SF(kFC_H - SS_H)].$$

Известно, что существует критическая скорость движения нагрузки. При движении со скоростью, меньшей критической, функция $f_1(k, \sigma)$ не имеет корней, соответствующих изгибно-гравитационным модам. Волны в ледяном покрове не возникают, деформации льда локализованы вблизи области нагрузки. Для определения критической скорости исследуем корни функции f_1 . Рассмотрим случай $\psi = 0$. Из условия $f_1(k, \sigma) = 0$ получаем

$$\cos^2 \sigma = \frac{(\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF + S(kH_1 - S_H)]}{(k^2 F^2 \operatorname{cth} kH + kSF)(F + SH_1) - SF(kFC_H + SS_H)} \leq 1. \quad (3.3)$$

Критическое значение параметра F_* достигается при $\cos^2 \sigma = 1$. Получаем

$$G(k, F_*) = 0, \quad G(k, F) = F^3 k^2 \operatorname{cth} kH + kF^2 S(kH_1 \operatorname{cth} kH + 1 - C_H) + \\ + F [S^2(kH_1 - S_H) - k(\beta k^4 - qk^2 + 1)] - S(\beta k^4 - qk^2 + 1)(kH_1 - S_H). \quad (3.4)$$

Поскольку F_* является наименьшим значением, для которого выполнено уравнение (3.4), то $\partial F / \partial k = 0$. Дифференцируем уравнение (3.4) по k :

$$\partial G / \partial k(k, F_*) = 0. \quad (3.5)$$

Уравнения (3.4) и (3.5) с условием $\partial F / \partial k = 0$ составляют систему для определения критических значений F_*, k_* . Система решалась методом Брауна [17].

При $\psi = \pi$ получаем аналогично:

$$\cos^2 \sigma = \frac{(\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF - S(kH_1 - S_H)]}{(k^2 F^2 \operatorname{cth} kH - kSF)(F - SH_1) + SF(kFC_H - SS_H)} \leq 1. \quad (3.6)$$

$$G(k, F_*) = 0, \quad G(k, F) = F^3 k^2 \operatorname{cth} kH - kF^2 S(kH_1 \operatorname{cth} kH + 1 - C_H) + \\ + F [S^2(kH_1 - S_H) - k(\beta k^4 - qk^2 + 1)] + S(\beta k^4 - qk^2 + 1)(kH_1 - S_H). \quad (3.7)$$

Из уравнений (3.5), (3.7) с условием $\partial F / \partial k = 0$ находим критические значения F_*, k_* . В общем случае произвольного угла ψ уравнение $f_1(k, \sigma) = 0$ преобразуется к виду

$$a_1(k) \operatorname{tg}^3 \sigma + a_2(k) \operatorname{tg}^2 \sigma + a_3(k) \operatorname{tg} \sigma + a_4(k) = 0, \quad (3.8)$$

$$a_1(k) = S \sin \psi (\beta k^4 - qk^2 + 1)(kH_1 - S_H),$$

$$a_2(k) = FS^2 \sin^2 \psi (kH_1 - S_H) - (\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF + S \cos \psi (kH_1 - S_H)],$$

$$a_3(k) = S \sin \psi \left[(\beta k^4 - qk^2 + 1)(kH_1 - S_H) - k^2 F^2 H_1 \operatorname{cth} kH - kF(F + 2SH_1 \cos \psi) + F(kF + 2S \cos \psi \operatorname{th} kH_1)C_H \right].$$

$$a_4(k) = -(\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF + S \cos \psi (kH_1 - S_H)] + FS^2 \cos^2 \psi (kH_1 - S_H) + k^2 F^2 \operatorname{cth} kH (F + SH_1 \cos \psi) + kF^2 S \cos \psi (1 - C_H).$$

Поскольку это кубическое уравнение с вещественными коэффициентами, то оно всегда имеет действительный корень. При $F > F_*$ имеется интервал значений параметра k , где уравнение (3.8) имеет три действительных корня. На границах этого интервала комплексно-сопряженные корни становятся действительными и соответственно кратными. Запишем это уравнение в виде

$$a_1(k)t^3 + a_2(k)t^2 + a_3(k)t + a_4(k) = 0, \quad t = \operatorname{tg} \sigma.$$

Тогда производная по t тоже равна нулю на границах интервала

$$3a_1(k)t^2 + 2a_2(k)t + a_3(k) = 0,$$

$$t_1 = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_1 a_3}}{3a_1}, \quad t_2 = -\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_1 a_3}}{3a_1}. \quad (3.9)$$

Подставляем значения t_1, t_2 в уравнение (3.8) и получаем два трансцендентных уравнения. Для t_1 корней нет, а для t_2 при $F > F_*$ находятся два корня. При $F = F_*$ эти два корня совпадают. Из условия кратности корней производная по k тоже обращается в нуль:

$$a'_1(k)t_2^3 + a'_2(k)t_2 + a'_3(k)t_2 + a'_4(k) = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, получили опять систему двух уравнений: (3.8) при $\operatorname{tg} \sigma = t_2$ и (3.10), которая решается методом Брауна. Начальные приближения для поиска F_*, k_* находятся с помощью численных расчетов.

Множество всех корней функции $f_1(k, \sigma)$ при $F > F_*$ образует в плоскости волновых чисел две кривые: C_k^1 и C_k^2 . C_k^1 соответствует изгибно-гравитационным волнам, а C_k^2 — волнам на границе слоев. Анализ функции $f_1(k, \sigma)$ показывает, что при $F > F_*$ имеется интервал (σ_1, σ_2) угла σ , где функция f_1 имеет два действительных корня $k_1(\sigma), k_2(\sigma)$, соответствующих изгибно-гравитационным волнам. А также есть небольшой интервал (σ_3, σ_4) , где функция f_1 имеет дополнительный корень $k_0(\sigma)$, соответствующий волнам на границе слоев. При $\psi = 0, \pi$ дополнительной моды нет.

При $\psi = 0, \pi$ значения σ_1, σ_2 находим из формул (3.3), (3.6) как минимальные и максимальные величины. При произвольном угле ψ и $F > F_*$ сначала находим с помощью уравнений (3.8), (3.9) интервал значений (k_1^*, k_2^*) , в котором существуют изгибно-гравитационные волны, т.е. уравнение (3.8) имеет три корня. На этом интервале находим значения параметра k , при которых $\partial \sigma / \partial k = 0$ для верхней и нижней кривой. Значения угла σ в этих точках определяют (σ_1, σ_2) . На рис. 2 изображены для примера кривые C_k^1, C_k^2 для ледяного покрова толщиной $h = 1$ м, $H_1 = 5$ м, $H = 50$ м, $Q = 0$, $\psi = \pi/3$, $S = 0.4; 0.8; 1.2$ (остальные исходные данные приведены в разд. 4). Из рисунка видно, что при $S = 1.2$ кривая C_k^1 проходит через начало координат.

Поскольку дополнительная мода соответствует действительному корню уравнения (3.8), который существует при любых значениях параметра k , то σ_3 и σ_4 определяются из асимптотики при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$. При $k \rightarrow 0$ имеем

$$a_1(k) \approx kSH_1^2 \sin \psi / H, \quad a_2(k) \approx k(-F - S \cos \psi H_1^2 / H + FS^2 \sin^2 \psi H_1^2 / H),$$

$$a_3(k) \approx kS \sin \psi H_1 [H_1 - 2F(F + SH_1 \cos \psi)] / H,$$

$$a_4(k) \approx k[-F - S \cos \psi H_1^2 / H + F(F + SH_1 \cos \psi)^2 / H].$$

Решаем уравнение (3.8) с этими коэффициентами, деленными на k , и получаем значение $\operatorname{tg} \sigma_4$. Если это уравнение имеет три действительных корня, то это означает, что кривая C_k^1 проходит через начало

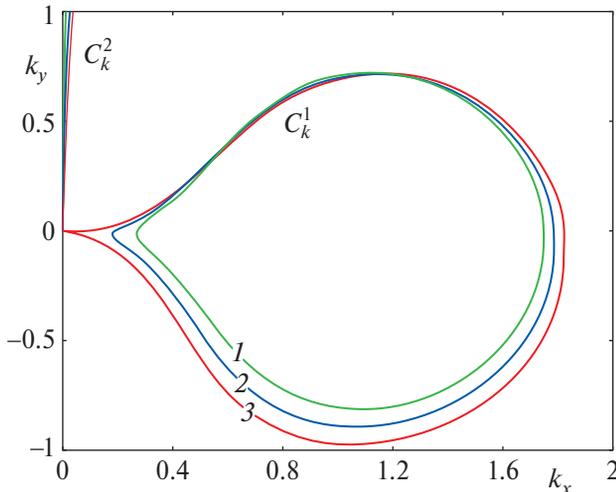


Рис. 2. Кривые волновых чисел C_k^1, C_k^2 для ледяного покрова толщиной 50 м, $Q = 0$, $\psi = \pi/3$; 1–3 – $S = 0.4, 0.8, 1.2$.

координат, и два других корня дают углы, под которыми кривая волновых чисел C_k^1 подходит к началу координат.

При $k \rightarrow \infty$ для $\text{tg } \sigma_3$ находим

$$a_1(k) \approx \beta k^5 S H_1 \sin \psi, \quad a_2(k) \approx -\beta k^5 (F + S H_1 \cos \psi),$$

$$a_3(k) \approx \beta k^5 S H_1 \sin \psi, \quad a_4(k) \approx -\beta k^5 (F + S H_1 \cos \psi).$$

Получаем

$$\text{tg } \sigma_3 = \frac{F + S H_1 \cos \psi}{S H_1 \sin \psi}.$$

При $\psi \rightarrow 0, \pi$ $\sigma_3 \rightarrow \pi/2$.

При $F > F_*$ интеграл (3.2) является интегралом в смысле главного значения. Чтобы правильно выполнить условие излучения на бесконечности и найти стационарное решение, применялся метод, изложенный в работе [18]. В области нагрузки вводится нестационарное давление с малым параметром ε :

$p(x, y, t) = p_0 e^{\varepsilon t}$, $\varepsilon > 0$. Тогда полюсы сдвигаются с действительной оси в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Этот сдвиг и определяет правило обхода. Стационарное решение определяется как предел решения, полученного при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получено, что при вычислении интеграла (3.2) корни k_0, k_1 обходятся сверху, а корень k_2 – снизу.

Вклад дополнительной моды в прогиб ледяного покрова мал. Как видно из рис. 2, интервал (σ_3, σ_4) мал, и собственный вектор, соответствующий дополнительной моде, дает значение на верхней границе, близкое к нулю (см. рис. 1).

Как и в работе [1], картину изгибно-гравитационных волн в дальнем поле можно построить с помощью асимптотических методов. При этом дополнительную моду можно не учитывать. Гребни волн в дальнем поле на основе кривых C_k^1 строятся аналогичным образом, как в работе [1], и имеют такой же характер.

Волновое сопротивление F_1 и боковая сила F_2 , действующие на движущееся тело, определяются по формуле

$$(F_1, F_2) = -p_0 \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial y_1} \right) dx_1 dy_1.$$

Подставляем выражение для прогиба (3.2) и интегрируем:

$$F_1 = i \frac{4p_0^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi\infty} \int_0^{2\pi\infty} \frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma)}{k^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k, \sigma)} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] dk d\sigma,$$

$$F_2 = i \frac{4p_0^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi\infty} \int_0^{2\pi\infty} \frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma)}{k^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k, \sigma)} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] dk d\sigma.$$

В силу симметрии вклад в эти интегралы дают только вычеты в нулях знаменателя. Получаем

$$F_1 = \frac{8p_0^2}{\pi} \left\{ \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma)}{k^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k, \sigma)} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] \right) \Big|_{k_2}^{k_1} d\sigma + \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} \frac{\sin^2(k_0 a \cos \sigma) \sin^2(k_0 b \sin \sigma)}{k_0^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k_0, \sigma)} [k_0 F \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(k_0 H_1 - S_H)] d\sigma \right\}. \quad (3.11)$$

$$F_2 = \frac{8p_0^2}{\pi} \left\{ \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma)}{k^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k, \sigma)} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] \right) \Big|_{k_2}^{k_1} d\sigma + \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} \frac{\sin^2(k_0 a \cos \sigma) \sin^2(k_0 b \sin \sigma)}{k_0^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k_0, \sigma)} [k_0 F \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(k_0 H_1 - S_H)] d\sigma \right\}$$

$$+ \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} \frac{\sin^2(k_0 a \cos \sigma) \sin^2(k_0 b \sin \sigma)}{k_0^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k_0, \sigma)} [k_0 F \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(k_0 H_1 - S_H)] d\sigma \}. \quad (3.12)$$

Безразмерные коэффициенты волновых сил находятся по формуле

$$(A_1, A_2) = \frac{g\rho}{2bp_0^2} (-F_1, F_2).$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проводили для ледяного покрова при следующих входных параметрах задачи: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922.5$ кг/м³, $\nu = 1/3$, $a = 20$ м, $b = 10$ м, толщина льда $h = 1$ м, глубина жидкости $H = 50$ м. Сжимающие усилия в пластине заданы в виде $Q = \bar{Q}\sqrt{\rho g D}$, $\bar{Q} = 0$ и 1. Глубина сдвигового слоя H_1 , скорость и направление движения нагрузки менялись.

Проведены расчеты на исследование линейной устойчивости возникающих изгибно-гравитационных волн к малым возмущениям при значениях параметра S в пределах от 0 до 1 и различных значениях угла α , коэффициента сжатия \bar{Q} , толщины сдвигового слоя H_1 и волнового числа k с помощью уравнения (2.5).

Оказалось, что при $\bar{Q} = 0$ решение устойчиво при всех значениях указанных параметров. С увеличением коэффициента сжатия \bar{Q} появляются зоны неустойчивости при больших значениях глубины сдвигового слоя. Так, при $\bar{Q} = 1$ неустойчивость обнаружена при $S = 0.2$, $H_1 \geq 45$ м; $S = 0.3$, $H_1 \geq 35$ м; $S = 0.4$, $H_1 \geq 29$ м; $S = 0.5$, $H_1 \geq 24$ м и т.д. С ростом параметров \bar{Q} и S область неустойчивости растет. При $\bar{Q} = 1.5$ решение неустойчиво с любой толщиной сдвигового слоя.

Проведенные расчеты показали, что наибольшее отличие критических скоростей наблюдается при углах $\psi = 0$ и $\psi = \pi$. При $\psi = \pi/2$ критические скорости при различных значениях параметра сдвига S близки к значению при $S = 0$ (в отсутствие течения). На рис. 3 приведены зависимости критических скоростей изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове от глубины сдвигового слоя H_1 при $\psi = 0, \pi$; $\bar{Q} = 0, 1$ и различных значениях параметра сдвига S .

При $\bar{Q} = 1$ кривые представлены в пределах устойчивости. Минимальные критические скорости достигаются при $\psi = 0$. Максимальные критические скорости наблюдаются при $\psi = \pi$. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются. Критические скорости уменьшаются с ростом толщины сдвигового слоя при $\psi = 0$ и растут при $\psi = \pi$. Видно, что сдвиг скорости, направление движения, коэффициент сжатия льда и толщина сдвигового слоя оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн.

На рис. 4 показаны зависимости прогиба ледяного покрова вдоль линии движения нагрузки $\eta(x_1, 0)$ от координаты x_1 при $V = 20$ м/с, в отсутствие сжатия $\bar{Q} = 0$ (а, б) и $\bar{Q} = 1$ (в, г), при $\psi = 0$ (а, в) и $\psi = \pi$ (б, г) для случаев однослойной ($H_1 = H$) и двухслойной жидкости с $H_1 = 5$ м, $S = 0, 0.3, 0.5$.

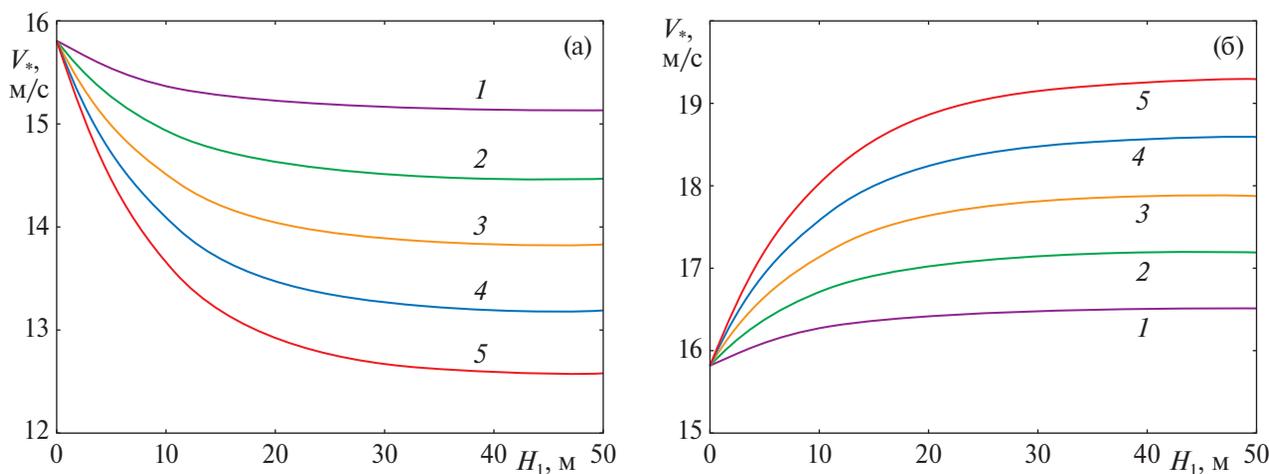


Рис. 3 (окончание следует).

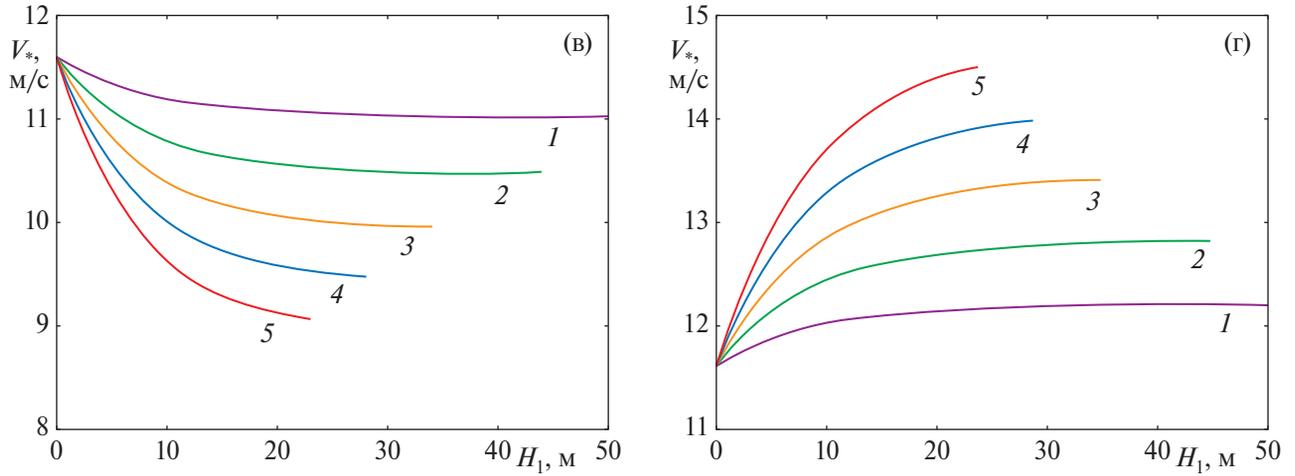


Рис. 3 (окончание). Зависимость критических скоростей от толщины сдвигового слоя при $\bar{Q} = 0$ (а, б) и $\bar{Q} = 1$ (в, г), $\psi = 0$ (а, в) и $\psi = \pi$ (б, г): кривые 1–5 соответствуют значениям $S = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

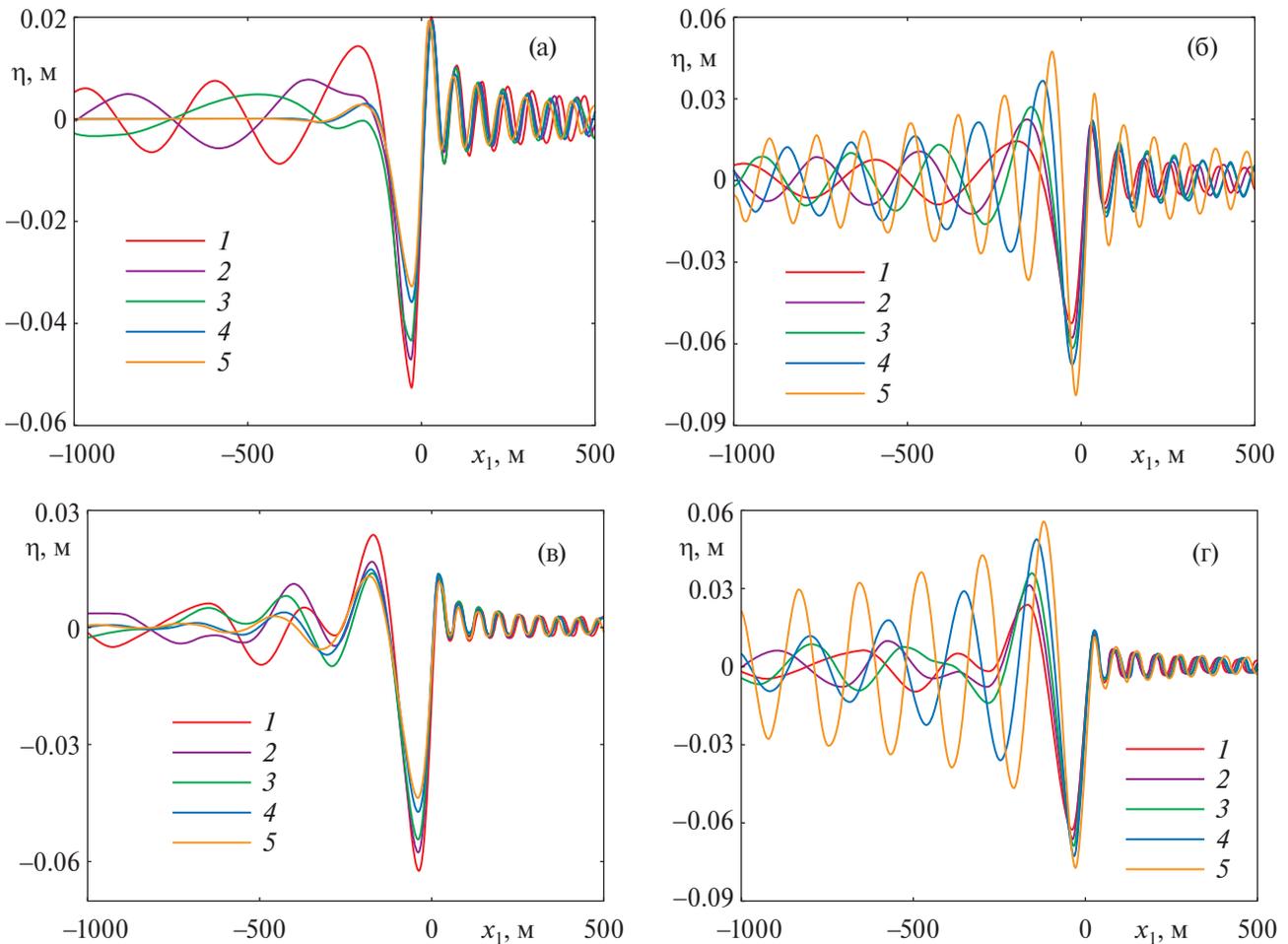


Рис. 4. Прогиб ледяного покрова при $\bar{Q} = 0$ (а, б) и $\bar{Q} = 1$ (в, г), $\psi = 0$ (а, в) и $\psi = \pi$ (б, г): 1 – $S = 0$; 2, 3 – $S = 0.3, 0.5$ для двух слоев $H_1 = 5$ м, $H_2 = 45$ м; 4, 5 – $S = 0.3, 0.5$ для одного слоя $H_1 = H = 50$ м.

Как видно из рисунка, волны перед нагрузкой для всех случаев практически одинаковой амплитуды. Только на рис. 4б для однослойной жидкости при $S = 0.5$ (кривая 5) амплитуды волн и перед нагрузкой, и за нагрузкой значительно выше остальных. Это объясняется тем, что для этого случая скорость движения нагрузки близка к критической скорости $V_* = 19.3$ м/с.

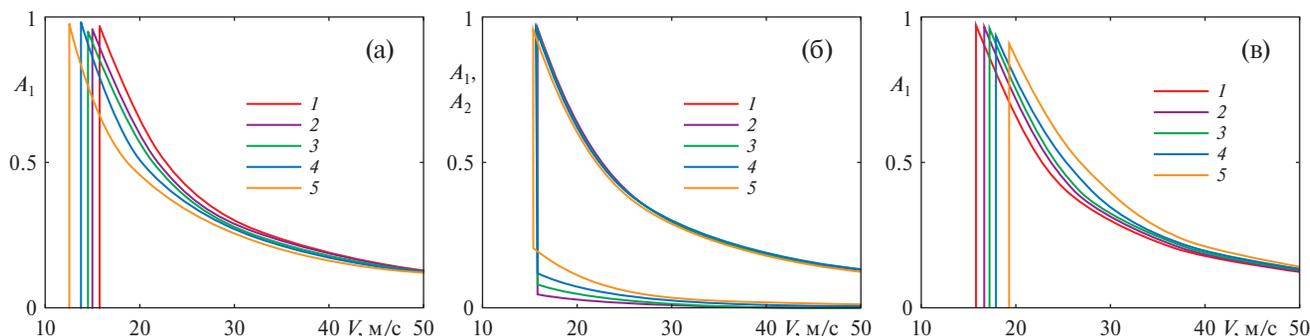


Рис. 5. Безразмерные коэффициенты волновых сил A_1, A_2 в зависимости от скорости движения нагрузки при $\bar{Q}=0$, $\psi=0$ (а), $\psi=\pi/2$ (б) и $\psi=\pi$ (в): 1 – $S=0$; 2, 3 – $S=0.3, 0.5$ для двух слоев: $H_1=5$ м, $H_2=45$ м; 4, 5 – $S=0.3, 0.5$ для одного слоя: $H=50$ м.

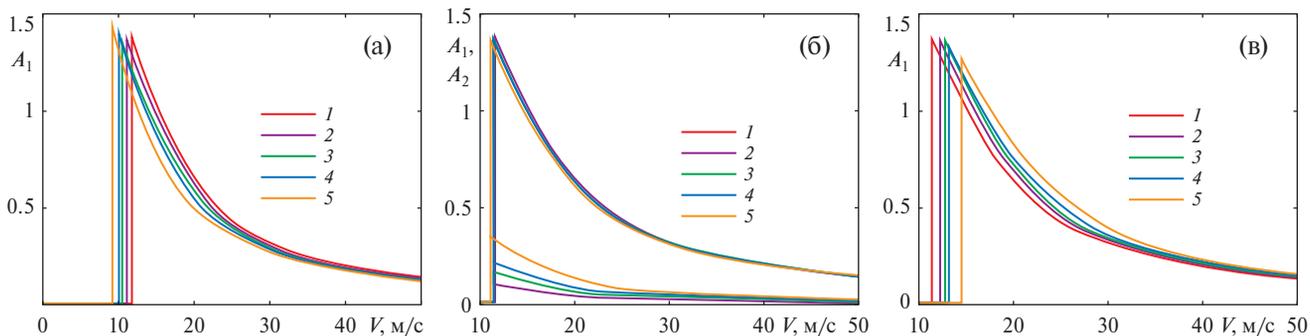


Рис. 6. Безразмерные коэффициенты волновых сил A_1, A_2 в зависимости от скорости движения нагрузки при $\bar{Q}=1$, $\psi=0$ (а), $\psi=\pi/2$ (б) и $\psi=\pi$ (в): 1 – $S=0$; 2, 3 – $S=0.3, 0.5$ для двух слоев: $H_1=5$ м, $H_2=45$ м; 4, 5 – $S=0.3, 0.5$ для одного слоя: $H=50$ м.

При $\psi=0$ волны перед нагрузкой укорачиваются, а за нагрузкой удлиняются в обоих случаях. При $\psi=\pi$ волны перед нагрузкой удлиняются, а за нагрузкой укорачиваются. При $\psi=0$ с увеличением параметра S амплитуда волн за нагрузкой становится меньше в обоих случаях: двухслойной и однослойной жидкости. При $\psi=\pi$ с ростом параметра S все происходит наоборот – амплитуда волн за нагрузкой увеличивается в обоих случаях. Сжатие льда приводит к увеличению прогиба ледяного покрова. Увеличение толщины сдвигового слоя дает такой же результат, как увеличение параметра S – при $\psi=0$ амплитуды прогиба за нагрузкой уменьшаются, а при $\psi=\pi$ растут. При движении нагрузки под произвольным углом к направлению течения симметрия прогиба нарушается.

На рис. 5 изображены зависимости безразмерных коэффициентов волновых сил A_1, A_2 от скорости движения нагрузки при $\bar{Q}=0$, $\psi=0, \pi/2, \pi$ для однослойной ($H_1=H$) и двухслойной жидкости с $H_1=5$ м, $S=0, 0.3, 0.5$.

Как видно из рисунка, графики сил подобны, основное отличие связано с различием критических скоростей. Поскольку при $\psi=\pi/2$ критические скорости мало меняются с изменением параметра S , все кривые для коэффициента продольной волновой силы A_1 практически сливаются. Коэффициент боковой силы A_2 максимален при $\psi=\pi/2$ и растет с увеличением параметра S .

На рис. 6 представлены аналогичные графики для случая $\bar{Q}=1$. Видно, что коэффициенты волновых сил в этом случае в 1,5 раза выше, чем при $\bar{Q}=0$. Продольная волновая сила уменьшается с ростом параметра S при $\psi=0$ и увеличивается при $\psi=\pi$ в области сверхкритических скоростей. При $\psi=0$ увеличение толщины сдвигового слоя приводит к уменьшению пика продольной силы, а при $\psi=\pi$ – к увеличению.

Исследован вклад дополнительных корней в волновые силы, который характеризуется отношениями

$$R_1 = F_1^0/F_1, \quad R_2 = F_2^0/F_2,$$

где F_1^0, F_2^0 , определяются интегралами по интервалу (σ_3, σ_4) в формулах (3.11), (3.12). На рис. 7 показаны зависимости отношений R_1, R_2 от скорости движения нагрузки V при $\psi=\pi/2$, $\bar{Q}=0$ (а) и $\bar{Q}=1$ (б), $S=0.3, 0.5$. Как видно из графиков, вклад дополнительных корней в волновые силы мал, вклад их в боковую силу

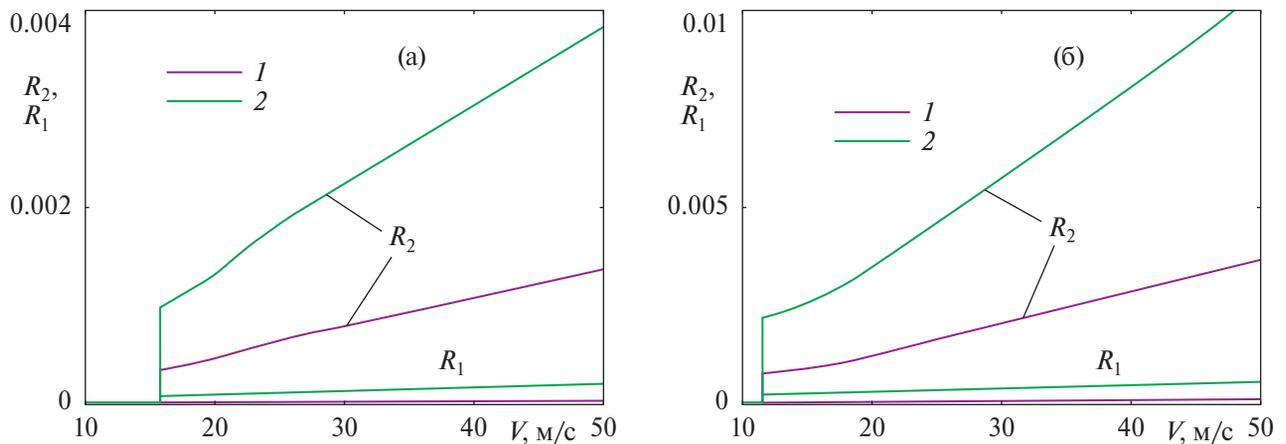


Рис. 7. Вклад дополнительных корней в волновые силы в зависимости от скорости движения нагрузки при $H_1 = 5$ м, $\psi = \pi/2$, $\bar{Q} = 0$ (а), $\bar{Q} = 1$ (б); 1–2 – $S = 0.3, 0.5$.

значительно выше, чем в продольную. Сжатие ледяного покрова приводит к увеличению интервала (σ_3, σ_4) , и вклад дополнительных корней в волновые силы увеличивается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано поведение ледяного покрова при равномерном прямолинейном движении нагрузки при наличии в верхнем слое сдвигового потока с учетом однородного сжатия льда. Поле скоростей жидкости не потенциально. Показано, что сдвиг скорости, толщина сдвигового слоя, направление движения нагрузки и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн и прогиб ледяного покрова. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются. Сжатие льда приводит к неустойчивости возмущений при большой толщине сдвигового слоя.

При увеличении коэффициента сжатия амплитуды прогиба льда значительно увеличиваются за нагрузкой и уменьшаются перед нагрузкой. Увеличение параметра сдвига S оказывает качественно такое же влияние, как увеличение скорости движения нагрузки. При движении нагрузки под произвольным углом к направлению течения симметрия прогиба нарушается. Боковая сила максимальна при движении нагрузки перпендикулярно течению. При увеличении коэффициента сжатия льда волновые силы значительно растут.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ткачева Л.А. Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 2. С. 113–122.
2. Thompson P.D. The propagation of small surface disturbances through rotational flow // Ann. NY Acad. Sci. 1949. V. 51. P. 463–474.
3. Abdullah A.J. Wave motion at the surface of a current which has an exponential distribution of vorticity // Ann. NY Acad. Sci. 1949. V. 51. P. 425–441.
4. Fenton J.D. Some results for surface gravity waves on shear flows // J. Inst. Maths. Applies. 1953. V. 1. P. 1–20.
5. Peregrine D.H. Interaction of water waves and currents // Adv. Appl. Mech. 1976. V. 16. P. 9–117.
6. Kirby J.T., Chen T.M. Surface waves on vertically sheared flows: Approximate dispersion relation // J. Geophys. Res. 1989. V. 94. P. 1013–1027. DOI: 10.1029/jc094ic01p01013.
7. Skop R.A. Approximate dispersion relation for wave-current interactions // J. Waterw., Port, Coastal, Ocean Eng. 1987. V. 113. P. 187–195.
8. Swan C., James R. A simple analytical model for surface water waves on a depth-varying current // Appl. Ocean Res. 2001. V. 22. P. 331–347.
9. Stewart R.H., Joy J.W. HF radio measurements of surface currents // Deep Sea Res. 1974. V. 21. P. 1039–1949.
10. Shrira V.I. Surface waves on shear currents: Solution of the boundary-value problem // J. Fluid Mech. 1993. V. 252. P. 565–584.
11. Thompson P.D. The propagation of small surface disturbances through rotational flow // Ann. NY Acad. Sci. 1949. V. 51. P. 463–474.

12. Герценштейн С.Я., Ромашева Н.Б., Чернявский М.В. О возникновении и развитии ветрового волнения // Изв. РАН. МЖГ. 1988. № 3. С. 163–169.
13. Longuet-Higgins M.S. Instabilities of a horizontal shear flow with a free surface // J. Fluid Mech. 1998. V. 364. P. 147–162.
14. Smeltzer B.K., Ellingsen S.A. Surface waves on arbitrary vertically-sheared currents // Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 047102.
15. Zhang X. Short surface waves on surface shear // J. Fluid Mech. 2005. V. 541. P. 345–370.
16. Стурова И.В. Действие пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвигового слоя // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 4. С. 14–26.
17. Brown M.K. A quadratically convergent Newton-like method upon Gaussian elimination // SIAM Numer. Anal. 1969. V. 6. № 4. P. 560–569.
18. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.

LOAD MOTION ON AN ICE COVER IN THE PRESENCE OF A LIQUID LAYER WITH VELOCITY SHEAR

L. A. Tkacheva

The behavior of an ice cover on the surface of an ideal incompressible fluid of finite depth under the action of a pressure domain that moves rectilinearly at a constant velocity in the presence of a current with velocity shift in the upper layer is studied. It is assumed that the ice deflection is steady in the coordinate system moving with the load. The Fourier transform method is used within the framework of the linear wave theory. The critical velocities, the deflection of ice cover, and the wave forces are studied depending on the current velocity gradient, the shear layer thickness, the direction of motion, and the compression ratio.

Keywords: thin elastic floating plate, flexural-gravity wave, shear current, moving load

УДК 551.466

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНЕРЦИОННО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Д. И. Воротников^a, А. М. Савченко^b

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра квантовой статистики и теории поля, Москва, Россия

^a E-mail: infsup@yandex.ru

^b E-mail: a.m.savchenko@gmail.com

Поступила в редакцию 03.09.2023 г.

После доработки 21.09.2023 г.

Принята к публикации 21.09.2023 г.

Представлен численный расчет начально-краевой задачи для уравнения свободных инерционно-гравитационных внутренних волн в неограниченном бассейне постоянной глубины в приближении Буссинеска и наличии двумерного вертикально-неоднородного течения. Краевая задача для амплитуды вертикальной скорости содержит комплексные коэффициенты и решается как численным методом, так и по теории возмущений. На примере расчета декремента затухания внутренних волн и волновых потоков импульса показано, что точный численный расчет дает существенно лучшие оценки в сравнении с методом возмущений. В частности, при минимальном расхождении в дисперсионных кривых для обоих методов расчета мнимая часть частоты волны, интерпретируемая как декремент затухания, может различаться на два-три порядка. Вертикальные волновые потоки импульса сравнимы с турбулентными и, в том числе, могут превышать их, при этом результаты, полученные численным методом, почти на порядок меньше вычисленных методом теории возмущений.

Ключевые слова: внутренние инерционно-гравитационные волны, волновой поток импульса, комплексная частота волны

DOI: 10.31857/S1024708424010088 EDN: SDMTAC

Вертикальные обменные процессы для различных термогидродинамических характеристик (далее вертикальный обмен) обеспечиваются за счет переноса по вертикали количества движения между слоями стратифицированной по плотности жидкости.

Вертикальный обмен в бассейнах природных сред играет существенную роль в функционировании их экосистем. По существующим представлениям вертикальный обмен обусловлен мелкомасштабной турбулентностью, которая сильно подавлена в стратифицированной толще жидкости. В то же время благодаря стратификации возможно существование внутренних волн. Внутренние волны в природных средах порождаются атмосферными возмущениями, взаимодействием течений и приливов с неоднородностями рельефа дна. Внутренние волны квазиинерционного периода обусловлены вращением Земли.

Мелкомасштабная турбулентность в стратифицированной толще жидкости характеризуется явлением чередования ламинарных и турбулентных слоев, т. е. имеет перемежаемый характер и потому можно ввести для ее описания эффективный коэффициент турбулентного обмена. При учете турбулентной вязкости и диффузии внутренние волны затухают [1–4]. Вертикальные волновые потоки импульса при этом отличны от нуля [6]. Однако на двумерном сдвиговом течении при учете вращения Земли, когда компонента скорости течения, перпендикулярная направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты, вертикальный волновой поток импульса отличен от нуля и без учета турбулентной вязкости и диффузии [7].

Это объясняется тем, что в этом случае уравнение для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты; собственная функция и частота волны – комплексные, сдвиг фаз между вертикальной w и горизонтальной u компонентами волновых возмущений скорости течения отличен от $\pi/2$, и вертикальный волновой поток импульса \overline{uw} отличен от нуля [7].

Краевая задача для амплитуды вертикальной скорости, имеющая комплексные коэффициенты в уравнении, в работе [7] решалась методом возмущений, путем разложения решения и частоты волны в ряд по

малому параметру $\varepsilon = V_0^*(H\omega_*)$, где V_0^* — характерное значение скорости течения, ω_* — характерная частота волны, H — глубина бассейна.

В силу естественных ограничений применения теории возмущений в случаях, когда данный параметр нельзя считать малым, решение перестает быть корректным. В связи с этим видится разумным применить прямой или непосредственный численный расчет в условиях, когда параметр ε не мал.

Во избежание резкого увеличения погрешности и выполнения заданной точности для численного решения данной краевой задачи была выбрана неявная схема Адамса третьего порядка и реальные профили частоты Брента–Вяйсяля и скоростей течения. Реализовали численную схему с использованием постоянного шага на сетке с числом узлов $N = 2000$.

Краевая задача для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн решалась аналитически в работе [8]. для плоскопараллельного сдвигового потока при постоянной частоте Брента–Вяйсяля. Было получено, что собственная функция — решение этой краевой задачи — комплексная, а частота волны — действительная. Важно отметить, что рассматривался случай, когда волна распространяется перпендикулярно потоку.

В настоящей работе в ходе численных расчетов показано, что на двумерном течении с вертикальным сдвигом скорости частота волны — комплексная. Вертикальные волновые потоки импульса при этом отличны от нуля.

Производится сопоставление потоков импульса, полученных методом возмущений и численным расчетом. Мнимая часть частоты волны отлична от нуля. Возможны как слабое усиление, так и слабое затухание волны. Делается сопоставление зависимости действительной и мнимой части частоты от волнового числа, полученные точным численным расчетом с использованием теории возмущений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны при учете вращения Земли при наличии двумерного стратифицированного течения, две горизонтальные компоненты скорости которого $U_0(z)$, $V_0(z)$ зависят от вертикальной координаты. В линейном приближении численно решается краевая задача для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн и находим мнимую часть частоты и волновое число при фиксированной действительной части частоты. Во втором порядке по амплитуде волны находим вертикальные волновые потоки импульса, которые впоследствии сравниваются с соответствующими турбулентными потоками.

Уравнения гидродинамики для волновых возмущений имеют вид

$$\frac{Du}{Dt} - fv + w \frac{dU_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1.1}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + w \frac{dV_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{1.2}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0(0)} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0(0)}, \tag{1.3}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -w \frac{d\rho_0}{dz}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.5}$$

где u , v , w — две горизонтальные и вертикальная компоненты волновой скорости течения соответственно; f — параметр Кориолиса; $U_0(z)$, $V_0(z)$ — две компоненты скорости среднего течения; ρ , P — волновые возмущения плотности и давления; g — ускорение свободного падения; $\rho_0(z)$ — профиль средней плотности; x , y , z — две горизонтальные и вертикальная координаты, ось z направлена вертикально вверх; действие оператора D/Dt раскрывается по формуле

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

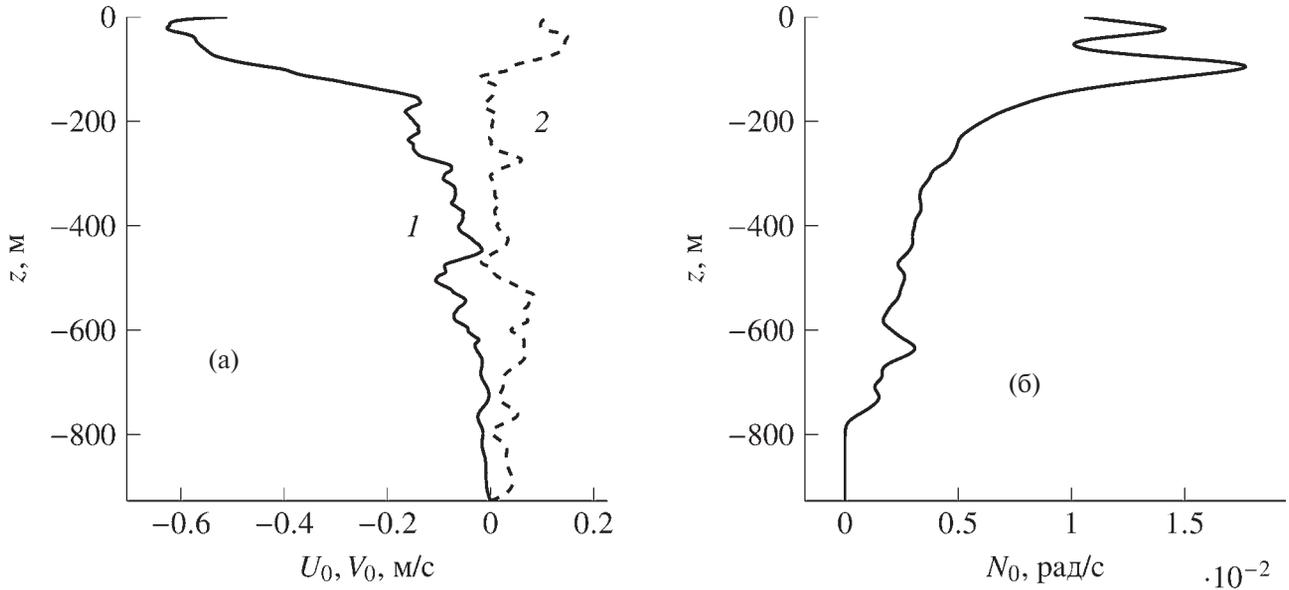


Рис. 1. Вертикальные профили (а) компонент скорости течения U_0 (1), V_0 (2) и (б) частоты Брента–Вайсяля.

Если в качестве природного бассейна большой площади и глубины рассматривать морской бассейн, то от поверхности до дна плотность воды меняется не более чем на 3–4% [3], а при глубине моря 100 м – менее чем на 1% [5], поэтому в приближении Буссинеска в знаменателе правых частей формул (1.1)–(1.3) усредненная по глубине плотность принимается равной плотности на поверхности моря [3].

Сделаем оценку горизонтальной изменчивости средней плотности. Для этого воспользуемся оценкой геострофических соотношений [10].

$$\begin{aligned} L_x &= \rho_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} = gf \max \left| \frac{\partial V_0}{\partial z} \right|, \\ L_y &= \rho_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = gf \max \left| \frac{\partial U_0}{\partial z} \right|. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Вертикальные профили компонент скорости течения и их производных показаны на рис. 1. Максимальные значения вертикальных градиентов компонент скорости течения U_0 , V_0 составляют 0.019 и 0.027 с^{-1} соответственно. Горизонтальные масштабы изменения плотности $L_x = 7.9 \cdot 10^6 \text{ м}$, $L_y = 5 \cdot 10^6 \text{ м}$ много больше длины волны, поэтому горизонтальным изменением плотности можем пренебречь.

Граничное условие на поверхности бассейна ($z = 0$) – “условие твердой крышки”, которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [11]:

$$w(0) = 0. \quad (1.7)$$

Граничное условие на дне – условие непротекания (жидкость считаем идеальной)

$$w(-H) = 0, \quad (1.8)$$

где H – глубина бассейна.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Решения линейного приближения ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad v_1 = v_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad w_1 = w_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \\ P_1 &= P_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad \rho_1 = \rho_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где A – амплитудный множитель, θ – фаза волны, с.с. – комплексно-сопряженные слагаемые $\partial \theta \partial x = k$, $\partial \theta \partial t = -\omega$, k – горизонтальное волновое число, ω – частота волны. Предполагается, что волна распространяется вдоль оси x .

Подставляя (2.1) в систему (1.1)–(1.5), находим связь амплитудных функций u_{10} , v_{10} , ρ_{10} , P_{10} с функцией w_{10} :

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad v_{10} = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} - i w_{10} \frac{dV_0}{dz} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{P_{10}}{\rho_0(0)} = \frac{i}{k} \left[\frac{\Omega}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \frac{dU_0}{dz} w_{10} + \frac{f}{\Omega} \left(i \frac{dV_0}{dz} w_{10} - \frac{f}{k} \frac{dw_{10}}{dz} \right) \right], \quad (2.3)$$

$$\rho_{10} = -\frac{i}{\Omega} w_{10} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad \Omega = \omega - k \cdot U_0. \quad (2.4)$$

Функция w_{10} удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + k \left[\frac{if \frac{dV_0}{dz}}{\Omega^2 - f^2} - \frac{f^2 \frac{dU_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] \frac{dw_{10}}{dz} + k w_{10} \left[\frac{k(N^2 - \Omega^2) + \Omega \frac{d^2 U_0}{dz^2} + if \frac{d^2 V_0}{dz^2}}{\Omega^2 - f^2} + \frac{fk \frac{dU_0}{dz} \frac{dV_0}{dz}}{\Omega(\Omega^2 - f^2)} \right] = 0, \quad (2.5)$$

где $N^2 = -\frac{g}{\rho_0(0)} \frac{d\rho_0}{dz}$ – квадрат частоты Брента–Вяйсяля.

Граничные условия для w_{10} на поверхности

$$w_{10}(0) = 0 \quad (2.6)$$

и на дне

$$w_{10}(-H) = 0. \quad (2.7)$$

Краевая задача (2.5)–(2.7) решалась аналитически в работе [8] при постоянной частоте Брента–Вяйсяля и линейном профиле скорости плоскопараллельного среднего течения. Волна распространялась перпендикулярно потоку. Было получено: собственная функция (решение этой краевой задачи) – комплексная, а частота волны – действительная. Далее в ходе численных расчетов будет показано, что при двумерном течении частота волны комплексная.

В работах [7, 9] уравнение (2.5) решалось путем разложения решения и частоты волны в ряды по малому параметру $\varepsilon = V_0^*(H\omega_*)$. Однако этот параметр не всегда мал, и применимость метода ограничена. Поэтому в нашей работе применена неявная схема Адамса третьего порядка точности для численного решения уравнения (2.5) при реальных профилях частоты Брента–Вяйсяля и скорости течения.

3. ВОЛНОВЫЕ ПОТОКИ ИМПУЛЬСА

Вертикальные волновые потоки импульса \overline{uw} , \overline{vw} находим, учитывая формулы (2.1), (2.2), (2.4):

$$\overline{uw} / |A_1^2| = \frac{i}{k} \left(w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} - w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right), \quad (3.1)$$

$$\overline{vw} / |A_1^2| = \frac{i w_{10} w_{10}^*}{\Omega \Omega^*} (\Omega - \Omega^*) \frac{dV_0}{dz} + \frac{f}{\Omega \Omega^* k} \left(\Omega^* w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} + \Omega w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right), \quad (3.2)$$

где $A_1 = A \exp(i\delta\omega t)$, $\delta\omega = \text{Im } \omega$ – мнимая часть частоты. Черта сверху означает усреднение по периоду волны (в смысле интеграла $\frac{1}{T} \int_0^T \dots$) [1].

При $dV_0/dz=0$ уравнение (2.5) имеет действительные коэффициенты, решение краевой задачи (2.5)–(2.7) – действительная функция и вертикальный волновой поток импульса \overline{uw} (3.1) для фиксированной моды внутренних волн равен нулю. Мнимая часть частоты при этом тоже равна нулю. Вертикальный

волновой поток импульса \overline{w} при $dV_0/dz=0$ согласно выражению (3.2), отличен от нуля. Он равен нулю только при неучете вращения Земли, т.е. при $f=0$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Анализ вертикальных потоков импульса для внутренних волн проведем, используя результаты натуральных измерений в глубоководной области северо-западной части Черного моря, где над континентальным склоном расположена струя Основного черноморского течения (ОЧТ). Профили двух компонент скорости течения и частоты Брента–Вяйсяля, изображенные на рис. 1, получены с использованием данных зондирований профилографа LADCP [12]. На основе экспериментальных данных с приборов ГРАД (градиентно-распределенные датчики температуры) был сделан вывод о том, что преимущественно наблюдается вторая мода 15-минутных внутренних волн [5]. Таким образом, целесообразно проводить вычисления с последующим сравнением именно для такого типа колебаний.

Мнимая часть частоты волны и волновое число при фиксированной действительной части частоты находится методом пристрелки [13] из необходимости выполнения граничных условий (2.6), (2.7). Метод заключался в последовательном переборе значений управляющего параметра (в нашем случае – волнового числа k) и последующего решения краевой задачи. Процедура выполнялась до тех пор, пока не удовлетворялись граничные условия.

Поиск оптимального значения k основан на методе дихотомии [13]. Собственная функция – решение краевой задачи (2.5)–(2.7) – комплексная, поэтому вертикальный волновой поток импульса \overline{w} (3.1) отличен от нуля. Вертикальные профили модуля собственных функций первой и второй моды 15-минутных внутренних волн показаны на рис. 2.

Зависимость действительной части частоты волны от волнового числа для первых двух мод представлена на рис. 3а для положительных волновых чисел как при прямом численном решении краевой задачи (2.5)–(2.7), так и методом возмущений; на рис. 3б – то же при отрицательных волновых числах.

Вследствие воздействия течения при больших волновых числах происходит загибание дисперсионных кривых (такой эффект отмечен в работе [14]). Для отрицательных волновых чисел данный эффект не наблюдается, причем происходит обрезание дисперсионных кривых в низкочастотной области, что обусловлено влиянием критических слоев, когда частота волны со сдвигом Доплера равна инерционной [15, 16].

Как показано в работе [17], при течении с продольной компонентой скорости, зависящей от z , может вовсе не существовать дискретного спектра действительных частот. Отметим, что точные численные расчеты и вычисления с использованием теории возмущений дают очень близкие результаты для дисперсионных кривых (кривые практически совпадают), отклонения порядка десятых долей числа, что на грубой шкале не позволяет увидеть различий (качественно имеем идентичную картину).

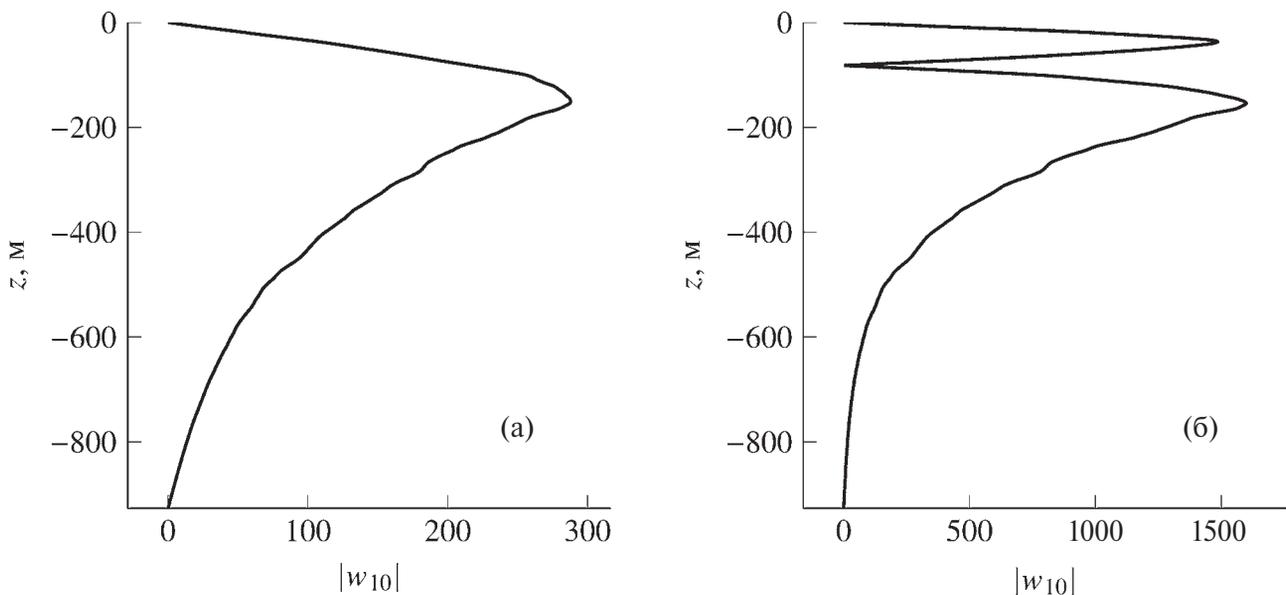


Рис. 2. Собственные функции первой (а) и второй (б) мод 15-минутных внутренних волн.

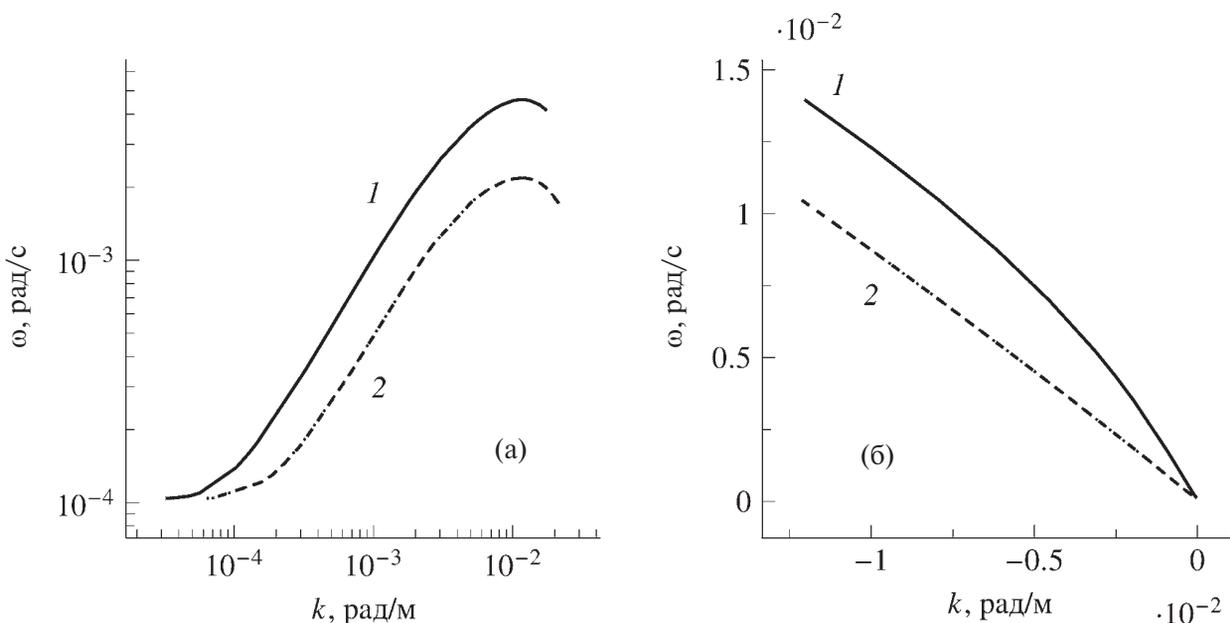


Рис. 3. Дисперсионные кривые первой (1) и второй (2) мод при (а) положительных и (б) отрицательных волновых числах. Пунктиром показан результат непосредственного численного расчета.

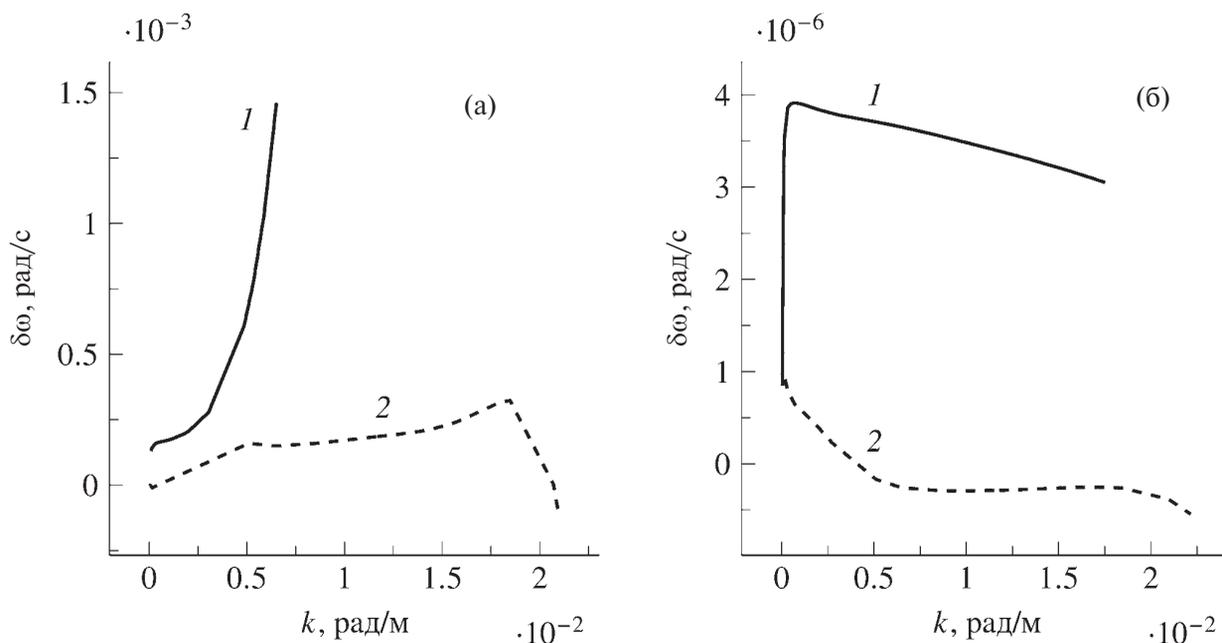


Рис. 4. Зависимость мнимой части частоты волны от волнового числа для первой (1) и второй (2) мод: метод возмущений (а); прямой численный метод (б).

Зависимость мнимой части частоты волны от положительных волновых чисел для первых двух мод представлена на рис. 4а, при решении краевой задачи (2.5)–(2.7) методом возмущений и прямым численным методом — на рис. 4б.

Аналогичные зависимости для отрицательных волновых чисел представлены на рис. 5. Метод возмущений предсказывает завышенные на 2–3 порядка (в зависимости от области вычислений) значения модуля мнимой части частоты волны по отношению к методу непосредственного расчета, что может объясняться большей универсальностью второго и, как следствие, широтой его применимости.

Действительно, можно сказать, что эффект затухания волны только за счет течения (при учете вращения Земли) является очень малым, на что указывают и наблюдательные данные [12]. Поэтому, и в силу

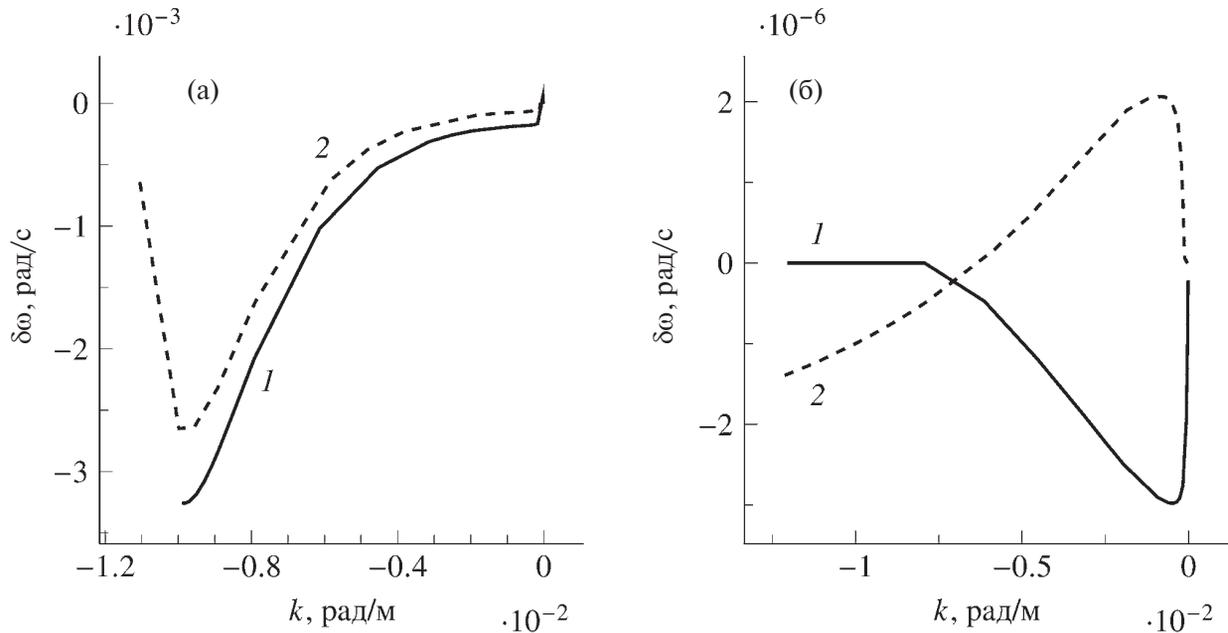


Рис. 5. Зависимость мнимой части частоты волны от отрицательных волновых чисел для первой (1) и второй (2) мод: метод возмущений (а); прямой численный метод (б).

меньшей чувствительности к областям расчета (где может произойти возрастание малого параметра ϵ) более выгодно сразу применять метод непосредственного численного счета.

Численное решение краевой задачи (2.5)–(2.7) позволяет сделать вывод, что для положительных волновых чисел мнимая часть частоты волны положительная — имеет место слабое усиление волны. У второй моды мнимая часть частоты волны положительна в длинноволновой области, когда $k < 0.37 \cdot 10^{-2}$ рад/м, что соответствует, как и в случае с положительными волновыми числами, слабому затуханию волны; при больших волновых числах мнимая часть частоты волны отрицательна (см. рис. 4б).

В области отрицательных волновых чисел прямой численный расчет дает отрицательную мнимую часть частоты волны у первой моды (см. рис. 5б). У второй моды мнимая часть частоты положительная при малых по модулю волновых числах, если $k < -0.6 \cdot 10^{-2}$ рад/м мнимая часть частоты — отрицательная, т. е. слабое усиление при малых по модулю отрицательных волновых числах сменяется слабым затуханием при больших (рис. 5б). Метод возмущений дает отрицательную мнимую часть для первой и второй мод при отрицательных волновых числах (рис. 5а).

По результатам прямых численных расчетов у 15-минутных внутренних волн волновое число у первой моды отрицательное и равно -0.0045 рад/м, у второй моды $k = -0.0079$ рад/м. Мнимая часть частоты волны также отрицательная: $\delta\omega = -1.2 \cdot 10^{-6}$ рад/с — у первой моды, $\delta\omega = -0.49 \cdot 10^{-6}$ рад/с — у второй моды.

Нормирующий множитель A_1 найдем по известной амплитуде вертикальных смещений. Действительно, вертикальная скорость связана с вертикальным смещением ζ соотношением $d\zeta/dt = w$. Отсюда находится ζ и выражение для A_1 :

$$\zeta = \frac{i w_{10}}{\Omega} A_1 \exp(ikx - i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \quad (4.1)$$

$$A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |w_{10} / \Omega|}. \quad (4.2)$$

Вертикальные профили волнового $\overline{w w}$ потока импульса показаны на рис. 6а для 15-минутных внутренних волн первой моды при максимальной амплитуде волны 0.5 м. Сплошная кривая соответствует прямому численному решению краевой задачи (2.5)–(2.7), штриховая соответствует методу возмущений. Метод возмущений, в сравнении с непосредственным расчетом, вновь дает превосходящие по абсолютной величине значения волновых потоков импульса. На рис. 6б показаны те же потоки для второй моды внутренних волн.

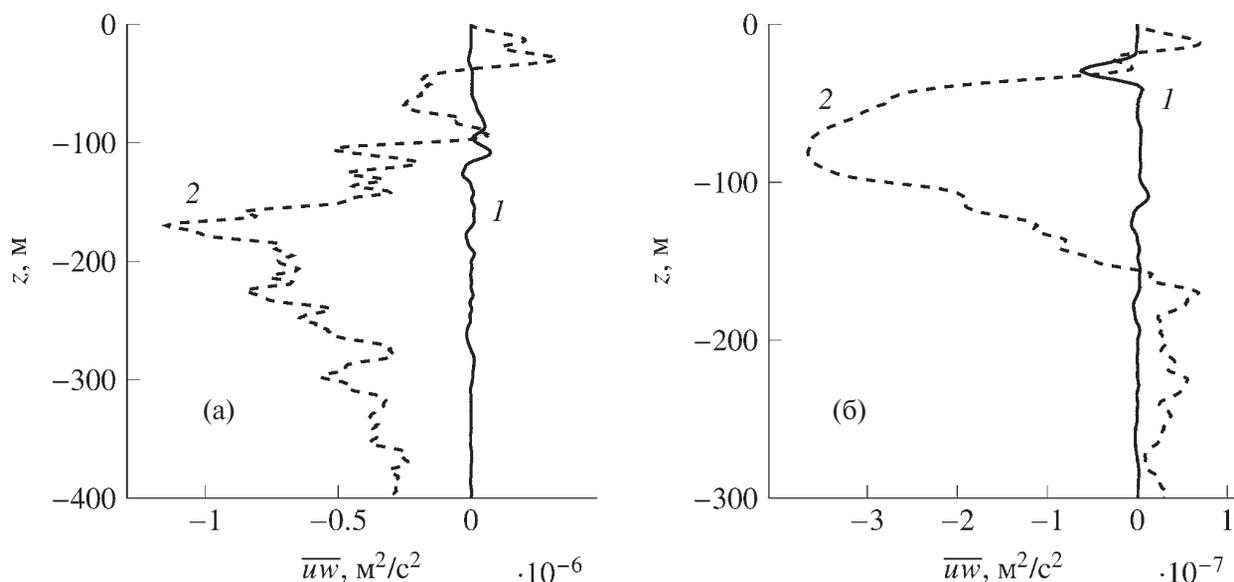


Рис. 6. Вертикальные профили волнового потока импульса $\overline{u'w'}$ для первой (а) и второй (б) мод: 1 – прямой численный метод; 2 – метод возмущений.

Представляет интерес сопоставить турбулентный и волновой потоки импульса. Турбулентный поток определяется по формуле $\overline{u'w'} = -K_z(dU_0/dz)$, для коэффициента вертикального обмена в верхнем 200-метровом сильно стратифицированном слое справедлива оценка $K_z = 8.4N_c^{-1} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, N_c соответствует частоте Брента–Вяйсяля в цикл/ч [18].

В более глубинных стратифицированных слоях коэффициент турбулентного обмена пропорционален N_c [19]. На рис. 7 представлены профили волнового $\overline{u'w'}$ (сплошная линия) и турбулентного (пунктирная линия) потоков импульса для первых двух мод при прямом численном решении краевой задачи (0.13)–(0.15). Турбулентный поток доминирует, особенно над потоком второй модой. Только в пикноклине у первой моды волновой поток сопоставим с турбулентным в интервале глубин 80–120 м.

Вертикальные профили волнового $\overline{v'w'}$ потока импульса показаны на рис. 8а для 15-минутных внутренних волн первой моды при максимальной амплитуде волны 0.5 м. Сплошная кривая соответствует прямому численному решению краевой задачи (2.5)–(2.7), штриховая соответствует методу возмущений. На рис. 8б показаны те же потоки для второй моды внутренних волн.

Волновые потоки $\overline{v'w'}$ у первой моды имеют существенное различие вплоть до придонного слоя с явным доминированием потока, полученного при помощи теории возмущений, аналогично картине с потоками для $\overline{u'w'}$. Для второй моды в целом наблюдается похожая ситуация, в верхнем 130-метровом слое превалирует поток, рассчитанный по теории возмущений, и только на небольшом отрезке в районе 150 м численный расчет показывает превосходящие значения, глубже потоки сравнимы.

Представляет интерес сопоставить турбулентный и волновой потоки импульса. Турбулентный поток импульса определяется по формуле $\overline{v'w'} = -K_z(dV_0/dz)$. На рис. 9 представлены профили волнового $\overline{v'w'}$ и турбулентного $\overline{v'w'}$ потоков импульса для первых двух мод.

Турбулентный поток $\overline{v'w'}$ уступает волновому потоку $\overline{v'w'}$ у первой моды только в верхнем сильно стратифицированном 120-метровом слое. У второй моды в этом слое турбулентный и волновой потоки сопоставимы по величине. В более глубинных слоях турбулентный поток доминирует над волновым.

ОБСУЖДЕНИЕ

В дальнейшем видится интересным построение поверхностей для дисперсионных кривых (пространственной картины), т.е. для случая, когда волна распространяется под произвольными углами к оси x . В результате для каждого угла α будет своя дисперсионная кривая. Совокупность этих кривых даст дисперсионную поверхность в координатах k_1, k_2, ω_0 , где $k_1 = k \cos \alpha, k_2 = k \sin \alpha$ — проекции волнового вектора на оси x, y соответственно, ω_0 — действительная часть частоты, k — модуль волнового вектора. Таким

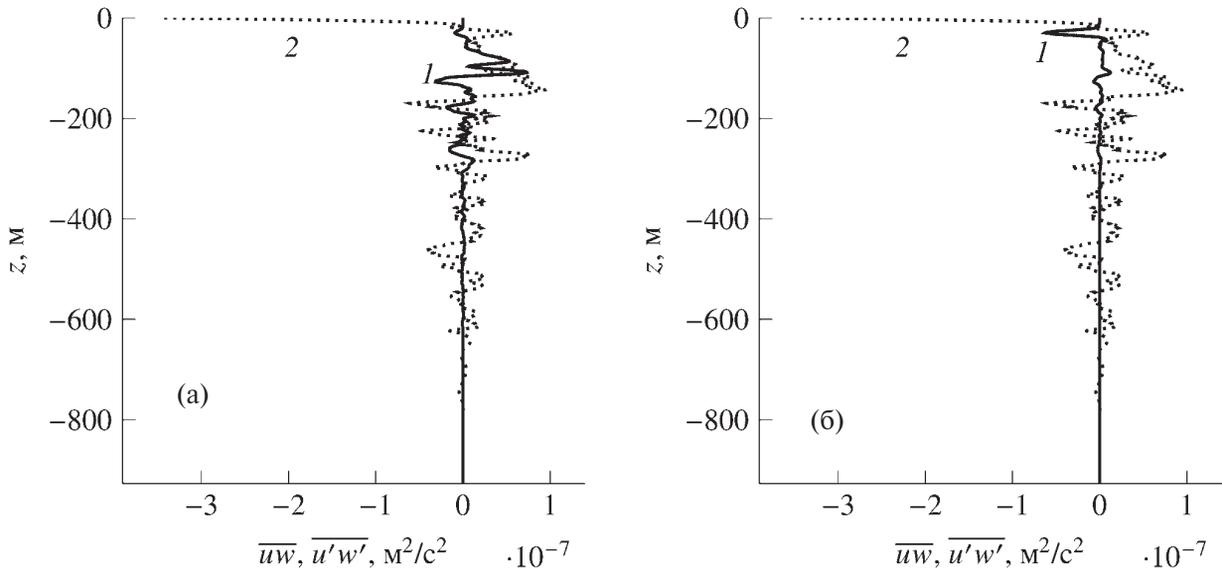


Рис. 7. Вертикальные профили волнового \overline{uw} и турбулентного $\overline{u'w'}$ потоков импульса для первой (а) и второй (б) мод: 1 — волновой поток импульса; 2 — турбулентный поток.

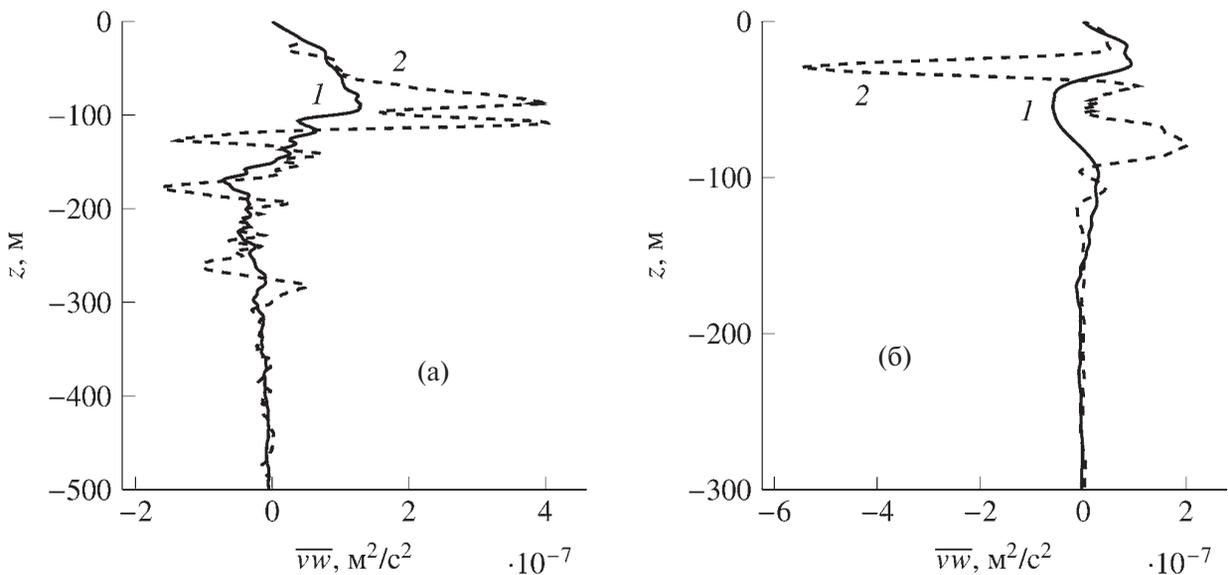


Рис. 8. Вертикальные профили волнового потока импульса \overline{vw} для первой (а) и второй (б) мод: 1 — прямой численный метод; 2 — метод возмущений.

образом, после построения сечений этой поверхности плоскостями $\omega_0 = \text{const}$ будут получены изолинии $\omega_0 = \text{const}$ на плоскости k_1, k_2 . В итоге получим набор таких изолиний частоты на плоскости k_1, k_2 .

В глобальном смысле интересны выход на эксперимент и проверка предсказательной способности теоретической модели. В том числе численный расчет необратимой тонкой структуры термогидродинамических полей, генерируемой внутренними волнами. Один из вариантов возникновения тонкой структуры поля плотности в стратифицированной жидкости за счет турбулентных явлений (турбулентного перемешивания) в широком диапазоне значений чисел Рейнольдса и Ричардсона рассмотрен в работах [20, 21].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что внутренние волны при учете вращения Земли на двумерном стратифицированном течении, когда компонента скорости течения, перпендикулярная направлению распространения волны, зависит от вертикальной координаты, имеют мнимую поправку к частоте. Решение краевой задачи (2.5)–

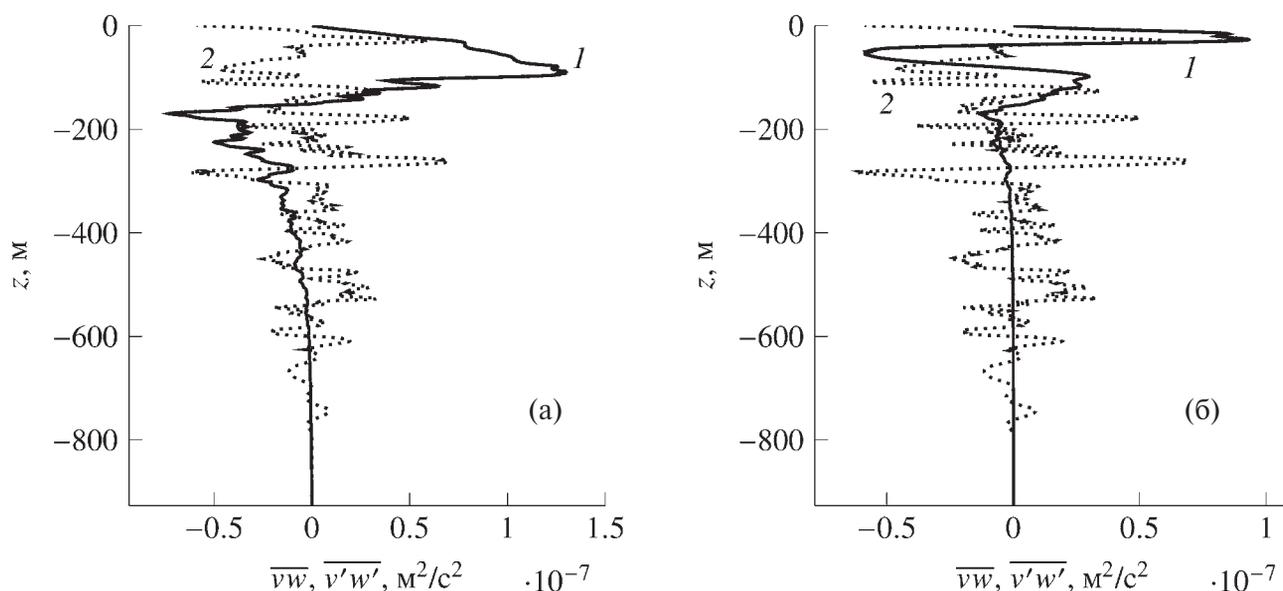


Рис. 9. Вертикальные профили волнового \overline{vw} и турбулентного $\overline{v'w'}$ потоков импульса для первой (а) и второй (б) мод: 1 — волновой поток импульса; 2 — турбулентный поток.

(2.7) методом возмущений дает превосходящие по абсолютной величине значения этой поправки по сравнению с методом непосредственного численного расчета.

Такой результат объясняется невыполнением условия малости параметра разложения в методе возмущений и невозможностью расчета вблизи критических слоев. Непосредственный расчет позволяет получать более корректные результаты в широком диапазоне областей. Тем не менее отметим, что оба метода имеют право на существование, и применимость каждого обусловлена условиями конкретной задачи. Показано также, что дисперсионные кривые первых двух мод, полученные при численном решении краевой задачи и методом возмущений, практически идентичны.

Получено: вертикальные волновые потоки импульса, соответствующие продольной компоненте скорости \overline{uw} , \overline{vw} отличны от нуля, и метод возмущений дает завышенные значения по сравнению с прямым численным методом решения краевой задачи для внутренних волн. Для поперечной компоненты скорости волновой поток импульса \overline{vw} у первой моды может превышать соответствующий турбулентный поток в пикноклине, в то время как у второй моды эти потоки сравнимы по величине. Вне пикноклина турбулентный поток доминирует над волновым. Показано, что волновой поток импульса \overline{uw} уступает соответствующему турбулентному потоку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч. 2. М.: Мир, 1981. 365 с.
2. Le Blond P.H. On damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // J. Fluid. Mech. 1966. V. 25. № 1. P. 121–142. DOI: 10.1017/S0022112066000089
3. Островский Л.А., Соустова И.А. Верхний перемешанный слой как сток энергии внутренних волн // Океанология. 1979. Т. 19. № 6. С. 973–981.
4. Слепышев А.А. Процессы переноса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами при наличии турбулентности // Изв. РАН. ФАО. 1997. Т. 33. № 4. С. 536–548.
5. Пантелеев Н.А. Отчет о работах в 44-м рейсе (3-й этап) НИС “Михаил Ломоносов”, 7 августа – 15 сентября 1985 г. Севастополь: МГИ АН УССР, 1985. Т. 1. С. 135.
6. Слепышев А.А. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // Изв. РАН. ФАО. 2016. Т. 52. № 3. С. 342–350. DOI: 10.7868/S0002351516030111
7. Воротников Д.И., Слепышев А.А. Вертикальные потоки импульса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 23–35. DOI: 10.7868/S0568528118010036
8. Слепышев А.А., Лактионова Н.В. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // Изв. РАН. ФАО. 2019. Т. 55. № 6. С. 194–200. DOI: 10.31857/S0002-3515556194-200

9. Носова А.В., Слепешев А.А. Вертикальные потоки, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 1. С. 15–25.
10. Каменкович В.М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 128 с.
11. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 30 с.
12. Лемешко Е.М., Морозов А.Н. и др. Вертикальная структура поля скорости течений в северо-западной части Черного моря по данным LADCP в мае 2004 года // МГЖ. 2008. № 6. С. 25–37.
13. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 262 с.
14. Демышев С.Г., Евстигнеева Н.А. Численный эксперимент по моделированию климатических полей на северо-западном шельфе Черного моря в зимний и летний сезоны // МГЖ. 2012. № 2. С. 18–36.
15. Jones W.L. Propagation of internal waves in fluids with shear flow and rotation // J. Fluid. Mech. 1967. V. 30. № 3. P. 439–448. doi: 10.1017/S0022112067001521
16. Booker J.B., Bretherton F.P. The critical layer for internal gravity waves in a shear flow // J. Fluid. Mech. 1967. V. 27. № 4. P. 513–539. DOI: 10.1017/S0022112067000515
17. Banks W.H., Drazin P.G., Zaturka M.B. On the normal modes of parallel flow of inviscid stratified fluid // J. Fluid. Mech. 1976. V. 75. № 1. P. 149–171. DOI: 10.1017/S0022112076000153
18. Иванов В.А., Самодуров А.С., Чухарев А.М., Носова А.В. Интенсификация вертикального турбулентного обмена в районах сопряжения шельфа и континентального склона в Черном море // Доп. НАН України. 2008. № 6. С. 108–112.
19. Самодуров А.С. Взаимодополняемость различных подходов для оценки интенсивности вертикального турбулентного обмена в естественных стратифицированных бассейнах // МГЖ. 2016. № 6. С. 37–48. DOI: 10.22449/0233-7584-2016-6-37-48
20. Zatsepin A.G., Gerasimov V.V. Turbulent Mass Exchange in a Stratified Fluid and the Conditions of Its Fine Structure Layering // Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes // Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Springer. Cham. 2022. P. 219. DOI: 10.1007/978-3-030-99504-1-22
21. Zatsepin A.G., Gerasimov V.V., Ostrovskii A.G. Laboratory Study of Turbulent Mass Exchange in a Stratified Fluid // J. Mar. Sci. Eng. 2022. V. 10. P. 756. DOI: 10.3390/jmse10060756

NUMERICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR INERTIA-GRAVITY INTERNAL WAVES

D. I. Vorotnikov^a, A. M. Savchenko^b

*Department of quantum statistics and field theory, Faculty of Physics,
M. V Lomonosov Moscow State University, 119991, Moscow, Russia*

^a *E-mail: infsup@yandex.ru*

^b *E-mail: a.m.savchenko@gmail.com*

This paper presents a numerical calculation of the boundary value problem for the equation of free internal inertia-gravity waves in an unbounded basin of constant depth in the Boussinesq approximation and the presence of a two-dimensional vertically inhomogeneous flow. The boundary value problem for the vertical velocity amplitude has complex coefficients and is solved both numerically and by perturbation theory. Using the example of calculating the decrement of attenuation of internal waves and momentum wave flows, it is shown that the exact numerical calculation gives significantly better estimates in comparison with the perturbation method. In particular, at minimum divergence in the dispersion curves for both calculation methods, the imaginary part of the wave frequency, interpreted as the decrement of attenuation, can differ by two or three orders of magnitude. Vertical wave momentum fluxes are comparable to turbulent ones and may exceed them, with results obtained by the numerical method being almost an order of magnitude smaller than those calculated by the perturbation theory method.

Keywords: internal inertia-gravity wave, wave momentum flux, complex wave frequency

УДК 533.6.013.128

КОНИЧЕСКИЕ ТЕЛА С ВОЛНООБРАЗНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ КОНТУРОМ, ИМЕЮЩИЕ МИНИМАЛЬНОЕ ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

© 2024 г. С. А. Таковицкий

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, г. Жуковский, Россия

E-mail: c.a.t@tsagi.ru

Поступила в редакцию 14.07.2023 г.

После доработки 30.11.2023 г.

Принята к публикации 30.11.2023 г.

Рассмотрена задача построения поперечного контура конического тела, имеющего минимальное волновое сопротивление в диапазоне сверхзвуковых скоростей, при условии сохранения длины и объема. За исходное тело принят конус, сделано предположение о локальности связи между изменениями геометрических параметров и давления на поверхности, и применена квадратичная аппроксимация. Найденное решение сопоставлено с результатами, полученными в рамках модели Ньютона, и предложено объединение этих решений на основе допущения о степенной зависимости между радиусом и производной радиуса по угловой координате. При этом выделяется класс контуров, у которых половина цикла состоит из элемента с монотонным изменением радиуса и дуги окружности, и описывается заданием одного геометрического параметра — показателя степени. В рамках модели невязкого совершенного газа проведена прямая численная оптимизация формы поперечного контура и показана возможность уменьшения волнового сопротивления по сравнению со звездообразными телами, имеющими плоские грани.

Ключевые слова: волновое сопротивление, звездообразное тело, вариационная задача, локальный анализ, модель Ньютона, объединение решений

DOI: 10.31857/S1024708424010097 EDN: SDLZOK

В диапазоне сверхзвуковых скоростей волновое сопротивление, связанное с объемом тела, составляет значительную долю суммарного аэродинамического сопротивления, что объясняет интерес к исследованиям, определяющим направления его уменьшения. Одно из таких направлений — переход к телам с неосесимметричным поперечным сечением.

Первые результаты, подтверждающие возможность уменьшения сопротивления, были получены для тел эллиптической и пирамидальной формы [1, 2]. Допущения, основанные на локальной модели Ньютона, позволили сформулировать и решить вариационную задачу построения поперечного контура тела минимального волнового сопротивления [3, 4].

Установлено, что оптимальные тела имеют звездообразную форму. Лучи стыкуются друг с другом непосредственно или через дуги окружности. Волновое сопротивление тела уменьшается при увеличении расстояния между конусами, которые охватывают лучи. Геометрической особенностью тел является заостренность лучей, половинки каждого луча соединяются под нулевым углом в окрестности вершины. Данная особенность звездообразных конфигураций устраняется при введении в анализ составляющей сопротивления, обусловленной трением [5]. Аналогичные результаты получены в случае совместной минимизации сопротивления тела и его нагрева [6].

Основные теоретические заключения были подтверждены экспериментальными и численными исследованиями. При этом наибольшее внимание уделялось звездообразным телам с плоскими гранями лучей, для которых достигается значительное уменьшение лобового сопротивления по сравнению с конусом, в том числе с учетом донного давления [7–9].

Для практического использования положительных свойств звездообразных тел важно обеспечить плавное сопряжение носовой части с центральной частью корпуса, которая может иметь произвольное поперечное сечение. Первые результаты были получены для носовых частей с линейчатой поверхностью, примыкающих к осесимметричному корпусу, с положительным эффектом в широком диапазоне скоростей [10]. Для задачи минимизации полного сопротивления общее решение в приближении локального взаимодействия и постоянства коэффициента трения представлено в исследованиях [11–13].

Точность модели Ньютона снижается при уменьшении числа Маха. В диапазоне малых и умеренных сверхзвуковых скоростей более надежные результаты получаются в рамках модели Эйлера. При этом на основе локального анализа можно аппроксимировать соотношения, связывающие газодинамические и геометрические параметры, и определить вариации формы, направленные на улучшение аэродинамических характеристик. Для задач, связанных с построением осесимметричных носовых частей с минимальным волновым сопротивлением, установлено согласование результатов, полученных в рамках модели Ньютона и локального анализа [14–16].

В частности, обе модели показывают, что степенные и усеченные степенные тела близки к оптимальным конфигурациям. Объединение решений сопровождается выделением основных геометрических параметров, число которых предельно уменьшено, что упрощает последующую прямую численную оптимизацию. Данный подход развит и применен к построению тел со звездообразным поперечным сечением.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача построения контура поперечного сечения конического тела, имеющего минимальное волновое сопротивление при условии сохранения длины и площади миделевого сечения. В качестве исходного тела принят конус равной длины и объема. Тело обтекается под нулевым углом атаки, давление на донном срезе принимается равным давлению в набегающем потоке. Таким образом минимизируется единственная составляющая аэродинамического сопротивления — волновое сопротивление, связанное с объемом. Определяющими параметрами являются число Маха M , которое характеризует условия в набегающем потоке, и основная геометрическая характеристика λ — удлинение тела. В представленном исследовании длина тела принята за единицу линейного размера, удлинение тела вычисляется по радиусу R миделевого сечения исходного конуса, $\lambda = 1/(2R)$.

Форма контура описывается зависимостью радиуса r в миделевом сечении от угла φ , образованного радиусом и вертикальной плоскостью. Увеличению угла соответствует обход по часовой стрелке при виде на тело сзади. Следуя условию замкнутости контура поперечного сечения, считаем, что контур составлен из N (натуральное число) симметричных циклов. Каждый цикл занимает сектор с углом $2\pi/N$ и имеет симметричные половинки, соответствующие увеличению и уменьшению радиуса в направлении возрастания угла. Для построения контура достаточно определить зависимость $r(\varphi)$ в одной из половинок. Далее будем рассматривать половинку цикла в угловом секторе, ограниченном углами $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_N = \pi/N$.

Целевая функция — коэффициент волнового сопротивления тела C_x , который определяется интегрированием сил давления по наветренной поверхности. Для исходного конуса коэффициент сопротивления равен коэффициенту давления на поверхности $C_{xк} = C_{рк}$. Предполагаем, что при изменении формы поперечного сечения конуса справедлива локальная зависимость между геометрическими параметрами и давлением на поверхности. Геометрическими параметрами являются приращение радиуса $y = r - R$ и его производная y' по углу φ .

Можно показать, что линейной аппроксимации зависимости коэффициента давления от геометрических параметров недостаточно для решения вариационной задачи. Квадратичная аппроксимация в рамках локального анализа записывается следующим образом:

$$C_p = C_{рк} + Dy + Ey' + 0.5Ay^2 + Byy' + 0.5Cy'^2.$$

Здесь, C , D , E , A , B — первые и вторые производные коэффициента давления по y и y' . Из условий симметрии очевидно, что производные E и B равны нулю. В то же время эти производные не входят в итоговый первый интеграл уравнения Эйлера. Для тел большого удлинения приближенные значения производных по приращению радиуса можно определить с помощью метода локальной линеаризации. Он оказался эффективным при построении оптимальных осесимметричных тел [14].

Метод ограничивается рассмотрением вариаций формы тела в плоскости, задаваемой вектором скорости и нормалью к элементу поверхности, и не позволяет определить соотношения, связывающие изменение коэффициента давления с изменением производной y' . Поэтому он должен быть дополнен прямым численным вычислением производной C для конкретных условий, определяемых числом Маха и удлинением.

Для целевой функции имеем следующее выражение:

$$C_x = \frac{1}{\varphi_N R^2} \int_0^{\varphi_N} (C_{pk} + Dy + 0.5Ay^2 + 0.5Cy'^2)(R + y)^2 d\varphi.$$

Условие сохранения площади миделевого сечения определяется соотношением

$$\int_0^{\varphi_N} (R + y)^2 d\varphi = \varphi_N R^2.$$

Переход к безусловной минимизации осуществляется введением функции Лагранжа L с неизвестным множителем μ :

$$L = \int_0^{\varphi_N} (C_{pk} + Dy + 0.5Ay^2 + 0.5Cy'^2 + \mu)(R + y)^2 d\varphi.$$

Для экстремали $y(\varphi)$ функции Лагранжа должно выполняться необходимое условие оптимальности, определяемое уравнением Эйлера. Основная функция функционала не содержит в явном виде независимую переменную φ , что позволяет записать первый интеграл уравнения Эйлера:

$$(C_{pk} + Dy + 0.5Ay^2 - 0.5Cy'^2 + \mu)(R + y)^2 = \text{const}.$$

Вернемся к исходной переменной r и ее производной r' :

$$\begin{cases} (F + 2(D - AR)r + Ar^2 - Cr'^2)r^2 = \text{const}; \\ F = 2(C_{pk} - DR + \mu) + AR^2. \end{cases}$$

Для определения неизвестной константы можно использовать значения r_1 и r'_1 в произвольной точке $\varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_N$:

$$r'^2 = \frac{F}{C} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + 2 \frac{D - AR}{C} r_1 \left(\frac{r}{r_1} - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + \frac{A}{C} r_1^2 \left(\frac{r^2}{r_1^2} - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + r_1'^2 \frac{r_1^2}{r^2}. \tag{1.1}$$

Решение (1.1) содержит два типа экстремалей. Первый тип представляет собой дугу окружности с центром на оси исходного конуса. В частности, дуга может соответствовать минимальному или максимальному допустимому значению радиуса. Второй тип — экстремали с изменяющимися значениями радиуса r и производной r' . Половинка цикла может быть образована произвольным числом указанных экстремалей. В соответствии с условием Эрдмана–Вейерштрасса в точке стыковки экстремалей производные радиуса совпадают по абсолютному значению.

Решение определяется заданием радиуса и производной в одной из точек экстремали и трех параметров $(F/C, (D - AR)/C, A/C)$, и должно обеспечивать выполнение условия сохранения площади миделевого сечения. При этом можно отказаться от вычисления конкретных значений производных коэффициента давления, использованных при постановке задачи. Это полностью согласуется с другими решениями, полученными на основе метода локальной линеаризации. Например, при построении осесимметричного тела с минимальным волновым сопротивлением [14] в постановке задачи в качестве исходных параметров использовались давления на торце и поверхности конуса и производная давления по радиусу.

В результате анализа полученного решения были выделены два геометрических параметра, экстремальные значения которых, конечно, могли быть определены с помощью исходных параметров. Однако с учетом предельного уменьшения числа геометрических параметров оказалось возможным отказаться от сделанных допущений и провести прямое варьирование в рамках численного расчета аэродинамических характеристик.

Далее ограничимся случаем, когда половинка цикла содержит два элемента, состыкованных при $\varphi = \varphi_1$. При этом условимся, что радиус имеет максимальное значение при φ_0 , а минимальное — при φ_N . Первый элемент ($\varphi \leq \varphi_1$) представляет собой боковую поверхность луча с монотонным убыванием радиуса в пределах $r_1 \leq r \leq r_0$. Второй элемент ($\varphi \geq \varphi_1$) — дуга окружности с радиусом r_1 . Если $\varphi_1 = \varphi_N$, то второй элемент отсутствует.

Заметим, что при проведении численной оптимизации необходимо предусмотреть возможность построения тел с негладкой (с разрывом производной) стыковкой элементов. Нарушение гладкости обусловлено изменением модели течения (например, модель Эйлера вместо модели локальной линеаризации). Таким образом, в общем случае условие Эрдмана – Вейерштрасса $r'_1 = 0$ не будет выполняться.

2. ОБЪЕДИНЕНИЕ РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОГО АНАЛИЗА И МОДЕЛИ НЬЮТОНА

Представленное исследование направлено на установление характерных особенностей оптимальных конфигураций и выделение основных геометрических параметров. Поэтому для дальнейшего упрощения решения (1.1) проведен его анализ и сопоставление с аналогичными решениями, полученными в рамках модели Ньютона.

Предположим, что известны значения производных r'_0 и r'_1 в точках φ_0 и φ_1 . Тогда для первого элемента половинки цикла из (1.1) получаем

$$\begin{cases} r'^2 = \left(r_1'^2 - \frac{F}{C} - 2 \frac{D - AR}{C} r_1 - \frac{A}{C} r_1^2 \right) \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{F}{C} + 2 \frac{D - AR}{C} r + \frac{A}{C} r^2; \\ \frac{F}{C} = \left[r_1'^2 - r_0'^2 \frac{r_0^2}{r_1^2} - 2 \frac{D - AR}{C} r_0 \left(\frac{r_1}{r_0} - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) - \frac{A}{C} r_0^2 \left(\frac{r_1^2}{r_0^2} - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \right] / \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right). \end{cases} \quad (2.1)$$

Соотношения упрощаются в предельном случае $r_1 \ll r_0$, который соответствует лучам с большим перепадом высот:

$$\begin{cases} r'^2 = r_1'^2 \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{F}{C} + 2 \frac{D - AR}{C} r + \frac{A}{C} r^2; \\ \frac{F}{C} + 2 \frac{D - AR}{C} r_1 + \frac{A}{C} r_1^2 = 0. \end{cases}$$

Данный случай наиболее интересен, поскольку волновое сопротивление тела уменьшается с ростом расстояния между конусами, ограничивающими лучи. При этом на значительной части боковой поверхности луча $r_1 \ll r$ и выполняется приближенное соотношение

$$r'^2 = 2 \frac{D - AR}{C} r + \frac{A}{C} r^2.$$

В зависимости от удлинения исходного конуса и соотношения между производными коэффициента давления возможно преобладание одного из слагаемых. В случае тел большого удлинения в рассмотрении остается член с меньшим показателем степени. Учитывая принятое условие монотонного убывания радиуса при увеличении угла φ , находим

$$r' = -\sqrt{2 \frac{D - AR}{C}} r. \quad (2.2)$$

Сопоставим найденное локальным анализом решение с результатами, полученными в рамках модели Ньютона. Для тонких тел установлена зависимость [4]

$$r' = -T \frac{r^3}{\sqrt{r_0^2 - r^2}},$$

где T — положительная константа.

На части экстремали выполняется условие $r \ll r_0$, и зависимость упрощается:

$$r' = -(T/r_0) r^3. \quad (2.3)$$

Для отрезка, лежащего на плоской боковой поверхности луча звездообразного тела с полууглом δ при вершине, изменение радиуса по углу φ определяется зависимостью

$$r = \frac{r_0}{\cos \varphi (1 + \operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \delta)}.$$

Выполнив дифференцирование, получаем

$$r' = -\frac{\cos \varphi (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta)}{r_0 \operatorname{tg} \delta} r^2.$$

Соотношение упрощается в случае большого числа циклов и большой высоты волны, когда углы φ и δ имеют малые значения и можно заменить числитель единицей

$$r' = -\frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \delta} r^2. \tag{2.4}$$

Общей особенностью теоретических решений (2.2)–(2.4) является степенная зависимость производной радиуса от радиуса с изменением показателя степени в пределах от 0.5 до 3. Решения объединяются принятием показателя степени k в качестве искомого геометрического параметра:

$$r' = P r^k, \tag{2.5}$$

где P — константа.

При $k \neq 1$ боковая поверхность луча описывается уравнением, полученным интегрированием объединенного решения (2.5) с константами P_1, C_1 :

$$r = P_1 (\varphi + C_1)^{1/(1-k)}.$$

При $k = 1$ из решения (6) получается экспоненциальная зависимость с константами P_2, C_2 :

$$r = C_2 e^{P_2 \varphi}.$$

С учетом принятых ограничений объединенное решение (2.5) содержит единственный геометрический параметр — показатель степени, значение которого определяется в процессе численной оптимизации.

3. ЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Построение поперечного контура выполнено при $M = 2$ и $\lambda = 1.3$ для тела, образованного четырьмя циклами, при минимальном радиусе $r_1 = 0.4R$. Оптимизация проводилась при фиксированном значении r_0 , которое соответствовало максимальному радиусу звездообразного тела с лучами, имеющими плоские боковые поверхности. Рассмотрены четыре варианта, отвечающие разным значениям угла, при котором состыкованы элементы контура (отрезок прямой и дуга): $\varphi_{1pl} = 0.25\varphi_N, 0.5\varphi_N, 0.75\varphi_N, \varphi_N$.

Фиксирование максимального значения радиуса обеспечивает корректность сопоставления тел по значениям коэффициента сопротивления, поскольку изменение r_0 непосредственно влияет на C_x и поперечные габариты тела. При этом угол φ_1 стыковки элементов у оптимальных тел не совпадает с φ_{1pl} . Это обусловлено сохранением площади поперечного сечения независимо от изменения формы луча.

При оптимизации, базирующейся на решении (2.5), константы (P_1, C_1 или P_2, C_2) определяются из граничного условия $r = r_0$ при $\varphi = \varphi_0$ и условия сохранения площади поперечного сечения. Значение показателя степени k находится в процессе минимизации волнового сопротивления. В случае использования решения (2.1) число независимых переменных увеличивается. Выполняется минимизация целевой функции по трем параметрам.

Течение около тела моделировалось в рамках уравнений Эйлера. Волновое сопротивление вычислялось непосредственным интегрированием сил избыточного давления по поверхности тела. Головной скачок уплотнения не выделялся и размеры расчетной области выбирались таким образом, чтобы создаваемые телом возмущения не достигали внешней границы. При интегрировании уравнений движения применялась маршевая процедура в цилиндрической системе координат [17]. Суммарное число узлов расчетной сетки в поперечном сечении незначительно превышало 25 000.

Сопоставление поперечных сечений построенных оптимальных тел и звездообразного тела с плоскими гранями при $\varphi_{1pl} = 0.5\varphi_N$ представлено на рис. 1.

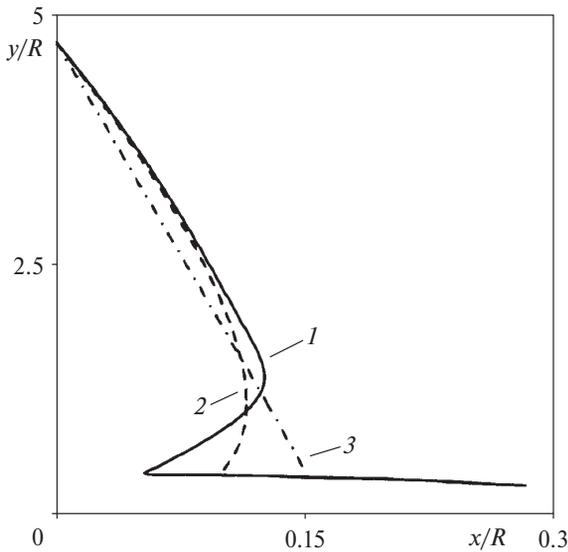


Рис. 1. Сопоставление контуров тел, $\varphi_{1pl} = 0.5\varphi_N$: 1 — тело, построенное оптимизацией по трем параметрам; 2 — тело, построенное оптимизацией по одному параметру; 3 — звездообразное тело с плоскими боковыми поверхностями лучей.

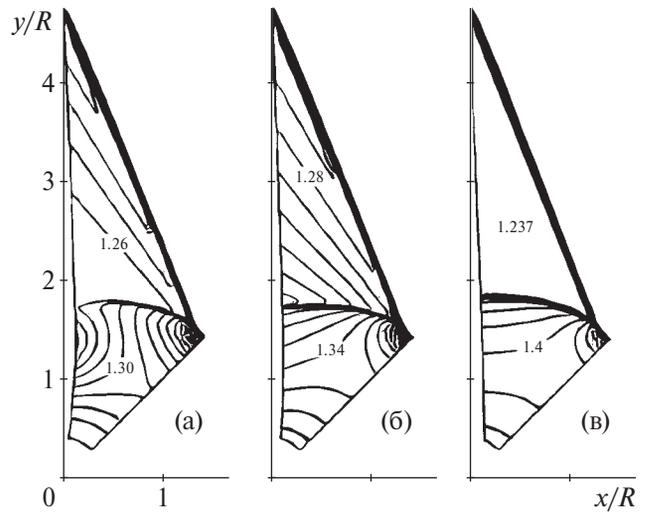


Рис. 2. Линии равных значений давления p/p_∞ в поле течения около тел, построенных оптимизацией по трем (а) и одному (б) параметру, и около звездообразного тела с плоскими боковыми поверхностями лучей (в), $\varphi_{1pl} = 0.5\varphi_N$.

Начало системы координат (x, y) расположено на продольной оси тела, ось y соответствует нулевому значению угла φ , для улучшения зрительного восприятия изменен масштаб по горизонтальной оси. Построенные на основе решений (2.1) и (2.5) тела характеризуются увеличением абсолютного значения производной радиуса по угловой координате в окрестности вершины луча. При этом толщина луча увеличивается в верхней части и уменьшается в нижней части, что наиболее заметно для решения (2.1). Соответственно, увеличивается длина примыкающей к лучу дуги окружности. В представленном случае относительное увеличение длины дуги превышает 50%. Заметим, что отклонение от прямолинейности контура луча приводит к незначительному увеличению площади омываемой поверхности тела. При $\varphi_{1pl} = 0.5\varphi_N$ относительный прирост площади составляет около 1%.

Поперечные сечения полей течения около тел показаны на рис. 2.

Линии равных значений p/p_∞ давления, отнесенного к давлению в набегающем потоке, построены в пределах ударного слоя с шагом 0.02. Для тела с плоской боковой поверхностью луча характерно постоянство давления на части поверхности, которая выступает за пределы скачка уплотнения, формирующегося при обтекании элемента осесимметричного конуса. Изменение формы боковой поверхности луча в результате оптимизации сопровождается увеличением давления в области, примыкающей к вершине, и уменьшением давления в области, примыкающей к элементу, образованному дугой окружности.

Основные результаты оптимизационных исследований на основе решений (2.1) и (2.5) представлены в табл. 1 для рассмотренных углов стыковки элементов половинки цикла φ_{1pl} . Приведены значения C_x/C_{xpl} коэффициентов сопротивления, отнесенных к коэффициенту сопротивления звездообразного тела с плоскими гранями, и относительные значения углов стыковки φ_1/φ_N . Дополнительно для тела, построенного оптимизацией по одному геометрическому параметру, указаны значения показателя степени k .

Таблица 1. Результаты оптимизационных исследований

φ_{1pl}/φ_N	Решение (2.1)		Решение (2.5)		
	C_x/C_{xpl}	φ_1/φ_N	C_x/C_{xpl}	φ_1/φ_N	k
0.25	0.936	0.059	0.951	0.135	1.56
0.5	0.955	0.165	0.964	0.315	1.6
0.75	0.982	0.34	0.984	0.564	1.69
1	0.992	0.41	0.993	0.73	1.65

Для всех рассмотренных значений угла стыковки φ_{1pl} результаты оптимизации подтверждают возможность уменьшения волнового сопротивления по сравнению со звездообразными телами, имеющими плоские боковые грани. Выигрыш по сопротивлению тем больше, чем меньше ширина и, следовательно, больше высота луча.

При $\varphi_{1pl} = \varphi_N$ относительное уменьшение коэффициента сопротивления не превышает 1%. Для варианта $\varphi_{1pl} = 0.25\varphi_N$, соответствующего максимальной (из рассмотренных) высоте волны, коэффициент волнового сопротивления уменьшается примерно на 6 и 5% для решений (2.1) и (2.5) соответственно. Отметим, что тела, построенные на основе двух решений, заметно отличаются по форме в окрестности стыковки боковой поверхности и конического элемента, что проявляется в значениях угла φ_1 . При этом выигрыши по сопротивлению отличаются незначительно.

Таким образом, можно заключить, что решения, полученные на основе локального анализа и модели Ньютона, могут быть объединены введением степенной зависимости между радиусом и производной радиуса по угловой координате. Тела с волнообразным поперечным контуром, построенные в соответствии с объединенным решением, имеют меньшее волновое сопротивление по сравнению со звездообразными телами, лучи которых имеют плоские боковые грани. Выигрыш по сопротивлению возрастает при увеличении высоты луча.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит А.Н. Крайко за внимание к работе и полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа финансирована из средств бюджета института (учреждения, организации). Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ferry A., Ness N., Kaplita T.* Supersonic flow over conical bodies without axial symmetry // JAS. 1953. 20. № 8. P. 563–571.
2. *Майканар Г.И.* О волновом сопротивлении неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 376–378.
3. *Гонор А.Л.* О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 185–189.
4. *Гонор А.Л., Черный Г.Г.* Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления / Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 292–305.
5. *Миеле А., Саарис Дж.* Поперечный контур тела минимального полного сопротивления / Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 306–324.
6. *Аргучинцева М.А.* Аналитическое решение одного класса вариационных задач аэродинамики больших скоростей // Известия Иркутского государственного университета. Сер.: Математика. 2007. Т. 1. № 1. С. 52–61.
7. *Ведерников Ю.А., Гонор А.Л., Зубин М.А., Остапенко Н.А.* Аэродинамические характеристики звездообразных тел при числах $M=3-5$ // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 4. С. 88–93.
8. *Зубин М.А., Лапыгин В.И., Остапенко Н.А.* Теоретическое и экспериментальное исследование структуры сверхзвукового обтекания тел звездообразной формы и их аэродинамических характеристик // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 3. С. 34–40.
9. *Щепановская Г.И., Щепановский В.А.* Влияние ударного слоя на вязкое сопротивление звездообразных тел с плоскими боковыми гранями // Прикладная механика и техническая физика. 1985. № 4. С. 105–112.
10. *Гусаров А.А., Дворецкий В.М., Иванов М.Я., Левин В.А., Черный Г.Г.* Теоретическое и экспериментальное исследование аэродинамических характеристик пространственных тел // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 3. С. 97–102.
11. *Якунина Г.Е.* К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 299–310.

12. Якунина Г.Е. Об оптимальных неконических и несимметричных пространственных конфигурациях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 605–614.
13. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: Янус-К, 2001. 132 с.
14. Таковицкий С.А. Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 157–162.
15. Таковицкий С.А. Усеченные степенные тела как результат приближенного решения задачи Ньютона о теле с минимальным сопротивлением // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 5. С. 113–118.
16. Таковицкий С.А. Осесимметричные носовые части с передним торцом и гипергеометрической образующей как результат решения задачи Ньютона о теле минимального сопротивления при заданных габаритах и объеме // Ученые записки ЦАГИ. 2023. Т. 54. № 4. С. 21–27.
17. Таковицкий С.А. Метод расчета сверхзвукового обтекания летательных аппаратов с использованием многозонных расчетных сеток // Труды ЦАГИ. 1997. Вып. 2590.

CONICAL BODIES WITH STAR-SHAPED TRANSVERSE CONTOUR HAVING THE MINIMUM WAVE DRAG

© 2024 S. A. Takovitskii

*Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow oblast, Russia
e-mail: c.a.t@tsagi.ru*

The problem of constructing the transverse contour of a conical body having the minimum wave drag in the range of supersonic velocities provided that the length and the volume are preserved is considered. A cone is taken as the initial body, an assumption about locality of the relation between variations in the geometric parameters and the pressure on the surface is made, and the quadratic approximation of this relation is used. The found solution is compared with the results obtained within the framework of the Newton model. These solutions are proposed to combine being based on the assumption of the power-law relation between the radius and the derivative of radius with respect to the angular coordinate. In this case, a class of contours in which half of the cycle consists of the element with monotonic variation in the radius and arc of the circle is distinguished. These contours can be described by specifying a single geometric parameter, namely, the exponent. Using the inviscid perfect gas model, direct numerical optimization of the shape of transverse contour is carried out and the possibility of reducing the wave drag as compared to the star-shaped bodies with plane faces is demonstrated.

Keywords: wave drag, star-shaped body, variational problem, local analysis, Newton model, combination of solutions

УДК 533.69.01, 533.682

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОФИЛЯ НАСА 0015 ПО ДАННЫМ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ

К. А. Абрамова*, Д. А. Алиева**, В. Г. Судаков***, А. Н. Храбров****

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл.

* E-mail: kseniya.abramova@tsagi.ru

** E-mail: diana.alieva@tsagi.ru

*** E-mail: vit_soudakov@tsagi.ru

**** E-mail: khrabrov@tsagi.ru

Поступила в редакцию 19.07.2023 г.

После доработки 19.09.2023 г.

Принята к публикации 19.09.2023 г.

Исследуется возможность применения результатов численного моделирования для разработки приближенной феноменологической математической модели аэродинамики, пригодной для использования в задачах динамики, на примере нестационарного обтекания профиля НАСА 0015 при колебаниях по углу атаки с различными частотами, амплитудами и средними углами атаки. Для этого решаются уравнения Рейнольдса в стационарной и нестационарной постановках с моделью турбулентности $k-\omega$ -SST. Проводится валидация результатов расчета путем сравнения с данными эксперимента. По данным расчета идентифицируется модель нормальной силы и продольного момента, сформулированная в рамках подхода с введением внутренней динамической переменной. Результаты моделирования сравниваются с расчетными и экспериментальными данными. Приводится сопоставление с традиционным подходом моделирования с помощью линейной нестационарной модели, использующей динамические производные.

Ключевые слова: нестационарное обтекание, гистерезис аэродинамических характеристик, профиль крыла, численное моделирование

DOI: 10.31857/S1024708424010106 EDN: SDDSOT

Существует ряд подходов, позволяющих моделировать нестационарные аэродинамические характеристики самолета. В области линейности аэродинамических характеристик применяется традиционный подход, основанный на концепции вращательных и нестационарных аэродинамических производных [1]. На больших углах атаки в условиях отрывного обтекания — нелинейные подходы разной степени сложности [2]. Метод с введением внутренних динамических переменных для описания состояния отрывного обтекания [3] позволяет построить адекватную математическую модель аэродинамики, используя ограниченное количество данных.

Как правило, идентификация параметров математических моделей осуществляется по данным динамических экспериментов [4, 5], реже по летным данным [6, 7]. В первом случае известным ограничением является невозможность обеспечить подобие по числу Рейнольдса во время испытаний в аэродинамических трубах, во втором — ограниченное количество летных данных на больших углах атаки и сложность их первичной обработки. Численные методы лишены указанных недостатков, поэтому их использование для идентификации математических моделей нестационарной аэродинамики представляет значительный интерес.

Основной проблемой, возникающей при численном моделировании нестационарного обтекания, является выбор методов решения уравнений и моделей турбулентности, адекватно моделирующих течение и учитывающих его особенности.

В литературе исследуется рациональность применения существующих методов и моделей в различных задачах [8–13]. В работах [14–16] рассматривались как классические подходы, решение уравнений Рейнольдса в нестационарной постановке с различными моделями турбулентности (URANS), так и гибридные URANS—LES-методы (методы моделирования отсоединенных вихрей (DES, DDES)), методы крупных

вихрей (LES). Лучшее согласование достигается при использовании LES-подхода. Однако при этом затраты на проведение таких расчетов самые высокие по сравнению с другими указанными методами.

Валидация расчетных методов обычно проводится путем сравнения с экспериментальными данными. Для проведения адекватного сравнения необходимо удостовериться в сопоставимости условий проведения расчета и эксперимента, что представляет собой отдельную задачу.

В настоящей работе на примере нестационарного обтекания профиля NASA 0015 при колебаниях по углу атаки с различными частотами и амплитудами исследуется возможность применения результатов численного моделирования для разработки приближенной математической модели нестационарной аэродинамики, пригодной для использования в задачах проектирования роторов ветровых турбин с горизонтальной и вертикальной осью, а также роторов вертолетов. Для этого решаются уравнения Рейнольдса в стационарной и нестационарной постановках с двумя моделями турбулентности: Спаларта–Альмараса (S–A) и $k-\omega$ SST. Проводится валидация результатов расчета путем сравнения с данными эксперимента. По этим данным идентифицируется модель нестационарных коэффициентов подъемной силы и продольного момента, действующих на профиль при его неустановившемся движении на больших углах атаки. Модель формулируется в рамках подхода с введением внутренней динамической переменной [3]. Результаты моделирования сравниваются с расчетными и экспериментальными данными.

1. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Выбор эксперимента для валидации численного расчета

Колебания профиля NASA 0015 исследовались в экспериментах [17–19]. Для выбора численной постановки задачи исследования обтекания колеблющегося по углу атаки профиля крыла проведено сравнение с экспериментальными данными работы [18], которые являются тестовым случаем для многих численных работ.

Выбор этого эксперимента обусловлен еще и тем, что в нем представлен достаточно большой массив данных как для статического, так и для колеблющегося профиля с различными параметрами колебаний.

Исследовалась модель прямого крыла с профилем NASA 0015 с хордой $c = 0.3048$ м в сечении, полуразмах модели $L = 1.524$ м. В работе есть часть экспериментальных исследований, где для обеспечения двумерности течения у боковых сечений крыла устанавливались специальные пластины. Это позволит далее использовать двумерную постановку численной задачи.

В качестве турбулизаторов потока использовалась зубчатая лента на передней кромке крыла. По размаху крыла в нескольких сечениях располагались датчики давления. В данной работе приводится сравнение экспериментальных аэродинамических характеристик в эксперименте в двух сечениях: $y/L = 0.263$ (10 дифференциальных датчиков) и $y/L = 0.500$ (20 датчиков давления). Для интегрирования проводилась интерполяция распределения давления в сечении по специальной процедуре. Соответственно, данные о силах и моментах из расчета для сравнения с экспериментом приводятся только для компоненты давления.

Постановка численной задачи

Рассматривается режим обтекания профиля крыла NASA 0015 с числом Маха $M = 0.29$ и числом Рейнольдса $Re = 1.94 \cdot 10^6$ в набегающем потоке. Угол атаки изменяли в диапазоне $\alpha = 0-20^\circ$. В расчетах для верификации и валидации заданы точные параметры из эксперимента. Геометрическая модель профиля соответствует используемому в эксперименте.

Вокруг профиля была построена структурированная многоблочная расчетная сетка C–H-топологии. Сеточные сгущения сделаны в области по нормали к поверхности профиля (у первой ячейки $Y_+ \sim 1$), а также в области задней кромки и за профилем в области следа.

Для получения обтекания стационарного профиля решаются двумерные уравнения Рейнольдса для сжимаемого газа в стационарной постановке (2D RANS), для случая с колебаниями — в нестационарной постановке (2D URANS). Для замыкания уравнений используются различные модели турбулентности.

Для проведения численных исследований используется стандартный метод второго порядка по пространству и времени. На границах области задаются мягкие граничные условия. Профиль считался адiabатической стенкой. Динамический коэффициент вязкости в зависимости от температуры определяли с помощью закона Сазерленда.

Колебания профиля задаются вращением всей расчетной области относительно четверти хорды профиля. При этом элементы сетки не деформируются, а область вращается как единое целое. Вращение области задавалось следующим уравнением:

$$\alpha = \alpha_0 - \Delta\alpha \sin 2\pi ft,$$

где α_0 — средний угол атаки, $\Delta\alpha$ — амплитуда колебаний, f — частота колебаний, t — время.

Для каждого набора параметров рассчитывали несколько периодов колебаний, а для сравнения с экспериментальными данными выбирали период, где течение уже установилось.

Верификация

Для определения размера расчетной сетки, на которой возможно получить результаты, требуется проверить сходимость результатов по сеткам. Для этого рассматриваются различные размеры расчетных сеток (70 000, 250 000, 460 000, 1 100 000 ячеек). Сетки были получены увеличением количества ячеек в двух направлениях.

Проведены исследования обтекания стационарного профиля крыла. В данном блоке расчетов для замыкания уравнений Рейнольдса использовали однопараметрическую модель турбулентности S–A.

Полученные результаты показывают, что, начиная с сетки размером 250 000 ячеек, решение не меняется. Соответственно, для проведения дальнейших расчетов будет использоваться сетка такого размера.

Для выбора размера шага по времени и точности сходимости внутренних итераций для дуального шага по времени в случае колебаний профиля (2D URANS) также был проведен ряд расчетов. Важно отметить, что критерием выхода из внутренних итераций было достижение определенного значения точности. Рассматривалось абсолютное значение точности сходимости внутренних итераций.

Для режима с $M = 0.29$ и $\alpha = 20^\circ$ были рассмотрены 2 шага по времени $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$, 10^{-5} и несколько различных точностей сходимости $\Delta = 5 \cdot 10^{-6}$, 10^{-5} , $5 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-4}$. В результате указанных расчетов было определено, что можно проводить исследования с точностью сходимости $\Delta = 5 \cdot 10^{-4}$ и шагом по времени $\Delta t = 10^{-5}$, так как полученные кривые не различаются в пределах точности определяемых параметров.

Валидация

Для сравнения с экспериментальными данными рассматривались две модели турбулентности — S–A и $k-\omega$ -SST. На рис. 1 приведены аэродинамические характеристики для указанных моделей и экспериментальные данные для стационарного профиля в двух сечениях крыла.

Результаты расчетов с моделью $k-\omega$ -SST (рис. 1) лучше согласуются с экспериментальными данными для сечения $y/L = 0.500$ по C_y , чем модель S–A, в особенности в отрывной области при $\alpha > 16^\circ$. На линейном участке и в области максимального коэффициента нормальной силы сдвиг, по-видимому, обусловлен влиянием трехмерности течения. Сдвиг по углу атаки для модели SST меньше, чем для модели S–A, и составляет $\Delta\alpha \approx 1.5^\circ$.

На рис. 2 представлены кривые для случая с колебаниями профиля по углу атаки при $\alpha_0 = 10.88^\circ$, $\Delta\alpha = 4.22^\circ$, $f = 10.1$ Гц.

По форме зависимости $C_y(\alpha)$ и значениям модель $k-\omega$ -SST лучше описывает экспериментальную кривую. Для прямого хода по углам атаки, начиная с $\alpha = 10^\circ$, $m_z(\alpha)$ лучше моделируется с помощью модели

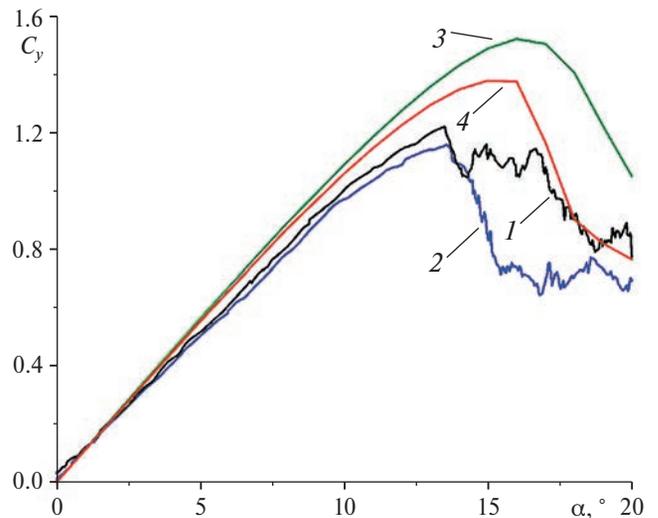


Рис. 1. Сравнение зависимости коэффициента нормальной силы от угла атаки $C_y(\alpha)$ -профиля для экспериментальных и численных результатов с различными моделями турбулентности для стационарного профиля крыла: 1 — эксперимент, сечение $y/L = 0.5$, 2 — эксперимент, сечение $y/L = 0.263$, 3 — модель турбулентности S–A, 4 — модель турбулентности $k-\omega$ -SST; $M = 0.29$.

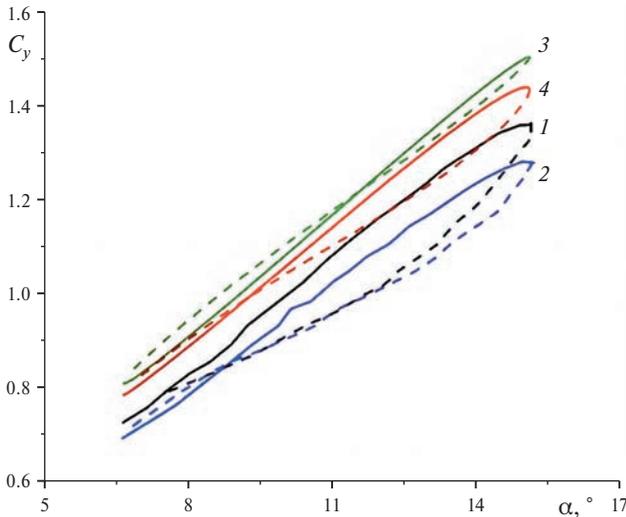


Рис. 2. Сравнение зависимости коэффициента нормальной силы $C_y(\alpha)$ от угла атаки профиля для экспериментальных и численных результатов с различными моделями турбулентности для колеблющегося профиля $\alpha_0 = 10.88^\circ$, $\Delta\alpha = 4.22^\circ$, $f = 10.1$ Гц: 1 — эксперимент, сечение $y/L = 0.5$, 2 — эксперимент, сечение $y/L = 0.263$, 3 — модель турбулентности S–A, 4 — модель турбулентности $k-\omega$ -SST; $M = 0.29$.

S–A, но начальный участок прямого хода и конечный обратного лучше при выборе $k-\omega$ -SST.

Для проведения расчетов, таким образом, далее будет использоваться модель турбулентности $k-\omega$ -SST.

Результаты расчетов

Основываясь на выбранных параметрах задачи, проведены параметрические расчеты колебаний профиля: вычисления проводились на сетке размером 250 000 ячеек, для замыкания уравнений использовалась модель турбулентности $k-\omega$ -SST, а шаг по времени выбирался исходя из сохранения количества точек на период колебаний.

Параметры набегающего потока: число Маха $M = 0.1428$, число Рейнольдса $Re = 0.97 \cdot 10^6$. Проведено два блока расчетов с частотами $f = 0.5, 1, 2$ Гц: расчеты колебаний профиля со средними углами атаки $\alpha_0 = 0-16^\circ$ с шагом $\Delta\alpha_0 = 4^\circ$ и амплитудой $\Delta\alpha = 4^\circ$ (рис. 3) и расчеты с большей амплитудой $\Delta\alpha = 8^\circ$ на средних углах атаки $\alpha_0 = 4, 11, 15^\circ$ (рис. 4). Дополнительно проведен расчет с $\alpha_0 = 11^\circ$, $\Delta\alpha = 9^\circ$. Результаты данных расчетов далее будут использоваться для построения математической модели.

По рис. 3а видно, что при $\alpha < 12^\circ$ ширина гистерезисной петли практически одинакова для всех средних углов атаки. При $\alpha \geq 12^\circ$ увеличение среднего угла атаки приводит к увеличению ширины гистерезисной петли.

При увеличении частоты колебаний (рис. 4а, 4в) ширина гистерезисной петли также растет. Значение $C_{y\max}$ в случае динамического гистерезиса выше, чем в случае обтекания статического профиля, и достигается позже по углу атаки. Для m_z зависимость от частоты аналогичная (рис. 4б). На большем среднем

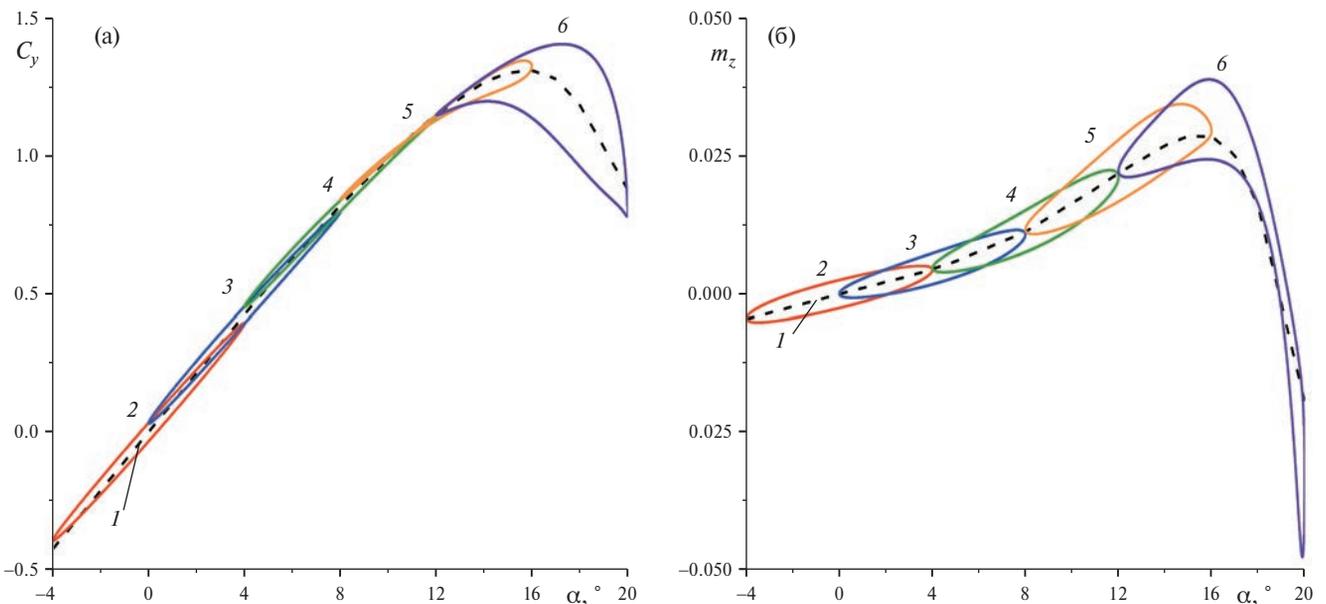


Рис. 3. Сравнение зависимости коэффициента нормальной силы от угла атаки $C_y(\alpha)$ и коэффициента момента тангажа $m_z(\alpha)$ профиля для численных результатов: 1 — обтекание стационарного профиля, колебания с амплитудой $\Delta\alpha = 4^\circ$ частотой $f = 2$ Гц и различными средними углами атаки α_0 : 2 — $\alpha_0 = 0$, 3 — $\alpha_0 = 4^\circ$, 4 — $\alpha_0 = 8^\circ$, 5 — $\alpha_0 = 12^\circ$, 6 — $\alpha_0 = 16^\circ$; $M = 0.1428$.

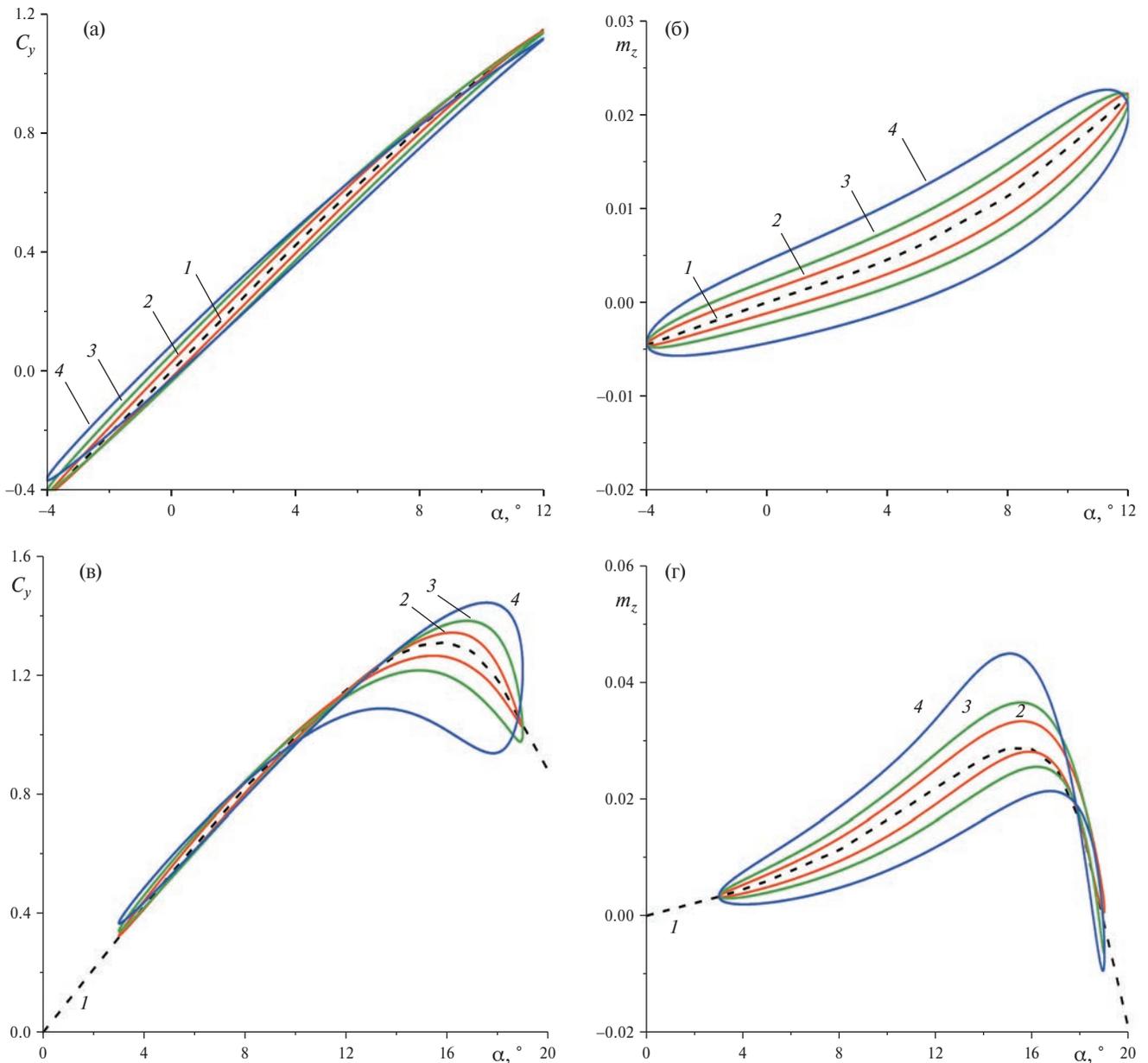


Рис. 4. Сравнение зависимости коэффициента нормальной силы от угла атаки $C_y(\alpha)$ и коэффициента момента тангажа $m_z(\alpha)$ профиля для численных результатов при а, б – $\alpha_0 = 4^\circ$; в, г – $\alpha_0 = 11^\circ$: 1 – обтекание стационарного профиля, колебания с амплитудой $\Delta\alpha = 8$ и различными частотами: 2 – $f = 0.5$ Гц, 3 – $f = 1$ Гц, 4 – $f = 2$ Гц; $M = 0.1428$.

угле атаки при увеличении частоты колебаний ширина кривой гистерезиса не только увеличивается, но и изменяется вид кривой в области $\alpha_0 \approx 18^\circ$ (рис. 4г).

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Структура математической модели аэродинамики

Для задач динамики полета наиболее подходящим представляется подход с введением внутренних переменных состояния, которые отражают динамические свойства структуры отрывного течения [3]. Их изменение может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем виде модель имеет вид

$$\mathbf{C} = f(\xi, \mathbf{x}), \frac{d\mathbf{x}}{dt} = g(\xi, \mathbf{x}).$$

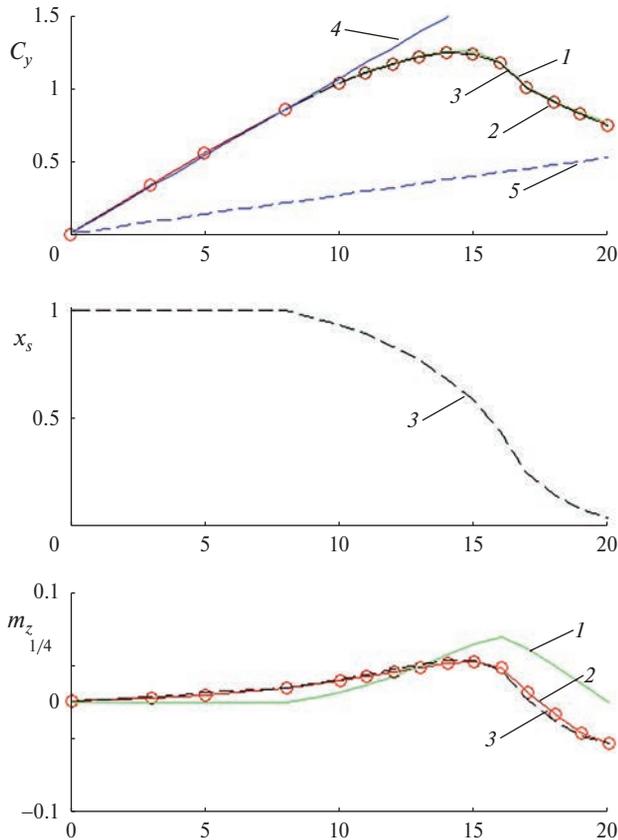


Рис. 5. Зависимости C_y , m_z и x_s от α . 1 — Решение Кирхгофа, 2 — статические CFD-расчеты (маркеры), 3 — аппроксимация Кирхгофа, 4 — аппроксимация при безотрывном обтекании, 5 — аппроксимация при полностью отрывном обтекании.

поведения коэффициента C_y при неустановившемся движении профиля. При тех же предположениях можно вывести и формулу для коэффициента момента тангажа, но оценки показывают, что она менее адекватна. На рис. 5 представлены красными сплошными линиями с маркерами результаты статических расчетов методами CFD-зависимостей $C_y(\alpha)$ (верхний график) и $m_z(\alpha)$ (нижний график).

Если рассматривать формулу (2.1) как уравнение для нахождения $x_s(\alpha)$ по известной зависимости $C_y(\alpha)$, можно получить предполагаемую зависимость положения точки отрыва на верхней поверхности профиля $x_s(\alpha)$. Эта зависимость изображена на среднем графике рис. 5 черной пунктирной линией. При взятии этой стационарной зависимости за основу в предположениях Кирхгофа зависимости для коэффициентов подъемной силы и момента тангажа принимают вид: зеленые сплошные линии на верхнем графике — $C_y(\alpha)$ и соответствующая линия на нижнем графике — $m_z(\alpha)$. Видно, что для $C_y(\alpha)$ аппроксимация весьма удовлетворительна, тогда как для $m_z(\alpha)$ оставляет желать лучшего. Поэтому математическая модель для подъемной силы строилась на основе формулы (2.1) с дополнительным динамическим уравнением, описывающим запаздывание развития отрыва потока для внутреннего переменного $x_s(\alpha)$, а для момента тангажа изменение m_z предлагается определять через изменение подъемной силы и положение фокуса профиля $\Delta x(\alpha)$:

$$m_z(\alpha, \Delta x) = m_{z_0} + \Delta x(\alpha) C_y(\alpha). \quad (2.2)$$

Здесь m_{z_0} — в общем случае ненулевой момент профиля при нулевой подъемной силе. В рассматриваемом случае в связи с симметричностью профиля $NACA\ 0015$ $m_{z_0} = 0$.

Таким образом, второй внутренней динамической переменной математической модели является Δx . В этом случае предлагаемая статическая аппроксимация $m_z(\alpha)$ совпадает с результатами CFD-расчета удовлетворительно (см. рис. 5, нижний график, черная пунктирная линия).

Здесь $\mathbf{C} = (C_y, m_z)$, $\boldsymbol{\xi} = (\alpha, \omega_z)$ — вектор кинематических параметров движения, \mathbf{x} — вектор внутренних переменных, определяющих состояние отрывного обтекания.

Для профиля на больших углах атаки внутренней переменной можно считать, например, положение точки отрыва потока x_s вдоль хорды профиля. В линейной постановке в качестве функции f может быть выбрано решение задачи Кирхгофа об отрывном обтекании профиля идеальной несжимаемой жидкостью [20, 21].

В рамках этой задачи считается, что отрыв потока происходит в некоторой точке верхней поверхности и с задней кромки, линии срыва потока, распространяясь вниз по течению, остаются вблизи оси Ox до бесконечности. Численное сравнение решения этой задачи с решением нелинейной задачи Чаплыгина–Лаврентьева с обтеканием пластинки со срывом струи с верхней поверхности [22], в рамках которой не ставится ограничивающее предположение о форме срывной зоны, показывает, что при углах атаки $\alpha < 20^\circ$ качественные различия отсутствуют, и решение Кирхгофа для коэффициента нормальной силы

$$C_y(\alpha, x_s) = \frac{\pi}{2} \sin \alpha (1 + \sqrt{x_s})^2 \quad (2.1)$$

можно считать приближенно верным. Учет конечности зоны отрыва потока [23] также не приводит к существенным качественным изменениям.

Таким образом, формулу Кирхгофа (2.1) можно использовать для моделирования нестационарного

Учитывая сказанное, математическая модель продольных аэродинамических характеристик профиля может быть записана в виде

$$C_y(t) = C_y(\alpha, x_s) + C_y^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z, \quad m_z(t) = C_y(t) \Delta x(t) + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z, \quad (2.3)$$

$$\tau_1 \dot{x}_s + x_s = x_{s_0} (\alpha - \tau_2 \bar{\alpha}), \quad \tau_3 \Delta \dot{x} + \Delta x + k_1 \Delta x^2 + k_2 \Delta x^3 = \Delta x_0 (\alpha - \tau_4 \bar{\alpha}).$$

Здесь $C_y^{\bar{\omega}_z}$ и $m_z^{\bar{\omega}_z}$ — вращательные производные, описывающие эффекты демпфирования присоединенного потока; x_{s_0} — положение точки отрыва потока в статических условиях, которое однозначно определяется по численной статической зависимости $C_y(\alpha)$ при помощи формулы (2.1) (см. рис. 5, средний график); τ_2, τ_4 — безразмерные характеристические времена запаздывания отрыва потока, τ_1, τ_3 — безразмерные характеристические времена релаксационных процессов динамической системы, Δx_0 — изменение аэродинамического фокуса в статических условиях [3]. В дифференциальное уравнение для Δx включены также нелинейные слагаемые с коэффициентами k_1, k_2 .

Таким образом, сформулирована математическая модель (2.3) в виде двух нелинейных соотношений и двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эффекты запаздывания. Модель для продольных аэродинамических характеристик профиля содержит восемь неизвестных параметров $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, k_1, k_2, C_y^{\bar{\omega}_z}, m_z^{\bar{\omega}_z}$, которые необходимо идентифицировать по результатам численного расчета при вынужденных колебаниях профиля.

Идентификация параметров модели

Идентификация проводилась на части данных численного расчета вынужденных гармонических колебаний, а именно рассматривались колебания около среднего угла атаки $\alpha_0 = 11^\circ$ с амплитудой $\Delta\alpha = 8^\circ$

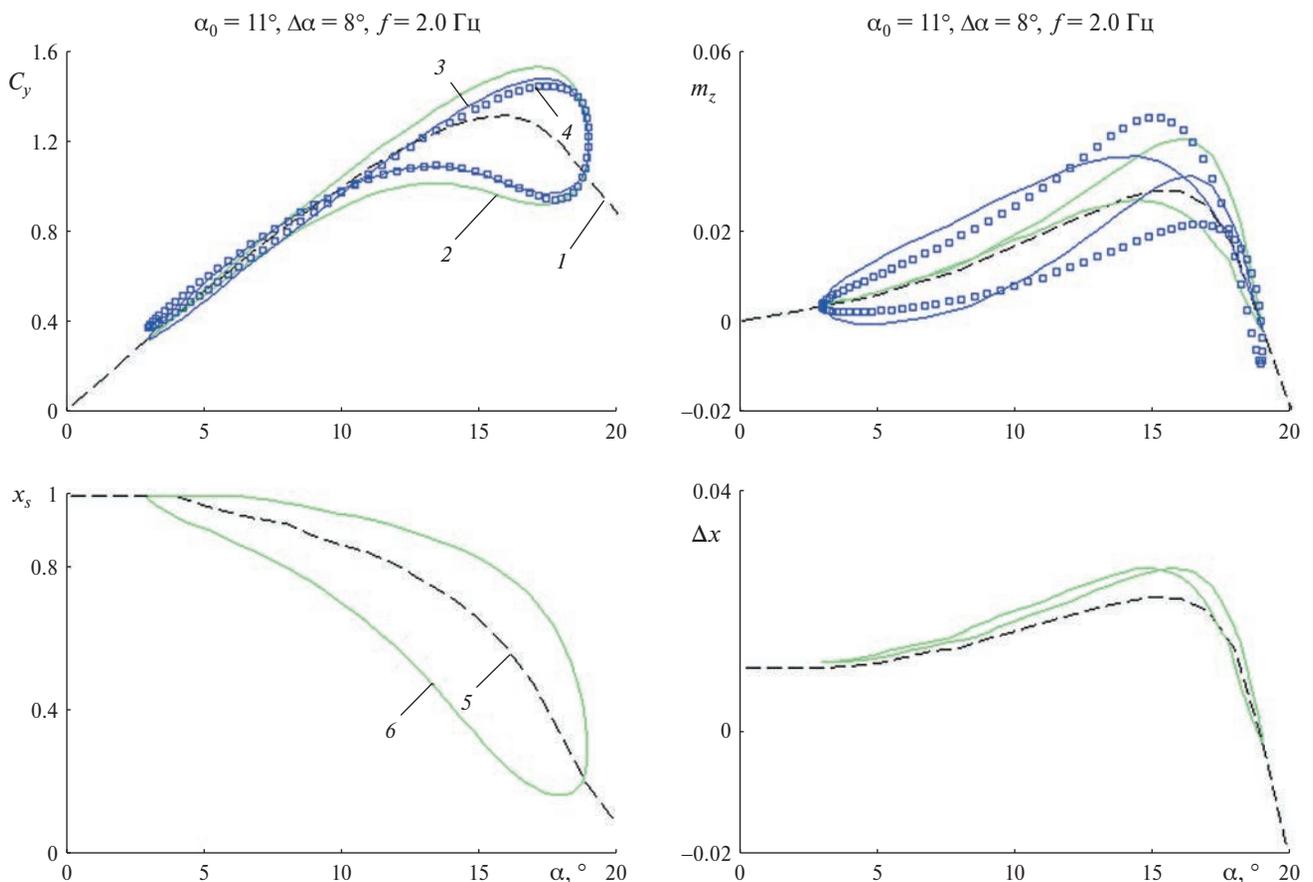


Рис. 6. Результаты идентификации параметров математической модели, $\alpha_0 = 8^\circ, \Delta\alpha = 11^\circ, f = 2$ Гц. 1 — статика, 2 — без учета линейного слагаемого, 3 — с учетом линейного слагаемого, 4 — результаты CFD расчета, 5 — статическое изменение внутренней переменной, 6 — динамическое изменение внутренней переменной.

и частотой 2 Гц, осредненных на один период путем минимизации функционалов рассогласования численного и смоделированного значений на заданном массиве точек полного периода длиной n

$$\Phi_{C_y}(\tau_1, \tau_2, C_y^{\bar{\omega}_z}) = \sum_{i=1}^n \left(C_y^{CFD}(t_i) - C_y^{\text{mod}}(t_i) \right)^2, \quad \Phi_{m_z}(\tau_3, \tau_4, k_1, k_2, m_z^{\bar{\omega}_z}) = \sum_{i=1}^n \left(m_z^{CFD}(t_i) - m_z^{\text{mod}}(t_i) \right)^2.$$

Были получены следующие параметры. Для C_y : $\tau_1 = 2.31$, $\tau_2 = 4.32$, $C_y^{\bar{\omega}_z} = -7.46$, для m_z : $\tau_3 = 0.1$, $\tau_4 = 0.69$, $m_z^{\bar{\omega}_z} = -1$, $k_1 = -6.17$, $k_2 = -20.34$. На рис. 6 на верхних графиках маркерами показаны результаты расчетов, по которым проводилась идентификация, сплошными синими линиями — результаты моделирования. На нижних графиках — соответствующие динамические положения точки отрыва и аэродинамического фокуса. Пунктирными линиями на всех графиках приведены статические характеристики $C_y(\alpha, x_{s0})$, $m_z(\alpha, x_{s0})$, x_{s0} , Δx_0 . Для коэффициента нормальной силы согласование удовлетворительное, для коэффициента момента тангажа модель занижает значение m_z в диапазоне $\alpha = 12-17^\circ$ при увеличении угла атаки и завышает в диапазоне $\alpha = 10-17^\circ$ при уменьшении α . Зелеными сплошными линиями на графиках показаны $C_y(t)$ и $m_z(t)$ без учета линейных слагаемых $C_y^{\bar{\omega}_z}$, $m_z^{\bar{\omega}_z}$. При малых углах атаки, $\alpha < 10^\circ$, значительная петля динамического гистерезиса в m_z обусловлена большим в относительных величинах линейным демпфированием. Самопересечение петли при $\alpha = 16^\circ$ говорит о смене знака демпфирования. Динамические значения C_y при безотрывном обтекании близки к статическим.

Результаты моделирования

При помощи разработанной математической модели продольных аэродинамических характеристик, идентифицированной по части результатов CFD, проводилось моделирование нестационарных аэродинамических нагрузок при гармонических колебаниях профиля для всех расчетных случаев. На рис. 7–10 показаны результаты моделирования (линии) для нескольких случаев в сравнении с расчетом (маркеры).

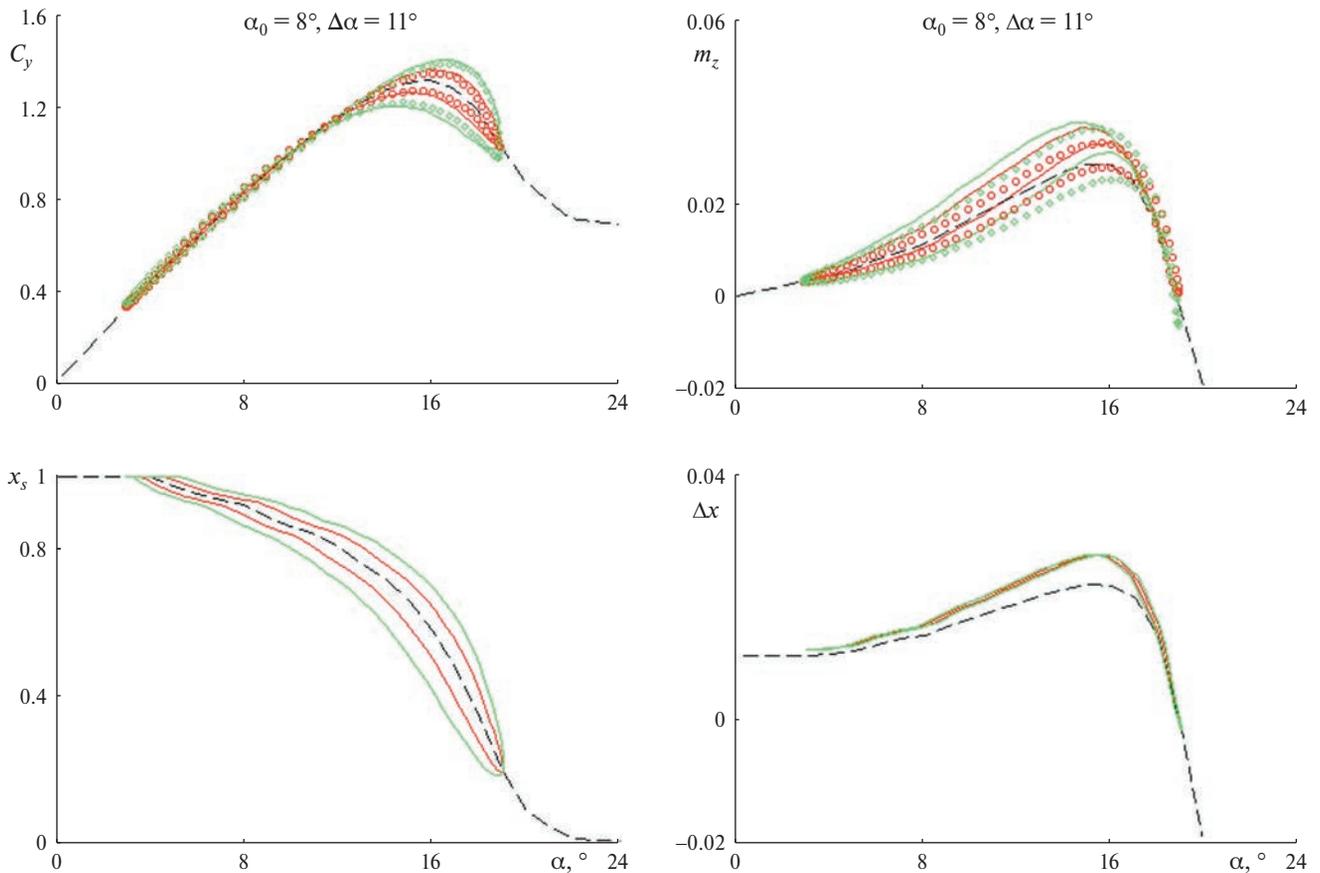


Рис. 7. Динамическое изменение C_y , m_z , x_s , Δx при гармонических колебаниях с $\alpha_0 = 8^\circ$, $\Delta\alpha = 11^\circ$ и частотами $f = 0.5$, 1 Гц.

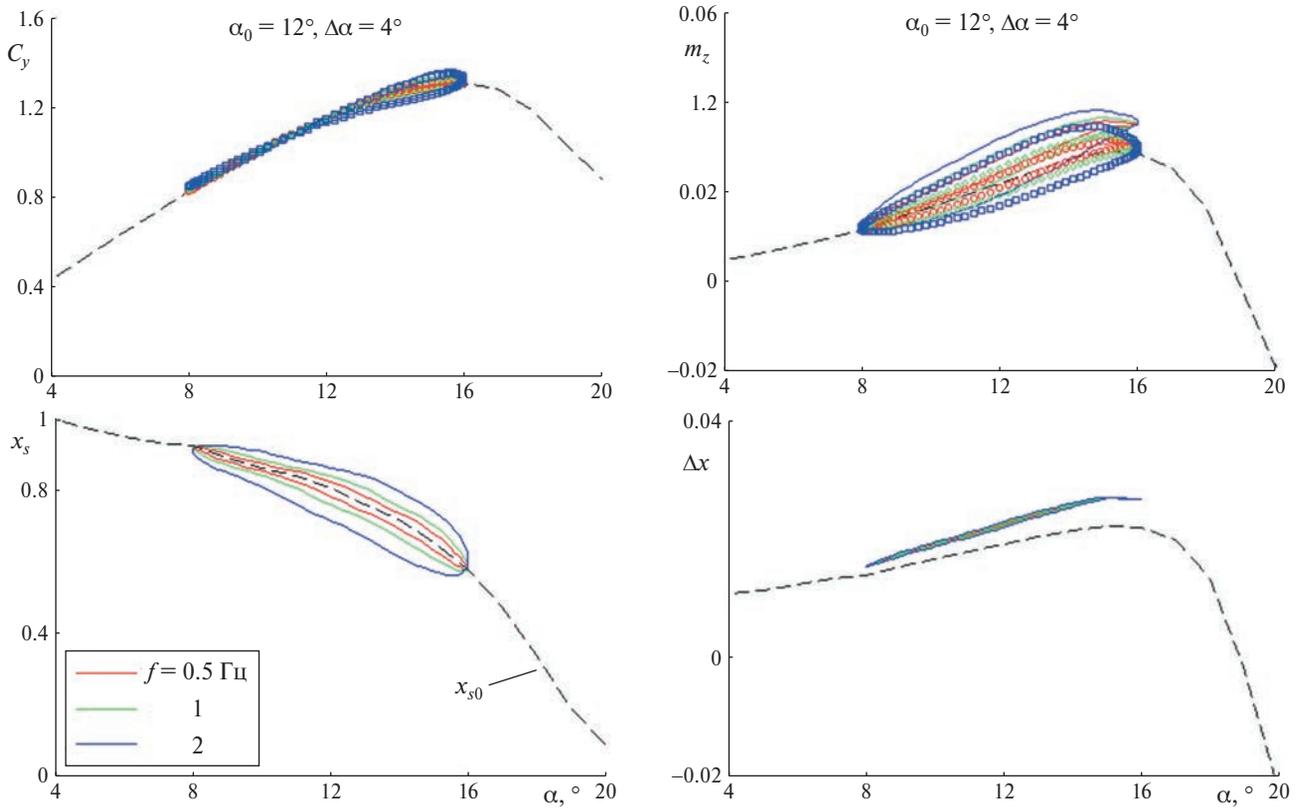


Рис. 8. Динамическое изменение C_y , m_z , x_s , Δx при гармонических колебаниях с $\alpha_0 = 12^\circ$, $\Delta\alpha = 4^\circ$ и частотами $f = 0.5$, 1, 2 Гц.

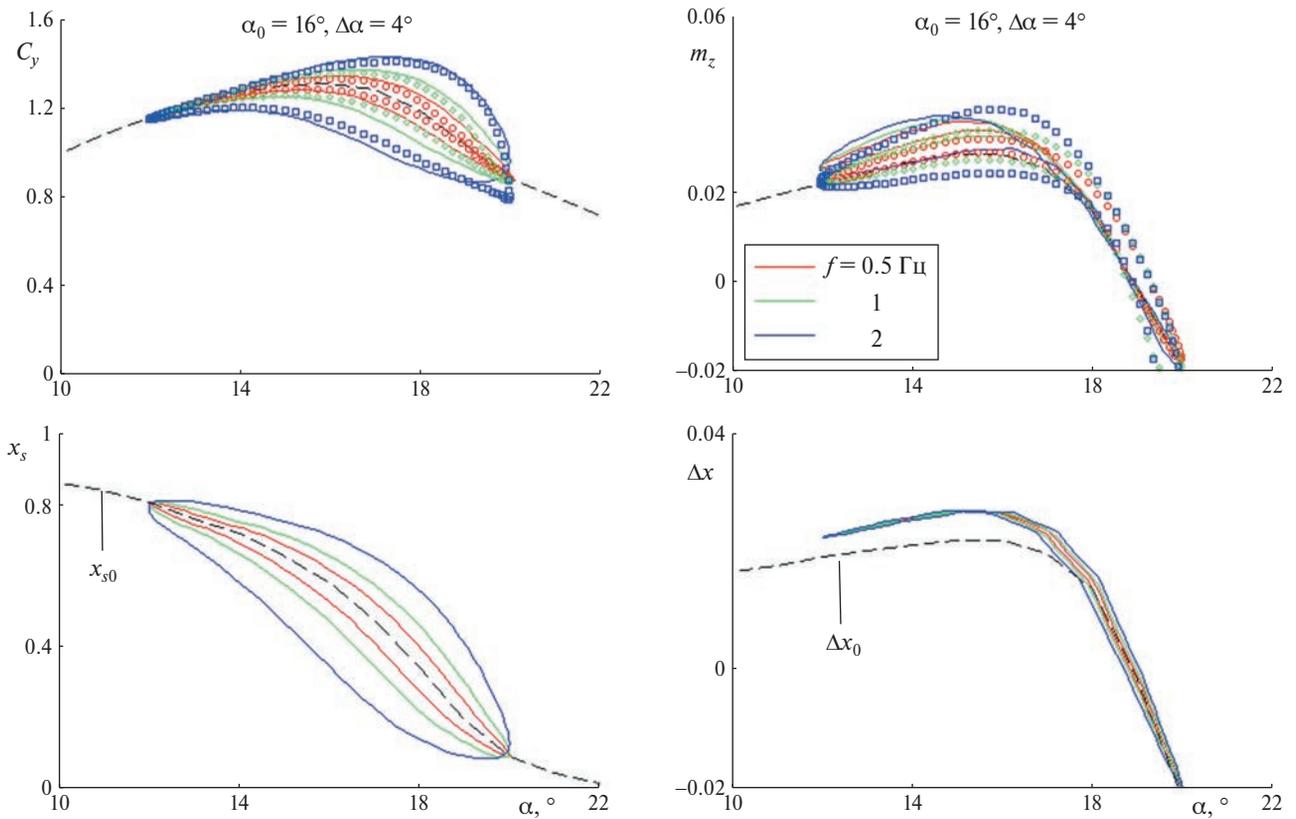


Рис. 9. Динамическое изменение C_y , m_z , x_s , Δx при гармонических колебаниях с $\alpha_0 = 16^\circ$, $\Delta\alpha = 4^\circ$ и частотами $f = 0.5$, 1, 2 Гц.

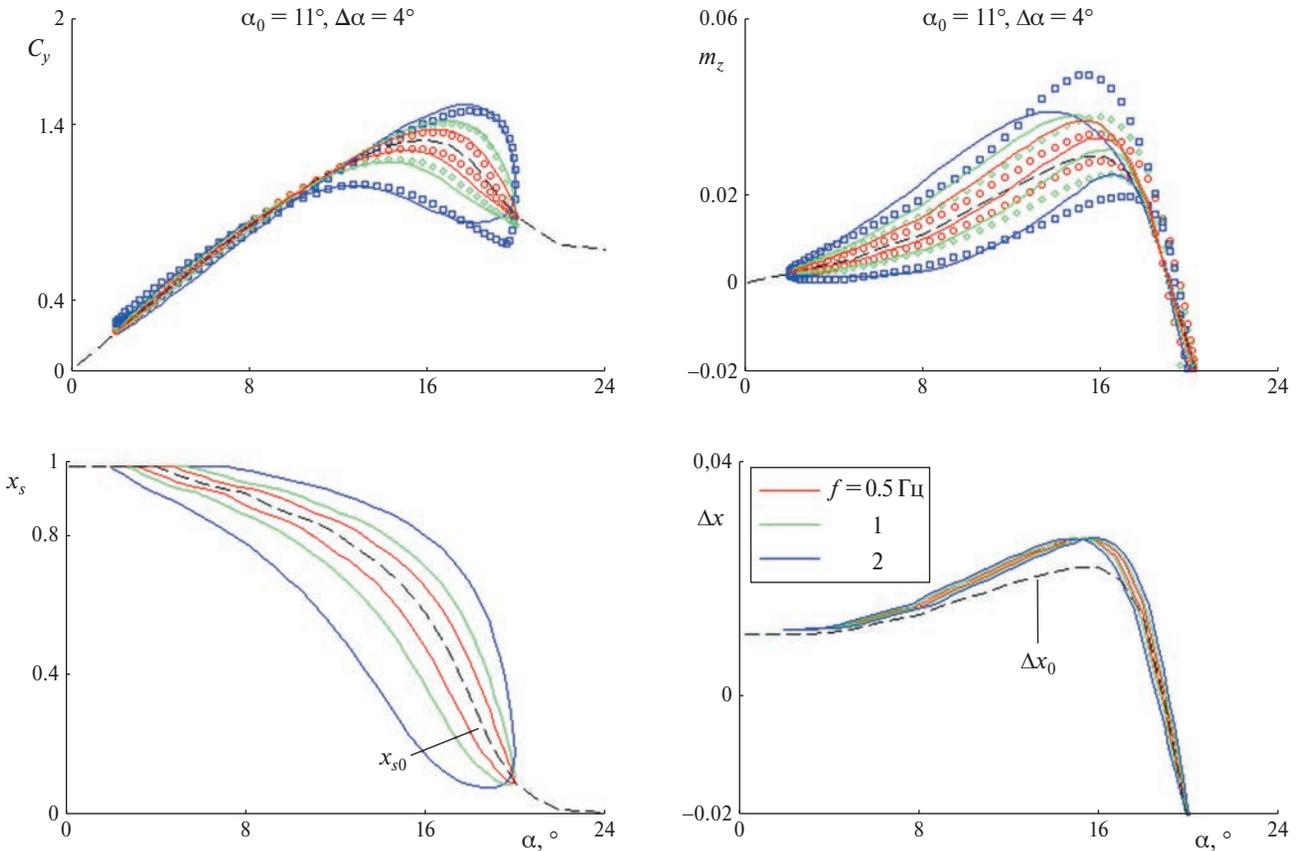


Рис. 10. Динамическое изменение C_y , m_z , x_s , Δx при гармонических колебаниях с $\alpha_0 = 11^\circ$, $\Delta\alpha = 9^\circ$ и частотами $f = 0.5$, 1, 2 Гц.

Пунктирные линии на всех графиках соответствуют статическим зависимостям нормальной силы, момента тангажа, положения точки отрыва и аэродинамического фокуса от угла атаки. Для C_y согласование результатов моделирования с расчетными данными удовлетворительное для всех частот колебаний как при безотрывном обтекании (см. рис. 8), так и в области $\alpha = 14\text{--}20^\circ$, где отрывное обтекание обуславливает возникновение значительных петель динамического гистерезиса (см. рис. 6, 9). Динамическое положение точки отрыва во всех случаях существенно отличается от своего статического значения. Можно отметить отличие расчетной кривой для частоты $f = 2$ Гц в области смены направления движения, связанное, по-видимому, с эффектами, не учитываемыми в модели.

Для коэффициента момента тангажа результаты удовлетворительно согласуются для частот $f = 0.5$, 1 Гц, для $f = 2$ Гц согласование носит скорее качественный характер, модель занижает значение m_z в области $\alpha \approx 14\text{--}18^\circ$.

При большой частоте $f \approx 10$ Гц тенденции аналогичны. Результаты расчета и моделирования m_z близки при колебаниях около $\alpha_0 \approx 11^\circ$ с амплитудой 4° (рис. 11), для $\alpha_0 \approx 15^\circ$ и той же амплитуды расчет демонстрирует более широкие гистерезисные петли.

Положение точки отрыва потока можно извлечь из результатов CFD-расчета непосредственно по условию обнуления значения коэффициента трения (обнуления нормальной производной тангенциальной компоненты скорости) на поверхности профиля, что позволяет оценить правомерность применения формулы (2.1). На рис. 12 маркерами показана расчетная статическая зависимость для C_y .

С использованием этих данных по формуле (2.1) для линейного случая вычислено положение точки отрыва x_{s0} (нижний график, сплошная линия), а затем по этому положению снова вычислен C_y (верхний график, сплошная линия) по (2.1). Результаты для C_y весьма близки. На нижнем графике рис. 12 пунктирной линией показана полученная в расчете зависимость $x_{s0}(\alpha)$. Видно, что в нелинейном случае отрыв потока начинается позднее, при $\alpha = 11^\circ$ по сравнению с $\alpha = 9^\circ$ в линейном случае.

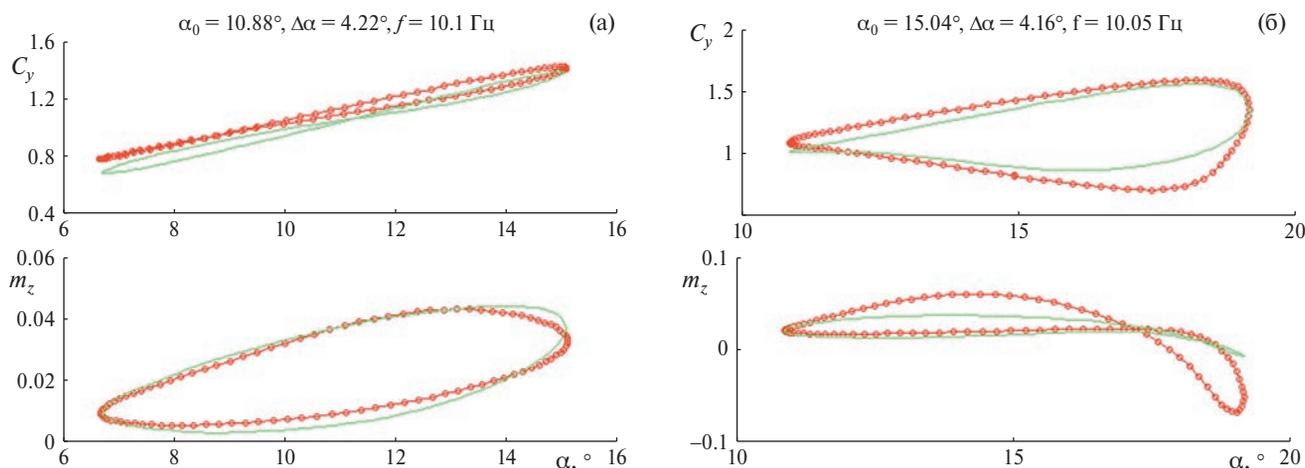


Рис. 11. Динамическое изменение C_y, m_z при гармонических колебаниях: а) $\alpha_0 = 10.88^\circ, \Delta\alpha = 4.22^\circ$ и частотой $f = 10.1$ Гц, б) $\alpha_0 = 15.04^\circ, \Delta\alpha = 4.16^\circ$ и частотой $f = 10.05$ Гц.

На верхнем графике рис. 12 пунктирной линией показано решение Кирхгофа для C_y , если в качестве x_{s0} выбрана расчетная кривая. Она превышает расчетные значения C_y (маркеры) при $\alpha > 9^\circ$. Однако в целом согласование удовлетворительное, и можно заключить, что, во-первых, внутренняя переменная x_s действительно описывает положение точки отрыва потока, а во-вторых, что использование линейного приближения Кирхгофа для $C_y(\alpha, x_s)$ оправдано.

В задачах динамики полета на режимах безотрывного обтекания традиционно использует математическую модель продольных аэродинамических характеристик, основанную на концепции аэродинамических производных:

$$\begin{aligned}
 C_y(t) &= C_{y0} + C_y^\alpha(\alpha)\alpha + C_y^{\ddot{\alpha}}(\alpha)\ddot{\alpha}, \\
 m_z(t) &= m_{z0} + m_z^\alpha(\alpha)\alpha + m_z^{\ddot{\alpha}}(\alpha)\ddot{\alpha}.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Представляет интерес, как соотносятся результаты нелинейного моделирования (2.3) и традиционного подхода (2.4). Для сравнения было задано гармоническое движение $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \sin(\omega t)$ с амплитудой $\Delta\alpha = 3^\circ$ около средних углов атаки в диапазоне $\alpha = 0-20^\circ$ с шагом 2° с частотами $f = 0.5, 1, 2$ Гц. Результаты моделирования с использованием выражения (2.3) показаны на рис. 13. По эти данным с помощью метода линейной регрессии были идентифицированы коэффициенты модели (2.4).

Для коэффициента момента тангажа статическая m_z^α и нестационарная $m_z^{\ddot{\alpha}}$ показаны на рис. 13в. Линии для $f = 1$ и 2 Гц эквидистантно сдвинуты по вертикали на 0.1 и 0.2 для ясности рисунка. Полученные кривые демонстрируют типичные особенности, наблюдаемые в эксперименте в аэродинамической трубе с аналогичным движением. А именно: демпфирование тангажа остается примерно постоянным при безотрывном обтекании, затем по мере развития отрыва потока его величина нелинейным образом уменьшается и восстанавливается до прежних значений при полностью отрывном течении. Минимальное значение $m_z^{\ddot{\alpha}}$ зависит от частоты колебаний, что указывает на нелинейный характер зависимости m_z от параметров движения и, следовательно, неприменимость модели (2.4) в этой области.

Подставляя полученные коэффициенты обратно в формулы (2.4), можно получить зависимости коэффициентов силы и момента от времени $C_y(t), m_z(t)$, какими они были бы в случае справедливости линейного приближения (см. рис. 13б). Можно видеть, как и следовало ожидать, различия в области развития отрывного обтекания, в особенности для большой частоты $f = 2$ Гц.

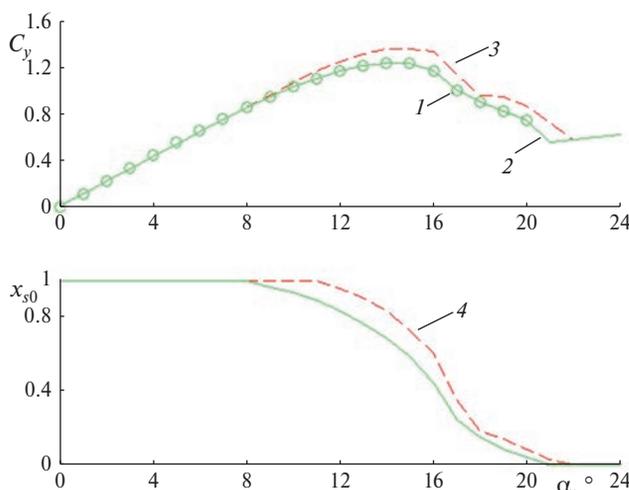


Рис. 12. Сравнение расчетного значения x_{s0} и C_y с решением Кирхгофа: 1 — CFD-расчет, 2 — аппроксимация по формуле Кирхгофа, 3 — аппроксимация по формуле Кирхгофа с x_{s0} из расчета, 4 — x_{s0} из расчета.

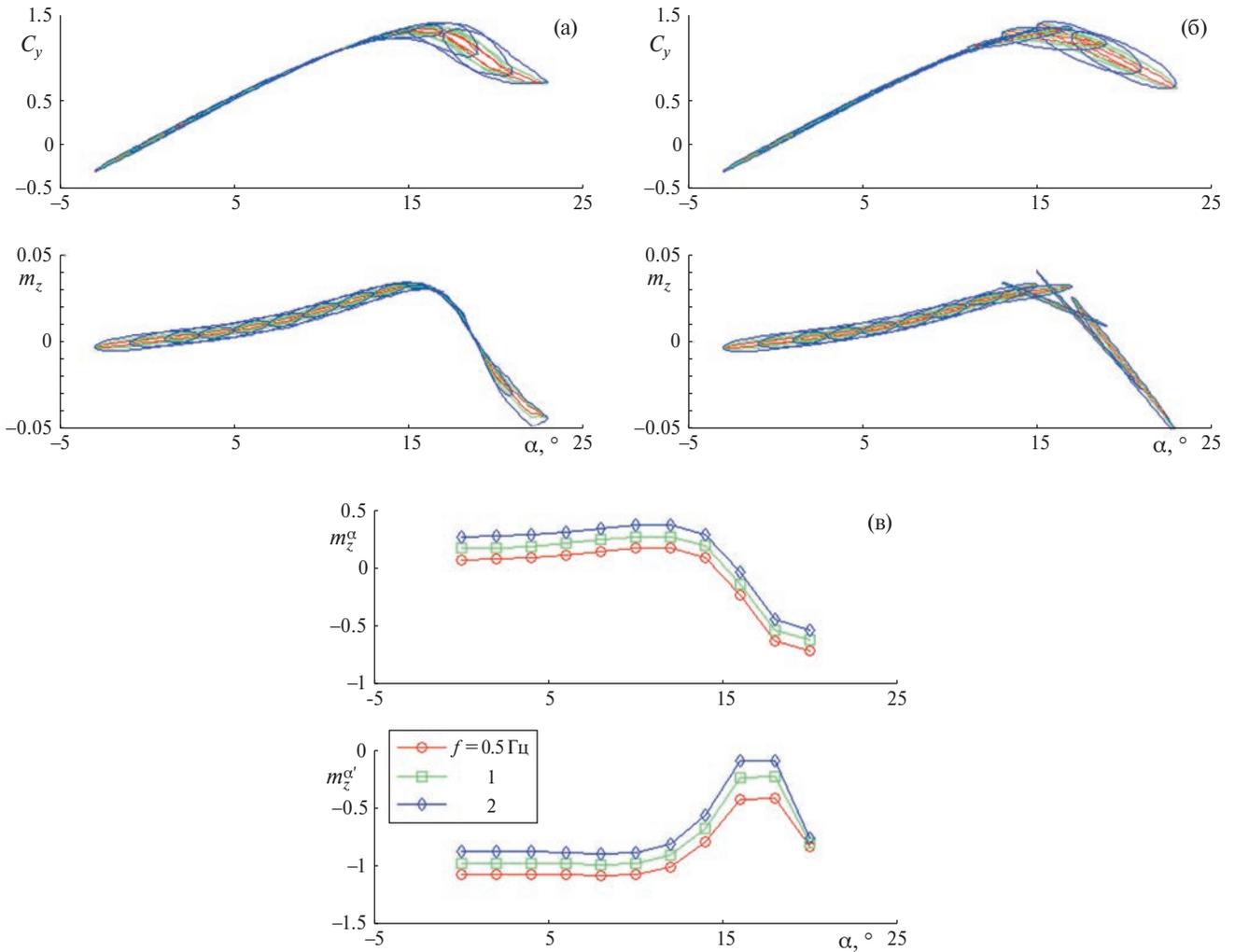


Рис. 13. Моделирование C_y , m_z при колебаниях с малой амплитудой (а), аэродинамические производные m_z (в), моделирование колебаний с малой амплитудой при помощи аэродинамических производных (б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обоснован выбор постановки численной задачи обтекания профиля крыла с вынужденными колебаниями по углу атаки. Проведена верификация по размеру расчетных сеток, по шагу по времени и валидация по моделям турбулентности для замыкания уравнений Рейнольдса. Приведено сравнение с экспериментальными данными, и на основе как стационарных, так и динамических характеристик профиля выбрана модель, которая лучше согласуется с экспериментальными данными.

Проверена возможность построения математической модели на основе результатов численного моделирования. Проведены численные расчеты колебаний профиля крыла с различными средними углами атаки, амплитудами и частотами колебаний. На их основе построена математическая модель для подъемной силы и момента тангажа.

Продемонстрировано качественное согласование результатов. Указанный верифицированный метод является достаточно быстрым и эффективным способом построения математической модели и не требует большого количества экспериментальных или летных данных. Показано, что при таком подходе возможно точнее моделировать продольные аэродинамические характеристики по сравнению с традиционным использованием линейной модели.

Разработанная математическая модель может быть использована при проектировании роторов вертолетов, ветроэнергетических турбин, как с горизонтальной, так и с вертикальной осью вращения при одновременном решении динамических и аэродинамических задач.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-19-00659).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука, Физматлит, 1998. 816 с.
2. *Greenwell D.I.* A review of unsteady aerodynamic modelling for flight dynamics of manoeuvrable aircraft // AIAA 2004-5276. 2004.
3. *Goman M.G., Khrabrov A.N.* State-space representation of aerodynamic characteristics of an aircraft at high angles of attack // Journal of Aircraft. V. 31. № 5. 1994. P. 1109–1115.
4. *Murphy P.C., Klein V.* Transport aircraft system identification from wind tunnel data // AIAA 2008-6202. 2008.
5. *Abramov N., Khrabrov A., Vinogradov Yu.* Mathematical modeling of aircraft unsteady aerodynamics at high incidence with account of wing – tail interaction // AIAA 2004-5278. 2004.
6. *Jategaonkar R., Fischenberg D., Gruenhagen W.* Aerodynamic modeling and system identification from alight data – recent applications at DLR // Journal of Aircraft. V. 41. № 4. 2004. P. 682–691.
7. *Brandon J.M., Morelli E.A.* Real-time onboard global nonlinear aerodynamic modeling from flight data // AIAA 2014-2554. 2014.
8. *Srinivasan G.R., Ekaterinaris J.A., McCroskey W.J.* Evaluation of Turbulence Models for Unsteady Flows of an Oscillating Airfoil // Computers & Fluids. 1995. V. 24. № 7. P. 833–861.
9. *Ekaterinaris J.A., Platzer M.F.* Computational Prediction of Airfoil Dynamic Stall, S0376-0421(97)00012-2 // Prog. Aerospace Sci. 1997. V. 33. P. 759–846.
10. *Wang S., Ingham D.B., Ma L., Pourkashanian M., Tao Z.* Turbulence modeling of deep dynamic stall at relatively low Reynolds number // Journal of Fluids and Structures. 2012. V. 33. P. 191–209.
11. *Wang S., Ingham D.B., Ma L., Pourkashanian M., Tao Z.* Numerical investigations on dynamic stall of low Reynolds number flow around oscillating airfoils // Computers and Fluids. 2010. V. 39. № 9. P. 1529–1541.
12. *Menter F.R.* Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamics flows // AIAA Paper, 93-2906. 1993.
13. *Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.* Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // 4th International Symposium of Turbulence, Heat and Mass Transfer. 2003.
14. *Martinat G., Braza M., Hoarau Y., Harran G.* Turbulence modelling of the flow past a pitching NACA 0012 airfoil at 10^5 and 10^6 Reynolds Numbers // Journal of Fluids and Structures. 2008. V. 24. P. 1294–1303.
15. *Kasibholta V.R., Tafti D.* Large Eddy Simulation of the Flow past Pitching NACA 0012 Airfoil at 10^5 Reynolds Number // Proceedings of the ASME 2014 4th Joint US-European Fluids Engineering Division Summer Meeting, FEDSM 2014-21588. 2014.
16. *Szydlowski J., Costes M.* Simulation of flow around a static and oscillating in pitch NACA 0015 airfoil using URANS and DES // Proceeding of ASME 2004 Heat Transfer / Fluids Engineering Summer Conference. American Society of Mechanical Engineers. 2004. P. 891–908.
17. *Coton F.N., Galbraith R.A.M.* An Experimental Study of Dynamic Stall on a Finite Wing // The Aeronautical Journal. 1999. V. 103. № 1023. P. 229–236.
18. *Piziali R.A.* An experimental investigation of 2D and 3D oscillating wing aerodynamics for a range of angle of attack including stall // NASA Technical Memorandum 4632-1993. 1993.
19. *Schreck S.J., Helin H.F.* Unsteady Vortex Dynamics and Surface Pressure Topologies on a Finite Wing // Journal of Aircraft. 1994. V. 31. № 4. P. 899–907.
20. *Храбров А.Н.* Неединственность ламинарного отрывного обтекания профиля под углом атаки в схеме Кирхгофа // Ученые записки ЦАГИ. 1985. Т. XVI. № 5.
21. *Колинко К.А., Храбров А.Н.* Математическое моделирование нестационарной подъемной силы крыла большого удлинения в условиях срыва потока. // Ученые записки ЦАГИ. 1998. Т. XIX. № 3-4.
22. *Khrabrov A., Ol M.* Effects of flow separation on aerodynamic loads in linearized thin airfoil theory // Journal of Aircraft. 2004. V. 41. № 4.
23. *Храбров А.Н.* Использование линейной теории кавитации для математического моделирования отрывного обтекания профиля с конечной зоной отрыва // Ученые записки ЦАГИ. 2001. Т. XXXII. № 1-2.

MODELING OF THE UNSTEADY AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE NACA 0015 AIRFOIL FROM THE DATA OF NUMERICAL CALCULATIONS OF THE FLOW

K. A. Abramova^{*}, D. A. Alieva^{}, V. G. Sudakov^{***}, A. N. Khrabrov^{****}**

Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Moscow region, 140180, Russia

^{*} *e-mail: kseniya.abramova@tsagi.ru*

^{**} *e-mail: diana.alieva@tsagi.ru*

^{***} *e-mail: vit_soudakov@tsagi.ru*

^{****} *e-mail: khrabrov@tsagi.ru*

The possible application of the results of numerical modeling in developing an approximate phenomenological mathematical aerodynamic model applicable in solving the problems of dynamics is studied with reference to the example of the unsteady flow past the NACA 0015 airfoil oscillating in the angle of attack at different frequencies, amplitudes, and mean angles of attack. For this purpose, the Reynolds equations are solved in both steady and unsteady formulations, together with the $k-\omega$ -SST turbulence model. The results of the calculations are validated by means of comparing them with the experimental data. The model of the normal force and the longitudinal moment formulated within the framework of an approach introducing an internal dynamic variable is identified according to the data of calculations. The results of the modeling are compared with the numerical and experimental data. The comparison with the conventional approach to the modeling based on the linear unsteady model with the use of dynamic derivatives is also carried out.

Keywords: unsteady flow, hysteresis, aerodynamic characteristic, wing airfoil, numerical modeling

УДК 537.525

ДИФФУЗИОННО-ДРЕЙФОВАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

© 2024 г. С. Т. Суржиков

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: surg@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 24.09.2023 г.

После доработки 01.10.2023 г.

Принята к публикации 01.10.2023 г.

Двухмерная электрогазодинамическая задача об аномальном тлеющем разряде на поверхности острой пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком совершенного газа, решается с использованием системы уравнений Навье–Стокса для описания термогазодинамических процессов в пограничном слое и двухтемпературной двухжидкостной диффузионно-дрейфовой модели газоразрядной плазмы для определения электродинамической структуры разряда. Учитываются приэлектродные области пространственного заряда и внешняя электрическая цепь, состоящая из источника питания и омического сопротивления. Исследовано влияние поперечного к газовому потоку магнитного поля с индукцией до 0.03 Тл на структуру пограничного слоя и тлеющего разряда. Выполнено численное исследование электрогазодинамической структуры аномальных приповерхностных разрядов в широком диапазоне скоростей газового потока, $M = 5–10$, давлений в набегающем потоке, $p = 0.6–5$ Торр, напряжений на электродах и токов через разряды. Исследована электродинамическая структура газо-плазменного потока вблизи электродов и воздействие тлеющего разряда на распределение давления и температуры вдоль поверхности пластины.

Ключевые слова: сверхзвуковое обтекание острой пластины, аномальный тлеющий разряд, тлеющий разряд в магнитном поле

DOI: 10.31857/S1024708424010119 EDN: SDCTPI

Задача о взаимодействии пограничного слоя на острой пластине в сверхзвуковом потоке с тлеющим разрядом рассматривалась ранее в работах [1–3], где было выполнено численное моделирование взаимодействия аномального тлеющего разряда с молекулярным азотом. Исходные данные указанной задачи были аналогичны тем, которые исследовались в лабораторных аэрофизических экспериментах [4, 5].

В опытах было показано, что при напряжении на газоразрядном промежутке ~ 430 В и токах $I \sim 50$ мА аномальный тлеющий разряд между двумя плоскими электродами на поверхности оказывает заметное влияние на распределение давления вдоль обтекаемой поверхности. Особый интерес представляют экспериментальные данные о влиянии поперечного к потоку магнитного поля с индукцией до ~ 0.4 Тл на распределение давления вдоль поверхности.

Заметим, что аномальный тлеющий разряд постоянного тока является одной из хорошо известных форм существования газоразрядной плазмы между металлическими электродами в диапазоне токов $\sim 10^{-2}–1.0$ А и напряжений на газоразрядном промежутке $V \sim 10^2–10^3$ В. В отличие от нормального тлеющего разряда [6, 7] в данном случае газоразрядная плазма занимает всю поверхность электродов, что приводит к возникновению сильно неоднородных плазменных областей вблизи границ электродов.

Расчетная модель, построенная и исследованная в трудах [1–3], показала хорошее качественное и количественное согласие с экспериментом, как по характерным параметрам тлеющего разряда, так и по эффекту силового воздействия пограничного слоя с тлеющим разрядом на поверхность. Однако в этих работах исследовалась амбиполярная модель аномального тлеющего разряда, в которой пренебрегалось приэлектродными областями пространственного заряда и полагался квазинейтральный характер газоразрядного плазменного столба.

В данной работе используется так называемая диффузионно-дрейфовая модель двухтемпературной и двухжидкостной газоразрядной плазмы, в которой распределение электрического поля во всей области находят из решения уравнения Пуассона. Для учета внешнего магнитного поля выполнена модификация модели в частной двухмерной постановке описания течения в плоскости $x–y$ с приложенным внешним

магнитным полем в направлении оси z , как это обычно делается в классической магнитной гидродинамике [8].

Компьютерная реализация диффузионно-дрейфовой модели представляет собой более сложную и трудоемкую задачу, чем применение амбиполярной модели [1–3]. Однако полученные при этом расчетные данные заметно обогащают общее понимание изучаемого явления, так что указанные две модели могут оказаться полезными при решении прикладных задач.

С одной стороны, рассмотрена классическая для аэродинамических исследований постановка задачи сверхзвукового обтекания острой пластины. Однако в рассматриваемом случае на ее поверхности поперек потоку располагаются два электрода заподлицо с поверхностью для инициализации тлеющего разряда. Это означает появление внутри пограничного слоя объемных источников тепла и дополнительной объемной силы. Поэтому, с газодинамической точки зрения, представляет интерес изучение закономерностей формирования областей теплового и силового воздействия тлеющего разряда на структуру течения в пограничном слое.

С другой стороны, аномальный тлеющий разряд относится к классу разрядов, демонстрирующих большую чувствительность вольтамперных характеристик, распределений полей напряженности электрического поля и приведенного поля (отношение модуля напряженности к локальному давлению), концентраций электронов и ионов, скорости ионизационных и рекомбинационных процессов от давления и температуры в газе.

Для исследования выбраны два диапазона давлений в набегающем на пластину потоке совершенного газа: $p = 0.6$ и 5 Торр. Параметры электрической цепи: ЭДС источника питания $\varepsilon = 500$ – 1500 В, омическое сопротивление $R_0 = 12$ кОм. Индукция магнитного поля изменялась в диапазоне $B_z = \pm 0.03$ Тл.

К важной особенности рассматриваемой задачи об аномальном тлеющем разряде следует отнести генерацию экстремальных электрических полей вблизи границ электродов, что приводит к экспоненциальному росту в этих зонах скорости ионизации, а это, в конечном счете, может привести к электрическому пробою или переходу в дуговой разряд.

Подчеркнем, что корректное описание указанных процессов в используемой здесь расчетной модели не предусмотрено. Это означает, что необходимо тщательно следить за выбором исходных данных и развитием исследуемого процесса в ходе математического моделирования. Обычно это требует выполнения серии численных экспериментов.

Еще одной особенностью решаемой задачи является использование диффузионно-дрейфовой модели, которая носит, по сути, полуэмпирический феноменологический характер. Входящие в модель во многом определяющие расчетную структуру тлеющего разряда коэффициенты подвижности и диффузии заряженных частиц, а также скорость ионизирующих процессов определяют из феноменологических соображений и экспериментально полученных данных в ограниченной области напряженности электрических полей и индукции магнитных полей. Отмеченная особенность, связанная с локализацией электрических полей, а также учет внешнего магнитного поля могут привести к необходимости модификации этих функций. Однако в данной работе сосредоточим внимание на изучении степени влияния этих функций на получаемые в рамках диффузионно-дрейфовой модели численные решения.

Выбор двух диапазонов исследуемых давлений обусловлен следующим. При давлении $p = 0.6$ Торр наблюдается весьма заметное влияние магнитного поля на динамику газоразрядной плазмы в магнитном поле. Давление $p = 5$ Торр является типичным для исследования электродинамической структуры тлеющих разрядов [6, 7], что позволяет выполнить сравнительный анализ получаемых характеристик разрядов.

Расчетный анализ аномального тлеющего разряда при $p = 0.6$ Торр имел еще одно важное значение. Как уже отмечалось, экспериментальные данные [4, 5] послужили мотивацией для разработки излагаемой и подобных расчетных моделей [9]. В указанных экспериментах были обнаружены факты, которые следует учитывать при анализе результатов численного моделирования. Перечислим некоторые из них.

1. При исследовании поперечного обтекания электродов (см. схему эксперимента на рис. 1) потоком со скоростью $M = 5$ типичные параметры разряда были следующими: полный ток $I = 50$ мА и напряжение на электроразрядном промежутке $V \sim 400$ – 1300 В.

2. Эксперименты проводились в квазистационарных условиях обтекания. Зафиксированы различные режимы обтекания без разряда, с аномальным тлеющим разрядом и с разрядом совместно с поперечным

магнитным полем. То есть показано заметное различие режимов обтекания при включении разряда и, добавок, магнитного поля.

3. Показано различие в режимах обтекания для альтернативного расположения катода и анода по отношению к направлению движения газа.

4. Показано, что при поддержании разряда с током $I = 50$ мА наименьшее напряжение между электродами ($V \sim 500$ В), расположенными вдоль потока, требуется при выключенном магнитном поле. Включение магнитного поля от -0.5 до $+1.0$ Тл приводит к необходимости увеличивать напряжение на газоразрядном промежутке.

При расположении электродов поперек газового потока наблюдается иная картина: для поддержания тока $I = 50$ мА наибольшее напряжение $V \sim 1\ 300$ В требуется в отсутствие магнитного поля. При его включении с индукцией $+0.2$ Тл необходимое напряжение падает до $V \sim 600$ В, а при магнитном поле противоположной поляризации $B \sim 0.3$ Тл напряжение падает до $V \sim 900$ В. При дальнейшем увеличении модуля индукции необходимое напряжение возрастает.

5. Примечательно, что в эксперименте отмечены осцилляции напряжения при включении магнитного поля, а также отсутствие данных по необходимому напряжению для поддержания тока $I = 50$ мА при $B < -0.5$ Тл, хотя они имеются вплоть до $B = +1.0$ Тл. Это свидетельствует о разном влиянии поляризации магнитного поля на структуру тлеющего разряда.

6. Еще один эффект включения магнитного поля — перемещение нагретой области токового столба от катода (выше по потоку) к аноду (ниже по потоку).

7. Экспериментально показано, что при разных поляризациях магнитного поля поверхностное давление, генерируемое тлеющим разрядом на разных расстояниях между электродами, различается. Например, вблизи катода магнитное поле с индукцией -0.9 Тл увеличивает давление газа на поверхности примерно на 4%, а вблизи анода — на 7%. Поле положительной поляризации, $B = +1.0$ Тл, увеличивает давление газа у катода на 7%, а у анода — даже уменьшает.

Таким образом, можно констатировать наличие ряда наблюдаемых в эксперименте эффектов, которые необходимо подтвердить при численном моделировании.

Выбор указанного диапазона значений индукции магнитного поля обусловлен не только физической обоснованностью применения диффузионно-дрейфовой модели в магнитном поле, но и в первую очередь тем, что многочисленные численные эксперименты показали: учет магнитного поля даже с небольшой индукцией $B \sim 0.01$ Тл может стать сильным возмущающим фактором, влияющим на структуру пограничного слоя. При математическом моделировании часто наблюдалась численная неустойчивость, рождаемая, как правило, вблизи границ электродов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Расчетная схема задачи, решаемой в двухмерной постановке, показана на рис. 1.

Газовая динамика обтекания заостренной пластины сверхзвуковым потоком описывается уравнениями неразрывности и Навье–Стокса, уравнением сохранения энергии относительно температуры газа, а также термическим и калорическим уравнениями состояния совершенного газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S_{\mu, x} + F_{B, x}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + S_{\mu, y} + F_{B, y}, \quad (1.3)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{V} \operatorname{grad} T = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \Phi_{\mu} + Q_J, \quad (1.4)$$

где ρ , p — плотность и давление; u , v — проекции вектора скорости \mathbf{V} на оси прямоугольной декартовой системы координат x и y ; μ — динамический коэффициент вязкости; c_p — удельная теплоемкость при

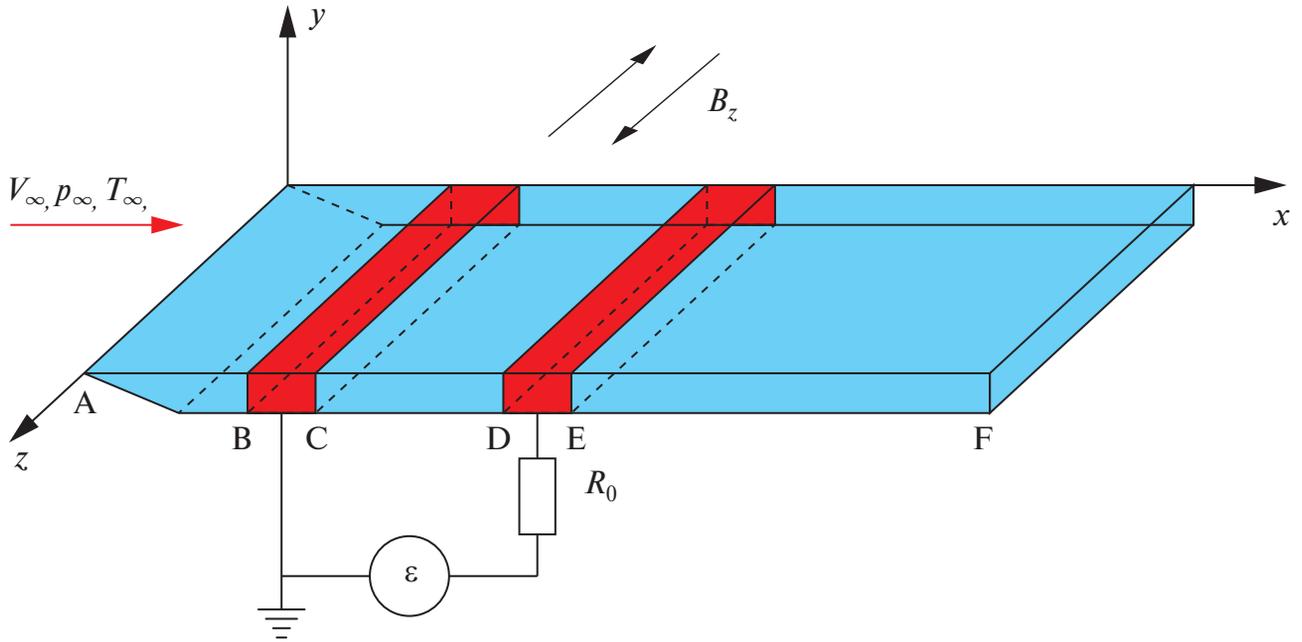


Рис. 1. Расчетная схема задачи.

постоянном давлении; T — температура; λ — коэффициент теплопроводности. Компоненты тензора вязких напряжений и диссипативная функция:

$$S_{\mu,x} = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$S_{\mu,y} = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$\Phi_{\mu} = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Система уравнений (1.1)–(1.4) интегрируется совместно с термическим и калорическим уравнениями состояния совершенного газа:

$$p = \rho \frac{R_0}{M_{\Sigma}} T = (\gamma - 1)e, \quad e = c_v T = \frac{c_p}{\gamma} T, \quad (1.5)$$

где $R_0 = 8.314 \times 10^7$ эрг/(моль · К) — универсальная газовая постоянная; $M_{\Sigma} = 29$ г/моль — молекулярный вес газа; e , c_v — внутренняя энергия совершенного газа и удельная теплоемкость при постоянном объеме; $\gamma = 1.4$.

В правой части уравнений, выражающих закон сохранения импульса в проекциях на координатные оси (1.2) и (1.3), входят компоненты магнитной силы $F_{B,x}$, $F_{B,y}$: $\mathbf{F}_B = [\mathbf{j}\mathbf{B}]$, а в правой части уравнения сохранения энергии (1.4) — слагаемое Q_J , отвечающее джоулевому тепловыделению в газе $Q_J = (\mathbf{j}\mathbf{E})$, где \mathbf{j} , \mathbf{B} , \mathbf{E} — векторы плотности тока, индукции и напряженности электрического поля. Именно эти слагаемые математически связывают газодинамические процессы с электродинамическими процессами, протекающими в электрическом разряде.

Несмотря на то, что горящий в газовом потоке тлеющий разряд является сильно неравновесным физическим объектом, влиянием всех неравновесных физико-химических процессов на газовую динамику пренебрегаем.

Система уравнений двухжидкостной и двухтемпературной диффузионно-дрейфовой модели формулируется относительно концентраций электронов и ионов, усредненные скорости движения которых в тлеющем разряде определяются их конвективным переносом нейтральным газовым потоком со скоро-

стью \mathbf{V} , дрейфовым движением в электрическом поле и диффузией. В основе диффузионно-дрейфовой модели лежат уравнения многожидкостной частично ионизованной смеси газов, получаемой из уравнения Больцмана с использованием моментной процедуры [10]

$$\begin{aligned} n_e m_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + n_e m_e (\mathbf{u}_e \nabla) \mathbf{u}_e &= -\nabla p_e - \boldsymbol{\tau}_e + n_e \mathbf{F}_e - en_e (\mathbf{E} + [\mathbf{u}_e \mathbf{B}]) - \\ &\quad - m_e \nu_{en} n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n) - m_e \nu_{ei} n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \\ n_i m_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + n_i m_i (\mathbf{u}_i \nabla) \mathbf{u}_i &= -\nabla p_i - \boldsymbol{\tau}_i + n_i \mathbf{F}_i + en_i (\mathbf{E} + [\mathbf{u}_i \mathbf{B}]) - \\ &\quad - m_e \nu_{en} n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n) - m_e \nu_{ei} n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \end{aligned}$$

где n_e, n_i — объемная концентрация электронов и ионов; m_e, m_i — масса электрона и иона; $\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_n = \mathbf{V}$ — средние скорости электронной и ионной жидкостей, а также нейтрального газа; p_e, p_i — давление электронной и ионной жидкостей; $\boldsymbol{\tau}_e, \boldsymbol{\tau}_i$ — компоненты тензора вязких напряжений электронной и ионной жидкостей; $\mathbf{F}_e, \mathbf{F}_i$ — объемные силы, действующие на частицы электронной и ионной жидкостей; ν_{en}, ν_{ei} — частоты столкновений электронов с нейтральными частицами и с ионами; ν_{in}, ν_{ie} — частоты столкновений ионов с нейтральными частицами и с электронами.

Используя ряд упрощающих соотношений физического характера $m_e \ll m_i, u_i \ll u_e$, а также рассматривая частный двухмерный случай развития газодинамических и электродинамических процессов в переменных x - y , с вектором индукции внешнего магнитного поля, направленного только вдоль оси z

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B_z,$$

в [7] получена система уравнений так называемой диффузионно-дрейфовой модели

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-n_e \mu_{e,B} E_{e,x} - D_{e,B} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-n_e \mu_{e,B} E_{e,y} - D_{e,B} \frac{\partial n_e}{\partial y} \right) = \dot{\omega}_i = \alpha \Gamma_e - \beta n_e n_i, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{n,x} + b_i u_{n,y}}{1 + b_i^2} + n_i \mu_{i,B} E_{i,x} - D_{i,B} \frac{\partial n_i}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_{n,y} - b_i u_{n,x}}{1 + b_i^2} + n_i \mu_{i,B} E_{i,y} - D_{i,B} \frac{\partial n_i}{\partial y} \right) = \dot{\omega}_i = \alpha \Gamma_e - \beta n_e n_i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} D_{e,B} &= \frac{D_e}{1 + b_e^2}, \quad D_{i,B} = \frac{D_i}{1 + b_i^2}, \quad \mu_{e,B} = \frac{\mu_e}{1 + b_e^2}, \quad \mu_{i,B} = \frac{\mu_i}{1 + b_i^2}, \\ E_{e,x} &= E_x - b_e E_y, \quad E_{e,y} = E_y + b_e E_x, \quad E_{i,x} = E_x + b_i E_y, \quad E_{i,y} = E_y - b_i E_x, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\Gamma_e = \mathbf{e}_x \Gamma_{e,x} + \mathbf{e}_y \Gamma_{e,y}, \quad \Gamma_{e,x} = n_e u_{e,x}, \quad \Gamma_{e,y} = n_e u_{e,y},$$

$$u_{e,x} = -\mu_{e,B} E_{e,x} - \frac{D_{e,B}}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}, \quad u_{e,y} = -\mu_{e,B} E_{e,y} - \frac{D_{e,B}}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial y}.$$

Формулировка уравнений для электронных и ионных концентраций в виде (1.6) и (1.7) позволяет ввести в рассмотрение модифицированные для учета магнитного поля коэффициенты подвижностей и диффузии.

Также обращается внимание на то, что, в отличие от средних скоростей электронов, для ионов необходимо учитывать скорость нейтрального газа, так как они соизмеримы:

$$\begin{aligned} u_{i,x} &= \frac{u_{n,x} + b_i u_{n,y}}{1 + b_i^2} + \mu_{i,B} E_{i,x} - \frac{D_{i,B}}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}, \\ u_{i,y} &= \frac{u_{n,y} - b_i u_{n,x}}{1 + b_i^2} + \mu_{i,B} E_{i,y} - \frac{D_{i,B}}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial y}. \end{aligned}$$

Замыкающим и принципиально важным для системы уравнений (1.6) и (1.7) является уравнение Пуассона, формулируемое относительно электрического потенциала φ и позволяющего рассчитать напряженность электрического поля $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (1.9)$$

В систему уравнений (1.6), (1.7) входят коэффициенты, определяющие связь искомых функций $n_e, n_i, \mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i, \varphi$ с элементарными процессами, протекающими в газоразрядной плазме:

$$\mu_e = \frac{e}{m_e v_{en}}, \quad \mu_i = \frac{e}{m_i v_{in}}, \quad D_e = \frac{kT_e}{m_e v_{en}} = \mu_e T_e, \quad D_i = \frac{kT_i}{m_i v_{in}} = \mu_i T_i,$$

$$b_e = \frac{\mu_e B_z}{c} = \frac{\omega_e}{v_e}, \quad b_i = \frac{\mu_i B_z}{c} = \frac{\omega_i}{v_{in}}, \quad \omega_e = \frac{eB}{m_e c}, \quad \omega_i = \frac{eB}{m_i c},$$

где e — заряд электрона; c — скорость света; m_e, m_i — масса электронов и ионов; v_{en}, v_{in} — частоты столкновений электронов и ионов с нейтральными частицами; b_e, b_i — параметры Холла электронов и ионов; ω_e, ω_i — ларморовские частоты электронов и ионов; температуры электронов и ионов измеряются в эВ.

В данной работе подвижность электронов рассчитывается по формуле

$$\mu_e = \frac{e}{m_e v_{e,n}} = \frac{1.76 \times 10^{15}}{v_{e,n}}, \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}},$$

где типичное значение частоты столкновений электронов с нейтральными частицами принято равным

$$v_{e,n} = \frac{1}{\tau_{e,n}} = 4.2 \times 10^9, \frac{1}{\text{с} \cdot \text{Торр}},$$

поэтому при измерении давления в торах

$$\mu_e = 4.5 \times 10^5 \frac{1}{p} = 4.5 \times 10^5, \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Подвижность ионов рассчитывается по формуле

$$\mu_i \approx 1.45 \times 10^3 \frac{1}{p}, \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Температура электронов принята постоянной $T_e = 1 \text{ эВ} = 11610 \text{ К}$, а температура ионов — равной температуре газа: $T_i = T$.

В качестве коэффициента ионизации выбран так называемый 1-й ионизационный коэффициент Таунсенда, определяющий число пар заряженных частиц, рождаемых электроном в ускоряющем приведенном поле E/p на единице длины траектории своего движения. Это эмпирический коэффициент, рекомендуемый в работах [11, 12] для ряда газов. В частности, для азота

$$\alpha(E) = pA \exp\left[-\frac{B}{(E/p)}\right] \frac{1}{\text{см} \cdot \text{Торр}},$$

где $A = 12 \frac{1}{\text{см} \cdot \text{Торр}}$, $B = 342 \frac{\text{В}}{\text{см} \cdot \text{Торр}}$, $E = |\mathbf{E}|$.

Данные коэффициенты рекомендуются для диапазона изменения приведенного поля $E/p < 600 \text{ В}/(\text{см} \cdot \text{Торр})$.

По определению 1-го ионизационного коэффициента Таунсенда произведение αl дает скорость ионизации в элементарном физическом объеме. Первый ионизационный коэффициент Таунсенда оставляется при учете магнитного поля без изменения, как характеристика ионизационных процессов при заданной плотности потока электронов и локального значения приведенного электрического поля E/p . А модифи-

кации подвергается как раз плотность потока электронов $\Gamma_e \sim \mu_{e,B} \mathbf{E}_{eff}$, где компоненты эффективного электрического поля определяются формулами (1.8).

Очевидно, что при $b_e < 1$, т. е. в случае слабых магнитных полей, степень модификации объемной скорости ионизации оказывается не слишком заметной. Но при $b_e \gg 1$ получается заметное снижение скорости ионизации, что качественно верно отражает тенденцию снижения эффективности ионизационных процессов при учете магнитного поля. Однако, как будет показано далее, на процессы ионизации в решаемой задаче оказывают большое влияние и другие факторы.

Граничные условия для газодинамической части задачи

$$x = x_A: u = u_\infty, v = 0, T = T_\infty, p = p_\infty, \rho = \rho_\infty$$

и условия второго рода для изменения функций вдоль потоковой координаты x на выходе из расчетной области, где газовый поток считается сверхзвуковым (полагается, что тонкая дозвуковая область в пограничном слое у поверхности не приводит к нарушению устойчивости решения)

$$x = x_G: \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

На поверхности обтекаемого тела задаются условия прилипания и температура:

$$y = 0: u = v = 0, T = T_w, \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Граничные условия для задачи о тлеющем разряде:

$$x = x_A, x = x_F: \left(\frac{\partial n_e}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial n_i}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0,$$

$$y = 0, x < x_B, x_C < x < x_D, x > x_E: n_e = n_i = n_w, \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0,$$

$$y = 0, x_B < x < x_C: \left(\frac{\partial n_i}{\partial y} \right) = 0, n_e = \chi n_i \mu_i \frac{\partial \phi}{\partial y}, \phi = 0 \text{ (поверхность катода),}$$

$$y = 0, x_D < x < x_E: \left(\frac{\partial n_e}{\partial y} \right) = 0, n_i = 0, \phi_{1,j} = V \text{ (поверхность анода),}$$

$$y = L_y, \left(\frac{\partial n_e}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial n_i}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0.$$

Здесь χ — коэффициент вторичной электронной эмиссии; $n_w = 10^2 \text{ см}^{-3}$; $x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F$ — координаты соответствующих точек на рис. 1; L_y — высота расчетной области.

Как уже отмечалось, диффузионно-дрейфовая модель позволяет приближенно описать области пространственного заряда между электродами и рассчитать суммарный ток, протекающий через токовый столб разряда, что, в свою очередь, позволяет учесть внешнюю электрическую цепь. При учете внешней электрической цепи задается дополнительное уравнение

$$\varepsilon = V + IR_0,$$

где ε — ЭДС источника питания; V — падение напряжения на электродах; I — разрядный ток; R_0 — внешнее балластное сопротивление. Полный ток через разряд рассчитывается по формуле

$$I = \int_{x_B}^{x_C} (\mathbf{j}\mathbf{n})_k dx = \int_{x_D}^{x_E} (\mathbf{j}\mathbf{n})_a dx,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности катода (к) и анода (а); \mathbf{j} — плотность тока, $\mathbf{j} = e(\Gamma_i - \Gamma_e)$.

Выделение тепла в частично ионизованном газе за счет протекания тока рассчитывается по формуле

$$Q_j = \eta(\mathbf{j}\mathbf{E}),$$

где $\eta \sim 0.1 \div 0.9$ — эффективность преобразования энергии электрического поля в нагрев газа. Представленные в данной работе результаты получены при $\eta = 0.5$.

При численном интегрировании системы сопряженных уравнений для пограничного слоя и тлеющего разряда необходимо тщательно подготавливать конечно-разностную сетку, обеспечивая сгущение узлов вблизи поверхности и в окрестности электродов. Местоположение электродов показано на всех рисунках с полями функций прямоугольниками.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Выполнены две серии расчетов, исходные данные которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Исходные данные расчетов

№ серии	V_∞ , см/с	M_∞	T_0 , К	H_0 , эрг/г
$p_\infty = 0.6 \text{ торр} = 783 \text{ эрг/см}^3$, $\rho_\infty = 0.636 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$, $T_\infty = 41.5 \text{ К}$, $T_w = 295 \text{ К}$				
1	$0.676 \cdot 10^5$	5.2	262	$270 \cdot 10^7$
$p_\infty = 5.0 \text{ торр} = 6580 \text{ эрг/см}^3$, $\rho_\infty = 0.915 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$, $T_\infty = 250 \text{ К}$, $T_w = 295 \text{ К}$				
2	$3.400 \cdot 10^5$	10	5250	$6030 \cdot 10^7$

Первая серия расчетов полностью соответствовала условиям проведения экспериментов [4, 5]. Главной задачей этой серии было убедиться в том, что получаемые расчетные данные не противоречат тем, которые получены в экспериментах.

Расчеты проводили для двух вариантов задания напряжения на электродах. Как уже отмечалось, при численном интегрировании системы уравнений диффузионно-дрейфовой модели можно использовать уравнение для внешней электрической цепи, задавая ЭДС ε и омическое сопротивление R_0 . В этом случае напряжение на газоразрядном промежутке V получается с учетом падений напряжения на омическом сопротивлении, на катодном и анодном слоях объемного заряда, а также на положительном столбе.

Однако в работах [4, 5] приводятся опытные значения падения напряжения между электродами V и полного тока I . Поэтому для более корректного сравнения опытных и расчетных данных при численном решении задачи задавалась сразу величина V , и, как результат, получался ток через разряд, который и сопоставлялся с опытом. Таким образом стало возможным использование диффузионно-дрейфовой модели в двух режимах, что и было выполнено в данной работе. Тем не менее отметим, что расчет с заданным V является более трудоемким и менее предсказуемым, чем расчет с заданным ЭДС, когда напряжение на промежутке “подстраивается” в итерационном процессе.

Несколько расчетных вариантов было реализовано при задании $\varepsilon = 1500 \text{ В}$ и несколько вариантов при заданном напряжении между электродами.

Вторая серия расчетов проводилась при увеличенном примерно на порядок давлении набегающего потока. Здесь была задана скорость потока $M = 10$ и температура набегающего потока $T_\infty = 250 \text{ К}$.

В табл. 1 кроме исходных данных для справки приведены температура и энтальпия торможения. Для каждой из указанных серий проводились расчеты без магнитного поля и при двух противоположных поляризациях магнитного поля.

Наиболее подробно получаемые при численном моделировании результаты решения задачи рассмотрим на примере первой расчетной серии, отвечающей исходным данным экспериментов [4, 5].

Общая картина обтекания заостренной пластины сверхзвуковым потоком при $M = 5$ показана на рис. 2, где показаны распределения давления (а), нормальной к поверхности компоненты скорости потока (б) и температуры (в). Для дальнейшего анализа поверхностного тлеющего разряда важными являются повышение давления вблизи электродов (их положение далее будет показано прямоугольниками на поле рисунков) и локализация температурного пограничного слоя у поверхности. Нормальная к поверхности компонента скорости является хорошим индикатором возможных возмущений в пограничном слое, в том числе за счет тлеющего разряда. В данном случае отсутствуют какие-либо видимые возмущения.

Электродинамическая структура тлеющего разряда показана на рис. 3–5. Распределение концентраций электронов (рис. 3) и ионов (рис. 4) показано без магнитного поля (а) и для двух поляризаций магнитного поля $B_z = +0.01 \text{ Тл}$ (б) и $B_z = -0.01 \text{ Тл}$ (в). Здесь и далее концентрации заряженных частиц отнесены к $n_0 = 10^9 \text{ см}^{-3}$.

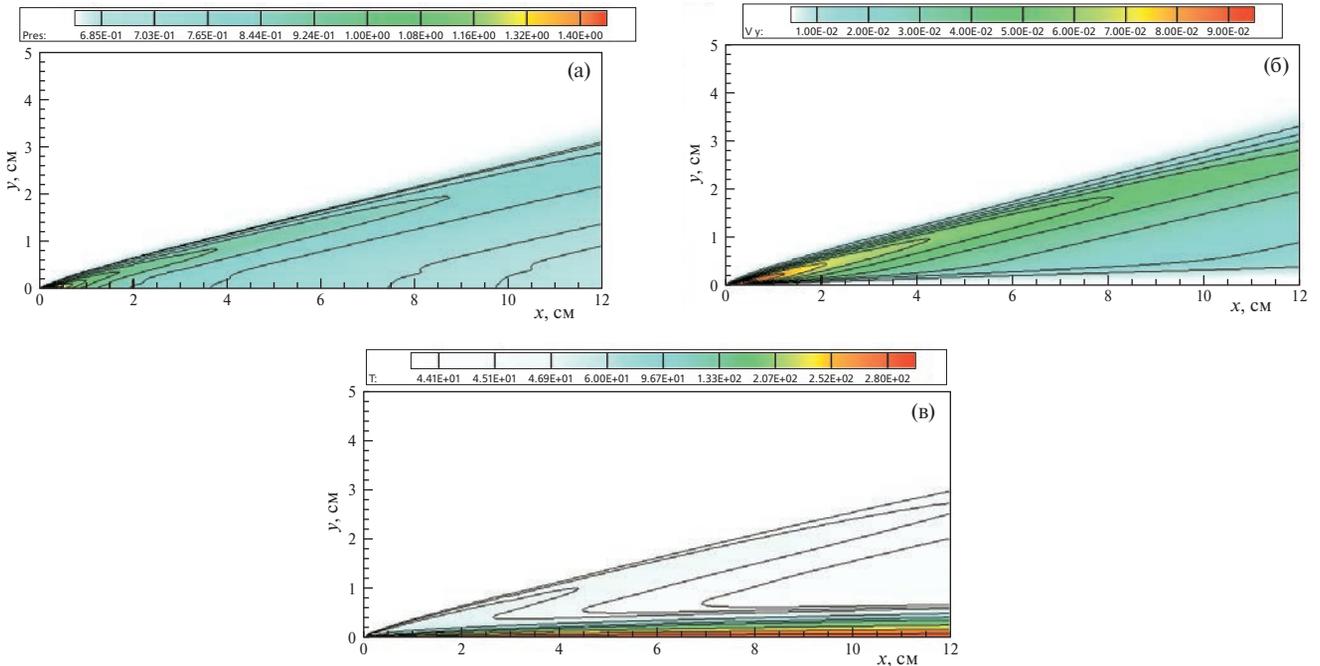


Рис. 2. Давление в пограничном, торр (а), нормальная к поверхности компонента скорости $V_y = v/V_\infty$ (б) и температура, К в пограничном слое (в) при $p = 0.6$ Торр, $M = 5$, $\varepsilon = 1500$ В.

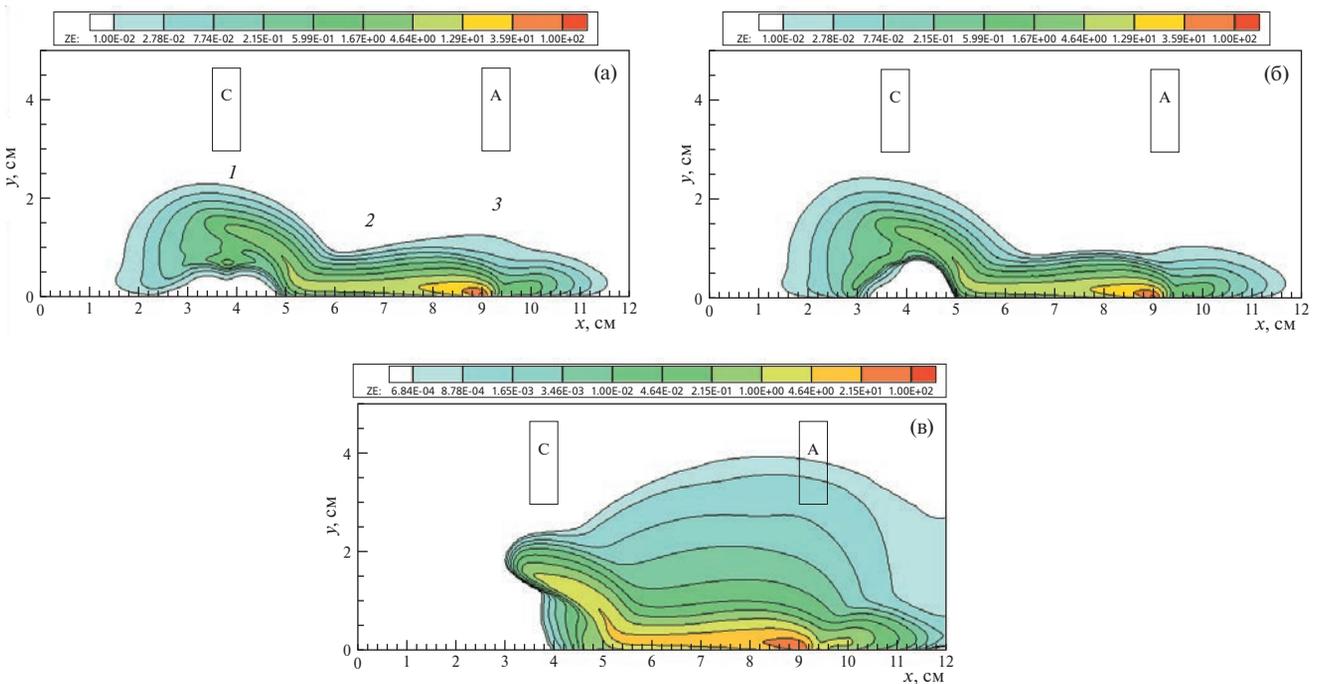


Рис. 3. Концентрация электронов $Z_E = n_e/n_0$ при $p = 0.6$ Торр, $M = 5$, $\varepsilon = 1500$ В:
(а) $B_z = 0$, (б) $B_z = +0.01$ Тл, (в) $B_z = -0.01$ Тл.

Прежде всего отметим характерную структуру тлеющего разряда, где отчетливо выделяется область объемного положительного заряда в прикатодной области (на рис. 3 и 4 помечены цифрой 1), область положительного столба квазинейтральной электроразрядной плазмы 2 и область объемного отрицательного заряда вблизи анода 3.

Указанные области тлеющего разряда во многом подобны тем, которые наблюдаются в нормальном тлеющем разряде [6, 7], но в данном случае имеются принципиальные различия. Это иные граничные

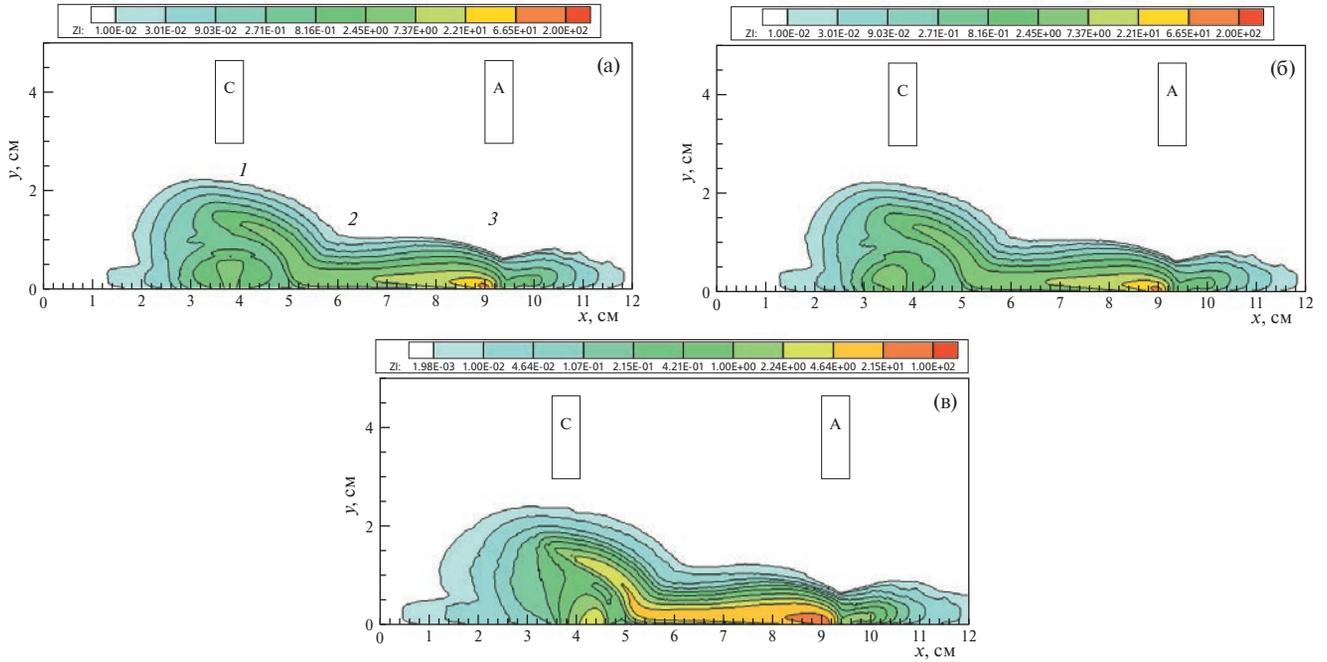


Рис. 4. Концентрация ионов $ZI = n_i/n_0$ при $p = 0.6$ Торр, $M = 5$, $\varepsilon = 1500$ В:
 (а) $B_z = 0$, (б) $B_z = +0.01$ Тл, (в) $B_z = -0.01$ Тл.

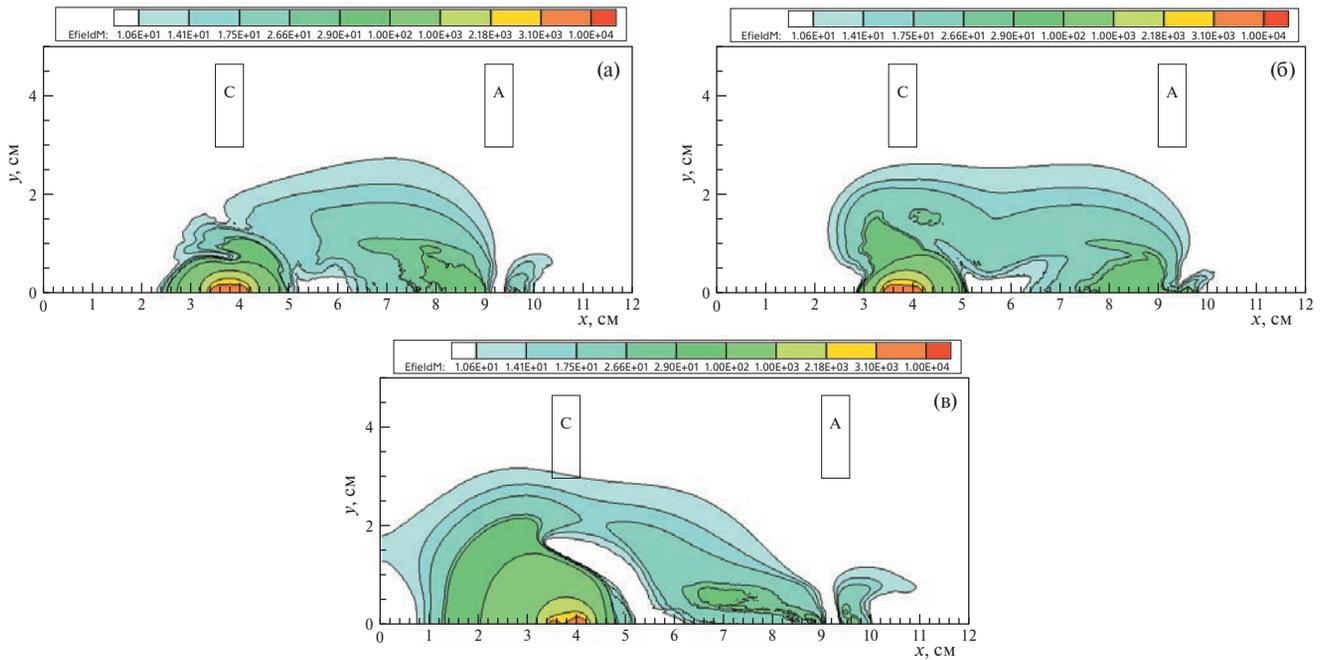


Рис. 5. Модуль напряженности электрического поля ($E_{field} M = |E|$) при $p = 0.6$ Торр, $M = 5$, $\varepsilon = 1500$ В; (а) $B_z = 0$, (б) $B_z = +0.01$ Тл, (в) $B_z = -0.01$ Тл.

условия (твердой поверхности) между электродами и значительные скачки напряженности электрического поля вблизи границ электродов.

Указанные особенности иллюстрируются распределением модуля напряженности электрического поля $E = |E|$ на рис. 5. Резкое возрастание E наблюдается особенно вблизи катода. Вблизи анода также видны локальные максимумы напряженности, но они на порядок ниже.

На рис. 6 показаны векторные поля напряженности электрического поля у катода (а, в) и анода (б, г) при двух поляризациях магнитного поля.

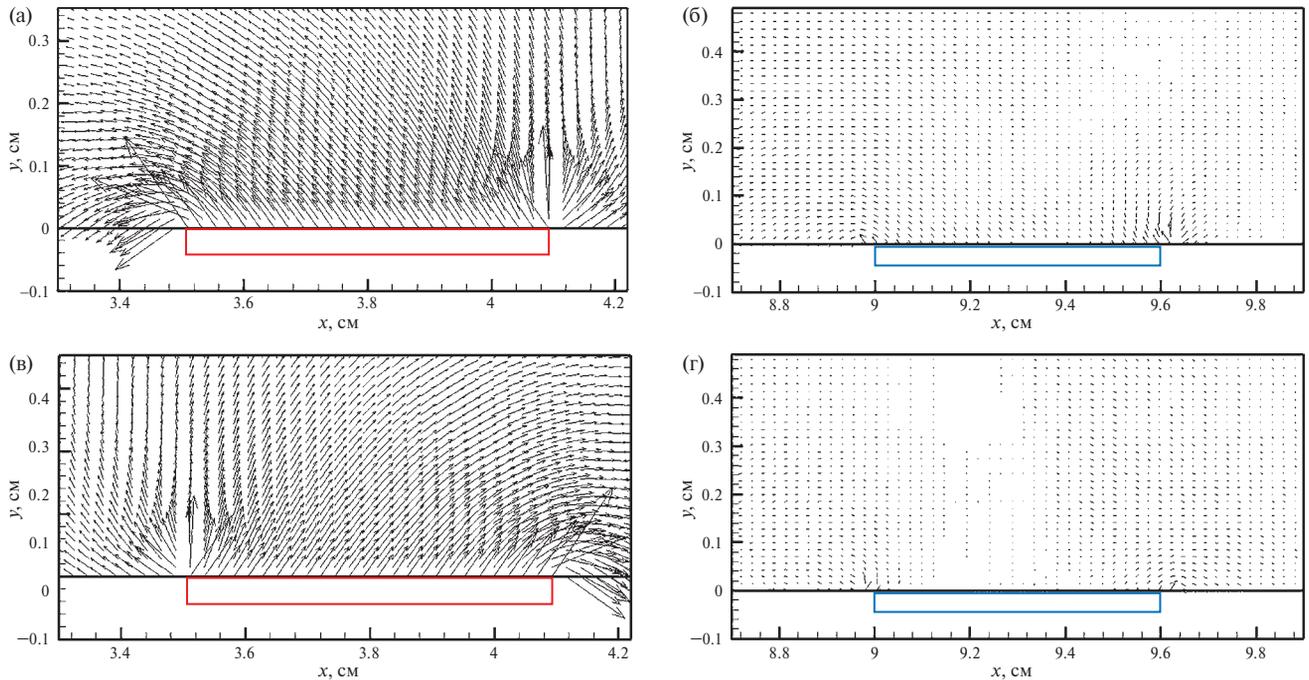


Рис. 6. Вектор напряженности электрического поля вблизи катода (а, в) и анода (б, г) при $p = 0.6$ Торр, $\varepsilon = 1500$ В, $M = 5$: (а) $B_z = +0.01$ Тл, (б) $B_z = -0.01$ Тл, (в) $B_z = +0.01$ Тл, (г) $B_z = -0.01$ Тл.

Приведенные векторные поля еще раз иллюстрируют резкое возрастание напряженности электрического поля вблизи границ катода, а также существенно меньшую напряженность вблизи анода. На этих же рисунках отметим характерные изменения структуры векторных полей напряженности при противоположной поляризации магнитного поля. В данном случае индукция магнитного поля не слишком высока, $B_z = \pm 0.01$ Тл, однако при весьма низком давлении ($p = 0.6$ Торр) холловские параметры электронов и ионов равны соответственно $b_e = 0.7$ и $b_i = 0.0024$. Поэтому компоненты эффективного электрического поля, определенные соотношениями (1.8) различаются весьма заметно. И неудивительно различие в конфигурации распределений электронов и ионов, а также модуля напряженности электрического поля, показанные на рис. 3–5. При этом видно, особенно на распределениях электронных концентраций, что отрицательная поляризация магнитного поля смещает газоразрядную плазму к аноду.

Изменения в электродинамической структуре аномального тлеющего разряда во многом обусловлены сильной зависимостью скорости объемных ионизационных процессов, распределение которых с магнитным полем и без него показаны на рис. 7.

Сначала отметим очевидный факт локализации максимальных значений объемной скорости ионизации вблизи границ электродов, где наблюдается наибольшая напряженность электрического поля.

Другим важным фактом является то, что при $B_z = +0.01$ Тл наблюдается некоторое увеличение объемной скорости ионизации, а при $B_z = -0.01$ Тл — заметное уменьшение. Исходя из расчетной модели (уравнения (1.6) и (1.7)) и сделанных допущений относительно учета эффективности столкновительной ионизации (введение в модель 1-го ионизационного коэффициента Таунсенда) магнитное поле должно уменьшать подвижность электронов и, тем самым, снижать объемную скорость ионизации.

Однако не менее важным оказывается изменение структуры напряженности электрического поля, что также приводит к сильному перераспределению дрейфовых потоков электронов. Поэтому зависимость объемной скорости ионизации не только от индукции магнитного поля, но и от его поляризации, оказывается неоднозначной, тем более что особая роль границ электродов здесь также проявляется. Это подтверждается распределением мощности джоулева тепловыделения Q_J в пограничном слое, показанном на рис. 8. Видно, что наибольшая мощность формируется у анода.

Вблизи границы анода, где электронные концентрации достигают наибольших значений, наблюдаются наибольшие значения объемной магнитной силы. При $B_z > 0$ y -компонента магнитной силы достигает величины $\sim 10^3$ дин/см³, а при $B_z < 0$ $F_{m,y} \sim -200$ дин/см³.

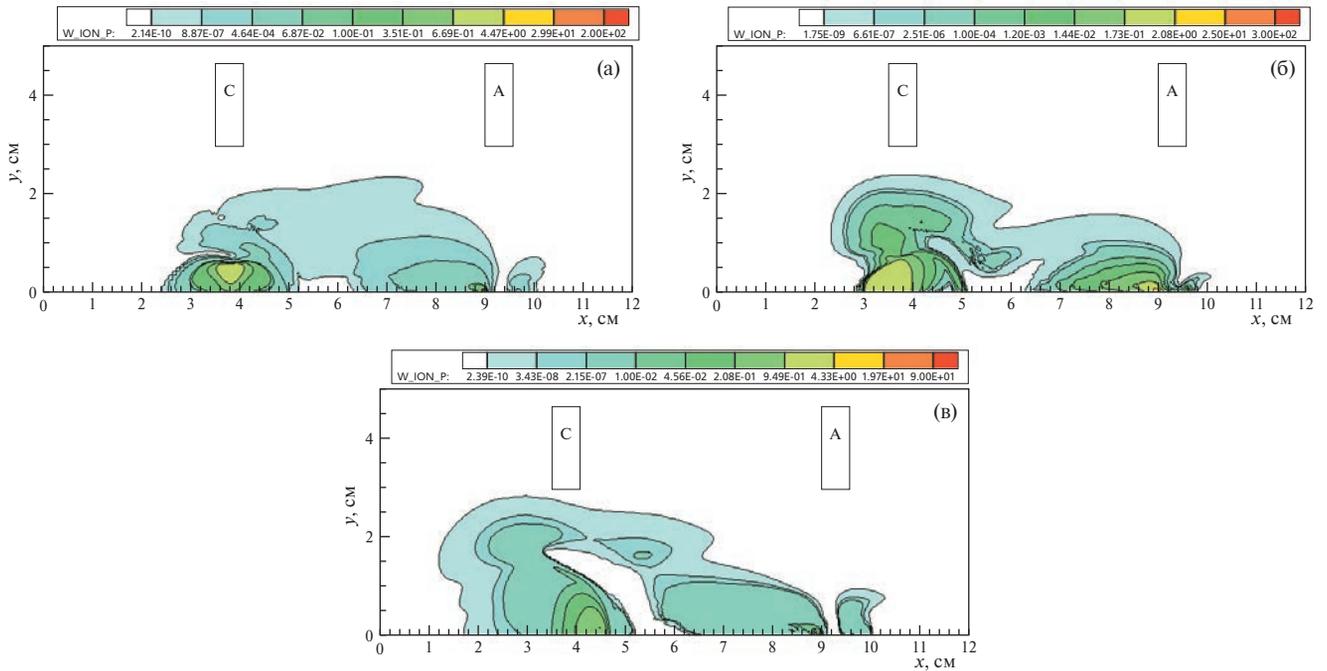


Рис. 7. Объемная скорость ионизации $W_{ion_P} = \dot{\omega}_i$ при $p = 0.6$ Торр, $M = 5$, $\varepsilon = 1500$ В: (а) $B_z = 0$, (б) $B_z = +0.01$ Тл, (в) $B_z = -0.01$ Тл.

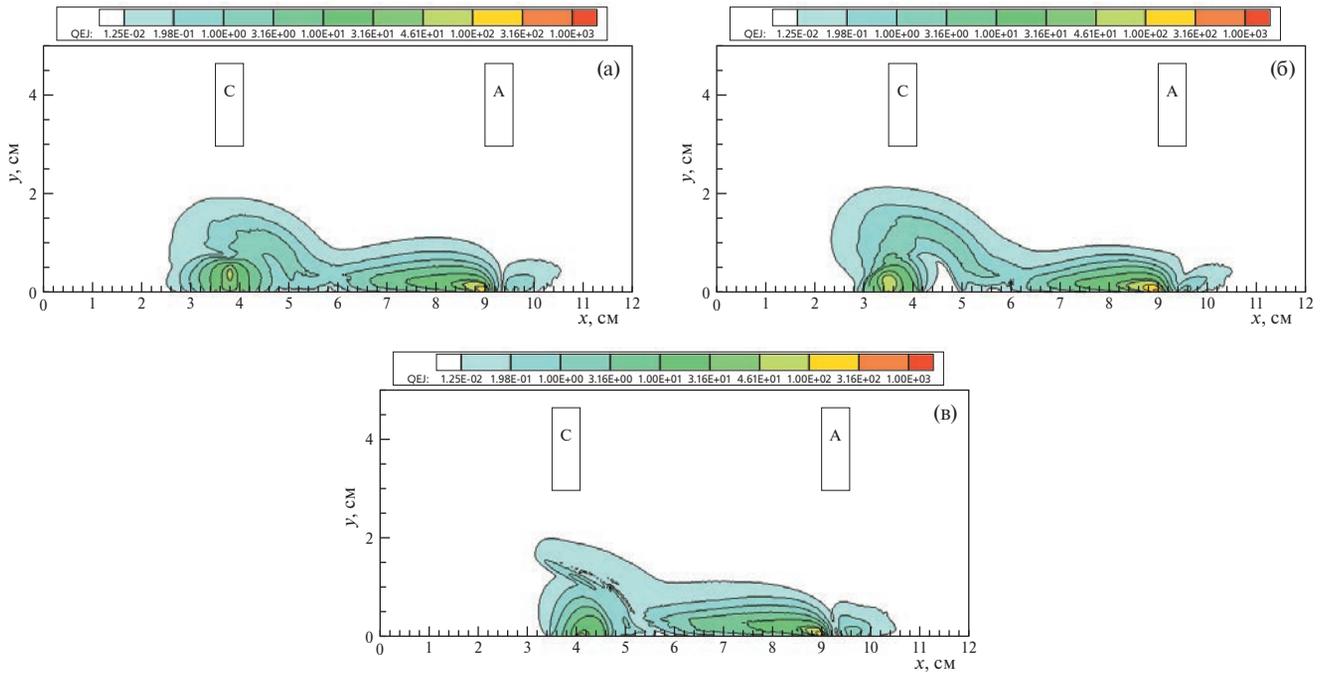


Рис. 8. Объемная мощность джоулева тепловыделения ($QEJ = Q_J$) при $p = 0.6$ Торр, $M = 5$, $\varepsilon = 1500$ В: (а) $B_z = 0$, (б) $B_z = +0.01$ Тл, (в) $B_z = -0.01$ Тл.

На рис. 9 видны проявления действия магнитной силы и джоулева тепловыделения на структуру течения в пограничном слое: наблюдается относительное разрежение давления у катода (рис. 9а), изменение нормальной скорости потока (рис. 9б) и локальный нагрев газа (рис. 9в).

Возмущения газодинамической структуры пограничного слоя при $B_z = +0.01$ Тл оказываются более заметными, чем при $B_z = -0.01$ Тл. На рис. 10а показаны распределения вдоль поверхности пластины коэффициентов давления и поверхностного трения

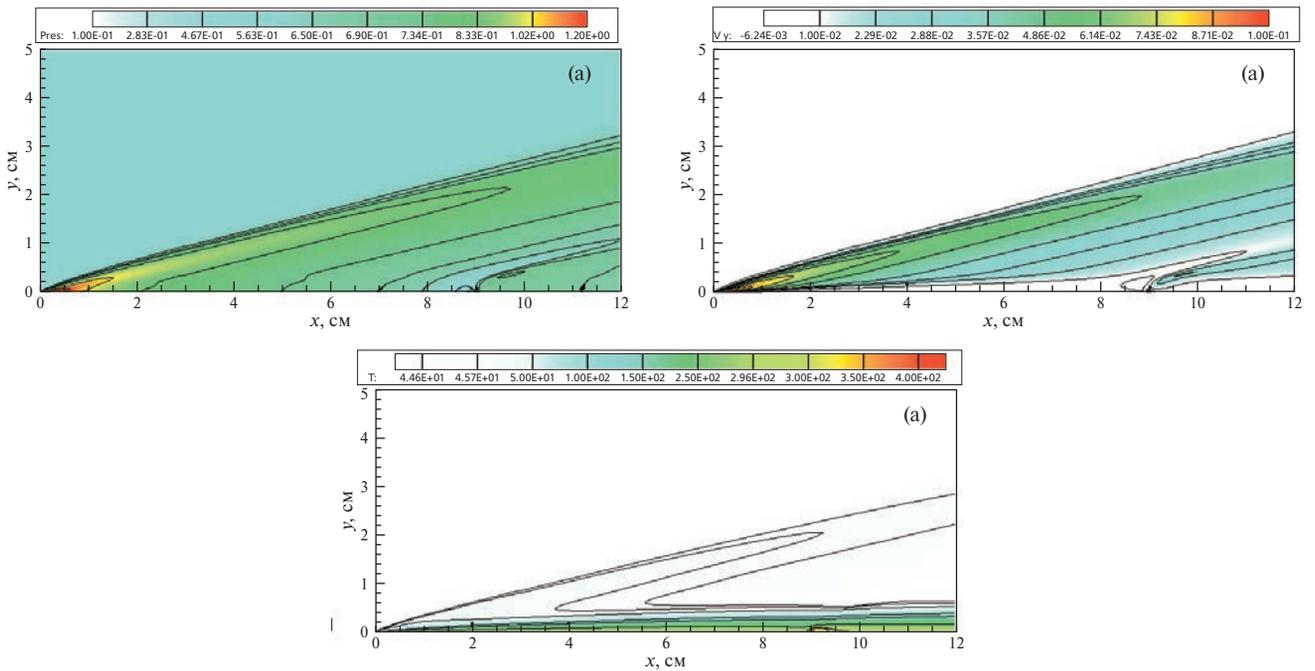


Рис. 9. Давление в пограничном, Торр (а), нормальная к поверхности компонента скорости $V_y = v/V_\infty$ (б) и температура, К, в пограничном слое (в) при $p = 0.6$ Торр, $M = 5$, $\varepsilon = 1500$ В, $B_z = +0.01$ Тл.

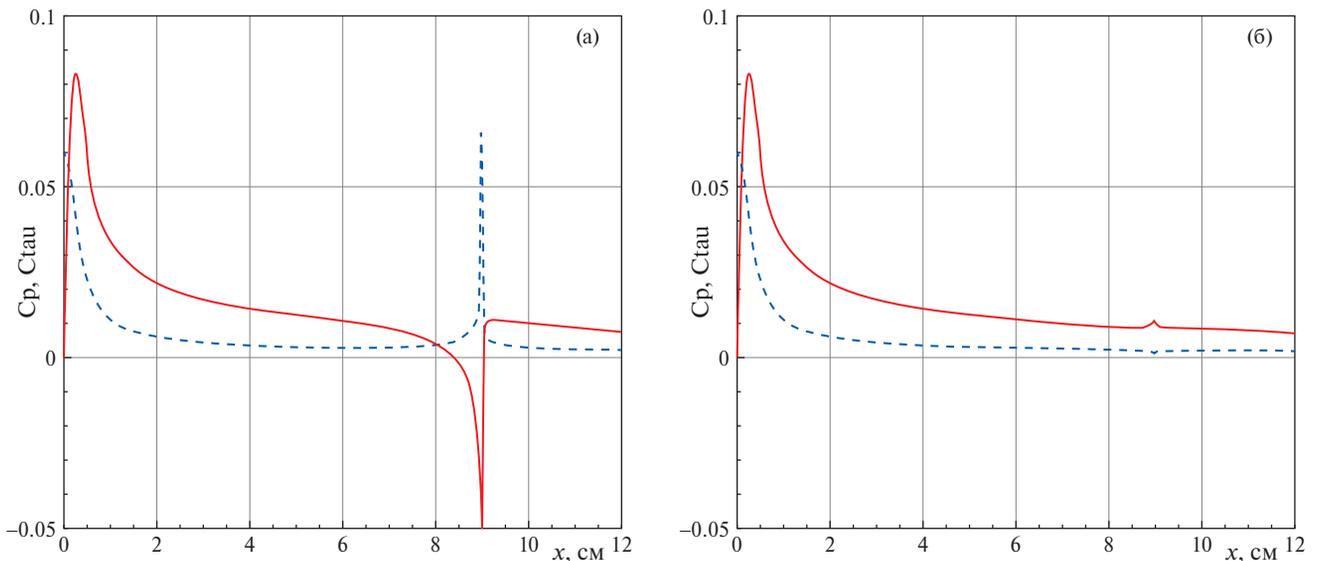


Рис. 10. Распределение коэффициентов давления (сплошная кривая) и трения при $p = 0.6$ Торр, $M = 5$, $\varepsilon = 1500$ В; (а) $B_z = +0.01$ Тл, (б) $B_z = -0.01$ Тл.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5\rho_\infty V_\infty^2}, \quad C_f = \frac{\tau_w}{0.5\rho_\infty V_\infty^2},$$

где $\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w$ – напряжение поверхностного трения.

Видно, что для расчетного варианта с $B_z = +0.01$ Тл (рис. 10а) изменение коэффициентов C_p и C_f оказывается очень сильным. Для противоположной поляризации магнитного поля указанные возмущения заметно ниже (рис. 10б).

Таким образом, суммируя отмеченные особенности полученного численного решения задачи о сверхзвуковом обтекании острой пластины с поверхностным аномальным тлеющим разрядом, можно констатировать качественное согласие с опытными данными [4, 5].

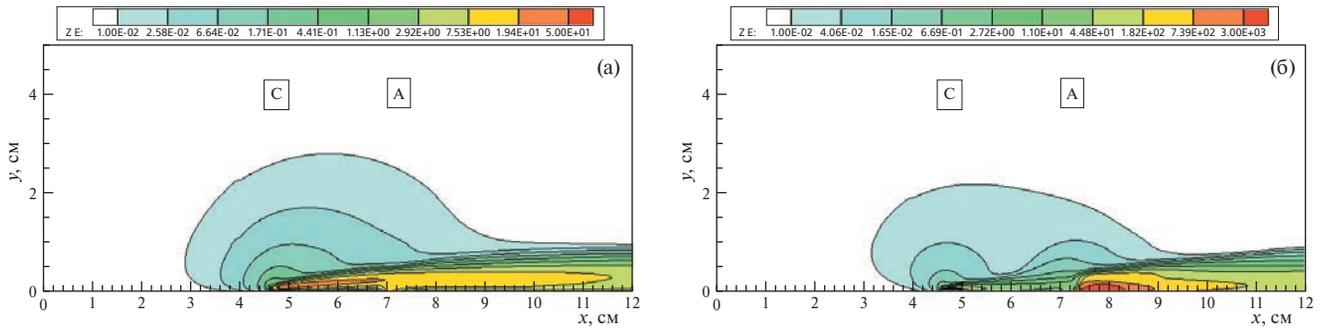


Рис. 11. Концентрация электронов ($ZE = n_e/n_0$) в аномальном тлеющем разряде при $p = 5$ Торр, $M = 10$, $\varepsilon = 1000$ В: $B_z = +0.03$ (а), $B_z = -0.03$ Тл (б).

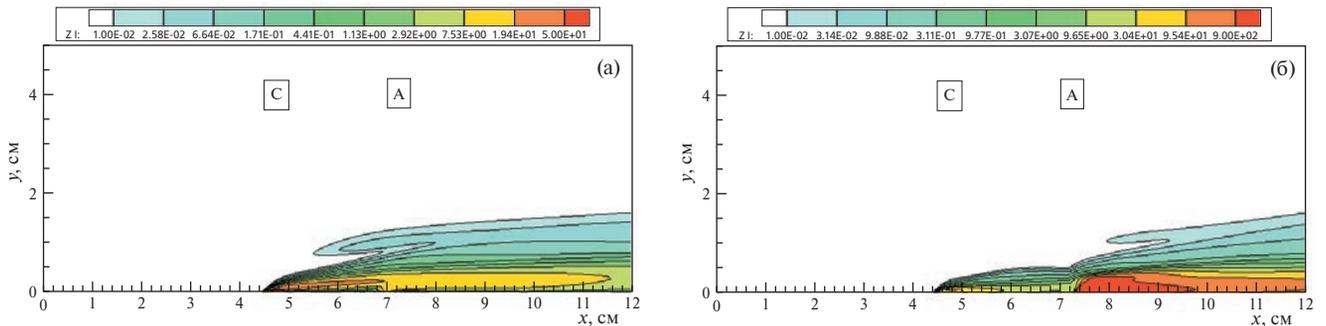


Рис. 12. Концентрация ионов ($ZI = n_i/n_0$) в аномальном тлеющем разряде при $p = 5$ Торр, $M = 10$, $\varepsilon = 1000$ В: $B_z = +0.03$ (а), $B_z = -0.03$ Тл (б).

В данной первой серии расчетов были получены следующие значения полного тока и напряжения на газоразрядном промежутке:

$$\begin{aligned} B_z = 0, I &= 13.2 \text{ мА}, V = 1\,340 \text{ В}, \\ B_z = +0.01, I &= 8.6 \text{ мА}, V = 1\,396 \text{ В}, \\ B_z = -0.01, I &= 6.3 \text{ мА}, V = 1\,423 \text{ В}. \end{aligned}$$

Расчеты при заданном напряжении на газоразрядном промежутке $V = 430$ В показали следующее:

$$\begin{aligned} B_z = 0, I &= 84.0 \text{ мА}, \\ B_z = +0.005, I &= 82 \text{ мА}, \\ B_z = -0.01, I &= 108 \text{ мА}. \end{aligned}$$

Поэтому можно отметить также неплохое количественное согласие с экспериментальными данными [4, 5], где отмечалось типичное напряжение между электродами $V \sim 1\,200$ В при токе $I = 50$ мА.

Вторая расчетная серия носила прогностический характер и была выполнена при увеличенном примерно на порядок давлении в набегающем потоке и скорости $M = 10$. На рис. 11 и 12 показаны распределения концентраций электронов и ионов в электроразрядном промежутке при задании $\varepsilon = 1000$ В и $R_0 = 12$ кОм для двух значений индукции магнитного поля. В этом расчетном варианте была несколько изменена конфигурация электродов. Катод и анод имели ширину вдоль потока 0.5 см и протяженность поперек потока 1 см.

Распределения электронов и ионов находятся в соответствии с исходными представлениями о сносе ионов высокоскоростным газовым потоком и об относительной независимости от газового потока поведения электронов, которое в основном определяется дрейфовыми и диффузионными процессами в самоогласованном электрическом поле. Примечательно также смещение области наибольших концентраций заряженных частиц к аноду при $B_z = -0.03$ Тл. На это также обращали внимание в экспериментах [4, 5].

Поляризация магнитного поля в рассматриваемом расчетном случае также оказывает заметное влияние на распределение модуля напряженности электрического поля (рис. 13). Тем не менее видно, что, как и прежде, наибольшая напряженность поля формируется вблизи границ электродов.

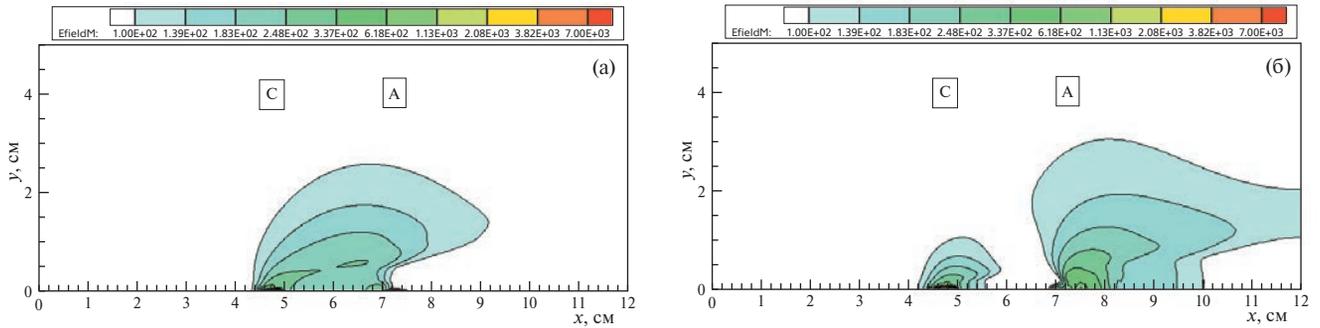


Рис. 13. Модуль напряженности электрического поля ($E_{\text{field}} M = |\mathbf{E}|$) в аномальном тлеющем разряде при $p = 5$ Торр, $M = 10$, $\varepsilon = 1000$ В: $B_z = +0.03$ (а), $B_z = -0.03$ Тл (б).

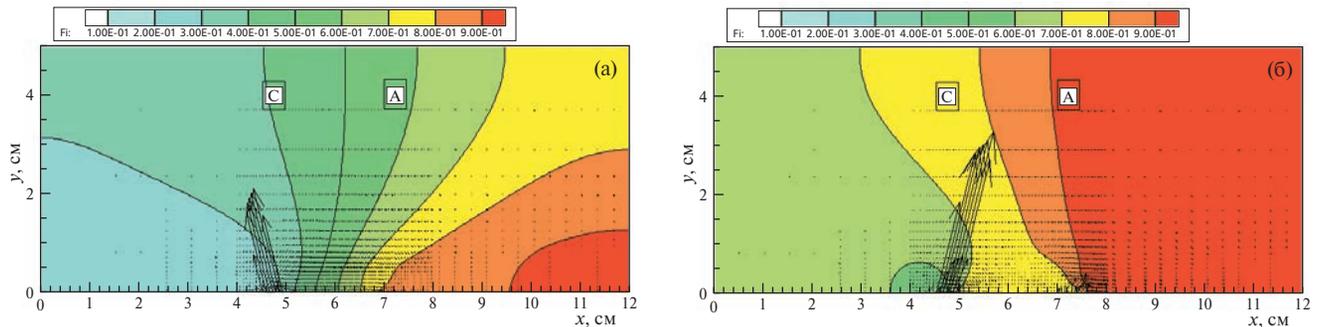


Рис. 14. Электрический потенциал ($FI = \varphi/\varepsilon$) в аномальном тлеющем разряде и векторное поле напряженности электрического поля при $p = 5$ Торр, $M = 10$, $\varepsilon = 1000$ В: $B_z = +0.03$ (а), $B_z = -0.03$ Тл (б).

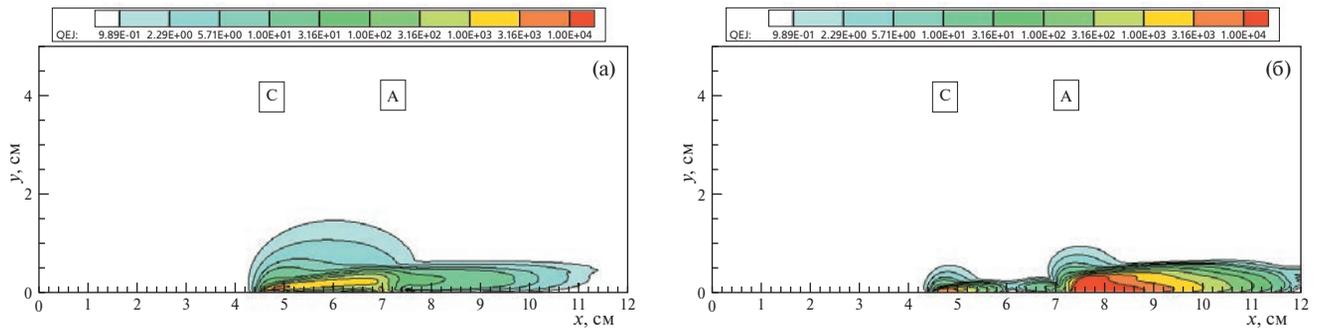


Рис. 15. Мощность джоулева тепловыделения ($QEL = Q_j$) в аномальном тлеющем разряде при $p = 5$ Торр, $M = 10$, $\varepsilon = 1000$ В: $B_z = +0.03$ (а), $B_z = -0.03$ Тл (б).

На рис. 14 показано распределение электрического потенциала и векторное поле напряженности. Масштаб длины векторов определяется максимальным значением модуля электрического поля на рис. 13. Обращает на себя внимание заметное увеличение напряженности электрического поля вблизи катода при $B_z = -0.03$ Тл, а также заметное его возрастание вблизи анода.

Смещение максимума концентраций электронов и ионов к аноду, а также возрастание здесь напряженности электрического поля приводит к сильному возрастанию у анода джоулева тепловыделения (рис. 15). Следствием этого является локальное возмущение давления вблизи анода (рис. 16а) и значительное возрастание температуры (рис. 16б).

Примечательно, что вблизи анода формируется как заметное возрастание давления, так и весьма сильное разрежение. Итогом такого распределения давления является значительное изменение коэффициентов давления и трения вблизи анода (рис. 17).

Во второй серии расчетов при задании ЭДС источника питания $\varepsilon = 1000$ В были получены следующие интегральные параметры разряда:

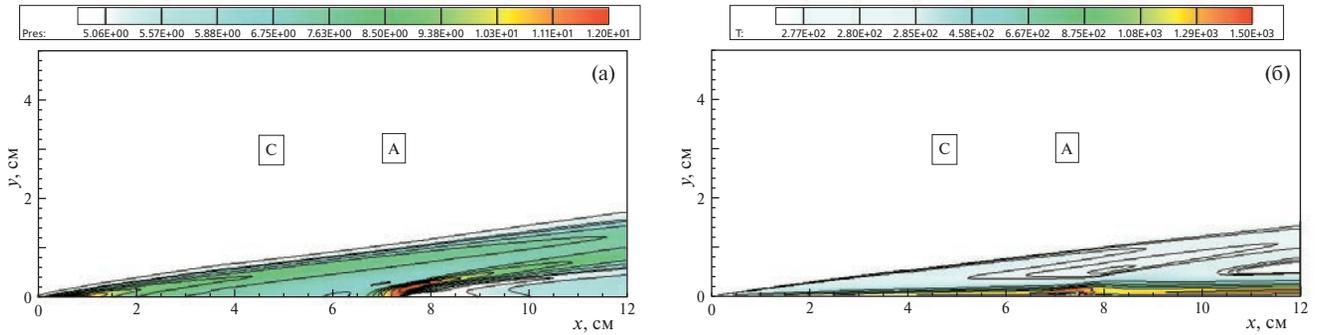


Рис. 16. Давление в пограничном в торр (а) и температура, К, в пограничном слое (б) при $p = 5$ Торр, $M = 10$, $\varepsilon = 1000$ В, $B_z = -0.03$ Тл.

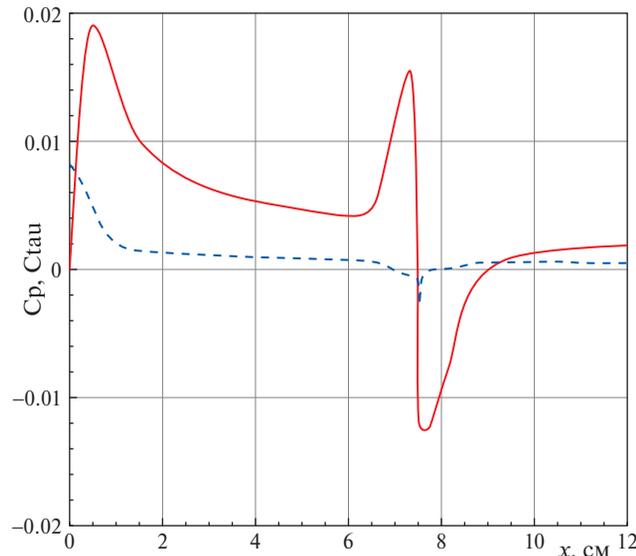


Рис. 17. Распределение коэффициентов давления (сплошная кривая) и трения при $p = 5$ Торр, $M = 10$, $\varepsilon = 1000$ В, $B_z = -0.03$ Тл.

$$\begin{aligned}
 B_z &= 0, I = 15 \text{ мА}, V = 815 \text{ В}, \\
 B_z &= +0.03, I = 13 \text{ мА}, V = 838 \text{ В}, \\
 B_z &= -0.03, I = 23 \text{ мА}, V = 725 \text{ В}.
 \end{aligned}$$

Сравнивая результаты математического моделирования аномального тлеющего разряда на поверхности острой пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком, полученные в данной работе с использованием диффузионно-дрейфовой модели, и в работе [3] с использованием амбиполярной модели, можно констатировать близость интегральных параметров разрядов в схожих условиях.

Следует иметь в виду основное различие указанных моделей, состоящее в том, что в амбиполярной модели отсутствует описание приэлектродных слоев, в которых, как показано в данной работе, протекают электродинамические процессы с обострением напряженности электрического поля и всех сопутствующих функций.

Наибольшее различие результатов указанных двух моделей состоит в том, что в амбиполярной модели допускается задание индукции магнитного поля примерно на порядок большей, чем в диффузионно-дрейфовой модели, где в силу большей локализации напряженности электрического поля вблизи границ электродов численная неустойчивость проявляется гораздо раньше. Вероятно, ранее обсуждавшийся искусственный математический прием по сглаживанию напряженности электрического поля на границах электродов [13], являющийся аналогом скругления границ электродов в эксперименте, может оказаться полезным при решении прикладных задач.

Таким образом, можно констатировать успешное расширение опыта использования диффузионно-дрейфовых моделей в задачах аэрофизики, изложенного в предшествующих работах [7, 9, 14].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение диффузионно-дрейфовой модели к расчету аномального тлеющего разряда на поверхности острой пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа в диапазоне давлений 0.6–5 Торр показал на возможность использования этой модели для получения параметров разряда подобных тем, которые измеряются в физическом эксперименте. Достоинством разработанной модели является адекватное описание электродинамической структуры аномального приповерхностного тлеющего разряда, включая прикатодный и прианодный слои объемного заряда и квазинейтрального положительного столба.

Выполнена модификация диффузионно-дрейфовой модели в части учета внешнего магнитного поля и высокоскоростного потока нейтрального газа.

Реализация сопряженной электрогазодинамической модели, в которой используются полные уравнения Навье–Стокса, позволяет с достаточной для практических нужд достоверностью описать изменения в газодинамической структуре пограничных слоев, связанные с наличием тлеющего разряда.

В результате численного моделирования аномального тлеющего разряда в пограничном слое при давлении набегающего потока 0.6–5 Торр и напряжения на электродах, расположенных поперек газовому потоку порядка 1 кВ, получены распределения концентраций электронов и ионов, напряженности электрического поля, скоростей ионизационных процессов, объемной мощности джоулевого тепловыделения, полей газодинамических функций. Показано, что использование внешнего магнитного поля с индукцией $B_z \sim 0.01$ Тл позволяет модифицировать распределение давления вдоль обтекаемой поверхности.

Разработанная расчетно-теоретическая модель валидирована сравнением с экспериментальными данными аэрофизического эксперимента.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00062).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суржиков С.Т., Шэнг Дж.С. Вязкое взаимодействие на плоской пластине с поверхностным разрядом в магнитном поле // Теплофизика высоких температур. 2005. Т. 43. № 1. С. 21–31.
2. Суржиков С.Т. Гиперзвуковое обтекание острой пластины и двойного клина с электромагнитным актюатором // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 6. С. 106–120.
3. Суржиков С.Т. Сверхзвуковое обтекание заостренной пластины с поверхностным аномальным тлеющим разрядом в магнитном поле // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 6. С. 144–167.
4. Kimmel R.L., Hayes J.R., Menart J.A., Shang J. Effect of surface plasma discharge on boundary layers at Mach 5 // AIAA Paper 2004-509. 2004. 10 p.
5. Menart J., Shang J.S., Kimmel R., Hayes J. Effects of Magnetic Fields on Plasmas Generated in a Mach 5 Wind Tunnel // AIAA Paper 2003-4165. 2003. 13 p.
6. Райзер Ю.П., Суржиков С.Т. Двумерная структура нормального тлеющего разряда и роль диффузии в формировании катодного и анодного пятен // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 25. № 3. С. 428–435.
7. Суржиков С.Т. Физическая механика газовых разрядов. М.: МГТУ, 2006. 640 с. (Surzhikov S.T. Theoretical and Computational Physics of Gas Discharge Phenomena. A Mathematical Introduction. De Gruyter: Berlin, 2020, 537 p.)
8. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 325 с.
9. Shang J.S., Surzhikov S.T., Kimmel R., Gaitonde D., Menart J., Hayes J. Mechanisms of plasma actuators for hypersonic flow control // Progress in Aerospace Sciences. 2005. V. 41. P. 642.
10. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984. 392 с.
11. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 591 с.
12. Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. М.: Гос. изд-во лит-ры в обл. атом. науки и техники, 1961. 323 с. (Brown S.C. Basic Data of Plasma Physics. Technology Press of M.I.T. and Wiley, 1966)

13. Суржиков С.Т. Сравнительный анализ параметров нормального и аномального тлеющих разрядов постоянного тока // Физика плазмы. 2022. Т. 48. № 11. С. 1102–1114.
14. Битюрин В.А., Бочаров А.Н., Попов Н.А. Численное моделирование электрического разряда в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 4. С. 160–172.

DIFFUSION-DRIFT MODEL OF THE SURFACE GLOW DISCHARGE IN SUPERSONIC GAS FLOW

© 2024 S. T. Surzhikov^{a, *}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

* *e-mail: surg@ipmnet.ru*

The two-dimensional electrogasdynamic problem of anomalous glow discharge on the surface of a sharp plate in supersonic flow of a perfect gas is solved using the system of Navier-Stokes equations to describe thermogasdynamic processes in the boundary layer and the two-temperature two-fluid diffusion-drift model of gas-discharge plasma to determine the electrodynamic structure of the discharge. The near-electrode regions of space charge and the external electrical circuit consisting of a power source and an ohmic resistance are taken into account. The influence of the magnetic field which is transverse to gas flow and has the induction of up to 0.03 T on the structure of boundary layer and glow discharge is studied. The electrogasdynamic structure of anomalous near-surface discharges is studied numerically over a wide range of gas flow velocities ($M = 5-20$), the free-stream pressures ($p = 0.6-5$ Torr), the electrode voltages, and the electric currents through the discharges. The electrodynamic structure of the gas-plasma flow near the electrodes and the effect of the glow discharge on the pressure and temperature distributions along the surface of the plate are also studied.

Keywords: supersonic flow past a sharp plate, anomalous glow discharge, glow discharge in the magnetic field