ISSN 1024-7084

Номер 3

Май–Июнь 2025

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

НАУКА

1727

# СОДЕРЖАНИЕ

**Номер 3, 2025**

# CONTENTS

**No. 3, 2025**

УДК 519.634; 533.6.011.8

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ КАНАЛОВ

© 2025 г. И. В. Воронич[a,b,*], В. А. Титарев[a,b,**], А. В. Кудряшов[b,***]

[a] Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия
[b] Московский физико-технический институт, Физтех, Долгопрудный, Московская область, Россия

[*] e-mail: voronich.iv@mipt.ru
[**] e-mail: vladimir.titarev@frccsc.ru
[***] e-mail: kudriashov.av@mipt.ru

Поступила в редакцию 30.12.2024 г.
После доработки 10.03.2025 г.
Принята к публикации 21.03.2025 г.

В работе представлен анализ течения разреженного газа через плоскую периодическую систему прямоугольных каналов (мембрану) в широком диапазоне чисел Кнудсена. Задача исследована на основе численного решения кинетического уравнения с $S$-модельным интегралом столкновений Е.М. Шахова и уравнений Навье–Стокса сжимаемой среды. Основное внимание уделено расчету массового расхода в зависимости от проницаемости, относительной длины канала и параметра разрежения.

*Ключевые слова:* мембрана, канал, кинетическое уравнение, $S$-модель, разреженный газ, вычислительная аэродинамика

**DOI:** 10.31857/S1024708425030018

Области применения современных мембранных технологий включают фильтрацию (очистку) жидкостей, разделение газовых смесей, системы обнаружения компонент и другие. Современные технологии имеют дело с различными материалами упорядоченной и неупорядоченной структуры [1–5]. Геометрия мембраны характеризуется долей проективной площади и объема пор (геометрическая проницаемость), удлиннением пор, формой пор в поперечном сечении и в продольном направлении. Использование современных технологий позволило добиться улучшения характеристик мембраны за счет увеличения количества пор на единицу площади [1]. В некоторых приложениях в качестве высокопроницаемых мембран используются обычные проволочные сетки для создания потока с заданными свойствами [6, 7].

Настоящая работа посвящена численному анализу плоского течения разреженного газа под действием перепада давления через периодическую систему коротких каналов, моделирующую плоскую мембрану. Основная цель — изучить влияние геометрической проницаемости и длины каналов, а также степени разрежения на массовый расход и характер течения. Для диапазона режимов течения от свободномолекулярного до околоконтинуального результаты основаны на численном решении кинетического уравнения с $S$-модельным интегралом столкновений Е.М. Шахова [8]. Для режимов, соответствующих сплошной среде, решение строится на основе полных уравнений Навье–Стокса сжимаемой среды.

Следует отметить, что рассмотренная постановка задачи существенно отличается от традиционной о течении газа через одиночный канал или трубу, соединяющий входной резервуар высокого давления и выходной резервуар низкого давления [9–15]. В численных исследованиях резервуары заменяются расчетной областью конечной длины, размер которой должен быть достаточно большим, чтобы скорость газа на границах вышележащей части была небольшой. Размер резервуара ниже по течению обычно менее важен, особенно при больших перепадах давления [16]. Однако в настоящей постановке резервуары имеют конечную высоту из-за периодической структуры, и для любого размера расчетной области скорость газа на границах всегда имеет конечное значение вследствие сохранения массы протекающего газа. Это обстоятельство создает определенные трудности при задании граничных условий, которые должны гарантировать фиксированное соотношение статических давлений в резервуарах, а также приводит к тому,

что стационарное решение существует не при любых условиях. Размер расчетной области должен быть достаточно большим в направлении потока.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение одноатомного разреженного газа через щелевую мембрану, характеризующуюся геометрической проницаемостью

$$K = h/H \tag{1.1}$$

и относительной длиной пор

$$L_h = L/h. \tag{1.2}$$

Здесь $h$ — полувысота (радиус в цилиндрическом случае) поры, $H$ — полупериод структуры. Введем декартову систему координат $(x, y)$ с центром, расположенным в начале поры $x = y = 0$, и осью $Ox$, направленной вдоль поры (рис. 1). Газ течет за счет положительной разницы давлений $p_L - p_R$ между входной и выходной границами. Предполагается полная аккомодация импульса и энергии падающих молекул на поверхности поры, которая поддерживается при той же постоянной температуре, что и невозмущенный приток на бесконечности $T_w = T_L$. Вязкость выбрана в рамках модели твердых сфер $\mu \sim \sqrt{T}$.

Схематическое изображение схемы течения для типичных значений $K = 0.5$, $L_h = 2$ представлено на рис. 1. Отметим, что величина $K$ представляет собой открытую часть площади проекции и не связана напрямую с физической проницаемостью. Частный случай $K = 0$ ($H = \infty$) соответствует обычному течению в плоском канале, соединяющем два бесконечно больших резервуара.

При заданных размерах, давлении притока $p_L$ и температуре $T_L$ режим течения можно охарактеризовать так называемым параметром разрежения $\delta$, который определяется как

$$\delta = \frac{hp_L}{\mu_L \beta_L}. \tag{1.3}$$

Здесь $\beta_L = \sqrt{2RT_L}$ — наиболее вероятная тепловая скорость, $R$ — газовая константа, $\mu_L$ — значение динамической вязкости газа при температуре $T = T_L$. Для модели твердых сфер

$$\delta = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{\mathrm{Kn}},$$

где Kn — число Кнудсена.

Основной расчетной характеристикой течения является массовый расход $\dot{M}$ ($m$ — масса молекулы):

$$\dot{M}(x) = \int_{-h}^{h} mnu_x dy. \tag{1.4}$$

Целью нашей работы является изучение зависимости $\dot{M}$ от относительной длины пор $L_h$, геометрической проницаемости $K$ и параметра разрежения $\delta$ для одного выбранного значения перепада давлений $p_L/p_R = 2$.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Численный анализ течения основан на использовании как кинетического, так и континуального подходов. Ввиду специфики процедур численного решения основные уравнения записываются в полной трехмерной форме.

В кинетическом подходе стационарное состояние одноатомного разреженного газа определяется функцией распределения по скоростям $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ — пространственная координата,

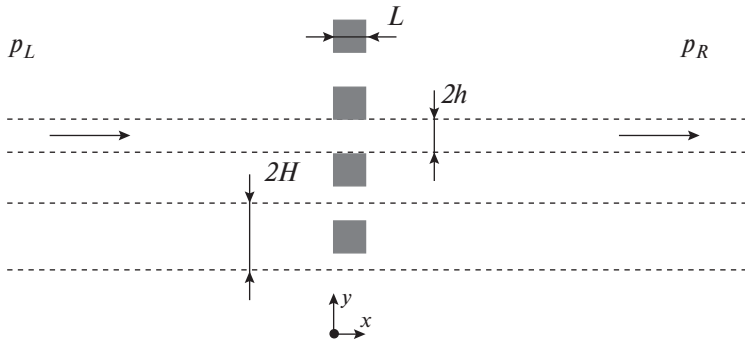



**Рис. 1.** Схематическое изображение течения для $K = 0.5$, $L_h = 2$.

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ — вектор скорости молекулы. Макроскопические величины, такие как плотность $n$, скорость $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, температура $T$ и давление $p$ определяются как интегралы от функции распределения по молекулярной скорости:

$$n = \int f d\boldsymbol{\xi}, \quad n\mathbf{u} = \int f d\boldsymbol{\xi}, \qquad \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}mnu^2 = \frac{1}{2}\int m\xi^2 f d\boldsymbol{\xi}. \tag{2.1}$$

Здесь $m$ — масса молекулы. Предполагается, что функция распределения $f$ удовлетворяет $S$-модельному кинетическому уравнению [8]:

$$\xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \nu\left(f^{(S)} - f\right), \quad \nu = \frac{p}{\mu},$$
$$f^{(S)} = f_M\left(1 + \frac{4}{5}(1 - \mathrm{Pr})S_\alpha c_\alpha\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\right), \quad f_M = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}}\exp(-c^2), \tag{2.2}$$
$$S_i = \frac{1}{n}\int c_i c^2 f d\xi, \quad c_i = \frac{v_i}{\sqrt{2RT}}, \quad c^2 = c_\alpha c_\alpha.$$

Здесь $\mathrm{Pr} = 2/3$ — число Прандтля; предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам. Кинетическая $S$-модель широко использовалась при расчетах потоков разреженного газа в каналах и трубах и показала надежные результаты, см., например, обзорные работы [9, 17].

Кинетическое уравнение (2.2) необходимо дополнить граничными условиями на поверхности поры. Предполагается условие диффузного молекулярного рассеяния с полной тепловой аккомодацией к заданной температуре поверхности $T_w$. При этом плотность отраженных молекул $n_w$ находится из условия непроницаемости.

В сплошносредном подходе течение газа описывается уравнениями Навье–Стокса сжимаемой среды, которые имеют вид законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \nabla(\mathbf{F} - \mathbf{F}^v) = 0, \qquad \mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3), \qquad \mathbf{F}^v = (\mathbf{F}_1^v, \mathbf{F}_2^v, \mathbf{F}_3^v), \tag{2.3}$$

где векторы независимых переменных $\mathbf{U}$, конвективных $\mathbf{F}$ и вязких $\mathbf{F}^v$ потоков имеют вид:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{1k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{2k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{3k} p \\ (E + p)u_k \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_k^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1k} \\ \tau_{2k} \\ \tau_{3k} \\ u_\alpha \tau_{\alpha k} - q_k \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Здесь $\delta_{ik}$ — символ Кронекера. Замыкающими соотношениями являются уравнение состояния совершенного газа, выражения для внутренней энергии, выражения для вектора теплового потока Фурье и напряжений:

$$p = \rho RT, \qquad \rho = mn, \qquad e = \frac{RT}{\gamma - 1}, \quad E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2,$$
$$\tau_{ik} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{u}\right), \qquad q_k = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_k},$$

где $\gamma$ — коэффициент удельной теплоемкости. Коэффициенты вязкости $\mu$ и теплопроводности $\lambda$ связаны между собой следующей формулой:

$$\lambda = \frac{c_p \mu}{\mathrm{Pr}}, \qquad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

Наконец, на поверхность поры накладывается граничное условие прилипания и заданной температуры $T_w$.

## 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В расчетах бесконечная периодическая структура заменяется половиной одиночной поры с использованием свойств симметрии потока. Расчеты, проведенные для пакетов каналов, показали идентичность расхода и картины течения вблизи центрального канала по сравнению со случаем строго периодической постановки. Более подробно этот вопрос исследован в нашей работе [18]. Структура расчетной области и маркировка граничных условий показаны на рис. 2. Отрезок $AH$ — граница притока (входа), $FG$ — граница оттока (выхода), $AB$, $EF$ и $HG$ — линии симметрии, сегмент $BCDE$ представляет поверхность поры. Тогда линейные размеры равны соответственно $|AH| = |FG| = H$, $|CD| = L$, $|AH| - |BC| = h$.

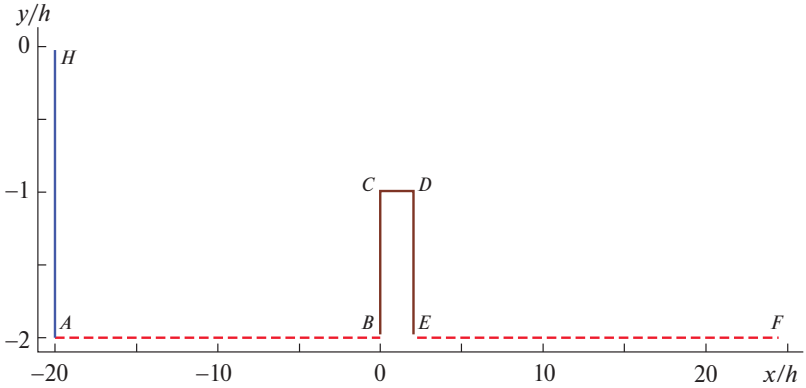



**Рис. 2.** Схематическое изображение типичной вычислительной постановки. Синяя линия ($AH$) — входная граница, зеленая линия ($FG$) — выходная граница, красные пунктирные линии ($AB$, $EF$) — линии симметрии, коричневая линия — поверхность поры.

Общая процедура расчета, применимая к обоим подходам, состоит из нескольких существенных элементов. Начальное поле течения задается постоянными значениями температуры, нулевой скорости и давления $p_L$ для $x < 0$, $p_R$ для $x > L$ с линейным распределением внутри поры. При расчете эволюции к стационарному состоянию граничные условия притока и оттока обновляются на каждом временном шаге следующим образом. Скорость и температура газа экстраполируются изнутри области потока, тогда как плотность рассчитывается с использованием заданного граничного давления и экстраполированной температуры. Решение считается сошедшимся при установлении расхода массы и падении нормы производной по времени от вектора неизвестных ниже заданного малого значения $\approx 10^{-5}$.

При получении решения кинетического уравнения в направлениях координаты $x$ расчетная область имеет следующие размеры: $|AB| = (50 \ldots 100)h$, $EF = (100 \ldots 200)h$, что достаточно для расчета течения внутри поры и в следе. Относительно длинная ниже по потоку часть области за каналом необходима для обеспечения корректного функционирования граничного условия фиксированного давления. Это также гарантирует отсутствие нефизических краевых эффектов [19]. Количество ячеек поперек поры $-h \leqslant y \leqslant 0$ равнялось 25, размер первой ячейки по нормали к поверхности поры — $\Delta y = 0.01h$. Количество ячеек вдоль поры варьировалось от 50 при $L_h = 1$ до 400 для $L_h = 10$, размер ячейки в окрестности краев канала $\Delta x = 0.02h$. Количество узлов сетки в продольном направлении при $x < 0$ и $x > L$ составляло 200...300 ячеек.

Стационарное решение кинетического уравнения строится расчетом на установление с использованием неявного метода дискретных скоростей второго порядка аппроксимации, реализованного в параллельном коде “Несветай”. Актуальное описание кода и численного метода решения стационарных задач можно найти в [18, 20]. Величина шага по времени соответствует числу Куранта, равного 100. Сходимость требует примерно 10 000 шагов для больших и умеренных значений $\delta$ и до 250 000 шагов по времени для $\delta = 100$ и $L_h = 10$. Вычисления проводились на серверах, установленных в ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН, с использованием от 64 до 512 физических ядер x86.

Для решения уравнений сплошной среды (2.4) использовался коммерческий пакет Ansys CFX [21], лицензия на который имеется в ФИЦ ИУ РАН. Решение задачи в силу специфики программного обеспечения строилось в размерных переменных. В расчетах граничные условия на внешних границах левого резервуара — источника задавались как условие входа с фиксацией полных давления $p_0$ и температуры $T_0$, соответствующих статическим значениям $p_L$ и $T_L$ при текущей скорости потока, при этом величина и направление вектора скорости потока не ограничиваются. Граничные условия на внешних границах правого резервуара-стока заданы с фиксацией среднего по площади статического давления $p_R$, также без ограничений на вектор скорости. Размеры расчетной области аналогичны описанным выше для кинетического уравнения. Расчетные сетки построены таким образом, чтобы обеспечить хорошее разрешение пограничных слоев для всего диапазона условий. Количество ячеек поперек поры $0 \leqslant y \leqslant h$ составляло 150, вдоль поры варьировалось от 100 для $L_h = 1$ до 500 для $L_h = 10$. Размер ячейки вблизи вертикальной стенки $\Delta x = 0.01h$, по нормали к стенке поры $\Delta y = 0.001h$. Количество узлов сетки в продольном направлении при $x < 0$ и $x > L$ составляло 250...300 ячеек.

В качестве численного метода используется противопоточная схема номинально 2-го порядка аппроксимации [21–23]. Дискретизация по времени производится с помощью неявной схемы 1-го порядка аппроксимации и ограничением на шаг по времени через число Куранта на уровне $\approx 100$. Критерием сходимости расчета является достижение среднеквадратичной невязкой нормированных производных по времени от полей всех переменных уровня $10^{-5}$ и ниже в совокупности с установлением расхода массы. Вычисления проводились на одном сервере ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН с использованием 32 физических ядер архитектуры x86.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве газа рассмотрим гелий с молекулярной массой $m = 6.65 \cdot 10^{-27}$ кг, значением газовой постоянной $R = 2077.1$ Дж/(кг· К). Для простоты принимаем $\gamma = 5/3$, $\mathrm{Pr} = 2/3$. Значение коэффициента динамической вязкости $\mu$ определим в соответствии с законом твердых сфер:

$$\mu = \mu_{\mathrm{ref}}\sqrt{\frac{T}{T_{\mathrm{ref}}}},$$

где принимаются следующие значения констант: $T_{\mathrm{ref}} = 273.15$ К, $\mu_{\mathrm{ref}} = 0.000018$ Па·с.

Поскольку мы изучаем массовый расход и характер течения в зависимости от параметра разрежения $\delta$, полагаем $T_L = T_{\mathrm{ref}}$, $\mu_L = \mu_{\mathrm{ref}}$ и определяем давление слева $p_L$ по формуле (1.3). Получаем следующее выражение зависимости $p_L$ от $\delta$ и полувысоты поры $h$:

$$p_L = 0.0192\frac{\delta}{h}. \tag{4.1}$$

В расчетах полагаем $h = 0.1$ мм, так что для $\delta = 1$ входное давление $p_L = 192$ Па.

Расчеты проводились для соотношения давлений $p_L/p_R = 2$, проницаемости $K = 0.0$, 0.5 и 0.7 и относительной длины пор $L_h = 1, 2, 5$ и 10. Кинетическое решение вычисляется для диапазона значений параметра разрежения $\delta = 0 \ldots 100$. Континуальное решение Навье–Стокса рассчитывается для $\delta \geqslant 10$. Максимальное значение $\delta$, до которого ведется расчет на основе уравнений сплошной среды, ограничивается условием существования дозвукового режима течения в выходном сечении, которое позволяет задать давление $p_R$ на выходной границе. Это не исключает возникновения течения с ударными волнами в окрестности канала.

При анализе результатов удобно использовать безразмерный приведенный массовый расход $Q$, определяемый как отношение расхода $\dot{M}$ к расходу при истечении в вакуум через щель в свободномолекулярном режиме $\dot{M}_\infty^{\mathrm{vac}}$:

$$Q(x) = \frac{\dot{M}(x)}{\dot{M}_\infty^{\mathrm{vac}}}, \quad \dot{M}_\infty^{\mathrm{vac}} = \frac{hp_L}{\sqrt{\pi}\beta_L}. \tag{4.2}$$

Строго говоря, значение расхода не должно зависеть от положения $x$. В практических расчетах оно может незначительно меняться, что позволяет контролировать точность расчетов. В таблицах ниже указано значение расхода, вычисленное в середине поры $x = L/2$.

Рассчитанные значения приведенных массовых расходов приведены в таб. 1–4. На рис. 3 показаны соответствующие графики для всех относительных длин $L_h$. Видно, что влияние геометрической проницаемости $K$ на массовый расход наиболее выражено для коротких пор ($L_h = 1, 2$). С ростом значения $L_h$ кривые расхода становятся весьма близкими при умеренных значениях $\delta$. Согласие с континуальным решением

**Таблица 1.** Приведенный расход $Q$ как функция параметра разреженности $\delta$ для $L_h = 1$, Н.С. — уравнения Навье–Стокса (2.4)

| $K$ | 0 | | 0.5 | | 0.7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $S$-модель | Н.С. | $S$-модель | Н.С. | $S$-модель | Н.С. |
| 0.01 | 0.418 | | 0.659 | | 0.864 | |
| 0.1 | 0.440 | | 0.667 | | 0.867 | |
| 0.3 | 0.484 | | 0.691 | | 0.889 | |
| 1 | 0.612 | | 0.778 | | 0.959 | |
| 3 | 0.879 | | 0.988 | | 1.124 | |
| 5 | 1.038 | | 1.132 | | 1.238 | |
| 10 | 1.201 | 1.028 | 1.307 | 1.101 | 1.389 | 1.159 |
| 20 | 1.309 | 1.205 | 1.421 | 1.311 | 1.492 | 1.390 |
| 30 | 1.355 | 1.279 | 1.468 | 1.394 | 1.547 | 1.485 |
| 50 | 1.407 | 1.354 | 1.516 | 1.475 | 1.605 | 1.574 |
| 100 | 1.459 | 1.425 | 1.594 | 1.551 | | |
| 200 | 1.478 | 1.467 | 1.623 | 1.600 | | |
| 300 | 1.486 | 1.475 | | 1.616 | | |
| 500 | 1.469 | 1.464 | | 1.631 | | |
| 700 | | 1.443 | | 1.631 | | |
| 1000 | | 1.418 | | | | |
| 2000 | | 1.383 | | | | |

**Таблица 2.** Приведенный расход $Q$ как функция параметра разреженности $\delta$ для $L_h = 2$

| $K$ | 0 | | 0.5 | | 0.7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $S$-модель | Н.С. | $S$-модель | Н.С. | $S$-модель | Н.С. |
| 0.01 | 0.351 | | 0.516 | | 0.646 | |
| 0.1 | 0.367 | | 0.524 | | 0.646 | |
| 0.3 | 0.401 | | 0.541 | | 0.663 | |
| 1 | 0.496 | | 0.606 | | 0.721 | |
| 3 | 0.707 | | 0.780 | | 0.873 | |
| 5 | 0.858 | | 0.920 | | 0.994 | |
| 10 | 1.050 | 0.866 | 1.130 | 0.914 | 1.187 | 0.954 |
| 20 | 1.194 | 1.088 | 1.289 | 1.171 | 1.350 | 1.230 |
| 30 | 1.263 | 1.182 | 1.358 | 1.279 | 1.422 | 1.350 |
| 50 | 1.336 | 1.280 | 1.434 | 1.386 | 1.504 | 1.469 |
| 100 | 1.416 | 1.381 | 1.498 | 1.494 | 1.610 | 1.592 |
| 200 | 1.474 | 1.446 | | 1.567 | | |
| 300 | | 1.471 | | 1.593 | | |
| 500 | | 1.485 | | 1.611 | | |
| 700 | | 1.478 | | 1.616 | | |
| 1000 | | 1.460 | | 1.616 | | |
| 2000 | | 1.418 | | | | |

**Таблица 3.** Приведенный расход $Q$ как функция параметра разреженности $\delta$ для $L_h = 5$

| $K$ | 0 | | 0.5 | | 0.7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta$ | $S$-модель | Н.С. | $S$-модель | Н.С. | $S$-модель | Н.С. |
| 0.01 | 0.245 | | 0.323 | | 0.372 | |
| 0.1 | 0.255 | | 0.324 | | 0.373 | |
| 0.3 | 0.271 | | 0.331 | | 0.379 | |
| 1 | 0.320 | | 0.365 | | 0.408 | |
| 3 | 0.440 | | 0.470 | | 0.509 | |
| 5 | 0.550 | | 0.576 | | 0.609 | |
| 10 | 0.754 | 0.579 | 0.790 | 0.597 | 0.816 | 0.613 |
| 20 | 0.957 | 0.850 | 1.025 | 0.901 | 1.057 | 0.932 |
| 30 | 1.061 | 0.983 | 1.140 | 1.052 | 1.180 | 1.095 |
| 50 | 1.173 | 1.120 | 1.260 | 1.207 | 1.299 | 1.264 |
| 100 | 1.299 | 1.270 | 1.388 | 1.367 | 1.444 | 1.441 |
| 200 | 1.392 | 1.379 | 1.490 | 1.486 | | |
| 300 | 1.428 | 1.425 | | 1.535 | | |
| 500 | | 1.464 | | 1.583 | | |
| 1000 | | 1.489 | | 1.613 | | |
| 2000 | | 1.466 | | 1.613 | | |

сильно зависит не только от значения параметра разрежения, но и от относительной длины $L_h$. При $\delta = 100$ имеется согласие континуального и кинетического решений в пределах 2% для всех значений $L_h$.

Рисунки 4–5 иллюстрируют характер поля течения для $L_h = 1$, $K = 0.5$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения. Видно, что с ростом значения $\delta$ течение становится сверхзвуковым и образуется несколько прямых скачков Маха. При этом за порой образуется большая зона рециркуляции. В случае более длинной поры $L_h = 10$ (см. рис. 6–7) интенсивность потока становится меньше. При этом распределение давления потока внутри поры становится квазиодномерным, что аналогично течению в длинном изолированном канале [12, 16]. Скачки Маха за порой становятся слабее.

На рисунках 8–10 приведены линии тока и поля числа Маха для $L_h = 1$ и $\delta = 100, 500, 1000$, полученные решением уравнений Навье–Стокса. При больших значениях $\delta$ на кривых расхода массы, приведенных на рис. 3, виден максимум, достигающийся при $\delta = 300$ для $L_h = 1$ и $\delta = 1000$ для $L_h = 5$. Данное явление было отмечено для случая истечения через щель в вакуум, но не объяснено в работе [11], и объясняется образованием отрыва внутри поверхности канала и возвратной зоны течения, см. рис. 9–11. Отрыв начина-

**Таблица 4.** Приведенный расход $Q$ как функция параметра разреженности δ для $L_h$ = 10

| $K$ | 0 | | 0.5 | | 0.7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| δ | $S$-модель | Н.С. | $S$-модель | Н.С. | $S$-модель | Н.С. |
| 0.01 | 0.165 | | 0.199 | | 0.221 | |
| 0.1 | 0.170 | | 0.199 | | 0.222 | |
| 0.3 | 0.178 | | 0.202 | | 0.222 | |
| 1 | 0.200 | | 0.218 | | 0.235 | |
| 3 | 0.268 | | 0.279 | | 0.295 | |
| 5 | 0.336 | | 0.346 | | 0.360 | |
| 10 | 0.493 | 0.361 | 0.505 | 0.367 | 0.518 | 0.373 |
| 20 | 0.780 | 0.615 | 0.744 | 0.638 | 0.759 | 0.651 |
| 30 | 0.841 | 0.768 | 0.894 | 0.811 | 0.916 | 0.833 |
| 50 | 0.992 | 0.942 | 1.062 | 1.008 | 1.096 | 1.046 |
| 100 | 1.159 | 1.135 | 1.243 | 1.220 | 1.290 | 1.276 |
| 200 | 1.297 | 1.283 | 1.380 | 1.379 | | 1.451 |
| 300 | 1.357 | 1.350 | | 1.453 | | |
| 500 | | 1.414 | | 1.523 | | |
| 700 | | 1.446 | | 1.560 | | |
| 1000 | | 1.470 | | 1.585 | | |
| 2000 | | 1.489 | | 1.610 | | |
| 3000 | | 1.492 | | 1.610 | | |

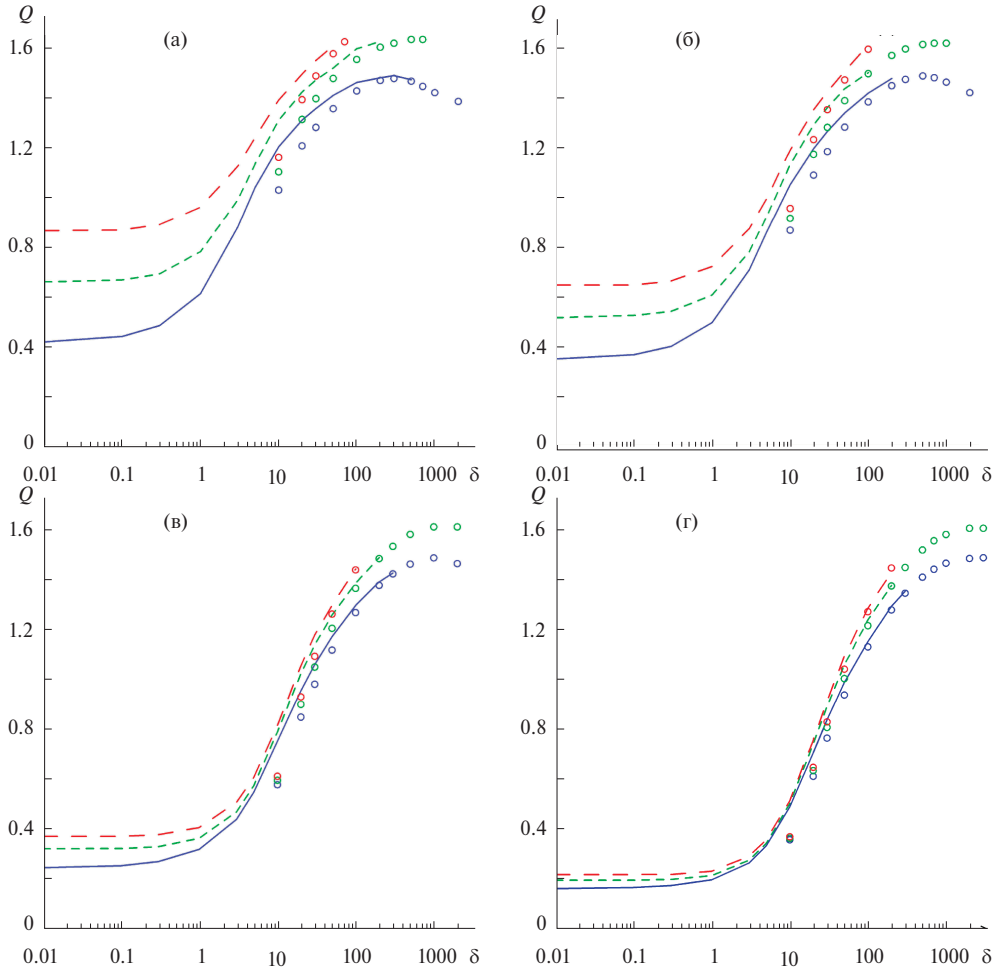



**Рис. 3.** Приведенный расход массы $Q$ для различных значений относительной длины. Красный, зеленый и синий цвета соответствуют значениям проницаемости $K$ = 0, 0.5 и 0.7, соответственно. Сплошные линии — кинетическое решение, символы — решение Навье–Стокса; $L_h$ = 1 (а), 2 (б), 5 (в), 10 (г).

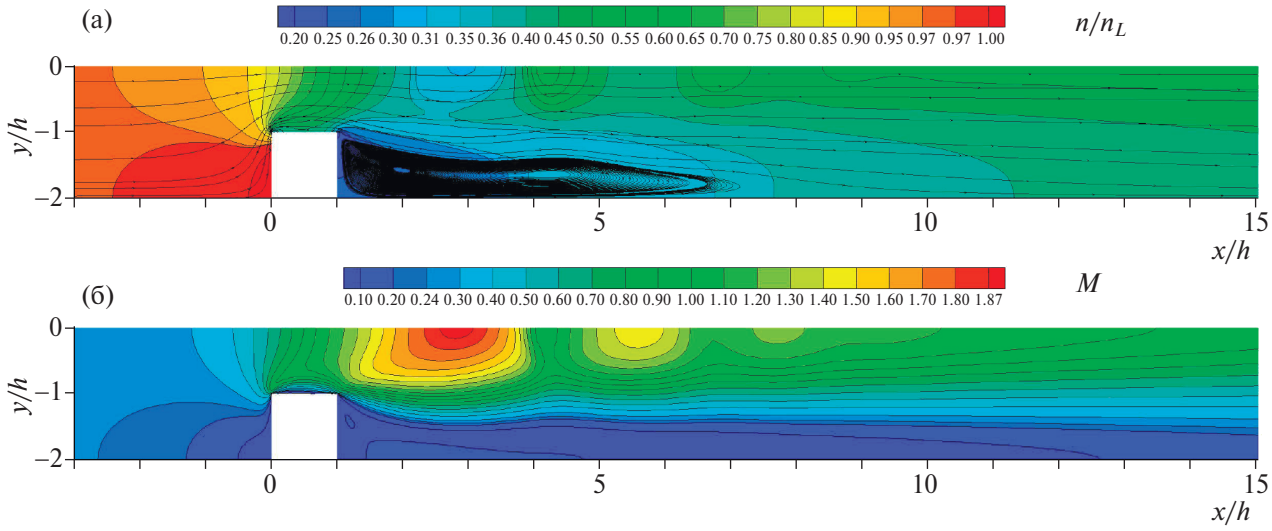



**Рис. 4.** Линии уровня безразмерной плотности и линии тока (а), числа Маха (б) для $K = 0.5$, $L_h = 1$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения.

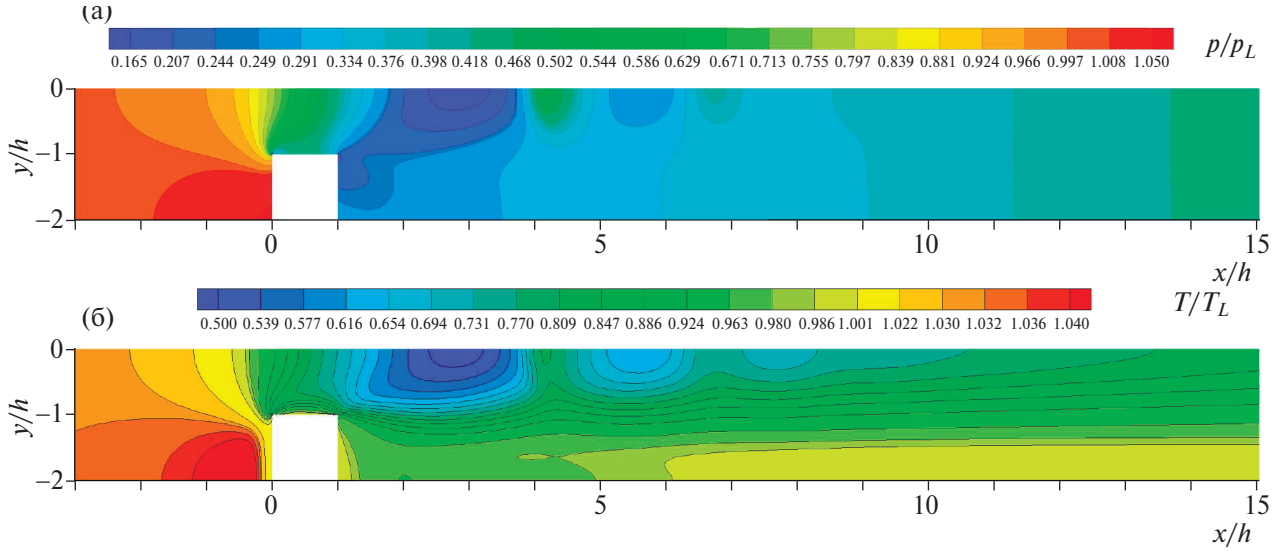



**Рис. 5.** Безразмерные изобары (а) и изотермы (б) для $K = 0.5$, $L_h = 1$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения.

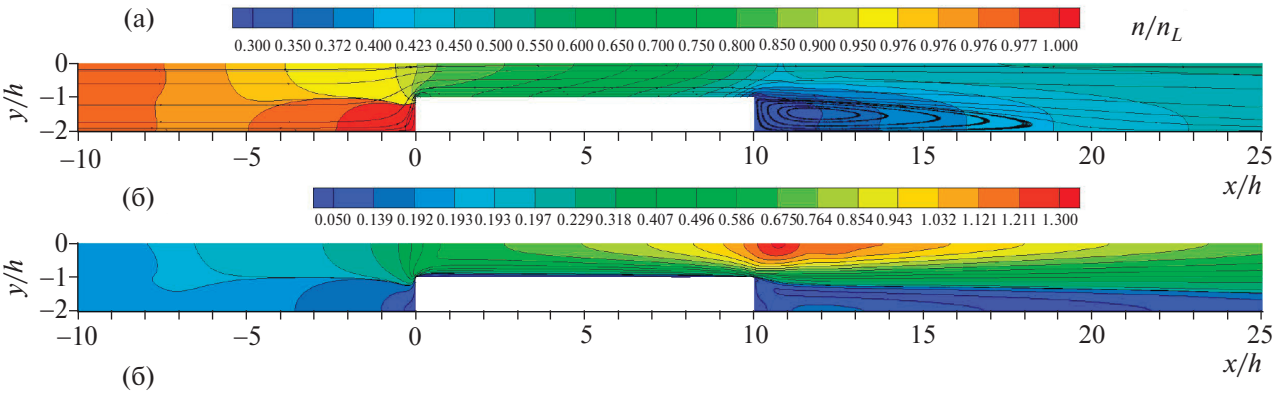



**Рис. 6.** Линии уровня безразмерной плотности и линии тока (а), числа Маха (б) для $K = 0.5$, $L_h = 10$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения.

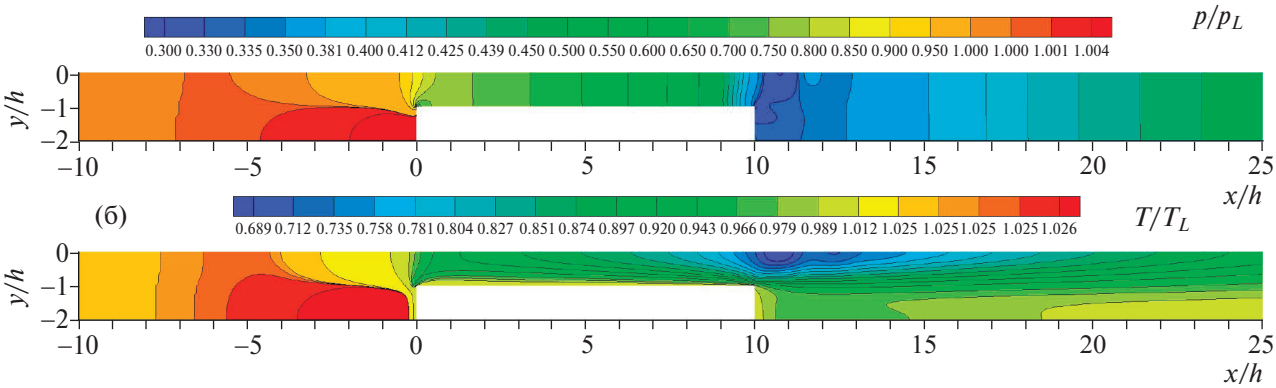



**Рис. 7.** Безразмерные изобары (а) и изотермы (б) для $K = 0.5$, $L_h = 10$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения.

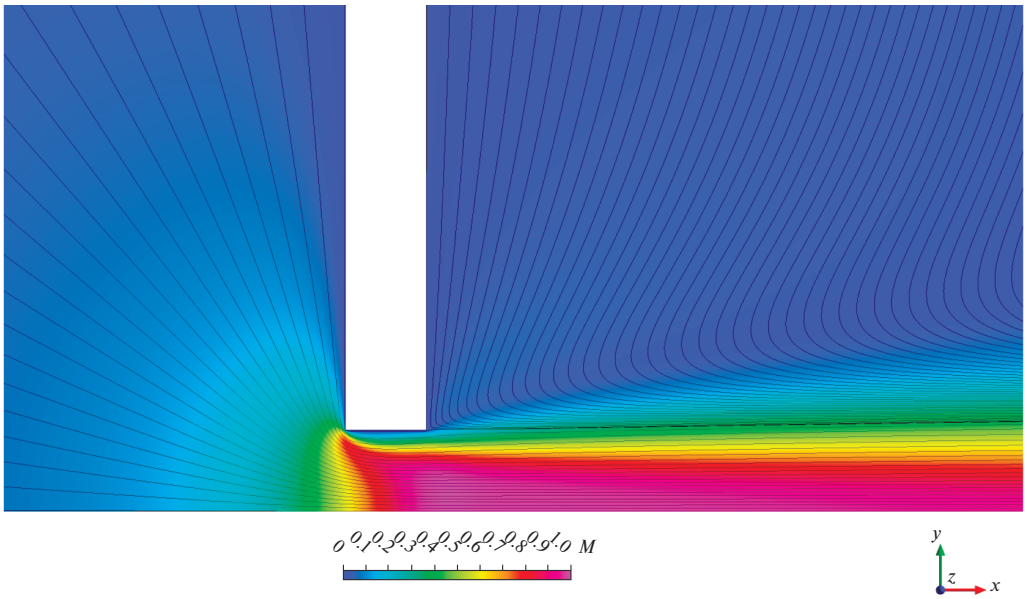



**Рис. 8.** Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 1$ и $\delta = 100$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

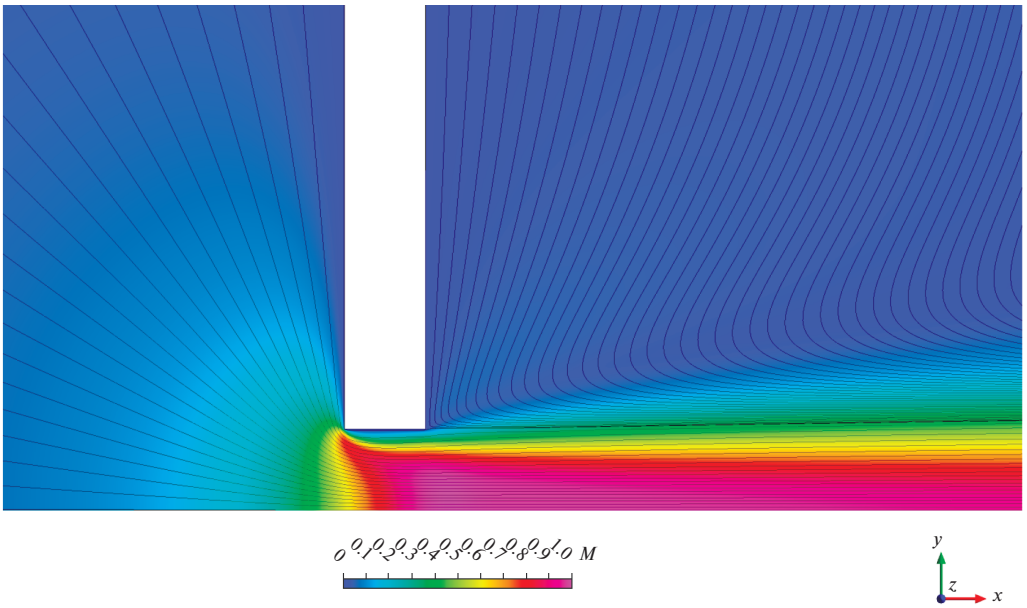



**Рис. 9.** Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 1$ и $\delta = 500$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

ется сразу на входе в канал, рис. 10–12, и в рассматриваемом случае истечения в среду с противодавлением для $L_h = 1$ и $L_h = 2$ незамкнут, будучи соединен с правым резервуаром. С ростом относительной длины канала высота отрывной зоны уменьшается, приводя к уменьшению эффекта падения расхода, см. рис. 11, 12. Для $L_h = 10$ и $\delta \leqslant 1000$ кривая расхода не обнаруживает немонотонности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано течение разреженного газа через периодическую систему плоских каналов (пор), имитирующую течение газа через мембрану. Рассматривались режимы течения от свободномолекулярного до сплошносредного с помощью численного решения как кинетического $S$-модельного уравнения, так и уравнений Навье–Стокса сжимаемой среды. Рассчитанные значения массового расхода существенно отличаются от данных для достаточно длинных плоских каналов, особенно для коротких пор. Новой особенностью течения является падение расхода в достаточно коротких каналах при уменьшении числа Кнудсена, что объясняется возникновением отрыва потока. Разумное согласие с континуальным решением наблюдается для достаточно малых чисел Кнудсена $\mathrm{Kn} \approx 0.01$. Помимо этого, полученные результаты

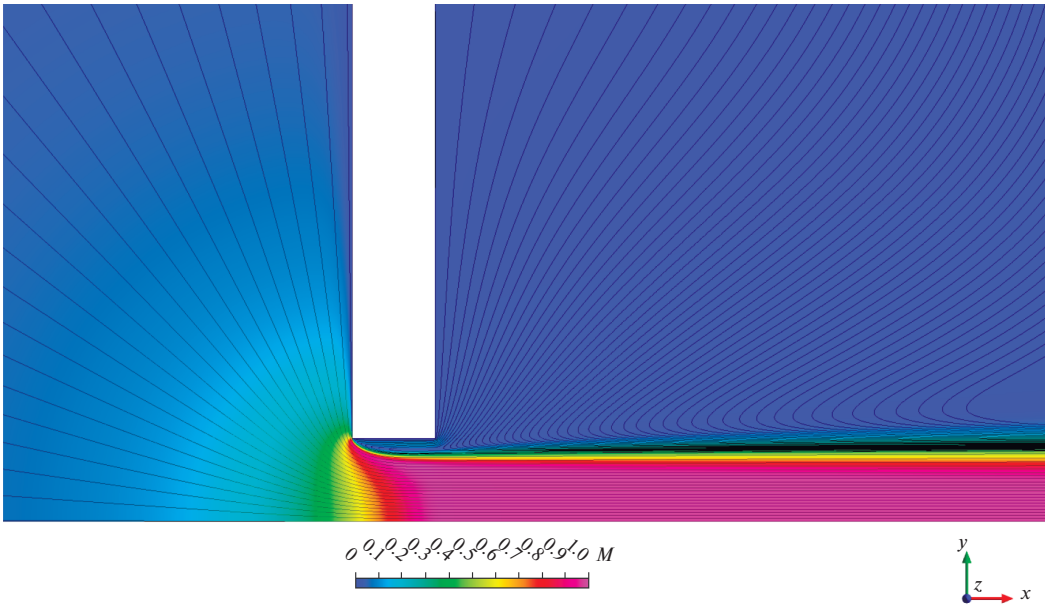



**Рис. 10.** Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 1$ и $\delta = 1000$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

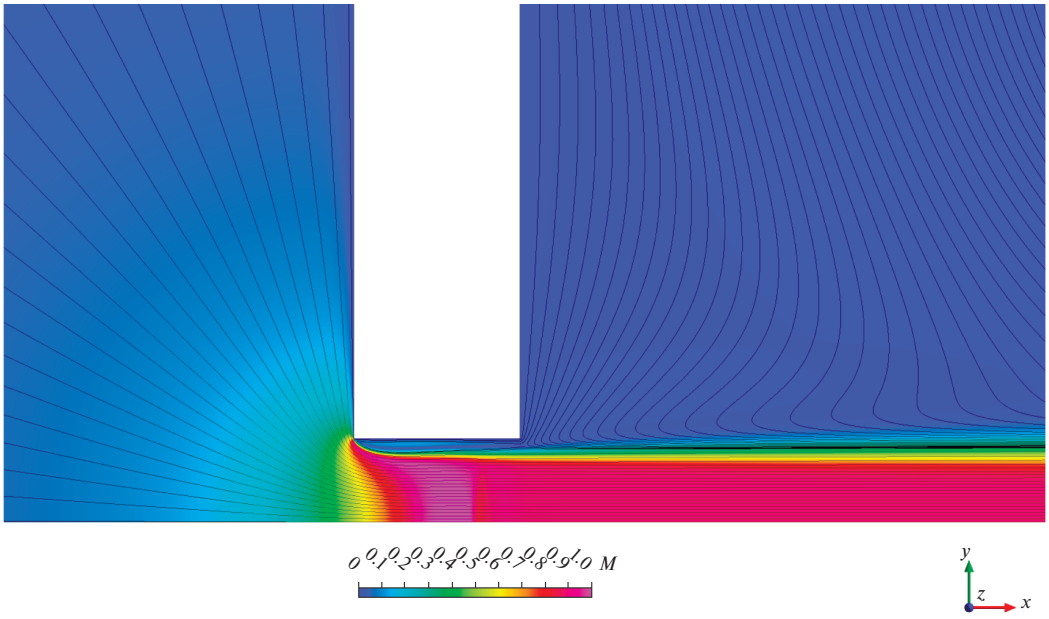



**Рис. 11.** Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 2$ и $\delta = 1000$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

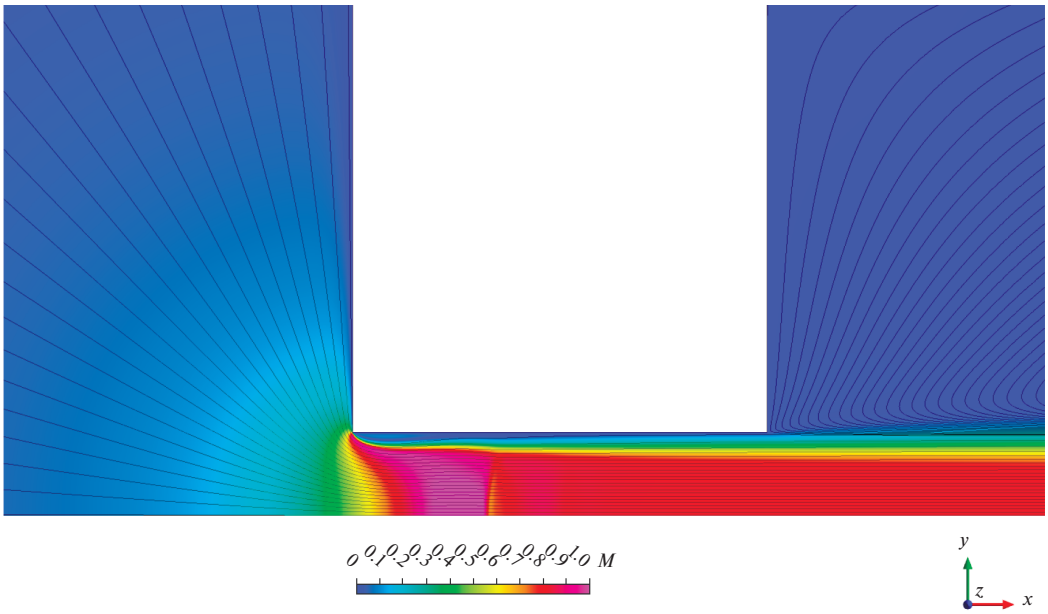



**Рис. 12.** Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 5$ и $\delta = 1000$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

демонстрируют сложную ударно-волновую структуру течения за коротким каналом внутри периодической системы с высокой проницаемостью для режимов, близких к континууму.

Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dou H., Xu M., Wang B., Zhang Z., Wen G., Zheng Y., Luo D., Zhao L., Yu A., Zhang L., Jiang Z., Chen Z.* Microporous framework membranes for precise molecule/ion separations // Chemical Society Reviews. 2021. V. 50. P. 986–1029.
2. *Taassob A., Bordbar A., Kheirandish S., Zarnaghsh A., Kamali R., Rana A.S.* A review of rarefied gas flow in irregular micro/nanochannels // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2021. V. 31. P. 113002.
3. *Wu L., Ho M., Germanou L., Gu X., Liu C., Xu K., Zhang Y.* On the apparent permeability of porous media in rarefied gas flows // Journal of Fluid Mechanics. 2017. V. 822. P. 398–417.
4. *Memisoglu G., Gulbahar B., Fernandez Bello R.* Preparation and characterization of freely-suspended graphene nanomechanical membrane devices with quantum dots for point-of-care applications // Micromachines. 2020. V. 11. No. 1. P. 104.
5. *Tina B.S., Rohith S., Seena V.* Fabrication and electromechanical characterization of silicon nanomechanical membrane flexure mems sensor for gas sensing applications // IEEE Sensors Journal. 2024. V. 24. No. 5. P. 5440–5447.
6. *Popov S.P., Tcheremissine F.G.* Subsonic rarefied gas flow over a rack of flat transverse plates // Journal of applied mechanics and technical physics. 2008. V. 49. No. 1. P. 46–52.
7. *Plotnikov M.Yu.* Hydrogen dissociation in rarefied gas flow through a wire obstacle // J. Appl. Mech. and Technical Physics. 2018. V. 59. No. 5. P. 794–800.
8. *Шахов Е.М.* Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 142–145.
9. *Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д.* Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург. УРО РАН, 2008.
10. *Varoutis S., Valougeorgis D., Sharipov F.* Simulation of gas flow through tubes of finite length over the whole range of rarefaction for various pressure drop ratios // J. Vac. Sci. Technol. A. 2009. V. 27. No. 6. P. 1377–1391.
11. *Sharipov F., Kozak D.V.* Rarefied gas flow through a thin slit into vacuum simulated by the Monte Carlo method over the whole range of the Knudsen number // J. Vac. Sci. Technol. A. 2009. V. 27. P. 479.
12. *Titarev V.A., Shakhov E.M.* // Computational study of a rarefied gas flow through a long circular pipe into vacuum // Vacuum, Special Issue “Vacuum Gas Dynamics: Theory, experiments and practical applications”. 2012. V. 86. No. 11. P. 1709–1716.
13. *Titarev V.A.* Rarefied gas flow in a planar channel caused by arbitrary pressure and temperature drops // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. V. 55. No. 21–22. P. 5916–5930.

14. *Pantazis S., Valougeorgis D.* Rarefied gas flow through a cylindrical tube due to a small pressure difference // Eur. J. Mech.-B/Fluids. 2013. V. 38. P. 114–127.
15. *Valougeorgis D., Vasileiadis N., Titarev V.* Validity range of linear kinetic modeling in rarefied pressure driven single gas flows through circular capillaries // European Journal of Mechanics / B Fluids, Special Issue on Non-equilibrium Gas Flows. 2017. V. 64. P. 2–7.
16. *Титарев В.А., Шахов Е.М.* Концевые эффекты при истечении разреженного газа через длинную трубу в вакуум // Известия РАН. МЖГ. 2013. № 5. С. 146–158.
17. *Sharipov F., Seleznev V.* Data on internal rarefied gas flows // J. Phys. Chem. Ref. Data. 1998. V. 27. No. 3. P. 657–706.
18. *Воронич И.В., Титарев В.А.* Численный анализ течения разреженного газа через систему коротких каналов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 12. С. 1942–1959.
19. *Gavasane A., Agrawal A., Pradeep A.M., Bhandarkar U.* Simulation of a temperature drop for the flow of rarefied gases in microchannels // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. 2017. V. 71. No. 10. P. 1066–1079.
20. *Титарев В.А.* Применение кода Несветай к решению трехмерных задач высотной аэродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., спец выпуск по случаю 90-летия академика С.К. Годунова. 2020. Т. 60. № 4. С. 752–764.
21. Ansys CFX, version 2021 R2. https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-cfx
22. *Barth T., Jespersen D.C.* The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA paper 89-0366. 1989.
23. *Rao S.S.* The Finite Element Method in Engineering. 6th ed. Elsevier, 2018.

# Numerical Analysis of Rarefied Gas Flow through a Periodic System of Channels

**© 2025 I. V. Voronich[a,b,*], V. A. Titarev[a,b,**], and A. V. Kudriashov[b,***]**

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[b] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

[*] *e-mail: voronich.iv@mipt.ru*
[**] *e-mail: vladimir.titarev@frccsc.ru*
[***] *e-mail: kudriashov.av@mipt.ru*

Rarefied gas flows through a planar periodic system of rectangular channels (membrane) are analyzed in a wide range of Knudsen numbers. The problem is studied based on the numerical solution of the kinetic equation with the Shakhov *S*-model collision integral and the Navier-Stokes equations of the compressible medium. The main attention is paid to the calculation of the mass flow rate as a function of the permeability, the relative channel length, and the rarefaction parameter.

*Keywords:* membrane, channel, kinetic equation, *S*-model, rarefied gas, computational aerodynamics

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 15–29

УДК 532.5

# АВТОКОЛЕБАНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ГЕНЕРАТОРЕ ИМПУЛЬСНЫХ СТРУЙ, ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ, СВЯЗАННЫЙ С НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ ГРАНИЦЫ КАВЕРНЫ

**© 2025 г. С. А. Очеретяный*, В. В. Прокофьев**, Е. В. Топейцев, Е. В. Филатов**

*МГУ им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия*

**e-mail: ocheret@imec.msu.ru*
***e-mail: vlad.prokof@yandex.ru*

Поступила в редакцию 31.03.2025 г.
После доработки 25.04.2025 г.
Принята к публикации 25.04.2025 г.

Исследования струйных течений жидкости в присутствии вентилируемой каверны с отрицательным числом кавитации, проведенные в Институте механики МГУ, показали, что при определенных условиях в гидравлической системе возникают кавитационные автоколебания с высокой интенсивностью пульсаций давления. В работе представлены результаты исследования осесимметричной модели генератора импульсных струй с истечением жидкой струи через центральное отверстие в диафрагме и с периферийным поддувом газа за диафрагму. Истечение двухфазной среды наружу осуществлялось через сужающееся коническое сопло. Проведены исследования влияния параметров генератора, а также расстояния до стенки-экрана на эффективность его работы. Обнаружена узкая область сравнительно небольших поддувов, в которой регистрируются колебания давления с высокой частотой, а амплитуда ударных импульсов давления на экране заметно превосходит амплитуду импульсов в низкочастотных режимах генерации. Такой режим может быть следствием развития двухфазных структур на неустойчивой границе струи при ее взаимодействии со стенками сужающегося сопла. Доказательством возможности существования такого режима течения стало решение плоской задачи о взаимодействии конечной струи с наклонной пластиной при различных давлениях на поверхностях струй. Задача решена точно методами ТФКП с помощью квазидвоякопериодических тэта-функций.

*Ключевые слова:* струйное течение, каверна, отрицательное число кавитации, кавитационные автоколебания, пульсационные технологии

**DOI:** 10.31857/S1024708425030026

Исследования струйных течений жидкости в присутствии вентилируемой каверны с отрицательным числом кавитации, проведенные в Институте механики МГУ [1–3] показали, что при определенных условиях в гидравлической системе возникают кавитационные автоколебания с высокой интенсивностью пульсаций давления, как в каверне, так и в области выше по течению. Была показана принципиальная возможность использования режима автоколебаний для создания периодических импульсных струй при истечении из сужающегося сопла в атмосферу. Наиболее очевидное применение генератор импульсных струй может найти в технологиях водоструйной разработки полезных ископаемых [4]. Для получения струй с очень высокими параметрами обычно применяют импульсные водометы (жидкость получает импульс за счет удара ускоряемого пороховыми газам поршня) и гидропушки (жидкость в стволе ускоряется вместе с поршнем). Наиболее близкое отношение к рассматриваемой в статье теме имеет схема без поршневого импульсного водомета: жидкая масса ускоряется непосредственно газом. Расчеты и эксперимент [4, 5] показали, что скорость таких струй может достигать 1600 м/с при достаточно большой дальнобойности при истечении, как в воздух, так и в затопленное водой пространство.

В установках, использующих пульсирующие струи, происходит заметный рост производительности и вместе с тем снижение удельной энергоемкости разрушения материалов и снижение потребления воды,

что обеспечивает допустимую влажность добываемого полезного ископаемого. В [6] приводится обзор устройств, способных обеспечивать пульсационный режим работы струйных установок. Как правило, в таких установках для организации пульсирующих режимов работы используются механические устройства. Однако известны способы создания импульсных струй без использования механических устройств — прежде всего это генераторы импульсных струй, использующие кавитационные автоколебания при возникновении естественной (паровой) кавитации в трубке Вентури [7]. Работа таких генераторов предполагает значительный перепад давления на входе и выходе трубки Вентури и начинается при довольно больших давлениях напора, достаточных для развития паровой кавитации в канале трубки Вентури. Для изучаемой здесь схемы генератора присутствие вентилируемой каверны за кавитатором принципиально, меняется характер течения: интенсивные автоколебания возникают при небольших перепадах давления на кавитаторе, энергетика импульсных струй включает в себя не только напор жидкости, но и работу сжатого газа. В результате развитые кавитационные автоколебания начинаются уже при небольших (менее 0.01 МПа) давлениях напора. Отметим, что в генераторах, использующих естественную кавитацию в трубке Вентури наличие выходного сужающегося сопла, не является принципиальным (генератор эффективно работает и без такого сопла [8]), а в схеме с вентилируемой каверной присутствие выходного сопла (или другого сопротивления) принципиально.

Вопрос о генерации периодических импульсных струй с использованием кавитационных автоколебаний ранее изучался в плоской постановке [9]. Однако для практических целей ближе осесимметричная постановка экспериментальной задачи. Дальнейшие исследования были проведены на осесимметричной модели установки, причем, на первом этапе была изготовлена технологически более простая конфигурация с истечением жидкой струи через центральное отверстие в диафрагме и с периферийным поддувом газа (в плоской постановке моделировалось течение с центральной вентилируемой каверной). Эксперименты, показали, что и в такой конфигурации также возникают низкочастотные автоколебания, но при несколько больших коэффициентах поддува газа, чем на плоской модели с центральной каверной [3], интенсивность ударных импульсов оказалась несколько ниже, чем на плоской установке. Проведены исследования влияния параметров сопла на эффективность работы генератора, исследована зависимость интенсивности ударных импульсов от расстояния до стенки-экрана.

Эксперименты показали, что существует узкая область сравнительно небольших поддувов, в которой регистрируются колебания давления с частотой, значительно превосходящей частоту колебаний, развивающихся при больших поддувах. Амплитуда этих высокочастотных колебаний давления в каверне весьма мала, однако именно в этой узкой области реализуется режим с формированием на экране-мишени импульсов давления, амплитуда которых заметно превосходит амплитуду низкочастотных импульсов. Ясно, что для приложений такой режим течения очень выгоден. Ранее режим с неустойчивой по Релею–Тейлору (Р–Т) каверной наблюдался в течении с центральным положением каверны, а здесь он имеет место при взаимодействии центральной струи со стенками сужающегося сопла на выходе генератора. Доказательством существования такого режима стало решение плоской задачи о взаимодействии конечной струи, ограниченной снизу плоской стенкой (плоскостью симметрии), с наклонной пластиной при различных давлениях на поверхностях струй выше и ниже наклонной пластины. Аналогично задаче о глиссировании пластины, был принята схема течения с разделением струй. Задача решена точно методами ТФКП с помощью квазидвоякопериодических тэта функций. Анализ решения показал, что неустойчивость границы струи по (Р–Т) имеет место вблизи предельного течения, когда толщина возвратной струи обращается в ноль (струя касается наклонной пластины в некоторой точке выше срывной кромки пластины). Полученное решение, в частности объясняет узость диапазона значений безразмерного коэффициента давления в каверне $C_d$, при которых имеют место высокочастотные автоколебания. Оценки показали, что при наличии неустойчивой границы развитие волновых структур вполне может привести к разрушению струи на фрагменты. Для плоской задачи получены зависимости параметров предельного течения от угла наклона пластины и ширины зазора между кромкой пластины и плоской стенкой.

## 1. ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ГЕНЕРАТОРЕ ИМПУЛЬСНЫХ СТРУЙ

### *1.1. Описание эксперимента*

Ранее на плоской экспериментальной установке [9, 10] моделировалось течение с образованием за пластиной-кавитатором (или клином) вентилируемой каверны в центральной части двухфазного потока. Здесь, в осесимметричном случае организовано течение со струей жидкости в центральной части потока. На рис. 1 показана схема осесимметричного двухфазного течения в стационарном режиме. Из напорной трубы *1* жидкость через отверстие в шайбе (кавитаторе) *2* попадает в камеру *3*, в которую осуществляется, поддув воздуха. Из камеры *3* имеется плавный переход в цилиндрическую часть выходного сопла *4*, которая

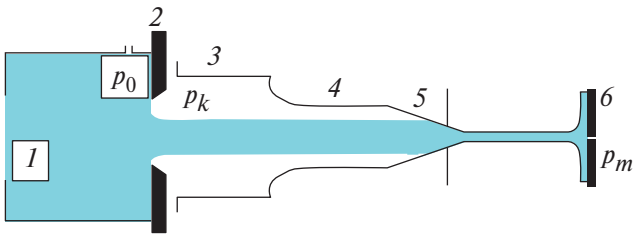



**Рис. 1.** Схема установки осесимметричного эксперимента.

заканчивается коническим сужением *5*. Струя вытекает в бак (на схеме не показан) где установлен экран (диск) *6*, в центральной точке которого имеется отверстие для замера давления. В процессе эксперимента проводится запись осциллограмм давления в подводящей магистрали (перед шайбой-кавитатором *2*) $p_0$, в каверне *3* за кавитатором $p_k$, в центральной точке экрана *6* — $p_m$ (давления измеряются относительно атмосферного ра). Жидкость (вода) подавалась в установку по стальному трубопроводу длиной ~1.5 м (на схеме не показан), из успокоительного бака с воздушной подушкой общим объемом 50 л. Диаметр шайбы на входе в генератор $D$ = 10 мм, внутренний диаметр цилиндрической части сопла *4* тоже 10 мм. Расстояние от среза сопла до экрана *6* могло варьироваться. В некоторых экспериментах входная шайба *2* заменялась на конический конфузор. Элементная база и приборы для замеров экспериментов приведены в [9].

### *1.2. Влияние диаметра выходного сечения*

На рис. 2–5 показано влияние диаметра выходного сечения сопла на характер автоколебаний для давления напора $P_0$ — 0.15 МПа. Параметры канала генератора: общая длина 57 мм (от входной шайбы до среза сопла), концевая коническая насадка с переходом от диаметра цилиндрической части сопла 10 мм до диаметра выхода $d$, расстояние до диска-мишени 25 мм. В экспериментах определялись следующие безразмерные параметры: коэффициент давления в каверне $C_d = P_k/P_0$, число Струхаля, $\mathrm{Sh} = fD/V_\infty$, коэффициент поддува $C_q = Q_g/Q_l$, где $Q_g$ — объемный расход газа, приведенный к давлению $P_к$, $Q_l$ — расход жидкости. Размах колебаний давления в форкамере $A_0$ и в каверне $A_к$, и интенсивность ударных импульсов на экране $A_m$, отнесены к давлению напора $p_0$. Прописными буквами $P_0$ и $P_к$ обозначены осредненные по времени избыточные давления в форкамере и в каверне, $V_\infty = \sqrt{2P_0/\rho}$, $f$ — частота пульсаций, размах колебаний тоже определялся как средняя величина разности максимумов и минимумов на интервалах, равных периоду колебаний $1/f$. Диаметр струи, истекающей из отверстия шайбы равен 7.7–8.4 мм (в зависимости от числа Рейнольдса). Важным фактором тут является соотношение выходного диаметра сопла и диаметра струи. При диаметре выходного отверстия 8 мм струя при стационарном течении слабо взаимодействует со стенками сопла и при малых поддувах фактически происходит прямое истечение из отверстия в шайбе в атмосферу (низкие значения $C_d$, автоколебания отсутствуют), однако при значительных поддувах ($C_q > 15$) и в этом случае начинают развиваться низкочастотные автоколебания и происходит увеличение коэффициента $C_d$ (рис. 2, 4). Видно, что в режиме развитых низкочастотных колебаний коэффициенты давления в каверне для диаметров выхода 6 и 7 мм практически совпадают, для диаметра 5 мм коэффициент давления возрастает.

На рис. 3 приведены зависимости числа Струхаля от коэффициента поддува $C_q$ для диаметров выходного сопла $d$ = 8, 7, 6, 5 мм вертикальный масштаб выбран так, чтобы был хорошо виден низкочастотный

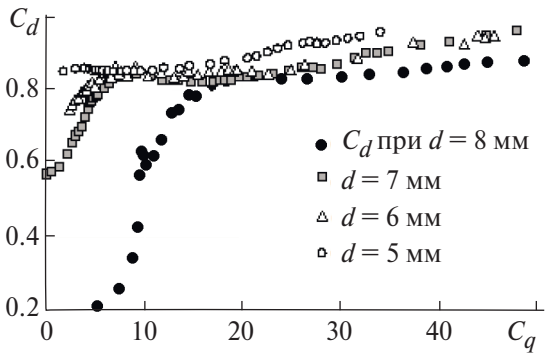



**Рис. 2.** Зависимость $C_d$ от $C_q$ для $P_0$ = 0.15 МПа, длина цилиндрической части сопла 11 мм, расстояния до диска-мишени 25 мм, для 4-х диаметров выходного сечения (5, 6, 7, 8 мм).

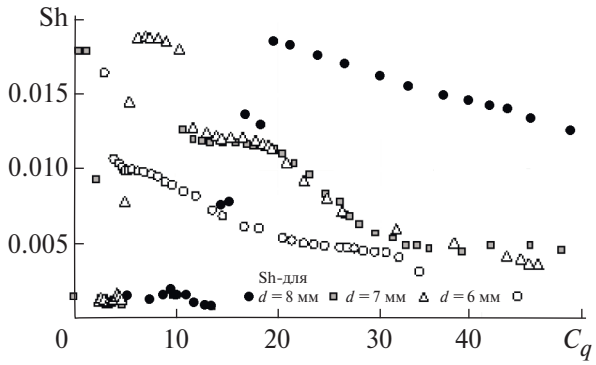



**Рис. 3.** Зависимость Sh от $C_q$ для $P_0$ = 0.15 МПа, длины цилиндрической части сопла 11 мм, расстояние до диска-мишени 25 мм, для 4-х диаметров выходного сечения (5, 6, 7, 8 мм).

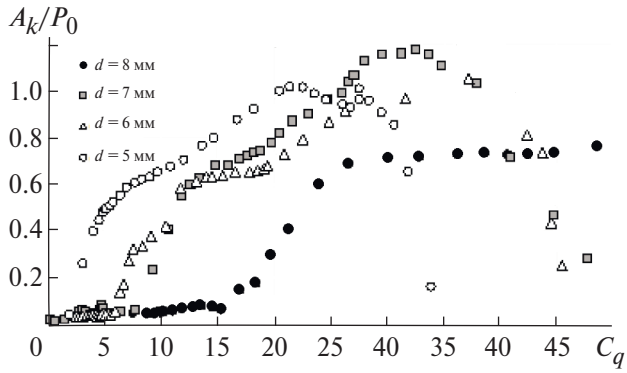



**Рис. 4.** Зависимость $A_k/P_0$ от $C_q$ для $P_0$ = 0.15 МПа, длины цилиндрической части сопла 11 мм, расстояние до диска-мишени 25 мм, для 4-х диаметров выходного сечения (5, 6, 7, 8 мм).

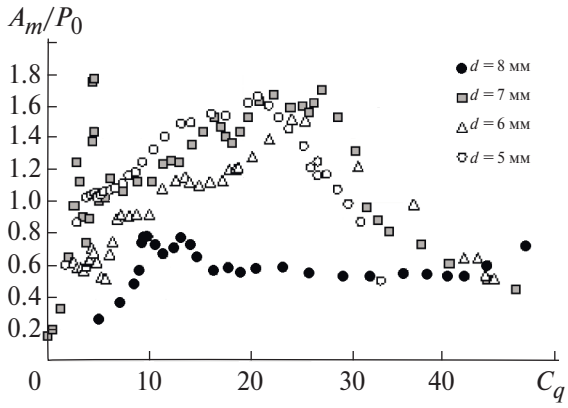



**Рис. 5.** Зависимость $A_m/P_0$ от $C_q$ для $P_0$ = 0.15 МПа, длины цилиндрической части сопла 11 мм, расстояние до диска-мишени 25 мм, для 4-х диаметров выходного сечения (5, 6, 7, 8 мм).

режим автоколебаний (высоким частотам при небольших поддувах посвящена вторая часть статьи). Видно, что при $d$ = 8 мм автоколебательный режим возникает при $C_q > 16$. Частота колебаний падает с уменьшением диаметра сопла, причем для $d$ = 6 и 7 мм, результаты для Sh и для $C_d$ практически совпадают. Изменение частоты автоколебаний при других диаметрах выходного сечения можно связать, с изменением коэффициента давления $C_d$, так как ранее было показано [11, 12], что скорость распространения волн вдоль струи совпадает со скоростью стационарной струи.

На рис. 4 показана зависимость интенсивности пульсаций давления в каверне при $P_0$ = 0.15 МПа для тех же четырех диаметров выходного сечения сопла. При $d$ = 8 мм автоколебания начинают развиваться лишь при $C_q > 15$, в диапазоне $C_q$ от 10 до 20 (где по аналогии с плоской задачей должен сохранятся режим колебаний без выбрасывания газа в область перед кавитатором) интенсивность тем больше, чем меньше диаметр выходного сечения, правда, в диапазоне 5–7 мм интенсивность автоколебаний ($A_k/P_0$) слабо зависит от диаметра выхода. На рис. 5 показана зависимость средней интенсивности ударного воздействия на экран

$A_m/P_0$ от $C_q$. Видно, что при $d$ = 8 мм воздействие незначительно, наибольшее воздействие при $d$ = 7 мм. В режиме низкочастотной генерации амплитуда импульсов растет с ростом поддува и достигает максимума при переходе к режиму с выбросом газа в область перед кавитатором.

### *1.3. Зависимость интенсивности воздействия струи на экран от расстояния до экрана*

На рис. 6–9 представлены результаты измерений параметров автоколебательного режима течения в канале при общей длине осесимметричного канала 57 мм, длине цилиндрической части сопла 11 мм, концевая коническая насадка с переходом от диаметра 10 мм (цилиндрическая часть сопла) до диаметра выхода 6 мм при давлении напора $_0$ = 0.15 МПа, при расстояниях до диска-мишени $L_m$ изменяющимся от 25 до 250 мм (4.17–41.7 калибров выходного сечения сопла). Из представленного на рис. 6–8 видно, что в выбранном диапазоне дистанций до мишени, она не влияет на режим течения в канале. Близость кривых свидетельствует о хорошей повторяемости экспериментальных режимов. В зависимости от величины коэффициента поддува $C_q$ течение в генераторе проходит несколько стадий. В области $C_q$ < 10

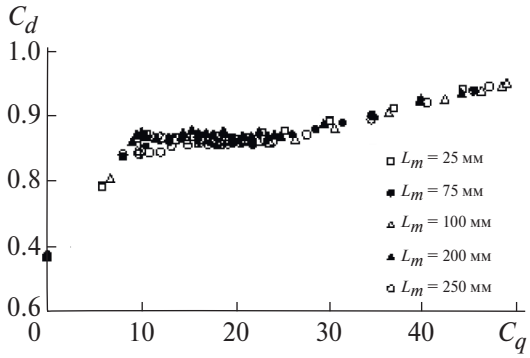



**Рис. 6.** Зависимость коэффициента давления $C_d$ от коэффициента расхода газа $C_q$ при $P_0$ = 0.15 МПа и различных расстояниях до диска-мишени.

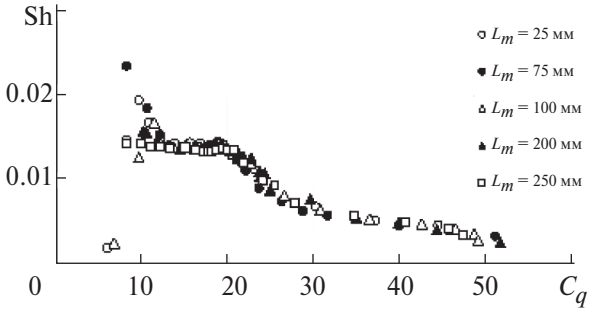



**Рис. 7.** Зависимость числа Струхаля от коэффициента расхода газа при $P_0$ = 0.15 МПа и различных расстояниях до диска-мишени.

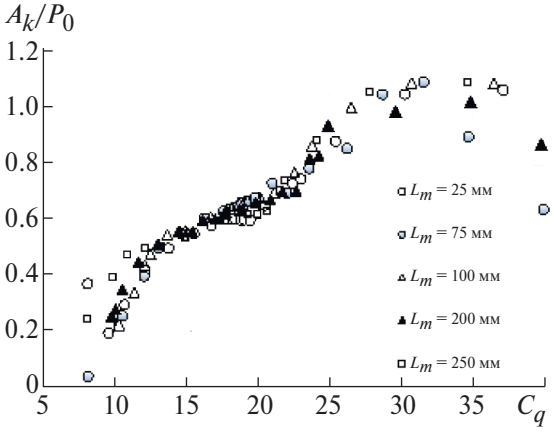



**Рис. 8.** Зависимость относительной интенсивности пульсаций давления в каверне от коэффициента расхода газа при $P_0$ = 0.15 МПа и различных расстояниях до диска-мишени.

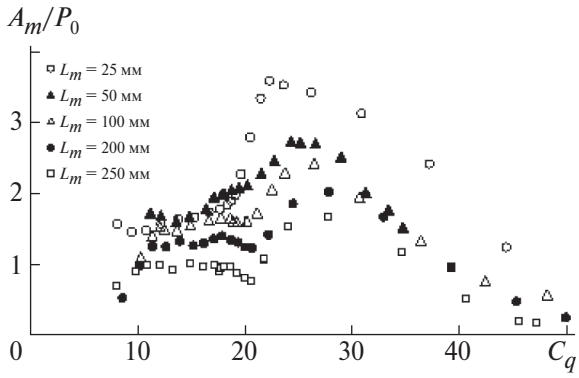



**Рис. 9.** Зависимость относительной интенсивности воздействия на диск-мишень от коэффициента расхода газа при $P_0$ = 0.15 МПа и различных расстояниях до мишени.

с ростом поддува растет $C_d$ , происходит развитие каверны за кавитатором, отсутствуют низкочастотные колебания давления в каверне. С приближением области замыкания каверны к выходному сечению сопла может возникать высокочастотный режим автоколебаний, природа которых отличается от низкочастотного режима (об этом будет сказано ниже). При $C_q > 10$ происходит развитие низкочастотного автоколебательного режима. Видно, что здесь коэффициент давления $C_d$ с ростом поддува изменяется очень медленно (см. рис. 6), частота также почти постоянна (см. рис. 7). Это можно объяснить тем, что скорость движения волн на поверхности каверны равна скорости стационарного течения жидкости и определяется величиной $C_d$, а время существования этих волн длиной канала от диафрагмы-кавитатора до выходного сечения сопла — величиной в этой серии опытов постоянной. На этой стадии растет интенсивность колебаний давления в каверне, а также интенсивность воздействия нестационарной струи на мишень. В области $C_q > 20$ начинает падать частота автоколебаний, увеличивается $C_d$, анализ осциллограмм показывает, что здесь развивается режим с выбрасыванием порций поддуваемого газа в область перед кавитатором. Из данных рис. 9 следует, что где-то в начале этой области находится максимум ударного воздействия жидких порций на мишень. Данные рис. 9 показывают, что максимальная интенсивность импульсов давления соответствует начальной стадии перехода к режиму с выбрасыванием газа в пространство перед кавитатором. При небольших расстояниях (25 мм это 4.17 калибра выходного сечения сопла) амплитуда импульсов давления на мишени превосходит давление напора жидкости $P_0$ максимально в 3.5 раза. Она также заметно превосходит интенсивность пульсаций давления в каверне (см. рис. 8). С ростом расстояния до мишени интенсивность импульсов давления на экране падает. Аппроксимации зависимости этой интенсивности для некоторых значений $C_q$ (в области роста интенсивности автоколебаний) показывают, что интенсивность воздействия на препятствие падает примерно пропорционально корню квадратному из расстояния до него.

## 2. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ КАК СЛЕДСТВИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГРАНИЦЫ КАВЕРНЫ В СМЫСЛЕ РЕЛЕЯ–ТЕЙЛОРА

### *2.1. Пример возникновения высокочастотных автоколебаний*

Еще раз рассмотрим процесс развития кавитационных автоколебаний для осесимметричного течения в генераторе с диаметром отверстия входной шайбы 10 мм, удлиненной на 26 мм цилиндрической части сопла, диаметром выхода конического сопла 6 мм, с общей длиной генератора (шайба, входная камера, цилиндрическая часть, коническое сопло) 82 мм. На рис. 10а,б представлены зависимости Sh и $A_m/P_0$ от $C_q$ для двух значений давления напора воды. Из данных рис. 10а следует, что существует узкая область сравнительно небольших поддувов ($C_q < 4$), в которой регистрируются колебания давления с частотой, значительно превосходящей частоту колебаний, развивающихся при больших поддувах. Амплитуда колебаний давления в каверне на этих режимах весьма мала, однако данные рис. 10б показывают, что именно в этой узкой области реализуется режим с формированием на экране импульсов давления, амплитуда которых заметно превосходит амплитуду импульсов в низкочастотном режиме. Ясно, что для приложений такой режим течения очень выгоден. На рис. 11а приведена осциллограмма пульсаций давления для течения в длинном генераторе (82 мм) при сравнительно небольшом поддуве газа, когда имеет место высокочастотный режим. Давление в каверне $P_k$ (и в подводящей воду магистрали $P_0$) почти постоянно, однако, на амплитудном спектре (рис. 11б) четко видна доминирующая частота, совпадающая с частотой пульсаций ударного давления на экране (рис. 11в). В области взаимодействия струи с диском-мишенью наблюдаются интенсивные периодические импульсы ударного характера (рис. 11а). Спектры колебаний показывают,

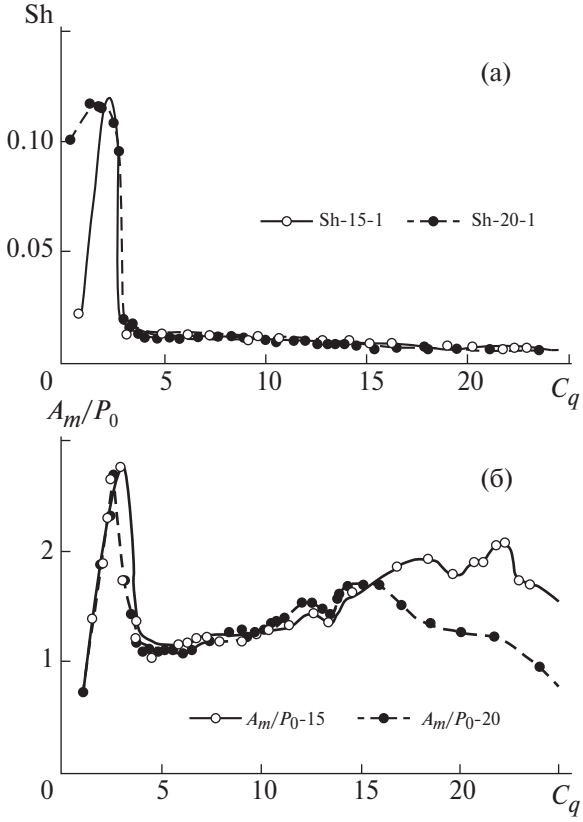



**Рис. 10.** Зависимость Sh (а), и относительных интенсивности на экране (б) от коэффициента поддува газа для сопла с длиной цилиндрической части 36 мм и выходным сечением 6 мм при давлении напора $P_0$ = 0.15 МПа (сплошные линии) и 0.2 МПа (пунктир).

что эти импульсы строго периодичны (рис. 11в), и их частота совпадает с частотой акустические колебания в каверне, что позволяет сделать предположении о возникновении автоколебательного режима течения в области замыкания каверны вблизи выходного сечения сопла, а сама каверна служит элементом обратной связи.

Для генератора с центральной каверной (этот случай изучался ранее в плоской постановке) также наблюдался высокочастотный автоколебательный режим, при котором основная часть каверны оставалась стационарной, а перемешивание жидкости с газом наблюдалось только в хвостовой части каверны. Полагалось, что это перемешивание могло быть связано с неустойчивостью Релея–Тейлора границы каверны [15]. Ниже, в плоской постановке, будет показано, что подобная ситуация может иметь место и в случае генератора с центральным расположением жидкой струи.

### *2.2. Постановка плоской задачи*

Вообще говоря, с ростом поддува газа длина стационарной каверны будет увеличиваться подобно задаче о каверне за препятствием в канале [14], в этой задаче имеется предельное число кавитации при приближении к которому длина каверны стремится к бесконечности. Так как в нашем случае расстояние от кавитатора (шайба или клин) до выходного сопла достаточно велико, то будем рассматривать режим развитой каверны, занимающей все пространство от кавитатора на входе до сужающегося сопла на выходе (как это показано на рис. 1). Тогда задачу можно разбить на две: первая это истечение струи из канала с сужающимся насадком на выходе (область подводящего канала, кавитатора и каверны за ним — *1*, *2* и *3* на рис. 1). В этом случае отношение ширины истекающей струи $h$ к ширине отверстия насадка $D$ является функцией отношения ширины отверстия к ширине подводящего канала $L$ и угла наклона насадка $\pi\upsilon$ [14]. При $\upsilon = 1/2$ насадок аналогичен осесимметричной шайбе. Для параметров осесимметричной модели генератора $D/L = 0.2$ и при $\upsilon = 1/2$, отношение $h/D = 0.616$ (см. [14]). При анализе второй задачи — истечения из выходного сопла *5* (см. рис. 1) — в качестве характерной длины будем использовать ширину струи $h$.

Вторую задачу — взаимодействие струи шириной $h$ с наклонной пластиной (сужением) с углом наклона $\alpha$ — будем рассматривать, используя схему с разделением струй, которая имеет место при взаимодействии струи толщиной $h$ с наклонной пластиной. Одна струя толщиной $\Delta$ истекает в пространство с постоянным давлением вдоль горизонтально прямой (или оси симметрии), другая (возвратная струйка толщиной $\delta$)

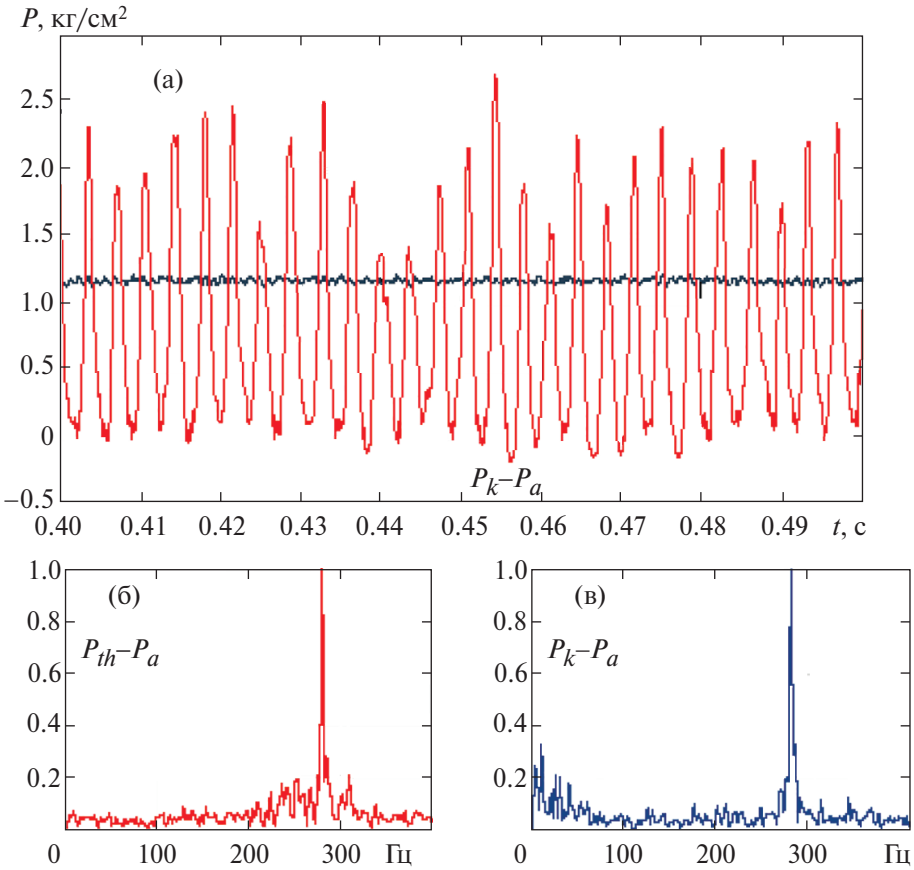



**Рис. 11.** Осциллограмма высокочастотного режима при $P_0$ = 1.54 атм, $C_q$ = 4.5, $D$ = 10 мм, при длине сопла 36 мм, с выходным сечением диаметром 6 мм (а); амплитудно-частотные спектры пульсаций давления на экране (б) и в каверне (в). Амплитуды нормированы по максимальной величине.

течет вдоль наклонной пластины. Будем считать, что стенка внутреннего канала генератора находится достаточно далеко от границы струи $h$ и влиянием этой стенки пренебрежем (т. е. будем считать наклонную стенку бесконечной).

### *2.3. Задача о взаимодействии конечной струи с наклонной пластиной при различных давлениях на поверхностях струй*

На рис. 12а показано стационарное течение вдоль горизонтального дна слоя жидкости (струи) шириной на бесконечности (в точке ) $h$, взаимодействующего с наклонной по отношению к дну полубесконечной пластиной $AC$ (угол наклона $\alpha = \pi\mu$, при моделировании сужающегося сопла $\mu > \pi/2$). При взаимодействии с наклонной пластиной поток разделяется — часть вытекает в пространство за пластиной (скорость на границе этой струи примем равной 1). Граница струи начинается от кромки пластины $A$ и течет вдоль оси $x$ в бесконечность (точка $D$), другая часть течет вдоль наклонной пластины в бесконечность (точка $C$). Точка разделения потоков $B$ является точкой торможения на пластине $AC$. В отличие от классической задачи о глиссировании [14] здесь давления перед пластиной и за ней различны.

Течение в плоскости комплексного потенциала (рис. 12б) представляет собой течение в полосе при наличии разреза, который начинается в точке разделения потоков $B$. Отметим, что течение ограничено прямыми линиями $\psi = const$, на границах области мнимая часть функции $w$ постоянна. В [15] показано, что течение с границами из прямолинейных стенок, разделенных двумя свободными поверхностями с различными значениями скорости на них, может быть отображено на характеристический прямоугольник с помощью эллиптического интеграла, причем подходящим выбором параметра эллиптического интеграла можно сделать так, что четыре точки отрыва потока перейдут в вершины характеристического прямоугольника. Там же [15] показано, что комплексная скорость является квазидвоякопериодической функцией.

Решение будем строить с помощью квазидвоякопериодических тэта-функций, используя процедуру, близкую к изложенной в [14] (выражения для этих функций, а также некоторые полезные формулы приведены в той же монографии). Отметим, что первая функция $\vartheta_1(u) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{\frac{(2n-1)^2}{4}}\sin(2n-1)u$ $\left(q = e^{pit},\ |q| < 1\right)$ имеет простой ноль в точке $u = 0$, а остальные получаются из первой прибавлением к аргу-

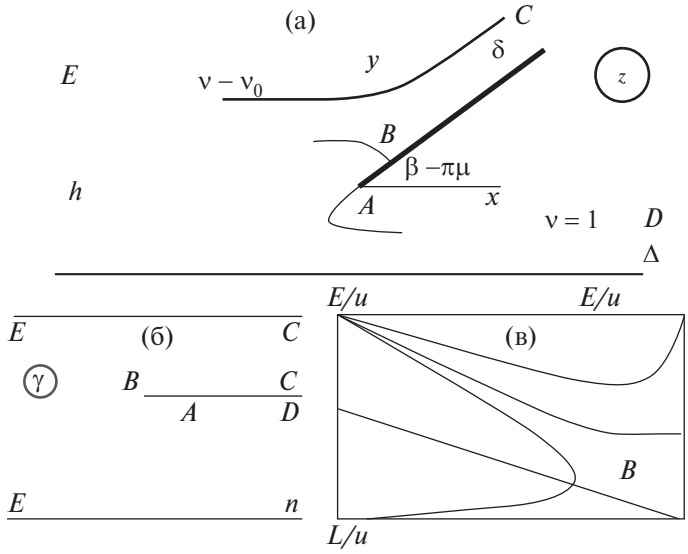



**Рис. 12.** Течение в физической плоскости $z = x + iy$ (а), плоскость комплексного потенциала $w = \phi + i\psi$ (б), вспомогательная плоскость $u = \xi + i\eta$ (в).

менту действительного или комплексного полупериода. В качестве параметрической плоскости $u$ (рис. 12в) выбирается прямоугольник со сторонами равными полупериодам функций $\pi/2$ и $\pi\tau/2$, где $\pi\tau$ — комплексный период функций. Положим, что точка $D$ физической плоскости переходит в точку $u = 0$, точка $A$ в точку $u = \pi/2$, точка $E$ в точку $u = \pi\tau/2$. Четвертая точка — точка $C$ — переходит в точку $u = \pi/2 + \pi\tau/2$, при этом комплексный параметр $\tau$ должен дополнительно определяться из условий задачи. Итак, свободные границы переходят в нижнюю и верхнюю стороны прямоугольника, твердые прямолинейные границы в левую и правую стороны. Решение будем искать методом особых точек [14]. Изучение годографа скорости показывает, что функция $dw/dz$ имеет один простой ноль в точке торможения (и ветвления) $B$ $(u = \pi/2 + ia)$, а за счет инверсии относительно действительной оси при аналитическом продолжении, имеет простой полюс в точке $u = \pi/2 - ia$. В этом случае [14], комплексная скорость может быть представлена в виде

$$\frac{dw}{dz} = Ae^{Bu}\frac{\vartheta_1\,(u - \pi/2 - ia)}{\vartheta_1\,(u - \pi/2 + ia)} = Ae^{Bu}\frac{\vartheta_2(u - ia)}{\vartheta_2(u + ia)},$$

где $A$ и $B$ действительные постоянные, которые определяются из условий для скорости в точках $u = 0$, $\left.\frac{dw}{dz}\right|_{u=0} = A = 1$ и $A\,(u = \pi/2)$, $\left.\frac{dw}{dz}\right|_{u=\pi/2} = e^{B\pi/2}\frac{\vartheta_2(\pi/2 - ia)}{\vartheta_2(\pi/2 + ia)} = e^{i(\pi-\beta)}$.

В результате для комплексной скорости получается выражение

$$\frac{dw}{dz} = e^{-2i\frac{\beta}{\pi}}\frac{\vartheta_2(u - ia)}{\vartheta_2(u + ia)}.$$

Используя это выражение и условие для скорости в точке $u = \pi\tau/2$

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{u=\pi\tau/2} = e^{-i\beta\tau}\frac{\vartheta_2(\pi\tau/2 - ia)}{\vartheta_2(\pi\tau + ia)} = e^{-i\beta\tau}e^{-2a} = \upsilon_0.$$

для комплексного периода получаем

$$\tau = i\frac{2a + \ln\upsilon_0}{\beta}. \tag{2.1}$$

Ниже будет рассматривается случай, когда $\upsilon_0 < 1$ (давление в каверне повышенное), то есть логарифм в формуле (2.1) отрицателен. Так как коэффициент при $i$ должен быть положительным (условие сходимости рядов, которыми представляются тэта-функции [14]), то требуется, чтобы $2a > |\ln\upsilon_0|$. Но выбор константы $a$ ограничен сверху $2a \leqslant \pi|\tau|$. В предельном случае $2a = \pi|\tau|$ точки $C$ и $B$ совпадают (ниже будет показано, что возвратная струйка при этом исчезает), и из соотношения (2.1) получаются предельные значения параметров, которые определяется только параметрами задачи $\upsilon_0$ и $\beta$:

$$|\tau| = \frac{\ln 1/\upsilon_0}{\pi - \beta}\quad\left(\text{или } 2a = \frac{\pi\ln 1/\upsilon_0}{\pi - \beta}\right). \tag{2.2}$$

При решении задачи можно задавать ширину сопла и находить соответствующий параметр $a$ (или $|\tau|$), но легче делать наоборот задавать $a$ и получать ширину сопла. Параметр $a$ не может быть меньше величины (2.2), при увеличении параметра $a$ появится возвратная струйка, а ширина сопла будет уменьшаться. Нужно еще добавить, что условие для скорости в точке $u = \pi/2 + \pi\tau/2$ при подстановке в него выражения для комплексной скорости с учетом формулы (2.1) выполняется тождественно и не дает никаких дополнительных соотношений.

Производную от потенциала по параметру $dw/du$ можно построить по особым точкам. Подробности такого построения имеются в монографии [14], отметим лишь особые точки функции $dw/du$. Так как функция $w$ имеет логарифмические особенности в источнике (точка $E$: $u = \pi\tau/2$) и в стоках (точки $C$ и $D$: $u = \pi/2 + \pi\tau/2$, $u = 0$, соответственно), то производная $dw/du$ будет иметь в этих точках простые полюса. Имеются две особые точки с нарушением конформности отображения — это точка разветвления потока $B$ ($u = ia$) и угловая точка $A$ ($u = \pi/2$) в них функция $dw/du$ имеет нули. Так как мы должны описать особенности функции во всем периоде $[\pi, \pi\tau]$ добавится еще нуль в симметричной относительно оси точке ($u = -ia$). С учетом особых точек можно составить следующую комбинацию из тэты функций:

$$\frac{dw}{du} = N_1 \frac{\vartheta_2(u - ia)\vartheta_2(u + ia)\vartheta_2(u)}{\vartheta_1(u)\vartheta_3(u)\vartheta_4(u)}.$$

Эта функция является аналитической и имеет простые полюса и нули, соответствующие нашему течению во всем прямоугольнике $[\pi, \pi\tau]$, а в силу периодичности тэта-функций описывает особенности во всем пространстве $u$. Здесь $N_1$ — действительная постоянная.

Константу $N$, а также толщину струй $\delta$ и $\Delta$ определим используя формулу, связывающую интенсивности источников (стоков) в точках $E$, $C$ и $D$ с вычетами функции $dw/du$ в этих точках, например, в точке $E$ ($u = \pi\tau/2$) имеется источник интенсивностью $4hv_0$ (четвертая часть этого источника — интенсивность приходящей струи $hv_0$). Вычет функции $dw/du$ в точке $E$ связан с интенсивностью источника формулой

$$2\pi i \operatorname{Re} s_{\pi\tau/2}\left[\frac{dw}{du}\right] = 4ihv_0.$$

Пользуясь выражением для вычета сложной функции $dw/du$ с обращающейся в ноль функцией в знаменателе (функция $\vartheta_4$ имеет ноль первого порядка в точке $u = \pi\tau/2$) получим следующее выражение для вычета в точке $u = \pi\tau/2$

$$\operatorname{Re} s_{\pi\tau/2}\left[\frac{dw}{du}\right] = N_1 \frac{\vartheta_2(\pi\tau/2 - ia)\vartheta_2(\pi\tau/2 + ia)\vartheta_2(\pi\tau/2)}{\vartheta_1(\pi\tau/2)\vartheta_3(\pi\tau/2)\vartheta_4'(\pi\tau/2)}.$$

Используя свойства тэта-функций и выражение для производной $\vartheta_1' = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$ (здесь аргумент функций $u = 0$), получим формулу, связывающую константу $N_1$ с шириной струи $h$:

$$-\pi N_1 \left(\frac{\vartheta_3(ia)}{\vartheta_2\vartheta_4}\right)^2 = 2hv_0. \tag{2.3}$$

Проделывая ту же процедуру для точки $D$ ($u = 0$), где имеется сток интенсивности $4\Delta v_0$, и используя закон сохранения массы, получим следующие выражения для толщины струй:

$$\frac{\Delta}{hv_0} = \left(\frac{\vartheta_2(ia)\vartheta_2}{\vartheta_3(ia)\vartheta_3}\right)^2, \quad \frac{\delta}{h} = 1 - \left(\frac{\vartheta_2(ia)\vartheta_2}{\vartheta_3(ia)\vartheta_3}\right)^2.$$

Отметим, что функции $\vartheta_2$ и $\vartheta_3$ от мнимого аргумента имеют действительные значения, а при $a = \pi|\tau|/2$ (учитывая, что $\vartheta_2(\pi\tau/2) = q^{-1/4}\vartheta_3$ и $\vartheta_4(\pi\tau/2) = q^{-1/4}\vartheta_2$) толщина обратной струйки обращается в ноль.

### *2.4. Определение геометрических характеристик течения*

Введем функцию $f(u) = \dfrac{dz}{du} = \dfrac{dz}{dw}\dfrac{dw}{du} = N_1\, e^{2i\frac{\beta}{\pi}u} \dfrac{\vartheta_2^2(u + ia)\vartheta_2(u)}{\vartheta_1(u)\vartheta_3(u)\vartheta_4(u)}$. Координату точки разделения потоков $B$ в физической плоскости $z_B = x_B + iy_B$ можно найти, вычислив интеграл

$$z_B = \int\limits_{u=\pi/2}^{u=\pi/2+ia} f(u)du.$$

Выберем в качестве кривой соединяющей точки $\pi/2$ и $\pi/2 + ia$ прямую $u = \pi/2 + i\eta$. При численном решении удобно перейти к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\eta} = -\operatorname{Im}\left[f\left(\frac{\pi}{2} + i\eta\right)\right], \qquad \frac{dy}{d\eta} = \operatorname{Re}\left[f\left(\frac{\pi}{2} + i\eta\right)\right]. \tag{2.4}$$

Система (2.4) решается с начальными условиями при $\eta = 0$; $x = 0$, $y = 0$ на интервале $\eta \in [0, a]$.

Для определения ширины зазора между кромкой пластины и горизонтальной плоскостью $ED$ (ширина выходного сечения сопла $d$) найдем координату некоторой точки $A'$, лежащей на прямой $E$, $D$ (рис. 12в). Для определенности пусть точка $A'$ есть $u = \pi\tau/4$ и кривую интегрирования в плоскости $u$ примем прямой линией, соединяющей точки $A$ и $A'$ $\div\eta = |\tau|(\pi/4 - \xi/2)$. Для комплексной переменной можно написать $u = \xi + i|\tau|(\pi/4 - \xi/2)$. Учитывая эти формулы и разделяя действительную и мнимую части, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\xi} = \operatorname{Re}\left[f(u)\right] + \frac{|\tau|}{2}\operatorname{Im}[f(u)], \qquad \frac{dy}{d\xi} = \operatorname{Im}\left[f(u)\right] - \frac{|\tau|}{2}\operatorname{Re}[f(u)]. \tag{2.5}$$

Система (2.5) интегрируется с начальными условиями: $\xi = \pi/2$; $x = 0$, $y = 0$. Интегрирование проводится на интервале $\xi \in [\pi/2, 0]$. Обозначим конечную точку на наклонной прямой (при $\xi = 0$): $x_n$, $y_n$, тогда можно определить ширину сопла: $d = |y_n|$. Задавая параметр $a$ равным предельному значению (2.2), получаем предельную ширину сопла при заданных $\upsilon_0(\leqslant 1)$, $\beta$ толщину струи $h$ можно положить равной 1. При увеличении параметра $a$ ширина выходного сопла будет уменьшаться и появится возвратная струя жидкости шириной $\delta$.

Для определения формы струй при интегрировании вдоль горизонтальных сторон вспомогательного прямоугольника получаются совсем простые уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \operatorname{Re}\left[f(\xi)\right] \\ \frac{dy}{d\xi} &= \operatorname{Im}\left[f(\xi)\right] \end{aligned} \quad \text{для струи } A,\ D, \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \operatorname{Re}\left[f\left(\xi + \frac{i\pi|\tau|}{2}\right)\right] \\ \frac{dy}{d\xi} &= \operatorname{Im}\left[f\left(\xi + \frac{i\pi|\tau|}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad \text{для } E,\ C. \tag{2.6}$$

Для струи $A$, $D$ при $\xi = \pi/2$; $x = 0$, $y = 0$ интегрирование проводится на интервале $\xi \in [\pi/2, 0]$ с выдачей координат точек струи с некоторым шагом по $\xi$. Несколько сложнее определение координат точек на границе $C$, $E$ (граница каверны) тут интегрирование вдоль $CE$ проводилось с точностью до комплексной константы, которая определялась из удовлетворения асимптотических условий в удаленных точках $E$ и $C$ (то есть граница струи должна выходить на струи известной толщины — $h$ и $\delta$).

### *2.5. Результаты расчетов*

Будем рассматривать случай $\upsilon_0 < 1$. Здесь особенность решения состоит в том, что при заданных физических параметрах ($\alpha = \pi - \beta$ — угол наклона, $d$ — ширина зазора между кромкой наклонной пластины и плоским дном) имеется критическое значение параметра $a$ (следует из (2.2)), при котором струя (каверна) касается наклонной пластины в точке $B$, находящейся на конечном расстоянии от кромки пластины (точка $A$). Толщина возвратной струйки $\delta$ равна нулю. Поверхность струи в этом случае неустойчива в смысле Релея–Тейлора (ускорение направлено из “легкой фазы” в “тяжелую”). Ранее было экспериментально показано [1], что стационарная граница струи в этом случае может рассматриваться как невозмущенная поверхность, относительно которой и развиваются возмущения. Стационарное решение дает возможность определить геометрические характеристики такой области течения и, привлекая дополнительные гипотезы (см. ниже), зная ускорение на границе струи, оценить параметры структур Релея–Тейлора.

На рис. 13 приведены результаты расчетов для $\alpha = 45°$ и $d = 0.4$, критические условия течения тут реализуются при $\upsilon_0 = 0.3$ ($C_d = 1 - \upsilon_0^2 = 0.91$) — кривая *1* (красный цвет). Толстыми линиями изображены наклонная пластина и горизонтальное дно (или ось симметрии), ограничивающие течение. Кривизна границы каверны при критических условиях течения такова (ускорение на границе направлено из “легкой” жидкости в “тяжелую”), что граница раздела жидкости и газа в набегающей струе неустойчива в смысле Релея–Тейлора. Кривизна на границе $EB$ (а, следовательно, и ускорение) монотонно возрастает от нуля (в точке $E$) до бесконечности в точке замыкания каверны на наклонной пластине $B$, которая находится на конечном расстоянии от кромки пластины $A$. Истекающая наружу струя также показана красным цветом. Видно, что небольшое уменьшение коэффициента давления в каверне $C_d$, всего на 0.7% (кривая *2*), приводит к значительному уменьшению области неустойчивости, а затем к исчезновению такой области (кривые *3* и *4*). Это свидетельствует об узости области существования таких режимов, что и подтверждается экспериментом (рис. 10). Однако этот же эксперимент показывает, что такие режимы реально существуют. Нужно иметь в виду, что при увеличении $C_d$ за критическое значение в рамках принятой модели решение

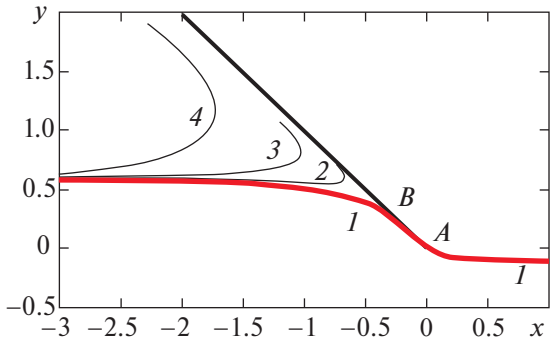



**Рис. 13.** Картина свободных границ при $\alpha = 45°$ и $d = 0.4$, т. $A$ — кромка пластины, $B$ — точка присоединения каверны к пластине. *1* — критическое течение, $v_0 = 0.3$ ($C_d = 0.91$), *2* — $v_0 = 0.31$ ($C_d = 0.904$), *3* — $v_0 = 0.33$ ($C_d = 0.891$), *4* — $v_0 = 0.4$ ($C_d = 0.84$).

не существует, стационарная струя уже не может взаимодействовать с наклонной стенкой, реально же процесс перемешивания продолжается и даже интенсифицируется [2]. Так что механизм Р–Т перемешивания можно продлить в закритическую область, и этот режим может зависеть от длины участка $BA$. На рис. 13 и далее все длины отнесены к ширине струи $h$.

На рис. 14 показано сравнение границ критических течений для различных $d = 0.013$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 (границы струй показаны красным цветом). Этим значениям $d$ соответствуют следующие значения безразмерной скорости $v_0 = 0.01$, 0.15, 0.3, 0.462, 0.67 или $C_d = 0.9999$, 0.978, 0.91, 0.787, 0.551. Коэффициент давления критического режима течения разделяет области различных типов автоколебаний. Ранее отмечалось, что низкочастотные автоколебания возникают при коэффициентах давления в каверне больших указанных выше критических значений. Из рис. 14 видно, что с уменьшением ширины сопла уменьшается критическая скорость $v_0$ (увеличивается давление в каверне) и растет расстояние между точкой присоединения каверны и кромкой сопла.

На рис. 15 представлена картина свободных границ течения для 4-х углов наклона пластины и для ширины выходного сечения сопла — 0.4. При углах наклона 30°, 45°, 90°, 135° и ширине сопла 0.4 критический режим имеет место при $v_0 = 0.325$, 0.3, 0.263, 0.253. Видно, что критическое значение $v_0$ (и $C_d$) слабо зависит от угла наклона пластины, а вот с уменьшением угла (меньше 90°) начинает сильно увеличиваться

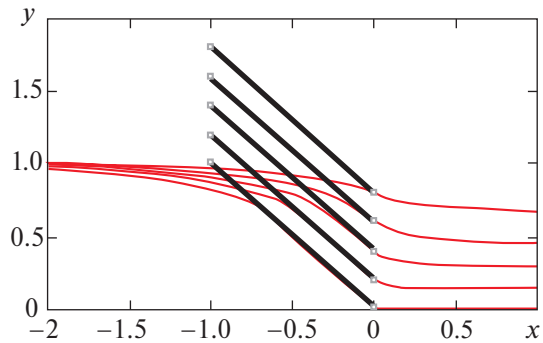



**Рис. 14.** Картина свободных границ для угла наклона пластины 45° и $d = 0.013$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8.

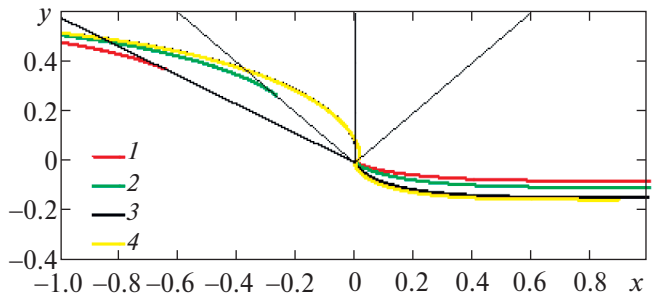



**Рис. 15.** Картина свободных границ при критическом режиме течения для $d = 0.4$ и углов наклона пластины 30°, 45°, 90°, 135° (*1–4*, соответственно).

расстояние от точки присоединения каверны до кромки пластины, при углах больших 90° зависимость картины течения от угла почти пропадает.

Представленные на рис. 16 зависимости коэффициента давления и расстояния от точки замыкания каверны до кромки пластины от величины зазора $d$ для критических условий течения показывает, что критический коэффициент давления слабо зависит угла наклона пластины и, в основном определяется величиной зазора $d$. Но от наклона пластины сильно зависит положение точки присоединения каверны.

В задаче о развороте струи под действием перепада давления [1] имелась область течения с постоянной кривизной границы каверны. В рассматриваемом случае кривизна каверны монотонно растет от нуля в бесконечно удаленной точке $E$ до бесконечности в точке присоединения каверны к пластине $B$. Для качественной оценки введем некоторую эффективную величину радиуса кривизны каверны $R_c$, равную радиусу окружности касающейся наклонной пластины в точке $B$ и горизонтальной прямой $Y = 1$, соответствующей границе струи в точке $E$ (на бесконечности). Ускорение частиц жидкости на окружности можно оценить как $E_c = v_0^2/R_c$. Как показывает осциллограмма (рис. 11) высокочастотный автоколебательный режиме имеет одномодовый (одночастотный) характер. Для случая одномодового перемешивания получена формула [16] для скорости движения релей-тейлоровских пузырей при больших значениях времени $v_b = 0.23\sqrt{\lambda W_c}$, где длина волны $\lambda = v_0/f$ (имеем дело со стоячими, относительно жидкости, волнами), а частоту можно связать с числом Струхаля $f = (V_\infty/D_c)\mathrm{Sh}$. Тогда для скорости движения пузыря можно написать

$$\frac{V_b}{V_\infty} = 0.23 v_0 \sqrt{\frac{v_0}{\frac{R_c}{h}\frac{h}{D_c}\mathrm{Sh}}}.$$

Для наших условий втекание струи через отверстие шириной $D_c$ из широкой трубы (отношение $D_c$ к ширине подводящей трубы 0.22) величина $h/D_c$ примерно равна 0.62, число Струхаля возьмем из эксперимента (рис. 11): Sh = 0.13. Оценим глубину проникновения Релея–Тейлора пузырей $L_b$, отнесенную к ширине струи $h$, для углов наклона пластины 45 и 90°, по скорости $v_b$ и времени прохождения соответствующей дуги окружности радиуса $R_c$ со скоростью $v_0$. Итак, формула для движения Р–Т-пузырей получена при следующих допущениях: 1) каверну можно заменить некоторой эффективной окружностью, 2) развитие Р–Т-структур происходит в режиме одномодового перемешивания, 3) частотные характеристики волн можно взять из аналогичного осесимметричного эксперимента.

На рис. 17 представлены зависимости глубины перемещения структур Релея–Тейлора внутрь струи за время прохождения дуги эффективной окружности (с поворотом на 45 и 90°, красный и зеленый цвет) — сплошные кривые. Для сравнения штрихами показаны кривые для глубины $L_{bb}$, полученные в предположении, что при движении жидкости вдоль пластины на участке $BA$ развитие структур происходит по тому же закону. Видно, что, если оценивать развития структур, только на дуге окружности эволюция пузырей для 45 и 90° примерно одинакова, с учетом участка $BA$ для 90° отличие незаметно, а для 45° (см. штриховую кривую) весьма существенно. В зависимости от ширины выходного сечения сопла имеется максимум глубины проникновения структур Релея–Тейлора в струю, причем глубина этого перемещения вполне сравнима с шириной истекающей струи, равной соответствующему значению $v_0$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены исследования автоколебательных режимов течения на осесимметричной модели кавитационного генератора импульсных струй с центральным расположением истекающей из отверстия в диафрагме диаметром 10 мм струи. Эффективность генератора определялась по интенсивности ударного воздействия истекающих струй на экран — препятствие.

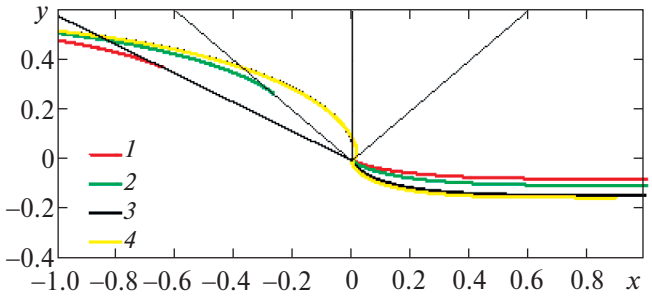



**Рис. 16.** Зависимости критического коэффициента давления ($C_d$) и расстояния от точки замыкания каверны $B(L)$ до кромки пластины от ширины зазора $d/h$ при критическом режиме течения для углов наклона 45° и 90°.

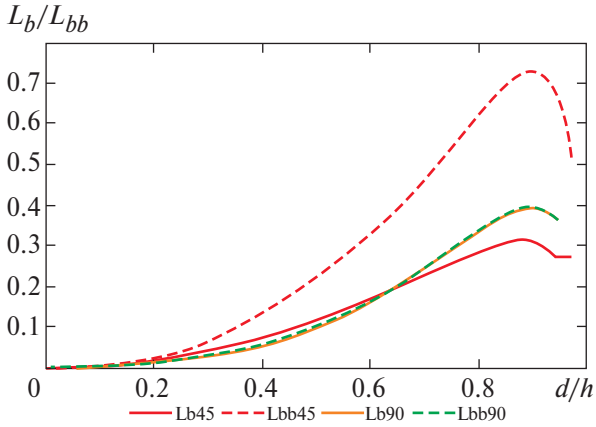



**Рис. 17.** Зависимость глубины проникновения Релея–Тейлора структур $L_b/L_{bb}$ от ширины выходного сечения $d/h$ для углов наклона пластины 45° и 90°.

В зависимости от диаметра выходного сечения сопла имеется максимум — наибольшая интенсивность ударных воздействий наблюдается при диаметре выходного сечения 7 мм.

Обнаружено, что интенсивность ударных импульсов на экране в зависимости от дистанции до экрана падает примерно пропорционально корню квадратному от расстояния.

При сравнительно небольших поддувах газа обнаружена узкая область существования высокочастотных автоколебаний с очень малой интенсивностью колебаний давления в каверне и значительными импульсными воздействиями на экран — препятствие. Это может быть связано с возникновением неустойчивости Релея–Тейлора границы каверны с повышенным по сравнению с наружным давлением. Такое предположение обосновано анализом полученного точного решения плоской задачи о взаимодействии конечной струи, движущейся вдоль плоской стенки (плоскости симметрии), с наклонной пластиной при различных давлениях на поверхностях набегающей и истекающей струй.

Показано, что стационарное течение с неустойчивой по Релею–Тейлору границей действительно реализуется вблизи предельного течения, когда толщина возвратной струи обращается в ноль и набегающая струя касается наклонной пластины в некоторой точке выше срывной кромки пластины. Получена связь между коэффициентом давления в каверне (или числом кавитации), углом наклона пластины и шириной зазора между срывной кромкой пластины и плоскостью симметрии. С принятием ряда допущений и используя экспериментальные данные, проведены оценки глубины Р–Т-перемешивания, показывающие, что эта глубина сравнима с шириной истекающей струи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов И.И., Прокофьев В.В.* Закономерности развития волн на поверхности каверны с отрицательным числом кавитации // Доклады РАН. 2006. Т. 409. № 1. С. 43–47.
2. *Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В.* Автоколебательные режимы в жидкой струйной завесе, разделяющей газовые области с различными давлениями // Изв. РАН МЖГ. 2013. № 6. С. 33–43.
3. *Очеретяный С.А., Прокофьев В.В.* Влияние сужения сопла на работу генератора периодических импульсных струй // Изв. РАН МЖГ. 2022. № 2. С. 14–26.
4. *Atanov G.A., Semko A.N.* Numerical Analysis of the Jet Flows of Compressible Water // Proc. of International Summer Scientific School «High Speed Hidrodynamics». June 2004, Cheboksary. Computational Publications. Russia. 2004. P. 39–44.
5. *Семко А.Н.* Импульсные струи жидкости высокой скорости и их применение: монография // под общ. ред. Семко А.Н. Донецк: ДонНУ. 2014. 370 с.
6. *Савченко Н.В., Яхно О.М.* Гидродинамические способы создания пульсирующих струй для гидроразрушения твердых материалов // Вестник Сумского гос. ун-та. Сер.: Технические науки. 2003. № 12 (58). С. 92–98.
7. *Пилипенко В.В.* Кавитационные автоколебания. Киев: Наукова думка. 1989. 318 с.
8. *Жулай Ю.А., Дзоз Н.А., Задонцев В.А., Бурылов С.В., Новиков В.Ф.* Возможность очистки путевой структуры пульсирующими и кавитирующими струями воды при движении подвижного состава // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального ун-та железнодорожного транспорта им. Академика В. Лазаряна. 2005. № 8. С. 151–155.
9. *Прокофьев В.В., Очеретяный С.А., Яковлев Е.А.* Использование кавитационных автоколебательных режимов для генерации периодических импульсных струй // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 1. С. 97–108.

10. *Очеретяный С.А., Прокофьев В.В.* Влияние параметров кавитатора и сопла на эффективность работы генератора импульсных струй // Изв. РАН МЖГ. 2023. № 5. С. 10–24.
11. *Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В.* О различных модах автоколебаний в течениях с вентилируемой каверной и возможности из использования для формирования периодических импульсных струй // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 16–27.
12. *Толоконников С.Л.* Истечение жидкости через щель в плоской стенке при наличии источника переменной интенсивности на плоскости симметрии течения // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 3. С. 40–45.
13. *Козлов И.И., Прокофьев В.В., Пучков А.А.* Исследование развития волновых структур на неустойчивой границе каверны с помощью скоростной видеокамеры // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 137–148.
14. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
15. *Birkhoff G., Zarantonello E.H.* Jets, Wakes and Cavities. New York. Academic Press Inc. Publishers. 1957. Перевод с английского. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
16. *Герценштейн С.Я., Козлов И.И., Прокофьев В.В., Резниченко Н.Т., Черный Г.Г., Чернявский В.М.* Неустойчивость Рэлея–Тейлора в ячейке Хеле–Шоу: влияние начальных возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 3. С. 12–18.

# Self-Oscillations in an Axisymmetric Generator of Pulsed Jets and High-Frequency Regime Associated with Cavity Boundary Instability

**© 2025 S. A. Ocheretyanyi*, V. V. Prokof'ev**, E. V. Topeitsev, and E. V. Filatov**

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192 Russia*

**e-mail: ocheret@imec.msu.ru*
***e-mail: vlad.prokof@yandex.ru*

Liquid jet flows in the presence of a ventilated cavity with a negative cavitation number are investigated. The studies carried out in the Institute of Mechanics of Moscow State University show that under certain conditions cavitation-induced self-oscillations can occur in the hydraulic system with highly intense pressure fluctuations. The results of an investigation of the axisymmetric model of a pulsed jet generator with liquid jet outflow through a central orifice in a diaphragm and gas blow from the periphery beyond the diaphragm are presented. The two-phase medium outflow was realized through a convergent conical nozzle. The influence of the generator parameters and the distance to a wall (screen) on the efficiency of its operation is investigated. A narrow range of comparatively small blowing, in which high-frequency pressure oscillations are recorded, while the amplitude of impact pressure pulses on the screen is considerably higher than the amplitude of pulses in high-frequency generation regimes, is revealed. This flow regime can be due to the development of two-phase structures on the unstable jet boundary interactioning with the convergent nozzle walls. The evidence for the possible existence of this flow regime has been given by the solution of the plane problem of interaction between a finite jet and an inclined plate for different pressures on the jet surfaces. The problem was solved exactly using the methods of theory of functions of a complex variable for quasi-doubly-periodic theta functions.

*Keywords:* jet flows, cavities, negative cavitation number, cavitation-induced self-oscillations, pulsation technologies

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 30–36

УДК 532.522

# ОБ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ ЛАМИНАРНЫХ СТРУЙ

© 2025 г. А. М. Гайфуллин*, А. С. Щеглов**

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, Жуковский, Россия*

*e-mail: gaifullin@tsagi.ru
**e-mail: shcheglov@phystech.edu

Поступила в редакцию 10.03.2025 г.
После доработки 21.03.2025 г.
Принята к публикации 23.03.2025 г.

Рассмотрены задачи о ламинарных струях, допускающие автомодельные решения. Предложен способ определения параметра автомодельности, исходя из условия существования решения уравнений в автомодельных переменных при заданных граничных условиях только при одном параметре автомодельности. Параметры автомодельности в задачах о плоских свободной и пристенной струях определены аналитически. Определение параметра автомодельности в задаче о трехмерной пристенной струе осуществляется с помощью нейронной сети.

*Ключевые слова:* пристенные струи, автомодельность, параметр автомодельности, нейронные сети, ламинарная струя

**DOI:** 10.31857/S1024708425030034

В классических задачах о распространении плоской и осесимметричной струй, вытекающих из тонкой щели или точечного источника в затопленное пространство, параметр автомодельности для решения уравнений пограничного слоя определяется из анализа инвариантов струйного течения: потока импульса струи [1–3]. В задаче о распространении плоской пристенной струи параметр автомодельности определяется из инварианта Акатнова [4, 5]. Для трехмерной пристенной струи аналогичный инвариант неизвестен, и для определения параметра автомодельности строится численное решение трехмерной задачи [6].

Предположение об автомодельности решения, даже с неизвестным показателем автомодельности, позволяет понизить порядок уравнений. Возможно ли при этом определение параметра автомодельности, исходя из анализа этих автомодельных уравнений? Оказалось, что по крайней мере для упомянутых выше струйных течений это возможно. Такая возможность будет продемонстрирована в статье на примерах ламинарных плоской свободной и плоской пристенной струй, а также для трехмерной ламинарной пристенной струи. Во всех случаях жидкость предполагается несжимаемой.

## 1. ПЛОСКАЯ ЛАМИНАРНАЯ ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ

В рамках уравнений пограничного слоя для плоской свободной струи справедливы уравнения [2]

$$\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} = \nu\psi_{yyy} \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$\psi = 0, \quad \psi_{yy} = 0\ (y = 0), \quad \psi_y \to 0\ (y \to \pm\infty). \tag{1.2}$$

Ось $x$ направлена по оси симметрии струи, бьющей из начала координат, $\psi$ — функция тока, $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости, нижние индексы здесь и в дальнейшем указывают на соответствующие частные производные.

Обычно автомодельный вид решения определяется из условия сохранения в направлении оси $x$ потока импульса $J = \rho\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = const$, где $\rho$ — плотность, $u$ — продольная компонента скорости. Но возможен и другой путь. Представим решение в автомодельном виде с неизвестным показателем автомодельности $k$

$$\psi = \nu^{1/2}x^{1-k}f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\nu^{1/2}x^k}. \tag{1.3}$$

Подстановка (1.3) в (1.1), (1.2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению (штрих означает дифференцирование по $\eta$)

$$f''' + (1-k)ff'' + (2k-1)f'^2 = 0 \tag{1.4}$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'(\pm\infty) \to 0. \tag{1.5}$$

Покажем, что нетривиальное решение задачи (1.4), (1.5) существует только при $k = 2/3$. Порядок уравнения (1.4) можно понизить, если ввести новую функцию $f' = \lambda(f)$

$$\frac{d}{df}\left(\lambda\frac{d\lambda}{df}\right) + (1-k)f\frac{d\lambda}{df} + (2k-1)\lambda = 0. \tag{1.6}$$

Проинтегрировав (1.6) по $f$ от нуля до максимальной функции тока, получим

$$\left[\lambda\frac{d\lambda}{df} + (1-k)f\lambda\right]\Bigg|_0^{f_{\max}} + (3k-2)\int\limits_0^{f_{\max}} \lambda df = 0. \tag{1.7}$$

Выражение в квадратных скобках в силу граничных условий равно нулю. Что касается $\int_0^{f_{\max}} \lambda df$, то из физического условия отсутствия в струе отрицательной продольной (вдоль оси $x$) компоненты скорости подынтегральное выражение является положительным. Единственная возможность удовлетворить условию (1.7) — положить $k = 2/3$.

## 2. ПЛОСКАЯ ЛАМИНАРНАЯ ПРИСТЕННАЯ СТРУЯ

Для описания плоской ламинарной пристенной струи — струи, бьющей из тонкой щели параллельно бесконечной твердой плоскости, в рамках уравнений пограничного слоя остается справедливым уравнение (1.1), но с другими граничными условиями [4, 8]

$$\psi = 0, \qquad \psi_y = 0\ (y = 0), \qquad \psi_y \to 0\ (y \to +\infty). \tag{2.1}$$

Параметр автомодельности для задачи (1.1), (2.1) определяется из условия сохранения инварианта Акатнова $E = \int_0^{+\infty} \psi u^2 dy = const$. Как и в предыдущем пункте, опишем другой путь.

Для задачи (1.1), (2.1) справедливо уравнение (1.6), но, если проинтегрировать его так же, как это сделано в (1.7), то выражение в квадратных скобках оказывается для данного случая не равным нулю. Поэтому умножим уравнение (1.6) на $f$

$$f\frac{d}{df}\left(\lambda\frac{d\lambda}{df}\right) + (1-k)f^2\frac{d\lambda}{df} + (2k-1)\lambda f = 0$$

и после этого проинтегрируем его по $f$ от нуля до максимальной функции тока

$$\left[\lambda f\frac{d\lambda}{df} - \frac{\lambda^2}{2} + (1-k)f^2\lambda\right]\Bigg|_0^{f_{\max}} + (4k-3)\int\limits_0^{f_{\max}} \lambda f\, df = 0. \tag{2.2}$$

Теперь выражение в квадратных скобках равно нулю, подынтегральное выражение положительно, и единственная возможность выполнить равенство (2.2) — положить $k = 3/4$.

## 3. ТРЕХМЕРНАЯ ЛАМИАРНАЯ ПРИСТЕННАЯ СТРУЯ

Будем считать, что трехмерная струя бьет из точки параллельно бесконечной твердой плоскости. Введем декартову систему координат $(x, y, z)$ с осью $x$, направленной вдоль линии выдува струи и лежащей на твердой плоскости (рис. 1), соответствует точке выдува струи, $(u, v, w)$ — компоненты скорости во введенной системе координат, $\rho$ — плотность, $p/\rho$ — давление.

Характеристики течения в струе подчиняются парабализованным уравнениям Навье–Стокса [6]

$$\begin{gathered} u_x + v_y + w_z = 0, \\ uu_x + vu_y + wu_z = \nu\left(u_{yy} + u_{zz}\right), \\ uv_x + vv_y + wv_z = -p_y + \nu\left(v_{yy} + v_{zz}\right), \\ uw_x + vw_y + ww_z = -p_z + \nu\left(w_{yy} + w_{zz}\right). \end{gathered} \tag{3.1}$$

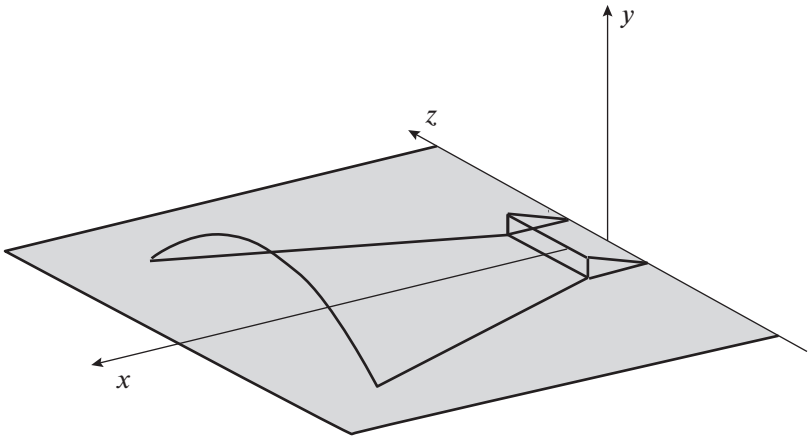



**Рис. 1.** Система координат и схема задачи.

Для трехмерной ламинарной пристенной струи инварианты неизвестны, поэтому неизвестно и каким условиям должна удовлетворять струя в точке истечения. Во избежание такой неопределенности можно считать, что струя с конечной скоростью выдувается из малого круглого отверстия, находящегося на небольшой высоте от твердой плоскости, и рассматривать характеристики струи в дальнем поле.

Система уравнений (3.1) допускает автомодельное решение, если

$$\begin{aligned} u(x,y,x) &= \nu^{1-2\alpha}x^{1-2k}U(\eta,\zeta), \qquad v(x,y,z) = \nu^{1-\alpha}x^{-k}V(\eta,\zeta),\\ w(x,y,x) &= \nu^{1-\alpha}x^{-k}W(\eta,\zeta), \qquad p(x,y,z) = \nu^{2-2\alpha}x^{-2k}P(\eta,\zeta). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $\eta = y/\nu^{\alpha}k^{k}$, $\zeta = z/\nu^{\alpha}x^{k}$, $\alpha$ — неизвестная константа, $k$ — искомый показатель автомодельности. Подстановка представления (3.2) в систему уравнений (3.1) определяет четыре уравнения в частных производных для функций $U(\eta,\zeta)$, $V(\eta,\zeta)$, $W(\eta,\zeta)$, $P(\eta,\zeta)$, которые обозначим через $f_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$

$$\begin{aligned} f_1(\eta,\zeta) &= (1-2k)U - k\eta U_\eta - k\zeta U_\zeta + V_\eta + W_\zeta = 0,\\ f_2(\eta,\zeta) &= \left[(1-2k)U - k\eta U_\eta - k\zeta U_\zeta\right]U + VU_\eta + WU_\zeta - U_{\eta\eta} - U_{\zeta\zeta} = 0,\\ f_3(\eta,\zeta) &= -k\left[V + \eta V_\eta + \zeta V_\zeta\right]U + VV_\eta + WV_\zeta + P_\eta - V_{\eta\eta} - V_{\zeta\zeta} = 0,\\ f_4(\eta,\zeta) &= -k\left[W + \eta W_\eta + \zeta W_\zeta\right]U + VW_\eta + WW_\zeta + P_\zeta - W_{\eta\eta} - W_{\zeta\zeta} = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из условия симметрии систему уравнений (3.3) достаточно рассмотреть при $\zeta \geqslant 0$. Определим граничные условия для (3.3). На твердой поверхности ставится условие прилипания

$$U = V = W = 0 \quad (\eta = 0). \tag{3.4}$$

На линии симметрии

$$U_\zeta = V_\zeta = W = 0 \quad (\zeta = 0). \tag{3.5}$$

На большом радиальном расстоянии $\left(r = \sqrt{\eta^2+\zeta^2} \to \infty\right)$ от оси $x$ справедливо асимптотическое разложение [6], из которого следует, что для осевой компоненты скорости следует ставить условие затухания, а для поперечных компонент скорости из-за подсасывающего действия струи сохраняется величина расхода (в цилиндрической системе координат произведение радиальной компоненты скорости на радиус стремится к постоянной величине, а азимутальная компонента скорости стремится к нулю)

$$U \to 0, \quad (V\eta + W\zeta)_r \to 0, \quad \frac{V\zeta - W\eta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}} \to 0 \quad (r \to +\infty,\ \eta \neq 0)\,. \tag{3.6}$$

Параметр автомодельности $k$ должен определяться из совместности уравнения (3.3) с граничными условиями (3.4)–(3.6). Таким образом, константа $k$ будет определяться не из решения трехмерной задачи (3.2), как это сделано в работе [6], а из решения двумерной задачи (3.3)–(3.6).

Аналитически определить параметр $k$ аналогично тому, как это сделано в предыдущих двух пунктах, не удалось, поэтому этот параметр будет определяться численно. Следует отметить, что применение к уравнениям (3.3) стандартных методов расчета уравнений в частных производных, каковыми являются, например, методы конечных разностей или конечных объемов, затруднительно. Дело в том, что все граничные условия нулевые, а система уравнений (3.3) имеет тривиальное решение: $U = V = W = 0$. Кроме того, параметр $k$ неизвестен, а при любом неправильно заданном $k$ система (3.3)–(3.6) не имеет решения.

Предлагается следующий способ решения уравнений (3.3)–(3.6). Они будут решаться при различных $k$ с помощью физически-информированной нейронной сети (PINN) [9]. Будут использоваться полносвязные сети, имеющие $N$ внутренних слоев и по 20 элементов (нейронов) в каждом слое (рис. 2). Для всех внутренних слоев применяется функция активации $\sigma(x) = \mathrm{th}(x)$, $y_0$ — входной вектор, $y_1, \ldots, y_N$ — векторы внутреннего состояния, $y_{N-+}$ — выходной вектор, $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_{N+1}$ — неизвестные матрицы весов, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{N+1}$ — неизвестные векторы смещений. Эти параметры должны быть найдены в процессе обучения нейронной сети.

Целевая функция $R = R_1 + R_2$ состоит из двух частей: $R_1$ — функция потерь для управляющих уравнений по всем внутренним точкам области, $R_2$ — функция потерь по граничным точкам. Процесс обучения представляет следующую задачу минимизации:

$$\min_{\mathbf{W},\mathbf{b}} R(\mathbf{W}, \mathbf{b}). \tag{3.7}$$

Минимизация проводится с помощью алгоритма LBFGS, реализованного в библиотеке pytorch.

Для решения поставленной задачи будем использовать выборку точек, состоящую из $n = (n_r - 1) \times \times n_\varphi + 1 = 57421$ точек (рис. 3). Распределение по углу равномерное в количестве $n_\varphi = 90$ точек, а по радиусу для $0 \leqslant r \leqslant 10$ также равномерное ($n_{r_1} = 500$ точек), а для $10 < r \leqslant r_{\max}$ интервал между радиусами растет с коэффициентом 1.03 ($n_{r_2} = 139$ точек), $n_1 = n_{r_1} + n_{r_2} = 639$, $r_{\max} = 50$.

Для получения нетривиального решения поставим дополнительное условие

$$U(\eta_*, \zeta_*) = U_*, \tag{3.8}$$

где $\eta_* = 0.4$, $\zeta_* = 0$, $U_* = 1$. Ни координаты точки $\eta_*$, $\zeta_*$, ни величина навязанной скорости $U_*$ в последнем условии не имеют значения, так как масштабированием функций и координат в (3.3) можно перевести данное условие в аналогичное другое.

Конкретизируем нейронную сеть. Примем $N = 4$, $y_0 = (\eta, \zeta)$, $y_{N+1} = (U, V, W, P)$, общее число параметров — 1824 (без учета $k$).

Первый член целевой функции

$$R_1 = \frac{1}{n_{in}} \sum_{i=1}^{n_{in}} \left( f_1^4(\eta_i, \zeta_i) + f_2^2(\eta_i, \zeta_i) + f_3^3(\eta_i, \zeta_i) + f_4^2(\eta_i, \zeta_i) \right).$$

Второй член

$$R_2 = \frac{1}{n_r} \sum_{i=1}^{n_r} \left[ U^2(0, \zeta_i) + L^{-2} V^2(0, \zeta_i) + L^{-2} W^2(0, \zeta_i) \right] + \frac{1}{n_\varphi - 2} \sum_{i=2}^{n_{\varphi-1}} \left[ U^2(\eta_i, \zeta_i) + L^{-2} V^2(\eta_i, \zeta_i) + \right.$$
$$\left. + L^{-2} W^2(\eta_i, \zeta_i) \right] \Big|_{r=r_{\max}} + \frac{1}{n_r - 1} \sum_{i=2}^{n_r} \left[ L^2 U^2(\eta_i, 0) + V_\zeta^2(\eta_i, 0) + L^{-2} W^2(\eta_i, 0) \right] + \left[ U(\eta_*, \zeta_*) - U_* \right]^2.$$

Здесь $L = 1$ — единичный размер, введенный для соблюдения размерностей.

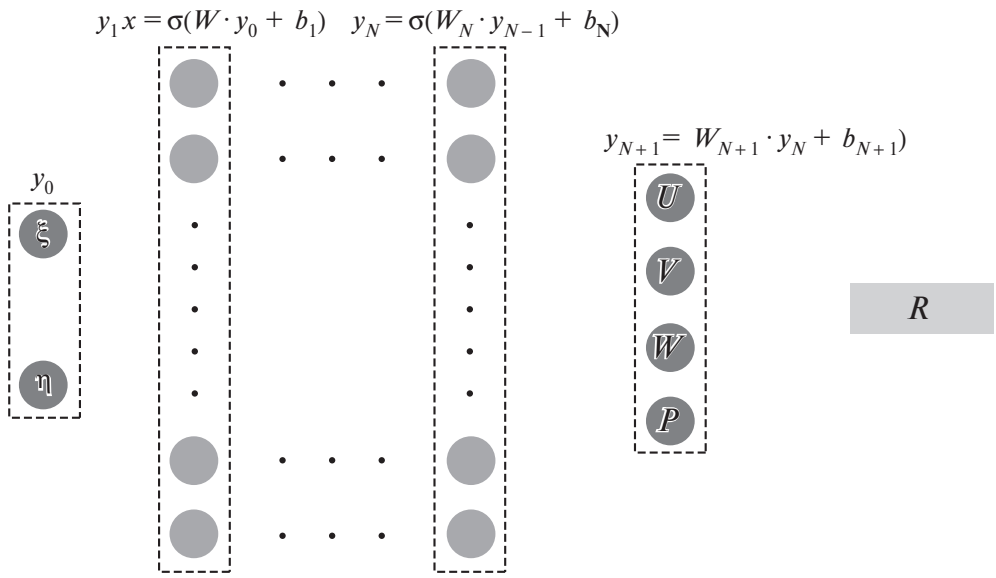



**Рис. 2.** Архитектура нейронной сети.

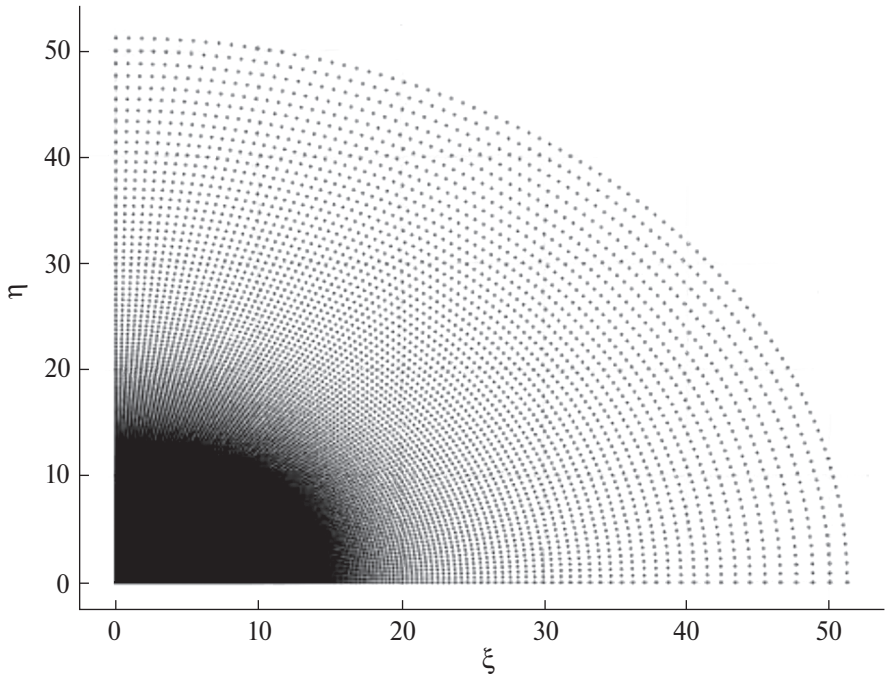



**Рис. 3.** Выборка точек, в которых проводится вычисление целевой функции $R$.

В последних формулах количество граничных точек вдоль оси $\zeta$, как уже отмечалось, равно $n_r$, вдоль оси $\eta$ также равно $n_r$, но точка $\zeta = \eta = 0$ уже была учтена в суммировании вдоль оси $\zeta$; вдоль окружности $r = r_{\max}$ количество граничных точек $n_\varphi$, при этом две точки уже были учтены при суммировании вдоль осей $\zeta$ и $\eta$, $n_{in} = n - (2n_r + n_\varphi - 3) = 56056$ — количество внутренних точек.

В отличие от задачи (3.3)–(3.6), задача (3.3), (3.7), (3.8) будет иметь решение при любом параметре $k$. При этом решения при разных $k$ будут отличаться значениями $R$. Выбор из всех значений $R$ минимального позволяет определить искомый параметр $k$. Минимум достигается при $k \approx 1.363$, когда величина $R \approx 3 \cdot 10^{-6}$ близка к нулю. Отличие от нуля объясняется погрешностями численного решения.

Покажем, что при $k \approx 1.363$ решение задачи (3.3), (3.7), (3.8) близко к решению, полученному в [6].

На рис. 4 приведены линии тока поперечного течения, полученные в настоящей работе и определяемые уравнением

$$\frac{d\varsigma}{W(\varsigma,\eta)} = \frac{d\eta}{V(\varsigma,\eta)}.$$

Эти линии наглядно характеризуют структуру течения в струе. Как и в работе [6], присутствует предельная линия тока, отделяющая область внутреннего течения (в которой линии тока направлены от центра

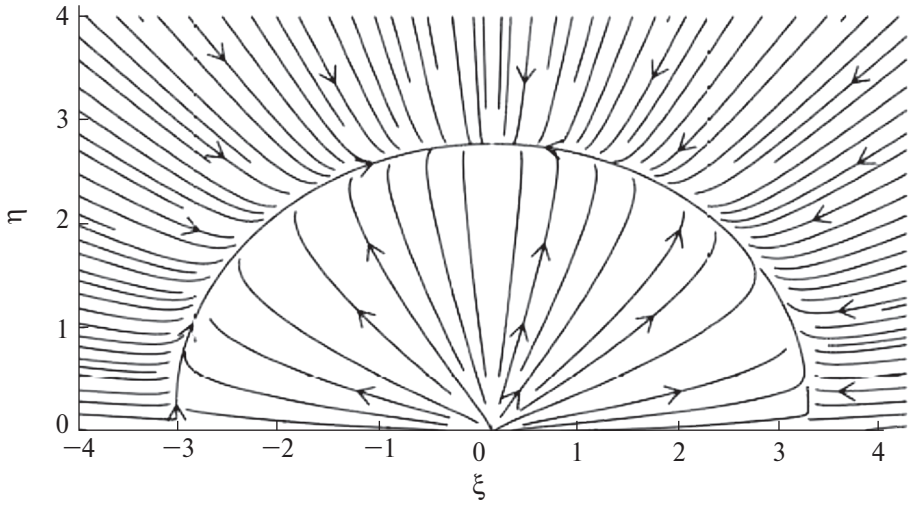



**Рис. 4.** Линии тока поперечного течения.

струи вследствие ее торможения) от области внешнего течения (в которой линии тока направлены к центру струи). Всюду за исключением окрестности предельной линии тока азимутальная компонента скорости много меньше радиальной.

На рис. 5 слева приведены профили скорости $U(\eta)$, построенные в плоскости симметрии $\varsigma = 0$. Для того, чтобы профили данной работы можно было сравнивать с профилями работы [6], их необходимо построить в одних и тех же безразмерных переменных. В качестве безразмерной координаты выбрана $\eta/\eta_{1/2}$, где $\eta_{1/2}$ — значение координаты, при котором скорость достигает половины максимального значения, а в качестве безразмерной скорости — $U/U_{\max}$. На рис. 5 справа приведены аналогичные профили для вертикальной компоненты скорости $V$. Профили, полученные с помощью нейронной сети в настоящей работе (сплошные линии), находятся в близком соответствии с автомодельными профилями работы [6], полученными для Re = 200 (круглые маркеры).

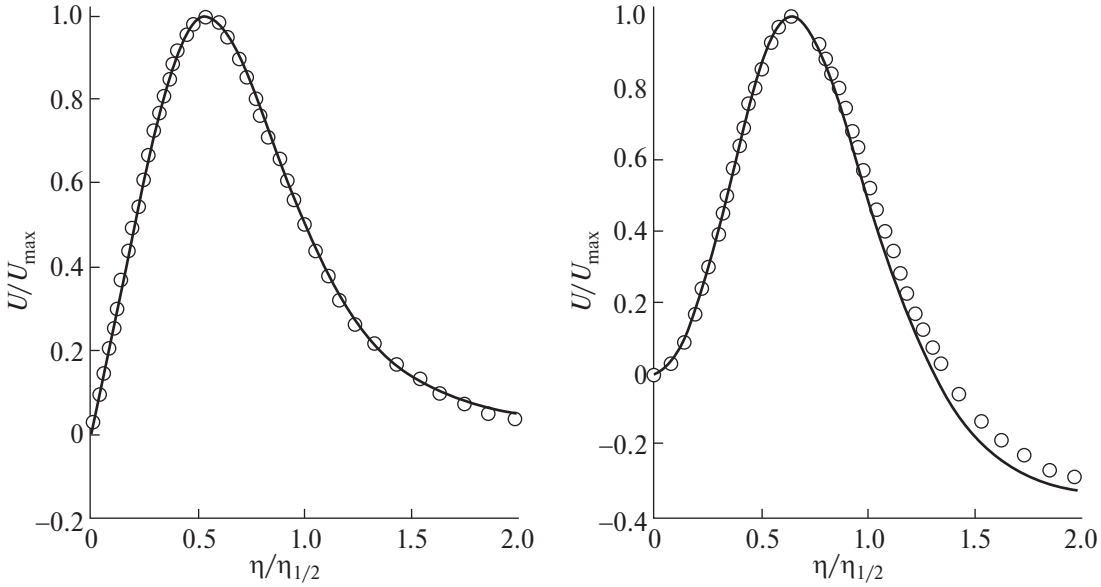



**Рис. 5.** Профили скорости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Течение в дальнем поле трехмерной пристенной струи выходит на автомодельный режим. Так как в отличие от свободных струй и от плоской пристенной струи, для трехмерной пристенной струи неизвестен инвариант, сохраняющийся в процессе ее эволюции, одной из возможностей определения показателя автомодельности является численное решение полной трехмерной задачи [6]. Вместе с тем имеется и вторая возможность: исходя из предположения, что решение задачи в автомодельных переменных существует только при одном значении показателя автомодельности, найти это решение. Такое решение трудно найти традиционными методами конечных разностей или конечных объемов, так как оно существует только при одном показателе автомодельности, который изначально неизвестен.

С помощью искусственных нейронных сетей возможно построение решения при любом показателе автомодельности, поскольку при этом не требуется точного удовлетворения всех уравнений и граничных условий, а требуется только, чтобы при заданном показателе автомодельности целевая функция ошибок была минимальной. Естественно, что при показателе автомодельности, равном показателю, при котором система с заданными граничными условиями имеет решение, целевая функция будет близка к нулю. Таким образом, физически реализуемый показатель автомодельности определяется исходя из минимума целевой функции.

Следует заметить, что определенный в данной работе показатель автомодельности для трехмерной пристенной струи $k \approx 1.363$ близок к полученному в работе [6] значению $4/3$, а также к полученному в [7] диапазону значений 1.32–1.33.

Научное исследование выполнено за счет гранта российского научного фонда № 23-11-00210, https://rscf.ru/project/23-11-00210/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schlichting H.* Laminare Strahlausbreitung // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1933. Jg. 13. No. 4. S. 260–263.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
3. *Bickley W.G.* LXXIII. The plane jet // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1937. V. 23. No. 156. P. 727–731.
4. *Акатнов Н.И.* Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // Тр. Ленинградского политех. ин-та. 1953. № 5. С. 24–31.
5. *Glauert M.B.* The wall jet // Journal of Fluid Mechanics. 1956. V. 1. No. 6. P. 625–643.
6. *Бут И.И., Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Дальнее поле трехмерной пристенной ламинарной струи // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 6. С. 51–61.
7. *Gaifullin A.M., Shcheglov A.S.* Self-Similarity of a Wall Jet with Swirl // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. V. 43. No. 5. P. 1098–1103.
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
9. *Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. V. 378. P. 686–707.

# On Self-Similarity of Laminar Jets

**© 2025 A. M. Gaifullin* and A. S. Shcheglov****

*Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow oblast, Russia*

**e-mail: gaifullin@tsagi.ru*
***e-mail: shcheglov@phystech.edu*

The problems of laminar jets that admit self-similar solutions are considered. A method for determining the self-similarity parameter is proposed based on the condition of existence of a solution to equations in self-similar variables under given boundary conditions with only a single self-similarity parameter. In problems of plane free and wall jets the self-similarity parameters are determined analytically. In the problem of a three-dimensional wall jet, the self-similarity parameter is determined using a neural network.

*Keywords:* wall jets, self-similarity, self-similarity parameter, neural networks, laminar jet

*ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 37–46*

*УДК 532.522*

# ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ НА РЕЖИМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**© 2025 г. Ю. Н. Галанская*, Г. Н. Дудин**, А. Я. Чудаков*****

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл., Россия*

**e-mail: galanskaya@yandex.ru*
***e-mail: gndudin@yandex.ru*
****e-mail: cairen@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.03.2025 г.
После доработки 22.04.2025 г.
Принята к публикации 24.04.2025 г.

Рассмотрено сверхзвуковое течение вязкого газа около верхней поверхности затупленной пластины конечной длины на режиме взаимодействия. Исследовано влияние температурного фактора на возмущение давления, которое инициировалось установкой клина в конце пластины, на аэротермодинамические характеристики течения и распространение возмущений вверх по потоку. Численные расчеты выполнены в рамках решения стационарных двумерных уравнений Навье–Стокса.

*Ключевые слова:* сверхзвуковое течение, вязкость, затупленная пластина, температурный фактор, взаимодействие, возмущение давления

**DOI:** 10.31857/S1024708425030046

Краевые задачи об обтекании острой полубесконечной пластины для значений основного параметра взаимодействия $\chi_{x\infty} = \sqrt{C_\infty}\mathrm{M}_\infty^3/\sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}} \to \infty$ [1], где $\mathrm{M}_\infty$ — число Маха, $\mathrm{Re}_{x\infty} = \rho_\infty u_\infty x/\mu_\infty$ — местное число Рейнольдса, $C_\infty$ — коэффициент в зависимости вязкости от температуры [2], а индекс «∞» — обозначает параметры в невозмущенном потоке, были сформулированы и исследованы в [3, 4]. В предельном случае при $\mathrm{M}_\infty \to \infty$: $u_\infty$ — скорость, $\rho_\infty$ — плотность и $H_\infty$ — энтальпия стремятся к постоянным значениям, $p_\infty$ — давление, $a_\infty$ — скорость звука и $T_\infty$ — температура — к нулю, причем краевую задачу можно привести к автомодельному виду. В случае выполнения предположения о сильном взаимодействии $\mathrm{M}_\infty\delta_0 \gg 1$, характерными для таких течений являются масштабы величин: $\delta_0 = \mathrm{Re}_0^{-1/4}$ — безразмерная толщина ламинарного пограничного слоя, где $\mathrm{Re}_0 = \rho_\infty u_\infty x/\mu_0$ — местное число Рейнольдса, в котором динамический коэффициент вязкости $\mu_0$ вычисляется при температуре торможения $T_0$, $p^0 \approx \rho_\infty u_\infty^2\delta_0^2$ — индуцированное давление и $\rho^0 \approx \rho_\infty\delta_0^2$ — плотность газа в пограничном слое.

При преобразовании краевой задачи к автомодельному виду в этих работах предполагалось, что пограничный слой, описываемый уравнениями Прандтля, и ударный слой существуют одновременно вплоть до передней кромки пластины [3, 4] и взаимодействуют друг с другом. Указанные масштабы для функций течения существенно отличаются от их значений для пограничного слоя при умеренных сверхзвуковых скоростях [5, 6]. Было установлено, что при обтекании пластины на режиме сильного взаимодействия при параметре $\chi_{x\infty} \to \infty$ формируется более толстый пограничный слой, сравнимый по толщине с ударным слоем, и имеющий высокую температуру и малую плотность. Из-за высокой температуры в пограничном слое возрастает скорость звука $a \approx a_\infty\sqrt{(\gamma-1)/2}M_\infty$, где $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты, а размер области дозвукового течения около поверхности пластины значительно увеличивается.

Это приводит к новому эффекту, который был установлен в [7, 8] при исследовании течений около пластины конечной длины. В [7] впервые было показано, что при параметре $\chi_{x\infty} \to \infty$ разложения для функций течения в окрестности передней кромки вдоль продольной оси не являются единственными, а содержат

параметр, который позволяет удовлетворить условию на задней кромке пластины. Интенсивность распространения возмущений против потока определялась значением собственного числа, которое находилось из интегрального соотношения при решении краевой задачи для вторых членов разложения [6, 7].

Фактически это означает возможность распространения возмущений против потока вплоть до передней кромки по дозвуковой части течения в пограничном слое. Наиболее сильно этот эффект проявляется при обтекании теплоизолированной пластины. При основном параметре взаимодействия $\chi_{x\infty} \to \infty$, показателе адиабаты $\gamma = 1.4$ и числе Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$ было получено значение собственного числа $\alpha \approx 23.4$ [6–8]. В [6, 7] предполагалось, что зависимость вязкости от температуры является линейной $\mu/\mu_0 = T/T_0$ и, следовательно, коэффициент $C_\infty = 1$. Заметим, что построенные разложения не позволяют решить задачу вплоть до задней кромки пластины, так как данные ряды очевидно являются расходящимися в ней. Полученные разложения только определяют отход от автомодельного решения в случае, когда заданное донное давление отличается от автомодельного, соответствующего обтеканию полубесконечной пластины. При рассмотрении обтекания охлаждаемой пластины собственные числа существенно увеличиваются. Для низких значений температурного фактора $S_w = T_w/T_0 \to 0$ и $\gamma = 1.4$ собственные числа имеют порядок $\alpha \approx 0.0897 S_w^{-6}$ [8, 9].

При построении разложений в [7, 8] использовалось предположение, что уравнения пограничного слоя справедливы вплоть до передней острой кромки. Однако, учитывая, что при приближении к ней местное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{x\infty} = \rho_\infty u_\infty x/\mu_\infty$ уменьшается и может стать, например, $\mathrm{Re}_{x\infty} < 100$, тогда справедливость применения в этой области уравнений пограничного слоя оказывается под вопросом [5]. Еще более проблематичным становится использование в этой области уравнений пограничного слоя при больших числах Маха, так как при выводе уравнения энергии для пограничного слоя необходимо выполнить более жесткое условие $\mathrm{M}_\infty^2/\mathrm{Re}_{x\infty} < 0.01$ [5]. Следовательно, при $\mathrm{M}_\infty \gg 1$ размер области в окрестности острой передней кромки, в которой теория пограничного слоя Прандтля неправомерна, существенно увеличивается. Это означает, что разложения для функций течения, построенные в [6–8] в окрестности передней кромки, могут оказаться не корректными.

В случае обтекания острой пластины, когда основной параметр взаимодействия порядка единицы ($\chi_{L\infty} = O(1)$), т. е. реализуется режим умеренного вязко-невязкого взаимодействия, автомодельных решений не существует [1], а, следовательно, построение разложений для функций течений, которые представляют собой возмущения автомодельного решения, в принципе, не представляется возможным. В [10] представлены результаты влияния возмущений давления, задаваемые на выходной границе расчетной области, проходящей через заднюю кромку, на распространение возмущений против потока в рамках решения двумерной стационарной задачи с использованием уравнений Навье–Стокса при значении основного параметра взаимодействия $\chi_{L\infty} \approx 4.1$. Было установлено, что в возмущенной области течения на передней части пластины при $x/L \leqslant 0.25$ нарушаются условия применимости уравнений пограничного слоя, а значения собственных чисел, которые определяют интенсивность распространения возмущений против потока, оказались в два раза меньше, чем для предельного случая $\chi_{L\infty} \to \infty$.

При обтекании затупленной пластины при достаточно больших сверхзвуковых скоростях, если $\mathrm{Re}_{d\infty} = \rho_\infty u_\infty d/\mu_\infty$ — число Рейнольдса, вычисленное по $d$ — толщине передней кромки, не является достаточно малым, то поле давления в случае невязкого газа, связанное с затуплением, является преобладающим на передней части тела и определяет первоначальный рост пограничного слоя [1, 11]. Заметим, что при обтекании затупленной пластины даже для значения $\chi_{L\infty} \to \infty$ автомодельных решений в принципе не существует. На тонком и достаточно длинном притупленном теле пограничный слой развивается внутри энтропийного, что выводит модель пограничного слоя за рамки классической (эффект вихревого вязко-невязкого взаимодействия, или энтропийный эффект) [12]. На передней части при $\mathrm{Re}_{x\infty} = \rho_\infty u_\infty x/\mu_\infty \leqslant 10^2$ образуется сплошной вязкий слой, т. е. влияние вязкости распространяется на весь возмущенный слой [12]. Расстояние вдоль пластины $l_{eq}$, на котором давление на плоском затупленном тонком теле в случае течения невязкого газа сравнивается с индуцированным давлением при течении вязкого газа на режиме сильного взаимодействия, определяется величиной $l_{eq} \approx d \cdot (\mathrm{Re}_{d\infty}/(M_\infty^2 C_\infty))^3$ [1, 12]. Далее вниз по течению явления вязкого взаимодействия, как и на острой пластине, снова могут играть существенную роль. Экспериментальные исследования [13] показали, что при течении около затупленной пластины область возмущенного течения значительно увеличивается, а возмущения против потока распространяются сильнее, чем в случае обтекания острой пластины.

Целью данной работы является исследование влияния заданной постоянной температуры поверхности на локальные характеристики в возмущенной области течения и распространение возмущений против потока на затупленной пластине конечной длины в режиме взаимодействия, для которого основной параметр взаимодействия $\chi_{L\infty} = \sqrt{C_\infty} \cdot \mathrm{M}_\infty^3/\sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}} = O(1)$.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается сверхзвуковое обтекание вязким газом затупленного тела. Система координат $x$, $y$ и основные размеры модели указаны на рис. 1. Верхняя поверхность модели представляет собой пластину длиной $L$ = 133 мм и толщиной 4 мм с закругленным передним краем (радиус закругления $r$ = 4 мм), а нижняя — такой же толщины с передней кромкой в виде одностороннего клина (угол при вершине 30°). Для создания возмущений давления на расстоянии $L_k$ = 105 мм от носика пластины устанавливались клинья длиной 28 мм с углами $\alpha_k$ = 0°, 15°, 30°, 40°, 50°. Параметры в невозмущенном потоке: температура $T_\infty$ = 256 K, давление $p_\infty$ = 36 Па, скорость $u_\infty$ = 2600 м/с, динамический коэффициент вязкости $\mu_\infty = 1.63 \cdot 10^{-5}$ Па·с и удельная теплоемкость $c_{p\infty}$ = 1003 Дж/(кг·K). Числа Рейнольдса, вычисленные по длине пластины $L_k$ и радиусу закругления $r$, равны соответственно: $\mathrm{Re}_{L_k} = \rho_\infty u_\infty L_k/\mu_\infty = 8207$ и $\mathrm{Re}_{r\infty} = \rho_\infty u_\infty r/\mu_\infty = 312$. Основной параметр взаимодействия $\chi_{L_k\infty} = \sqrt{C_\infty} \cdot \mathrm{M}_\infty^3/\sqrt{\mathrm{Re}_{L_k\infty}} = 5.9$, в котором полагается, что коэффициент $C_\infty = 1$ [1]. Заметим, что для заданных параметров условия применимости уравнений Прандтля $\mathrm{M}_\infty^2/\mathrm{Re}_{x\infty} < 0.01$, не выполняются на передней поверхности пластины при значениях продольной координаты $0 \leqslant x/L_k \leqslant 0.79$.

Численные расчеты проводились с использованием двумерных стационарных уравнений Навье–Стокса. Учитывая, что число Рейнольдса, вычисленное по толщине передней кромки $\mathrm{Re}_{r\infty} = 312$, то в рассматриваемом случае нельзя считать такую кромку “острой”, так как согласно[1] для нее должно выполняется условие $\mathrm{Re}_{d\infty} < 100$. Следовательно, передняя кромка может оказывать существенное влияние на распределение давления вдоль поверхности пластины. Расстояние, на котором давление на плоском затупленном тонком теле в течении невязкого газа сравнивается с индуцированным давлением на плоской пластине при течении вязкого газа на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия, можно оценить из соотношения $l_{eq} \approx r\left(\mathrm{Re}_{r\infty}/(M_\infty^2 \cdot C_\infty)\right)^3 = 432$ мм [1], что в 4 раза превышает расстояние до начала установки клина $L_k$ = 105 мм. Следовательно, в рассматриваемом случае можно ожидать, что затупление передней кромки будет сильно влиять на развитие вязкого взаимодействия и интенсивность распространения возмущений давления против потока. Для проведения численных расчетов использовались сетки, содержащие примерно 600–650 тысяч ячеек в зависимости от угла наклона клина. Длина расчетной области в 2.6 раза больше общей длины пластины $L$ = 133 мм, а поперечный размер примерно в 1.7 раза превышает толщину возмущенной области течения (от поверхности пластины до головного скачка). Расчет ламинарного стационарного течения совершенного воздуха выполнен пакетом ANSYS Fluent (лицензия № 501024) с помощью Density-based solver, со вторым порядком аппроксимации по пространству. На входной поверхности расчетной области задавались параметры для невозмущенного потока. На поверхности пластины и клина — условие прилипания и постоянная температура. На выходной границе расчетной области, в следе за пластиной на расстоянии $1.6 \cdot L$, задавались мягкие условия.

Ниже результаты расчетов приведены только до $x = L_k$, т. е. до места установки клина. Особенности течения в окрестности затупления пластины и клина в данной работе не обсуждаются, т. к. основное внимание в ней уделено вопросам распространения возмущений давления на горизонтальной части пластины.

## 2. ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ БЕЗ КЛИНА

В данном разделе приведены результаты расчета “невозмущенного” обтекания верхней поверхности затупленной пластины для трех значений ее температуры: $T_w$ = 350 K, 700 K и 1400 K. Под “невозмущенным” течением подразумевается обтекание пластины при отсутствии клина ($\alpha_k$ = 0°).

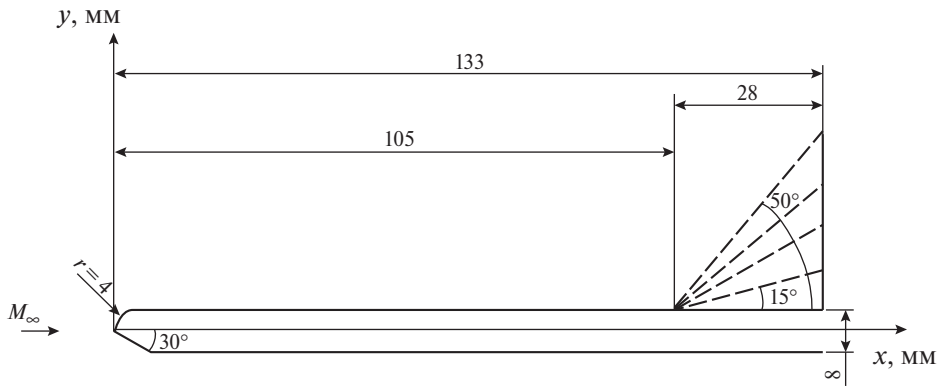



**Рис. 1.** Система координат, схема и размеры модели.

Распределения безразмерного индуцированного давления на поверхности пластины $p_w^*(x^*) = p_w(x^*)/p_\infty$, где $x^* = x/L_k$ — безразмерная продольная координата, вдоль ее горизонтальной части от $x^* = 0.04$ до $x^* = 1$ при $T_w = 350$ K, 700 K и 1400 K (кривые *1–3*) приведены на рис. 2. Увеличение температуры пластины в четыре раза приводит к возрастанию давления на поверхности на 18–21%. Заметим, что в случае, если тело в потоке будет нагреваться в рассмотренном диапазоне температур, то можно ожидать, что и сила сопротивления, обусловленная давлением, так же увеличится. Вдоль пластины на рассматриваемой части поверхности давление при фиксированной температуре монотонно уменьшается в 4 раза. Чтобы лучше оценить характер этого уменьшения, представим функцию безразмерного давления в виде $p_w^*(x^*) = (x^*)^{-n} p_w^*(x^* = 1)$, где переменный показатель степени $n$ определяется выражением $n(x^*) = \ln[p_w(x^* = 1)/p_w(x^*)]/\ln(x^*)$. Полученные зависимости $n(x^*)$ от продольной координаты для $T_w = 350$ K, 700 K и 1400 K (кривые *4–6*) приведены на рис. 2. Увеличение температуры поверхности пластины в 2 раза приводит к уменьшению показателя степени $n(x^*)$ примерно на 4%. Отметим, что при значениях продольной координаты $x^* = 0.052$ показатели степени достигают минимальных значений и, соответственно, равны $n(x^* = 0.052) = 0.562$, 0.556, 0.543 (кривые *4–6*). Далее, вдоль пластины до координаты $x^* = 0.8$ они монотонно возрастают, где принимают значения $n(x^* = 0.8) = 0.683$, 0.657, 0.627, а затем остаются практически постоянными до $x^* = 1.0$. Учитывая, что даже минимальные значения $n(x^* = 0.052) > 1/2$, характер уменьшения давления вдоль пластины нигде не приближается к значению $n = 1/2$, который является характерным для изменения индуцированного давления на заостренной пластине для предельного режима сильного вязко-невязкого взаимодействия (автомодельное решение при $\chi_{L\infty} \to \infty$ [3, 4]. Следует отметить, что для продольной координаты $x^* > 0.6$, полученные величины показателя степени $n(0.6 \leqslant x^* \leqslant 1.0)$ близки к $n = 2/3 \approx \approx 0.667$, а эта величина является показателем степени для распределения давления на затупленном тонком теле при невязком обтекании [1, 14, 15]. Следовательно, в рассматриваемом случае примерно на 40% длины затупленной пластины давление изменяется по закону близкому к $(x^*)^{-2/3}$, а не $(x^*)^{-1/2}$ — как для заостренной пластины. Таким образом, можно утверждать, что для заданных параметров течения решение краевой задачи в рамках уравнений Навье–Стокса существенно отличается от автомодельного решения [3, 4].

Численные расчеты также показали, что форму границы головного скачка уплотнения для значений продольной координаты $0.5 < x^* \leqslant 1.0$ можно аппроксимировать степенной функцией с показателем степени $n = 0.667$, что близко к 2/3, которые соответствуют границе скачка при обтекании затупленного тонкого тела идеальным газом [1, 14, 15]. Следовательно, в рассматриваемом случае на 50% длины затупленной платины скачок изменяется по закону $(x^*)^{2/3}$, а не $(x^*)^{3/4}$ — как для заостренной пластины. Анализ формы профиля продольной компоненты скорости $u(y_w)/u_\infty$, где $y_w = (y - r)/L_k$ безразмерное расстояние от верхней горизонтальной поверхности пластины, показал, что на передней части пластины при $x^* \approx 0.1$ практически вся возмущенная область течения является вязкой. Невязкая часть, расположенная около головного скачка, т. е. «невязкий» ударный слой очень тонкий и занимает не более 10%. При значениях координаты $x^* \approx 0.25$ область ударного слоя расширяется и составляет уже ~18% расстояния от поверхности пластины до головного скачка. Ниже по течению область «невязкого» ударного слоя увеличивается и при $x^* \approx 1.0$ достигает ~40%, что в полтора раза меньше, чем толщина пограничного слоя. Важно отметить, что для заданных определяющих параметров вязкий слой занимает большую часть возмущенной области

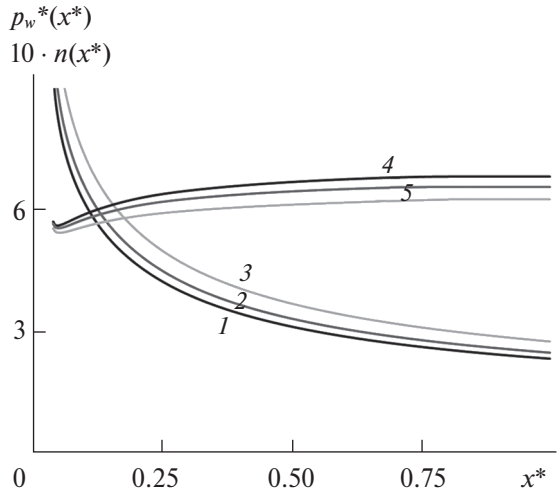



**Рис. 2.** Зависимости распределения давления $p_w^*(x^*)$ (*1–3*) и показателя степени $n(x^*)$ (*4–6*) вдоль поверхности пластины при значениях температуры $T_w = 350$ K, 700 K, 1400 K.

течения. Анализируя форму профиля безразмерной температуры $T(y_w)/T_\infty$ в сечении $x^* \approx 0.1$ можно также сделать вывод, что здесь еще нет четкого разделения между “невязким” ударным и пограничным слоем. Максимальная температура в этом сечении достигает значений почти 1480 K, 1510 K и 1640 K соответственно для $T_w$ = 350 K, 700 K и 1400 K. Вниз по течению максимальная температура в возмущенной области течения уменьшается. Заметим, что температура в “невязком” ударном слое, при значении координаты $x^* \approx 0.5$, достигает почти 570 K, 580 K и 600 K что, примерно, в 2.2–2.3 раза превосходит температуру набегающего потока. Профили безразмерной плотности газа $\rho(y_w)/\rho_\infty$ показывают, что около поверхности пластины, наблюдается пониженная плотность газа, что связано с повышением температуры газа в этой области течения. Для координаты $x^* = 0.5$ в нижней части пограничного слоя минимальная плотность в 1.45, 1.47 и 1.69 раза меньше ($T_w$ = 350 K, 700 K и 1400 K), чем в набегающем потоке. Заметим, что в ударном слое плотность растет почти по линейному закону и примерно в 4–6 раз превышает минимальные значения плотности газа в нижней части пограничного слоя.

Профили безразмерного индуцированного давления $p^* = p(y_w)/p_\infty$ в сечениях $x^* = 0.25$, 0.5 и 0.75 при температуре поверхности пластины $T_w$ = 350 K (кривые *1–3*) и $T_w$ = 1400 K (кривые *4–6*) приведены на рис. 3. Как уже отмечалось выше, увеличение температуры поверхности пластины в 4 раза приводит к увеличению давления на поверхности пластины $p^*(y_w = 0)$ примерно на 18–21%, однако при этом за ударной волной давление увеличивается значительно меньше — только на 6–9%, т. е. в два–три раза меньше. При этом граница возмущенной области отодвигается от поверхности на 4–5%. При анализе представленных результатов численных расчетов давления в поле течения необходимо иметь в виду, что в классической теории пограничного слоя Прандтля градиент давления по нормали к поверхности пластины в рассматриваемых переменных $\partial p^*/\partial y_w$ должен быть достаточно малой величиной. Если в сечении $x^* = 0.75$ (кривые *3–6*) еще можно считать, что это условие выполняется примерно в половине возмущенной области течения, то при $x^* = 0.5$ (кривые *2–5*) это условие явно начинает нарушаться. При значениях $x^* = 0.25$ (кривые *1–4*) градиент давления $\partial p^*/\partial y_w$ во всей вязкой области возмущенного течения является не малым. Следовательно, из приведенных распределений индуцированного давления, можно сделать вывод, что в окрестности передней части пластины для $x^* \leqslant 0.5$ для заданных определяющих параметров теория пограничного слоя Прандтля не совсем корректна.

## 3. ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ДАВЛЕНИЯ НА ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОТИВ ПОТОКА

Далее рассматривается обтекание затупленной пластины с установленными клиньями длиной 28 мм. Клин устанавливался на пластине на расстоянии $x = L_k$ от ее передней кромки. Общая длина пластины $L_k$ и клина равна $L$ = 133 мм. Углы наклона клиньев $\alpha_k = 0°, 15°, 30°, 40°, 50°$. В данном разделе исследуется распространение возмущений индуцированного давления против потока, которое создается установленным на пластине клином.

Зависимости распределения безразмерного давления $p_w^*(x^*) = p_w(x^*)/p_\infty$ на поверхности пластины $0.04 < x^* \leqslant 1$ при $\alpha_k = 0°, 30°, 50°$ для значений температуры поверхности $T_w$ = 350 K, (кривые *1–3*) и 1400 K (кривые *4–6*) приведены на рис. 4. Увеличение угла наклона клина приводит к образованию отрыва и существенному увеличению области распространения возмущений против потока при $\alpha_k = 30°$ (кривые *2*, *5*), при $\alpha_k = 50°$ (кривые *3*, *6*). При $\alpha_k = 50°$ (кривые *3*, *6*) образуются обширные зоны “плато”

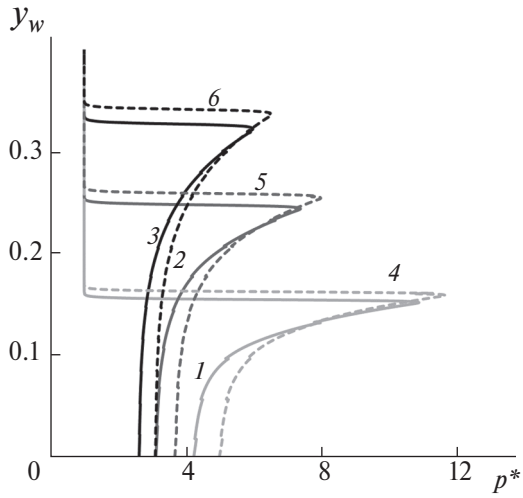



**Рис. 3.** Профили давления $p^*$ в сечениях $x^* = 0.25$, 0.5, 0.75 при значениях температуры $T_w$ = 350 K (*1–3*), $T_w$ = 1400 K (*4–6*).

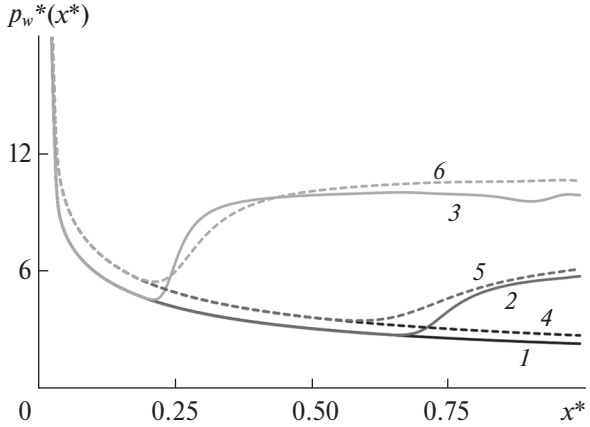



**Рис. 4.** Распределения безразмерного давления $p_w^*(x^*)$ на поверхности пластины при $\alpha_k$ = 0°, 30°, 50° для значений температуры $T_w$ = 350 K (*1–3*), $T_w$ = 1400 K (*4–6*).

давления, что может приводить к значительному увеличению сопротивления. Увеличение температуры пластины от значения $T_w$ = 350 K до 1400 K незначительно увеличивает давление на поверхности в области "плато" давления. Однако, важно отметить, что увеличение температуры поверхности пластины приводит к тому, что возмущение давления, т. е. отход от "невозмущенного" течения (кривые *1*, *4*), становится более плавным: при $T_w$ = 350 K (кривые *2*, *3*) и 1400 K (кривые *5*, *6*). Фактически это означает, что интенсивность распространения возмущений давления против потока усиливается с увеличением температуры поверхности. Как будет показано ниже, это приводит к существенному уменьшению показателя степени (эквивалента собственного числа). Характер этого изменения может оказать влияние на аэродинамический момент $m_z$. На рис. 5 приведены зависимости безразмерных координат границы головного скачка $\Delta_{ck}(x^*) = (y_{ck}(x^*) - r)/L_k$ при $T_w$ = 350 K (кривая *1*) и при 1400 K (кривая *4*). Увеличение температуры поверхности в 4 раза приводит к незначительному увеличению поперечного размера возмущенной области течения, примерно на 4.5%. При фиксированной температуре поверхности, граница головного скачка уплотнения практически не зависит от угла $\alpha_k$, за исключением области $x^* > 0.95$, где отмечаются небольшие отклонения вниз, менее чем на 3%. На рис. 5 приведены также координаты линий тока $\Delta_{M=1}(x^*) = y_w(x^*, M = 1)$ для $\alpha_k$ = 30°, 50° при $T_w$ = 350 K (кривые *2–3*) и при 1400 K (кривые *5–6*), представляющих собой верхнюю границу дозвуковой области течения около поверхности пластины. При увеличении угла наклона клина поперечные размеры дозвуковой области существенно увеличиваются. Если при $\alpha_k$ = 0° толщина дозвуковой области в окрестности координаты $x^*$ = 1 составляет примерно 3.5% при $T_w$ = 350 K и 8% при $T_w$ = 1400 K от всей возмущенной области течения, то при $\alpha_k$ = 30° (кривые *2*, *5*) — 19.5% при $T_w$ = 350 K и 24% при $T_w$ = 1400 K, а для $\alpha_k$ = 50° (кривые *3*, *6*) — 50% при $T_w$ = 350 K и 54% при $T_w$ = 1400 K. Заметим, что увеличение температуры пластины в 4 раза оказывает заметное влияние на толщину дозвуковой области течения и отодвигает линию тока, на которой M = 1, примерно на 4% вверх от поверхности пластины.

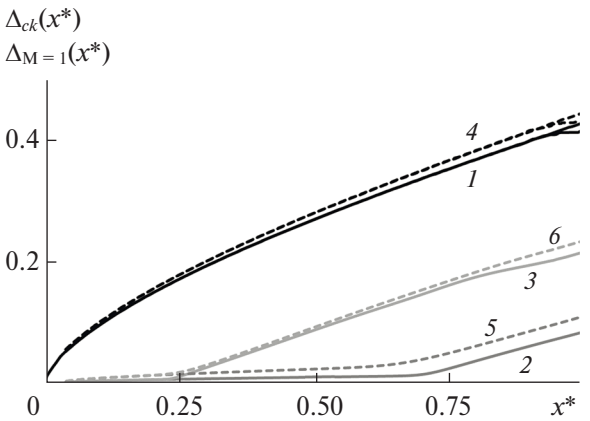



**Рис. 5.** Зависимости безразмерных координат границы скачка $\Delta_{ck}(x^*)$ при $\alpha_k$ = 30°, 50° для значений температуры $T_w$ = 350 K (*1*), $T_w$ = 1400 K (*4*) и линии тока $\Delta_M = 1(x^*)$ при $\alpha_k$ = 30°, 50° для $T_w$ = 350 K (*2*, *3*), $T_w$ = 1400 K (*5*, *6*) вдоль пластины.

Зависимости коэффициента напряжения трения в продольном направлении $c_u = 2\mu_w/(\rho_\infty u_\infty^2)\times$ $\times(\partial u/\partial y_w)_w$ и числа Стантона $\mathrm{St} = \lambda_w/\left(\rho_\infty u_\infty c_p(T_w - T_\infty)\right)\cdot(\partial T/\partial y_w)_w$ при углах клина $\alpha_k = 0°$, 30°, 50° для $T_w = 350$ K (кривые *1–3*) и $T_w = 1400$ K (кривые *4–6*) вдоль пластины для $0.04 \leqslant x^* \leqslant 1$ приведены на рис. 6а,б. При отсутствии клина ($\alpha_k = 0°$) изменение температуры от $T_w = 350$ K (кривая *1*) до $T_w = 1400$ K (кривая *4*) приводит к увеличению коэффициента трения $c_u$ на 14–21% (рис. 6а) и уменьшению числа Стантона St почти в 20 раз (рис. 6б). Увеличение коэффициента $c_u$, связанное с нагревом поверхности, может так же приводить к увеличению сопротивления тела. При увеличении угла клина $\alpha_k$, как уже отмечалось выше, образуются отрывные области. При увеличении температуры пластины $T_w$ в 4 раза координата точки отрыва $x^* \approx 0.78$ для $\alpha_k = 30°$ практически не изменяется (кривые *2*, *5*), а для клина с углом $\alpha_k = 50°$ она смещается от $x^* = 0.268$ до $x^* = 0.304$ (кривые *3*, *6*), а, следовательно, в этом случае продольный размер отрывной области немного уменьшается на $\Delta x^* = 0.036$. В табл. 1 приведены значения координат точек отрыва, в которых коэффициент напряжения трения впервые обращается в ноль ($c_u = 0$), для рассмотренного диапазона температуры поверхности пластины и углов клина.

Заметим также, что при $\alpha_k = 50°$ и $T_w = 350$ K в области $0.695 \leqslant x^* \leqslant 0.829$ значения коэффициента напряжения трения на пластине $c_u > 0$ и здесь образуется поверхностный вторичный вихрь. Существенно не монотонный характер изменения коэффициента $c_u$ в отрывной зоне при $\alpha_k = 50°$ и $T_w = 350$ K (кривая *3*, рис. 6а) приводит к немонотонному изменению числа Стантона (кривая *3*, рис. 6б).

Как отмечалось во введении, на режиме сильного взаимодействия для значения основного параметра взаимодействия $\chi_{L\infty} \to \infty$, интенсивность распространения возмущений давления против потока в переменных, учитывающих особенности поведения функций течения в окрестности острой передней кромки, определяется величиной собственного числа $\alpha$ [6–8]. При числе Прандтля Pr = 1, отношении удельных теплоемкостей $\gamma = 1.4$ и значении температурного фактора $T_w/T_0 = 1$ собственное число равно $\alpha \approx 23.4$ [7]. В случае, когда основной параметр взаимодействия $\chi_{L\infty} \to \infty$, краевая задача сводится к автомодельной [6–8] и интенсивность распространения возмущений против потока определялась, как отход от автомодельного решения. В рассматриваемом случае автомодельных решений не существует и интенсивность распространения возмущений определяется, как отход от “невозмущенного” течения. В этом случае возникает вопрос о задании координаты на поверхности пластины, в которой возмущения, вызванные установкой клина с заданным углом $\alpha_k$, можно считать малыми. В рассматриваемых случаях, в качестве такой координаты выбирается безразмерная координата $x^*(\Delta p_w^* = 0.1\%)$, в которой возмущения давления, вызванные установкой клина $\alpha_k$, приводят к отклонению от “невозмущенного” давления на величину $\Delta p_w^* = 10^2\left[p_w^*(x^*, \alpha_k) - p_w^*(x^*, \alpha_k = 0)\right]/p_w^*(x^*, \alpha_k = 0) = 0.1\%$. В табл. 2 приведены значения координат

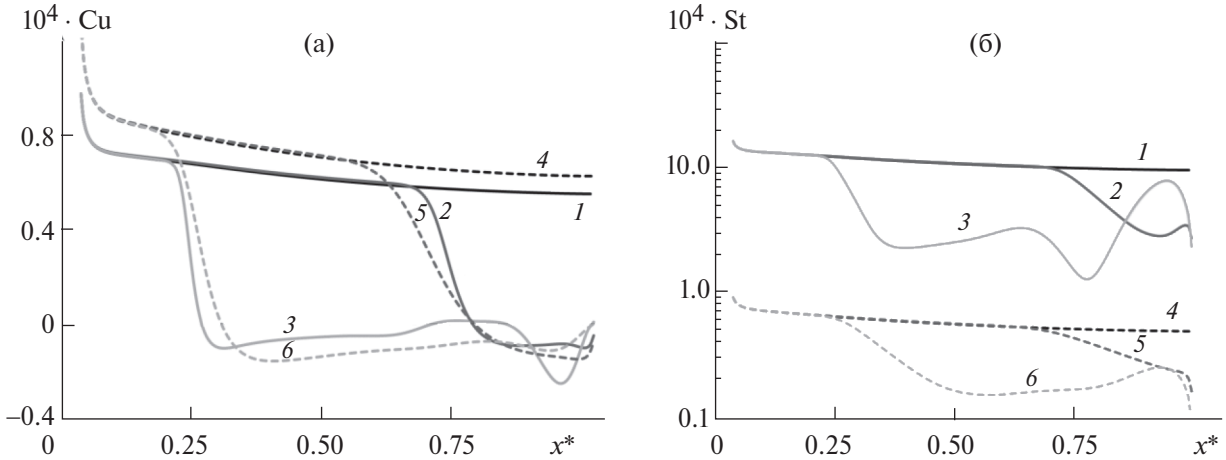



**Рис. 6.** Зависимости коэффициента напряжения трения в продольном направлении $c_u$ (*а*) и числа Стантона St (*б*) при углах клина $\alpha_k = 0°$, 30°, 50° для $T_w = 350$ K (кривые *1–3*) и $T_w = 1400$ K (кривые *4–6*) вдоль пластины.

**Таблица 1.** Значения координат точек отрыва, в которых коэффициент напряжения трения впервые обращается в ноль, для рассмотренного диапазона температуры поверхности пластины и углов клина

| $T_w$ \ $\alpha_k$ | 15° | 30° | 40° | 50° |
|---|---|---|---|---|
| 350 K | 1.0 | 0.773 | 0.524 | 0.268 |
| 700 K | 1.0 | 0.780 | 0.531 | 0.286 |
| 1400 K | 1.0 | 0.780 | 0.552 | 0.304 |

**Таблица 2.**

| $T_w$ \ $\alpha_k$ | 15° | 30° | 40° | 50° |
|---|---|---|---|---|
| 350 K | 0.843 | 0.631 | 0.413 | 0.195 |
| 700 K | 0.773 | 0.566 | 0.380 | 0.185 |
| 1400 K | 0.674 | 0.482 | 0.323 | 0.164 |

$x^*(\Delta p_w^* = 0.1\%)$ точек, в которых выполняется условие $\Delta p_w^* = 0.1\%$, для рассмотренного диапазона температуры поверхности пластины и углов клина.

Координаты $x^*(\Delta p_w^* = 0.1\%)$ для значений температуры $T_w = 350$ K (кривая *4*), $T_w = 700$ K (кривая *5*), $T_w = 1400$ K (кривая *6*) от величины угла клина $\alpha_k$ представлены на рис. 7. При увеличении температуры $T_w$ в 4 раза значения координат $x^*(\Delta p_w = 0.1\%)$ уменьшаются примерно на 20–30%. Заметим, что при увеличении угла наклона клина $\alpha_k$ от 15° до 50° разность между координатами $x^*(\Delta p_w^* = 0.1\%)$ и точки отрыва уменьшается примерно в 2.3 раза.

Используя вычисленные значения возмущенного безразмерного давления $p_w^*(x^*)$ при углах клина $\alpha_k = 15°$, 30°, 40° и 50° для $T_w = 350$ K, 700 K, 1400 K (часть из них приведена на рис. 4 (кривые *2*, *3*, *5*, *6*)) и предполагая, что на поверхности пластины в диапазоне от значения координаты $x^*(\Delta p_w = 0.1\%)$ (табл. 2) до точки отрыва (табл. 1), данные возмущения могут быть приближенно аппроксимированы функциями

$$\widetilde{p}_w(\alpha_k, x/L_k) = p_w(0, x/L_k) \cdot \left[1 + \left(\left(p_w(\alpha_k, x/L_k) - p_w(0, x/L_k)\right) / p_w(0, x/L_k)\right)^{\beta(\alpha_k)}\right],$$

были вычислены соответствующие показатели степени $\beta(\alpha_k)$ при различных возмущениях давления, создаваемых клиньями с углами $\alpha_k$. Фактически величины $\beta(\alpha_k)$ можно рассматривать, как некоторый эквивалент собственным числам, которые были получены в [6–8].

Зависимости показателя степени $\beta(\alpha_k)$ от величины угла клина для $T_w = 350$ K (кривая *1*), 700 K (кривая *2*), 1400 K (кривая *3*) приведены на рис. 7. В рассмотренных определяющих параметрах вычисленные показатели степени при угле клина $\alpha_k = 15°$ принимают максимальные значения и равны $\beta(\alpha_k) = 45$, 29, 18 соответственно для $T_w = 350$ K, 700 K и 1400 K. При увеличении угла клина показатели степени монотонно уменьшаются и при $\alpha_k = 50°$ принимают значения $\beta(\alpha_k) = 31$, 20, 13. Таким образом увеличение температуры в 4 раза приводит к уменьшению показателей степени примерно в 2.5 раза, а, следовательно, интенсивность распространения возмущений против потока усиливается. Это хорошо видно из сравнения поведения кривых *2*, *5* и *3*, *6* на рис. 4. Кривые *5* и *6*, соответствующие температуре $T_w = 1400$ K, отходят от “невозмущенного” распределения давления (кривая *4*) более плавно, чем кривые *2* и *3*, соответствующие температуре $T_w = 350$ K, отходят от “невозмущенного” распределения давления (кривая *1*).

Чтобы сравнить эти показатели степени с собственными числами, полученными при обтекании острой пластины [6–8], следует иметь ввиду, что при $T_w = 350$ K температурный фактор равен $T_w/T_0 \approx 0.097$, тогда учитывая оценку $\alpha \approx 0.0897(T_w/T_0)^{-6}$ [4] для собственных чисел в случае заостренной пластины при $T_w/T_0 \approx 0.097$ получаем $\alpha \approx 10^5$. Следовательно, для затупленной пластины при данном температурном факторе собственные числа на три порядка меньше, чем для острой пластины. В случае обтекания острой пластины при $T_w = 1400$ K температурный фактор равен $T_w/T_0 \approx 0.387$, а собственное число ≈150 [16].

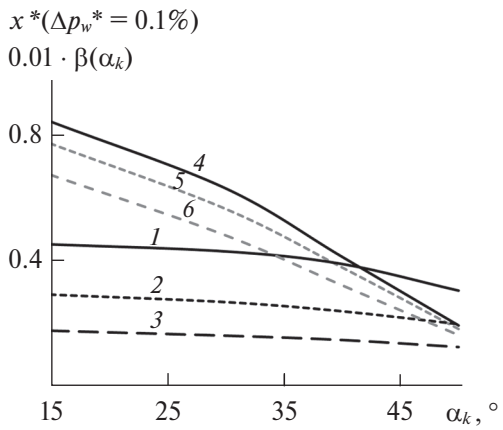



**Рис. 7.** Зависимости показателя степени $\beta(\alpha_k)$ (*1–3*) и безразмерной координаты $x^*(\Delta p_w^* = 0.1\%)$ (*4–6*) для значений температуры $T_w = 350$ K (*1*, *4*), $T_w = 700$ K (*2*, *5*), $T_w = 1400$ K (*3*, *6*) от величины угла клина $\alpha_k$.

В этом случае для затупленной пластины показатели степени только в 8–12 раз меньше, чем на острой пластине.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено сверхзвуковое течение вязкого газа около верхней поверхности затупленной пластины конечной длины с учетом вязко-невязкого взаимодействия ($\chi_{L_k\infty} = \sqrt{C_\infty} \cdot \mathrm{M}_\infty^3/\sqrt{\mathrm{Re}_{L_k\infty}} = 5.9$). Представлены результаты параметрических расчетов влияния температуры поверхности пластины и возмущений давления, создаваемых клином, установленным на пластине, на локальные аэротермодинамические характеристики и распространение возмущений против потока в рамках решения двумерной стационарной задачи с использованием уравнений Навье–Стокса. Установлено, что на передней части пластины ($x^* = x/L_k \leqslant 0.5$) могут нарушаться условия применимости уравнений пограничного слоя ($\mathrm{M}_\infty^2/\mathrm{Re}_{x\infty} < 0.01$). При обтекании пластины без клина, граница головного скачка и давление на поверхности затупленной пластины нигде не приближаются к их значениям в предельном случае ($\chi_{x\infty} = \sqrt{C_\infty}\mathrm{M}_\infty^3/\sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}} \to \infty$) асимптотического решения для заостренной пластины. Интенсивность распространения возмущений против потока зависит от величины возмущения давления, создаваемого клином и от температуры поверхности пластины. При увеличении температуры поверхности от $T_w = 350$ K до 1400 K показатель степени $\beta(\alpha_k)$ уменьшается в 2.5 раза. В рассмотренном диапазоне определяющих параметров интенсивность распространения возмущений при обтекании затупленной пластины существенно выше, чем при обтекании заостренной пластины.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Hayes W.D., Probstein R.F.* Hypersonic flow theory. N.Y.; L.: Acad. Press, 1959. 464 p. (*Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.)
2. *Chapman D.R., Rubesin M.W.* Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature // J. Aeronaut. Sci. 1949. No. 16. P. 547–565.
3. *Lees L.* On the boundary-layer equations in hypersonic flow and their approximate solutions // J. Aeronaut. Sci. 1953. No. 20 (20). P. 143–145.
4. *Stewartson K.* On the motion of a flat plate at high speed in a viscous compressible fluid. II Steady motion // J. Aeronaut. Sci. 1955. No. 22 (5). P. 303–309.
5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
6. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003. 456 с.
7. *Нейланд В.Я.* Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 40–49.
8. *Brown S.N., Stewartson K.* A non-uniqueness of the hypersonic boundary layer // Q. J. Mech. Appl. Math. 1975. V. XXVIII. Pt. 1. P. 75–90.
9. *Werle M.J., Dwoyer D.L., Hankey W.L.* Initial conditions for the hypersonic-shock/boundary-layer interaction problem // AIAA J. 1973. V. 11. No. 4. P. 525–530.
10. *Дудин Г.Н., Ледовский А.В., Пименова Т.А.* Распространение возмущений при обтекании теплоизолированной пластины в режиме вязко-невязкого взаимодействия // Ученые записки ЦАГИ. 2023. Т. LIV. № 4. С. 3–14.
11. *Lees L., Kubota T.* Inviscid hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies // J. Aeronaut. Sci. 1957. No. 24. P. 195–202.
12. *Лунев В.В.* Течение реальных газов с большими скоростями. М.: Физматлит, 2007. 760 с.
13. *Батура Н.И., Дудин Г.Н.* Аэродинамический нагрев затупленной пластины на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия // ДАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 507. С. 48–51.
14. *Creager M.O.* Effects of leading-edge blunting on the local heat transfer and pressure distributions over flat plates in supersonic flow // 1957. NACA TN. No. 4142. P. 1–54.
15. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматлит, 1959. 220 с.
16. *Балашов А.А., Дудин Г.Н.* Исследование обтекания пластины в режиме сильного взаимодействия // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 3. С. 63–70.

# Temperature Factor Effect on the Disturbance Propagation in the Flow past a Blunt Plate in the Interaction Regime

**© 2025 Yu. N. Galanskaya*, G. N. Dudin**, and A. Ya. Chudakov*****

*Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Moscow Region, 140180 Russia*

**e-mail: galanskaya@yandex.ru*
***e-mail: gndudin@yandex.ru*
****e-mail: cairen@mail.ru*

Supersonic viscous gas flow past the upper surface of a blunt finite-length plate is considered in the interaction regime. The temperature factor effect on the pressure disturbances initiated by mounting a wedge at the plate end, the aerothermodynamic flow characteristics, and the disturbance propagation upstream are investigated. Numerical calculations are carried out within the framework of the solution of the stationary two-dimensional Navier–Stokes equations.

*Keywords:* supersonic flow, viscosity, blunt plate, temperature factor, interaction, pressure disturbances

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 47–59

УДК 532.5:533.9

# ПРОТЯЖЕННЫЕ СИЛЬНОТОЧНЫЕ ДУГОВЫЕ РАЗРЯДЫ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ГАЗОВЫХ СРЕДАХ

**© 2025 г. А. П. Глинов*, А. П. Головин**, П. В. Козлов*****

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия*

*e-mail: glshur@imec.msu.ru
**e-mail: gnka_golovin_apsf@mail.ru
***e-mail: kalevala@mail.ru

Поступила в редакцию 07.10.2025 г.
После доработки 10.03.2025 г.
Принята к публикации 13.03.2025 г.

Экспериментально и теоретически исследованы протяженные (до нескольких десятков сантиметров) сильноточные (сотни ампер) электрические дуги в разных газах атмосферного давления. Изучение таких разрядов проведено на электроразрядном стенде установки П-2000 НИИ механики МГУ. В работе уточнены данные о влиянии внешнего магнитного поля на устойчивость таких разрядов и образование разветвленных токовых каналов. Одно из направлений проведенных исследований — изучение влияния ориентации наложенного на дугу магнитного поля на процессы развития разряда в разных газовых средах, таких как воздух, $CO_2$, Ar, $N_2$. Наиболее полно представлены данные для аргона и азота. Эксперименты проведены в камере с прозрачными стенками. Расчетно-теоретическое исследование проведено на основе электротехнической модели с использованием эмпирических данных по вольт-амперным характеристикам дуг между графитовыми электродами. Выявлено, что на устойчивость горения сильноточных дуг существенное влияние оказывает динамика электродных струй-факелов. Традиционные же модели дуг во внешнем магнитном поле без учета этих факторов показывают, что направление внешнего аксиального поля не влияет на стабильность дуг, влияя лишь на направление их закрутки при развитии винтовой неустойчивости.

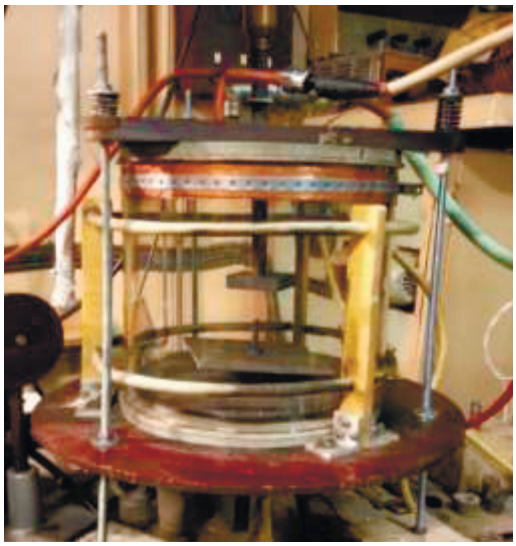
*Ключевые слова:* протяженная электрическая дуга, магнитное поле, разрядная камера, графитовые электроды, инициирование разряда

**DOI:** 10.31857/S1024708425030057

Известно, что сильноточные протяженные дуговые разряды атмосферного давления (без принятия специальных мер стабилизации) неустойчивы и склонны к самогашению, что продемонстрировано, например в [1–5]. Принятие специальных мер стабилизации (наложение внешнего магнитного поля, стабилизация изоляционными стенками или потоками газов, согласование электродных узлов и др.) позволяет существенно расширить границы стабильности разряда. Это дает принципиальную возможность применения его плазмы в некоторых технических приложениях, например, таких как якорь рельсовых ускорителей, или рабочей среды иных электрофизических установок, например плазмотронов. Ранее на электроразрядом стенде лаборатории общей гидромеханики института механики МГУ было показано, что оптимизация режимов раздвижки электродов и согласование электродных узлов позволяет получать стабильное горение дуг в открытой воздушной атмосфере. Этот результат обеспечивался вплоть до межэлектродных расстояний 30 см [6–11]. При этом для контроля характеристик плазмы могут применяться подходы на основе обработки данных ее спектральной диагностики, как например в [10, 12]. В настоящей работе приведены данные об исследованиях стабильности протяженных дуг в разрядных камерах за счет оптимизации (подбора) разрядной среды.

## 1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Основные эксперименты проведены в разрядной камере (рис. 1а) с цилиндрическими боковыми стенками из кварцевого электровакуумного стекла толщиной 7 мм. Камера снабжена системой колец Гельмгольца



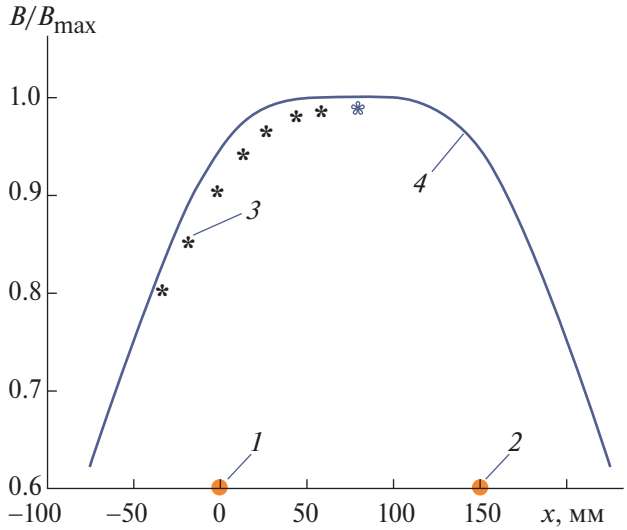



**Рис. 1.** Разрядная камера с магнитной системой в виде двух колец Гельмгольца (а) и распределение аксиального магнитного поля катушки вдоль вертикальной оси *x*: *1*, *2* — кольца катушки; *3*, *4* — экспериментальные и расчетные данные соответственно (б).

для создания вертикального магнитного поля (рис. 1б). Высота и диаметр — 250 мм. Рассмотрены вертикально ориентированные разряды. Исследовались дуги между графитовыми (ЗОПГ) электродами разных диаметров (6–150 мм). Теоретическое моделирование таких разрядов проведено в электротехническом приближении на основе классических эмпирических данных Г. Айртон.

Инициация дугового разряда осуществляется путем смыкания электродов, находящихся под электрическим напряжением, и дальнейшего их раздвижения до выбранного межэлектродного зазора $l_o$ (рис. 2). Типичные естественные возмущения зазора, обусловленные несовершенством (недостаточной настройкой) системы электромеханической раздвижки электродов даны на рис. 3а. Для проведения же специальных экспериментальных исследований заданных возмущений зазора используется устройство на основе линейных модулей фрезерных станков с программируемым законом раздвижки электродов [7]. Характерный вид налагаемых локальных возмущений приведен на рис. 3б.

Характерное время раздвижки электродов $t_o$ составляет в экспериментах 0.1–0.2 с. Синхронно с видеоизображениями снимались и осциллограммы тока $I(t)$ и напряжения $U(t)$ на разрядном промежутке. Проводятся также пирометрические измерения температуры катода пирометром типа “ДИЭЛТЕСТ”. В общем случае изучается протяженный электродуговой разряд с квазистационарными токами в газовой среде атмосферного давления на графитовых электродах, иногда и при наличии внешнего магнитного поля, обеспечиваемого той или иной магнитной системой (МС). Электроды графитовые. Разрядные токи — сотни А, напряжения — до 200 В. Основные катоды — стержневые, их диаметры $d_к$ = 6–16 мм, аноды —

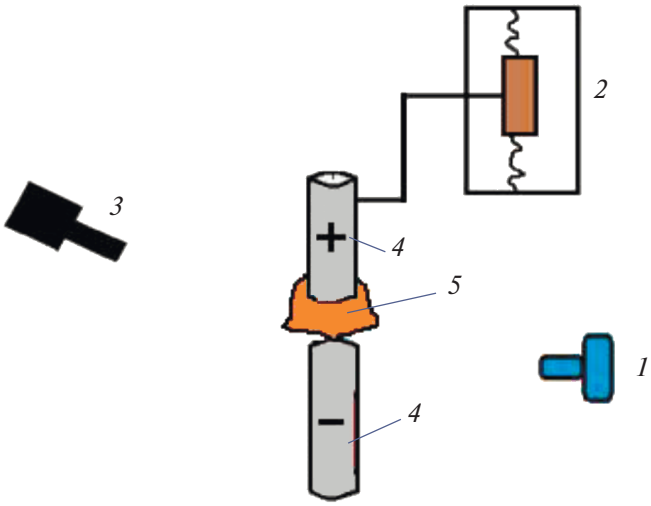



**Рис. 2.** Схема инициирования разряда и его визуализации и пирометрии: *1* — видеокамера, *2* — механизм раздвижки электродов, *3* — пирометр, *4* — электроды, *5* — дуга.

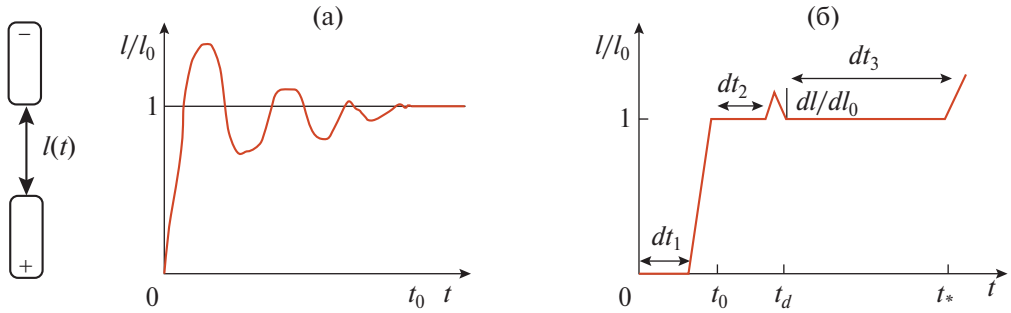



**Рис. 3.** Разрядная камера с магнитной системой в виде двух колец Гельмгольца (а) и распределение аксиального магнитного поля катушки вдоль вертикальной оси $x$: *1*, *2* — кольца катушки; *3*, *4* — экспериментальные и расчетные данные соответственно.

стержни диаметром $d_a$ = 16 мм и прямоугольные призмы с контактной поверхностью $S_a$ = 600–2400 мм$^2$. Теоретическое моделирование дуг — задача достаточно сложная и непростая, даже в рамках упрощенных физико-математических моделей. Одно из направлений — анализ устойчивости в линейном приближении [13, 14], другое — прямое численное моделирование [15, 16].

## 2. РАСЧЕТНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математическое моделирование разрядных электродуговых процессов (с учетом всех существенных физических факторов) весьма сложная и на сегодняшний день не решенная задача. Это относится как к постановкам задач, так и к программно-алгоритмическим разработкам для них. Следует отметить, что наряду с физическими процессами в самом разрядном канале и окружающей среде важны процессы в электродах, изоляторах, внешней цепи. Большая сложность возникает в построении и замыкании моделей переноса зарядов и нейтральных частиц в пограничных зонах между разнородными средами. Проблемы доступности (наличия) баз данных и проблемы многих, сильно различающихся, пространственных и временных масштабов — тоже очень существенны. В результате исследователи в области электрофизики ограничиваются решением модельных задач [17, 18]. Зачастую оказывается быстрее провести только экспериментальные исследования [19].

Среди теоретических работ, посвященных изучению гидродинамических течений в зазорах (без учета протекающих токов) отметим работу [20]. В ней рассмотрены модельные автомодельные течения вязкой жидкости между раздвигающимися параллельными пластинами. Математически такие, даже чисто гидродинамические задачи, достаточно сложные. Поэтому нами была предпринята попытка промоделировать влияние раздвижки электродов на стабильность горения протяженных сильноточных дуг не только экспериментально, но и на основе решения задач в рамках электротехнической модели при различных начальных условиях и параметрах внешней цепи.

В настоящей работе применяется упрощенный инженерный электротехнический подход моделирования на основе эмпирических данных по вольтамперным аппроксимациям дуг [11, 21].

$$L\frac{dI}{dt} = \varepsilon - IR - u(l, I), \tag{2.1}$$

$$u = a + bl + \frac{c + dl}{I}, \tag{2.2}$$

$$l = l(t) = \begin{cases} V_0 t, & t < t_0 = l_0/V_0, \\ l_0\left[1 + \alpha \exp\left(-\gamma(t - t_0)\right) \sin \omega(t - t_0)\right], & t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

В этих формулах: (2.1) — уравнение Кирхгофа, (2.2) — падение напряжения дуги $U$ в межэлектродном зазоре $l$ (так называемая аппроксимация H. Ayrton [21]). Формула (2.3) — заданная форма изменения зазора $l$ со временем $t$. Эта форма эмпирическая, основана на обработке и аппроксимации наших многолетних экспериментальных данных, приводилась ранее для расчетов в работе [10]. Величины $L$, $R$, $I$ и $\varepsilon$ — индуктивность, балластное сопротивление, разрядный ток и ЭДС источника его питания соответственно. Параметр модели: $V_0$ = *const* — скорость раздвижки электродов на требуемое расстояние (зазор) $l_0$. Константы H. Ayrton ($a$, $b$, $c$, $d$) зависят прежде всего от разрядной среды и материалов электродов. Параметры $\gamma$, $\omega$ и $\alpha$ — декремент, частота и амплитуда колебаний межэлектродного зазора от его “рабочего” (стационарного) значения $l_o$.

На рис. 4 даны безразмерные зависимости от времени зазора, тока и напряжения.

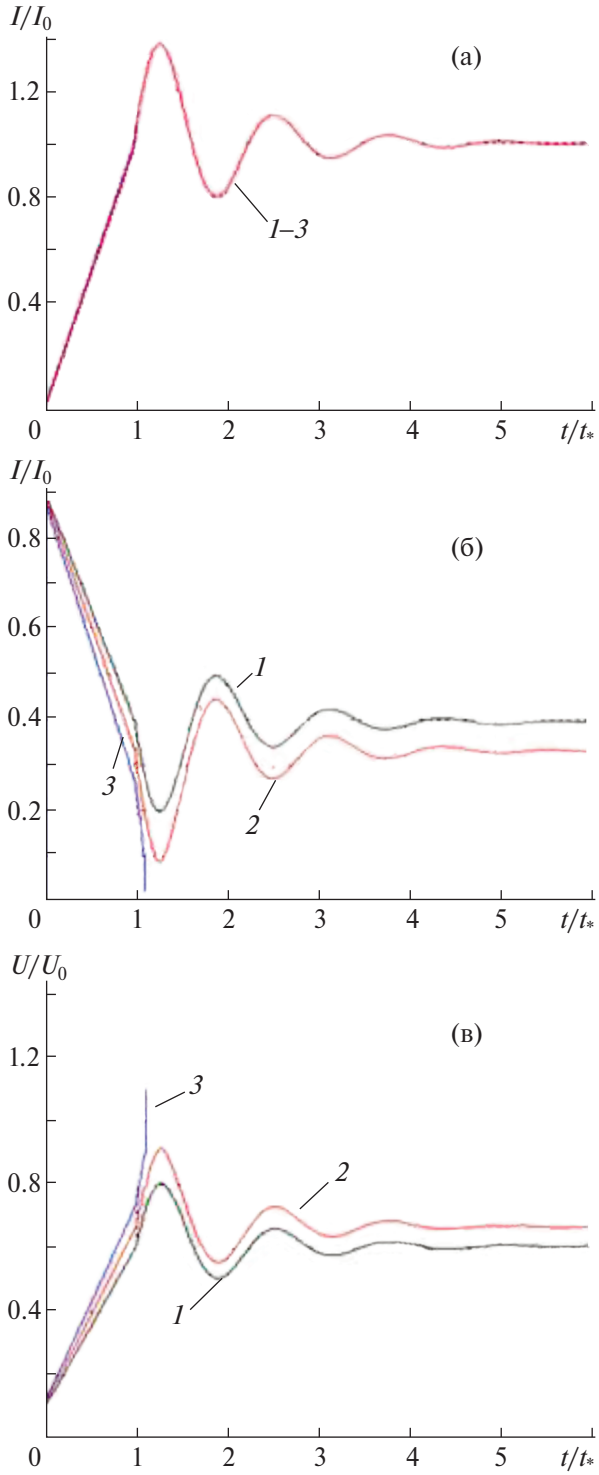



**Рис. 4.** Влияние нормированной ЭДС(ε), безразмерные: зазор (а), ток (б), напряжение (в); базовый вариант $\varepsilon = \varepsilon_б$ (*1*); $\varepsilon_б/1.1$ (*2*); $\varepsilon_б/1.12$ (*3*).

Масштабы обезразмеривания тока, напряжения. зазора и времени следующие:

$$I_* = \frac{I_m}{R}, \qquad U_* = \varepsilon, \qquad l_* = l_0, \quad t_* = t_c.$$

Кривые базового варианта (2.1), отвечают следующим параметрам:

$$\frac{a}{\varepsilon} = 0.1, \quad \frac{\omega l_o}{V_o} = 5, \quad \frac{bl_o}{\varepsilon} = 0.5,$$

$$\frac{\gamma l_o}{V_o} = 1, \quad \frac{l_o R}{V_o L} = 2 \cdot 10^5, \quad \frac{d l_o}{c} = 60,$$

$$\frac{cR}{\varepsilon} = 1.7 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha = 0.5.$$

Межэлектродное расстояние ($l$), разрядный ток ($I$) и напряжение ($U$) представлены на рис. 4а,в соответственно. Набором кривых (*1–3*) отмечены вариации параметра ЭДС. Он имеет ключевое значение на стабильность горения дуги при повышении технической надежности системы раздвижки. Тогда (при обеспечении этой надежности) соответствующий параметр пренебрежимо мал: $\alpha \ll 1$. В частности, вариант, отвечающий кривым (*3*), показывает пример самогашения дуги при недостаточности ЭДС для поддержания разряда. Как отмечено в [7], а также на основе экспериментальных данных данной работы, масштабные возмущения зазора ($l' = l - l_o$) от 10% и более от его стационарного значения $l_o$ также очень опасны, как и недостаточность ЭДС.

## 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Если не оговорено противное, эксперименты в настоящей работе проведены при идеально (жестко) стабилизированной системе раздвижки электродов ($\alpha = 0$ при достижении заданного стационарного зазора $l_o$).

Были рассмотрены для межэлектродной среды разные газы: воздух и некоторые его важные для технических приложений составляющие: аргон, азот, углекислый газ. Оказалось, что из рассмотренных газов предпочтителен именно аргон (см. рис. 5, 6). Он требует меньших падений напряжения и обеспечивает более устойчивое горение. Однако, потенциал его ионизации выше, чем у его конкурентов, рассматриваемых газов. Возможно, что преимущества аргона обусловлены большей стабильностью катодной струи аргоновой плазмы и несколько большим испарением материала графитового катода в аргоновой среде. У графита потенциал ионизации ниже, чем у аргона. Для уточнения результатов необходимы дальнейшие расчетно-теоретические и экспериментальные исследования. Некоторые оценки гидродинамических характеристик электродных факелов приведены в табл. 1.

Здесь число Рейнольдса оценивалось по формуле

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V \delta}{\mu}.$$

Величины $\rho_0$, $\mu_0$ — плотность и динамическая вязкость среды факелов при атмосферном давлении и температуре $T_0 = 300$ K. Температура $T = 6$ кK. Скорость $V$ порядка 10 м/с. Эффективный (средний) диаметр $\delta = 6$ мм. Обычно в экспериментах последних лет на П2000 число Re находится в пределах 0.5–5.

Вязкость оценивалась по политропному закону [22]

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^n, \quad n = 0.76.$$

При составлении табл. 1 использовались справочники [23, 24].

Влияние амплитуды возмущений зазора отражено на рис. 7.

Видно, что возмущения зазора ($l_o$) от 10% и более от $l_o$ очень опасны (см. рис. 7в–е). Они вызывают резко нестационарные колебания большой амплитуды тока и напряжения на протяжении всего времени разряда. При этом форма токового столба дуги и электродных факелов также нестабильна.

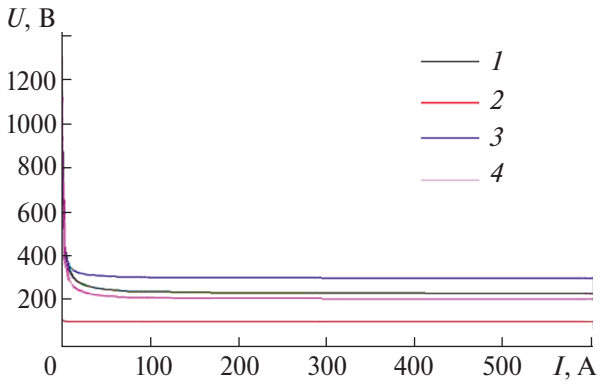



**Рис. 5.** Рассчитанные по модели [21] вольтамперные характеристики дуг между графитовыми электродами в разных газах: воздух (*1*), азот $N_2$ (*2*), аргон Ar (*3*), углекислый газ $CO_2$ (*4*)

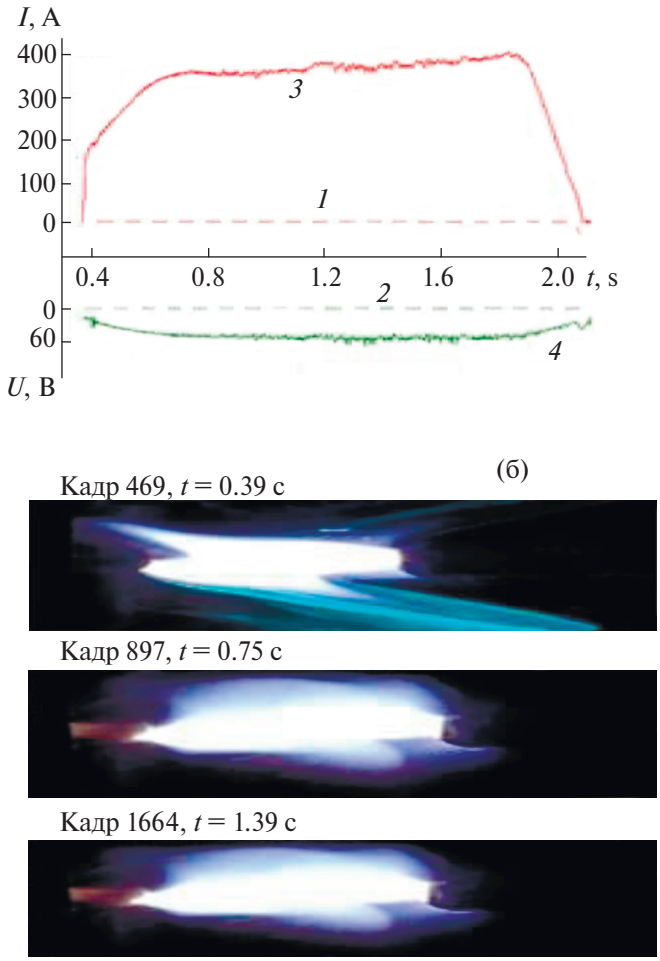



**Рис. 6.** Стабилизация разряда в аргоновой среде: осциллограммы тока и напряжения (а) и видеокадры (б) в указанные моменты времени $t$; зазор $l_0$ = 50 мм, частота видеорегистрации $f$ = 1200 кадр/с.

**Таблица 1.**

| Параметры | Воздух | Ar | $N_2$ | $CO_2$ | He | $O_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_0$, кг/м$^3$ | 1.29 | 1.784 | 1.25 | 1.98 | 0.179 | 1.47 |
| $\mu_0$, мПа с | 0.0182 | 0.02108 | 0.0175 | 0.147 | 0.0196 | 0.0202 |
| Re | 0.4364 | 0.5211 | 0.4398 | 0.8293 | 0.0562 | 0.4482 |

Сводный набор данных экспериментальных результатов без наложения на разряд внешнего магнитного поля представлен в табл. 2.

Как видно, аргоновая среда способна обеспечивать стабильность разряда атмосферного давления при существенно меньших приложенных электрических напряжениях и разрядных зазорах, чем другие газовые среды.

В табл. 2 обозначены: активные поверхности анода и катода ($S_а$ и $S_к$), ток и падение напряжения на разрядном промежутке ($I$, $U$), зазор ($l$).

Влияние ориентации внешнего аксиального магнитного поля в разных газах характеризуют рис. 8–12. На этих рисунках прослеживается достаточно подробно динамика изменения формы дугового столба и электродных факелов. Подробность представления кадров обусловлена стремлением отследить наиболее ощутимые эффекты воздействия ориентации магнитного поля.

Однако, как следует из приведенных подробных видеокадров разряда, эффекты с наложением на вертикальный разряд продольного магнитного поля, связанные со сменой его направления, проявляются достаточно слабо. В качестве примера приводятся результаты экспериментов в среде аргона. В них наиболее сильно заметно влияние наложения магнитного поля и смены его полярности на горение разряда.

Особый интерес авторов вызывает разряд в газе $CO_2$, и как одном из составных элементов воздушной среды и как продукт ее загрязнения вследствие бурного роста мировой экономики.

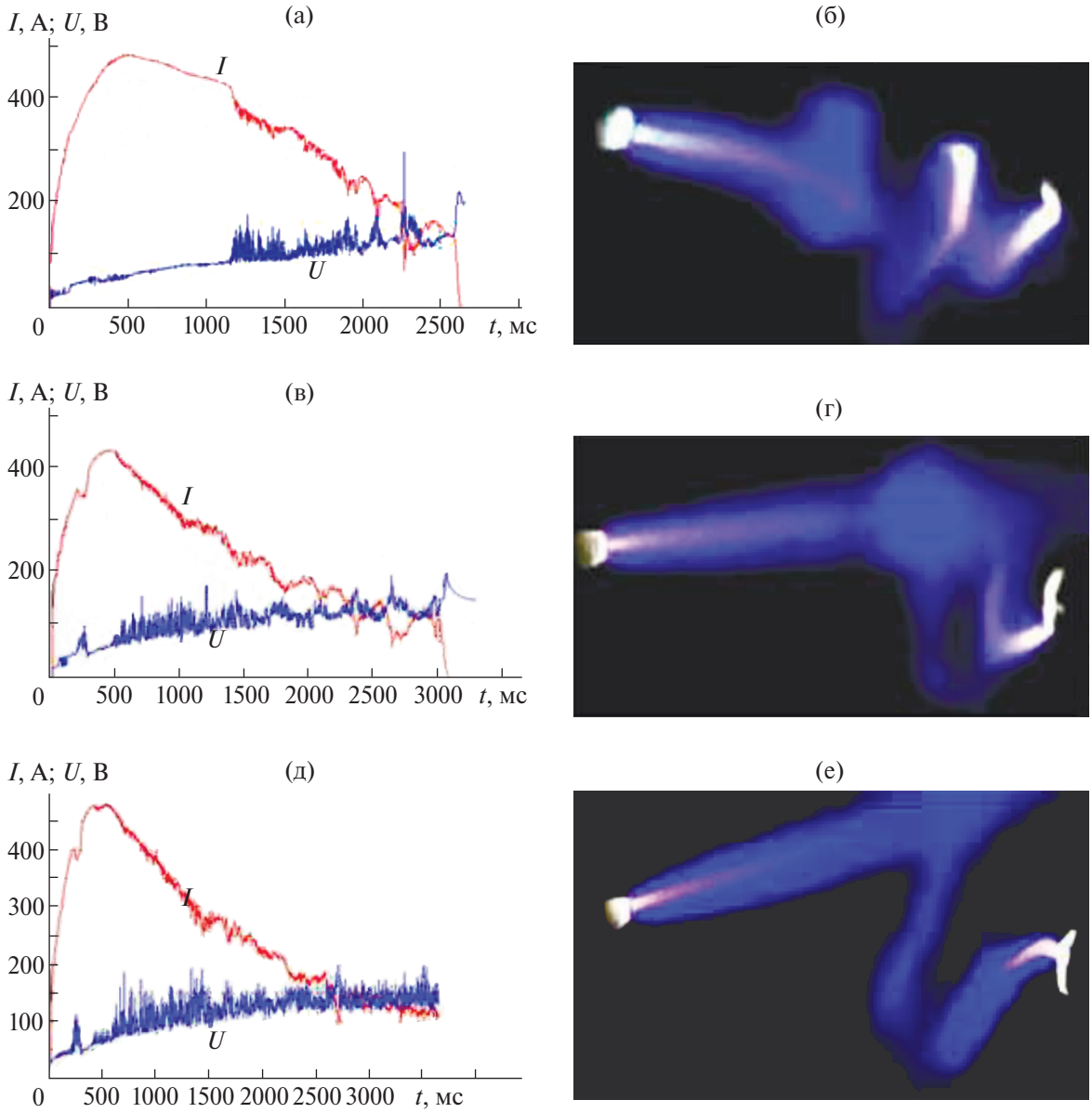



**Рис. 7.** Влияние амплитуды возмущений зазора $(l' - l_o)$ на стабильность разряда в воздушной среде атмосферного давления: осциллограммы тока $I$ и напряжения $U$ (а, в, д) и соответствующие типичные видеокадры (б, г, е): $l_o$ = 100 мм; $(l' - l_o)/l_o$ = 0% (а, б), 10% (в, г), 50% (д, е). На видеокадрах ток $I$ = 135 А (б), 120 А (г), 130 А (е).

Расчетный уровень излучения для плазмы $CO_2$ при $T$ = 10000° К сильно превышал значения данных эксперимента. Наиболее близок к данным эксперимента оказался расчетный спектр для температуры 6000° К. Спектральные измерения проводились в 5-и мм от катода по методике, изложенной в работе [10].

Наибольшие расхождения данных расчетной модели и эксперимента фиксируются в красной области спектров. Здесь возрастает уровень сплошного спектра по сравнению с линейчатым составом спектра. Причиной этого может быть излучение горячих графитовых частиц (твердой фазы), находящихся в катодной струе в результате его эрозии.

Экспериментальные спектры, в которых появились линии атомарного кислорода (O) и углерода (C) отражены на рис. 13.

Расчеты спектров разрядной среды проведены по программе и базе данных [25].

Видно, что в разрядном промежутке имеются атомарные кислород и углерод. Но причиной их появления в разрядном промежутке может быть не только развал молекул $CO_2$, но и эрозия графитового ЗОПГ катода и выход из его пор предварительно захваченного воздуха. Поэтому об эффективности утилизации дуговым разрядом $CO_2$ сказать ничего пока нельзя. Вопрос требует дальнейших исследований.

**Таблица 2.**

| Пуск | $S_а$, мм$^2$ | $S_л$, мм$^2$ | $U_{xx}$ | $I$, А | $U$, В | Продолжительность разряда, с | Газ | $d$, мм | Стабильность дуги |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 600 | 150 | 130 | 230 | 118 | 0.6 | $N_2$ | 90 | Самогашение по недостаточности $U_{xx}$ |
| 2 | 600 | 150 | 150 | 414 | 190 | 0.8 | $N_2$ | – | – (нет) |
| 3 | 600 | 150 | 170 | 488 | 107 | 1.7 | $N_2$ | – | + (есть) |
| 4 | 600 | 150 | 180 | 505 | 89 | 1.8 | $N_2$ | – | + |
| 5 | 600 | 150 | 100 | 165 | 56 | 0.3 | $CO_2$ | – | – |
| 6 | 600 | 150 | 150 | 400 | 86 | 0.3 | $CO_2$ | – | – |
| 7 | 600 | 150 | 170 | 340 | 56 | 0.15 | $CO_2$ | – | – |
| 8 | 600 | 150 | 90 | 150 | 30 | 0.23 | $CO_2$ | – | – |
| 9 | 600 | 150 | 90 | 200 | 65 | 0.46 | Ar | – | нестабильность при спаде тока |
| 10 | 600 | 150 | 110 | 246 | 68 | 0.45 | Ar | – | нестабильность при спаде тока |
| 11 | 600 | 150 | 130 | 448 | 69 | 1.8 | Ar | – | + |
| 12 | 600 | 150 | 120 | 390 | 67 | 1.9 | Ar | – | нестабильность при спаде тока |
| 13 | 600 | 150 | 70 | 164 | 49 | 2.0 | Ar | – | + |
| 14 | 600 | 150 | 50 | 65 | 17 | 0.4 | Ar | – | – |
| 15 | 600 | 150 | 60 | 129 | 44 | 0.6 | Ar | – | – |
| 16 | 600 | 150 | 70 | 127 | 56 | 1.9 | Ar | – | + |
| 17 | 600 | 150 | 60 | 118 | 50 | 0.55 | Ar | – | – |
| 18 | 600 | 150 | 100 | 186 | 83 | 0.36 | $CO_2$ | – | – |

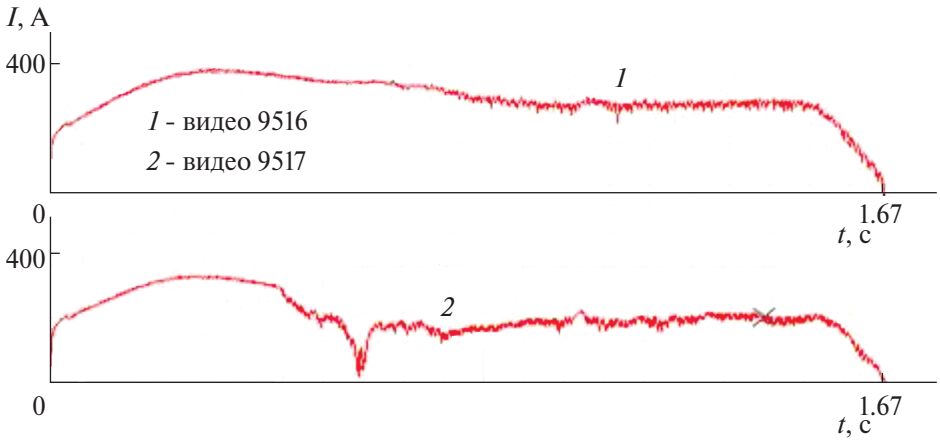



**Рис. 8.** Кривые тока разряда в аргоне атмосферного давления: магнитное поле *B* и ток *I* направлены противоположно (*1*) и в одном направлении (*2*).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изготовлена и апробирована экспериментально модульная разрядная камера с прозрачными боковыми цилиндрическими стенками из кварцевого электровакуумного стекла для газовых сред при атмосферном давлении. Камера рассчитана на сильноточные квазистационарные разряды до токов и напряжений в сотни ампер и вольт соответственно.

В этой камере проведено как расчетно-теоретическое, так и экспериментальное исследование процессов инициирования, стабилизации и гашения протяженных сильноточных электрических дуг.

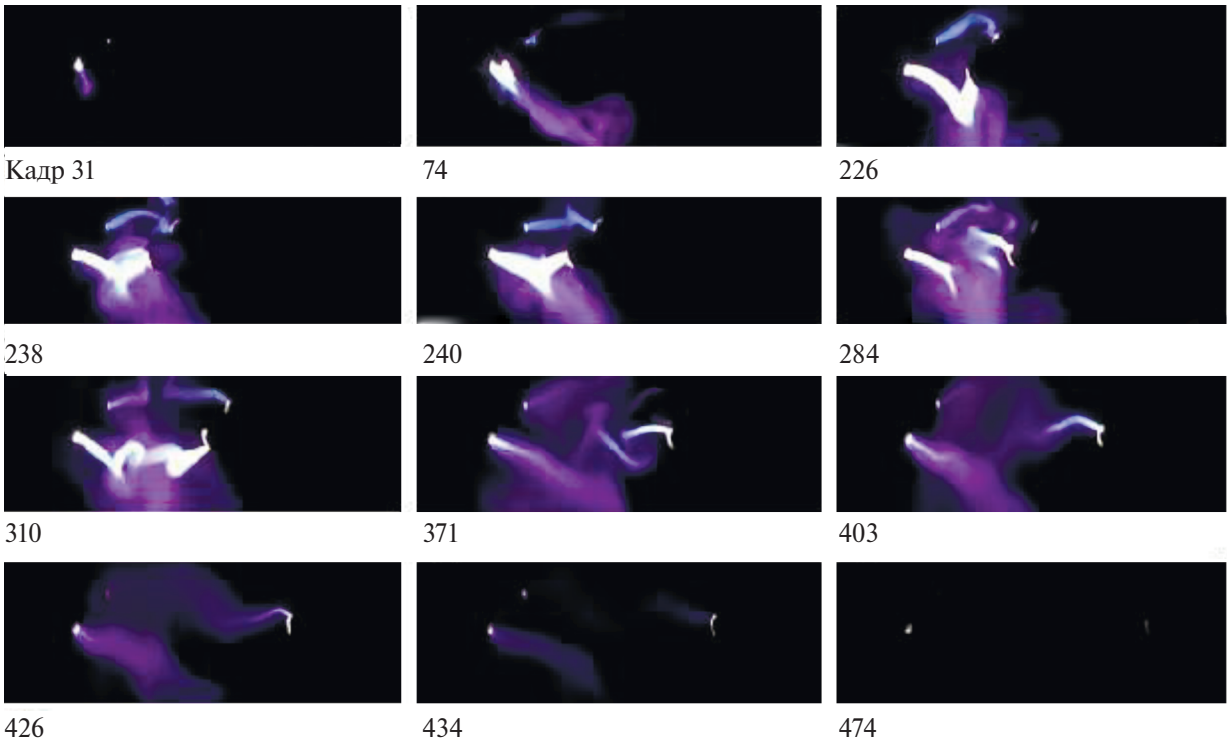



**Рис. 9.** Видеокадры вертикального разряда в азоте в аксиальном магнитном поле: фильм 9508, $f$ = 1200 кадр/с, $p$ = 1 атм, магнитное поле $B$ = 12 мТл против направления тока $I$; зазор $l_0$ = 100 мм, $U_{xx}$ = 170 В.

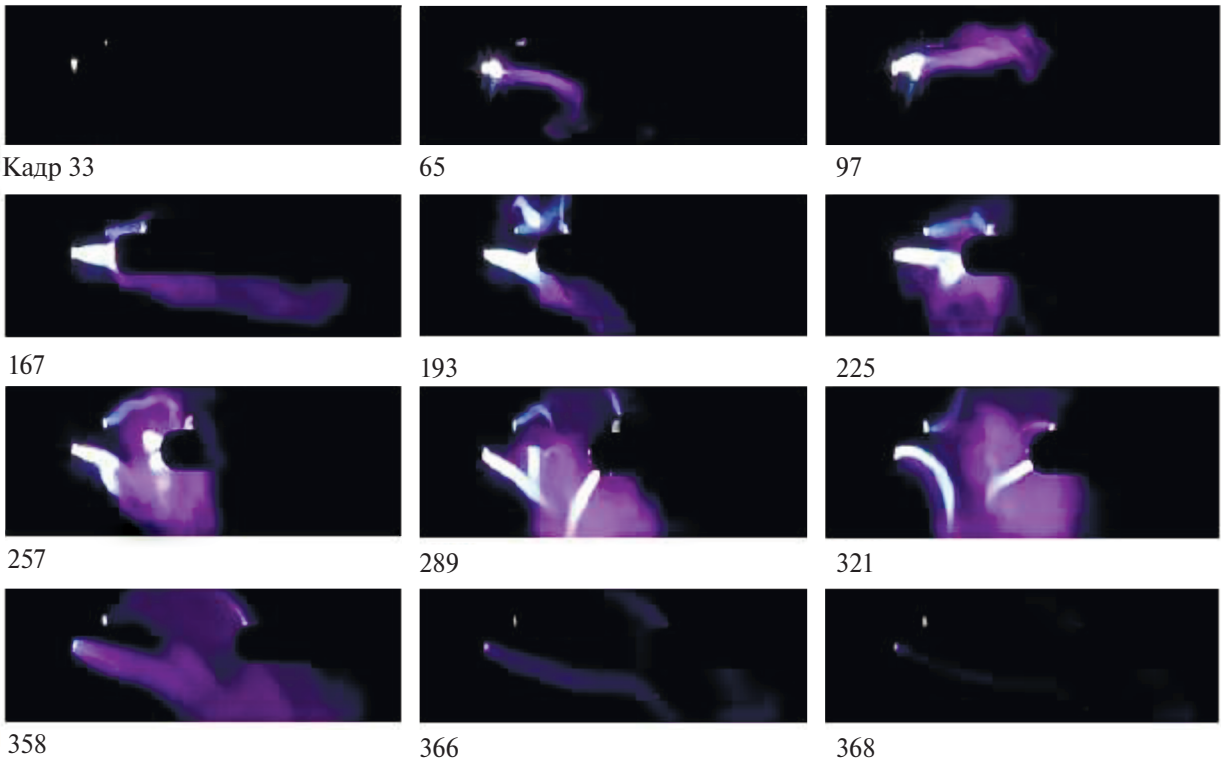



**Рис. 10.** Видеокадры вертикального разряда в азоте в аксиальном магнитном поле: фильм 9520, $f$ = 1200 кадр/с, $p$ = 1 атм, магнитное поле $B$ = 12 мТл против направления тока $I$; зазор $l_0$ = 100 мм, $U_{xx}$ = 170 В.

Исследованы квазистационарные разряды в воздухе, азоте, аргоне и углекислом газе. Теоретическое моделирование дуг проведено в электротехническом приближении на основе классических эмпирических данных по вольт-амперным характеристикам дуг между графитовыми электродами.

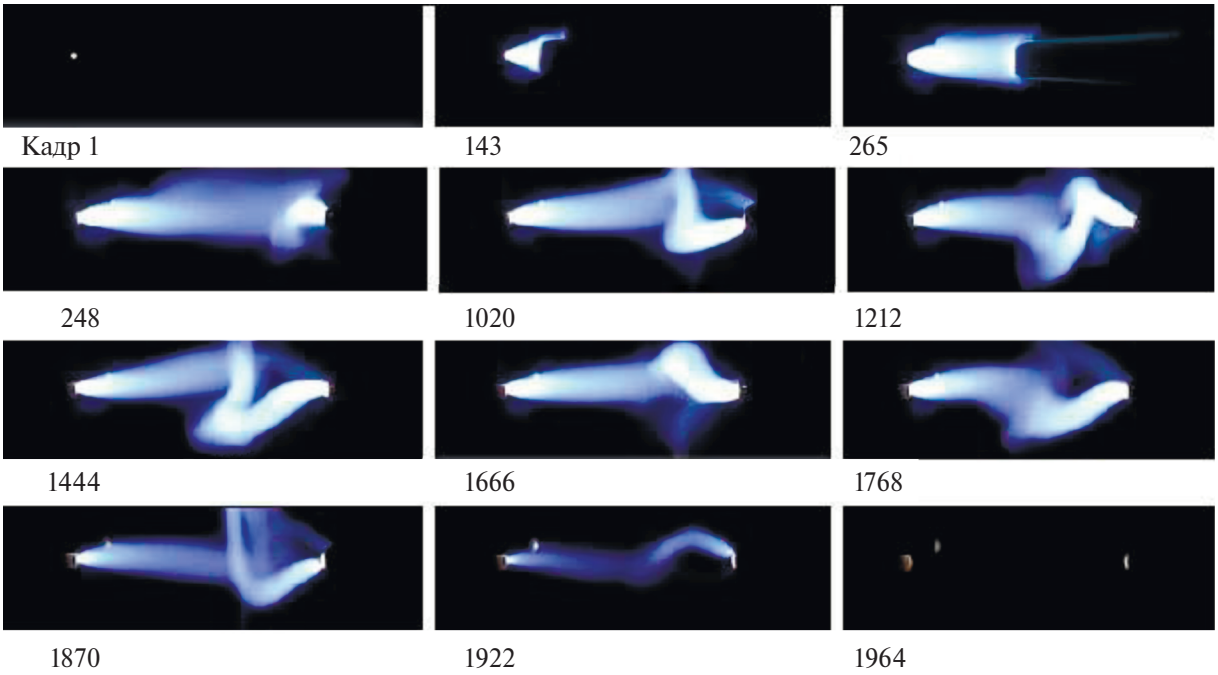



**Рис. 11.** Видеокадры вертикального разряда в азоте в аксиальном магнитном поле: фильм 9517, $f$ = 1200 кадр/с, $p$ = 1 атм, магнитное поле $B$ = 12 мТл против направления тока $I$; зазор $l_0$ = 100 мм, $U_{xx}$ = 110 В.

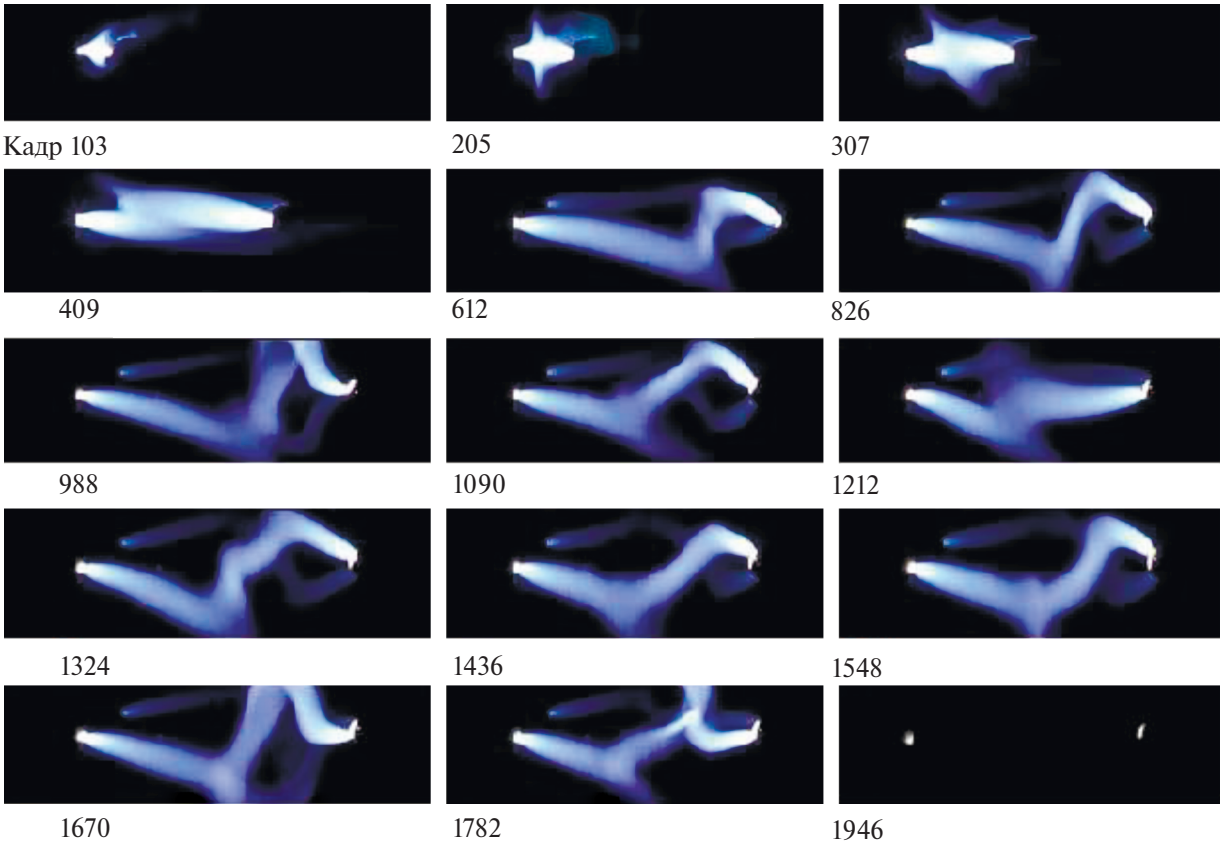



**Рис. 12.** Видеокадры вертикального разряда в азоте в аксиальном магнитном поле: фильм 9516, $f$ = 1200 кадр/с, $p$ = 1 атм, магнитное поле $B$ = 12 мТл против направления тока $I$; зазор $l_0$ = 100 мм, $U_{xx}$ = 110 В.

Экспериментально прослежена динамика электропроводных газов в разрядном промежутке. Показаны возможности повышения стабилизации инициирования и горения дуговых разрядов за счет выбора разрядной среды. Подтвержден вывод прежних наших работ о необходимости согласования электродных узлов. Подтверждено, что протекание электрического тока существенно зависит от межэлектродной среды. Отме-

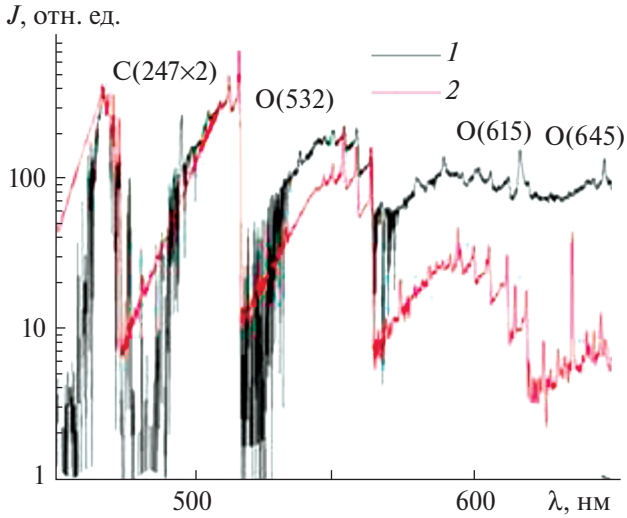



**Рис. 13.** Интенсивность излучения в относительных единицах в шнуре газового разряда атмосферного давления в $CO_2$ на расстоянии 5 мм от графитового катода: полосы Свана молекулы углерода ($C_2$), атомарные линии кислорода (O) и углерода (C — второй порядок 247 нм); *1* — данные наших экспериментов, *2* — расчет при температуре $T$ = 6 кК.

чена необходимость оптимизации скорости размыкания электродов, их размеров и формы при отработке разрядных систем для квазистационарных дуг атмосферного давления. Определен оптимальный газ (аргон) для проведения исследований разрядов атмосферного давления при умеренной мощности источников тока (~ 100 кВт).

Полученные в настоящей работе результаты могут быть востребованы:

- для моделирования испытаний защитных покрытий летательных аппаратов при их входе в плотные слои атмосферы планет;
- при разработках систем инициирования и гашения протяженных электрических дуг;
- для разработок установок утилизации трудно разлагающихся при использовании традиционных химических технологий токсичных отходов;
- в отработке технологий плазменного напыления (например, графитовых) порошков на поверхности материалов.

Результаты работы частично докладывались на 50-й Международной (Звенигородской) конференция по физике плазмы и УТС [26] и XIII-ом Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике [27].

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, при частичном финансировании по гранту РФФИ № 18-29-21022.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Финкельнбург В., Меккер Г.* Электрические дуги и термическая плазма. М.: ИЛ, 1961 с.
2. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
3. *Жуков М.Ф., Коротеев А.С., Урюков Б.А.* Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск: Наука, 1975. 296 с.
4. *German V.O., Glinov A.P., Golovin A.P., Kozlov P.V., and Lyubimov G.A.* Some Features of Imaging of the Processes Occurring in an Extended Arc Discharge in Atmospheric Pressure Air // Plasma Physics Reports. 2013. V. 39. No. 13. P. 1142–1148.
5. *German V.O., Glinov A.P., Kozlov P.V., and Lyubimov G.A.* Effect of the Design Parameters and the Atmosphere Composition on the Electric Discharge Shape // Fluid Dynamics. 2011. V. 46. No. 6. P. 958–966.
6. *Glinov A.P., Golovin A.P., Kozlov P.V., Shaleev K.V., Lyubimov G.A.* Study of arc discharges on the P-2000 facility // J. Phys.: Conf. 2019. Ser. 1250 012019. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012019
7. *Glinov A.P., Golovin A.P., and Kozlov P.V.* Studies of initiation and quenching of extensive high-current discharges // J. Phys.: Conf. 2021. Ser. 2055 012006. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2055/1/012006
8. *Глинов А.П., Головин А.П., Козлов П.В.* Оптимизация струйных плазменных течений во внешнем магнитном поле // Прикладная физика. 2017. № 6. С. 26–32.

9. *Глинов А.П., Головин А.П., Шалеев К.В.* Влияние внешнего магнитного поля на устойчивость протяженного дугового разряда и формирование многоканальных токовых структур // Прикладная физика. 2018. № 2. С. 21–28.
10. *Глинов А.П., Головин А.П., Козлов П.В.* Изучение инициирования дуговых разрядов размыканием первоначально замкнутых электродов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, издательство НИИ механики МГУ (Москва, 2020). Т. 21. № 2.
https://doi.org/10.33257/PhChGD.21.2.916
11. *Глинов А.П., Головин А.П., Козлов П.В., Шалеев К.В.* Динамика формы электрической дуги и сопутствующих магнитогазодинамических течений, возникающих при размыкании изначально замкнутых электродов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, издательство НИИ механики МГУ (Москва, 2019). Т. 20. № 2.
https://doi.org/10.33257/PhChGD.20.2.835
12. *German V.O., Glinov A.P., Kozlov P.V., Lyubimov G.A.* Spectral Properties of a Diffuse-Constricted Arc Discharge // High Temperature. 2012. V. 50. No. 2. P. 167–177.
13. *Glinov A.P.* Stability of Conducting Medium Flows between Plane Continuous Electrodes Inclined to the Horizon // Fluid Dynamics. 2015. V. 50. No. 3. P. 322–331.
14. *Glinov A.P.* Two-Dimensional Analysis of the Stability of Conducting Medium Flows between Permeable Plane Electrodes Inclined to the Horizon // Fluid Dynamics. 2015. V. 50. No. 4. P. 483–493.
15. *Васильев Е.Н., Нестеров Д.А.* Вычислительное моделирование взаимодействия электрической дуги с потоком газа // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 2. С. 126–136.
16. *Урусов Р.М., Урусова И.Р.* Численное моделирование винтовой формы электрической дуги во внешнем аксиальном магнитном поле // ТВТ. 2017. Т. 55. Вып. 5. С. 661–668.
17. *Недоспасов А.В., Хаит В.Д.* Основы физики процессов в устройствах с низкотемпературной плазмой. М.: Энергоатомиздат,1991. 224 с.
18. *Жуков М.Ф., Коротеев А.С.* Теория термической электродуговой плазмы. Ч. 1,2. Новосибирск: СО Наука, 1987. 576 с.
19. *Брон О.Б., Сушков Л.К.* Потоки плазмы в электрической дуге выключающих аппаратов. Л.: Энергия, 1975. 212 с.
20. *Петров А.Г.* Точное решение уравнений осесимметричного движения вязкой жидкости между параллельными плоскостями при их сближении и раздвижении // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 1. С. 58–67.
21. *Ayrton H.* The Electric Arc., The Electrician Series, D. Van Nostrand Company, Inc., N.Y., 1902. P. 120–130.
22. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 736 с.
23. *Григорьев И.С., Мейлихов Е.З.* Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат,1991. 1234 с.
24. *Кухлинг Х.* Справочник по физике. М.: Мир, 1982. 519 с.
25. *Акимов Ю.В., Быкова Н.Г., Забелинский И.Е., Козлов П.В., Левашов В.Ю., Герасимов Г.Я.* Программа расчета спектров двухатомных молекул “СПЕКТР” // Свидетельство о регистрации прав на ПО, базу данных № 2023687422 от 14 декабря 2023 года.
26. *Глинов А.П., Головин А.П., Козлов П.В.* Особенности горения протяженных сильноточных дуг во внешнем магнитном поле в разных газовых средах // L Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и УТС, 20–24 марта 2023, ICPAF-2023. Сб. тез. докл., М: ПЛАЗМАИОФАН 2023, 231 с.
27. *Глинов А.П., Головин А.П., Козлов П.В.* Исследование инициирования и протекания тока и межэлектродной среды разных газов атмосферного давления в протяженных разрядных камерах // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике / Сб. тез. доклад. в 4 Т. 21–25 августа 2023 года, Санкт-Петербург. Т. 2. Механика жидкости и газа. Санкт-Петербургский политехнический ун-т Петра Великого. Санкт-Петербург. 2023. С. 743–745.

# Extended High-Current Arc Discharges in an External Magnetic Field in Gas Media

**©2025 A. P. Glinov*, A. P. Golovin**, and P. V. Kozlov*****

*Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow oblast, Russia*

**e-mail: glshur@imec.msu.ru*
***e-mail: gnka_golovin_apsf@mail.ru*
****e-mail: kalevala@mail.ru*

Extended (up to several tens of centimeters) high-current (hundreds of amperes) electric arcs in various gases at the atmospheric pressure are studied experimentally and theoretically. Such discharges have been studied on the electric discharge stand of the P-2000 facility of the Institute of Mechanics of Moscow State University. The data on the influence of an external magnetic field on the stability of such discharges and the formation of branched current channels are clarified. One of the areas of the research is the study of the effect of the orientation of the magnetic field imposed on the arc on the processes of development of the discharge in various gas media, such as air, $CO_2$, Ar, and $N_2$. The data for argon and nitrogen are presented most fully. The experiments were carried out in a chamber with transparent walls. The calculation and the theoretical study are carried out on the basis of an electrical engineering model using the empirical data on the volt-ampere characteristics of arcs between graphite electrodes. It is found that the stability of high-current arcs is significantly affected by electrode jet-flame dynamics. At the same time, the traditional models of arcs in the external magnetic field without taking these factors into account show that the direction of the external axial field does not affect the stability of the arcs, affecting only the direction of their twisting during the development of helical instability.

*Keywords:* extended electric arc, magnetic field, discharge chamber, graphite electrodes, discharge initiation

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 60–72

УДК 532.5:551.5

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ И СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ. ФОРМИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

**© 2025 г. М. В. Калашник***

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Москва, Россия*
*Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*

**e-mail: kalashnik-obn@mail.ru*

Поступила в редакцию 23.02.2025 г.
После доработки 16.03.2025 г.
Принята к публикации 21.03.2025 г.

Исследована устойчивость пространственно периодических течений однородной и стратифицированной жидкости с учетом придонного трения. Для решения задачи устойчивости использован метод Галеркина с тремя базисными фурье-гармониками. Сформулирована система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд фурье-гармоник. Получено решение линеаризованного варианта системы, найдено выражение для инкремента нарастания возмущений. Установлено, что экспоненциальный рост линейных возмущений на нелинейной стадии развития сменяется режимом установления стационарных периодических возмущений в форме замкнутых ячеек. Эти возмущения уменьшают осредненную горизонтальную скорость течения. Получены аналитические выражения для пространственного периода и амплитуды стационарных возмущений.

*Ключевые слова:* гидродинамическая неустойчивость, придонное трение инкремент нарастания, вихревые ячейки

**DOI:** 10.31857/S1024708425030066

Исследованию гидродинамической неустойчивости геофизических течений посвящена обширная литература (большой список публикаций в [1–3]). С развитием неустойчивости связывают образование атмосферных циклонов, синоптических вихрей в океане, упорядоченных вихревых дорожек, и т. д.

В настоящей работе исследована устойчивость пространственно периодических течений однородной и стратифицированной жидкости с учетом придонного трения. Для решения задачи устойчивости использован метод Галеркина с тремя базисными фурье-гармониками. Сформулирована система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд фурье-гармоник. На основе численного решения этой системы в предшествующих работах было показано, что в модели без трения развитие неустойчивости течений приводит к установлению режима нестационарных колебаний или васцилляций. В настоящей работе показано, что ситуация принципиально меняется при учете трения. Экспоненциальный рост линейных возмущений на нелинейной стадии развития сменяется режимом установления стационарных периодических по пространству возмущений. Эти возмущения уменьшают осредненную горизонтальную скорость течения. Получены аналитические выражения для пространственного периода и амплитуды возмущений.

## 1. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В МОДЕЛИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются двумерные движения однородной несжимаемой вязкой жидкости с характерным горизонтальным масштабом $D$ и скоростью $U_0$ в присутствии внешней силы $f$. В безразмерные переменные движения описываются уравнением

$$(\Delta\psi)_t + \psi_x(\Delta\psi)_y - \psi_y(\Delta\psi)_x = \mathrm{Re}^{-1}\left(\Delta^2\psi + f\right). \tag{1.1}$$

Здесь $\psi$ — функция тока, $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$ — компоненты скорости, $\mathrm{Re} = U_0 D/\nu$ — число Рейнольдса, $\nu$ — коэффициент кинематической вязкости, $\Delta$ — оператор Лапласа. В качестве масштабов координат, времени и функции тока приняты соответственно $D$, $D/U_0$, $U_0 D$, амплитуда внешней силы $f_0 = \nu U_0/D^2$.

Система уравнение (1.1) имеет точное решение

$$\psi = \Psi(y) = \sin y, \quad u = U(y) = -\cos y, \tag{1.2}$$

описывающее стационарное пространственно-периодическое течение, возбуждаемое внешней периодической силой $f = -\sin y$. Данное течение получило название “течение Колмогорова”. Течение (1.2) является точным решением (1.1) и в отсутствии вязкости $\mathrm{Re}^{-1} = 0$ (невязкое течение Колмогорова).

Течение (1.2) достаточно хорошо воспроизводятся магнитогидродинамическим методом в лабораторных экспериментах с проводящей жидкостью [4–7]. Аналоги таких течений могут создаваться и в природных условиях, например, под действием периодического распределения касательного напряжения ветра в океане или внешних притоков тепла в атмосфере.

Задача об устойчивости течения (1.2) в вязкой жидкости была впервые поставлена А.Н. Колмогоровым в 1960 г. Уже через год линейный вариант задачи получил решение в известной работе [7]. Для исследования линейной устойчивости в этой работе использовался аппарат теории цепных дробей, позволяющий определить минимальное критическое значение числа Рейнольдса и длину волны наиболее опасного возмущения. Высокая степень симметрии и возможность лабораторного моделирования течения Колмогорова (1.2) стимулировали многочисленные теоретические исследования его устойчивости в присутствии ряда осложняющих факторов (трение, бета эффект, стратификация) [8–15]. Длинноволновой подход к исследованию нелинейной устойчивости течения Колмогорова, использующий интегральные условия разрешимости для периодических возмущений, был предложен в работах [16, 17]. С использованием такого подхода была развита слабо нелинейная теория устойчивости, справедливая при небольших отклонениях числа Рейнольдса Re от критического значения. Обзор публикаций, посвященных исследованию устойчивости течения Колмогорова, представлен в работе [4] и статье [22].

Линейная динамика возмущений при больших значениях числа Рейнольдса исследовалась в упомянутой статье [7], а также работе [15]. Нелинейная динамика возмущений течения Колмогорова в отсутствие трения ($\mathrm{Re} = \infty$) изучалась в недавних работах [15, 17]. В настоящей работе рассмотрен подход, позволяющий описать нелинейную динамику возмущений при конечных значениях числа Рейнольдса. В этом подходе используется метод Галеркина с тремя базисными тригонометрическими функциями и амплитудами возмущений, зависящими от времени. Показано, что поведение амплитуд возмущений во времени описывается системой из трех нелинейных дифференциальных уравнений. Установлено, что в модели с трением экспоненциальный рост линейных возмущений течения Колмогорова сменяется режимом установления стационарных периодических возмущений в форме замкнутых ячеек. Эти возмущения приводят к меандрированию течения и уменьшают его среднюю скорость. Получены аналитические выражения для пространственного периода и амплитуды возмущений.

## 2. МЕТОД ГАЛЕРКИНА И ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Представляя в (1.1) $\psi = \Psi(y) + \psi'$, для описания динамики малых возмущений $\psi'$ стационарного невязкого течения (1.2) получим уравнение

$$(\Delta\psi')_t - (\Delta\psi' + \psi')_x \cos y = \mathrm{Re}^{-1}\Delta^2\psi'. \tag{2.1}$$

В [7] отыскивались экспоненциально нарастающие со временем и периодические по координате $y$ решения уравнения (2.1), представимые рядом по системе тригонометрических функций $\cos(ny)$, $\sin(ny)$. Нахождение инкремента нарастания при этом сводилось к анализу достаточно громоздкого алгебраического уравнения, содержащего бесконечную цепную дробь.

Упрощенный подход к построению решений уравнения (2.1) основан на методе Галеркина с тремя базисными функциями $f_1(y) = 1$, $f_2(y) = \cos y$, $f_3(y) = \sin y$ (первыми тремя членами тригонометрического ряда). Обозначим угловыми скобками $\langle\phi\rangle = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\phi\, dy$ операцию осреднения по периоду $2\pi$ фонового течения и запишем уравнение (2.1) в символическом виде $L(\psi') = 0$. В соответствии с методом Галеркина приближенное решение уравнения (2.1) ищем в виде (штрих у возмущений опускаем)

$$\psi = A(x,t)\cos y + B(x,t)\sin y + C(x,t). \tag{2.2}$$

Коэффициенты разложения находим из условий ортогональности $\langle f_i(y)L(\psi)\rangle = 0$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, получим систему уравнений для коэффициентов разложения

$$(A_{xx} - A)_t - (C_{xx} + C)_x = \mathrm{Re}^{-1}(A_{xxxx} - 2A_{xx} + A), \quad C_t - (1/2)A_x = R^{-1}C_{xx}. \tag{2.3}$$

К этим уравнениям присоединяется изолированное уравнение

$$(B_{xx} - B)_t = \mathrm{Re}^{-1}(B_{xxxx} - 2B_{xx} + B), \tag{2.4}$$

имеющее только затухающие со временем решения, в частности $B = 0$.

Нахождение решений уравнений (2.3) вида $A = a_0 e^{\lambda t}\cos(kx)$, $C = c_0 e^{\lambda t}\sin(kx)$ приводит к уравнению для квадрата для инкремента нарастания $\lambda$

$$\left(k^2+1\right)\lambda^2 + \mathrm{Re}^{-1}\left(k^2+1\right)\left(2k^2+1\right)\lambda + \mathrm{Re}^{-2}k^2\left(k^2+1\right)^2 + (1/2)k^2\left(k^2-1\right) = 0. \tag{2.5}$$

Приравнивая свободный член уравнения (2.5) к нулю, получим уравнение кривой нейтральной устойчивости на плоскости параметров $(k, \mathrm{Re})$. Эта кривая отделяет растущие решения $(\lambda > 0)$ от затухающих решений $(\lambda < 0)$ и описывается уравнением

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{cr}(k) = \sqrt{2}\frac{k^2+1}{\sqrt{1-k^2}}. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) дает прекрасную аппроксимацию уравнения нейтральной кривой, полученной методом теории цепных дробей в работе [7]. Согласно этой формуле, неустойчивость существует, если $\mathrm{Re} > \sqrt{2}$, причем интервал волновых чисел неустойчивых мод лежит внутри интервала $0 < k < 1$.

Отметим, что согласно (2.5), в отсутствии трения $(\mathrm{Re}^{-1} = C)$ квадрат инкремента нарастания $\lambda^2 = (1/2)k^2\left(1-k^2\right)/\left(1+k^2\right)$. Согласно этому выражению, длинноволновые возмущения с $0 < k^2 < 1$ экспоненциально нарастают. Наиболее опасному возмущению с максимумом инкремента отвечает волновое число $k = k_m = \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0.64$. Динамика линейных и нелинейных возмущений в отсутствии трения подробно исследовалась в наших недавних работах [18, 20].

## 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Результаты линейного анализа позволяют предположить, что метод Галеркина будет давать хорошую аппроксимацию решений и в нелинейном случае. Для течения (1.2) нелинейная динамика возмущений описывается уравнением

$$(\Delta\psi')_t - (\Delta\psi' + \psi')_x\cos y + \psi'_x(\Delta\psi')_y - \psi'_y(\Delta\psi')_x = \mathrm{Re}^{-1}\Delta^2\psi'. \tag{3.1}$$

Будем искать приближенное решение (3.1) в форме (2.2). Подставляя (2.2) в (3.1) и используя условия ортогональности системе функций $f_i(y)$, получим следующую нелинейную систему уравнений в частных производных для определения коэффициентов разложения

$$\begin{gathered}(A - A_{xx})_t + (C_{xx} + C)_x + (B - B_{xx})C_x + BC_{xxx} = -\mathrm{Re}^{-1}(A_{xxxx} - 2A_{xx} + A),\\ (B - B_{xx})_t - (A - A_{xx})C_x - AC_{xxx} = -\mathrm{Re}^{-1}(B_{xxxx} - 2B_{xx} + B),\\ C_t - (1/2)A_x - (1/2)(BA_x - AB_x) = \mathrm{Re}^{-1}C_{xx}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь первые два уравнения (3.2) для простоты умножены на “–1”. Линейный вариант системы (3.2) сводится к (2.3), (2.4). Отметим, что для переменной $C$ метод Галеркина дает уравнение $C_{xxt} - (1/2)\left((B+1)A_x - A(B+1)_x\right)_{xx} = \mathrm{Re}^{-1}C_{xxxx}$. Третье уравнение (3.2) получается из этого уравнения понижением порядка.

Полагая $B = B_1 - 1$ и считая, что $B_1 = B_1(t)$ зависит только от времени, запишем систему (3.2) в виде

$$\begin{gathered}(A - A_{xx})_t + B_1(C_{xx} + C)_x = -\mathrm{Re}^{-1}(A_{xxxx} - 2A_{xx} + A),\\ (B_1)_t - (A - A_{xx})C_x - AC_{xxx} = -\mathrm{Re}^{-1}(B_1 - 1),\\ C_t - (1/2)B_1(t)A_x = \mathrm{Re}^{-1}C_{xx}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Теперь полагаем

$$A = a(t)\cos(kx), \quad C = c(t)\sin(kx), \quad B_1 = b(t).$$

Подстановка этих выражений в (3.3) приводит к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд $a = a(t)$, $c = c(t)$, $b = b(t)$

$$\begin{gathered}a_t(t)\left(1+k^2\right) + bc(t)k\left(1+k^2\right) = \mathrm{Re}^{-1}\left(k^2+1\right)^2 a,\\ b_t - (1/2)kac = -\mathrm{Re}^{-1}(b-1), \qquad c_t + (1/2)kab(t) = -\mathrm{Re}^{-1}k^2c.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь нижними буквенными индексами обозначены частные производные по времени. Среднее уравнение (3.4) следует из уравнения $(b_1)_t - \left(1+k^2\right)kac\cos^2 x + ack^3\cos^2 x = 0$, после применения формул понижения степени. Остальные уравнения точные.

Случай с отсутствием трения рассматривался в наших предшествующих работах [18, 20]. Система (3.4) при этом сводится к нелинейной системе

$$a_t(t)\left(1+k^2\right)+bc(t)k\left(1-k^2\right)=0, \qquad b_t-(1/2)kac=0, \qquad c_t+(1/2)kab(t)=0.$$

Из этой системы следуют законы сохранения

$$\frac{d}{dt}\left(b^2+c^2\right)=0\ \frac{d}{dt}\left(g(k)a^2+b^2-c^2\right)=0,$$

где $g(k)=\left(1+k^2\right)/\left(1-k^2\right)$. Использование этих законов позволяет представить решение системы в терминах эллиптических функций. Это решение описывает нелинейные колебания или васциляции. Пример численного решения системы (3.4) в случае $\mathrm{Re}^{-1}=0$ для значения $k=0.5$ представлен на рис. 1. Как показывают расчеты, при значениях Re, близких к нулю, имеют место затухающие со временем колебания. Совершенно другое поведение наблюдается в модели с трением при малых, но конечных значениях числа Рейнольдса Re. В этом случае взамен колебаний реализуется режим установления стационарных пространственно периодических течений. Остановимся на этом режиме подробнее.

Нетрудно видеть, что стационарный вариант системы (3.4) в модели с трением

$$\begin{gathered} bck\left(1-k^2\right)+\mathrm{Re}^{-1}\left(k^2+1\right)^2 a=0, \\ -(1/2)kac+\mathrm{Re}^{-1}(b-1)=0, \qquad (1/2)kab+\mathrm{Re}^{-1}k^2c=0, \end{gathered} \tag{3.5}$$

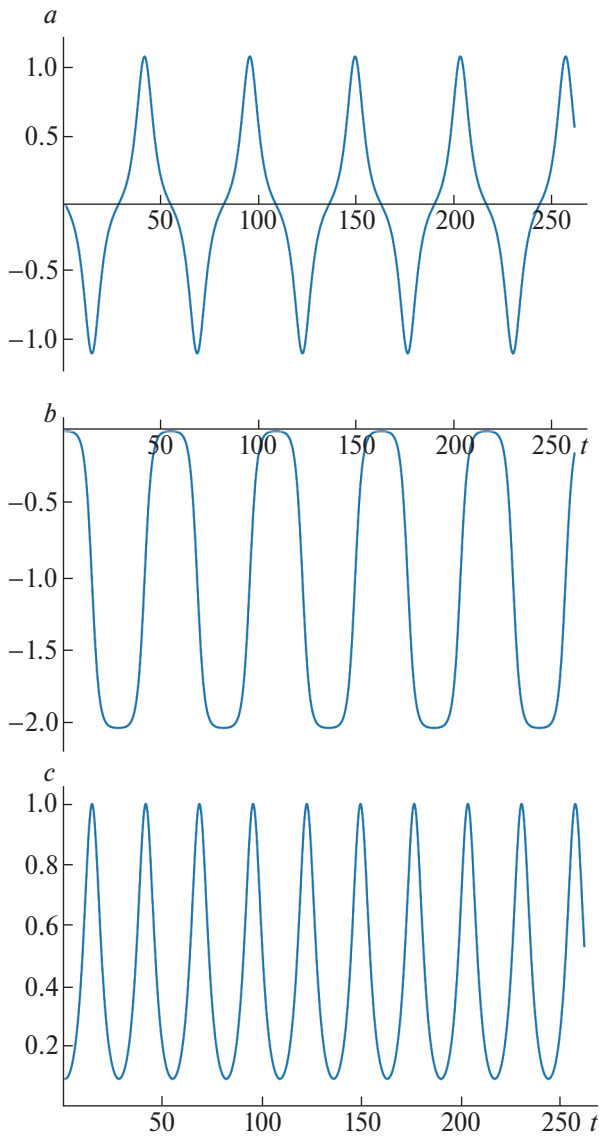



**Рис. 1.** Нелинейные васцилляции возмущений (функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$) в модели без трения.

имеет точное стационарное решение. Действительно, из последнего уравнения (3.5) следует

$$c = -\frac{(1/2)kab}{\mathrm{Re}^{-1}k^2}. \tag{3.6}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (3.5) после сокращения на $a$ и простых преобразований, получим $b^2 = \dfrac{\mathrm{Re}^{-2}\left(k^2+1\right)^2}{(1-k^2)}$, или

$$b = \pm\sqrt{2}\frac{\mathrm{Re}^{-1}\left(k^2+1\right)}{\sqrt{1-k^2}}. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) во второе уравнение (3.5) получим

$$a = \pm\mathrm{Re}^{-1}\sqrt{b^{-1}-1}. \tag{3.8}$$

Выражения (3.6)–(3.8) однозначно определяют две неподвижные стационарные точки системы (3.4).

Численные расчеты показывают, что данные неподвижные точки являются устойчивыми. Независимо от выбора начальных условий все решения стремятся к одной из двух неподвижных точек. Пример численного решения нелинейной системы (3.4) представлен на рис. 2.

Координаты неподвижных точек хорошо согласуются с выражениями (3.6)–(3.8). В частности при $k = 0.5$, $R^{-1} = 0.1$ предельные теоретические значения (3.6)–(3.8): $b = 0.2054$, $a = -0.39$, $c = 0.806$. Эти значения практически совпадают со значениями в численном расчете.

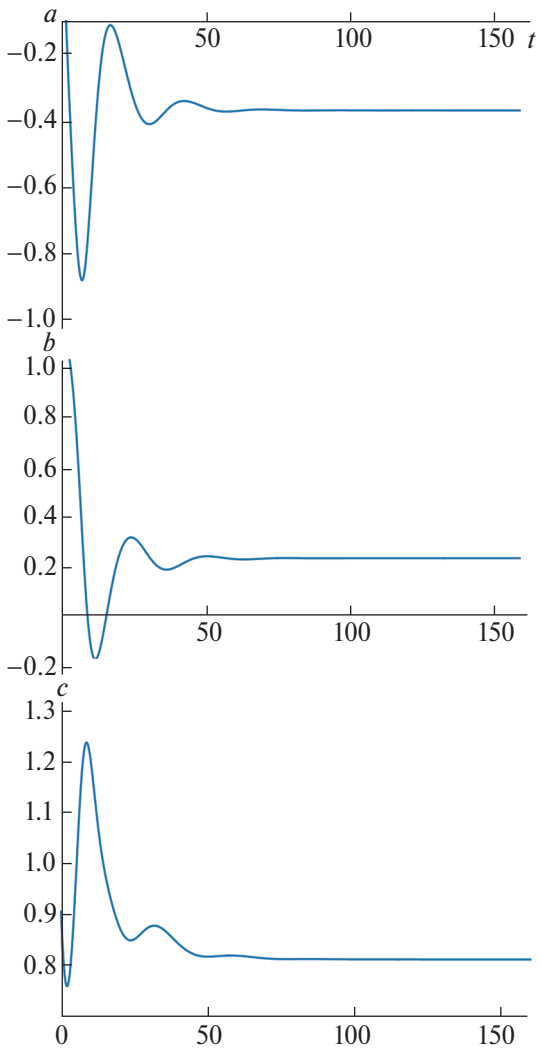



**Рис. 2.** Пример численного решения системы (3.4) при $k = 0.5$, $\mathrm{Re}^{-1} = 0.1$ с начальными условиями $a(0) = 0.5$, $b(0) = 1$, $c(0) = 0.9$.

Доказательство устойчивости неподвижных точек можно выполнить, используя систему для линейного приближения. Обозначим координаты неподвижных точек (3.6)–(3.8) как $b = b_0$, $c = c_0$, $a = a_0$. Положим $a(t) = a_0 + a$, $b(t) = b_0 + b$, $c(t) = c_0 + c$. Тогда для возмущений из (3.4) будем иметь линеаризованную систему

$$a_t(t)\left(1+k^2\right) + (b_0c(t) + c_0b)\,k\left(1-k^2\right) = -\mathrm{Re}^{-1}\left(k^2+1\right)^2 a,$$
$$b_t - (1/2)k(a_0c + c_0a) = -\mathrm{Re}^{-1}b, \qquad c_t + (1/2)k(a_0b + b_0a) = -\mathrm{Re}^{-1}k^2c. \tag{3.9}$$

Для доказательства линейной устойчивости можно использовать различные аналитические критерии относительно поведения возмущений. Проще, однако, провести прямой численный расчет решений системы (3.9). Пример такого расчета представлен на рис. 3. Как видно, все решения линеаризованной системы стремятся к нулю, что свидетельствует о линейной устойчивости.

Таким образом, результаты расчетов показывают, что в присутствии трения развитие нелинейной неустойчивости приводит к формированию в периодическом зональном потоке системы стационарных замкнутых вихревых ячеек. При наличии зонального потока полная функция тока течения определяется выражением $\psi = a(x,t)\cos y + b(x,t)\sin y + c(x,t)$, или, в предельном случае, для значений $k = 0.5$, $\mathrm{Re}^{-1} = 0.1$

$$\psi = -0.39\cos kx\cos y + 0.204\sin y + 0.806\sin kx. \tag{3.10}$$

Изолинии функции тока (3.10) показаны на рис. 4. Как видно, все изолинии данной функции наклонены по потоку.

Важный результат состоит в том, что модуль осредненной по горизонтальной координате скорости меньше модуля скорости основного течения. Если обозначит угловыми скобками осредненную по гори-

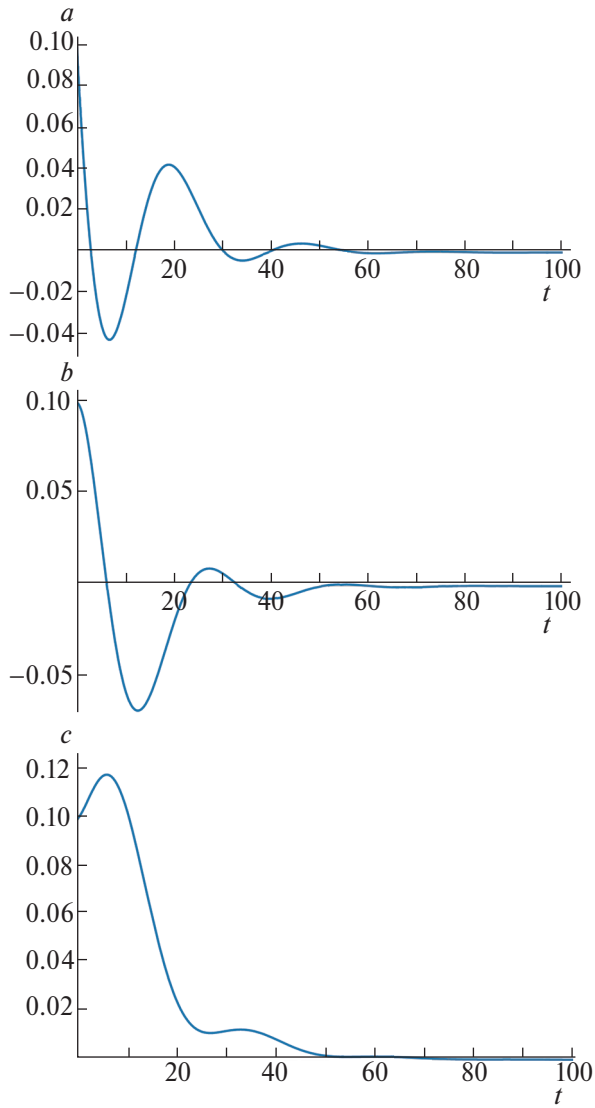



**Рис. 3.** Пример численного решения линеаризованной системы.

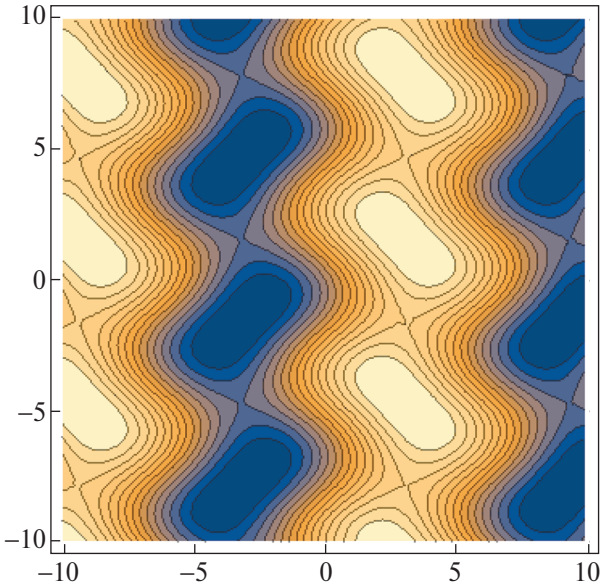



**Рис. 4.** Изолинии функции тока (3.10), устанавливающиеся в результате неустойчивости. По горизонтальной и вертикальной осям отложены координаты $x$ и $y$.

зонтали скорость то для основного течения $\langle U\rangle = -1$, а для течения с ячейками, согласно (18), $\langle U\rangle = -0.204$. Формирование вихревых ячеек, таким образом, приводит к уменьшению модуля средней скорости течения. Как показано ниже эта особенность сохраняется и модели стратифицированной жидкости.

Описанное выше поведение с установлением стационарных ячеек принципиально отличается от осциллирующего поведения в отсутствии трения.

## 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЫ

Для изучения устойчивости периодических течений используем уравнения поверхностной геострофической модели (SQG-модель), описывающей движения стратифицированной вращающейся жидкости с нулевой потенциальной завихренностью [21, 22]. В модели рассматривается стратифицированная, вращающаяся и полубесконечная атмосфера ($z > 0$) с постоянной частотой плавучести $N$ и инерционной частотой $f$. Рассматриваются движения атмосферы с характерной скоростью $U_0$, горизонтальным масштабом $D$ и числом Россби $\mathrm{Ro} = U_0/fD = 1$. В безразмерных переменных уравнения SQG-модели включают уравнение Лапласа для функции тока $\psi$ во внутренней области

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь в качестве горизонтального и вертикального масштаба приняты соответственно $D$ и $H = Df/N$, масштаба времени и функции тока соответственно $T = D/U_0$ и $\psi_0 = U_0D$. Безразмерные горизонтальные компоненты скорости $u, v$ и возмущение плавучести $\sigma$ (потенциальной температуры) связаны с функцией тока соотношениями $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$, $\sigma = \psi_z$.

К уравнению (4.1) присоединяется важное краевое условие

$$z = 0: \quad \psi_{zt} + [\psi, \psi_z] = -r\Delta_2\psi + F. \tag{4.2}$$

Здесь квадратными скобками обозначен двумерный якобиан по переменным $x, y$, $[m, n] = m_x n_y - m_y n_x$. Также обозначено $r = \mathrm{E}^{1/2}/2\mathrm{Ro}$ — коэффициент придонного трения, $\mathrm{E} = (h_E/H)^2$ — число Экмана, $h_E = (2\nu/f)^{1/2}$ — толщина экмановского пограничного слоя с эффективным коэффициентом турбулентной вязкости $\nu$. Подробный вывод условия (4.2) представлен в монографии [23]. Отметим, что коэффициент трения может быть представлен в виде $r = \left(\dfrac{2\nu f}{U_*^2}\right)^{1/2}\dfrac{D}{H}$. Также отметим, что для приведенных значений параметров и $h_E = 0.5$ км, коэффициент трения $r = 4$.

В условии (4.2) присутствует действующая на границе внешняя периодическая сила $F$. Далее считаем эту силу стационарной и пространственно периодической $F = -r\cos y$. В отсутствии трения и внешней силы, условие (4.2) есть уравнения переноса плавучести на горизонтальной границе.

Непосредственно из (4.1), (4.2) вытекает уравнение баланса полной энергии

$$E_t = -r < \psi_x^2 + \psi_y^2 > \Big|_{z=0}, \qquad E = \int_0^1 < \left(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2\right) > dz, \tag{4.3}$$

отражающее диссипативный характер придонного трения. Здесь угловыми скобками обозначена операция осреднения по горизонтальным координатам.

Подчеркнем, что для решений уравнения Лапласа (4.1) (гармонических функций) значения функции тока $\psi$ на границах выражаются через граничное значение нормальной производной $\sigma = \psi_z$ (посредством нелокального оператора типа Гильберта). Описание трехмерной динамики течений с нулевой потенциальной завихренностью, таким образом, сводится к решению двумерного уравнения (4.2) на границе. Этим объясняется термин поверхностная геострофическая модель (SQG model). Подробное описание модели содержится в работах [22, 24–26].

Система (4.1), (4.2) при наличии внешней силы $F = -r\cos y$ на границе имеет точное решение

$$\Psi = e^{-z}\cos y, \tag{4.4}$$

описывающее зональное пространственно периодическое течение со скоростью $U = -\Psi_y = e^{-z}\sin y$, плавучестью $\sigma = \Psi_z = -e^{-z}\cos y$, локализованное вблизи подстилающей поверхности. Размерная форма профиля скорости $U = U_0 e^{-z/H}\sin(y/D)$, $H = Df/N$. Представляя $\psi = \Psi + \psi'$ и опуская штрих, для описания возмущений получим уравнение Лапласа (4.1) с краевым условием

$$z = 0: \quad \psi_{zt} + \sin y(\psi_{xz} + \psi_x) + [\psi, \psi_z] = -r\Delta_2\psi \tag{4.5}$$

и условием затухания при $z \to \infty$.

В рамках задачи (4.1), (4.5) далее будет изучена линейная и нелинейная динамика возмущений периодического течения (4.4). Подчеркнем, что нелинейный член задачи содержится только в граничном условии и описывает нелинейную адвекцию приземного поля плавучести.

## 5. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Как и ранее, для описания линейной динамики возмущений используем метод Галеркина с тремя базисными функциями $f_1 = \sin y$, $f_2 = \cos y$, $f_3 = 1$ по поперечной координате $y$. Согласно этому методу, приближенное решение для возмущений ищется в форме разложения по базисным функциям

$$\psi = A(x,z,t)\sin y + B(x,z,t)\cos y + C(x,z,t). \tag{5.1}$$

В силу уравнения Лапласа (4.1), коэффициенты разложения удовлетворяют уравнениям

$$A_{xx} + A_{zz} - A = 0, \qquad B_{xx} + B_{zz} - B = 0, \qquad C_{xx} + C_{zz} = 0. \tag{5.2}$$

Из линеаризованной формы условия (4.5) следуют также уравнения, связывающие распределения $A$, $B$, $C$ на границе. Для получения этих уравнений запишем условие (4.5) в виде $z = 0$: $L(\psi) = \psi_{zt} + \sin y(\psi_{xz} + \psi_x) + r\Delta_w\psi = 0$ и используем условия ортогональности $\langle f_i(x)L(\psi)\rangle = 0$, $i = 1, 2, 3$. Здесь и далее угловыми скобками обозначена операция осреднения по периоду $2\pi$: $\langle\phi\rangle = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\phi\, dy$. Учитывая (4.5), получим

$$\begin{gathered} L(\psi) = A_{zt}\sin y + B_{zt}\cos y + C_{zt} + \sin y(A_{xz} + A_x)\sin y + (B_{xz} + B_x)\cos y + \\ + (C_{xz} + C_x) + r\big((A_{xx} - A)\sin y + (B_{xx} - B)\cos y + C_{xx}\big). \end{gathered} \tag{5.3}$$

Отсюда из условий ортогональности следуют уравнения

$$A_{zt} + (C_{xz} + C_x) + r(A_{xx} - A) = 0, \qquad C_{zt} + (1/2)(A_{xz} + A_x) + rC_{xx} = 0. \tag{5.4}$$

К этим уравнениям присоединяется изолированное уравнение

$$B_{zt} = r(B_{xx} - B) = 0, \tag{5.5}$$

имеющее только затухающие со временем решения, в частности $B = 0$. Условия (5.4) рассматриваются при $z = 0$.

Гармонические по координате $x$ решения уравнений (25) можно записать в виде

$$A = a(t)e^{-k_1 z}\sin(kx), \qquad C = c(t)e^{-kz}\cos kx, \qquad B = 0, \tag{5.6}$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 + 1}$. Подстановка (5.6) в условия (5.4) при $z = 0$ приводит к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_t(t) + k_1^{-1}k(1 - k)c(t) + rk_1^{-1}\left(k^2 +\right)a = 0, \tag{5.7}$$

$$c_t(t) + (1/2)(k_1 - 1)a(t) + rkc = 0.$$

Эта система имеет экспоненциально нарастающие со временем решения. Полагая $a = Ae^{\lambda t}$, $c = Ce^{\lambda t}$ из (5.7) получим систему линейных однородных уравнений

$$\left(\lambda + rk_1^{-1}\left(k^2 + 1\right)\right)A + k_1^{-1}k(1 - k)C = 0,$$
$$(1/2)(k_1 - 1)A + (\lambda + rk)C = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, для инкремента нарастания получим квадратное уравнение

$$\lambda^2 + rk_1^{-1}\left(\left(k^2 + 1\right) + rk\right)\lambda + r^2k_1^{-1}\left(k^2 + 1\right)k - (1/2)k_1^{-1}k(1 - k)(k_1 - 1) = 0. \quad (5.8)$$

Условие равенства нулю свободного члена этого уравнения дает граничное значение $r$, определяющее возникновение неустойчивости

$$r^{-2} = r_c^{-2}(k) = \frac{2\left(k^2 + 1\right)}{(1 - k)(k_1 - 1)}.$$

Неустойчивость существует если $r^{-2} > r_c^{-2}(k)$, или, что эквивалентно, $(1 - k)(k_1 - 1)/2\left(k^2 + 1\right) < r_c$. График зависимости $r^{-2} = r_c^{-2}(k)$, представлен на рис. 5. Неустойчивости отвечают значения $k$, лежащие выше этой кривой, имеющей форму потенциальной ямы.

## 6. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ

Опишем теперь нелинейную динамику возмущений в присутствии трения. Для описания также используем метод Галеркина с тремя базисными функциями. Преимущество этого метода состоит в том, что с его помощью можно относительно легко построить приближенное решение этой нелинейной задачи.

Как и ранее, будем искать приближенное решение в форме разложения (5.1), где коэффициенты разложения удовлетворяют линейным уравнениям (5.2), следующим из уравнения Лапласа (4.1). Для получения нелинейных уравнений на границе $z = 0$ преобразуем условие (4.5). Линейная часть $L(\psi)$ этого условия дается выражением (5.1). Прямое вычисление нелинейного члена дает

$$[\psi, \psi_z] = (1/2)(BA_z - AB_z)_x + (BC_{xz} - C_xB_z)\sin y + (C_xA_z - AC_{xz})\cos y + F(\sin 2y, \cos 2y),$$

где через $F(\sin 2y, \cos 2y)$ обозначена линейная комбинация тригонометрических функций двойного аргумента. Подстановка этого выражения и $L(\psi)$ (5.3) в (4.5), с последующим использованием условий ортогональности, приводит к нелинейной системе уравнений на границе $z = 0$:

$$\begin{gathered} A_{zt} + (B + 1)C_{xz} + (1 - B_z)C_x - r(A_{xx} - A) = 0, \\ C_{zt} + (1/2)\left((B + 1)A_z + (1 - B_z)A\right)_x + rC_{xx} = 0, \\ B_{zt} + C_xA_z - AC_{xz} + r(B_xx - B) = 0. \end{gathered} \quad (6.1)$$

Линеаризованный вариант (6.1), очевидно, сводится к граничным уравнениям (5.4).

Будем искать приближенные решения уравнений (4.1), (6.1) вида

$$A = a(t)e^{-k_1z}\sin(kx), \qquad C = c(t)e^{-kz}\cos(kx), \qquad B = b(t)e^{-2}, \quad (6.2)$$

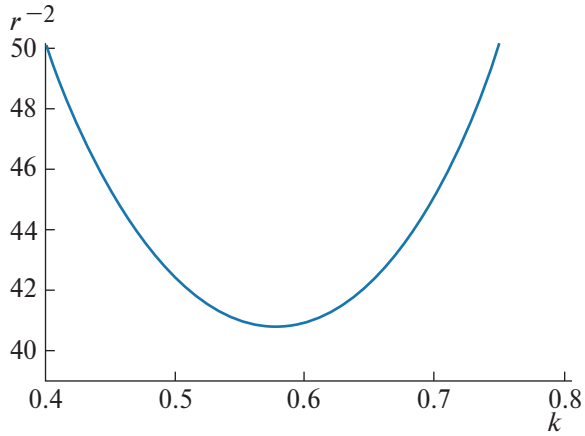



**Рис. 5.** Кривая нейтральной устойчивости.

где $k_1 = \sqrt{k^2+1}$. Для выбранной формы решений уравнение (4.1) точно удовлетворяются, а граничные уравнения (6.1) сводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям без всяких аппроксимаций. Как и ранее, введем операцию осреднения по горизонтальной координате $\langle\phi\rangle = \lim\limits_{L\to\infty}\dfrac{1}{L}\int_0^L \phi\,dx$, $L = \dfrac{2\pi}{k}$ и для выбранной формы решения вычислим осредненный нелинейный член последнего уравнения (6.1): $\langle(C_xA_z - AC_{xz})\rangle = (1/2)k(k_1-k)ac$. Из последнего выражения следует, что приближенное решения для коэффициента $B$ должно зависеть только от времени и вертикальной координаты, что учтено в (6.2). Обозначая для краткости $b = b+1$, таким образом, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для описания нелинейной динамики возмущений

$$a_t + \alpha bc + rk_1^{-1}\left(k^2+1\right)a = 0, \qquad c_t + \gamma ba + rkc = 0, \qquad b_t - \beta ac + r(b-1) = 0. \tag{6.3}$$

Здесь обозначено

$$\alpha = \frac{k(1-k)}{k_1}, \qquad \gamma = \frac{k_1-1}{2}, \qquad \beta = \frac{k(k_1-k)}{2}. \tag{6.4}$$

Отметим, что в отсутствии трения нелинейная система (6.3) аналогична системе, описывающей движение симметричного волчка в механике (или движение жидкости в эллипсоидальной полости). Вытекающие из (6.3) законы сохранения

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma a^2 - \alpha c^2\right) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\beta a^2 - \alpha b^2\right) = 0,$$

позволяют аналитически проинтегрировать систему [27–29]. Соответствующее решение описывает нелинейные колебания, аналогичные колебаниям, описанным ранее для баротропной модели.

Важная особенность нелинейной системы (6.3) в модели с трением состоит в том, что стационарный вариант системы

$$\alpha bc + rk_1^{-1}\left(k^2+1\right)a = 0, \qquad \gamma ba + rkc = 0, \qquad -\beta ac + r(b-1) = 0 \tag{6.5}$$

имеет точное стационарное решение. Действительно, из второго уравнения (6.3) следует $c = -\gamma ba/rk$. Подставляя это выражение в первое уравнение, после сокращения на $a$ получим $b^2 = r^2k_1^{-1}k\left(k^2+1\right)/\alpha\gamma$, или $b = \pm r\sqrt{k_1^{-1}k\left(k^2+1\right)/\alpha\gamma}$. Теперь подставим значение $v$ в последнее уравнение. Получим $a^2 = r^2k\times\times\left(b^{-1}-1\right)/\beta\gamma$, или $a = \pm r\sqrt{k\left(b^{-1}-1\right)/\beta\gamma}$. Приведенные выражения однозначно определяют координаты двух неподвижные стационарных точек системы (6.3). Для значений $r = 0.115$, $k = 0.6$ вычисления дают $b = \pm 0.736$, $a = \pm 0.45$, $c = \pm 0.40$.

Как показывают расчеты при малых, но конечных значениях $r$ взамен колебаний реализуется режим установления стационарных периодических решений с амплитудами (неподвижными точками), следующими из системы (6.4). Пример численного решения нелинейной системы (6.3) для значений $r = 0.115$, $k = 0.6$ и начальных условий $a(0) = 0.5$, $c(0) = 0.5$, $b(0) = 1$ показан на рис. 6.

Результаты расчетов показывает, что указанные неподвижные точки являются устойчивыми. Независимо от выбора начальных условий все решения системы стремятся к одной из двух неподвижных точек. Это свидетельствует об устойчивости неподвижных точек без привлечения аналитических критериев устойчивости.

Таким образом, развитие нелинейной неустойчивости приводит к формированию в периодическом зональном потоке системы замкнутых стационарных вихревых ячеек. При наличии ячеек, функция тока течения определяется выражением $\psi = a(t)e^{-kz}\sin(kx)\sin y + b(t)e^{-z}\cos y + c(t)e^{-kz}\cos(kx)$ или, в предельном случае, на нижней границе $z = 0$ для значений параметров $r = 0.115$, $k = 0.6$

$$\psi = -0.45\sin(kx)\sin y + 0.736\cos y + 0.4\cos(kx). \tag{6.6}$$

Изолинии функции тока (6.6) показаны на рис. 7. Как и в модели с отсутствием стратификации изолинии данной функции наклонены по потоку. Стратификация приводит к уменьшению длины предельной волны в поперечном направлении.

Как и ранее, модуль осредненной по горизонтальной координате скорости течения в присутствии ячеек меньше модуля скорости основного течения. Если обозначит угловыми скобками осредненную по горизонтали скорость, то для основного течения $\langle U\rangle = 1$, а для течения с ячейками, согласно (6.6), $\langle U\rangle = 0.736$. Формирование вихревых ячеек, опять, приводит к уменьшению модуля средней скорости течения.

Подчеркнем, что для описания нелинейной динамики возмущений мы использовали модель Галеркина с тремя модами. Как показано в работе [27], увеличение числа мод не приводит к качественно новым ре-

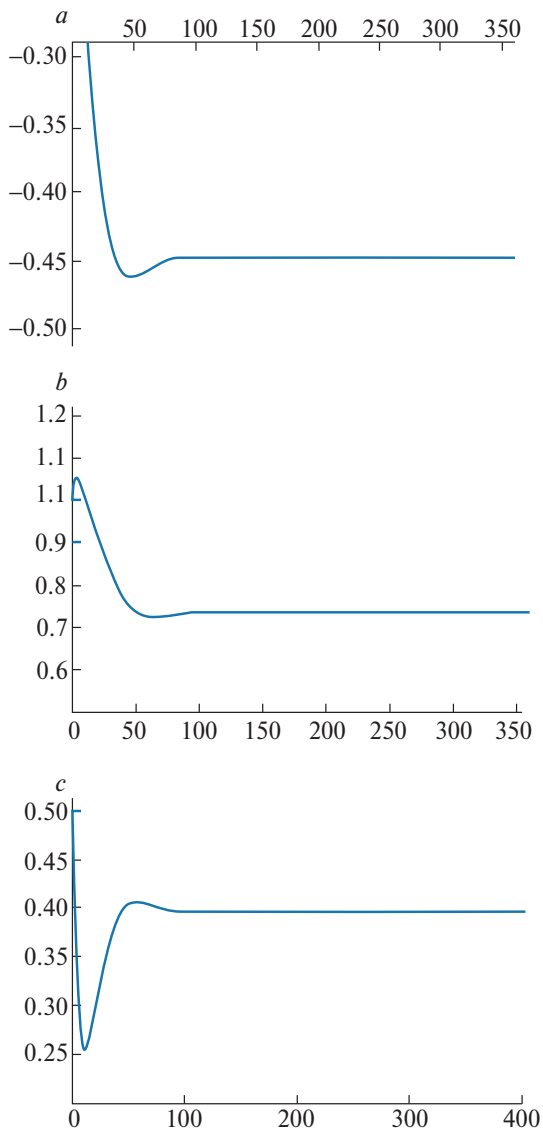



**Рис. 6.** Пример численного решения системы (6.3) для значений $r = 0.115$, $k = 0.6$ и начальных условий $a(0) = 0.5$, $c(0) = 0.5$, $b(0) = 1$.

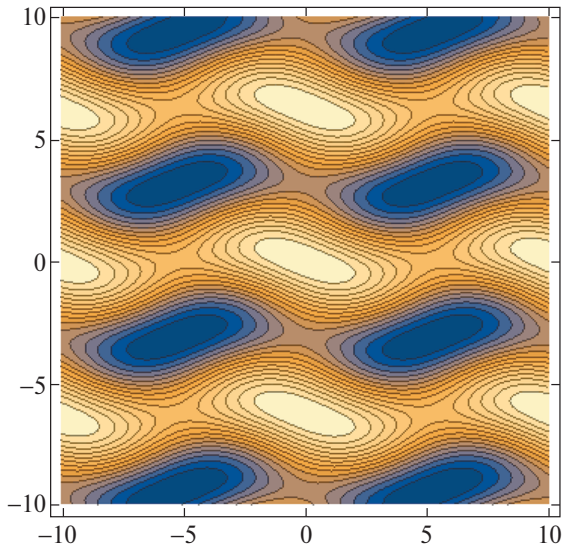



**Рис. 7.** Изолинии функции тока (6.6), устанавливающиеся в результате неустойчивости.

зультатам. Модель с тремя модами также дает хорошее приближение для численных значений критических параметров.

Следует также отметить, что течения стратифицированной среды периодической или квазипериодической структуры достаточно часто наблюдаются в атмосферах планет. Так, по данным наблюдений распределение скорости зональных течений по широте в атмосфере Юпитера носит практически периодический характер.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована устойчивость пространственно периодических течений однородной и стратифицированной жидкости с учетом придонного трения. Для решения задачи устойчивости использован метод Галеркина с тремя базисными фурье-гармониками. Сформулирована система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд фурье-гармоник. На основе численного решения этой системы в предшествующих работах авторов было показано, что в модели без трения развитие неустойчивости течений приводит к режиму установления колебаний или васцилляций. В настоящей работе показано, что ситуация принципиально меняется при учете трения. Экспоненциальный рост линейных возмущений на нелинейной стадии развития сменяется режимом установления стационарных периодических возмущений. Эти возмущения уменьшают осредненную горизонтальную скорость течения. Получены аналитические выражения для пространственного периода и амплитуды возмущений.

Полученные теоретические результаты для течения Колмогорова согласуются с описанием результатов экспериментов, представленных в [16], после прохождения критического значения числа Рейнольдса Re однонаправленное течение становится неустойчивым, и возникает вторичное течение в виде регулярной системы стационарных вихрей. С ростом Re стационарное течение становится неустойчивым и возникают периодические колебания. Таким образом, результаты достаточно простой теоретической модели с тремя модами хорошо согласуются с экспериментом.

Автор благодарит О.Г. Чхетиани за полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 23-17-00273).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
2. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 2. 415 с.
3. *Монин А.С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 433 с.
4. *Обухов А.М.* Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 4 (232). С. 101–111.
5. *Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука. 1981. 366 с.
6. *Thess A.* Instabilities in two–dimensional spatial periodic flows. Part I: Kolmogorov flow // Phys. Fluids A. 1992. V. 4 (7). P. 1385–1395.
7. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25. № 6. С. 1700–1705.
8. *Goton K., Yamada M., Mizushima Y.* The theory of stability of spatially periodic flows // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 45–58.
9. *Beaumont D.* The stability of spatially periodic flows // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 461–474.
10. *Батчаев А.М., Курганский М.В.* О неустойчивости периодического сдвигового течения слабостратифицированной жидкости // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 1. С. 3–9.
11. *Balmforth N.J, Young Y.N.* Stratified Kolmogorov flow //J. Fluid Mech. 2002. V. 450. P. 131–167.
12. *Manfroi A, Young W.* Stability of β-plane Kolmogorov flow // Phys. D. 2002. V. 162. P. 208–232.
13. *Matsuda M.* Stability of the basic solution of Kolmogorov flow with a bottom friction // Tokyo J. Math. 2010. V. 33. P. 65–72.
14. *Lucas D., Kerswell R.* Spatiotemporal dynamics in two dimensional Kolmogorov flow over large domains // J. Fluid. Mech. 2014. V. 750. P. 518–554.
15. *Kim S., Okamoto H.* Unimodal patterns appearing in the Kolmogorov flows at large Reynolds numbers // Nonlinearity. 2015. V. 28. P. 3219–3242.
16. *Sivashinsky G.* Weak turbulence in periodic flows // Phys. D. 1985. No. 17. P. 243–255.
17. *Sivashinsky G., Yakhot V.* Negative viscosity effect in large scale flows // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 1040–1042.
18. *Kalashnik M., Kurgansky M.* Nonlinear dynamics of long-wave perturbations of the Kolmogorov flow for large Reynolds numbers // Ocean Dyn. 2018. V. 68. P. 1001–1012.

19. *Boffetta G., Celani A., Mazzino A.* Drag reduction in the turbulent Kolmogorov flow // Phys Rev. E. V. 71. 2005. 036307.
20. *Kalashnik M.V., Kurgansky M.V.* Nonlinear Oscillations in a Two-Dimensional Spatially Periodic Flow // Eur. Phys. J. Plus. 2024. V. 139. No. 2. P. 1–11.
21. *Blumen W.* Uniform potential vorticity flow: part I. Theory of wave interactions and two dimensional turbulence // J. Atmos. Sci. 1978. V. 35. P. 774–783.
22. *Held I.M., Pierrehumbert R.T., Garner S.T., Swanson K.L.* Surface quasi-geostrophic dynamics // J. Fluid Mech. 1995. V. 282. P. 1–20.
23. *Pedlosky J.* Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag. Berlin. New York. 1987. 710 p.
24. *Lapeyre G., Klein P.* Dynamics of the upper oceanic layers in terms of surface quasigeostrophy theory // J. Phys. Oceanogr. 2006. V. 36. P. 165–176.
25. *Badin G.* Surface semi-geostrophic dynamics in the ocean // J. Fluid Dyn. 2013. 107. P. 526–540.
26. *Harvey B., Ambaum M.* Instability of surface temperature filaments in strain and shear // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 2010. V. 136. P. 1506–1513.
27. *Kalashnik M.V., Kurgansky M.V., Kostrykin S.V.* Instability of surface quasigeostrophic spatially periodic flows // J. Atmos. Sci. 2020. V. 77. P. 239–255.
28. *Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G., Kurgansky M.V.* Discrete SQG models with two boundaries and baroclinic instability of jet flows // Phys. Fluids. 2021. V. 33. 076608.
29. *Калашник М.В., Курганский М.В., Чхетиани О.Г.* Бароклинная неустойчивость в геофизической гидродинамике // УФН. 2022. Т. 192. № 10. С. 1110–1144.

# Hydrodynamic Instability of Spatially Periodic Flows of Homogeneous and Stratified Fluid with Regard for Friction. Formation of Steady-State Vortex Disturbances

**© 2025 M. V. Kalashnik***

*Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**e-mail: kalashnik-obn@mail.ru*

The stability of spatially periodic flows of homogeneous and stratified fluid is investigated with regard for bottom friction. The Galerkin method with three basis Fourier harmonics is used to solve the stability problem. A system of ordinary differential equations for the amplitudes of the Fourier harmonics is formulated. A solution to the linearized version of the system is obtained and an expression for the increment of disturbance growth is found. It is established that at the nonlinear stage of development the exponential growth of linear disturbances is replaced by the regime of establishing steady-state periodic disturbances in form of closed cells. These disturbances reduce the averaged horizontal velocity of the flow. Analytical expressions for the spatial period and amplitude of steady-state disturbances are obtained.

*Keywords:* hydrodynamic instability, bottom friction, growth rate, vortex cells

*ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 73–79*

*УДК 532.517.4:532.525.2*

# ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ В ПОТОКЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

**© 2025 г. В. Г. Лущик*, А. И. Решмин****

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия*

**e-mail: vgl_41@mail.ru*
***e-mail: alexreshmin@rambler.ru*

Поступила в редакцию 27.02.2025 г.
После доработки 17.03.2025 г.
Принята к публикации 18.03.2025 г.

Для сжимаемого турбулентного пограничного слоя проведено сравнение результатов численного исследования с использованием трехпараметрической RANS-модели турбулентности с результатами прямого численного моделирования (DNS). Показано, что при числах Маха от 6 до 14 результаты расчета с применением RANS-модели удовлетворительно согласуются с DNS-результатами, что позволяет рекомендовать использование ее в инженерных расчетах гиперзвукового пограничного слоя не требующих мощных вычислительных систем.

*Ключевые слова:* RANS-модель турбулентности, сжимаемый пограничный слой

**DOI:** 10.31857/S1024708425030076

В настоящее время при расчете прикладных задач используется группа наиболее апробированных дифференциальных моделей турбулентности, которые классифицируются на модели однопараметрические, двухпараметрические, трехпараметрические и более сложные модели. Подробное описание этих моделей приведено в [1]. Среди однопараметрических моделей следует отметить, как наиболее удачные, две модели для турбулентной вязкости [2] и [3]. Эти модели в случае описания относительно простых течений при сравнении с экспериментом дают погрешности не более 10–20%. В классе трехпараметрических моделей турбулентности одной из наиболее удачных, как отмечено в [4], является модель [5], прошедшая всестороннее тестирование в широком классе задач теории пограничного слоя [6–8]. Это тестирование осуществлялись путем сравнения расчетных данных, полученных при помощи модели турбулентности, с наиболее достоверными экспериментальными данными и эмпирическими зависимостями.

Отметим, что указанные модели применяются для замыкания осредненных уравнений Навье–Стокса, и сокращенно эту технологию описания течений называют RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes).

В связи с быстрым совершенствованием численных методов и ростом мощности вычислительных систем как альтернатива технологии RANS стали появляться прямые или полупрямые численные методы решения нестационарных уравнений Навье–Стокса практически без использования дополнительных замыкающих эмпирических соотношений. Так уже в 90-х гг. прошлого столетия появились расчеты методом DNS (Direct Numerical Simulation). Следует отметить, что в методе DNS необходимо описывать все турбулентные вихри, включая наименьшие масштабы Колмогорова, размер которых убывает с ростом числа Рейнольдса. Поэтому расчетная сетка должна иметь размер ячеек порядка или меньше чем масштаб Колмогорова, и отсюда следует довольно жесткое ограничение на диапазон возможных чисел Рейнольдса, для расширения которого требуется использование очень мощных современных многопроцессорных компьютеров.

Отметим, что полученные результаты DNS-расчетов, наряду с экспериментальными данными, могут быть использованы для верификации RANS-моделей турбулентности. Так, в [9] проведено тестирование однопараметрических моделей турбулентности [2, 3] для пограничного слоя пластины в сжимаемом потоке с числами Маха M 2.5–13.64, для которых в [10, 11] получены результаты прямого численного моделирования. Проведенное тестирование показало, что для M = 13.64 в модели [2] погрешность определения

коэффициента трения составляет 20.8%. Повысить точность модели [2] в [9] предложено введением корректирующего множителя в источниковый член модели [2], что позволило понизить погрешность определения коэффициента трения до 3.6%.

Тестирование трехпараметрической RANS-модели турбулентности [5], проведенное в [12] путем сравнения результатов расчета для пограничного слоя пластины в сжимаемом потоке с экспериментальными данными [13] для чисел Маха M 5.9–7.8, показало удовлетворительное согласование результатов расчета с экспериментальными данными как по интегральным, так и по локальным характеристикам течения и теплообмена в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса по толщине потери импульса, числа Маха набегающего потока и температурного фактора.

Целью настоящей работы является тестирование трехпараметрической RANS-модели турбулентности [5] для расчета пограничного слоя пластины в сжимаемом потоке с более высокими числами Маха M 2.5–13.64, для которых в [10] получены результаты прямого численного моделирования (DNS). Это позволит рекомендовать использование ее в инженерных расчетах гиперзвукового пограничного слоя, не использующих мощных вычислительных систем.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА

Постановка задачи расчета пограничного слоя аналогична приведенной в [12]. Для расчета течения и теплообмена в сжимаемом турбулентном пограничном слое с нулевым градиентом давления была использована система уравнений неразрывности, движения и энергии:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0,\quad \rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\rho\tau\right),$$

$$c_p\rho u\frac{\partial T}{\partial x}+c_p\rho v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\rho q_t\right)+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\rho\tau\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Здесь $x$ — направление вдоль пластины, $y$ — координата, отсчитываемая по нормали к пластине, $u$ и $v$ —компоненты скорости вдоль осей $x$ и $y$, соответственно, $\rho$ —плотность, $\eta$ — динамическая вязкость, $\lambda$ — теплопроводность.

Для определения турбулентного трения $\rho\tau$, входящего в уравнение движения использовалась трехпараметрическая RANS-модель турбулентности [5], обобщенная на течения с теплообменом [14]. Модель включает уравнения переноса для напряжения сдвига $\tau=-\langle u'v'\rangle$, энергии турбулентности $E=0.5\sum\langle u_i'^2\rangle$ и параметра $\omega=E/L^2$, предложенного А.Н. Колмогоровым. Этот параметр имеет физический смысл квадрата завихренности турбулентности, и содержит поперечный интегральный масштаб турбулентности $L$. Для определения турбулентного потока тепла $\rho q_t$, входящего в уравнение энергии, использовалось уравнение переноса для величины $q_t=-c_p\langle v'T'\langle$, полученное в [15]. В результате имеем следующие уравнения:

$$\rho u\frac{\partial E}{\partial x}+\rho v\frac{\partial E}{\partial y}=-\left(c\rho\sqrt{E}L+c_1\eta\right)\frac{E}{L^2}+\rho\tau\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_E\frac{\partial E}{\partial y}\right),$$

$$\rho u\frac{\partial \tau}{\partial x}+\rho v\frac{\partial \tau}{\partial y}=-\left(3c\rho\sqrt{E}L+9c_1\eta\right)+c_2\rho E\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_\tau\frac{\partial \tau}{\partial y}\right),$$

$$\rho u\frac{\partial \omega}{\partial x}+\rho v\frac{\partial \omega}{\partial y}=-\left(2c\rho\sqrt{E}L+1.4c_1\eta f_\omega\right)\frac{\omega}{L^2}+\left[\frac{\tau}{E}-2c_3\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\rho\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_\omega\frac{\partial \omega}{\partial y}\right),$$

$$D_\varphi=a_\varphi\sqrt{E}L+\alpha_\varphi\eta,\ (\varphi=E,\tau,\omega,q_t)\,,\ L=\sqrt{\frac{E}{\omega}},$$

$$f_\omega=1-\frac{1}{2c_1}\left(\frac{L}{E}\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2,\qquad f(\mathrm{Pr})=\frac{1+c_5}{2}\frac{\sqrt{\mathrm{Pr}}+\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Pr}}}}{1+c_5\sqrt{\mathrm{Pr}}}.$$

Значения констант: $c=0.3$, $c_1=5\pi/4$, $c_2=0.2$, $c_3=0.04$, $c_4=0.235$, $c_5=0.25$, $a_E=a_\omega=0.06$, $a_\tau=a_q=3a_E=0.18$, $\alpha_E=\alpha_\tau=1$, $\alpha_\omega=1.4$, $\alpha_{q_t}=f(\mathrm{Pr})$.

Система уравнений неразрывности, движения, энергии и модели турбулентности решалась при следующих граничных условиях на стенке и внешней границе пограничного слоя.

На стенке, при $y=0$

$$u=v=0,\qquad T=T_w(x),\ E=0,\qquad \frac{\partial E}{\partial y}=0,\qquad \tau=0,\ q_t=0.$$

Граничное условие $\partial E/\partial y = 0$ позволяет определить величину $\omega_w(x)$, которая заранее неизвестна. В качестве безразмерного критерия для заданной температуры стенки $T_w$ принимался температурный фактор, который для сверхзвукового пограничного слоя принимался в виде: $\theta = T_w/T_r$, где $T_r = T_1\left(1 + 0.89\mathrm{M}^2(\gamma - 1)/2\right)$ — температура восстановления [10].

На внешней границе пограничного слоя, при

$$u = u_1, \qquad T = T_1, \qquad E = E(x), \qquad \omega = \omega(x), \qquad \tau = 0, \qquad q_t = 0.$$

Здесь $u_1$ и $T_1$ — скорость и температура набегающего потока, приведенные в табл. 1, а функции $E(x)$ и $\omega(x)$ описывают изменение уровня турбулентности в потоке.

Величина $\delta(x)$ выбирается из условия равенства расстоянию от стенки при значении скорости, равной 99% от скорости набегающего потока.

В начальном сечении $(x = 0)$ задавался пограничный слой, толщина потери импульса $\theta_0$, в котором соответствовала числу $\mathrm{Re}_\theta = \rho_1 u_1/\theta_0/\eta_1 \approx 10$, с ламинарным (по Блазиусу) профилем скорости $u/u_1$ [15] и температурой, определяемой соотношением $(T - T_1)/(T_1^* - T_1) = 1 - (u/u_1)^2$; принималось, что $\tau(y) = q_t(y) = 0$, а профили функций $E(y)$, $\omega(y)$ задавались постоянными по сечению. Интенсивность турбулентности набегающего потока на входе $e_0 = \sqrt{E_0}/u_1 = 0.03$. Величина масштаба турбулентности в начальном сечении $L_0$, как показано в [16], слабо влияет на результаты расчетов, поэтому число Рейнольдса по этой величине было принято $\mathrm{Re}_L = \rho_1 u_1 L_0/\eta_1 = 10^5$ и в расчетах не менялось.

Система уравнений неразрывности, движения, энергии и уравнения модели турбулентности решались численно методом прогонки с итерациями (см. в [5]). Использовалась декартова система координат $(x, y)$ с осью $x$ вдоль пластины. Расчеты проводили на неравномерной сетке. Шаг по координате $y$ был достаточно малым у стенки (так чтобы в вязком подслое находилось не менее 50 точек) и увеличивался по мере приближения к границе пограничного слоя. Шаг по координате $x$ был также достаточно мал в сечениях, близких к входному, и увеличивался по мере продвижения вниз по потоку в зависимости от заданной точности расчета.

Теплофизические свойства среды (воздуха) в зависимости от температуры $T$ и давления $p$ для адекватного сравнения результатов расчета с результатами [10] задавались в точности такими же как в [10]:

- плотность определялась по уравнению состояния идеального газа $\rho = p/(RT)$, где газовая постоянная $R = 287$ Дж/кг/К;
- зависимость динамической вязкости от температуры задавалась в виде $\eta = \dfrac{1.458 \cdot 10^{-6} \cdot T^{3/2}}{T + 110.4}$;
- удельная теплоемкость принималась равной $c_p = 1.009$ кДж/кг/К;
- коэффициент теплопроводности определялся как $\lambda = \eta c_p/\mathrm{Pr}$, где $\mathrm{Pr} = 0.71$ — молекулярное число Прандтля.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В табл. 1 представлены исходные данные для расчета пограничного слоя, приведенные в [10] для DNS-расчетов.

Здесь $\mathrm{Re}_\vartheta = \rho_1 u_1 \vartheta/\eta_1$, $\vartheta$ — толщина потери импульса, индекс “1” относится к величине набегающего потока. Результаты расчетов по RANS-модели турбулентности [5] (линии *1–5*) зависимости коэффициента трения $C_f$ от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\vartheta$ для чисел Маха, приведенных в табл. 1, представлены на рис. 1. Там же приведены результаты DNS-расчетов [10] (точки *6* для чисел Маха, соответствующих линиям *1–5*, см. табл. 1) и экспериментальные данные [13] (точки *7* — $\mathrm{M} \sim 5.9$–$6.2$, $T_w/T_r \sim 0.28$–$0.31$, точки *8* — $\mathrm{M} \sim 7.4$–$7.8$, $T_w/T_r \sim 0.45$–$0.49$). Линия *а* соответствует ламинарному режиму течения $C_f = 0.44/\mathrm{Re}_\vartheta$, линия *б* — турбулентному (по Никурадзе) режиму течения $C_f = 0.0114/\mathrm{Re}_\vartheta^{0.16}$, к которому близка расчетная зависимость $C_f = (\mathrm{Re}_\vartheta)$ для $\mathrm{M} = 0.1$, $T + w/T_r = 1$ (линия *0*).

**Таблица 1.** Исходные данные [10] для расчета пограничного слоя

| M | 2.5 | 5.86 | 5.86 | 7.86 | 13.68 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$, м/с | 8424 | 869 | 870 | 1155 | 1882 |
| $\mathrm{Re}_\vartheta$ | 2835 | 2121 | 9455 | 9323 | 14408 |
| $\theta = T_w/T_r$ | 1 | 0.25 | 0.76 | 0.53 | 0.18 |
| $T_1$, K | 270 | 55 | 55 | 51.8 | 47.1 |
| $\rho_1$, кг/м$^3$ | 0.100 | 0.044 | 0.043 | 0.026 | 0.017 |
| Линии на рис. 1–3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Как видно из рис. 1, результаты расчетов коэффициента трения $C_f$ по RANS-модели турбулентности [5] удовлетворительно согласуются с результатами DNS-расчетов [10] и экспериментальными данными [13].

Результаты расчетов локальных характеристик течения (профилей скорости и напряжении сдвига) по RANS-модели турбулентности [5] (а) и DNS [10] (б) приведены соответственно на рис. 2–3.

Как видно из рис. 2, приведенные результаты расчета профилей скорости качественно согласуются, а количественное различие обусловлено тем, что в DNS-расчетах [10] в качестве ординаты использовалась средняя скорость, преобразованная по Ван-Дристу в виде $u^+_{VD} = \frac{1}{u_\tau}\int_0^u (\rho/\rho_w)^{1/2}$, где $u_\tau$ — скорость трения, в то время как в RANS-расчетах использовалась величина $u^+ = u/u_\tau$.

Как видно из рис. 3, приведенные в одинаковых координатах результаты расчета профилей напряжении сдвига по RANS-модели турбулентности [5] (а) и по DNS [10] (б), согласуются не только качественно, но и количественно.

Результаты расчетов по RANS-модели турбулентности [5], приведенные выше, получены на расчетной сетке с количеством узлов в сечении пограничного слоя $N = 513$. Исследование влияния количества узлов на результаты расчетов проведено для наибольшего числа Маха M = 13.68. Сравнение некоторых характеристик, соответствующих этому течения, полученных в DNS расчетах [10] и по RANS-модели турбулентности [5] для $N = 257$, 513 и 1025 приведено в табл. 2.

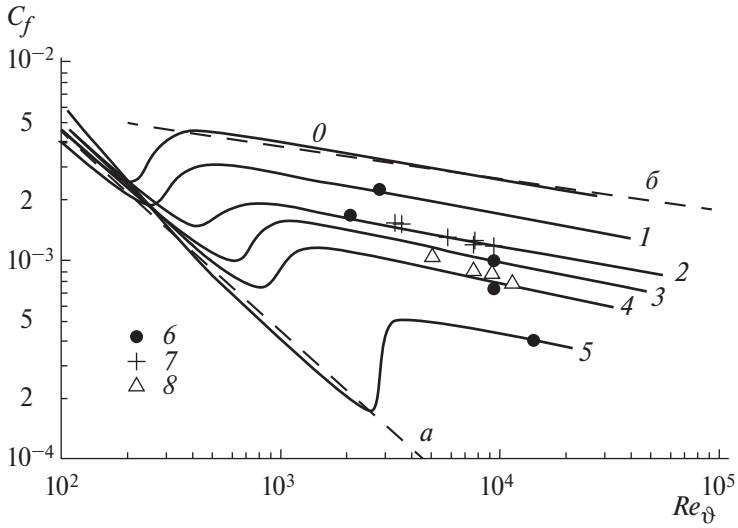



**Рис. 1.** Зависимость коэффициента трения $C_f$ от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_\varepsilon$ для чисел Маха, приведенных в табл. 1: линии *1–5* — RANS-модель турбулентности [5], точки *6* — DNS [10]; точки *7*, *8* — экспериментальные данные [13].

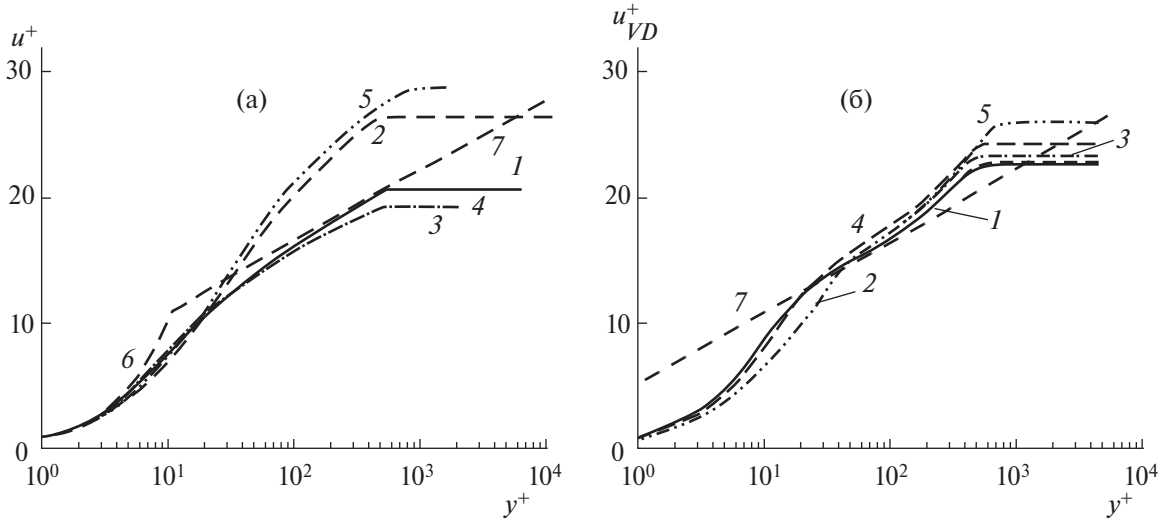



**Рис. 2.** Профили скорости $u^+(y^+)$ для чисел Маха, приведенных в табл. 1 (линии *1–5*): (а) — RANS-модель турбулентности [5], (б) — DNS [10]; линии *6* — $u^+ = y^+$, *7* — $u^+ = \ln(y^+)/0.41 + 5.2$.

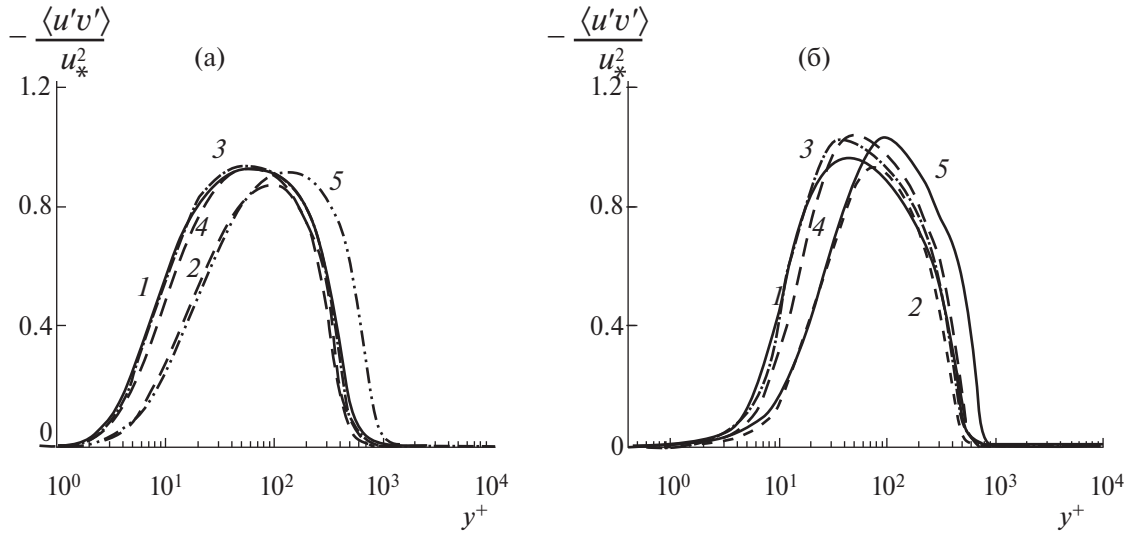



**Рис. 3.** Профили напряжения сдвига — $\langle u'v'\rangle/u_*^2$, где $u^* = u_\tau\sqrt{\rho_w/\rho}$ для чисел Маха, приведенных в табл. 1 (линии *1–5*): (а) — RANS-модель турбулентности [5], (б) — DNS [10].

**Таблица 2.** Параметры пограничного слоя для режима M = 13.68, $\theta = T_w/T_r = 0.18$, $T_0 = 47.1$ K, $\rho_0 = 0.017$ кг/м$^3$

| | $\mathrm{Re}_\vartheta$ | $\mathrm{Re}_\tau$ | $u_\tau$, (м/с) | $\mathrm{Re}_{\vartheta w}$ | $\vartheta$, (мм) | $H$ | $\delta$, (мм) | $C_f$, $10^{-3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DNS [10] | 14408 | 646 | 67.6 | 2354 | 1.35 | 37.6 | 66.1 | 0.405 |
| $N = 257$ | 14400 | 727 | 67.0 | 2457 | 1.40 | 43.0 | 74.3 | 0.385 |
| $N = 513$ | 14400 | 757 | 67.8 | 2457 | 1.40 | 43.2 | 76.5 | 0.394 |
| $N = 1025$ | 14400 | 760 | 67.9 | 2458 | 1.40 | 43.2 | 76.7 | 0.396 |

Здесь: $\mathrm{Re}_\tau = \rho_w u_\tau \delta/\eta_w$, $\mathrm{Re}_{\vartheta w} = \rho_1 U_1 \vartheta/\eta_w$, $H = \delta^*/\vartheta$ — формпараметр, $\delta^*$ — толщина вытеснения пограничного слоя, $\delta$ — толщина пограничного слоя (99% от скорости набегающего потока), $C_f$ — коэффициент трения.

Следует отметить, что значение величины коэффициента трения $C_f$, не приведенное в [10], определялось как $C_f = 2(\rho_w/\rho_1)\cdot(u_\tau/u_1)^2$.

Как видно из табл. 2, увеличение количества узлов с $N = 513$ до $N = 1025$ слабо сказывается на результатах расчетов, в частности, изменение коэффициента трения составило всего лишь 0.5%.

Относительная погрешность расчета коэффициента трения по RANS-модели турбулентности [5] при $N = 513$ для рассмотренных режимов приведена в табл. 3. Видно, что тестирование RANS-модели турбулентности [5] по результатам DNS-расчетов [10] в широком диапазоне чисел Маха можно считать вполне удовлетворительным.

Следует отметить, что при этом для гиперзвуковых чисел Маха не потребовалась корректировка констант исходной RANS-модели турбулентности [5] и они остались неизменными.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для сжимаемого пограничного слоя проведено сравнение результатов численного исследования с использованием трехпараметрической RANS-модели турбулентности [5] с DNS-результатами [10] прямого численного моделирования в широком диапазоне чисел Маха.

Результаты расчетов коэффициента трения $C_f$ по RANS-модели турбулентности [5] удовлетворительно согласуются с результатами DNS-расчетов [10]. Результаты расчетов локальных характеристик течения

**Таблица 3.** Относительная погрешность расчета коэффициента трения при $N = 513$ для рассмотренных режимов

| M | 2.5 | 5.86 | 5.86 | 7.86 | 13.68 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\theta = T_2/T_r$ | 1 | 0.25 | 0.76 | 0.53 | 0.18 |
| $C_f$, $10^{-3}$ — DNS [10] | 2.31 | 1.71 | 0.983 | 0.702 | 0.405 |
| $C_f$, $10^{-3}$ — RANS [5] | 2.21 | 1.62 | 1.00 | 0.782 | 0.394 |
| % | –4.3 | –5.3 | +1.7 | +11.4 | –2.7 |

по RANS-модели турбулентности [5] и DNS [10] для профилей скорости согласуются качественно, а для профилей напряжении сдвига и количественно.

Проведено исследование влияния количества узлов сетки на результаты расчетов для наибольшего числа Маха M = 13.68. Сравнение характеристик, соответствующих этому течению, полученных в DNS-расчетах [10] и по RANS-модели турбулентности [5] для $N$ = 257, 513 и 1025 показало, что увеличение количества узлов с $N$ = 513 до $N$ = 1025 слабо сказывается на результатах расчетов, в частности, изменение коэффициента трения составило всего лишь 0.5%.

Показано, что при числах Маха $6 < M < 14$ в RANS-модели турбулентности не требуется изменения констант модели. Результаты тестирования удовлетворительно согласуются с DNS-результатами, что позволяет рекомендовать использование ее в инженерных расчетах гиперзвукового пограничного слоя не требующих мощных вычислительных систем.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. 3rd Edition, DCW Industries, Canada, CA, USA, 2006. 550 p.; ISBN-13:978-0963605153; ISBN-10:0963605151.
2. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.* К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–81.
3. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamics Flows. Recherche Aerospatiale, No. 1. 1994. P. 5–21. https://doi.org/10.2514/6.1992-439
4. *Иевлев В.М.* Численное моделирование турбулентных течений. М.: Наука, 1990. 216 с.
5. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
6. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Турбулентные течения. Модели и численные исследования (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 4–27.
7. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Уравнения переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ. 1988. Т. 22. С. 3–61.
8. *Лущик В.Г., Якубенко А.Е.* Пограничный слой в соплах ЖРД (обзор) // Труды ГДЛ-ОКБ. № 18. Москва. 2000. С. 38–59.
9. *Козлов В.Е.* Учет скоростной сжимаемости однопараметрическими моделями турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 25–33.
10. *Zhang C., Duan L., Choudhari M.M.* Direct Numerical Simulation Database for Supersonic and Hypersonic Turbulent Boundary Layers // AIAA Journal. 2018. V. 56. No. 11. P. 4297–4311. https://doi.org/10.2514/1.J057296
11. *Huang J., Bretzke J.-V., Duan L.* Assessment of Turbulence Models in a Hypersonic Cold-Wall Turbulent Boundary Layer // Fluids. 2019. V. 4. No. 37. P. 10. https://doi.org/10.3390/fluids4010037
12. *Лущик В.Г., Якубенко А.Е.* Сверхзвуковой пограничный слой на пластине. Сравнение расчета с экспериментом // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 64–78.
13. *Hopkins E.J., Keener E.R., Polek T.E.* Hypersonic turbulent skin-friction and boundary-layer profiles on nonadiabatic flat plates // AIAA Journal. 1972. V. 10. No. 1. P. 40–48. Перевод: Е.Д. Хопкинс, Е.Р. Кинер, Т.Е. Полек. Трение на поверхности и профили скорости в гиперзвуковом турбулентном пограничном слое на нетеплоизолированных плоских пластинах // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10. № 1. С. 49–58.
14. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
15. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 42–50.
16. *Лущик В.Г., Павельев А.А. Решмин А.И., Якубенко А.Е.* Влияние граничных условий на переход к турбулентности в пограничном слое на пластине при большом уровне внешних возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 111–119.

# Turbulent Boundary Layer on a Plate in Compressible Gas Flow

**© 2025 V. G. Lushchik* and A. I. Reshmin****

*Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia*

**e-mail: vgl_41@mail.ru*
***e-mail: alexreshmin@rambler.ru*

For the compressible turbulent boundary layer, the results of the numerical study using the three-parameter RANS turbulence model are compared with the results of direct numerical simulation (DNS). It is shown that the calculation results using the RANS model are in satisfactory agreement with the DNS results at the Mach numbers from 6 to 14. This makes it possible to recommend the use of the RANS model in engineering calculations of the hypersonic boundary layer when there is no need for powerful computing systems.

*Keywords:* RANS turbulence model, compressible boundary layer

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 80–93

УДК 532.59:551.466.8

# ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ ПРИ УЧЕТЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

**© 2025 г. А. А. Слепышев***

*Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия*

**e-mail: slep55@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.09.2024 г.
После доработки 18.03.2025 г.
Принята к публикации 21.03.2025 г.

В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны в однородно стратифицированной жидкости при учете вращения Земли. Показано, что дисперсионное соотношение при учете горизонтальной компоненты угловой скорости вращения Земли при постоянной частоте волны сводится к каноническому уравнению для кривых второго порядка в плоскости горизонтальных волновых чисел. Если частота волны больше инерционной и меньше частоты Брента–Вяйсяля, то изолинии частоты — эллипсы. Если частота волны больше частоты плавучести, то изолинии частоты — гиперболы, если частота волны равна частоте Брента–Вяйсяля — то изолинии, две прямые, параллельные направлению на восток. Получены вертикальные волновые потоки импульса в зависимости от направления распространения волны. Показано, что потоки максимальны по модулю в том случае, когда волна распространяется на север или на юг. Проведено сопоставление вертикальных потоков импульса у внутренних и субинерционных волн при одной и той же длине, и максимальной амплитуде волны. Показано, что у субинерционных волн вертикальный поток импульса выше, чем у внутренних волн и с ослаблением стратификации ослабевает.

*Ключевые слова:* внутренние волны, субинерционные волны, вертикальный волновой поток импульса, сила Кориолиса

**DOI:** 10.31857/S1024708425030082

Суточное вращение Земли влияет на динамику океана. Течения и внутренние волны подвержены действию силы Кориолиса. Обычно учитывается только нормальная к поверхности Земли составляющая угловой скорости ее вращения при определении силы Кориолиса. Такое приближение называется традиционным [1–7]. В нетрадиционном приближении, т. е. при учете еще горизонтальной составляющей угловой скорости вращения Земли, возникает ряд новых эффектов, которые заметно проявляются при слабой стратификации. Применительно к дисперсионным характеристикам внутренних волн этот вопрос достаточно хорошо проработан [1–7]. При сильной стратификации, когда частота плавучести много больше инерционной отказ от традиционного приближения практически не сказывается на дисперсионных кривых. При слабой стратификации при учете горизонтальной составляющей угловой скорости Земли возможно существование внутренних волн с частотой, меньше инерционной, их называют субинерционными внутренними волнами. Частотный диапазон этих волн тем шире, чем меньше частота плавучести. Верхний квазиоднородный и придонный слабостратифицированные слои моря являются волноводами для этих волн. При уменьшении частоты субинерционной волны до предельно низкой масштаб волны стремится к нулю, что указывает на возможность диссипации энергии в малые масштабы, например при распространении субинерционных внутренних волн на горизонтально-неоднородных течениях или вследствие влияния β-эффекта [1, 6, 8]. В настоящей работе будет рассмотрено влияние нетрадиционного приближения на вертикальный перенос импульса внутренними волнами. Ранее этот вопрос рассматривался в традиционном приближении при наличии сдвиговых течений [9–11]. Было показано, что если компонента скорости течения, нормальная направлению распространения волны фиксированной моды, зависит от вертикальной

координаты, то вертикальные волновые потоки импульса отличны от нуля при учете вращения Земли. Внутренние волны распространяются нередко в виде волновых пакетов [12, 13]. Нелинейные эффекты при распространении пакетов внутренних волн проявляются в генерации средних на временном масштабе волны течений [14, 15]. Вертикальная компонента скорости этого индуцированного течения на переднем и заднем фронте пакета имеет разные знаки и в итоге переноса по вертикали не происходит [14]. Зато есть горизонтальный перенос, который может проявлять себя в выносе взвеси и осадочного материала с шельфа в глубоководную часть моря.

По существующим представлениям мелкомасштабная турбулентность ответственна за вертикальный обмен. Внутренние волны и сдвиговые течения являются источником энергоснабжения мелкомасштабной турбулентности в стратифицированной толще океане [16–19]. Но не только мелкомасштабная турбулентность ответственна за вертикальный обмен. При учете турбулентной вязкости и диффузии внутренние волны затухают и вертикальные волновые потоки тепла, соли и импульса отличны от нуля и вносят свой вклад в вертикальный обмен [20, 21]. Однако даже при отсутствии турбулентной вязкости и диффузии вертикальные волновые потоки импульса при учете вращения Земли в традиционном приближении отличны от нуля при наличии течений с вертикальным сдвигом скорости [9–11]. Представляет интерес исследовать влияние отказа от традиционного приближения на вертикальный перенос импульса внутренними волнами для сильной и слабой стратификации, когда субинерционные внутренние волны играют заметную роль.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются свободные внутренние волны в безграничном вертикально стратифицированном бассейне постоянной глубины при учете вклада горизонтальной составляющей угловой скорости Земли в силу Кориолиса. В линейном приближении находится дисперсионное соотношение и решается краевая задача для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн при постоянной частоте плавучести. Во втором порядке по амплитуде волны находятся вертикальные волновые потоки импульса.

Система уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска [4, 22] для волновых возмущений имеет вид:

$$\frac{Du}{Dt} + f_c w - f v = -\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1.1}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + f u = -\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{1.2}$$

$$\frac{Dw}{Dt} - f_c u = -\frac{1}{\bar{\rho}_0}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\bar{\rho}_0}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + w\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0, \tag{1.5}$$

$$f = 2\Omega \sin\varphi, \quad f_c = 2\Omega\cos\varphi,$$

где $\Omega$ — угловая скорость вращения Земли, $\varphi$ — широта, $f$ — параметр Кориолиса — инерционная частота; ось $x$ направлена на восток, ось $y$ на север, ось $z$ направлена вертикально вверх; $u$, $v$ $w$ — соответственно две горизонтальные и вертикальная компоненты волновых возмущений скорости течения вдоль указанных осей, $P$ и $\rho$ — волновые возмущения давления и плотности, $\rho_0(z)$ — невозмущенная средняя плотность, $\bar{\rho}_0$ — осредненное по глубине ее значение, постоянная величина в приближении Буссинеска; действие оператора $D/D_t$ раскрывается по формуле $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$.

Граничные условия на поверхности моря ($z = 0$) — условие “твердой крышки”, которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [4, 22]: $w(0) = 0$. Граничные условия на дне — условие “непротекания”: $w(-H) = 0$, $H$ — глубина моря.

## 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Решения системы (1.1)–(1.5) в линейном приближении ищется в виде:

$$u = u_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \qquad v = v_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \qquad w = w_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.},$$

$$P = P_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \qquad \rho = \rho_{10}(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \tag{2.1}$$

где с.с. — комплексно сопряженные слагаемые, $A$ — амплитудный множитель; $\theta$ — фаза волны, $\theta = kx + ly - \omega t$; $k, l$ — горизонтальные волновые числа, проекции волнового вектора $\mathbf{k}_h$ на оси $x, y$, соответственно; $\omega$ — частота волны.

Подставляя (2.1) в систему (1.1)–(1.5) находим связь амплитудных функций $u_{10}$, $v_{10}$, $\rho_{10}$, $P_{10}$ с $w_{10}$ и уравнение для $w_{10}$

$$u_{10} = \frac{\dfrac{dw_{10}}{dz}(ik\omega - fl) - if_c l^2 w_{10}}{\omega\left(k^2 + l^2\right)}, \tag{2.2}$$

$$v_{10} = \frac{\dfrac{dw_{10}}{dz}(fk + il\omega l) + if_c lk w_{10}}{\omega\left(k^2 + l^2\right)}, \tag{2.3}$$

$$\frac{P_{10}}{\overline{\rho}_0} = \frac{i\dfrac{dw_{10}}{dz}\left(\omega^2 - f^2\right) + f_c(ik\omega + fl)w_{10}}{\omega\left(k^2 + l^2\right)},$$

$$\rho_{10} = -\frac{i}{\omega}w_{10}\frac{d\rho_0}{dz}.$$

Функция $w_{10}$ удовлетворяет уравнению [3, 4, 6]

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + a(z)\frac{dw_{10}}{dz} + b(z)w_{10} = 0, \tag{2.4}$$

где $a(z) = -\dfrac{2ilff}{\omega^2 - f^2}$, $b(z) = \dfrac{\left(N^2 - \omega^2\right)\left(k^2 + l^2\right) + f_c^2 l^2}{\omega^2 - f^2}$, $N^2 = -\dfrac{g}{\overline{\rho}_0}\dfrac{d\rho_0}{dz}$ — квадрат частоты Брента–Вяйсяля.

Граничные условия для $w_{10}$

$$w_{10}(0) = w_{10}(-H) = 0. \tag{2.5}$$

## 3. ВОЛНОВЫЕ ПОТОКИ ИМПУЛЬСА

Представляет интерес найти проекции волновых возмущений скорости течения на направления вдоль и поперек горизонтального волнового вектора $\mathbf{k}_h$. Очевидно, что $k_h^2 = \left(k^2 + l^2\right)$. Пусть $\alpha$ — угол волнового вектора $(k)_h$ с осью $x$. Положительному значению угла $\alpha$ соответствует поворот оси $x$ к вектору $\mathbf{k}_h$ против часовой стрелки. Введем повернутую в горизонтальной плоскости на этот угол $\alpha$ систему координат $x'$, $y$. Ось $x$ направлена вдоль вектора $\mathbf{k}_h$, ось $y$ ей перпендикулярна. Тогда проекции волновых возмущений скорости течения на оси $x'$, $y$ имеют вид:

$$u' = u\cos\alpha + v\sin\alpha, \qquad v' = v\cos\alpha - u\sin\alpha.$$

Из представления решений для $u$, $v$ в виде (2.1), следует, что $u'$, $v$ можно представить как

$$u' = u'_1(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \qquad v' = v'_1(z)Ae^{i\theta} + \text{с.с.}, \tag{3.1}$$

где $u'_1$, $v'_1$ определяются по формулам:

$$u'_1 = u_{10}\cos\alpha + v_{10}\sin\alpha, \qquad v'_1 = v_{10}\cos\alpha - u_{10}\sin\alpha. \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.1), (3.2) и (2.2), (2.3) находятся вертикальные волновые потоки импульса

$$\overline{u'w} = \frac{i}{k_h}\left|A^2\right|\left(w_{10}^*\frac{dw_{10}}{dz} - w_{10}\frac{dw_{10}^*}{dz}\right), \tag{3.3}$$

$$\overline{v'w} = \frac{f}{\omega k_h}\left|A^2\right|\frac{d\left(w_{10}w_{10}^*\right)}{dz}. \tag{3.4}$$

Здесь черта сверху означает осреднение по периоду волны. Вертикальный волновой поток импульса $\overline{v'w}$ отличен от нуля при учете вращения Земли. Краевая задача (2.4), (2.5) имеет комплексные коэффициенты при $l \neq 0$ и комплексные решения. Поэтому поток $\overline{u'w}$ (3.3) не нулевой при учете горизонтальной составляющей угловой скорости Земли. В традиционном приближении этот поток равен нулю, т. к. уравнение (2.4) при $f_c = 0$ имеет действительные коэффициенты и решение краевой задачи (2.4), (2.5) — действительная функция. При $\alpha = 0; \pi$ волновое число $l = 0$ и вертикальный волновой поток импульса $\overline{u'w}$ равен нулю в нетрадиционном приближении, т. к. уравнение (2.4) имеет действительные коэффициенты и действительные решения и совпадает с уравнением традиционного приближения.

Нормирующий множитель $A$ находится по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений $\zeta_{\max}$. Для этого выразим вертикальное смещение $\zeta$, используя соотношение $d\zeta/dt = w$:

$$\zeta = \frac{iw_{10}}{\omega} A \exp(ily - i\omega t) + \text{c.c.}$$

Отсюда следует

$$A = \frac{\zeta_{\max}}{2 \max |w_{10}/\omega|}. \tag{3.5}$$

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Уравнение (2.4) допускает точное аналитическое решение при постоянной частоте Брента–Вяйсяля. Тогда уравнение (2.4) упрощается к виду:

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + 2ia_0 \frac{dw_{10}}{dz} + b_0 w_{10} = 0, \tag{4.1}$$

где

$$a_0 = -\frac{lff_c}{\omega^2 - f^2}, \qquad b_0 = \frac{h_h^2}{\omega^2 - f^2}\left(N^2 - \omega^2 + f_c^2 \sin^2\alpha\right). \tag{4.2}$$

Решение краевой задачи (4.1), (2.5) имеет вид:

$$w_{10}(z) = e^{-ia_0 z} \sin\left(z\sqrt{a_0^2 + b_0}\right). \tag{4.3}$$

При этом справедливо дисперсионное уравнение, вытекающее из граничного условия (2.5) при $z = -H$:

$$H\sqrt{a_0^2 + b_0} = \pi n,$$

где $r$ — целое положительное число.

Отсюда

$$a_0^2 + b_0 = \left(\frac{\pi n}{H}\right). \tag{4.4}$$

После подстановки выражений (4.2) для $a_0$, $b_0$ в (4.4) получаем

$$\frac{f^2 f_c^2 k_h^2 \sin^2\alpha}{(\omega^2 - f^2)^2} + \frac{k_h^2}{\omega^2 - f^2}\left[N^2 - \omega^2 + f_c^2 \sin^2\alpha\right] = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2. \tag{4.5}$$

Отсюда следует дисперсионное соотношение [3, 4, 6]:

$$k_h^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)^2}{\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + \omega^2 f_c^2 \sin^2\alpha}. \tag{4.6}$$

Здесь $n$ — номер моды. Нетрудно видеть, что в традиционном приближении при $f_c = 0$ дисперсионное соотношение (4.6) переходит в известное соотношение при постоянной частоте Брента–Вяйсяля [4, 5, 22]:

$$\omega^2 = \frac{N^2 k_h^2 + f^2\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}{k_h^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2}, \qquad k_h^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)}{\left(N^2 - \omega^2\right)}. \tag{4.7}$$

Из условия положительности $k_h^2$ (4.7) следует неравенство при $f^2 < \omega^2 < N^2$, т. е. у внутренних волн в традиционном приближении частота волны удовлетворяет неравенству $f < \omega < N$.

При учете горизонтальной составляющей угловой скорости Земли условие положительности $k_h^2$ (4.6) приводит к неравенству для частоты $\omega$ [3, 4, 6]:

$$\omega_2^2 < \omega^2 < \omega_1^2, \tag{4.8}$$

где $\omega_1$, $\omega_2$ определяются по формулам [3, 4, 6]:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[N^2 + f^2 + f_c^2 \sin^2\alpha \pm \sqrt{(N^2 - f^2)^2 + f_c^4 \sin^3\alpha + 2f_c^2 \sin^2\alpha\,(N^2 + f^2)}\right]. \tag{4.9}$$

Следует отметить справедливость следующих неравенств [3]:

$$\omega_1^2 > \max\left(N^2, f^2\right), \quad \omega_2^2 < \min\left(N^2, f^2\right). \tag{4.10}$$

Нетрудно видеть, что дисперсионное уравнение (4.6) при фиксированной частоте волны $\omega$ эквивалентно каноническому уравнению (4.11) для кривых второго порядка на плоскости горизонтальных волновых чисел $k$, $l$ (соответствующее доказательство приведено в Приложении):

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1, \tag{4.11}$$

где

$$a^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)}{\left(N^2 - \omega^2\right)}; \qquad b^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)^2}{\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + \omega^2 f_c^2}. \tag{4.12}$$

Уравнение (4.11) при $a^2 > 0$ является уравнением эллипса, т. к. при этом и $b^2 > 0$, $a$ — большая полуось эллипса, $b$ — малая полуось. При $a^2 < 0$ и $b^2 > 0$ уравнение (4.11) — уравнение гиперболы. Если $1/a^2 = 0$ (при $\omega = N$ уравнение (4.11) превращается в уравнение двух прямых, параллельных оси $k$:

$$l = \pm \frac{\pi n \left(N^2 - f^2\right)}{HNf_c}. \tag{4.13}$$

Рассмотрим случай $N > 1$, $\omega > f$, соответствующий внутренним волнам. При $f < \omega < N$ уравнение (4.11) — уравнение эллипса, при $\omega > N$ и $b^2 > 0$ уравнение (4.11) — уравнение гиперболы. Решение неравенства $b^2 > 0$ имеет вид:

$$\omega_{2*}^2 < \omega^2 < \omega_{1*}^2, \tag{4.14}$$

где $\omega_{2*}^2$, $\omega_{1*}^2$ определяются по формулам:

$$\omega_{1,2*}^2 = \frac{1}{2}\left[N^2 + f^2 + f_c^2 \pm \sqrt{(N^2 - f^2)^2 + f_c^4 + 2f_c^2\left(N^2 + f^2\right)}\right]. \tag{4.15}$$

Нетрудно видеть, что неравенство (4.14) совпадает с неравенством (4.8) при $\sin^2\alpha = 1$, при этом $\omega_{2*}^2$, $\omega_{1*}^2$ удовлетворяют условиям (4.10), т. е. выполнены условия:

$$\omega_{1*}^2 > N^2, \qquad \omega_{2*}^2 < f^2. \tag{4.16}$$

Отсюда неравенство $b^2 > 0$ выполнено при

$$N^2 < \omega^2 < \omega_{1*}^2. \tag{4.17}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (4.17) изолинии частоты в плоскости горизонтальных волновых чисел — гиперболы.

Дальнейший анализ изолиний частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел проведем для внутренних волн первой моды ($n = 1$) с частотой $\omega$, удовлетворяющей условию $f < \omega < \omega_{1*}$ для трех типов стратификации: $N_1 = 3$ цикл/ч — сильная стратификация; $N_2 = 2.5f$ — слабая стратификация; $N_3 = 1.5f$ — очень слабая стратификация. Глубина моря $H = 200$ м, широта $\varphi = 44.8°$ с.ш. В традиционном приближении изолинии частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел — окружности, квадрат радиуса которых определяется по формуле (4.7). На рис. 1 показаны изолинии частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел при сильной стратификации, когда учитывается горизонтальная составляющая угловой скорости вращения Земли. В случае сильной стратификации при $f < \omega < 0.98N_1$ на рис. 1 эллипсы превращаются в окружности, практически совпадающими с окружностями в традиционном приближении. Частоте $\omega = 0.98N_1$ соответствует длина волны 57.6 м, для более длинных волн изолинии частоты — окружности. В интервале частот $0.98N_1 \leqslant \omega < N_1$ изолинии частоты — эллипсы.

При $\omega = N_1$ изолиниями на рис. 1 являются прямые $l = \pm\dfrac{\pi\left(N_1^2 - f^2\right)}{HN_1 fc}$, при $N_1 < \omega < \omega_{1*}$ изолиниями являются гиперболы.

На рис. 2 показаны изолинии частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел при слабой стратификации, когда $N_2 = 2.5f$.

Замкнутые линии на рис. 2 — эллипсы. На этих частотах при сильной стратификации изолинии частоты — окружности. При $\omega = N_2$ изолиниями на рис. 2 являются прямые (4.13), при $\omega = N_2$ изолиниями являются гиперболы.

На рис. 3 показаны изолинии частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел при очень слабой стратификации, когда $N_3 = 1.5f$.

В целом, картина изолиний частоты при очень слабой стратификации похожа на аналогичную картину для слабой стратификации, но в окрестности начала координат эллипсы при очень слабой стратификации

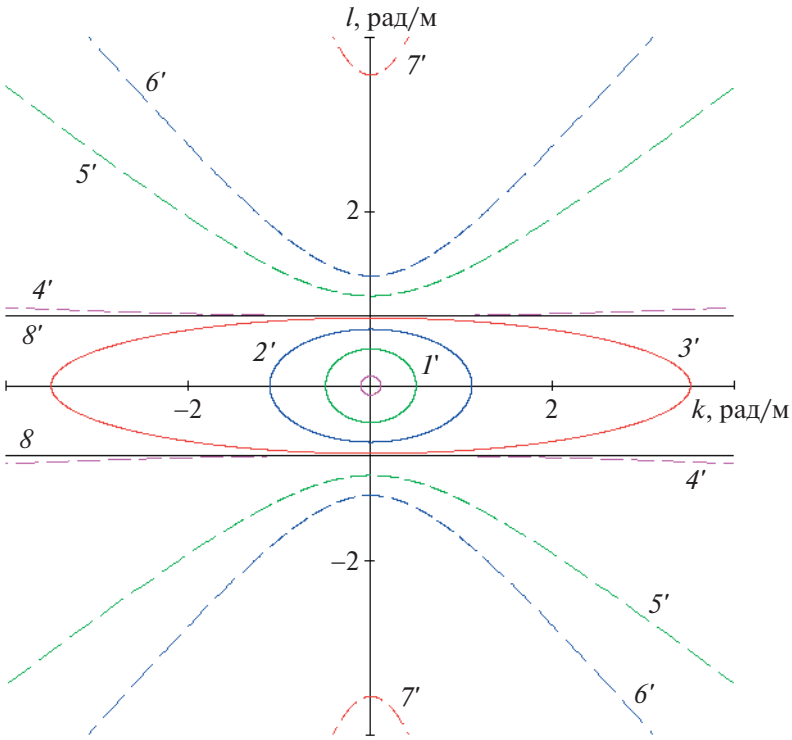



**Рис. 1.** Изолинии частоты при сильной стратификации: $1'$–$8'$: $\omega = 0.9995N_1$, $0.9999N_1$, $0.99999N_1$, $1.000001943N_1$, $1.000007721N_1$, $1.00001166N_1$, $1.0001846N_1$, $\omega = N_1$.

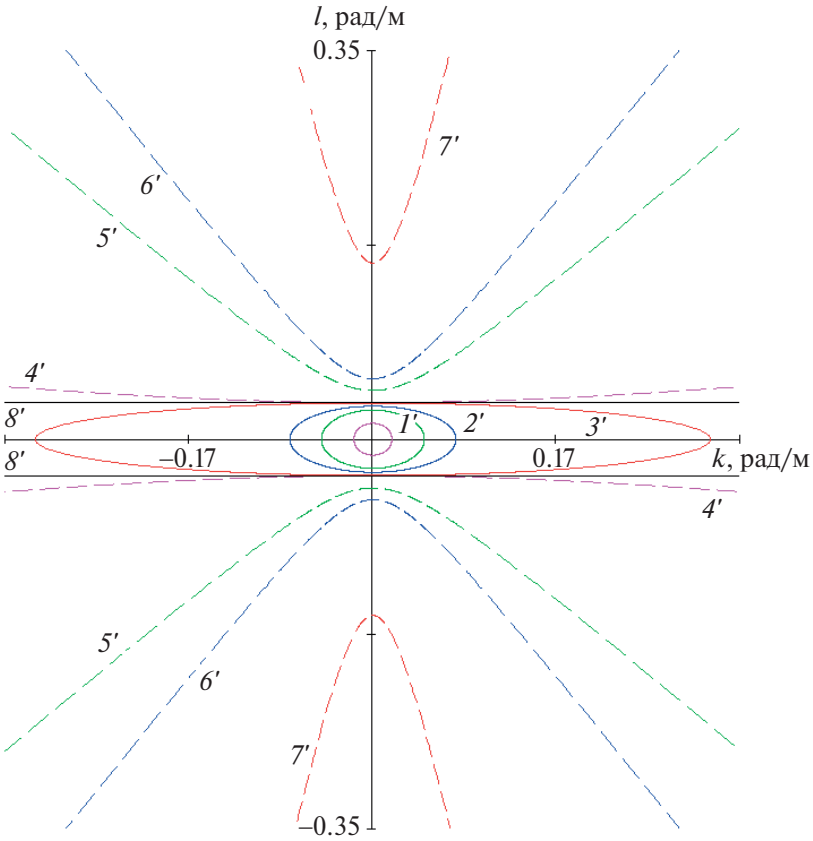



**Рис. 2.** Изолинии частоты при слабой стратификации: $1'$–$8'$: $\omega = 2.4f$, $2.46f$, $0.999N_2$, $1.001N_2$, $1.036N_2$, $1.54N_2$, $1.085N_2$, $N_2$.

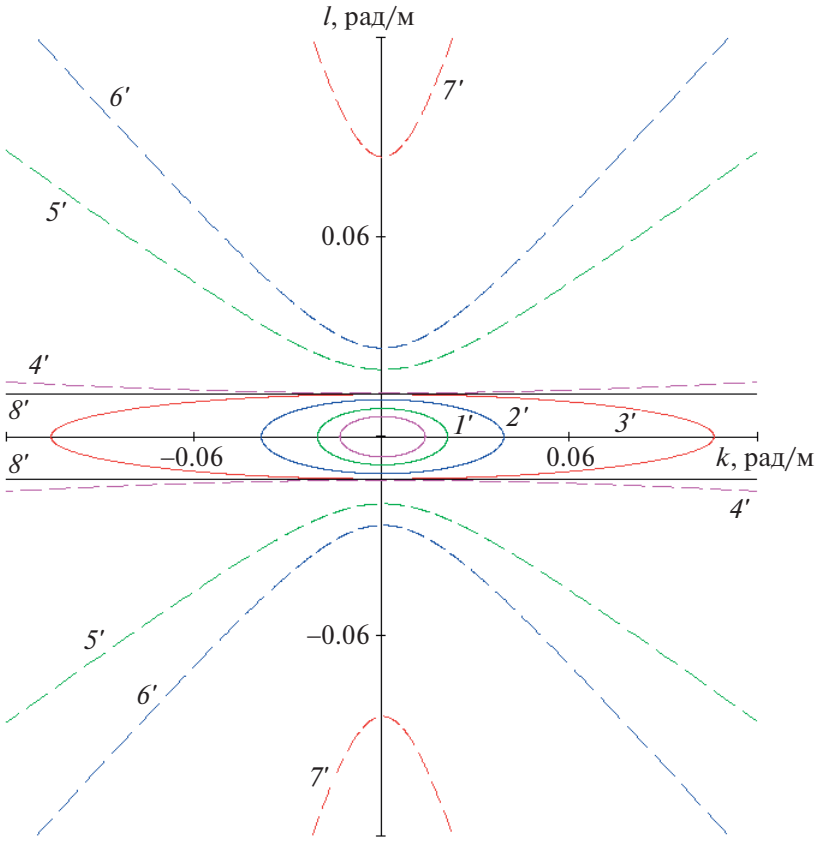



**Рис. 3.** Изолинии частоты при очень слабой стратификации: $1'$–$8'$: $\omega = 1.34f$, $1.44f$, $0.994N_3$, $1.003N_3$, $1.109N_3$, $1.116N_3$, $1.126N_3$, $N_3$.

более сплюснуты к оси абсцисс, чем при слабой стратификации, т. е с ослаблением стратификации анизотропия замкнутых изолиний частоты усиливается. Отметим, что при $\sin\alpha = 0$ дисперсионное соотношение (4.6) переходит в соотношение (4.7) при традиционном приближении, а большая полуось эллипса $a$ в (4.12) равна радиусу $t$ окружности изолинии частоты в традиционном приближении, т. е. волны, бегущие на восток или на запад никакого влияния на дисперсию от учета горизонтальной составляющей угловой скорости Земли не испытывают. Но влияние максимально для волн, бегущих на север или юг.

Следует отметить, что решение (4.3) краевой задачи (4.1), (2.5) используя (4.4) можно представить в виде:

$$w_{10}(z) = e^{-ia_0 z}\sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right). \tag{4.18}$$

Отсюда вертикальные волновые потоки импульса (3.3), (3.4) имеют вид:

$$\overline{u'w} = -2\left|A^2\right|\frac{f\cdot f_c}{\omega^2 - f^2}\sin\alpha\sin^2\left(\frac{\pi n z}{H}\right). \tag{4.19}$$

$$\overline{v'w} = \frac{\left|A^2\right|f}{\omega k_h}\frac{\pi n}{H}\sin\left(\frac{2\pi n z}{H}\right). \tag{4.20}$$

Расчеты вертикальных волновых потоков импульса (4.19) и (4.20) у внутренних волн первой моды с максимальной амплитудой $\zeta_{\max} = 2$ м производятся для трех рассматриваемых типов стратификации. На рис. 4а представлены профили вертикального потока импульса (4.19) при сильной стратификации для внутренних волн первой моды с частотой $0.8N_1$ для четырех значениях угла $\alpha$ $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi/6$; $\alpha_3 = \pi/3$; $\alpha_4 = \pi/4$. С ростом угла $\alpha$ поток импульса нарастает по модулю и при $\alpha_4 = \pi/2$ достигает максимального значения. Поток импульса при $\alpha = \pi - \alpha_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ совпадают с потоками импульса при $\alpha = \alpha_i$. При отрицательных углах $\alpha = -\alpha_i$ знак потока импульса $\overline{u'w}$ меняется на противоположный.

В традиционном приближении поток импульса $\overline{u'w}$ (4.19) нулевой, т. к. $f_c = 0$.

Вертикальный волновой поток импульса $\overline{v'w}$ (4.20) на рис. 4б для волны частотой $0.8N_1$ при сильной стратификации от угла $\alpha$ практически не зависит и совпадает с потоком традиционного приближения.

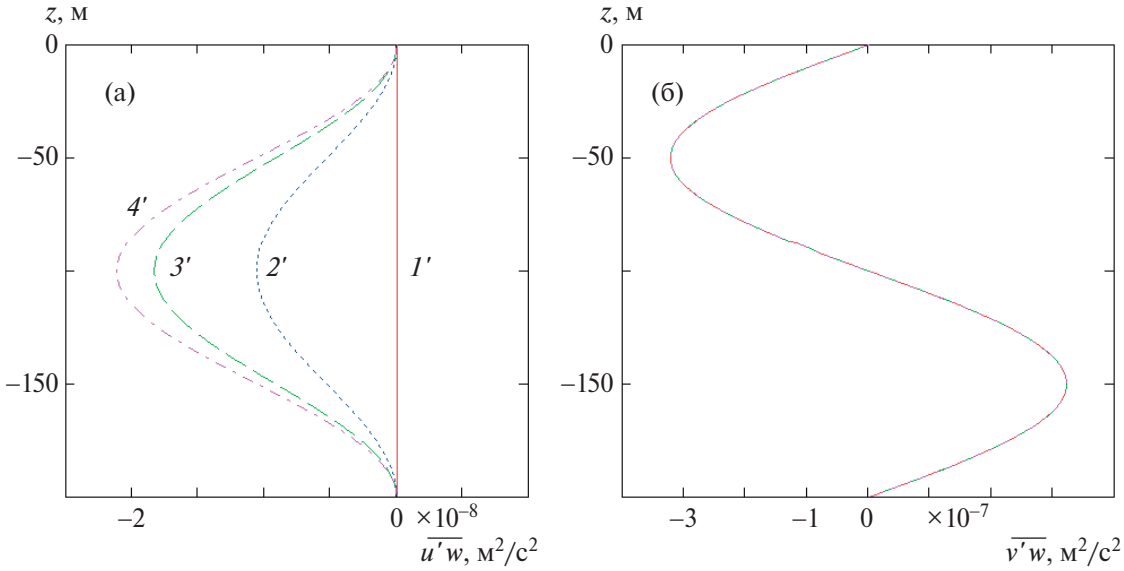



**Рис. 4.** Профили вертикальных волновых потоков импульса $\overline{u'w}$ (а) и $\overline{v'w}$ (б) при различных значениях угла $\alpha$ для сильной стратификации: $\alpha_1 = 0(1')$; $\alpha_2 = \pi/3(2')$; $\alpha_3 = \pi/3(3')$; $\alpha_4 = \pi/2(4')$.

На рис. 5 представлены профили вертикальных волновых потоков импульса при слабой стратификации ($N_2 = 2.5f$) для волны первой моды с частотой $\omega = 1.4f$ с максимальной амплитудой $\zeta_{max} = 2$ м.

Зависимость вертикальных волновых потоков импульса от угла $\alpha$ на рис. 5а, по сути, повторяет ту же зависимость, что и на рис. 4а, только величины потоков по модулю выше при той же амплитуде волны. Вертикальный волновой поток импульса $\overline{v'w}$ на рис. 5б при слабой стратификации уже зависит от угла, достигает максимального по модулю значения при $\alpha_4 = \pm\pi/2$ и совпадает с потоком традиционного приближения при $\alpha = 0, \pi$. Поток импульса при $\alpha = \pi - \alpha_i$ ($i = 1.2.3.4$) совпадают с потоком импульса при $\alpha = \alpha_i$. При изменении знака угла $\alpha$ поток импульса $\overline{v'w}$ не меняется. Поток импульса $\overline{v'w}$ при слабой стратификации слабее потока при сильной стратификации.

На рис. 6 представлены профили вертикальных волновых потоков импульса при очень слабой стратификации ($N_3 = 1.5f$) для волны первой моды с частотой $\omega = 1.4f$ с максимальной амплитудой $\zeta_{max} = 2$ м.

Потоки импульса на рис. 6 качественно повторяют потоки на рис. 5, только зависимость от угла более сильная. Поток импульса на рис. 6б меньше по модулю потоков на рис. 5б, в то время как потоки импульса $\overline{u'w}$ на рис. 5а идентичны потокам на рис. 6а. Это объясняется тем, что в выражение (4.19) для потока

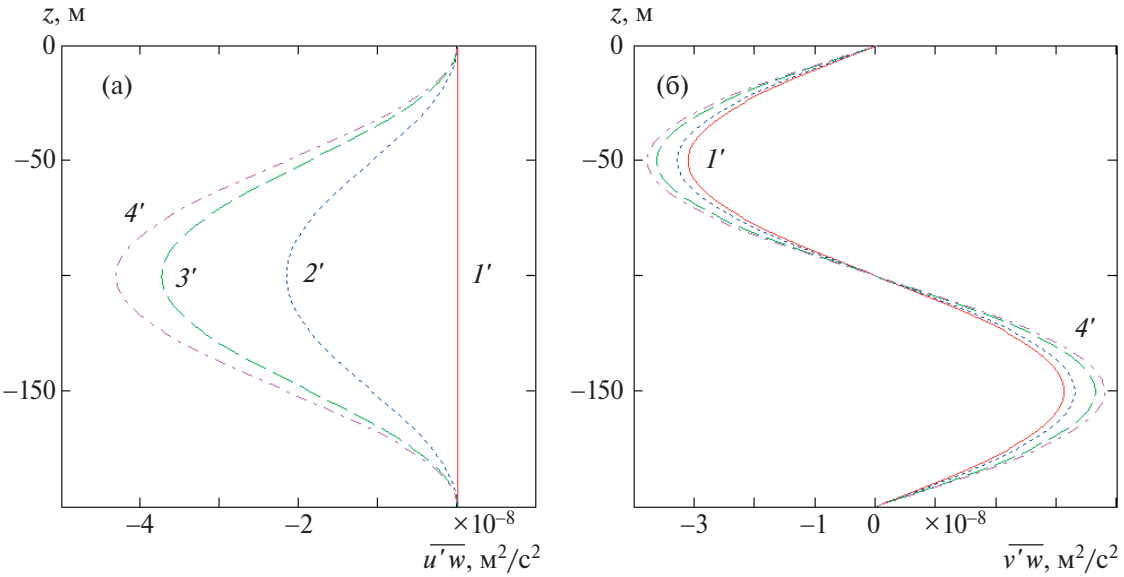



**Рис. 5.** Профили вертикальных волновых потоков импульса $\overline{u'w}$ (а) и $\overline{v'w}$ (б) при различных значениях угла $\alpha$ для слабой стратификации: $\alpha_1 = 0(1')$; $\alpha_2 = \pi/6(2')$; $\alpha_3 = \pi/3(3')$; $\alpha_4 = \pi/2(4')$.

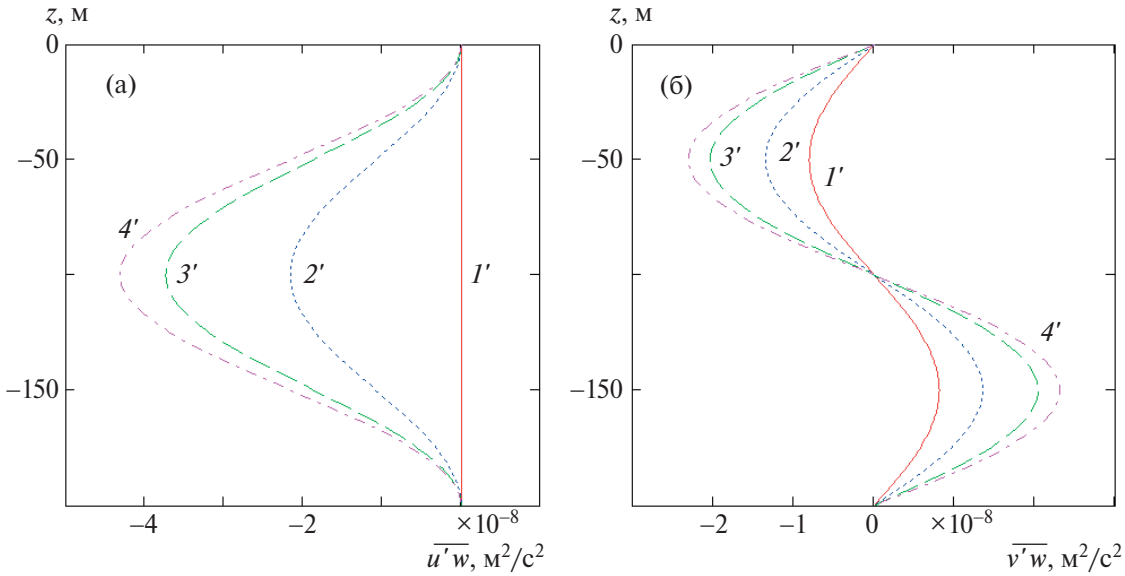



**Рис. 6.** Профили вертикальных волновых потоков импульса $\overline{u'w}$ (а) и $\overline{v'w}$ (б) при различных значениях угла $\alpha$ для очень слабой стратификации: $\alpha_1 = 0(1')$; $\alpha_2 = \pi/6(2')$; $\alpha_3 = \pi/3(3')$; $\alpha_4 = \pi/2(4')$.

импульса $\overline{u'w}$ не входит горизонтальное волновое число $k_i$, только частота, а она одна и та же для слабой и очень слабой стратификации, $\omega = 1.4f$, нормирующий множитель (3.5) тоже один и тот же. Следует отметить, что максимальное по модулю значение вертикальных волновых потоков импульса на замкнутой изолинии частоты достигается при $\alpha = \pm\pi/2$, т. е. когда волна распространяется на север или юг. В традиционном приближении потоки импульса не зависят от направления распространения волны.

Для решения дисперсионного уравнения (4.6) относительно частоты волны используем уравнение (4.5):

$$\frac{f^2 f_c^2 k_h^2 \sin^2\alpha}{(\omega^2 - f^2)^2} + \frac{k_h^2}{\omega^2 - f^2}\left[N^2 - f^2 - \omega^2 + f^2 + f_c^2 \sin^2\alpha\right] = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2.$$

Отсюда

$$\frac{f^2 f_c^2 k_h^2 \sin^2\alpha}{(\omega^2 - f^2)^2} - k_h^2 + \frac{k_h^2}{\omega^2 - f^2}\left[N^2 - f^2 + f_c^2 + \sin^2\alpha\right] = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2. \tag{4.21}$$

В уравнении (4.21) удобно сделать замену:

$$R = \frac{1}{\omega^2 - f^2}.$$

Из уравнения (4.21) следует квадратное уравнение для $R$:

$$f^2 f_c^2 \sin^2\alpha \cdot R^2 + R\left(N^2 - f^2 + f_c^2 \sin^2\alpha\right) - 1 - \left(\frac{\pi n}{k_h H}\right)^2 = 0. \tag{4.22}$$

После решения квадратного уравнения (4.22) находится $\omega^2$:

$$\omega^2 = f^2 + \frac{2f^2 f_c^2 \sin^2\alpha}{-\left(N^2 - f^2 + f_c^2 \sin^2\alpha\right) \pm \sqrt{\left(N^2 - f^2 + f_c^2 \sin^2\alpha\right)^2 + 4f^2 f_c^2 \sin^2\alpha\left(1 + \left(\frac{\pi n}{k_h H}\right)^2\right)}}. \tag{4.23}$$

Положительный знак перед квадратным корнем в (4.23) соответствует внутренним волнам, у которых $f < \omega < \omega_1$, отрицательный знак соответствует субинерционным волнам, у которых $\omega_2 < \omega < f$ [1, 3, 4, 6].

На рис. 7 представлены дисперсионные кривые первых двух мод внутренних волн и субинерционных волн, распространяющиеся на север для трех рассматриваемых типов стратификации. На рис. 7а при сильной стратификации дисперсионные кривые субинерционных волн вырождаются в прямую линию, соответствующую частоте, меньшей инерционной на величину $2 \cdot 10^{-8}$ рад/с. Детальное поведение дисперсионных кривых субинерционных волн в этом случае в окрестности инерционной частоты при малых волновых числах раскрывает рис. 7б, на котором показана зависимость разности $\omega - f$ от волнового числа. При $l \to 0$ разность $\omega - f \to 0$, оставаясь отрицательной. При слабой стратификации на рис. 7 в вырождение

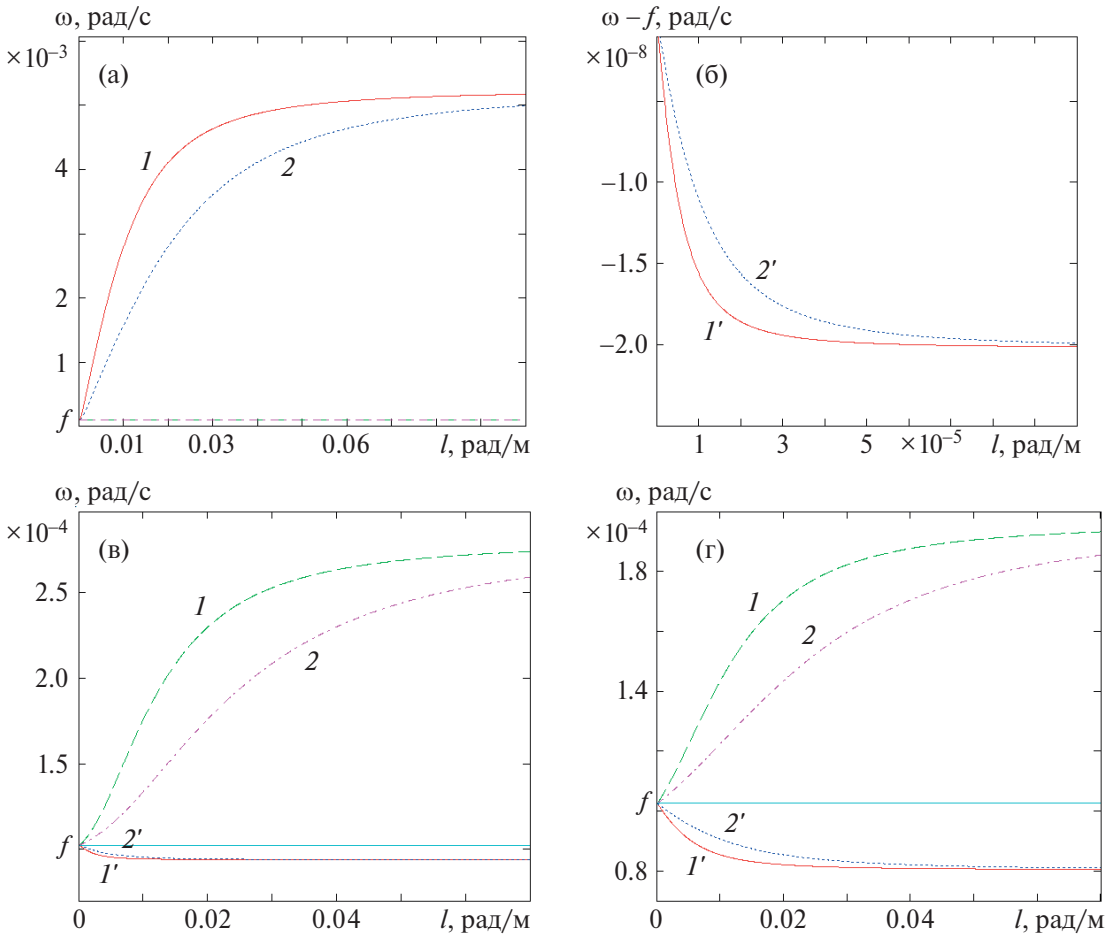



**Рис. 7.** Дисперсионные кривые первых двух мод внутренних и субинерционных волн при сильной (а, б), слабой (в) и очень слабой (г) стратификации. Штрихом помечены номера мод субинерционных волн.

снимается и дисперсионные кривые первой и второй мод субинерционных волн уже различимы. Еще лучше они различимы при очень слабой стратификации на рис. 7г.

Представляет интерес сравнить вертикальные волновые потоки импульса у внутренних и субинерционных волн первой моды, распространяющихся на север, одной и той же длины $\lambda = 200$ м и максимальной амплитудой $\zeta_{max} = 2$ м для рассматриваемых трех типов стратификации. На рис. 8 показаны профили вертикального потока импульса $\overline{u'w}$ для внутренней (*1*) и субинерционной (*2*) волны для сильной (а), слабой (б) и очень слабой стратификации (в).

Обращает на себя внимание очень высокий вертикальный поток импульса у субинерционной волны при сильной стратификации на рис. 8а, по порядку величины он сравним или выше типичного турбулентного вертикального потока импульса. У внутренней волны на рис. 8а напротив, поток слабый. При слабой стратификации на рис. 8б вертикальный поток импульса у субинерционной волны существенно слабее, а у внутренней волны, наоборот усиливается. Тем не менее поток у субинерционной волны по модулю выше потока у внутренней волны. Та же тенденция сохраняется и при очень слабой стратификации на рис. 8в. Происходит дальнейшее ослабление потока импульса у субинерционной волны, в то время как у внутренней волны поток усиливается (рис. 8г). Линии *1*, *2* и *3* на рис. 8г соответствуют сильной, слабой и очень слабой стратификации.

Сравнение вертикального волнового импульса $\overline{v'w}$ у внутренней и субинерционной волны первой моды с длиной волны $\lambda = 200$ м и максимальной амплитудой $\zeta_{max} = 2$ м для сильной (а), слабой (б) и очень слабой (в) стратификации приведено на рис. 9. Всюду вертикальный поток импульса у внутренней волны превосходит по модулю соответствующий поток у субинерционной волны, причем при сильной стратификации на рис. 9а это различие наиболее сильное. Присутствует общая тенденция уменьшения потока импульса $\overline{v'w}$ с ослаблением стратификации. На рис. 9г. показаны профили вертикального волнового потока импульса $\overline{v'w}$ у субинерционной волны для трех рассматриваемых типов стратификации. Линии *1*, *2* и *3* на рис. 9г соответствуют сильной, слабой и очень слабой стратификации. Стратификация на этот поток импульса у субинерционной волны влияет слабее, чем на тот же поток у внутренней волны.

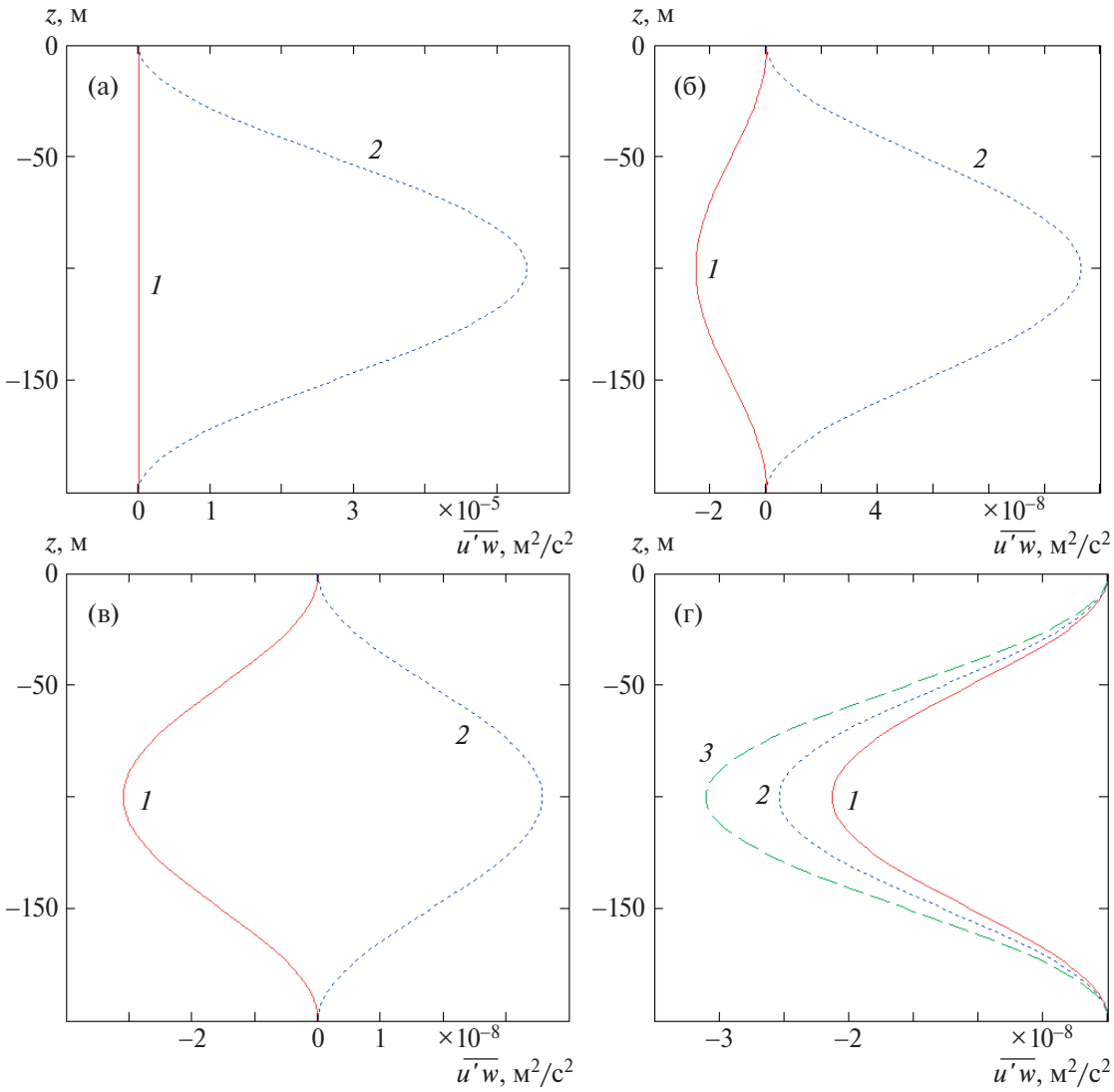



**Рис. 8.** Профили вертикального волнового потока импульса $\overline{u'w}$ у внутренних (*1*) и субинерционных волн (*2*) для сильной (а), слабой (б) и очень слабой (в) стратификации; эти же потоки только у внутренней волны для трех типов стратификации (г).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнение для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн при учете горизонтальной составляющей угловой скорости Земли имеет комплексный коэффициент при первой производной, в традиционном приближении он равен нулю. Собственная функция внутренних волн в нетрадиционном приближении — комплексная, хотя частота волны — действительная. Показано, что дисперсионное соотношение при постоянной частоте волны сводится к каноническому уравнению для кривых второго порядка в плоскости горизонтальных волновых чисел. Если частота внутренней волны больше инерционной, но меньше частоты плавучести, то изолинии частоты — эллипсы, если частота больше частоты плавучести, но меньше максимально возможной частоты, то изолинии частоты — гиперболы. Если частота волны равна частоте плавучести, то изолинии частоты — прямые линии, параллельные направлению на восток. В традиционном приближении эллипсы превращаются в окружности с радиусом, равным большой полуоси эллипса, а прямых и гипербол нет. Влияние нетрадиционного приближения на дисперсионные кривые тем сильнее, чем слабее стратификация.

Вертикальный волновой поток импульса по абсолютной величине в традиционном приближении не зависит от направления распространения волны. Получено, что в нетрадиционном приближении он зависит от направления распространения волны, причем эффект максимален, когда волна распространяется на север или юг. Тогда присутствует вертикальный перенос импульса для двух компонент волновых возмущений скорости течения вдоль и поперек направления распространения волны. В то время как в традиционном приближении вертикальный перенос импульса присутствует только для компоненты скорости, поперечной

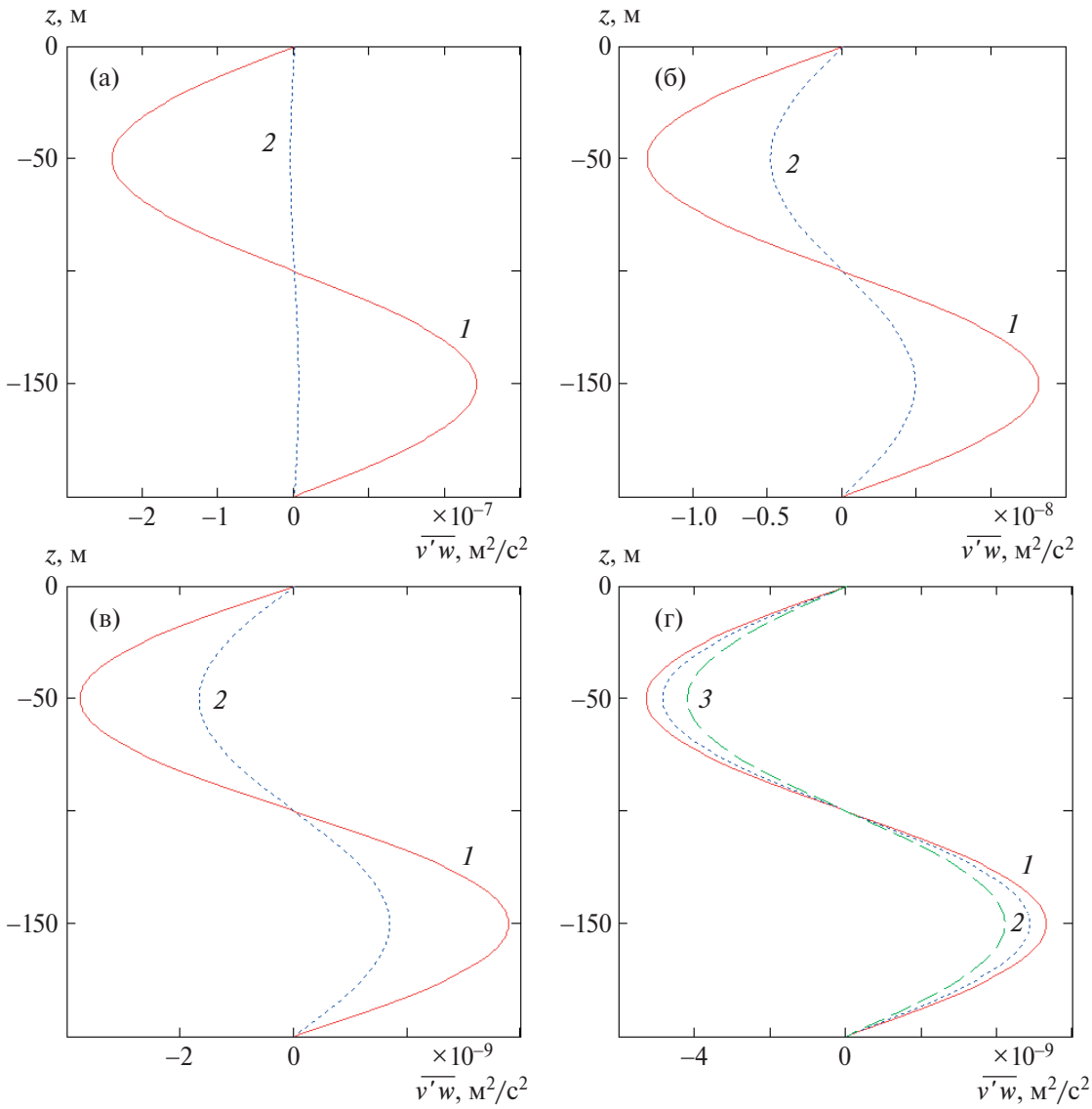



**Рис. 9.** Профили вертикального волнового потока импульса $\overline{v'w}$ у внутренних (*1*) и субинерционных волн (*2*) для сильной (а), слабой (б) и очень слабой (в) стратификации; эти же потоки только у субинерционной волны для трех типов стратификации (г).

к направлению распространения волны. Показано для слабой и очень слабой стратификации, что в нетрадиционном приближении этот поток импульса с возрастанием угла волнового вектора с направлением на восток возрастает по модулю и достигает максимального значения при распространении волны на север (или юг). При распространении на запад или восток он равен потоку традиционного приближения. Эффект усиливается с ослаблением стратификации, но для сильной стратификации он отсутствует и этот поток импульса равен потоку традиционного приближения.

Автор благодарен Г.С. Кондрашину за помощь при численных расчетах.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0004 “Фундаментальные исследования процессов, определяющих потоки вещества и энергии в морской среде и на ее границах, состояние и эволюцию физической и биогеохимической структуры морских систем в современных условиях” (шифр “Океанологические процессы”).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Дисперсионное соотношение (4.6) имеет вид

$$h_h^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)\left(\omega^2 - f^2\right)^2}{\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + \omega^2 f_c^2 \sin^2\alpha}. \tag{A.1}$$

Нетрудно показать, что уравнение (А.1) при постоянной частоте волны эквивалентно каноническому уравнению для кривых второго порядка в плоскости горизонтальных волновых $k$, $j$ чисел вида

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1, \tag{A.2}$$

где

$$a^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)}{\left(N^2 - \omega^2\right)}; \qquad b^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)^2}{\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + \omega^2 f_c^2}. \tag{A.3}$$

Действительно, после подстановки $a^2$ и $b^2$ (А.3) в (А.2) получаем

$$\frac{k^2\left(N^2 - \omega^2\right)}{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)} + \frac{l^2\left[\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + \omega^2 f_c^2\right]}{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)} = 1. \tag{A.4}$$

Умножим обе части (А.4) на знаменатель второго слагаемого в левой части уравнения

$$k^2\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + l^2\left[\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + \omega^2 f_c^2\right] = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right).$$

Отсюда

$$\left(k^2 + l^2\right)\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + l^2\omega^2 f_c^2 = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right). \tag{A.5}$$

Учитывая, что $k_h^2 = \left(k^2 + l^2\right)$, $l^2 = k_h^2 \sin^2\alpha$, уравнение (А.5) преобразуется к виду

$$k_h^2\left[\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + \omega^2 f_c^2 \sin^2\alpha\right] = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right).$$

Отсюда

$$k_h^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 \left(\omega^2 - f^2\right)^2}{\left(N^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - f^2\right) + \omega^2 f_c^2 \sin^2\alpha}. \tag{A.6}$$

Уравнение (А.6) совпадает с уравнением (А.1). Таким образом, уравнение (А.2) эквивалентно дисперсионному уравнению (А.1), (А.6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бадулин С.И., Василенко В.М., Яремчук М.И.* Об особенности интерпретации квазиинерционных движений на примере данных эксперимента Мегаполигон // Изв. АН СССР. ФАО. 1991. Т. 27. № 6. С. 638–647.
2. *Saint-Guily B.* On internal waves: Effects of the horizontal component of the Earth's rotation and of a uniform current // Dtsch. Hydrogr. Z. 1970. V. 23. P. 16–23.
3. *Каменкович В.М., Кулаков А.В.* К вопросу о влиянии вращения на волны в стратифицированном океане // Океанология. 1977. № 3. С. 400–410.
4. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 337 с.
5. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. Ч. 1. 480 с. Ч. 2. 363 с.
6. *Gerkema T., Shrira V.I.* Near-inertial waves in the ocean: beyond the traditional approximation // J. Fluid. Mech. 2005. V. 52. P. 195–219.
7. *Резник Г.М.* Волновые движения в устойчиво-нейтрально стратифицированном океане // Океанология. 2015. Т. 55. № 6. С. 875–882.
8. *Gerkema T., Shrira V.I.* Near-inertial waves on the "nontraditional" b-plane // J. Geophys. Res. 2005. V. 110. C01003.
https://doi.org/10.1029/2004JC002519
9. *Слепышев А.А., Лактионова Н.В.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // Изв. РАН. ФАО. 2019. Т. 55. № 6. С. 194–200.
10. *Воротников Д.И., Слепышев А.А.* Вертикальные потоки импульса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 23–35.
11. *Анкудинов Н.О., Слепышев А.А.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в двумерном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 3. С. 39–47.
12. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.

13. *Иванов В.А., Шульга Т.Я., Багаев А.В., Медведева А.В., Пластун Т.В., Вржевская Л.В., Свищева И.А.* Внутренние волны в р-не Гераклейского полуострова: моделирование и наблюдение // Изв. РАН. МГЖ. 2019. Т. 35. № 4. С. 322–340.
https://doi.org/10.22449/0233-7584-2019-4-322-340
14. *Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И., Миропольский Ю.З.* К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1976. Т. 12. № 3. С. 293–301.
15. *Grimshaw R.* The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // Stud. In Appl. Math. 1977. V. 56. P. 241–266.
https://doi.org/10.1002/sapm1977563241
16. *Самодуров А.С., Любицкий А.А., Пантелеев Н.А.* Вклад опрокидывающихся внутренних волн в структурообразование, диссипацию энергии и вертикальную диффузию в океане // Изв. РАН. МГЖ. 1994. № 3. С. 14–27.
17. *Подымов О.И., Зацепин А.Г., Островский А.Г.* Вертикальный турбулентный обмен в черноморском пикноклине и его связь с динамикой вод // Океанология. 2017. Т. 57. № 4. С. 546–559.
https://doi.org/10.7868/S0030157417040049
18. *Ivanov A.V., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Thimring L.Sh.* Interaction of internal waves and turbulence in the upper layer of the ocean // Dyn. Atm. and Ocean. 1984. V. 3. No. 7. P. 221–232.
19. *Соустова И.А., Троицкая Ю.И. и др.* Простое описание турбулентного переноса в стратифицированном сдвиговом потоке применительно к описанию термогидродинамики внутренних водоемов // Изв. РАН. ФАО. 2020. Т. 56. № 6. С. 689–699.
20. *Nosova A.V., Slepyshev A.A.* Vertical fluxes induced by weakly nonlinear internal waves on a shelf // Fluid. Dyn. 2015. V. 50. No. 1. P. 12–21.
https://doi.org/10.1134/S0015462815010020
21. *Слепышев А.А.* Вертикальный перенос импульса внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // Изв. РАН. ФАО. 2016. Т. 52. № 3. С. 342–349.
22. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.

# Vertical Momentum Transfer by Internal Waves with Regard for the Horizontal Component of Angular Velocity of the Earth's Rotation

**© 2025 A. A. Slepyshev***

*Marine Hydrophysical Institute of the Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia*

**e-mail: slep55@mail.ru*

Free internal waves in a uniformly stratified fluid are considered in the Boussinesq approximation with regard for the Earth's rotation. It is shown that the dispersion relation, derived with taking into account the horizontal component of the angular velocity of the Earth's rotation at constant wave frequency, is reduced to the canonical equation for second-order curves in the plane of horizontal wave numbers. If the wave frequency is higher than the inertial frequency and less than the Brunt-Väisälä frequency, the frequency isolines are ellipses. If the wave frequency is higher than the buoyancy frequency, then the frequency isolines are hyperbolas; and if the wave frequency is equal to the Brunt-Väisälä frequency, then the isolines are two straight lines parallel the direction to the east. The vertical wave momentum fluxes are obtained as functions of the direction of wave propagation. It is shown that the fluxes are maximum in absolute value when the wave propagates to the north or to the south. A comparison of the vertical momentum fluxes of internal and sub-inertial waves at the same length and the maximum wave amplitude is carried out. It is shown that the vertical momentum flux of sub-inertial waves is higher than that of internal waves and weakens with weakening of stratification.

*Keywords:* internal waves, sub-inertial waves, vertical wave momentum flux, Coriolis force

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 94–106

УДК 532.546:519.63

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОСТОРОННЕЙ КОНВЕКЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

**© 2025 г. Е. Б. Соболева***

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: soboleva@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 16.01.2025 г.
После доработки 10.03.2025 г.
Принята к публикации 16.03.2025 г.

Выполнено численное моделирование односторонней концентрационной конвекции в пористой среде в приложении к гидродинамическим процессам, происходящим при закачке углекислого газа в подземные пористые образования. При растворении углекислоты в воде или нефти плотность раствора увеличивается, что приводит к развитию неустойчивости. Использована гидродинамическая модель, которая включает уравнения неразрывности, движения (в форме уравнения Дарси) и конвекции-диффузии. Уравнение состояния, связывающее плотность жидкой фазы с концентрацией углекислоты, является нелинейным. Плотность раствора достигает максимума при некотором значении концентрации, которое варьируется. Для решения задачи создан новый вычислительный код, основанный на конечно-разностном методе. Исследовано влияние концентрации, дающей максимум плотности, на параметры конвективного движения и массопереноса. В частности, найдено, что если максимум плотности имеет место при большей концентрации, то увеличивается количество углекислоты, которое переносится вниз конвективным течением. Это значит, что конвективное растворение эффективней удерживает углекислоту на глубине.

*Ключевые слова:* углекислый газ, пористая среда, нелинейное уравнение состояния, односторонняя конвекция, конвективное растворение, численное моделирование

**DOI:** 10.31857/S1024708425030094

В результате человеческой деятельности все больше углекислого газа ($CO_2$) выбрасывается в атмосферу, приводя к увеличению средней температуры около поверхности Земли (из-за парникового эффекта) и негативному воздействию на климат. В [1] отмечено, что в атмосферу попадает около 32 гигатонн $CO_2$ ежегодно. Чтобы избежать вредного влияния углекислоты, в настоящее время развиваются и широко применяются технологии ее улавливания и хранения. Объемы $CO_2$ закачивают в истощенные месторождения нефти и газа, в подводные естественные хранилища, в водонасыщенные пласты. На глубине более 800 м в силу высокого давления и температуры углекислый газ переходит в сверхкритическое жидкоподобное состояние. Флюид $CO_2$ легче воды при аналогичных условиях, но может в ней растворяться. Из-за взаимного притяжения молекул плотность раствора несколько повышается (примерно на 1 %). При закачке $CO_2$ в нефтяное месторождение может происходить смешение $CO_2$ с углеводородами (в зависимости от компонентного состава нефти), которое также сопровождается возрастанием плотности смеси. В этих случаях формируется более тяжелый, чем две исходные жидкости, диффузионный слой, который неустойчив в поле силы тяжести. Развитие неустойчивости приводит к односторонней естественной конвекции — все конвективные «пальцы» распространяются вниз [2]. Конвективное перемешивание флюида $CO_2$ с водой или нефтью ускоряет растворение, в этом случае говорят о конвективном растворении. Данный механизм препятствует всплыванию $CO_2$, повышая тем самым надежность его захоронения в долгосрочной перспективе.

Важность конвективного растворения при захоронении $CO_2$ привела к многочисленным исследованиям на эту тему; обзоры подходов, методов и результатов исследований можно найти в [1, 3, 4]. Одна из первых математических моделей для описания поведения $CO_2$ предложена в [2]. Полагалось, что флюид

$CO_2$, лежащий над слоем воды, моделируется граничным условием постоянной концентрации. Таким образом, в исследуемой области находилась вода, а с верхней границы диффундировала примесь (в данном случае $CO_2$), увеличивая плотность воды. Уравнение состояния, связывающее плотность раствора $\rho$ с концентрацией растворенной примеси $c$, считается линейной функцией: $\rho \sim c$. При попадании примеси в воду под верхней границей формируется диффузионный слой, более тяжелый чем чистая вода, который затем деформируется, приводя к развитию концентрационной гравитационной конвекции. В рамках данной модели выполнены аналитические исследования устойчивости диффузионного слоя [2, 5], проведено численное моделирование конвективного перемешивания [2, 5–7].

Рассмотренная выше модель представляет физическую систему упрощенно, поскольку граница, отделяющая верхнюю жидкость, не деформируется и не перемещается. В более полной модели, представленной в [8–10], исследуемая область исходно заполнена двумя жидкостями, а положение интерфейса определяется при решении задачи. Важной особенностью такой модели является использование нелинейного уравнения состояния, то есть, нелинейной функции $\rho(c)$ (рис. 1). При небольших концентрациях примеси плотность раствора $\rho$ возрастает, однако, после некоторого значения $c_m$ начинает уменьшаться; $c_m$ — это концентрация, дающая максимальную плотность раствора $\rho_m$. В экспериментах и численном моделировании [8] в качестве $CO_2$ берется модельная жидкость — смесь метанола с этиленгликолем, — которая растворяется в соленой воде, в [9] проведен линейный анализ устойчивости пары «$CO_2$ — вода», в [10] выполнено численное моделирование конвективного растворения $CO_2$ в углеводороде (бутане или октане).

Стоит заметить, что в [9] в качестве нелинейного уравнения состояния взят полином четвертой степени, в [10] — кубическое уравнение Пенга–Робинсона. В обоих работах коэффициенты уравнений не приводятся. В [8] представлены численные результаты по конвективному растворению $CO_2$, однако, какое уравнение состояния выбрано для моделирования, не сообщается. Тем не менее, функции $\rho(c)$ следует уделить особое внимание, поскольку именно она задает распределение плотности в образующемся диффузионном слое и, в конечном счете, определяет конвективную неустойчивость. В настоящей работе показано, что в качестве уравнения состояния можно взять полином третьей степени. Показано, как найти коэффициенты полинома по параметрам смешивающихся слоев. На основе гидродинамической модели разработан новый вычислительный код и проведено моделирование конвективного течения и массопереноса при растворении $CO_2$ в жидкости. Концентрация $c_m$, при которой плотность раствора максимальна, точно неизвестна и может меняться в зависимости от температуры и давления, а значит, от глубины захоронения. В связи с этим выполнено исследование, показывающее как влияет $c_m$ на параметры конвективного процесса.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

### *1.1. Базовые уравнения*

Пористая среда заполнена парой смешивающихся жидкостей, образующих два горизонтальных слоя, которые соприкасаются друг с другом. Нижний слой — это жидкость 1 с плотностью $\rho_{10}$, верхний слой — жидкость 2 (флюид $CO_2$) с плотностью $\rho_{20}$. Верхняя жидкость менее плотная: $\rho_{10} > \rho_{20}$ (рис. 2). Система находится в поле силы тяжести; в начальный момент она неподвижна и устойчива. Верхняя жидкость начинает растворяться в нижней, между ними образуется диффузионный слой, расширяющийся со временем.

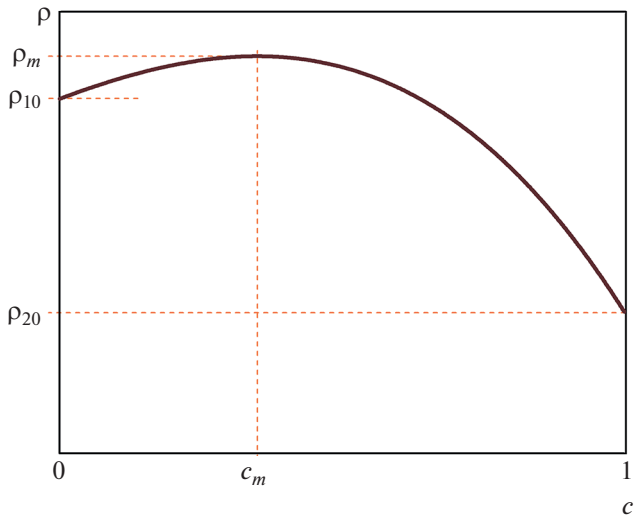



**Рис. 1.** Общий вид зависимости плотности жидкой фазы $\rho$ от концентрации примеси $c$.

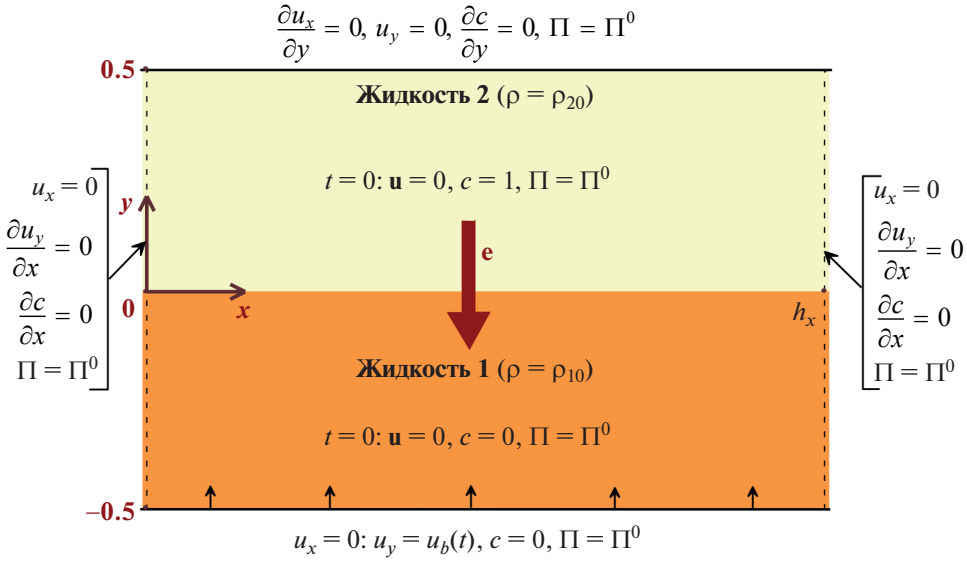



**Рис. 2.** Постановка задачи.

Плотность раствора в диффузионном слое превосходит значения $\rho_{10}$ и $\rho_{20}$, поэтому со временем этот слой теряет устойчивость, деформируется и появляются распространяющиеся вниз конвективные «пальцы».

Движение жидкой фазы и массоперенос в пористой среде описываются в рамках гидродинамической модели (приближение Обербека–Буссинеска), которая включает уравнения неразрывности, движения (уравнение Дарси), переноса примеси. Замыкается система уравнением состояния:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{U} = -\frac{K}{\mu}\left(\nabla P - \rho g \mathbf{e}\right), \tag{1.2}$$

$$\phi\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (\phi D \nabla c), \tag{1.3}$$

$$\rho = \rho(c). \tag{1.4}$$

Здесь $t$, $\mathbf{U}$, $P$, $\rho$, $\mu$, $D$, $c$, $K$, $\phi$, $g$, $\mathbf{e} = (0, -1)$ — время, скорость фильтрации, давление, плотность, вязкость жидкой фазы, коэффициент диффузии, концентрация вещества 2, проницаемость и пористость твердой фазы, ускорение свободного падения и единичный вектор, сонаправленный с силой тяжести. Плотность $\rho$ представляет собой сумму: $\rho = \rho_1 + \rho_2$, где $\rho_1$ (или $\rho_2$) — это суммарная масса молекул вещества 1 (или вещества 2) в единице объема раствора. При частичном смешении жидкостей двухфазная жидкая среда представляется как гомогенная среда с эффективной плотностью $\rho$. Концентрация  представляет собой массовую долю вещества 2: $c = \rho_2/\rho$. Считаем, что в растворе значения $\mu$ и $D$ постоянны, а параметры пористой среды $K$ и $\phi$ могут меняться по пространству.

Сначала из уравнения (1.2) вычтем уравнение $\nabla P^0 = \rho_{10}g\mathbf{e}$, которое получается из (1.2) для жидкости 1 в состоянии покоя ($\mathbf{U} = 0$). Здесь $P^0$ — гидростатическое давление в жидкости 1. Далее уравнения (1.1)–(1.4) приводятся к безразмерному виду. Поскольку естественная конвекция обуславливается разностью максимальной плотности раствора и плотности нижней жидкости $\rho_m - \rho_{10}$, то в качестве масштаба плотности берется эта величина. Другие масштабы: высота расчетной области $H$, скорость $D/H$, время $H^2/D$, давление $(\rho_m - \rho_{10})gH$, проницаемость $K_*$ (средняя по пространству величина). Появляются безразмерные переменные

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}H}{D}, \quad S = \frac{\rho - \rho_{10}}{\rho_m - \rho_{10}}, \quad \Pi = \frac{P - P^0}{(\rho_m - \rho_{10})gH},$$

которые представляют собой скорость фильтрации, относительную плотность и давление. Безразмерная проницаемость $k = K/K_*$. Безразмерное время $t$ обозначено так же, как и размерное. Уравнения (1.1)–(1.4) в безразмерных переменных принимают вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{u} = -Ra\phi_* k\left(\nabla\Pi - S\mathbf{e}\right), \tag{1.6}$$

$$\phi\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla c = \nabla\cdot(\phi\nabla c), \tag{1.7}$$

$$S = S(c). \tag{1.8}$$

В системе уравнений (1.5)–(1.8) имеется безразмерный параметр — число Рэлея–Дарси:

$$\mathrm{Ra} = \frac{K_*(\rho_m - \rho_{10})gH}{\mu D\phi_*}. \tag{1.9}$$

Здесь $\phi_*$ — средняя по пространству пористость. Размерное уравнение состояния включает характерные значения плотности $\rho_{10}$, $\rho_{20}$, $\rho_m$ (см. рис. 1), по которым можно построить безразмерные комплексы:

$$\Sigma_d = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}},\quad \Sigma_\rho = \frac{\rho_{10} - \rho_{20}}{\rho_m - \rho_{10}}.$$

Максимальная плотность $\rho_m$ достигается при концентрации $c_m$. Таким образом, постановка задачи включает безразмерные параметры Ra, $\phi_*$, $\Sigma_d$, $\Sigma_\rho$, $c_m$.

Граничные и начальные условия приведены на рис. 2. Условия на боковых и верхней границах расчетной области соответствуют непротеканию жидкости через эти границы; выражения записаны для компонент скорости $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$. Поскольку при растворении жидкости 2 в жидкости 1 плотность полученного раствора увеличивается, то это значит, что суммарная масса жидкой фазы в области должна со временем стать больше. Чтобы граничные условия соответствовали происходящему процессу, считается, что через нижнюю границу втекает жидкость 1. Скорость этого потока рассчитывается так, чтобы скомпенсировать суммарный прирост массы в области.

В начальный момент жидкие слои неподвижны и находятся в гидростатическом равновесии. Распределение давления П по вертикали в условиях гидростатического равновесия обозначается как $\Pi^0$ и определяется из (1.6) при $\mathbf{u} = 0$. Можно получить следующее:

$$\Pi^0 = \begin{cases} 0, & y \in [-0.5, 0] \\ \Sigma_\rho y, & y \in [0, 0.5]. \end{cases}$$

Наряду с относительной плотностью $S$ будем рассматривать безразмерную плотность раствора $r$ и безразмерную плотность вещества 2 в растворе $r_2$, которые по определению есть $r = \rho/(\rho_m - \rho_{10})$ и $r_2 = \rho_2/(\rho_m - \rho_{10})$. Легко показать, что величины $S$, $r$, $r_2$ связаны следующим образом:

$$r = S + \frac{\Sigma_\rho}{1 - \Sigma_d},\quad r_2 = r. \tag{1.10}$$

### *1.2. Уравнение состояния*

Размерная плотность $\rho$ связана с безразмерной переменной $S$, исходя из определения последней, соотношением:

$$\rho = \rho_{10} + (\rho_m - \rho_{10})S. \tag{1.11}$$

Чтобы кривая $\rho(c)$ имела вид как на рис. 1, должны выполняться следующие условия:

$$c = 0 : \rho = \rho_{10};\qquad c = 1 : \rho = \rho_{20};\qquad c = c_m : \rho = \rho_m;\qquad c = c_m : \frac{\partial\rho}{\partial c} = 0. \tag{1.12}$$

Равенство нулю производной $\partial\rho/\partial c$ в точке $c_m$ — это условие экстремума функции $\rho(c)$. Из (1.12) следуют условия для $S(c)$:

$$c = 0 : S = 0;\qquad c = 1 : S = -\Sigma_\rho;\qquad c = c_m : S = 1;\qquad c = c_m : \frac{\partial S}{\partial c} = 0. \tag{1.13}$$

Простой функцией с четырьмя константами, которые можно однозначно найти из четырех условий (1.13), является полином третьей степени. Считаем, что безразмерное уравнение состояния имеет вид:

$$S(c) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3, \tag{1.14}$$

где $a_0, \ldots, a_3$ — константы. Применяя условия (1.13) к (1.14), получаем линейную систему четырех уравнений, решая которую находим константы:

$$a_0 = 0,\qquad a_3 = \frac{1 - 2c_m - c_m^2\Sigma_\rho}{c_m^2(1 - 2c_m + c_m^2)},\qquad a_2 = \frac{1 + c_m\Sigma_\rho - a_3(c_m^3 - c_m)}{c_m^2 - c_m},\qquad a_1 = -\Sigma_\rho - a_2 - a_3.$$

Для рассматриваемой пары жидкостей типичны следующие значения: $\rho_{10} = 1.0\cdot 10^3$ кг/м$^3$, $\rho_{20} = 0.9\cdot 10^3$ кг/м$^3$, $\rho_m = 1.01\cdot 10^3$ кг/м$^3$, по которым легко вычислить, что $\Sigma_\rho = 10.0$. В данной ра-

боте положение максимума на кривой $\rho(c)$, то есть, значение $c_m$ варьируется. Были выбраны значения $c_m = 0.3; 0.5; 0.7$. Для них рассчитаны наборы коэффициентов:

$$\begin{aligned} c_m = 0.3: &\quad a_0 = 0, \quad a_1 = 5.6463, \quad a_2 = -4.3084, \quad a_3 = -11.338; \\ c_m = 0.5: &\quad a_0 = 0, \quad a_1 = -6.0000, \quad a_2 = 36.000, \quad a_3 = -40.000; \\ c_m = 0.7: &\quad a_0 = 0, \quad a_1 = -56.032, \quad a_2 = 166.21, \quad a_3 = -120.18. \end{aligned} \tag{1.15}$$

На рис. 3а показаны кривые $\rho(c)$ для данных вариантов; они получены по (1.11) при подстановке $S(c)$ (1.14) с коэффициентами (1.15). Видно, что только при $c_m = 0.3$ кривая $\rho(c)$ имеет заданный вид. При $c_m = 0.5, 0.7$ на кривых появляется нефизический минимум. Дело в том, что условия (1.13) являются необходимыми, но не достаточными. Кроме прочего, функция $\rho(c)$ должна монотонно возрастать при $c < c_m$ и монотонно убывать при $c > c_m$.

Чтобы построить функцию $\rho(c)$, которая при любых $c_m$ удовлетворяет необходимым и достаточным условиям, предлагается сделать следующее. Сначала выбирается базовая кривая надлежащего вида. Пусть это будет кривая (1) на рис. 3а. Положение максимума на базовой кривой обозначается как $c_{m0}$. В данном случае $c_{m0} = 0.3$. Далее выполняется линейное преобразование переменной $c$ в $c'$ так, чтобы на участке $c \in [0, c_{m0}]$ кривая $\rho(c)$ растянулась (если $c_m > c_{m0}$) и точка $\rho(c_{m0})$ перешла в $\rho(c_m)$, а на участке $c \in [c_{m0}, 1]$ кривая $\rho(c)$ соответственно сжалась. При таком преобразовании зависимость (1.14) имеет прежний вид, но включает новую переменную $c'$:

$$\begin{gathered} S(c) = a_0 + a_1 c' + a_2 c'^2 + a_3 c'^3, \\ c' = \begin{cases} c\frac{c_{mo}}{c_m}, & c \in [0, c_{m0}], \\ c_{mo} + (c - c_m)\frac{1-c_{mo}}{1-c_m}, & c \in [c_{m0}, 1]. \end{cases} \end{gathered} \tag{1.16}$$

Коэффициенты $a_0, \ldots, a_3$ в (1.16) такие же, как в первой строке (1.15). На рис. 3б представлены зависимости $\rho(c)$, построенные данным методом. Кривая с максимумом при $c_m = 0.3$ переходит сама в себя. Видно, что все кривые удовлетворяют заданным условиям. Ниже используется уравнение состояния (1.16).

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для решения системы уравнений (1.5)–(1.7), (1.16) создан новый вычислительный код, основанный на конечно-разностном методе. Формируется разнесенная пространственная сетка: расчетная область разбивается на прямоугольные ячейки, скалярные величины определяются в центрах ячеек, горизонтальная компонента скорости — на боковых гранях ячеек, вертикальная компонента скорости — на верхней и нижней гранях.

При представлении уравнения переноса примеси (1.7) в конечно-разностном виде конвективный член аппроксимируется по схеме третьего порядка точности QUICK [11], которая имеет преимущества по сравнению с центрально-разностной и противопоточной схемами. Диффузионный член заменяется центрально-разностным аналогом. Интегрирование по времени производится по схеме Рунге–Кутта вто-

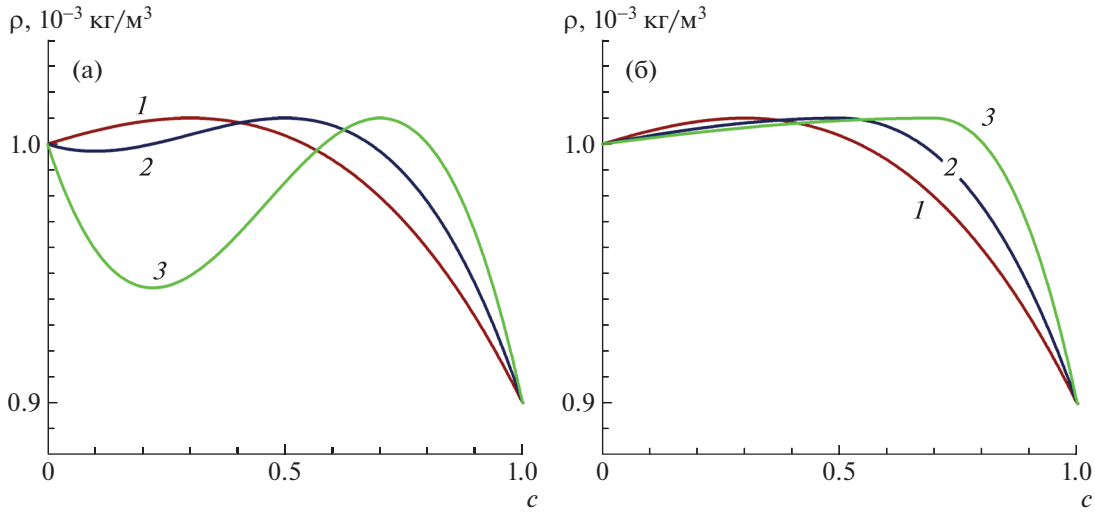



**Рис. 3.** Функция $\rho(c)$: (а) полином третьей степени: *1–3* — $c_m = 0.3, 0.5, 0.7$; (б) полином третьей степени с линейным преобразованием переменной: *1–3* — $c_m = 0.3, 0.5, 0.7$.

рого порядка точности. Уравнения неразрывности (1.5) и движения (1.6) решаются совместно по алгоритму типа SIMPLE [12]. Полученные конечно-разностные уравнения для давления решаются методом прогонок.

Значения пористости слегка отклоняются от среднего значения $\phi_*$ в каждой ячейке пространственной сетки, чтобы приблизить математическое описание к реальным условиям и инициировать начало конвекции. В центре ячейки задается $\phi = \phi_*(1 + \Delta)$, где $\Delta \ll 1$. Считается, что $\Delta = \alpha_\phi R$, где $\alpha_\phi$ — амплитуда отклонения, $R$ — случайное число, которое меняется от ячейки к ячейке; $R \in [-0.5; 0.5]$. Проницаемость $k$ зависит от $\phi$ по формуле Козени–Кармана [13] и тоже слегка колеблется около среднего значения. При решении системы уравнений (1.5)–(1.8) с возмущенными значениями $k$ и $\phi$ появляются возмущения у всех переменных во всей расчетной области. В диффузионном слое малые возмущения растут, кооперируются, приводя к развитию конвекции.

Переход с $n$-го на $(n + 1)$-й временной слой происходит следующим образом. На $n$-ом слое известны значения всех переменных. По значениям плотности вычислена суммарная масса жидкости во всей расчетной области $M^n$ (безразмерная величина). Сначала интегрируется уравнение переноса примеси (1.7), в результате определяются значения концентрации на $(n + 1)$-м слое $c^{n+1}$. Далее рассчитывается относительная плотность жидкости $S^{n+1}$ по уравнению состояния (1.16). Затем находится плотность жидкой фазы $r^{n+1}$ (1.10) и путем суммирования по ячейкам сетки — суммарная масса жидкости $M^{n+1}$. Выше отмечено, что при растворении жидкости 2 в жидкости 1 плотность раствора возрастает и масса жидкой фазы в расчетной области увеличивается, то есть, $M^{n+1} > M^n$. Чтобы скомпенсировать прирост массы, считаем, что через нижнюю границу поступает жидкость 1 со скоростью $v_b$, направленной вертикально вверх. Значения на границе отмечаются индексом “$b$”. На интервале времени $\tau$, где $\tau$ — шаг интегрирования по времени, можно записать баланс массы:

$$M^{n+1} - M^n = \int_0^{h_x} r_b v_b \phi \tau dx.$$

Вместо скорости движения $v_b$ введем скорость фильтрации $u_b = v_b\phi$ и получим граничное условие в виде:

$$u_b = \frac{M^{n+1} - M^n}{\tau r_b h_x}. \tag{2.1}$$

Далее совместно решаются уравнения неразрывности (1.5) и движения (1.6) с граничным условием (2.1) — находятся переменные $\mathbf{u}^{n+1}$ и $\Pi^{n+1}$.

Вычислительный код протестирован. Взяты значения: $\phi_* = 0.2$, $\Sigma_d = 0.9$, $\Sigma_\rho = 10.0$, $\alpha_\phi = 10^{-6}$. Величины Ra и $c_m$ менялись: $\mathrm{Ra} = 5 \cdot 10^2$, $3 \cdot 10^3$ и $c_m = 0.3, 0.5, 0.7$. Расчетная область в безразмерных переменных: $2 \times 1$. В тестовых расчетах размер пространственной сетки и временной шаг варьировались для определения оптимальных параметров. Выбраны параметры: сетка $200 \times 100$, $\tau = 1.0 \cdot 10^{-7}$ при $\mathrm{Ra} = 5 \cdot 10^2$; сетка $1000 \times 1000$, $\tau = 1.0 \cdot 10^{-9}$ при $\mathrm{Ra} = 3 \cdot 10^3$.

При создании вычислительного кода использованы подходы и методы, которые успешно применялись ранее в другом вычислительном коде, предназначенном для моделирования концентрационно-конвективных течений с линейным уравнением состояния в пористых средах [7, 14–18].

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

### *3.1. Диффузионный режим и начало конвекции*

Сначала выполнялось моделирование системы при отсутствии силы тяжести, что задается условием $\mathbf{e} = 0$. Число Ra (1.9) в данном случае по-прежнему включает земное ускорение свободного падения $g$ и является формальным безразмерным параметром. В расчетах задано $\mathrm{Ra} = 5 \cdot 10^2$. При отсутствии силы тяжести движения жидкости не возникает и происходит только диффузионный массоперенос. На рис. 4а показано распределение концентрации $c$ в различные моменты времени. Исходно имеется концентрационная ступень, которая со временем сглаживается из-за взаимной диффузии жидкостей 1 и 2 друг в друга. Между чистыми жидкостями формируется слой раствора (диффузионный слой), который со временем расширяется. Вид кривых $c(y)$ определяется уравнением диффузии и одинаков для всех уравнений состояния.

На рис. 4б–г представлены кривые плотности жидкой фазы $\rho$ при использовании уравнений состояния, которые отличаются друг от друга точкой максимума, то есть, значениями концентрации $c_m$. В начальный момент плотность менялась скачком на границе раздела жидкостей, далее кривые плотности стали сглаживаться и на них появился локальный максимум. Можно заметить, что при $c_m = 0.3$ максимум кривой $\rho(y)$ попадает в нижнюю половину области и со временем опускается (рис. 4б). Такая закономерность

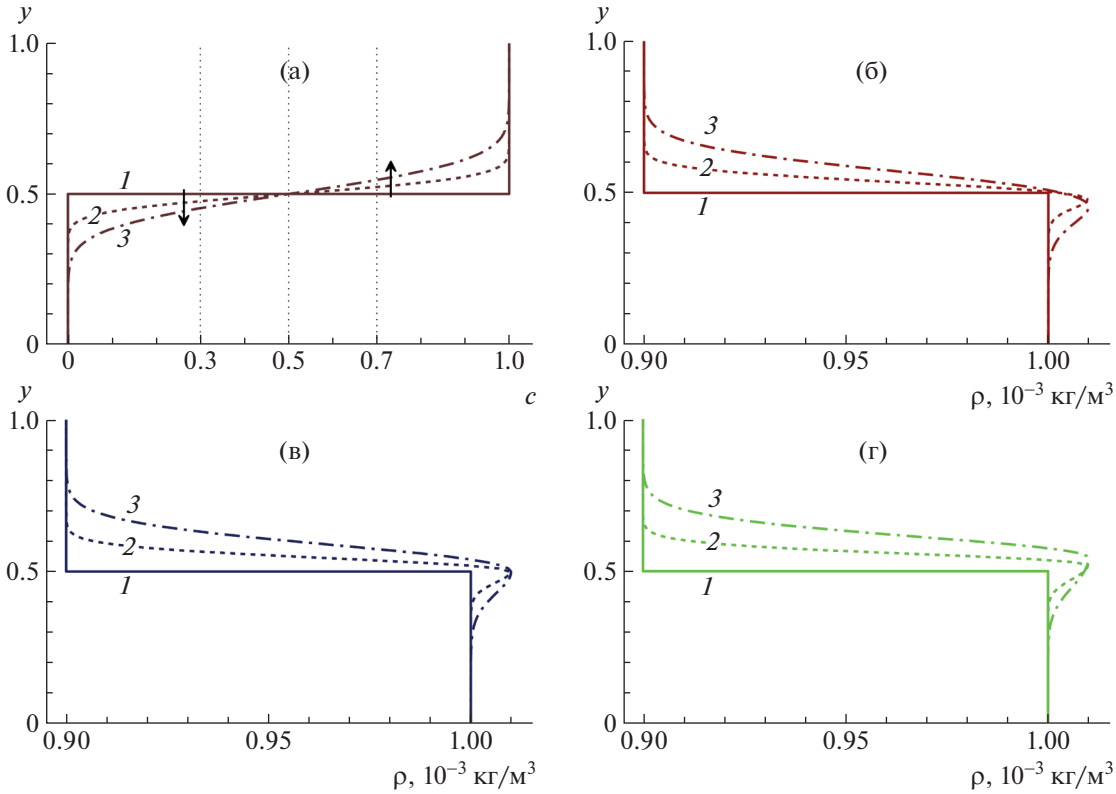



**Рис. 4.** Распределения: (а) концентрации $c(y)$ и (б–г) плотности $\rho(y)$ в случае уравнения состояния с максимумом плотности при $c_m = 0.3, 0.5, 0.7$ в моменты времени: *1–3* — $t = 0, 1 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}$.

проявляется при всех $c_m < 0.5$, поскольку данные значения концентрации находятся в нижней половине кривой $c(y)$ (см. рис. 4а) и чем позднее, тем ниже оказывается $c_m$ из-за сглаживания кривой $c(y)$. При $c_m > 0.5$ тенденция противоположная. На рис. 4г, полученном при $c_m = 0.7$, видно, что кривая $\rho(y)$ имеет максимум в верхней половине области и он со временем перемещается вверх, поскольку здесь сглаживание кривой $c(y)$ сопровождается перемещением вверх значений $c_m$. При $c_m = 0.5$ максимум кривой $\rho(y)$ все время остается на одном уровне $y = 0$ (рис. 4в).

Далее проведено моделирование эволюции системы в поле силы тяжести при прочих равных условиях. Начало процесса совпадает с диффузионным режимом — между исходными жидкостями появляется диффузионный слой. Плотность раствора в диффузионном слое достигает максимума и в некотором диапазоне координаты $y$ превосходит плотность нижней жидкости (жидкости 1), что при действии силы тяжести приводит в развитию неустойчивости. Тяжелый раствор стремится опуститься, образуются конвективные “пальцы”, распространяющиеся вниз; вверх они всплывать не могут, так как тяжелее жидкости 2. Молекулы вещества 1 перемещаются вверх только за счет диффузии. Наблюдается односторонняя концентрационная конвекция.

На рисунках 5 и 6 показано, как влияет уравнение состояния на начало конвекции. Слева представлено поле концентрации; значения $c$ уменьшаются сверху вниз монотонно. Сверху, где чистая жидкость 2, выполняется $c = 1$. Снизу, где чистая жидкость 1, $c = 0$. Справа показаны поля относительной плотности $S$: $S = 0$ в жидкости 1, $S = -10$ в жидкости 2. В растворе плотность достигает максимального значения $S = 1$. Хорошо видно, что, как и следовало ожидать, величина $S$ оказывается наибольшей в центральной зоне (красный цвет). Можно заметить, что если функция $S(c)$ имеет максимум при $c_m = 0.3$, то наиболее тяжелый раствор в диффузионном слое смещен вниз (рис. 5а, справа) относительно положения при $c_m = 0.7$ (рис. 6а, справа), что соответствует результатам на рис. 4. Следовательно, и конвекция зарождается на разных уровнях: при $c_m = 0.3$ конвективные “пальцы” появляются в нижней половине области (рис. 5б), а при $c_m = 0.7$ выходят из верхней половины (рис. 6б).

### *3.2. Развитая конвекция*

Проведено моделирование в уменьшенном масштабе при $\mathrm{Ra} = 3 \cdot 10^3$, чтобы исследовать динамику и массоперенос в стадии развитой конвекции. На рис. 7 даны поля относительной плотности жидкой фазы $S$ при $c_m = 0.3$ в последовательные моменты времени. Рисунок 7а как и рис. 5б, 6б демонстрирует рождение

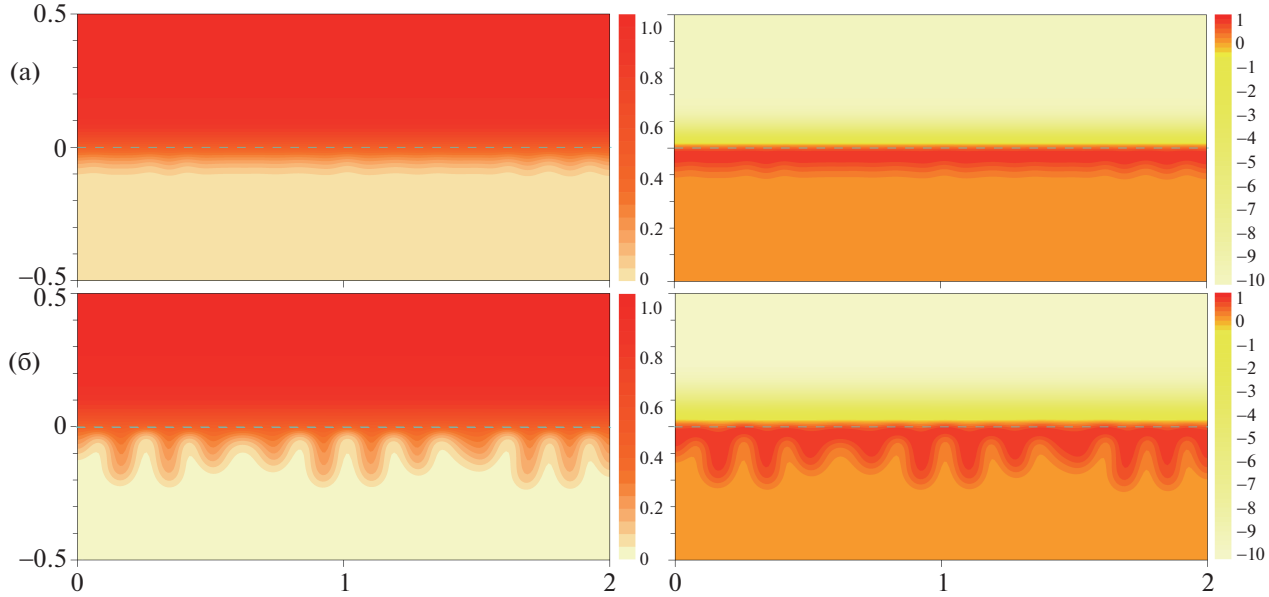



**Рис. 5.** Поля: (слева) концентрация $c$ и (справа) относительная плотность $S$ в случае уравнения состояния с максимумом плотности при $c_m = 0.3$ в моменты времени: а–б — $t = 2 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}$. Голубой пунктирной линией отмечено начальное положение границы раздела жидкостей.

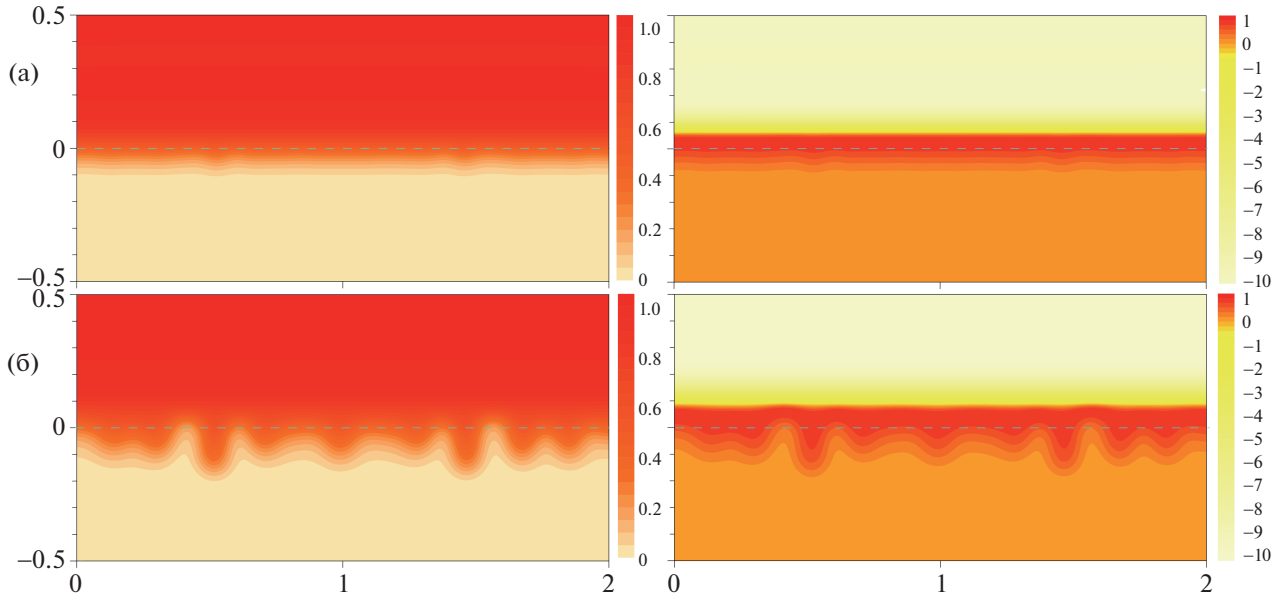



**Рис. 6.** То же, что на рис. 5, но в случае уравнения состояния с максимумом плотности при $c_m = 0.7$.

конвективных “пальцев” из диффузионного слоя. Ширина “пальцев” различается незначительно, поэтому можно говорить об образовании квазипериодической структуры конвекции. Далее “пальцы” вытягиваются вниз (рис. 7б), некоторые из них распространяются быстрее, другие медленнее, происходит их слияние и деформация, течение становится стохастическим, раствор опускается все глубже (рис. 7в,г). На врезке к рис. 7г стрелками показано поле скоростей движения в зоне формирования “пальцев”; стрелки начерчены в каждом 2-м узле пространственной сетки по оси $x$ и каждом 3-ем узле по оси $y$. Видно, что самая тяжелая жидкость, находящаяся в узком слое (красный цвет), движется горизонтально влево и вправо и, сталкиваясь с аналогичным встречным потоком, дает начало конвективному “пальцу”, который уносит жидкость вниз.

Чтобы количественно описать интенсивность движения и массоперенос, рассматриваются интегральные характеристики — глубина проникновения конвективных “пальцев” в нижнюю жидкость $h_p$ и относительное уменьшение массы вещества 2 в верхней половине области $Q_M$. Величина $h_p$ — это расстояние, на которое опускается вещество 2, считая от начального положения границы раздела жидкостей $y = 0$. Сначала вычисляется средняя концентрация вещества 2 $\langle c(y) \rangle$ в нижней половине области, куда оно попадает

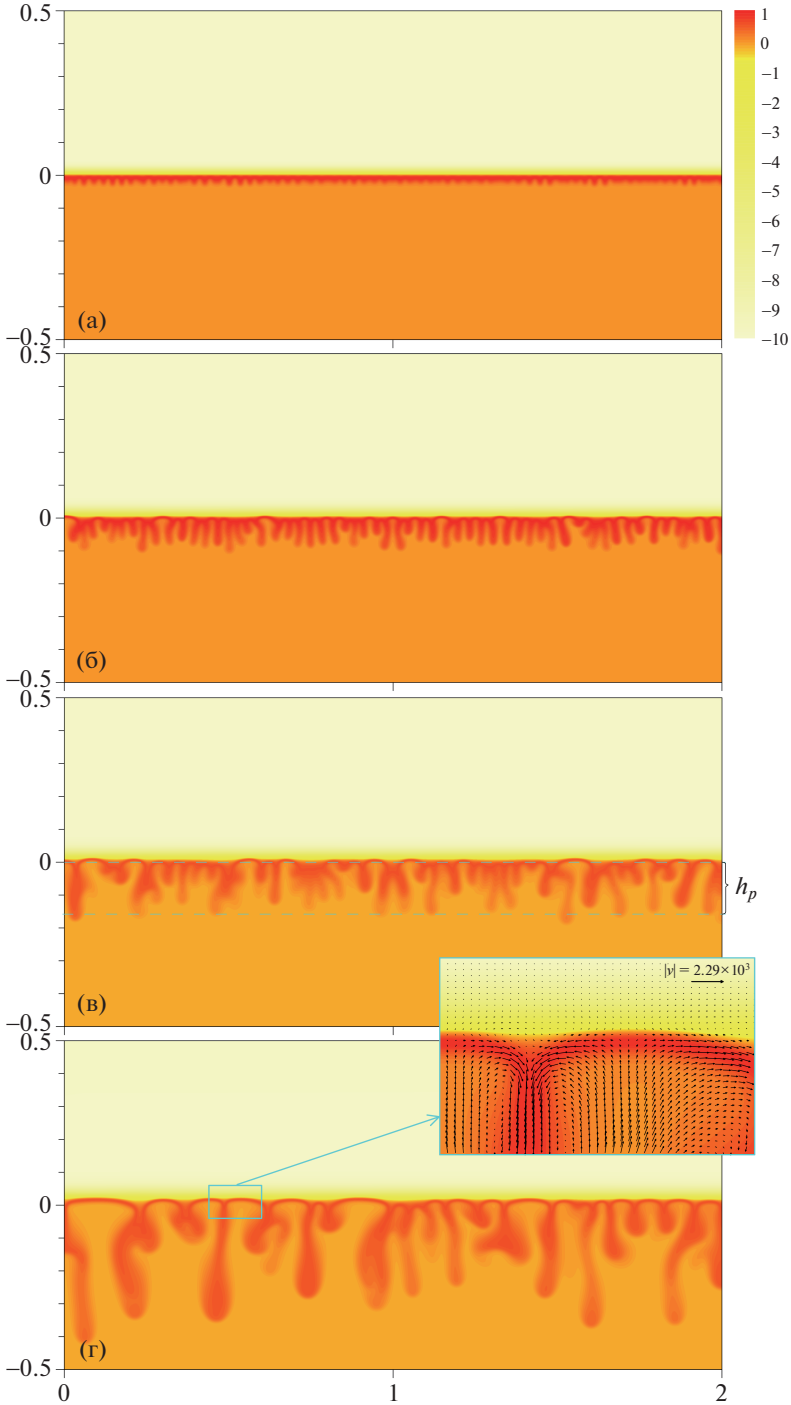



**Рис. 7.** Поле относительной плотности $S$ в моменты времени: а–г — $t = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $2.4 \cdot 10^{-4}$, $3.6 \cdot 10^{-4}$, $6.0 \cdot 10^{-4}$. Врезка: поля относительной плотности $S$ и скорости (стрелки) в увеличенном масштабе.

благодаря диффузии и конвекции, на некотором уровне $y$ ($y < 0$).

$$\langle c(y)\rangle = \frac{1}{h_x}\int_0^{h_x}(x,y)dx.$$

Считается, что на глубине $h_p$ концентрация составляет 1 %, то есть, если $\langle c(y)\rangle = 0.01$, то $h_p = -y$. В качестве примера на рис. 7в указана глубина $h_p$. Величина $Q_M$ определяется следующим образом:

$$Q_M = \frac{M_{20} - M_2}{M_{20}/h_2}, \quad M_2 = \int_0^{0.5}\int_0^{h_x} r_2\phi dxdy.$$

При этом $M_{20}$ рассчитывается в начальный момент времени по той же формуле, что и $M_2$. В знаменателе берется начальная масса в слое единичной высоты $M_{20}/h_2$; $h_2$ — начальная высота верхнего слоя, в данной задаче $h_2 = 0.5$. В численном методе интегрирование заменяется суммированием по ячейкам пространственной сетки.

На рис. 8 показаны зависимости $h_p(t)$ (а) и $Q_M(t)$ (б) для уравнений состояния с максимумом плотности при различных $c_m$. Пунктирные линии получены при отсутствии силы тяжести ($\mathbf{e} = 0$), поэтому характеризуют диффузионный режим. Сплошные кривые начинают отклоняться от пунктирных, когда конвекция начинает влиять на массоперенос: глубина проникновения примеси и ее количество, транспортируемое из верхнего слоя вниз, при наличии конвективного переноса увеличиваются. Сравнивая поведение кривых, полученных при различных $c_m$, можно заметить, что в течение длительного времени значения $h_p$ практически совпадают, то есть, конвективные “пальцы” проникают примерно на одну и ту же глубину во всех рассмотренных случаях (рис. 8а). Кривые $h_p(t)$ несколько расходятся после времени $t \approx 4.6 \cdot 10^{-4}$, что можно объяснить влиянием отдельных “пальцев”, которые стали довольно крупными, и, соответственно, увеличился разброс значений, полученных усреднением по длине расчетной области.

Однако масса вещества 2, покидающая верхнюю половину области, $Q_M(t)$ при наличии конвективного переноса заметно зависит от $c_m$ (рис. 8б); чем больше $c_m$, тем больше $Q_M$, то есть, больше вещества 2 уносится вниз конвективным течением. В частности, в момент времени $t = 6.0 \cdot 10^{-4}$ в случае $c_m = 0.3$ уменьшение массы составляет $Q_M = 0.0203$ (кривая 1), а при $c_m = 0.7$ — $Q_M = 0.0331$ (кривая 3), что в полтора раза больше. Такую тенденцию можно объяснить следующим образом. В тяжелом растворе, который опускается вниз под действием силы тяжести, вещество 2 присутствует в концентрации, близкой к $c_m$, поскольку именно при $c_m$ плотность раствора наибольшая. Таким образом, при изменении $c_m$ меняется количественный состав раствора в конвективных “пальцах”. При $c_m = 0.7$ “пальцы” несут больше вещества 2, чем при $c_m = 0.3$, обеспечивая более существенный отток массы из верхней половины вглубь области и, следовательно, более эффективное удержание вещества 2 при конвективном растворении.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные результаты даны в безразмерном виде, однако было бы полезно представить, на каких пространственных и временных масштабах происходят исследуемые процессы.

Рассмотрим типичные параметры подземной пористой породы, содержащей сверхкритический флюид $CO_2$ и воду. Характерная разность плотности, которая создает силу плавучести, составляет $\rho_m - \rho_{10} = 10$ кг/м$^3$. Коэффициент вязкости $CO_2$ на глубине от 800 до 3000 м варьируется в диапазоне $\mu = 0.023 \div 0.0611$ мПа·с [1], для оценки возьмем $\mu = 0.04$ мПа·с. Коэффициент диффузии $CO_2$ в воде зависит от температуры и давления, а также от того, находятся ли жидкости в свободном состоянии или в пористой среде. В последнем случае наблюдается некоторая зависимость от свойств пористой среды [19]. Исходя из экспериментов [19], выполненных при температуре $T = 393$ К и давлении $P = 50$ МПа и посвященных определению коэффициента диффузии $CO_2$ в горных породах в геологических условиях, для оценки можно принять, что $D = 1.6 \cdot 10^{-10}$ м$^2$/с. Пористость меняется незначительно, возьмем $\phi_* = 0.2$. Самым сильно меняющимся параметром является проницаемость пористой среды. В частности, проницаемость песчаника может меняться на четыре порядка: $K_* = 5.0 \cdot 10^{-16} \div 3.0 \cdot 10^{-12}$ м$^2$ [20]. Наличие столь сильно меняющейся величины указывает на то, что исследуемые явления могут наблюдаться на временных и пространственных масштабах, которые отличаются друг от друга также на несколько порядков.

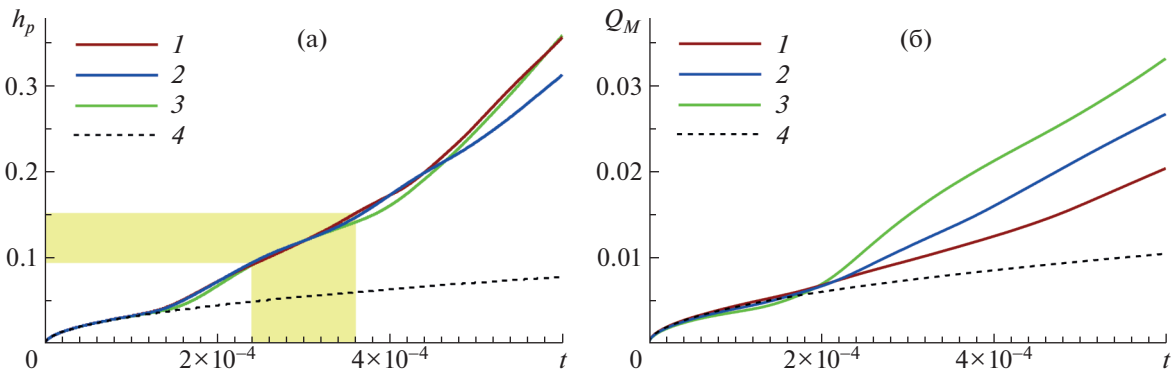



**Рис. 8.** Зависимости от времени: (а) глубина проникновения конвективных “пальцев” $h_p$ и (б) относительное уменьшение массы вещества 2 в верхней половине области $Q_M$: *1–3* — $c_m = 0.3, 0.5, 0.7$; *4* — диффузионный режим. Желтым цветом выделен интервал времени $\Delta t = 2.4 \cdot 10^{-4} \div 3.6 \cdot 10^{-4}$ и соответствующий ему интервал $\Delta h_p$.

Данные на рисунках 7 и 8 получены при числе Рэлея–Дарси $Ra = 3 \cdot 10^3$. Пользуясь определением $Ra$ (1.9), вычислим геометрический масштаб $H$ и масштаб времени $H^2/D$ для различной проницаемости $K_*$. На рис. 7б, в поля плотности показаны в моменты времени $t = 2.4 \cdot 10^{-4}$ и $t = 3.6 \cdot 10^{-4}$. На интервале времени $\Delta t = 1.2 \cdot 10^{-4}$ между указанными значениями наблюдается развитая конвекция, глубина проникновения конвективных "пальцев" $h_p$ возрастает практически линейно и меняется на величину $\Delta h_p = 0.052$; на рис. 8а данные интервалы выделены желтым цветом. Найдем размерные значения интервала времени $\Delta t H^2/D$ и интервала глубины $\Delta h_p H$ и рассчитаем среднюю скорость $\langle V \rangle$, с которой вещество 2 распространяется вниз: $\langle V \rangle = \Delta h_p D/(\Delta t H)$. Результаты представлены в табл. 1. Если конвекция происходит в низкопроницаемой горной породе (первая строка), то выделенный временной интервал соответствует $4.6 \cdot 10^9$ с, что составляет около 146 лет. За это время конвективные "пальцы" углубляются примерно на 4.1 м, транспортируя вниз вещество 2 со средней скоростью, которая составляет $8.8 \cdot 10^{-10}$ м/с или $7.6 \cdot 10^{-2}$ мм/сут. В высокопроницаемой пористой породе (вторая строка) тот же безразмерный временной интервал в размерных единицах равен $1.3 \cdot 10^2$ с, что чуть больше 2-х мин. За это время конвективные "пальцы" продвигаются вниз на расстояние меньше миллиметра, но скорость продвижения оказывается гораздо больше — примерно $5.3 \cdot 10^{-6}$ м/с или 46 мм/сут. Сравнение показывает, сколь широкий диапазон характерных размеров, времени, скорости охватывает исследуемый процесс.

Можно также оценить, в каком диапазоне меняется число Рэлея–Дарси Ra при конвекции в целевом пласте, в который произошла закачка $CO_2$. Характерная высота пласта составляет $H = 10$ м, возьмем эту величину в качестве геометрического масштаба. Используя приведенные выше значения физических величин и два предельных значения проницаемости $K_*$ (см. табл. 1), можно найти, что $\mathrm{Ra} = 3.8 \cdot 10^2 \div 2.3 \cdot 10^6$. Моделирование выполнено при значениях Ra, которые попадают в указанный диапазон.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создан новый вычислительный код, предназначенный для моделирования односторонней концентрационной конвекции в пористой среде в приложении к технологии захоронения $CO_2$ в подземных пористых образованиях. В силу высокого давления и температуры вещество $CO_2$ находится в сверхкритическом состоянии. Использована гидродинамическая модель, которая включает нелинейное уравнение состояния, то есть, нелинейную зависимость плотности жидкой фазы от концентрации $CO_2$. Показано, что данную зависимость можно описать полиномом третьей степени. Получены выражения для коэффициентов полинома как функции параметров системы.

При попадании $CO_2$ в воду или нефть плотность раствора увеличивается, достигает максимума при некоторой концентрации $c_m$ и уменьшается при дальнейшем росте концентрации. Положение максимума, которое задается значением $c_m$, точно неизвестно и может меняться. Решалась задача о влиянии $c_m$ на параметры конвективного течения и массопереноса. Показано, что на начальной стадии процесса, когда жидкости неподвижны и массоперенос происходит только за счет диффузии, наиболее тяжелый раствор образуется в нижней половине области, если $c_m < 0.5$, или в верхней половине, если $c_m > 0.5$. Данная закономерность приводит к тому, что при потере устойчивости дифузионного слоя конвективные "пальцы" зарождаются на разном уровне в зависимости от $c_m$, уровень повышается при увеличении $c_m$.

В стадии развитой конвекции оценивались глубина проникновения конвективных "пальцев" в воду $h_p$ и относительное уменьшение массы $CO_2$ в захоронении, обозначенное как $Q_M$, которое происходит за счет направленных вниз диффузионного и конвективного потоков. Получено, что величина $h_p$ ведет себя практически одинаково длительное время вне зависимости от $c_m$. Получено также, что в развитом конвективном течении с ростом $c_m$ величина $Q_M$ становится больше — течение уносит вниз больше $CO_2$, поскольку меняется количественный состав раствора в конвективных "пальцах". Действительно, под действием силы тяжести опускается наиболее тяжелый раствор, а концентрация $CO_2$ в нем близка к точке максимума $c_m$. Следовательно, чем больше $c_m$, тем эффективней происходит конвективное растворение.

Выполнены оценки, которые показали, что в реальных физических системах конвективный процесс характеризуется пространственным и временным масштабами, а также скоростью переноса $CO_2$, которые могут меняться на несколько порядков. Это зависит от того, развивается ли конвекция в высокопроницаемой или низкопроницаемой пористой среде.

**Таблица 1.** Размерные параметры задачи при различной проницаемости пористой среды $K_*$

| $K_*$, м$^2$ | $H$, м | $H^2/D$, с | $\Delta h_p H$, м | $\Delta t H^2/D$, с | $\langle V \rangle$, м/с |
|---|---|---|---|---|---|
| $5.0 \cdot 10^{-16}$ | 78 | $3.8 \cdot 10^{13}$ | 4.1 | $4.6 \cdot 10^9$ | $8.8 \cdot 10^{-10}$ |
| $3.0 \cdot 10^{-12}$ | $1.3 \cdot 10^{-2}$ | $1.1 \cdot 10^6$ | $6.7 \cdot 10^{-4}$ | $1.3 \cdot 10^2$ | $5.3 \cdot 10^{-6}$ |

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (код проекта 24-11-00222).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Huppert H.E., Neufeld J.A.* The fluid mechanics of carbon dioxide sequestration // Ann. Rev. Fluid Mech. 2014. V. 46. P. 255–272.
2. *Ennis-King J., Paterson L.* Role of convective mixing in the long-term storage of carbon dioxide in deep saline formations // SPE Journal. 2005. V. 10. No. 3. P. 349–356.
3. *Paoli M.De.* Convective mixing in porous media: a review of Darcy, pore-scale and Hele-Shaw studies // Eur. Phys. J. E. 2023. V. 46. P. 129.
4. *Soboleva E.* Instability problems and density-driven convection in saturated porous media linking to hydrogeology: A review // Fluids. 2023. V. 8. No. 2. P. 36.
5. *Riaz A., Hesse M., Tchelepi H.A., Orr F.M.* Onset of convection in a gravitationally unstable diffusive boundary layer in porous media // J. Fluid Mech. 2006. V. 548. P. 87–111.
6. *Pau G.S.H., Bell J.B., Pruess K., Almgren A.S., Lijewski M.J., Zhang K.* High-resolution simulation and characterization of density-driven flow in $CO_2$ storage in saline aquifers // Adv. Water Res. 2010. V. 33. P. 443–455.
7. *Soboleva E.B.* Density-driven convection in an inhomogeneous geothermal reservoir // Int. J. Heat Mass Transf. 2018. V. 127 (C). P. 784–798.
8. *Neufeld J.A., Hesse M.A., Riaz A., Hallworth M.A., Tchelepi H.A., Huppert H.E.* Convective dissolution of carbon dioxide in saline aquifers // Geophys. Res. Lett. 2010. V. 37. P. 22404.
9. *Daniel D., Riaz A.* Effect of viscosity contrast on gravitationally unstable diffusive layers in porous media // Phys. Fluids. 2014. V. 26. P. 116601.
10. *Elenius M.T., Gasda S.E.* Convective mixing driven by non-monotonic density // Transp. Porous Med. 2021. V. 138. P. 133–155.
11. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1979. V. 19. P. 59–98.
12. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоиздат, 1984. 124 с.
13. *Nield D.A., Bejan A.* Convection in Porous Media. New York: Springer, 2006. 640 p.
14. *Соболева Е.Б., Цыпкин Г.Г.* Численное моделирование конвективных течений в грунте при испарении воды, содержащей растворенную примесь // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 5. С. 88–99.
15. *Соболева Е.Б.* Метод численного моделирования концентрационно-конвективных течений в пористых средах в приложении к задачам геологии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 162–173.
16. *Соболева Е.Б.* Начало конвекции Рэлея–Тейлора в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 2. С. 52–62.
17. *Соболева Е.Б.* Влияние конечных возмущений плотности на развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в пористой среде // Теор. и матем. физ. 2022. Т. 211. № 2. С. 333–346.
18. *Соболева Е.Б.* Численное моделирование фильтрационных концентрационно-конвективных течений с контрастом вязкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. С. 1927–1939.
19. *Wang Zh., Hou J.* Measurement of $CO_2$ diffusion coefficients in both bulk liquids and carven filling porous media of fractured-vuggy carbonate reservoirs at 50 MPa and 393 K // RSC Adv. 2021. V. 11. P. 19712.
20. *Коллинз Р.* Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 352 с.

# Simulation of One-Sided Convection in a Porous Medium Using a Nonlinear Equation of State

**© 2025 E. B. Soboleva***

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**e-mail: soboleva@ipmnet.ru*

One-sided density-driven convection in a porous medium is simulated numerically with reference to hydrodynamic processes occurring during injection of carbon dioxide into underground porous formations. When carbon dioxide dissolves in water or oil, the density of solution increases. This leads to the growth of instability. A hydrodynamic model that includes the continuity equation, the equation of motion (in the form of Darcy equation), and the convection-diffusion equation has been used. The equation of state that relates the density of the fluid phase to the concentration of carbon dioxide is nonlinear. The density of solution reaches a maximum at a certain concentration, which varies. A new computational code based on the finite-difference method has been developed to solve the problem. The effect of the concentration that gives the maximum density on the parameters of convective motion and mass transfer is investigated. In particular, it is found that if the maximum density occurs at a higher concentration, the amount of carbon dioxide that is transported downward by the convective flow increases. This means that, in this case, convective dissolution is more effective in trapping of carbon dioxide at depth.

*Keywords:* carbon dioxide, porous medium, nonlinear equation of state, one-sided convection, convective dissolution, numerical simulation

*ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 107–119*

*УДК 533.6*

# ВЛИЯНИЕ ВИХРЕВОЙ СИСТЕМЫ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА НА ОБТЕКАНИЕ НЕСУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**© 2025 г. В. Е. Борисов, Т. В. Константиновская*, А. Е. Луцкий**

*Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия*

**e-mail: konstantinovskaya.t.v@gmail.com*

Поступила в редакцию 20.01.2025 г.
После доработки 27.02.2025 г.
Принята к публикации 27.02.2025 г.

Рассматриваются вихревые структуры, образующиеся за треугольным крылом при его обтекании сверхзвуковым потоком. Исследуется зависимость этих структур от угла атаки и от числа Маха набегающего потока, а также их влияние на аэродинамические свойства прямого крыла, расположенного вниз по потоку. Рассмотрены режимы M = 2, 3, $\alpha$ = 10°, 14°, 20°. Численные данные получены на многопроцессорной гибридной суперкомпьютерной системе К-60 в ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

*Ключевые слова:* сверхзвуковой поток, треугольное крыло, вихревая система треугольного крыла, вторичные вихри, аэродинамические характеристики крыла

**DOI:** 10.31857/S1024708425030109

При полете скоростных летательных аппаратов, как правило, возникают различные вихревые системы, вызываемые отрывом на различных элементах конструкции. Взаимодействуя с корпусом, эти вихри влияют на общие характеристики, устойчивость и управляемость летательного аппарата. В зависимости от формы летательного аппарата и режимов полета вихревые потоки могут быть очень сложными и включать в себя взаимодействие между несколькими вихрями, между вихрями и ударными волнами, а также между компонентами летательного аппарата.

Важным примером генератора вихрей являются треугольные крылья. Интерес к этим объектам вызван многими причинами. Треугольные крылья широко применяются в авиации начиная с пятидесятых годов XX в. Хорошо известны такие летательные аппараты, как истребители МиГ-21 и Mirage III, которыми были оснащены ВВС многих стран. Среди аэрокосмических аппаратов необходимо отметить, в первую очередь, “Буран” и Space Shuttle. Кроме того, для треугольных крыльев наблюдаются различные типы взаимодействий: нескольких вихрей между собой, вихря с ударной волной, вихря с твердой поверхностью. Все это представляет значительный теоретический интерес.

В настоящее время интерес к треугольным крыльям в аэрокосмической отрасли усиливается в связи с разработкой многоразовых космических систем [1]. Здесь необходимо отметить космический аппарат Starship [2], вторая ступень которого имеет треугольные аэродинамические поверхности в носовой и хвостовой частях.

Широкое использование треугольных крыльев стимулировало активные исследования их аэродинамики в нашей стране и за рубежом [3–12].

Самая ранняя попытка систематизировать сверхзвуковые потоки вокруг треугольных крыльев при различных условиях обтекания для различных геометрических форм крыльев была предпринята в работе [3]. Изучив все имеющиеся экспериментальные данные, Стэнбрук и Сквайр предложили классификацию моделей обтекания на основе составляющей угла атаки, нормальной к передней кромке $\alpha_N$, и составляющей числа Маха, нормальной к передней кромке, $M_N$. Они разделили потоки на два типа: присоединенный поток и поток с отрывом на боковой кромке. Граница между этими двумя типами существует вблизи $M_N = 1$ и известна как граница Стэнбрука–Сквайра. Граница $M_N = 1$ соответствует режимам с дозвуковой и сверхзвуковой кромками. В последующих работах были выявлены различные характерные элементы течения и классификация была значительно усложнена с учетом новых деталей. Так в работе [9] предложена

классификация течений по шести типам в зависимости от $\alpha_N$ и $M_N$, а именно: (I) классический вихрь, (II) вихрь с ударной волной, (III) отрывной пузырь с ударной волной, (IV) отрыв, вызванный ударной волной, (V) ударная волна без отрыва и (VI) отрывной пузырь без ударной волны. В работе [10] предложена аналогичная классификация для крыльев значительно большей толщины. В работах [11, 12] были обнаружены новые детали течения и выполнена классификация режимов. Основными особенностями течения на подветренной стороне крыла в широком диапазоне значений $M_N < 0.8$ являются вихревая пелена (первичный вихрь), сходящая с острых передних кромок крыла, которая сворачивается в пару основных вихрей, над, под и между которыми возможно появление внутренних ударных волн. Поток, отрываясь от передних кромок, присоединяется вдоль некоторой линии, которая является линией растекания. Присоединение потока вызывает повышение давления в месте присоединения. Под областью основного вихря формируется зона пониженного давления. Пик разрежения соответствует проекции ядра основного вихря на плоскость крыла. С увеличением угла атаки интенсивность основного вихря увеличивается, разрежение на подветренной стороне крыла усиливается. Неблагоприятный градиент давления (рост давления на участке между пиком разрежения и передней кромкой) может оказаться достаточным для отрыва пограничного слоя вдоль линии стекания. Возникает вторичный отрыв потока (вторичный вихрь). Его присоединение происходит вдоль линии растекания. На распределение давления по поверхности крыла вторичный отрыв оказывает существенно меньшее влияние. Как правило, локальный минимум давления под вторичным вихрем и максимум давления, соответствующий линии присоединения, выражены слабо.

Активные исследования вихревых структур, образующихся при обтекании аэрокосмических аппаратов, фактически, привели к формированию специальной области аэродинамики — аэродинамике концентрированных вихревых структур [13, 14].

Как видно из представленного краткого обзора, свойства течения непосредственно над подветренной стороной треугольного крыла достаточно хорошо изучены. Что касается эволюции вихревой системы на удалении от крыла, то здесь остается много открытых вопросов, хотя и есть публикации о взаимодействии основного вихря с ударной волной на задней кромке. Специального внимания требует вопрос о влиянии этой вихревой структуры на обтекание элементов конструкции, расположенных вниз по потоку. В работе [15] для дозвукового течения (скорости 50 м/с и 60 м/с) проведено численно-экспериментальное исследование влияния вихря, генерируемого треугольным крылом, на обтекание стреловидного крыла, расположенного вниз по потоку. Получены зависимости аэродинамических коэффициентов от высоты вихревого следа над крылом. Выявлены признаки отрыва потока на стреловидном крыле под действием вихревого следа. Эти результаты, несомненно, представляют большой интерес. Однако перенос свойств дозвукового течения на сверхзвуковые режимы требует специального исследования.

В настоящей работе исследуются вихревые системы, образующиеся при сверхзвуковом обтекании (при числе Маха набегающего потока $M = 2, 3$ и числе Рейнольдса $Re = 1 \cdot 10^7$ соответствующему линейному размеру в 1 м) треугольного крыла с острыми кромками и углом стреловидности 78° [12]. Изучается влияние числа Маха и угла атаки на интенсивность вихрей и положение в пространстве их осей. Рассмотрено влияние вихревой системы треугольного крыла на обтекание прямоугольного крыла, расположенного на некотором расстоянии ниже по потоку от задней кромки треугольного крыла.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования задачи рассматривалось сверхзвуковое обтекание треугольного крыла с острыми кромками и углом стреловидности $\chi = 78°$. Длина его корневой хорды составляла $b_0 = 0.526$ м, полуразмах 0.1118 м.

На рис. 1 представлена схема расчетной области: а) для задачи обтекания треугольного крыла, рассматриваемой в первой части работы, б) для задачи влияния вихревой системы треугольного крыла на обтекание прямоугольного крыла, рассматриваемой во второй части работы.

При численных расчетах использовались неструктурированные сетки, состоящие из криволинейных гексаэдров. Для первой задачи число ячеек было порядка 7.5 млн, для второй порядка 12.5 млн.

Расчет выполнен в связанной системе координат. В счетной области задавалась декартова система координат, начало которой совпадает с вершиной треугольного крыла; ось $Ox$ направлена вдоль корневой хорды, $Oz$ перпендикулярна плоскости симметрии. Срединная поверхность крыла лежит в плоскости $z = 0$. При рассмотренных числах Маха $M = 2, 3$ нормальное число Маха $M_N = M\cos(\chi)$ принимает значения 0.416 и 0.624 соответственно, т. е. передняя кромка является дозвуковой.

Численные данные были получены с использованием авторского программного комплекса ARES [16] расчета трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа, который был разработан и программно реализован в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Более подробно математическая модель и численный алгоритм описаны в [17].

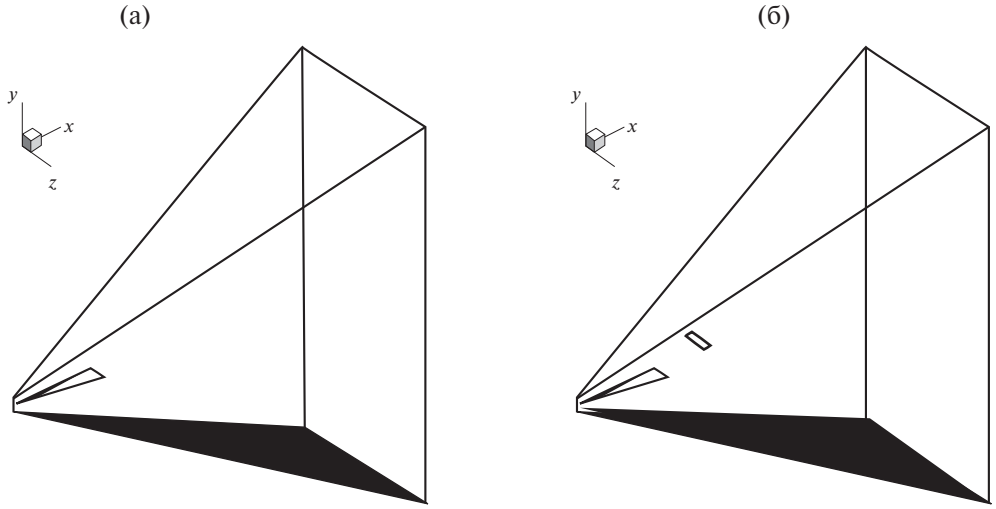



**Рис. 1.** Схема расчетной области: треугольное крыло (а), система двух крыльев (б).

Численные расчеты были проведены на гибридной суперкомпьютерной системе К-60 [18] в ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН с использованием 196 процессоров.

В рассматриваемом диапазоне чисел Маха и углов атаки вихревая система состоит из следующих основных элементов. Над подветренной стороной крыла формируется вихрь на боковой кромке (первичный вихрь), основной вихрь и вторичный вихрь — рис. 2. На этом рисунке показаны распределение $x$-составляющей ротора скорости (завихренности) $\Omega_x$ (X Vorticity) и линии тока в поперечном сечении $x = 0.45$, пересекающем крыло вблизи задней кромки. Вторичный вихрь вызван отрывом пограничного слоя, который возникает из-за роста давления по направлению к боковой кромке. Вторичный вихрь имеет направление вращения, противоположное направлению вращения основного вихря.

## 1. ВЛИЯНИЕ УГЛА АТАКИ НА ПАРАМЕТРЫ ВИХРЕВОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается обтекание треугольного крыла при числе Маха набегающего потока M = 2 и углах атаки $\alpha = 10°$ и $\alpha = 20°$ (угол между вектором скорости набегающего потока и осью $Ox$).

На рис. 2 видно, что вихревая область при $\alpha = 20°$ имеет несколько большие размеры, чем при $\alpha = 10°$. Кроме того, для $\alpha = 20°$ ось вихря располагается на большем расстоянии от поверхности крыла и ближе к плоскости симметрии. Последний факт будет дополнительно проиллюстрирован на последующих рисунках. Общий вид вихревых систем в пространстве для двух вариантов углов атаки представлен на рис. 3, где изображена изоповерхность модуля ротора скорости (завихренности) $V_{ort} = 100$. Видно, что с ростом угла атаки основной вихрь становится шире.

Как показали ранее выполненные исследования, во многих случаях ось основного вихря достаточно хорошо идентифицируется как 3D линия, на которой достигается минимум давления в сечениях $x = \text{const}$.

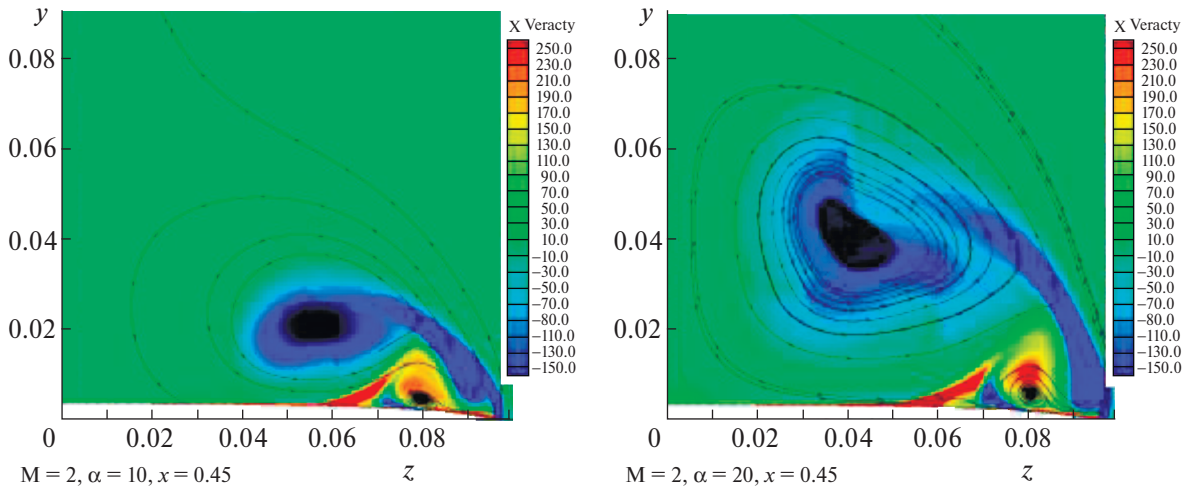



**Рис. 2.** Сечение $x = 0.45$. Распределение продольной завихренности X Vorticity, траектории частиц в проекции на плоскость $x = const$, $\alpha = 10°$ (слева), $\alpha = 20°$ (справа).

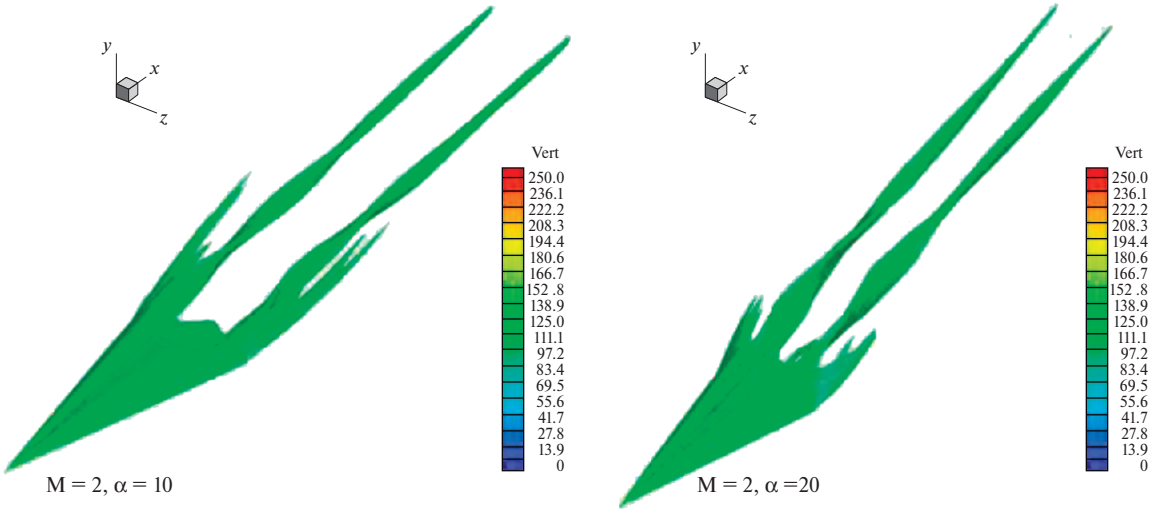



**Рис. 3.** Изоповерхность ($Vort$ = 100) модуля ротора скорости; α = 10° (слева), α = 20° (справа).

Этот факт подтверждается также результатами других авторов, например [19]. Линия минимальной плотности соответствует оси вторичного вихря. Вихрь на кромке представлен линией максимальной завихренности. На рис. 4 положение осей вихрей в пространстве изображено для варианта M = 2, α = 10°.

Как видно на рис. 4, оси вторичного и вихря на боковой кромке претерпевают значительные деформации в области за крылом. На некотором расстоянии вниз по потоку все оси практически сливаются. Трансформация вихревой системы вызвана ударной волной на задней кромке крыла.

На рис. 5 показано распределение давления и завихренности вблизи задней кромки в плоскости, проходящей через ось основного вихря. Задача о взаимодействии сверхзвукового вихря с наклонным скачком к настоящему времени достаточно хорошо исследована — [20–22]. В частности, в работе [20] показано, что тип взаимодействия (слабый, умеренный, сильный) в значительной степени определяется дефицитом продольной скорости $V_x/V_\infty$ вдоль оси вихря. На оси основного вихря скорость достаточно велика (даже превышает скорость набегающего потока). Поэтому для основного вихря реализуется слабый тип взаимодействия с ударной волной, при котором вихрь и ударная волна претерпевают незначительные изменения. Для вторичного вихря и вихря на кромке дефицит скорости составляет соответственно 0.05 и 0.43. Реализуется сильный тип взаимодействия с практически полным разрушением вихря и значительной деформацией поверхности ударной волны.

Влияние угла атаки на вихревую систему иллюстрируется рис. 6, где изображены оси основного вихря в проекции на плоскости $xOy$ и $xOz$. Видно, что для обоих режимов углы наклона осей в плоскости $xOy$ увеличиваются под воздействием ударной волны. Ось основного вихря при большем угле атаки располагается значительно выше. Расстояние между осями в вертикальном направлении увеличивается при удалении

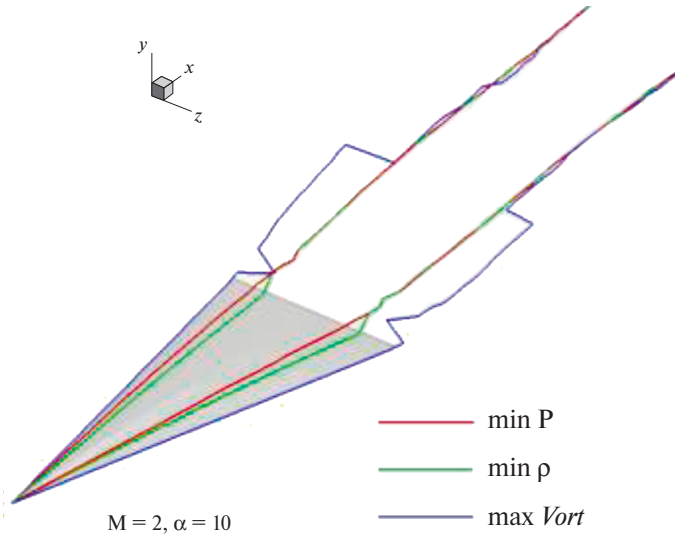



**Рис. 4.** Оси вихрей: первичного (на боковой кромке), основного и вторичного. M = 2, α = 10°.

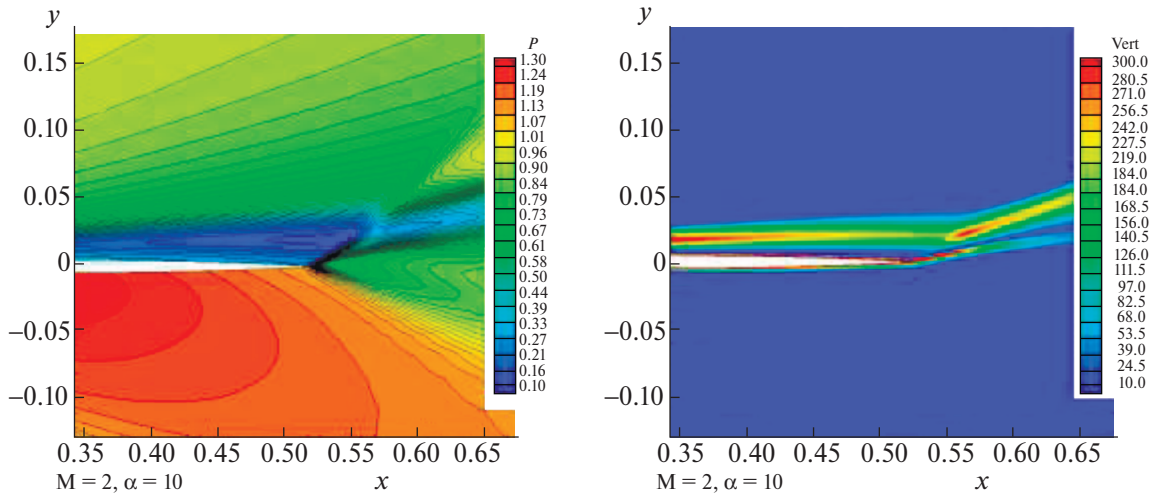



**Рис. 5.** Распределение давления (слева) и завихренности (справа) в плоскости, проходящей через ось основного вихря.

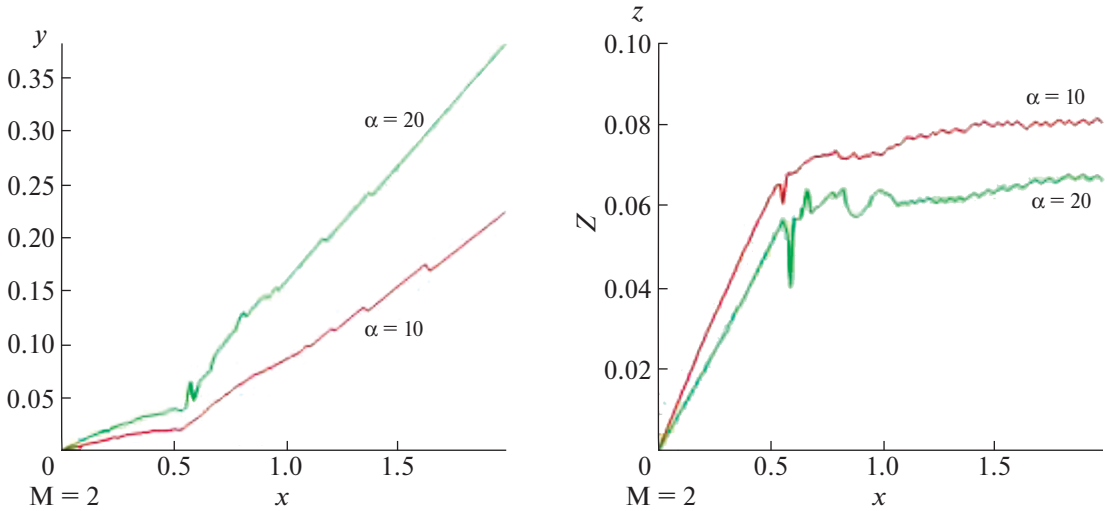



**Рис. 6.** Координаты осей основного вихря в плоскостях $xOy$ (слева) и $xOz$ (справа).

от крыла. В плоскости $xOz$ также наблюдается резкое изменение углов наклона осей под действием ударной волны. После взаимодействия расстояние от плоскости симметрии в поперечном направлении при удалении от крыла увеличивается очень медленно. Как уже упоминалось при анализе рис. 2, ось основного вихря при $\alpha = 20°$ располагается несколько ближе к плоскости симметрии.

В табл. 1 представлены аэродинамические коэффициенты $C_d$, $C_l$ в скоростной системе координат. В первом столбце приведен коэффициент сопротивления трения $C_{df}$. Как видно, вклад силы трения в общее сопротивление не превышает 11%. Можно отметить также, что сопротивление трения при изменении угла атаки меняется незначительно, поэтому наблюдаемое изменение аэродинамических коэффициентов обусловлено, главным образом, действием сил давления.

Для прямоугольного крыла в несжимаемом потоке существует простая линейная связь между подъемной силой и интенсивностью (циркуляцией) вихревой системы [23, 24]. Для рассматриваемого случая сверхзвукового обтекания треугольного крыла вопрос значительно сложнее [14, 25, 26], однако, зависимость, близкая к линейной, наблюдается. При увеличении угла атаки в 2 раза (с 10° до 20°) коэффициент $C_y$ (в связанной системе координат) увеличивается в 2.1 раза. При этом нормированный (нормировка на ско-

**Таблица 1.** Аэродинамические коэффициенты треугольного крыла в зависимости от угла атаки α при M = 2

| α | $C_{df}$ | $C_d$ | $C_l$ | $K = C_l/C_d$ |
|---|---|---|---|---|
| 10° | 5.721e–003 | 0.0489 | 0.2399 | 4.9066 |
| 20° | 5.238e–003 | 0.1807 | 0.4790 | 2.6507 |

**Таблица 2.** Величина $\int \Omega_x dS/\mathrm{M}\sqrt{\gamma}$ в сечении $x = 1.2$

| $\alpha$ | $\int \Omega_x dS/\mathrm{M}\sqrt{\gamma}$ |
|---|---|
| 10° | –0.0452 |
| 20° | –0.1011 |

рость набегающего потока) интеграл от продольной составляющей ротора скорости $\int \Omega_x dS/\mathrm{M}\sqrt{\gamma}$ в сечении $x = 1.2$ увеличивается по модулю в 2.2 раза, табл. 2.

Как видно на рис. 7, где показано распределение давления в поперечном сечении $x = 1.2$, основные вихри отчетливо локализованы в виде областей низкого давления. При этом, как и на рис. 6, видно, что при $\alpha = 20°$ вихрь располагается значительно выше, чем при $\alpha = 10°$.

## ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА МАХА НА ПАРАМЕТРЫ ВИХРЕВОЙ СИСТЕМЫ

В этой части работы рассматривается обтекание треугольного крыла при угле атаки $\alpha = 14°$ (угол между вектором скорости набегающего потока и $Ox$) и числах Маха набегающего потока $\mathrm{M} = 2$ и $\mathrm{M} = 3$.

При изменении числа Маха в рассмотренном диапазоне основная структура течения остается такой же, как она описана в предыдущем разделе. Она содержит структурообразующие вихри: основной, вторичный и на боковой кромке. При росте числа Маха слияние осей этих структурообразующих вихрей за крылом происходит ближе к задней кромке крыла.

Установлено, что основной вихрь продолжается далеко за концевую кромку крыла в виде отчетливой структуры. При этом для течения с $\mathrm{M} = 3$ вихревые структуры претерпевают несколько бóльшие возмущения.

На рис. 8 изображены оси основного вихря в проекции на плоскости $xOy$ и $xOz$, изменение положения которых иллюстрирует влияние числа Маха на вихревую систему. Так, с увеличением числа Маха координата $y$ изменяется незначительно, происходит небольшое смещение положения оси основного вихря в основном по координате $z$. При увеличении числа Маха ось вихря располагается несколько ближе к плоскости симметрии. При этом угол наклона оси остается практически неизменным с увеличением числа Маха.

В табл. 3 представлены аэродинамические коэффициенты (в скоростной системе координат) при разных числах Маха набегающего потока для крыла под углом атаки $\alpha = 14°$. Как и при исследовании влияния атаки, можно проследить близкую к линейной связь между величиной подъемной силы и интенсивностью вихревой системы. При увеличении Маха в 1.5 раза (с 2 до 3) коэффициент $C_y$ уменьшается в 1.3 раза, а коэффициент $C_x$ увеличивается в 1.26 раз. Одновременно с этим интеграл от продольной составляющей нормированного ротора скорости $\int \Omega_x dS/\mathrm{M}\sqrt{\gamma}$ в представленных сечениях по $x$ (табл. 4) уменьшается по модулю в 1.25 раза.

Весьма важно отметить, что величина $\int \Omega_x dS/\mathrm{M}\sqrt{\gamma}$ изменяется очень незначительно от сечения к сечению, что свидетельствует о достаточно слабом проявлении диссипативных эффектов (табл. 4). Кроме того, приведенные данные табл. 3 и 4 показывают, что, как и для выше рассмотренного влияния угла атаки крыла, зависимости в сверхзвуковых течениях значительно сложнее, чем для несжимаемых течений. В частности,

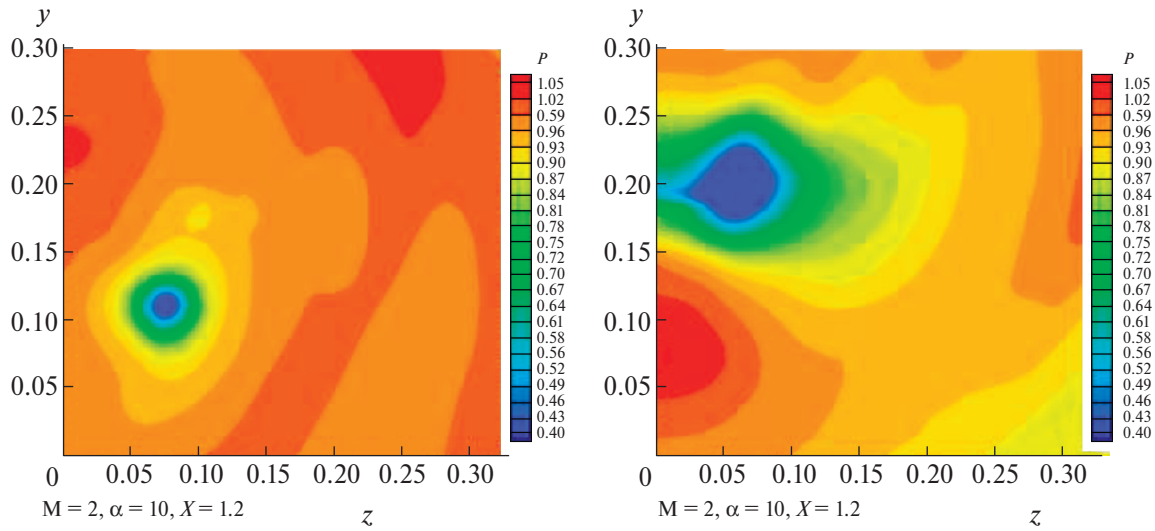



**Рис. 7.** Распределение давления в поперечном сечении $x = 1.2$, $\alpha = 10°$ (слева), $\alpha = 20°$ (справа).

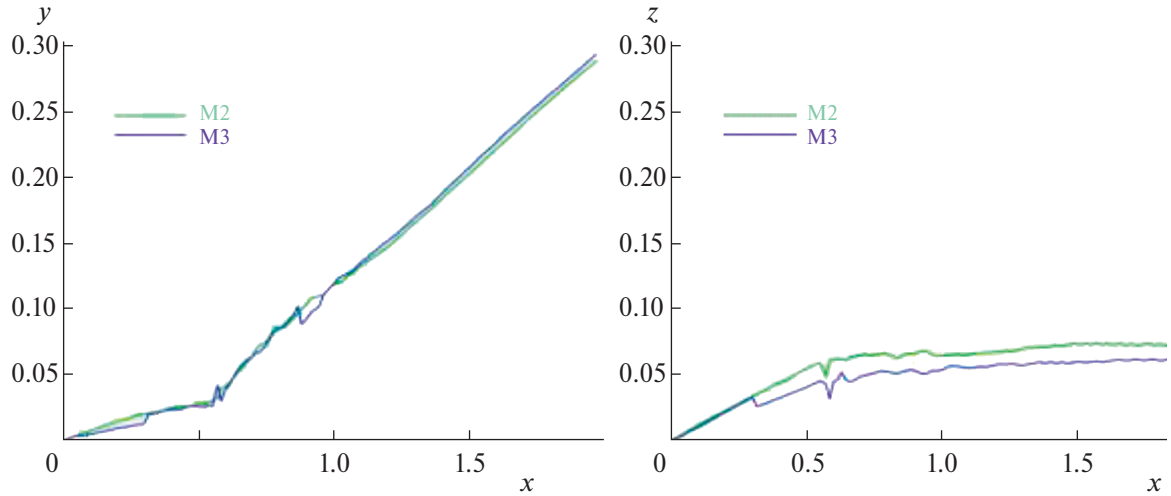



**Рис. 8.** Координаты осей основного вихря в плоскостях $xOy$ (слева) и $xOz$ (справа) для M = 2 и M = 3, $\alpha$ = 14°.

**Таблица 3.** Аэродинамические коэффициенты треугольного крыла в зависимости от числа Маха при $\alpha$ = 14°

| M | $C_{df}$ | $C_d$ | $C_l$ | $K = C_l/C_d$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $5.518 \cdot 10^{-3}$ | 0.0909 | 0.3388 | 3.7259 |
| 3 | $4.803 \cdot 10^{-3}$ | 0.0809 | 0.2627 | 3.2466 |

**Таблица 4.** Величина $\int \Omega_x dS/M\sqrt{\gamma}$ в сечениях $x$ = 0.7, $x$ = 1.2 и $x$ = 1.7

| M | $x$ = 0.7 | $x$ = 1.2 | $x$ = 1.7 |
|---|---|---|---|
| 2 | –0.0689 | –0.0682 | –0.0674 |
| 3 | –0.0547 | –0.0545 | –0.0547 |

в данном случае наблюдается следующий эффект: при росте числа Маха M интеграл от продольной составляющей нормированного ротора скорости уменьшается по модулю вместе с коэффициентом подъемной силы.

На рис. 9 показано распределение давления в поперечном сечении $x$ = 1.2 при M = 2 (слева) и M = 3 (справа), $\alpha$ = 14°. Основные вихри в сечении $x$ = 1.2 (рис. 11) отчетливо локализованы в виде областей низкого давления, как и в предыдущем разделе. Также можно отметить, что для меньшего числа Маха структура (распределения давления) вихревого следа более однородна.

Установлено, что с ростом числа Маха набегающего потока вихрь становится шире и влияние хвостового скачка на вихри возрастает.

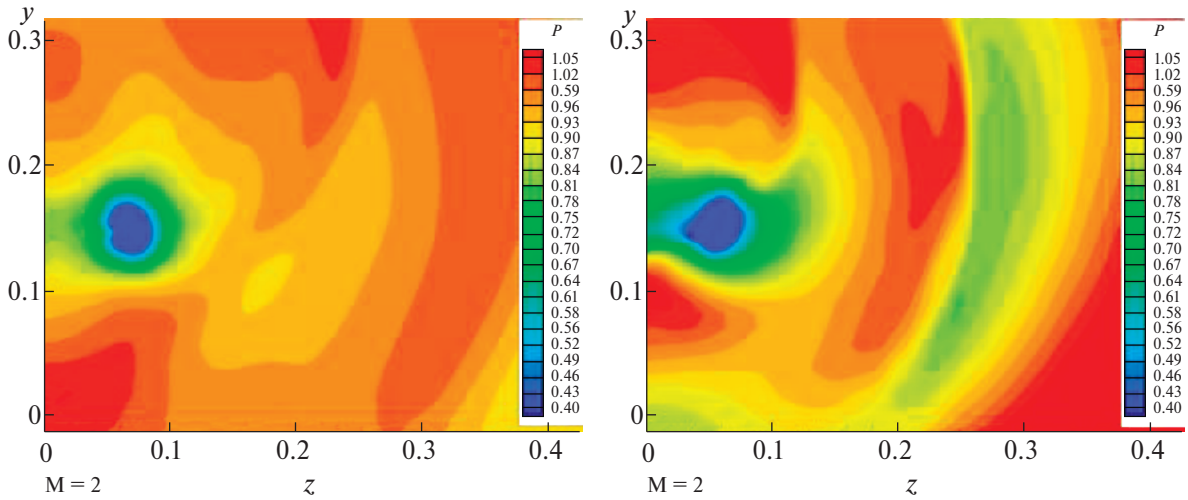



**Рис. 9.** Распределение давления в поперечном сечении $x$ = 1.2, $\alpha$ = 14°, M = 2 (слева), M = 3 (справа).

## ВЛИЯНИЕ ВИХРЕВОЙ СИСТЕМЫ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА НА ОБТЕКАНИЕ РАСПОЛОЖЕННОГО ВНИЗ ПО ПОТОКУ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КРЫЛА

В предыдущих разделах показано, что вихревая система треугольного крыла простирается на достаточно большие расстояния от его задней кромки. Поэтому возникает вопрос о ее влиянии на расположенные вниз по потоку элементы конструкции летательного аппарата.

Для исследования этой задачи прямоугольное крыло с острыми кромками и ромбовидным профилем, хордой 0.045 м и полуразмахом 0.12 м было размещено на расстоянии 0.5 своей хорды от задней кромки треугольного крыла (рис. 1б). Средняя линия поднята на высоту 0.124 корневой хорды треугольного крыла по отношению треугольного крыла. Прямоугольное крыло имело хорду и полуразмах. Рассматривались режимы обтекания при M = 2, M = 3 и числе Рейнольдса Re = $1 \cdot 10^7$ (соответствующему линейному размеру в 1 м), с углом атаки $\alpha = 14°$.

Взаимодействие вихревой системы с прямоугольным крылом представлено на рис. 10, где изображены изоповерхности продольной составляющей завихренности X Vorticity. Основной вихрь пересекается с поверхностью крыла. Первичный вихрь пересекается с крылом вблизи боковой кромки и влияет на формирование концевого вихря. На некотором расстоянии вниз по потоку от прямоугольного крыла остается его концевой вихрь и деформированный основной вихрь треугольного крыла. Эти два вихря имеют одинаковые направления вращения. Наблюдается также образование вторичных вихрей противоположного направления вращения.

Образование вторичных вихрей можно видеть также на рис. 11, где представлено распределение модуля ротора в поперечном сечении $x = 0.785$, расположенном на расстоянии 22% хорды от задней кромки прямоугольного крыла вверх по потоку.

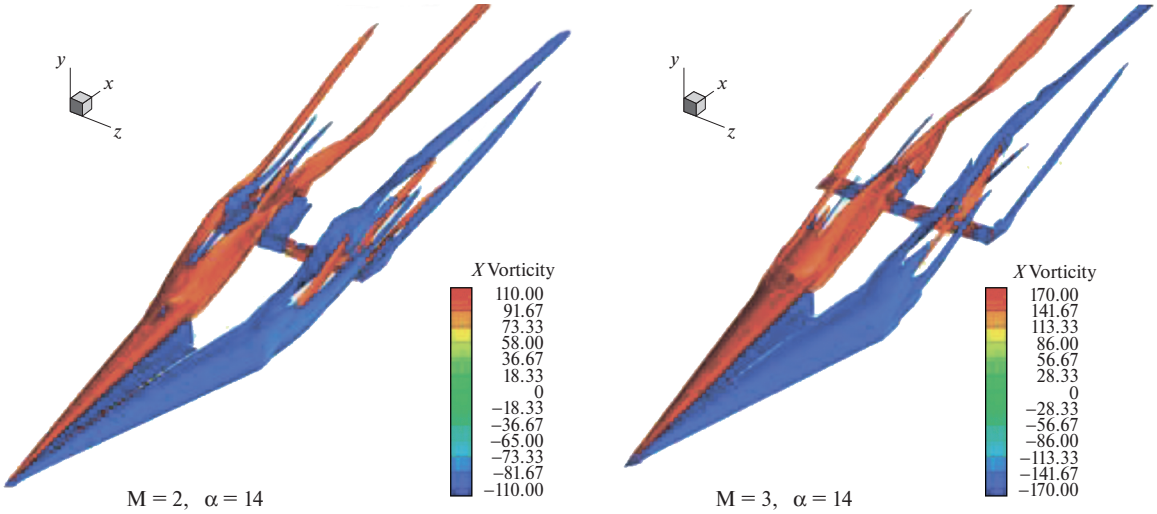



**Рис. 10.** Вихревая система. Изоповерхности продольной составляющей ротора скорости (завихренности). Взаимодействие с прямоугольным крылом: M = 2 (слева), M = 3 (справа).

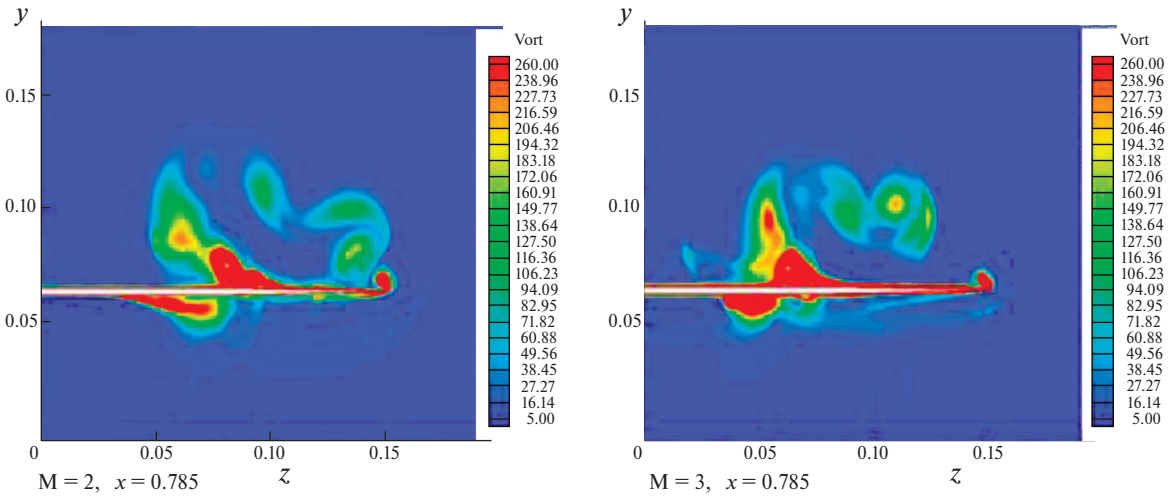



**Рис. 11.** Распределение завихренности в поперечном сечении $x = 0.785$: M = 2 (слева), $M = 3$ (справа).

Вторичные вихри формируются за счет отрыва пограничного слоя как на нижней, так и на верхней поверхностях крыла.

Наличие вихревой системы треугольного крыла приводит к тому, что прямоугольное крыло обтекается весьма неоднородным потоком, что проиллюстрировано на рис. 12 и 13, где показаны свойства набегающего на прямоугольное крыло потока в непосредственной близости от него.

В частности, отметим наличие области высокого числа Маха в окрестности сечения $z = 0.5$, что само по себе могло бы приводить к росту давления на поверхности крыла. Однако, здесь же имеется область низкого давления. Поэтому общий эффект будет достаточно сложным и общая схема течения будет существенно отличаться от обтекания крыла равномерным потоком с соответствующим числом Маха и углом атаки. Отметим при этом, что общие структуры возмущений для M = 2 и M = 3 принципиально не различаются.

Распределения давления на поверхности крыла для M = 2 представлено на рис. 14 и рис. 15. Как видно, в сравнении с обтеканием равномерным потоком, появляются зоны как пониженного, так и повышенного давления. Суммарный эффект влияния на аэродинамические коэффициенты представлен в табл. 5.

Как видно из данных таблиц 5, 6 для M = 2, коэффициент сопротивления уменьшается на 38%, коэффициент подъемной силы — на 40%. При этом уменьшается и аэродинамической качество ($K$) — на 3%. Аналогично для M = 3 уменьшается сопротивление и подъемная сила (табл. 6). Однако в этом случае наблюдается некоторое увеличение аэродинамического качества — на 1%.

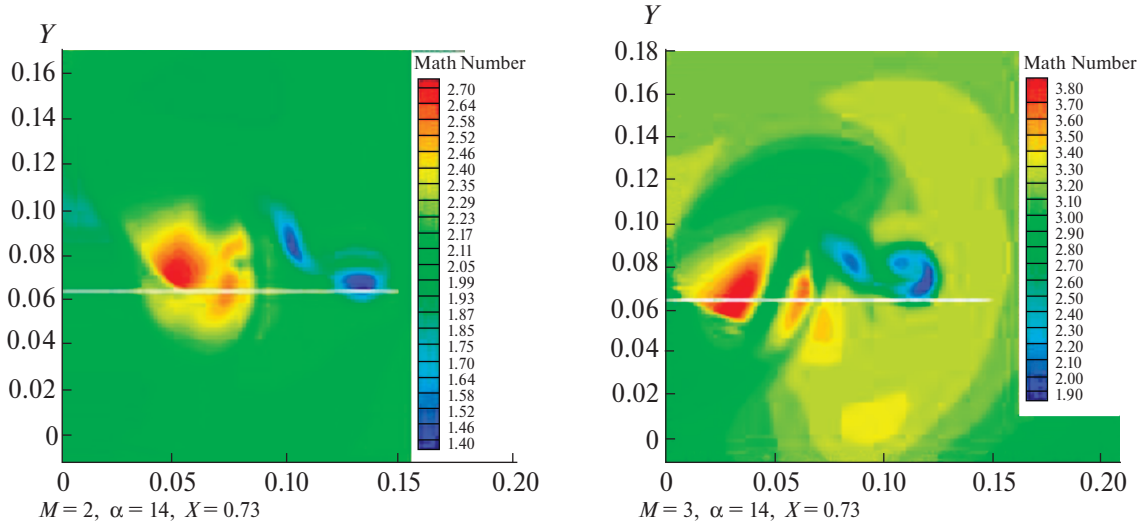



**Рис. 12.** Распределение числа Маха перед передней кромкой (ее проекция показана белой линией) прямоугольного крыла: M = 2 (слева), M = 3 (справа).

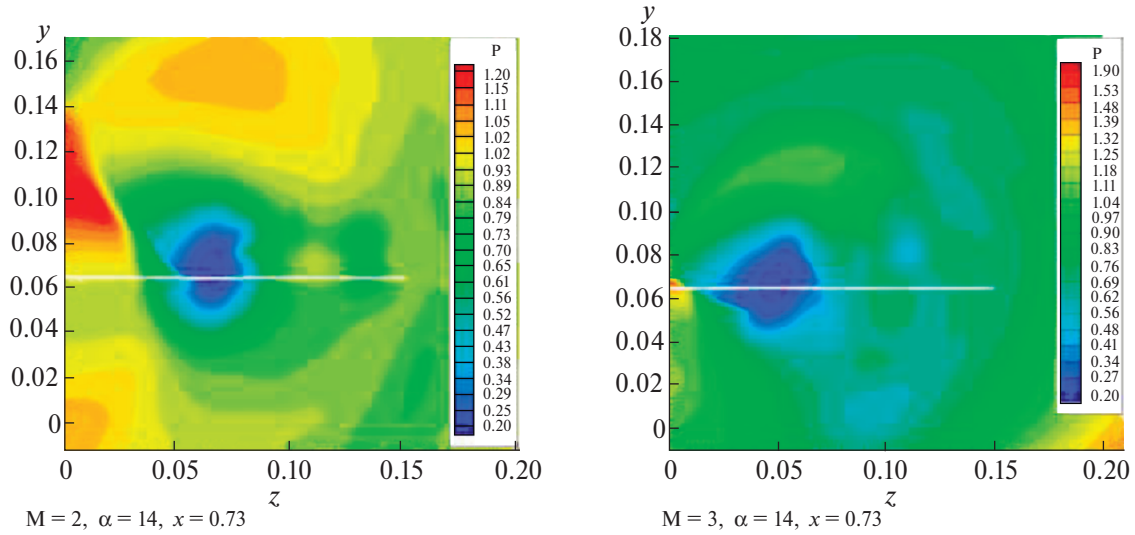



**Рис. 13.** Распределение давления $P$ перед передней кромкой (ее проекция показана белой линией) прямоугольного крыла: M = 2 (слева), M = 3 (справа).

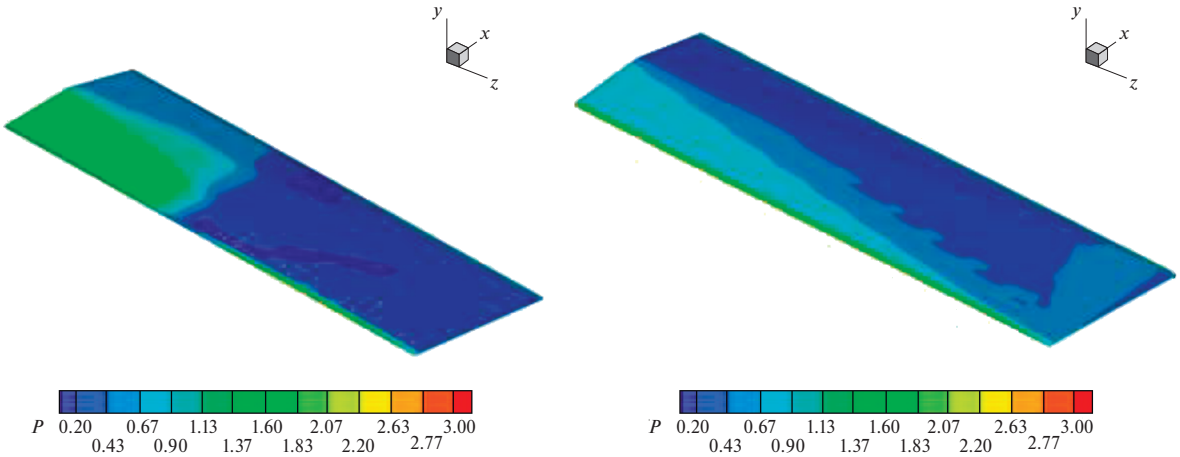



**Рис. 14.** M = 2. Распределение давления *P* на подветренной стороне прямоугольного крыла. Обтекание равномерным потоком (справа).

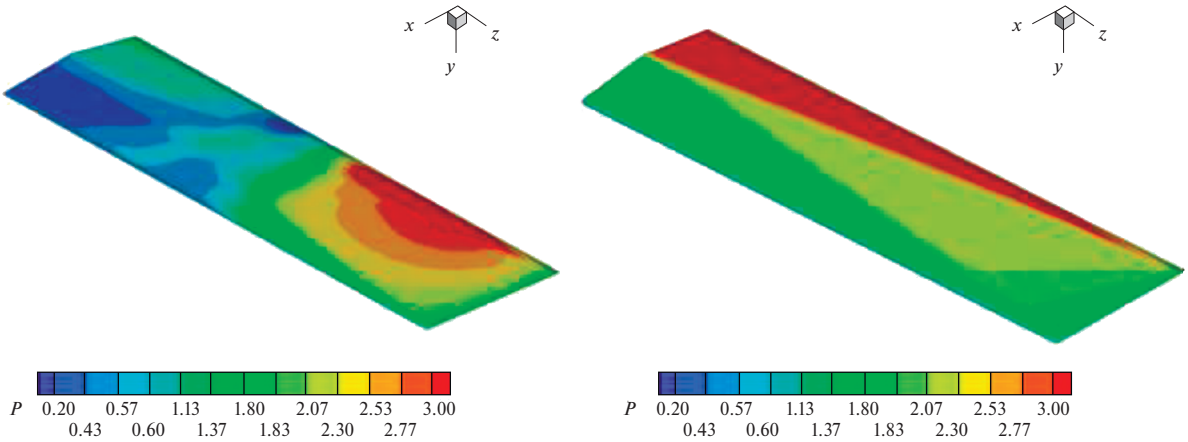



**Рис. 15.** M = 2. Распределение давления *P* на наветренной стороне прямоугольного крыла. Обтекание равномерным потоком (справа).

**Таблица 5.** Аэродинамические коэффициенты прямоугольного крыла при M = 2, α = 14°

| Вариант | $C_{df}$ | $C_d$ | $C_l$ | $K = C_l/C_d$ |
|---|---|---|---|---|
| Постоянный поток | $6.289 \cdot 10^{-3}$ | 0.1776 | 0.5799 | 3.2649 |
| Вихревые возмущения | $5.577 \cdot 10^{-3}$ | 0.1102 | 0.3494 | 3.1694 |

**Таблица 6.** Аэродинамические коэффициенты прямоугольного крыла при M = 3, α = 14°

| Вариант | $C_{df}$ | $C_d$ | $C_l$ | $K = C_l/C_d$ |
|---|---|---|---|---|
| Постоянный поток | $6.1830 \cdot 10^{-3}$ | 0.1137 | 0.3668 | 3.2253 |
| Вихревые возмущения | $4.8031 \cdot 10^{-3}$ | 0.0809 | 0.2627 | 3.2466 |

При рассмотренных значениях параметров задачи (в первую очередь, относительное расположение крыльев) для M = 2 можно говорить об отрицательном влиянии вихревой системы — некоторое уменьшение аэродинамического качества. Этот факт важен, если прямоугольное крыло рассматривается как несущая поверхность летательного аппарата. Если прямоугольное крыло является органом управления, то факт уменьшения нормальной силы имеет самостоятельное значение.

## ВАЛИДАЦИЯ

Тестирование алгоритма и программы выполнено на основе сравнения с экспериментальными данными [12] для режима M = 2, α = 14° (рис. 16). В работе [12] отмечается, при рассмотренных режимах обтекания локальные минимумы давления на подветренной поверхности крыла располагаются под вихрями (основным и вторичным).

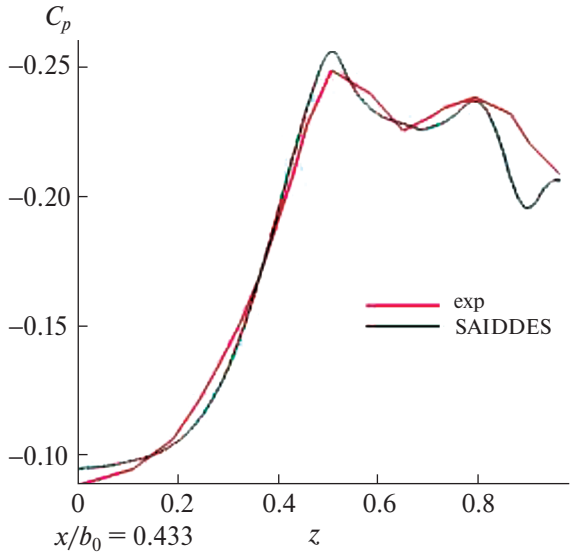



**Рис. 16.** Распределение коэффициента давления в сечении $x/b_0 = 0.433$: exp — экспериментальные данные [12], SAIDDES — численные данные, полученные с использованием модели турбулентности SAIDDES.

Как видно на рис. 16, полученные численные данные показывают хорошее соответствие экспериментальным данным, в частности это касается положения основного и вторичного вихрей и их влияния на распределение давления.

## ВЫВОДЫ

В работе исследована вихревая система, образующаяся за треугольным крылом в сверхзвуковом потоке. Получена зависимость образованных вихревых структур от угла атаки треугольного крыла и от числа Маха набегающего потока. Исследовано их влияние на аэродинамические свойства прямого крыла, расположенного вниз по потоку.

С увеличением угла атаки установлен рост диаметра основного вихря и смещение его оси дальше от поверхности крыла и ближе к плоскости симметрии, также увеличивается угол наклона основного вихря по оси $y$. При увеличении числа Маха набегающего потока координата $y$ оси основного вихря изменяется незначительно, но происходит небольшое ее смещение по координате $z$.

Вопрос зависимости между подъемной силой и интенсивностью (циркуляцией) вихревой системы значительно сложнее для рассмотренного сверхзвукового течения, нежели для несжимаемого потока, однако, зависимость, близкая к линейной, наблюдается. Действительно, при увеличении угла атаки в 2 раза (с 10° до 20°) коэффициент нормальной силы увеличивается в 2.1 раза. При этом нормированный интеграл от продольной составляющей ротора скорости в сечении $x = 1.2$ увеличивается по модулю в 2.2 раза. При росте числа Маха набегающего потока в 1.5 раза (с 2 до 3) коэффициент нормальной силы уменьшается в 1.3 раза. Одновременно с этим интеграл от продольной составляющей нормированного ротора скорости уменьшается по модулю в 1.25 раза, т. е. примерно, как коэффициент нормальной силы. Планируются дальнейшие исследования этих зависимостей.

Выявлена общая картина взаимодействия вихревой системы треугольного крыла с расположенным вниз по потоку прямоугольным крылом. Анализ показывает, что все элементы вихревой системы (первичный вихрь, основной вихрь, вторичный вихрь) оказывают определенное влияние на обтекание крыла. Основной вихрь пересекается с поверхностью крыла и оказывает влияние на распределение давления на ней. Первичный вихрь пересекается с крылом вблизи боковой кромки и влияет на формирование концевого вихря. На некотором расстоянии вниз по потоку от прямоугольного крыла остается его концевой вихрь и деформированный основной вихрь треугольного крыла. Эти два вихря имеют одинаковые направления вращения. Наблюдается также образование вторичных вихрей противоположного направления вращения.

При рассмотренных значениях параметров задачи зафиксировано значительное влияние вихревой системы треугольного крыла на аэродинамические характеристики прямого крыла. Как для M = 2, так и для M = 3 наблюдается уменьшение сопротивления и подъемной силы. Величина этого уменьшения составляет порядка 38% и 40% соответственно для M = 2, порядка 29% и 28% соответственно для M = 3. В интересах практических приложений необходимы дальнейшие исследования этого эффекта, в частности, для других вариантов относительного расположения генератора вихрей и основного крыла.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект № 24-21-00230.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dietlein I., Bussler L., Stappert S., Wilken J., Sippel M.* Overview of system study on recovery methods for reusable first stages of future European launchers // CEAS Space J (2024). https://doi.org/10.1007/s12567-024-00557
2. Интернет-ресурс https://www.youtube.com/watch?v=j2BdNDTlWbo
3. *Stanbrook A., Squire L.C.* Possible types of flow at swept leading edges // Aeronaut. Quart. 1964. V. 15. No. 2. P. 72–82.
4. *Башкин В.А.* Экспериментальное исследование обтекания плоских треугольных крыльев при числе M = 5 в диапазоне углов атаки от 0 до 70° // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 3. С. 102–108.
5. *Squire L.C.* Flow regimes over delta wings of supersonic and hypersonic speeds // Aeronaut Quart. 1976. V. 27. No. 1. P. 1–14.
6. *Боровой В.Я., Иванов Б.А., Орлов А.А., Харченко В.Н.* Исследование обтекания сверхзвуковым потоком крыльев различной формы в плане методом лазерного ножа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1793.
7. *Келдыш В.В., Лапина Н.Г.* Экспериментальное исследование течения в окрестности треугольных крыльев с острой и закругленной передней кромкой при сверхзвуковых скоростях // Труды ЦАГИ. 1980. Вып. 2074.
8. *Майкапар Г.И.* Отрывные течения у подветренной стороны треугольного крыла и тела вращения в сверхзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ. 1982. Т. 13. № 4. С. 22–33.
9. *Wood R.M., Miller D.C.* Lee side flow over delta wings at supersonic speeds // J. Aircraft. 1984. V. 21. P. 680–686.
10. *Szodruch J.G., Peake D.J.* Leeward flow over delta wings at supersonic speeds // Rep. NASA TM. 1980. No. 81187.
11. *Seshadri S.N., Narayan K.Y.* Possible types of flow on lee-surface of delta wing at supersonic speeds // Aeronaut. J. 1988. No. 5. P. 185–199.
12. *Бродецкий М.Д., Краузе Э., Никифоров С.Б., Павлов А.А., Харитонов А.М., Шевченко А.М.* Развитие вихревых структур на подветренной стороне треугольного крыла // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 2. С. 68–80.
13. *Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Ин-т компьютерных исслед., 2005. 503 с. ISBN 5-93972-397-7.
14. *Luckring J.M., Rizzi A.* Prediction of concentrated vortex aerodynamics: Current CFD capability survey // Progress in Aerospace Sciences. 2024. V. 147. 100998. https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2024.100998
15. *Воеводин А.В., Судаков Г.Г., Шаповалов Г.К.* Дифракция вихря на стреловидном крыле // Механика жидкости и газа. 1998. № 6. С. 98–105.
16. *Борисов В.Е., Давыдов А.А., Кудряшов И.Ю., Луцкий А.Е.* Программный комплекс ARES для расчета трехмерных турбулентных течений вязкого сжимаемого газа на высокопроизводительных вычислительных системах // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019667338. 23.12.2019.
17. *Борисов В.Е., Константиновская Т.В., Луцкий А.Е.* Численное моделирование влияния сверхзвуковых вихревых структур на теплообмен на несущих поверхностях летательных аппаратов // Изв. РАН. МЖГ. 2024. № 5. С. 86–95.
18. Вычислительный комплекс K-60. https://www.kiam.ru/MVS/resourses/k60.html
19. *Holzäpfel F., Misaka T., Hennemann I.* Wake-Vortex Topology, Circulation, and Turbulent Exchange Processes // AIAA Paper 2010–7992. AIAA Atmospheric and Space Environments Conference, Toronto, Ontario, Canada, 2–5 August 2010, 16 p.
20. *Зудов В.Н., Пимонов Е.А.* Взаимодействие продольного вихря с наклонной ударной волной // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 4. С. 10–21.
21. *Settles G.S., Cattafesta L.* Supersonic shock wave/vortex interaction. Pen State Univ. 1993. NASA-CR-192917. P. 43.
22. *Magri V., Kalkhoran Iraj M.* Numerical investigation of oblique shock wave/vortex interaction // Computers & Fluids. 2013. 86. P. 343–356.
23. *Голубев А.Г., Епихин А.С., Калугин В.Т., Луценко А.Ю., Москаленко В.О., Столярова Е.Г., Хлупнов А.И., Чернуха П.А.*; под ред. В.Т. Калугина. Аэродинамика: учебник для вузов. В. Т. 2-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 607 с. ISBN: 978-5-7038-4428-1
24. *Гайфуллин А.М.* Вихревые течения. Наука, 2015. 319 с. ISBN 978-5-02-039128-4.

25. *Luckring J.M.* The discovery and prediction of vortex flow aerodynamics // The Aeronautical Journal. 2019. V. 123. No. 1264. P. 729–803.
26. *Imai G., Fujii K., Oyama A.* Computational Analyses Of Supersonic Flows Over A Delta Wing At High Angles Of Attack // ICAS 2006, 25th Congress of International council of the Aeronautical Science, 2006, Hamburg, Germany. Paper ICAS2006-2.5S

## The Effect of the Delta Wing Vortex System on the Flow around Lifting Surfaces

**© 2025 V. E. Borisov, T. V. Konstantinovskaya*, and A. E. Lutskii**

*Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia*

**e-mail: konstantinovskaya.t.v@gmail.com*

The vortex structures formed behind a delta wing in supersonic flow are considered. The dependence of these structures on the angle of attack and the oncoming flow Mach number is studied, together with their effect on the aerodynamic properties of a downstream straight wing. The regimes with M = 2 and 3 and $\alpha = 10°$, 14°, and 20° are considered. The numerical data are obtained using the hybrid multiprocessor supercomputer K-60 system in the Common Use Center of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences.

*Keywords:* supersonic flow, delta wing, vortex system of a delta wing, secondary vortices, aerodynamic parameters of a wing

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 120–134

УДК 533.6.011.5

# СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЬЮТОНА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

**© 2025 г. С. А. Таковицкий***

*Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского, Жуковский, Россия*

**e-mail: c.a.t@tsagi.ru*

Поступила в редакцию 07.03.2025 г.
После доработки 21.03.2025 г.
Принята к публикации 21.03.2025 г.

Исследовано влияние на аэродинамическое сопротивление тела его усечения на передний торец или кромку. В первом случае форма поперечных сечений (круглая, эллиптическая, ромбовидная) не изменяется, а их площадь определяется степенной зависимостью от продольной координаты. Во втором случае, форма поперечных сечений изменяется от отрезка в начальном сечении до круга в конечном сечении. Построенные тела имеют одинаковую длину и площадь основания. Сопротивление вычислялось с помощью формулы Ньютона для коэффициента давления.

*Ключевые слова:* тело с торцом и кромкой, сопротивление, формула Ньютона

**DOI:** 10.31857/S1024708425030112

Решение задачи Ньютона, первоначально сформулированной для осесимметричных тел [1–3], оказалось весьма продуктивным при исследовании пространственных конфигураций. Теоретически обосновано, численно и экспериментально подтверждено уменьшение сопротивления у тел со звездообразной формой поперечного сечения [4–11]. Тела имеют вогнутую поверхность, лучи стыкуются друг с другом непосредственно или через дуги окружности. Исследованы варианты с вогнутыми, плоскими и выпуклыми боковыми гранями лучей.

С целью реализации положительных свойств неосесимметричных тел и обеспечения плавного сопряжения с другими элементами, в формулировку задачи введено дополнительное ограничение, фиксирующее форму основания. Первые результаты в этом направлении, подтвердившие возможность уменьшения сопротивления по сравнению с конусом равного удлинения, были получены для носовых частей, примыкающих к осесимметричному корпусу [12]. В начальном сечении тела представлялись набором отрезков одинаковой длины с началом на продольной оси. Отрезки делят тело на сектора, в каждом из которых боковая поверхность образуется набором отрезков, соединяющих точки отрезка в начальном сечении с точками дуги окружности в конечном сечении. Форма получаемой при этом линейчатой поверхности, а значит и сопротивление тела, зависят от выбранного закона формирования пар точек — концов отрезка. Отметим, что только в простейшем случае, при двух отрезках (которые складываются в один отрезок) в начальном сечении, тело имеет выпуклую поверхность.

Исследования тел, не имеющих вогнутые участки поверхности, показали, что минимальным сопротивлением обладают тела образованные треугольными элементами наклонных плоскостей и линейчатых поверхностей [13–16]. При малых значениях удлинения оптимальные тела имеют передний торец в форме правильного многоугольника. При средних и больших значениях удлинения, тело представляется отрезком в начальном поперечном сечении. Необходимо подчеркнуть, что предложенные в [12] тела обладают основными чертами оптимальных тел: имеют переднюю кромку, треугольную и трапециевидную форму при виде сбоку и сверху. Исследование близких к оптимальным по сопротивлению тел продолжено в [17]. При этом расчет аэродинамических характеристик на основе формулы Ньютона дополнен моделированием формирующегося около тела течения невязкого нетеплопроводного совершенного газа в рамках уравнений Эйлера.

Проведенные исследования демонстрируют пологость минимума, возможность построения множества тел, имеющих близкие значения сопротивления и, при этом, отличающихся по форме. Для подробного

анализа характеристик, в частности, в диапазонах предельно малых и предельно больших значений удлинения, важно построить близкие к оптимальным тела, сопротивление которых представляется аналитической зависимостью от геометрических параметров. В качестве такого тела предлагается рассмотреть конус, усеченный двумя наклонными плоскостями. Поверхность тела разбивается на два плоских и два конических элемента, на которых давления имеет постоянное значение. Второй вариант близкого к оптимальному тела представляет тело с эллиптическими поперечными сечениями, у которого отсутствуют плоские участки поверхности. Учитывая отсутствие торца у тела с передней кромкой и важность его наличия для уменьшения сопротивления тел малого и среднего удлинения, дальнейшее развитие получили исследования осесимметричных и неосесимметричных тел со степенным законом изменения площади поперечных сечений в продольном направлении [18, 19].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью исследования является сопоставление аэродинамического сопротивления тел, имеющих одинаковое удлинение и отличающихся формой поперечных сечений. Тела обтекаются при нулевом угле атаки, т. е. скорость направлена вдоль продольной оси тела. Рассматривается составляющая сопротивления, обусловленная действием сил давления, действие силы трения не учитывается. Без потери общности анализа принято, что длина тела равна единице $L = 1$.

Сопоставление аэродинамических характеристик проводится для пространственных тел, симметричных относительно вертикальной и горизонтальной плоскостей и имеющих основание в виде круга, эллипса, ромба (рис. 1). В начальном поперечном сечении тела представляются либо точкой (вершиной), либо передним торцом, совпадающим по форме с основанием, либо отрезком (передней кромкой).

У тел с вершиной и торцом форма поперечных сечений сохраняется, изменяется только площадь $S$, для которой принята степенная зависимость от продольной координаты

$$S = S_{\text{мид}}\left\{\left(\frac{S_0}{S_{\text{мид}}}\right)^{1/(2n)} + \left(1 - \left(\frac{S_0}{S_{\text{мид}}}\right)^{1/(2n)}\right)x\right\}^{2n}, \tag{1.1}$$

где $S_0$ — площадь торца, $S_{\text{мид}}$ — площадь основания, $x$ — продольная координата, отсчитываемая от вершины (торца), $n$ — показатель степени.

Основной геометрической характеристикой теля является его удлинение $\lambda$, которое определяется как отношение длины к диаметру основания эквивалентного по площади поперечного сечения тела вращения:

$$\lambda = \frac{1}{2R}, \quad R = \sqrt{\frac{S_{\text{мид}}}{\pi}}. \tag{1.2}$$

Геометрия тел вращения полностью описывается заданием трех параметров: $\lambda$, $n$ и отношения радиуса $r_0$ переднего торца к радиусу $R$ основания

$$\frac{r_0}{R} = \sqrt{\frac{S_0}{S_{\text{мид}}}}.$$

Для описания формы тел с эллиптическим и ромбовидным основанием вводится дополнительный геометрический параметр: $\varepsilon$ — коэффициент сжатия (эллиптичности), который равен отношению габаритных размеров в нормальном и боковом направлениях. Для определенности принято, что сжатие происходит в нормальном направлении. Поэтому большие диагональ ромба и ось эллипса параллельны боковой оси $z$, а меньшие диагональ и ось параллельны вертикальной оси $y$. Соответственно, $\varepsilon \leqslant 1$.

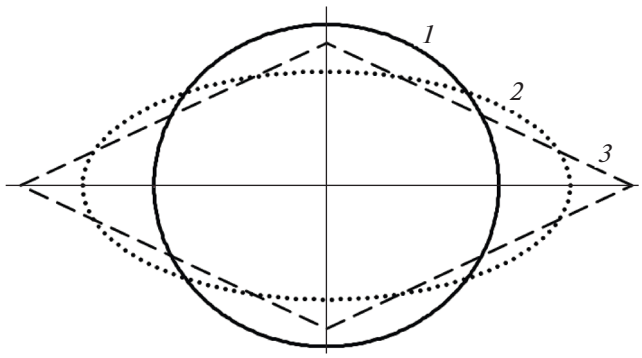



**Рис. 1.** Основания в виде круга (*1*), эллипса (*2*), ромба (*3*).

В отличие от эллиптических тел, исследование тел с ромбовидным основанием ограничено случаем $n = 1$, что уменьшает число геометрических параметров до трех. В этом случае тела имеют форму заостренной или усеченной пирамиды.

Тела с передней кромкой имеют круглое основание. Соответственно, форма поперечных сечений изменяется в продольном направлении, начинаясь отрезком и заканчиваясь кругом. Рассмотрены два варианта: тело, образованное усечением конуса двумя наклонными плоскостями, и тело с эллиптическими поперечными сечениями. В вертикальной плоскости симметрии тела имеют форму клина, а в горизонтальной плоскости симметрии — форму трапеции

Геометрическими параметрами являются удлинение $\lambda$ и отношение полуразмаха передней кромки $z_0$ к радиусу основания $R$. На рис. 2 показаны характерные поперечные сечения тел с $z_0/R = 0.5$ при $x = 0$, $1/3$, $2/3$, $1$ в четверти плоскости, соответствующей $z \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

При вычислении коэффициента сопротивления $c_x$ в качестве характерной площади принята площадь основания $S_{\text{мид}}$. Наряду с простым сопоставлением тел по значениям коэффициента сопротивления, выполнялась также оптимизация по одному или двум геометрическим параметрам. Экстремальные значения параметров, соответствующие минимуму целевой функции (коэффициент сопротивления), определялись методом циклического покоординатного спуска и методом квадратичной интерполяции.

## 2. МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ

Распределение давления на поверхности тела определялось в рамках модели Ньютона.

Согласно модели Ньютона, коэффициент давления на каждом элементе поверхности тела зависит только от угла $\delta$ между вектором скорости набегающего потока и его проекцией на плоскость, касательную к элементу поверхности (если проекцией является точка, то угол равен $\pi/2$):

$$c_p = 2\sin^2\delta. \tag{2.1}$$

Коэффициент давления определяется как отношение разности между статическим давлением в точке обтекаемого тела и статическим давлением в набегающем потоке к скоростному напору.

В случае осесимметричного тела угол $\delta$ однозначно связан с производной $r'$ радиуса по продольной координате. Простейшими телами, которые удобно использовать для сопоставления характеристик, являются конус и усеченный на торец конус.

У конуса производная радиуса постоянна и коэффициент сопротивления конуса $c_{x\_\text{кон}}$ зависит только от удлинения:

$$c_{x\_\text{кон}} = \frac{2}{1 + 4\lambda^2}. \tag{2.2}$$

При малых значениях удлинения можно использовать приближенное соотношение

$$c + x \approx 2 - 8\lambda^2.$$

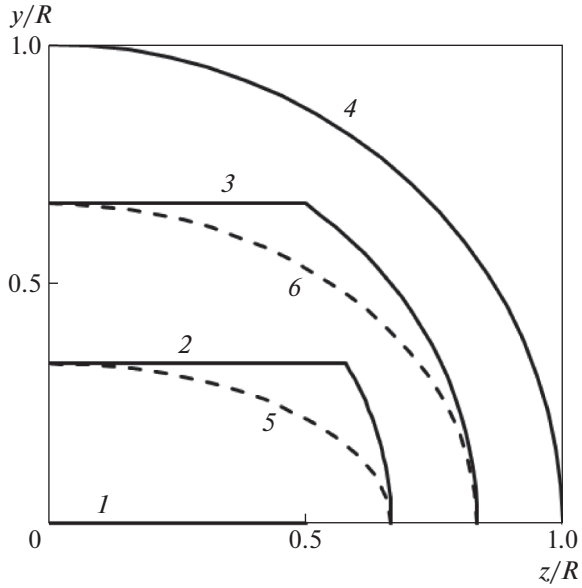



**Рис. 2.** Поперечные сечения тел с $z_0/R = 0.5$ при $x = 0$ (*1*); $x = 1/3$ (*2*, *5*); $x = 2/3$ (*3*, *6*); $x = 1$ (*4*); *1, 2, 3, 4* — усеченный конус; *1, 4, 5, 6* — эллиптическое тело.

Решение для оптимального усеченного конуса впервые было представлено Ньютоном и проанализировано А.Н. Крыловым [1]. Установлено, что усеченный конус имеет меньшее по сравнению с конусом сопротивление:

$$c_x = 2 + \frac{4\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\lambda\left(\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda\right) - 1\right). \tag{2.3}$$

Геометрические параметры усеченного конуса минимального сопротивления связаны соотношением:

$$\frac{r_0}{R} = \left(\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda\right)^2. \tag{2.4}$$

При малых значениях удлинения из (2.3) следует параболическая зависимость:

$$c_x \approx 2 - 4\lambda + 4\lambda^2.$$

В предельном случае $\lambda \gg 1$ коэффициенты сопротивления конуса и усеченного конуса совпадают и убывают обратно пропорционально квадрату удлинения

$$c_x \approx \frac{1}{2\lambda^2}.$$

## 3. СОПОСТАВЛЕНИЕ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Наряду с точным решением задачи Ньютона, известны два приближенных решения, обоснованные для тел большого удлинения. Первое приближенное решение представляет степенные тела, второе решение — усеченные степенные тела. В обоих случаях показатель степени равен 3/4. Выполненный в [18] анализ показал, что при малых значениях удлинения ($\lambda \approx 0.25 \div 0.45$) степенные тела и усеченные степенные тела имеют сопротивление на 24% и 6% больше, чем оптимальное тело Ньютона.

Вне анализа остался вопрос о реализации важного преимущества приближенных решений над точным решением Ньютона, которое заключается в возможности выделения основных геометрических параметров и подстройки их значений под конкретные условия задачи. В рамках модели Ньютона, не учитывающей влияние числа Маха, таким условием является удлинение тела.

У степенного тела единственным параметром, который можно варьировать, является показатель степени $n$. При этом радиус связан с продольной координатой следующим выражением:

$$\frac{r}{R} = x^n. \tag{3.1}$$

При усечении степенного тела появляется второй параметр — относительный размер переднего торца $r_0/R$:

$$\frac{r}{R} = \frac{r_0}{R}\left(1 + \left(\left(\frac{R}{r_0}\right)^{1/n} - 1\right)x\right)^n. \tag{3.2}$$

При необходимости, набор параметров можно изменить. Например, пару параметров, полностью описывающих геометрию тела, образуют производные радиуса, вычисленные в начальном и конечном поперечных сечениях.

Оптимальные значения $n$ и $r_0/R$, соответствующие $c_x = \min$, изменяются при изменении удлинения тела. В диапазоне больших удлинений показатель степени равен $n = 3/4$, а радиус переднего торца определяется решением уравнения четвертой степени [18]

$$\left(\frac{r_0}{R}\right)^{4/3} + \frac{8\lambda}{3\sqrt{3}}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{1/3} - 1 = 0.$$

При уменьшении удлинения оптимальные значения изменятся, поскольку в диапазоне малых и умеренных значений удлинения нарушается корректность допущений, положенных в основу приближенный постановок задачи. Поэтому можно подстроить значения геометрических параметров для любого значения удлинения и таким образом уменьшить сопротивление степенного и усеченного степенного тел.

Следуя (2.1), запишем коэффициент сопротивления тела в виде суммы слагаемых, соответствующих переднему торцу и боковой поверхности:

$$c_x = 8\lambda^2\left[r_0^2 + \int_0^1 \frac{2r'^3}{1+r'^2}\,dx\right]. \tag{3.3}$$

На образующей степенного тела радиус и его производная зависят от $x$ следующим образом:

$$r = \frac{1}{2\lambda}x^n, \qquad r' = \frac{n}{2\lambda}x^{n-1}.$$

Полагая в (3.3) $r_0 = 0$, представляем коэффициент сопротивления степенного тела интегралом, который преобразуется посредством замены переменной:

$$c_x = \frac{n^3}{\lambda^2}\int\limits_0^1 \frac{x^{4n-3}}{1+\left(\frac{n}{2\lambda}x^{n-1}\right)^2}\,dx = 2 - 2n\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^{\frac{2n}{1-n}} \int\limits_0^{\left(\frac{2\lambda}{n}\right)^{\frac{2}{1-n}}} \frac{dz}{1+z^{1-n}}. \tag{3.4}$$

Интеграл (3.4) выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$c_x = 2 - \frac{2n}{1+\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2}\,{}_2F_1\left(1, 1, \frac{2-n}{1-n}, \frac{1}{1+\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2}\right). \tag{3.5}$$

Найденное решение согласуется с известными результатами. При $n = 1$ интеграл (3.5) упрощается и приводит к (2.2).

При малых значениях удлинения ($\lambda \ll 1$) для коэффициента сопротивления справедлива оценка

$$c_x \approx 2 - \frac{8\lambda^2}{n},$$

которая позволяет сделать заключение о предельном уменьшении до нуля оптимального значения показателя степени при уменьшении удлинения.

Решение (3.5) для степенного тела позволяет найти решение для усеченного степенного тела. Рассмотрим продольное сечение усеченного степенного тела (рис. 3). Продолжим степенную образующую до пересечения с продольной осью в точке $x = -x_0$. Таким образом, получаются два степенных тела, длина первого из которых равна $1 + x_0$, а второе тело имеет длину $x_0$.

Удлинения первого ($\lambda_1$) и второго ($\lambda_2$) степенных тел связаны с удлинением $\lambda$ усеченного тела следующими соотношениями:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-x_0}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1-x_0}x_0^{1-n}, \quad x_0 = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{1/n}. \tag{3.6}$$

Сопротивление усеченного степенного тела определяется как разность сопротивлений первого и второго степенных тел с добавлением сопротивления переднего торца. Учитывая отличие площадей оснований тел, получаем окончательное выражение для коэффициента сопротивления усеченного степенного тела

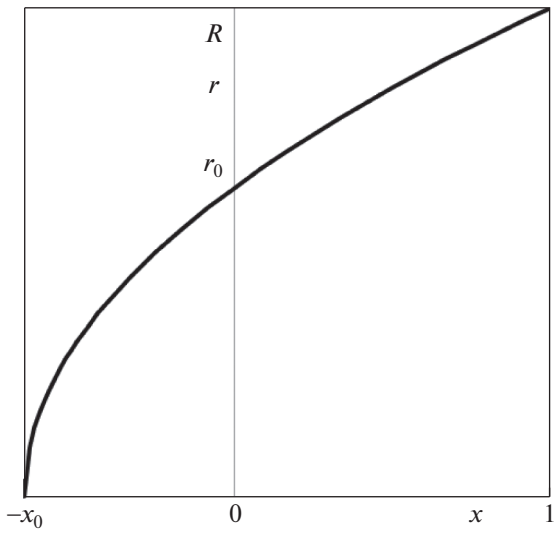



**Рис. 3.** Продольное сечение тела.

$$\begin{cases} c_x = c_{x_1} + \left(2 - c_{x_2}\right)\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^2, \\ c_{x_i} = 2 - \dfrac{2n}{1 + \left(\dfrac{n}{2\lambda_i}\right)^2}\, {}_2F_1\left(1, 1, \dfrac{2-n}{1-n}, \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{n}{2\lambda_i}\right)^2}\right), \\ i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Здесь коэффициенты $c_{x_1}$ и $c_{x_2}$ вычисляются в соответствии с (3.5) для соответствующих значений удлинения.

Корректность предложенного приема подтверждается на примере усеченного конуса. На основании (2.2), (3.6) и (3.7), с учетом $n = 1$, получено:

$$c_x = \frac{2}{1 + \left(\dfrac{2\lambda}{\left(1 - \dfrac{r_0}{R}\right)^2}\right)}\left(1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right) + 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2. \tag{3.8}$$

Минимальное значение коэффициента сопротивления достигается при относительном размере переднего торца, определяемом (2.4). При этом (3.8) сводится к (2.3).

Рассмотрим результаты оптимизации степенных и усеченных степенных тел с целью минимизации коэффициентов сопротивления, определяемых соотношениями (3.5) и (3.7).

На рис. 4 показаны зависимости отношения коэффициентов сопротивления степенного и усеченного степенного тел к коэффициенту сопротивления носовой части Ньютона $c_{x\_N}$ от удлинения. Сплошные линии соответствуют приближенным решениям [18], а штриховые — оптимальным телам. Усеченные степенные тела с оптимальными значениями показателя степени и радиуса торца практически не уступают носовой части Ньютона по значениям коэффициента сопротивления во всем диапазоне удлинений. Отличие не превышает 0.1%. В результате оптимизации показателя степени, сопротивление степенных тел также уменьшается. По значениям сопротивления они приближаются к усеченным степенным телам, полученным в приближенном решении [18].

Рис. 5 представляет сопоставление зависимостей относительного радиуса переднего торца от удлинения для носовой части Ньютона, усеченного степенного тела и усеченного конуса.

Оптимальные усеченные степенные тела и носовая часть Ньютона имеют практически одинаковые размеры торца. С ростом удлинения усеченный конус удаляется от оптимальных тел по данному геометрическому параметру. Наоборот, усеченное степенное тело, соответствующее приближенному решению, приближается к оптимальным телам при больших значениях удлинения.

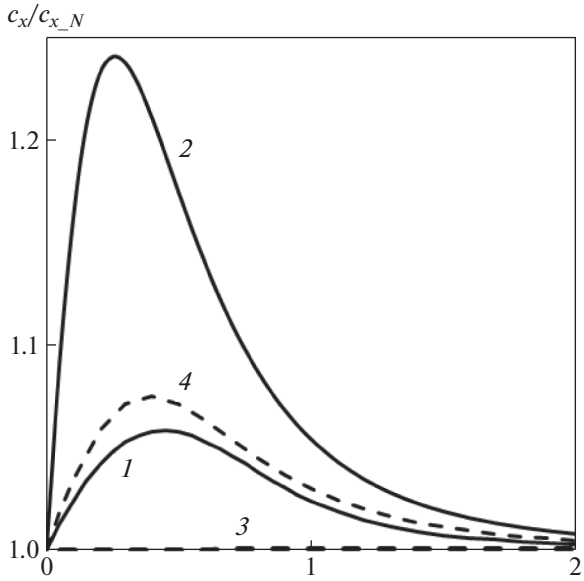



**Рис. 4.** Сопротивление усеченного степенного тела (*1, 3*), степенного тела (*2, 4*) по отношению к сопротивлению носовой части Ньютона $c_{x\_N}$: *1* и *2* — тела с теоретическими значениями геометрических параметров, *3* и *4* — тела с оптимальными значениями геометрических параметров.

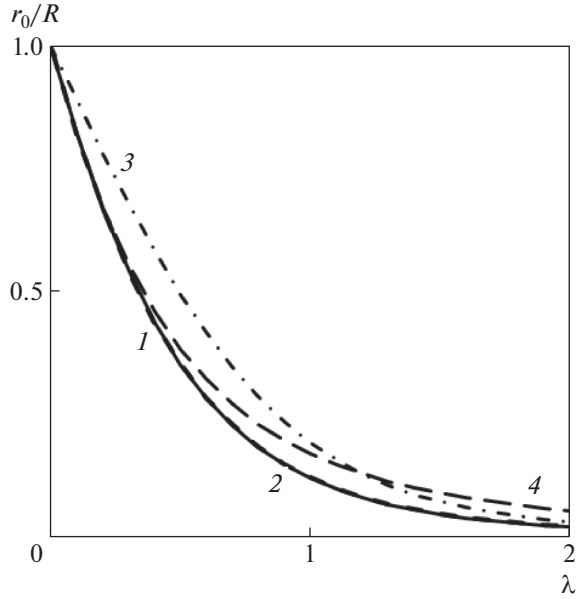



**Рис. 5.** Отношение радиусов торца и основания в зависимости от удлинения: *1* — носовая часть Ньютона, *2* — оптимальное усеченное степенное тело, *3* — усеченное степенное тело (приближенное решение), *4* — усеченный конус.

Отмеченная особенность объясняется тем, что в диапазоне больших значений удлинения относительный размер торца оптимальных тел убывает пропорционально $\lambda^{-3}$. В свою очередь, на основании (2.4) для геометрических параметров усеченного конуса при $\lambda \gg 1$ справедлива оценка

$$\frac{r_0}{R} = \frac{1}{4\lambda^2}.$$

По значениям показателя степени степенные тела сопоставлены на рис. 6. При предельном увеличении удлинения оптимальные значения показателя степени стремятся к результату приближенного решения — $n = 0.75$. Для тел, не имеющих торца, в диапазоне малых значений удлинения получена близкая к линейной зависимость $n$ от $\lambda$, указывающая на стремление к $n = 0$ при $\lambda = 0$. Показатель степени усеченного тела также монотонно возрастает с ростом удлинения. При этом, в диапазоне малых значений $\lambda$ отмечено ослабление зависимости коэффициента сопротивления от $n$, что обусловлено увеличением радиуса торца и, следовательно, увеличением его вклада в суммарное сопротивление. На рис. 6 штриховыми линиями ограничен диапазон изменения показателя степени, в котором относительное изменение коэффициента сопротивления не превышает 0.01%. При приближении удлинения к нулю этот диапазон резко расширяется.

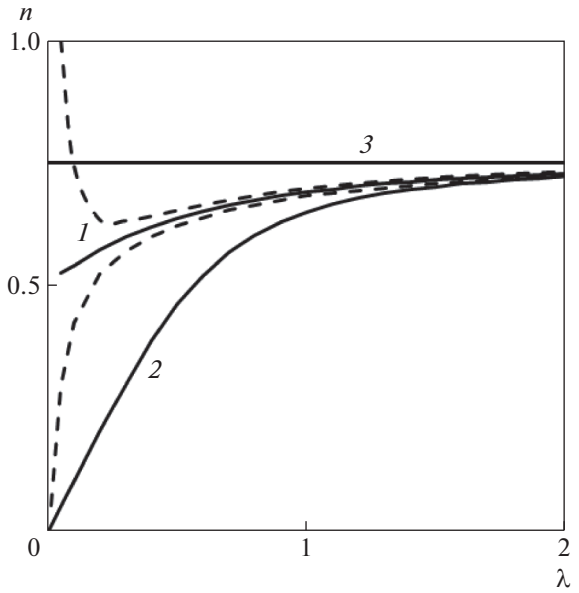



**Рис. 6.** Показатель степени в зависимости от удлинения: *1* — усеченное степенное тело, *2* — степенное тело, *3* — приближенное решение, *4* — граница, соответствующая увеличению коэффициента сопротивления на 0.01%.

Полученные результаты полностью согласуются с результатами исследования усеченных степенных тел в рамках модели Эйлера [20], что подтверждает близость этих тел к оптимальным телам, как по геометрическим характеристикам, так и по значениям коэффициента сопротивления, в диапазоне сверхзвуковых и больших сверхзвуковых скоростей.

## 4. УСЕЧЕННЫЕ ТЕЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И РОМБОВИДНОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Следуя приему, реализованному при определении коэффициента сопротивления усеченного степенного тела с круглым основанием, получим соотношения для расчета коэффициентов сопротивления неосесимметричных тел, затупленных по торцу. В качестве исходного материала будем использовать результаты исследования тел, не имеющих переднего торца [19].

Сопротивление усеченного тела разбивается на составляющие, обусловленные обтеканием торца и боковой поверхности, вклад которой определяется как разность сопротивлений двух тел без торца. Удлинения достраиваемых тел зависят от удлинения усеченного тела, показателя степени, относительного размера переднего торца.

Коэффициент сопротивления пирамиды с ромбовидным основанием определяется соотношением [19]

$$c_x = \frac{2}{1 + 8\lambda^2 \dfrac{\varepsilon + 1/\varepsilon}{\pi}}. \tag{4.1}$$

Следуя (3.6) и (3.7) с использованием (4.1), получаем выражение для коэффициента усеченной пирамиды

$$c_x = \frac{2}{1 + 8\lambda^2 \dfrac{\varepsilon + 1/\varepsilon}{\pi\left(1 - \dfrac{r_0}{R}\right)^2}} \left(1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right) + 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2. \tag{4.2}$$

Соотношения (3.8) и (4.2) совпадают при введении для усеченной пирамиды условного удлинения

$$\lambda_{\text{усл}} = \lambda\sqrt{\frac{2\,(\varepsilon + 1/\varepsilon)}{\pi}}. \tag{4.3}$$

Эта особенность позволяет установить экстремальное значение для относительного размера торца и соответствующее минимальное значение коэффициента сопротивления усеченной ромбовидной пирамиды, используя ранее полученные результаты (2.3) и (2.4) для усеченного конуса

$$\begin{cases} \dfrac{r_0}{R} = \left(\sqrt{1 + \lambda_{\text{усл}}^2} - \lambda_{\text{усл}}\right)^2, \\ c_x = 2 - 4\lambda_{\text{усл}}\left(\sqrt{1 + \lambda_{\text{усл}}^2} - \lambda_{\text{усл}}\right). \end{cases} \tag{4.4}$$

Аналогично определяются оптимальный относительный размер торца и минимальное сопротивление усеченной правильной пирамиды с многоугольным основанием. Для пирамиды с острой вершиной и $k$-угольным основанием выполняется соотношение [19]

$$c_x = \frac{2}{1 + 4\lambda^2 \dfrac{k}{\pi}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{k}}.$$

Отсюда, например, для усеченного тетраэдра получается

$$\begin{cases} \lambda_{\text{усл}} = \lambda\sqrt{\dfrac{3}{\pi}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}}, \\ \dfrac{r_0}{R} = \left(\sqrt{1 + \lambda_{\text{усл}}^2} - \lambda_{\text{усл}}\right)^2, \\ c_x = 2 - 4\lambda_{\text{усл}}\left(\sqrt{1 + \lambda_{\text{усл}}^2} - \lambda_{\text{усл}}\right). \end{cases}$$

В [19] установлено, что коэффициент сопротивления эллиптического конуса монотонно уменьшается при уменьшении коэффициента сжатия

$$c_x = \frac{2}{\sqrt{1+4\lambda^2\varepsilon}\sqrt{1+\dfrac{4\lambda^2}{\varepsilon}}}.$$

Соответственно коэффициент сопротивления усеченного эллиптического конуса определяется соотношением

$$c_x = \frac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\lambda}{1-r_0/R}\right)^2\varepsilon}\sqrt{1+\dfrac{\left(\dfrac{2\lambda}{(1-r_0/R)}\right)^2}{\varepsilon}}}\left(1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right)+2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2. \tag{4.5}$$

В этом случае минимальное значение коэффициента сопротивления и соответствующий размер торца определяются численно прямой минимизацией функции одного переменного.

Численная оптимизация выполнена и при построении усеченных степенных эллиптических тел, имеющих минимальное сопротивление. При этом варьировались два геометрических параметра: показатель степени и относительный размер торца.

В [19] для степенного эллиптического тела получено выражение с использованием гипергеометрической функции Аппеля

$$c_x = \frac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\lambda}{n}\right)^2\varepsilon}\sqrt{1+\dfrac{\left(\dfrac{2\lambda}{n}\right)^2}{\varepsilon}}}F_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{1-n},\frac{1}{1+\left(\dfrac{n}{2\lambda}\right)^2\varepsilon},\frac{1}{1+\dfrac{\left(\dfrac{n}{2\lambda}\right)^2}{\varepsilon}}\right). \tag{4.6}$$

На основании (4.6), для определения коэффициента сопротивления усеченного степенного эллиптического тела устанавливаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} c_x = c_{x_1} + \left(2 - c_{x_2}\right)\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^2, \\ c_x = \dfrac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\lambda_i}{n}\right)^2\varepsilon}\sqrt{1+\dfrac{\left(\dfrac{2\lambda_i}{n}\right)^2}{\varepsilon}}}F_1\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{1-n},\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{n}{2\lambda_i}\right)^2\varepsilon},\dfrac{1}{1+\dfrac{\left(\dfrac{n}{2\lambda_i}\right)^2}{\varepsilon}}\right). \\ \lambda_1 = \dfrac{\lambda}{1-\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^{1/n}}, \quad \lambda_2 = \dfrac{\lambda}{1-\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^{1/n}}\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^{\frac{1-n}{n}}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Результаты оптимизации на основании (4.7) при заданных значениях удлинения и коэффициента эллиптичности представлены в табл.1. Для каждой пары $\lambda$ и $\varepsilon$ даны соответствующие экстремальные значения показателя степени $n$, относительного размера торца $r_0/R$ и коэффициента сопротивления $c_x$. При $\varepsilon = 1$ для вычисления коэффициента сопротивления вместо (4.7) можно использовать (3.7).

На рис. 7 для $\lambda = 0.5$ показаны зависимости $c_x/c_{x\_\text{кон}}$ от $\varepsilon$ для усеченного эллиптического конуса (4.5), степенного эллиптического тела (4.6), усеченного степенного эллиптического тела (4.7), усеченной пирамиды с ромбовидным основанием (4.4). Отметим, что пирамидальные тела обеспечивают достижение меньших значений сопротивления по сравнению с эллиптическими телами. При $\varepsilon > 0.3$ коэффициенты сопротивления усеченных конуса и степенного тела близки, что обусловлено существенным вкладом торца в суммарное сопротивление и ослаблением влияния показателя степени в диапазоне малых значений удлинения. Характеристики степенных тел с торцом и без торца сближаются при уменьшении коэффициента эллиптичности. Это объясняется тем, что согласно (3.6) при уменьшении относительного радиуса торца

**Таблица 1.** Результаты оптимизации усеченных степенных эллиптических тел

| λλ | ε = 1 | ε = 2/3 | ε = 1/2 | ε = 1/3 | ε = 1/4 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $n$<br>$r_0/R$<br>$c_x$ | $n$<br>$r_0/R$<br>$c_x$ | $n$<br>$r_0/R$<br>$c_x$ | $n$<br>$r_0/R$<br>$c_x$ | $n$<br>$r_0/R$<br>$c_x$ |
| 0.5 | 0.637<br>0.352<br>0.750 | 0.632<br>0.342<br>0.741 | 0.625<br>0.323<br>0.724 | 0.615<br>0.280<br>0.685 | 0.611<br>0.242<br>0.647 |
| 1.0 | 0.690<br>0.123<br>0.321 | 0.688<br>0.119<br>0.318 | 0.682<br>0.111<br>0.311 | 0.672<br>0.0946<br>0.297 | 0.665<br>0.0804<br>0.283 |
| 2.0 | 0.727<br>0.0239<br>0.0982 | 0.726<br>0.0233<br>0.0978 | 0.723<br>0.0222<br>0.0969 | 0.717<br>0.0199<br>0.0948 | 0.711<br>0.0176<br>0.0927 |
| 4.0 | 0.743<br>0.00344<br>0.0259 | 0.742<br>0.00341<br>0.0259 | 0.741<br>0.00334<br>0.0258 | 0.739<br>0.00312<br>0.0256 | 0.736<br>0.00289<br>0.0254 |

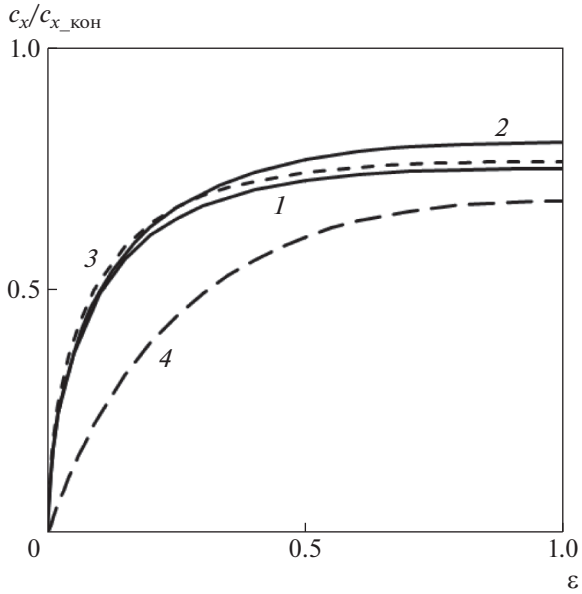



**Рис. 7.** Отношение коэффициентов сопротивления усеченного степенного эллиптического тела *1*, степенного эллиптического тела *2*, усеченного эллиптического конуса *3*, усеченной пирамиды с ромбовидным основанием *4* к коэффициенту сопротивления кругового конуса в зависимости от коэффициента сжатия при λ = 0.5.

удлинения достраиваемых тел стремятся к предельным значениям $\lambda_1 \to \lambda$ и $\lambda_2 \to 0$. Соответственно, из (3.7) следует, что $c_{x_2} \to 2$ и $c_x \to c_{x_1}$.

Геометрические параметры построенных тел сопоставлены на рис. 8. Показатель степени у усеченного тела больше, чем у тела без торца, и слабее зависит от коэффициента сжатия. При малых значениях ε показатели степени сближаются и стремятся к предельному значению $n = 2/3$, установленному в [19].

При увеличении вытянутости основания радиус переднего торца монотонно уменьшается. Нулевому значению ε соответствует нулевое значение радиуса торца. Для усеченной ромбовидной пирамиды на основании (4.3), (4.4) установлено, что при $\varepsilon \lll 1$ относительный радиус торца линейно зависит от ε:

$$\frac{r_0}{R} \approx \frac{\pi}{8\lambda^2}\varepsilon.$$

Сопоставление тел, имеющих и не имеющих передний торец, по значениям сопротивления в разрезе ε = 1 представлено на рис. 9. Для полного охвата диапазона изменения удлинения на оси абсцисс используются две шкалы: при $\lambda < 1$ откладывается значение λ, при $\lambda > 1$ откладывается значение $2-1/\lambda$. Для всех тел, кроме пирамиды с квадратным основанием, в окрестности $\lambda = 0.4 \div 0.5$ получено наибольшее относительное

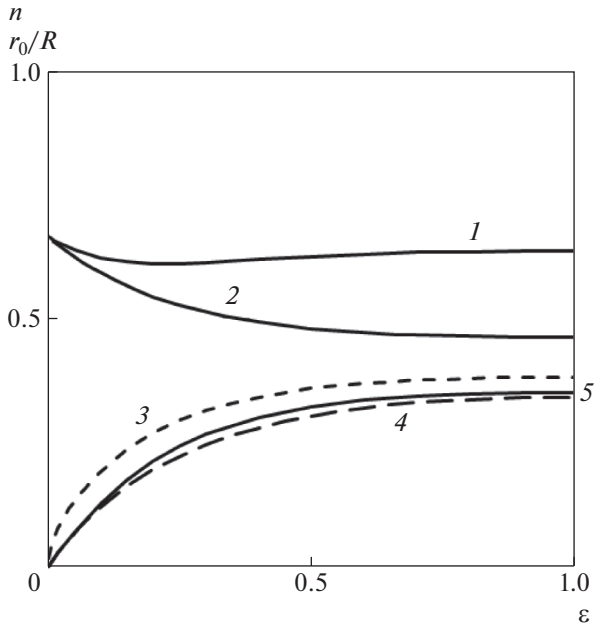



**Рис. 8.** Изменение показателя степени и относительного радиуса торца усеченного степенного эллиптического тела *1* и *5*, степенного эллиптического тела *2*, усеченного эллиптического конуса *3*, усеченной пирамиды с ромбовидным основанием *4* в зависимости от коэффициента сжатия при $\lambda = 0.5$: показатель степени — *1*, *2*; относительный радиус торца — *3*, *4*, *5*.

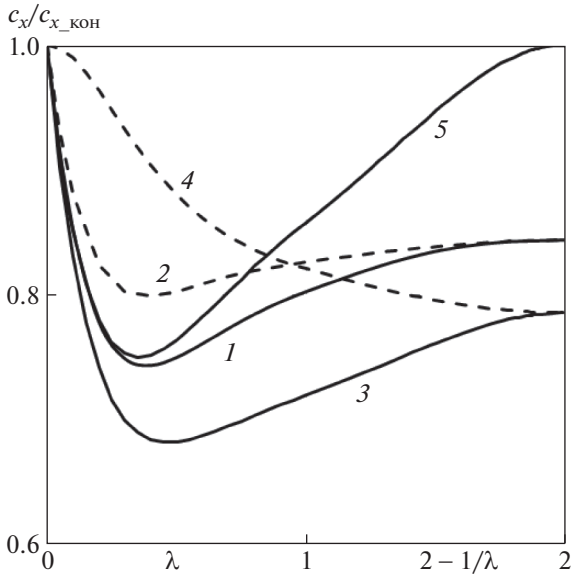



**Рис. 9.** Отношение коэффициентов сопротивления усеченного степенного тела *1*, степенного тела *2*, усеченной пирамиды с квадратным основанием *3*, пирамиды с квадратным основанием *4*, усеченного конуса *5*, к коэффициенту сопротивления конуса в зависимости от удлинения.

снижение сопротивления. Уменьшение сопротивления, получаемое посредством затупления тела, наиболее заметно проявляется у конуса и пирамиды. Напомним, что при $\varepsilon = 1$ наименьшее сопротивление среди рассмотренных тел имеет усеченный тетраэдр [19].

## 5. ТЕЛА С ПЕРЕДНЕЙ КРОМКОЙ И КРУГЛЫМ ОСНОВАНИЕМ

Оптимизационные исследования неосесимметричных выпуклых тел с круглым основанием выделили ряд геометрических особенностей, подробно изложенных в [17]. В широком диапазоне удлинений ($\lambda > 0.59$) оптимальные тела имеют две плоскости симметрии, в проекциях на которые представляются клином и трапецией, и в начальном поперечном сечении сводятся к передней кромке, которая служит основанием для двух треугольных по форме плоских элементов поверхности, касающихся круглого основания. При меньших значениях удлинения оптимальные тела затуплены по торцу.

С другой стороны, были построены тела, которые незначительно уступают оптимальным телам по значениям сопротивления. На примере тел, исследованных в [12], установлено, что отсутствие плоских элементов не оказывает существенного влияния на сопротивление. Это позволяет сделать предположение о пологости минимума и существовании тел, отличающихся по форме от оптимальных тел (и друг от друга) и близких к ним по сопротивлению. В частности, можно построить тела, форма которых образована элементами простейших тел и сопротивление которых представляется аналитической зависимостью от геометрических параметров.

Таким телом является усеченный двумя плоскостями конус (рис. 2). Усекающие плоскости перпендикулярны вертикальной плоскости симметрии и симметрично расположены под углом $\delta = \operatorname{arctg}(1/2\lambda)$ к горизонтальной плоскости симметрии. Передняя кромка тела принадлежит прямой, вдоль которой пересекаются плоскости.

Отношение удлинения $\lambda_к$ исходного конуса к удлинению $\lambda$ тела тем больше, чем больше отношение полуразмаха передней кромки $z_0$ к радиусу основания $R$:

$$\lambda_к = \frac{\lambda}{1 - \dfrac{z_0}{R}}. \tag{5.1}$$

Поверхность тела состоит из двух плоских элементов и двух конических элементов. Граница между плоским и коническим элементами описывается соотношением, связывающим боковую и нормальную координаты в четверти пространства, соответствующей их положительным значениям:

$$\frac{z}{R} = \frac{z_0}{R} = \sqrt{1 + 2\left(\frac{R}{z_0} - 1\right)\frac{y}{R} - \left(2\frac{R}{z_0} - 1\right)\left(\frac{y}{R}\right)^2}. \tag{5.2}$$

На основе (5.2) устанавливаем долю площади проекции плоских элементов $S_{пл}$ в площади основания тела:

$$\frac{S_{пл}}{S_{мид}} = \frac{2}{\pi\left(2 - \dfrac{z_0}{R}\right)^{1.5}}\sqrt{\frac{z_0}{R}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{z_0}{R}\right) + \sqrt{\frac{z_0}{R}\left(2 - \frac{z_0}{R}\right)}\left(1 - \frac{z_0}{R}\right)\right). \tag{5.3}$$

При увеличении $z_0/R$ от 0 до 1 доля плоских элементов в сопротивлении тела также увеличивается от 0 до 1.

Коэффициенты давления на плоских и конических элементах определяются удлинениями тела и исходного конуса, соответственно. Используя соотношения (5.1) и (5.3), находим зависимость коэффициента сопротивления от относительного размера полуразмаха передней кромки:

$$c_x = \frac{2}{1 + 4\lambda^2}\frac{S_{пл}}{S_{мид}} + \frac{2}{1 + 4\lambda_к^2}\left(1 - \frac{S_{пл}}{S_{мид}}\right). \tag{5.4}$$

У конуса, соответствующего $z_0/R = 0$, и у усеченного цилиндра, соответствующего $z_0/R = 1$, коэффициенты сопротивления совпадают. Оптимальная длина передней кромки, при которой достигается минимальное значение коэффициента сопротивления, находится численно.

Для сопоставления с конусом следует преобразовать (5.4):

$$c_x = \frac{2}{1 + 4\lambda^2}\left[1 - \frac{\dfrac{z_0}{R}\left(2 - \dfrac{z_0}{R}\right)\left(1 - \dfrac{S_{пл}}{S_{мид}}\right)}{1 + \left(\dfrac{1 - \dfrac{z_0}{R}}{2\lambda}\right)^2}\right]. \tag{5.5}$$

Из (5.5) можно предложить приближенную зависимость коэффициента сопротивления от удлинения для усеченного на кромку конуса:

$$c_x \approx c_{x\_кон}\left(1 - \frac{A}{1 + B/\lambda^2}\right), \quad A = 0.297, \quad B = 0.0844. \tag{5.6}$$

При $\lambda > 1$ относительная погрешность определения коэффициента сопротивления на основе (5.6) не превышает 0.05%.

При построении второго тела сохранились линейные законы возрастания габаритов в плоскостях симметрии по продольной координате. В каждом поперечном сечении тело представлялось эллипсом

(рис. 2). Степень сжатия изменялась от $\varepsilon = 0$ в начальном сечении до $\varepsilon = 1$ в плоскости основания. Плоские элементы на поверхности отсутствуют.

Коэффициент сопротивления эллиптического тела в рамках модели Ньютона определялся численным суммированием нагрузки по треугольным элементам, аппроксимирующим омываемую поверхность. Как и в случае усеченного конуса, для нахождения оптимальной длины передней кромки применялся метод квадратичной аппроксимации целевой функции.

По результатам исследования получена аналогичная (5.6) приближенная зависимость коэффициента сопротивления от удлинения для эллиптического тела

$$c_x \approx c_{x\_\text{кон}}\left(1 - \frac{A}{1 + B/\lambda^2}\right), \quad A = 0.321, \quad B = 0.0965.$$

Результаты исследования представлены на рис. 10 в виде зависимостей отношений коэффициентов сопротивления построенных тел к коэффициенту сопротивления конуса, и соответствующих оптимальных $z_0/R$ от удлинения. На оси абсцисс используются две шкалы: при $\lambda < 1$ откладывается значение $\lambda$, при $\lambda > 1$ откладывается значение $2 - 1/\lambda$. Для сопоставления на фигуру добавлены результаты построения неосесимметричных тел из [12] и [17], и результаты оптимизации усеченного степенного тела на основании (3.7).

По значениям коэффициента сопротивления усеченный на кромку конус близок к телу с линейчатой поверхностью [12]. Эллиптические тела имеют лучшие характеристики и сопоставимы по сопротивлению с телами, построенными в [17]. Например, при $\lambda = 1$ отличие по сопротивлению между эллиптическим телом и усеченным конусом составляет 2.7%. Причина недостаточного снижения сопротивления усеченного конуса, возможно, заключается в наличии конических участков поверхности, которые, согласно [16], неоптимальны.

При этом все тела сильно отличаются по основному геометрическому параметру. Наименьшую относительную длину передней кромки имеют усеченные конуса: $z_0/R < 0.5$ при $\lambda > 0.5$. У тел, рассмотренных в [17], и эллиптических тел отношение $z_0/R$ изменяется в окрестности 0.57 и 0.74, соответственно, при $\lambda > 1$. В [12] представлены результаты для тел с максимальным $z_0/R = 1$.

Отметим, что переход к неосесимметричным формам дает наибольшее снижение сопротивления (до ~20%) в диапазоне больших значений удлинения. При $\lambda < 0.6$ оптимальные осесимметричные тела имеют сопротивление, меньшее по сравнению с построенными неосесимметричными телами. Это согласуется с отмеченным ранее результатом, констатирующим наличие торца у оптимальных неосесимметричных тел при малых значениях удлинения.

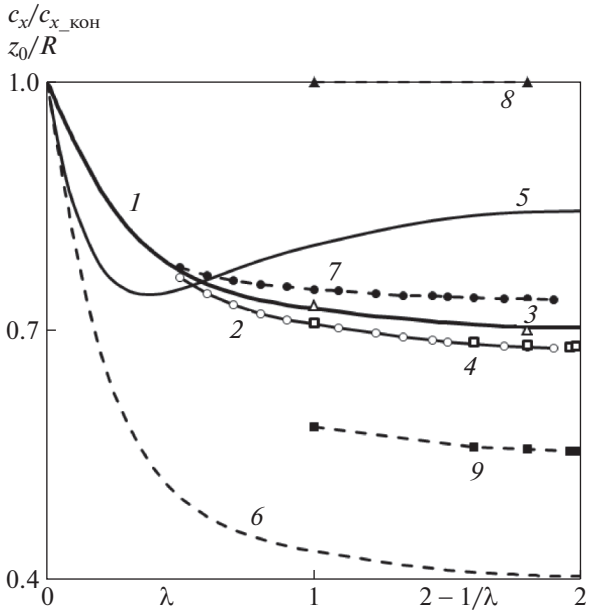



**Рис. 10.** Отношение коэффициентов сопротивления усеченного на кромку конуса *1*, эллиптического тела (*2*, ○), тела из [12] (*3*, △), тела из [17] (*4*, □) усеченного степенного тела *5* к коэффициенту сопротивления конуса и отношение $z_0/R$ усеченного на кромку конуса *6*, эллиптического тела (*7*, ●) тела из [12] (*8*, ▲) тела из [17] (*9*, ■) в зависимости от удлинения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для случая степенной зависимости площади поперечного сечения от продольной координаты предложена процедура определения в рамках модели Ньютона коэффициента сопротивления усеченного по торцу тела, основанная на пересчете соотношений, представляющих коэффициент сопротивления тела, имеющего вершину.

Получены аналитические выражения, в том числе использующие гипергеометрические функции Аппеля и Гаусса, для коэффициента сопротивления затупленных по торцу тел.

Для осесимметричных тел показано, что усеченные степенные тела практически не уступают точному решению задачи Ньютона по значениям коэффициента сопротивления.

Построены близкие к оптимальным неосесимметричные тела, имеющие переднюю кромку и круглое основание. По результатам расчета выполнен анализ зависимости коэффициента сопротивления от удлинения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ньютон Ис.* Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989.
2. *Крайко А.Н.* Задача Ньютона о построении оптимальной головной части обтекаемого тела. История решения // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 734–748.
3. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010.
4. *Гонор А.Л., Черный Г.Г.* Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления / Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 292–305.
5. *Гонор А.Л.* О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. Т. 27. Вып. 1. 1963. С. 185–189.
6. *Гонор А.Л.* Конические тела наименьшего сопротивления в гиперзвуковом потоке газа / ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 383–386.
7. *Гонор А.Л., Крайко А.Н.* Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях / Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 456–492.
8. *Миеле А., Саарис Дж.* Поперечный контур тела минимального полного сопротивления / Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 306–324.
9. *Ведерников Ю.А., Гонор А.Л., Зубин М.А., Остапенко Н.А.* Аэродинамические характеристики звездообразных тел при числах M = 3–5 // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. № 4. 1981. С. 88–93.
10. *Зубин М.А., Лапыгин В.И., Остапенко Н.А.* Теоретическое и экспериментальное исследование структуры сверхзвукового обтекания тел звездообразной формы и их аэродинамических характеристик // Изв. АН СССР, МЖГ. 1982. № 3. С. 34–40.
11. *Таковицкий С.А.* Конические тела с волнообразным поперечным контуром, имеющие минимальное волновое сопротивление // Изв. РАН. МЖГ. 2024. № 1. С. 123–130.
12. *Гусаров А.А., Дворецкий В.М., Иванов М.Я., Левин В.А., Черный Г.Г.* Теоретическое и экспериментальное исследование аэродинамических характеристик пространственных тел // Изв. АН СССР, МЖГ. 1979. № 3. С. 97–102.
13. *Lachand-Robert T. and Peletier M.A.* Newton's problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions // Math. Nachr. 2001. V. 226. P. 153–176.
14. *Buttazzo G. and Frediani A.* A survey on the Newton problem of optimal profiles. Variational Analysis and Aerospace Engineering. Springer, 2009. Chap. 3. P. 33–48.
15. *Lokutsievskiy L.V. and Zelikin M.I.* The analytical solution of Newton's aerodynamic problem in the class of bodies with vertical plane of symmetry and developable side boundary // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2020. 26. 36 p.
16. *Lokutsievskiy L., Wachsmuth G., and Zelikin M.* Non-optimality of conical parts for Newton's problem of minimal resistance in the class of convex bodies and the limiting case of infinite height // arXiv:2009.12128v2 [math.OC]. 2021. 20 p.
17. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Браилко И.А.* Построение пространственной головной части минимального волнового сопротивления при заданных длине и круговом основании // Изв. РАН. МЖГ. 2025. № 1. С. 150–167. В печати.
18. *Таковицкий С.А.* Усеченные степенные тела как результат приближенного решения задачи Ньютона о теле с минимальным сопротивлением // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 5. С. 113–118.
19. *Таковицкий С.А.* Степенные эллиптические тела минимального сопротивления в приближении формулы Ньютона для коэффициента давления // ПММ. 2025. В печати.

20. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 157–162.

# Comparison of Newton's Problem Solutions for Axisymmetric and Non-Axisymmetric Bodies

**© 2025 S. A. Takovitskii**

*Central aerohydrodynamic institute named after prof. N. E. Zhukovsky, Zhukovsky, Russia*

**e-mail: c.a.t@tsagi.ru*

The effect of truncation of a body at the front face or edge on its aerodynamic drag is investigated. In the first case, the shape of the cross sections (circular, elliptical, diamond-shaped) does not change, and their area is determined by a power law dependence on the longitudinal coordinate. In the second case, the shape of the cross sections changes from a segment in the initial section to a circle in the closing section. The constructed bodies have the same length and base area. The drag was calculated using Newton's formula for the pressure coefficient.

*Keywords:* body with face and edge, drag, Newton pressure law

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 135–146

УДК 533.697.5

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КАНАЛЕ ПРИ ВДУВЕ РАДИАЛЬНОЙ СТРУИ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ КОАНДА

**© 2025 г. М. А. Пахомов*, Н. П. Скибина**, В. И. Терехов*****

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия*

*e-mail: pma41976@yandex.ru
**e-mail: uss.skibina@gmail.com
***e-mail: terekhov@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.01.2025 г.
После доработки 07.03.2025 г.
Принята к публикации 16.03.2025 г.

Представлены результаты численного исследования течения в канале при вдуве кольцевой радиальной струи вдоль поверхности Коанда. Для описания движения среды использованы двумерные осесимметричные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (RANS) в сочетании с уравнениями полуэмпирической модели турбулентности “$k$–$\omega$” SST. Проведено исследование влияния полного давления и ширины радиальной струи на распределения скорости и статического давления, описаны изменения локальной структуры, возникающие при до- и сверхкритическом давлении в струе.

*Ключевые слова:* газодинамика, эффект Коанда, эжекция, радиальная сходящаяся струя

**DOI:** 10.31857/S1024708425030123

Изучению закономерностей и механизмов взаимодействия кольцевых струй газа с покоящейся и движущейся средой посвящено большое число работ отечественных и зарубежных авторов. Результаты исследований находят применение в аэрокосмических приложениях, используются для интенсификации тепломассообменных процессов и разработки новых технологических решений.

В качестве отдельного объекта исследований можно выделить струйные течения вблизи криволинейных поверхностей [1, 2]. Данный класс течений, имеющий большой интерес, как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения, фактически представляет собой процесс газодинамического взаимодействия и смешения кольцевых радиальных струй при наличии или отсутствии сносящего потока. Профилированные поверхности часто встречаются в различных элементах технических устройств (лопатки турбомашин, камеры смешения, силовые установки, энергетическое оборудование, профиль крыла и т. д.). Одной из особенностей струйных течений вблизи криволинейных стенок является возникновение эффекта Коанда [3, 4], когда наблюдается присоединение струи к стенке с последующим ее безотрывным течением. Данный эффект применяется в промышленности для уменьшения дымообразования при сжигании продуктов нефтегазодобычи в факельных установках [5–7], в аэродинамике для управления циркуляцией потока на крыле [8–10], управления вектором тяги [11] и морских технологиях для разработки инновационных силовых установок [12–14].

Существует ряд работ, посвященных экспериментальному исследованию течений Коанда, например, посвященных описанию влияния полного давления, ширины струи [1] и температуры [16] на течение струи вблизи криволинейной поверхности. В работе [17] исследовано влияние геометрии прямоугольного сопла и угла выдува струи на возникновение устойчивого течения Коанда, а также приведена визуализация структуры плоского течения на наклонной поверхности. В [18] с помощью продольных вихрей осуществляется деформация осесимметричной струи для интенсификации эффекта Коанда. В работах [5, 19] содержится обширная информация по визуализации структуры внешних течений Коанда.

Доступность вычислительных мощностей позволяет применять методы вычислительной гидрогазодинамики для изучения струйных течений вблизи криволинейных стенок. Так, например, в работе [20] численно

исследуется движение струи газа по искривленной поверхности в диапазоне скорости от 5 до 40 м/с. Авторы [21] провели анализ явления бифуркации в струе, истекающей в канал с внезапным расширением, а в [22] изучено влияние температуры стенки на возникновение и устойчивость эффекта Коанда. Работы [23, 24] посвящены исследованию влияния размеров щели и радиуса кривизны криволинейной поверхности на структуру высокоскоростной струи. В [25–27] с использованием численного моделирования рассматриваются течения в профилированных осесимметричных каналах с подачей кольцевой веерной струи вдоль криволинейной стенки по нормали к оси канала в радиальном направлении.

Радиальные струи с высокими скоростями течения применяются для холодного газодинамического напыления [28, 29]. Аналогичный принцип подачи струи реализован в эжекторе Коанда [30, 31], имеющего более высокую производительность в вакуумных пароструйных насосах [32], системах вентиляции и пылеподавления [33].

Однако, несмотря на обширное практическое применение, в литературе отсутствует описание локальной структуры такого течения. Распределения газодинамических параметров в затопленном пространстве, ограниченном стенкой осесимметричного профилированного канала, изучены недостаточно полно. Такое же заключение можно сделать и о процессе эжекции окружающего воздуха, сопровождающем истечение веерной радиальной струи вдоль криволинейной стенки. В связи с этим целью данной работы является численное исследование течения в осесимметричном канале при подаче радиальной веерной струи по нормали к оси вдоль криволинейной поверхности при наличии эжекции газа из окружающего пространства на входе в канал.

## МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА

Объектом исследования является течение воздуха в камере смешения эжектора Коанда [33], схема которого представлена на рис. 1. В цилиндрический канал с открытыми границами на входе и выходе через кольцевое щелевое сопло шириной $h$ вдувается радиальная струя. Подача струи осуществляется вдоль выпуклой поверхности с радиусом кривизны $R$ = 16 мм. Вход и выход канала сообщаются с атмосферой с температурой и давлением $T_a$ = 293 К и $P_a$ = $10^5$ Па, соответственно. Эжектируемый на входе в камеру смешения газ из окружающей среды создает течение в осевом направлении, так что вдуваемая струя после ее разворота развивается в спутном потоке. Расход эжектируемого воздуха заранее был неизвестен, и определялся в процессе численного расчета. Ввиду пренебрежимо малых потерь давления при течении газа в щелевом сопле, распределение газодинамических параметров в нем принято равномерным на срезе щели (*3*).

В численном исследовании рассмотрены два режима истечения: докритический (при $P/P_a$ < 1.89 [34], где $P$ — полное давление в струе), когда $M$ < 1, и сверхкритический ($P/P_a$ > 1.89), при числе Маха в струе M > 1. В каждом случае режим течения турбулентный, а полная температура в струе $T$ = 294 К. Ширина щели $h$ в расчетах принимала два значения $h$ = 0.25 и 0.5 мм. Диаметр цилиндрического участка канала составлял $D$ = 51.5 мм.

Для математического моделирования течения газа в профилированном цилиндрическом канале применяется RANS-подход. Движение вязкого теплопроводного газа описывается системой нестационарных осредненных по Рейнольдсу осесимметричных уравнений Навье–Стокса

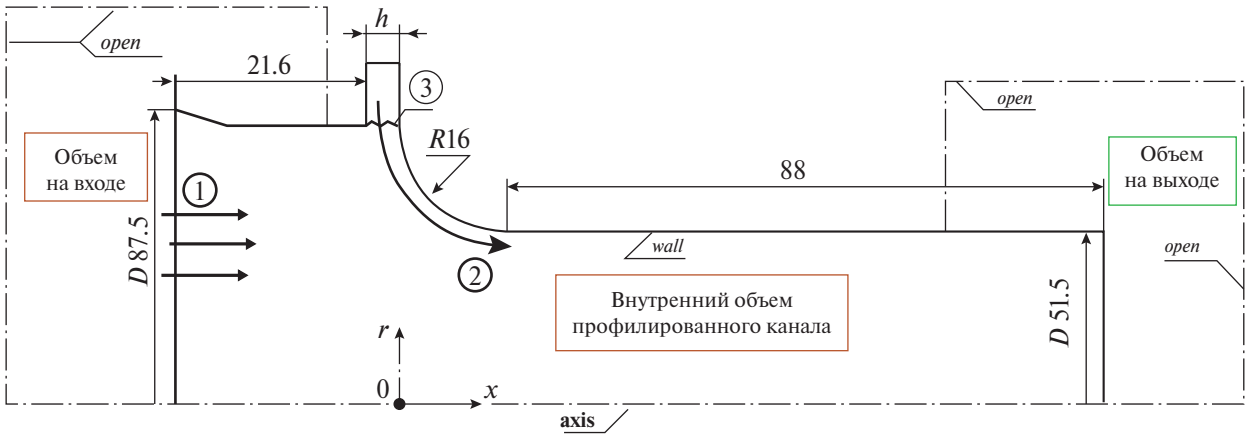



**Рис. 1.** Схема осесимметричного канала с радиальной кольцевой струей. Все размеры в мм, не в масштабе. *1* — направление движения эжектируемого газа, *2* — радиальная струя, *3* — кольцевая щель.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \\ \dfrac{\partial (\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \times \mathbf{U}) = -\nabla P + \nabla \tau, \\ \dfrac{\partial (\rho h_{tot})}{\partial t} - \dfrac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} h_{tot}) = \nabla \cdot \left(\lambda_{eff} \nabla T\right) + \nabla \cdot (\mathbf{U} \cdot \tau), \\ P = \rho \dfrac{R}{M} T, \end{cases}$$

где $\tau = \mu_{eff}\left(\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T\right) - \frac{2}{3}\delta \nabla \cdot \mathbf{U}$, $\mu_t = \rho \frac{k}{\omega}$, $\lambda_{eff} = \lambda + \frac{c_p}{\mathrm{Pr}_t}$, $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$, $h_{tot} = h + \frac{\mathbf{U}^2}{2}$, $\rho$ — плотность газа, $\mathbf{U} = \{u, v\}$ — вектор скорости с продольной ($u$) и радиальной ($v$) компонентами, $P$ — давление, $\tau$ — тензор вязких напряжений, $h_{tot}$ — полная энтальпия, $\lambda_{eff}$ — эффективная теплопроводность, $T$ — температура, $M$ — молекулярная масса, $R$ — универсальная газовая постоянная, $\mu_{eff}$ — эффективная вязкость, $k$ — кинетическая энергия турбулентности, $\omega$ — удельная скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, $c_p$ — удельная теплоемкость, $\mathrm{Pr}_t$ — турбулентное число Прандтля, $\mu$ — молекулярная вязкость, $\mu_t$ — турбулентная вязкость, $h$ — энтальпия.

В рамках численного исследования рассматривается широкий диапазон давлений, поэтому в качестве уравнения состояния используется уравнение Менделеева–Клапейрона. Зависимость $\mu(T)$ учитывается в соответствии с формулой Сазерленда. Для моделирования турбулентности применяется двухпараметрическая модель турбулентности “$k$–$\omega$” SST [35]. Выбор модели турбулентности произведен на основании рекомендаций из работ по моделированию пристеночных течений при наличии эффекта Коанда [36, 37]. Численное решение осесимметричной задачи осуществляется методом конечных объемов, реализованным в вычислительном комплексе ANSYS Fluent 2020R2, с использованием решателя по плотности (density-based) и неявной схемы второго порядка точности [38]. Для расчета конвективных потоков применена схема Roe-FDS [38].

Расчетная область для численного решения задачи включает в себя внутренний объем канала, ко входу и выходу из которого присоединены для фрагмента окружающего затопленного пространства (см. рис. 1). Расчетная область содержит открытые границы (open), твердые стенки (wall), ось (axis) и входную границу (inlet), совпадающую со срезом щелевого сопла *3*. Расчетная область имеет подобный вид для решения задачи с разными значениями ширины щели $h$. В каждом случае область покрывается неравномерной конечно-разностной сеткой, состоящей из прямоугольных ячеек. Для разрешения пограничного слоя производится сгущение сетки к стенкам канала ($y^+ < 1$).

Проверка сеточной сходимости численного решения проводилась на серии расчетов с использованием конечно-разностных сеток с числом элементов: $0.3 \cdot 10^6$, $0.5 \cdot 10^6$ и $0.9 \cdot 10^6$. Для отслеживания сходимости численного расчета контролируется поток массы через входное и выходное сечения профилированного канала, а также отслеживается баланс массы через границы типа inlet и open. Численное решение считается сошедшимся и установившимся, когда массовый расход на входе в канал и на выходе из него имеет постоянное значение, т. е. отсутствуют осцилляции скорости и давления.

Ввиду того, что в численном исследовании рассматривается широкий диапазон полного давления в струе, при численном решении производилась адаптация расчетной сетки для получения корректного разрешения течения в областях с большими градиентами давления. Для примера на рис. 2а представлены изолинии статического давления вблизи входной границы (inlet), через которую струя втекает в затопленное пространство вдоль криволинейной поверхности, и фрагмент структурированной расчетной сетки до адаптации. На рис. 2б показан тот же участок расчетной сетки, но уже после адаптации по градиенту давления. После адаптации расчетной сетки число ячеек увеличивалось до $\sim 1.5 \cdot 10^6$. Такой подход позволил получить разрешение прямого скачка уплотнения (рис. 2в) при решении задач с давлением выше критического — видно, что за скачком в пристенной струе происходит торможение газа в серии скачков уплотнения, интенсивность которых уменьшается.

Описанная в данном разделе математическая модель позволяет получить адекватное разрешение сжимаемой пристенной струи, распространяющейся вдоль криволинейной поверхности, что хорошо видно из рис. 2г и рис. 2д, где приведены результаты численных расчетов и фрагменты визуализации из работ [5, 6]. Важно отметить ряд значимых отличий между условиями в численных расчетах и в экспериментах соответственно, а именно: 1) истечение в затопленное пространство, ограниченное стенками канала, и в неограниченное пространство; 2) истечение из щели постоянной ширины и из профилированной щели, где присутствует участок поджатия потока и критическое сечение; 3) различные полные давления

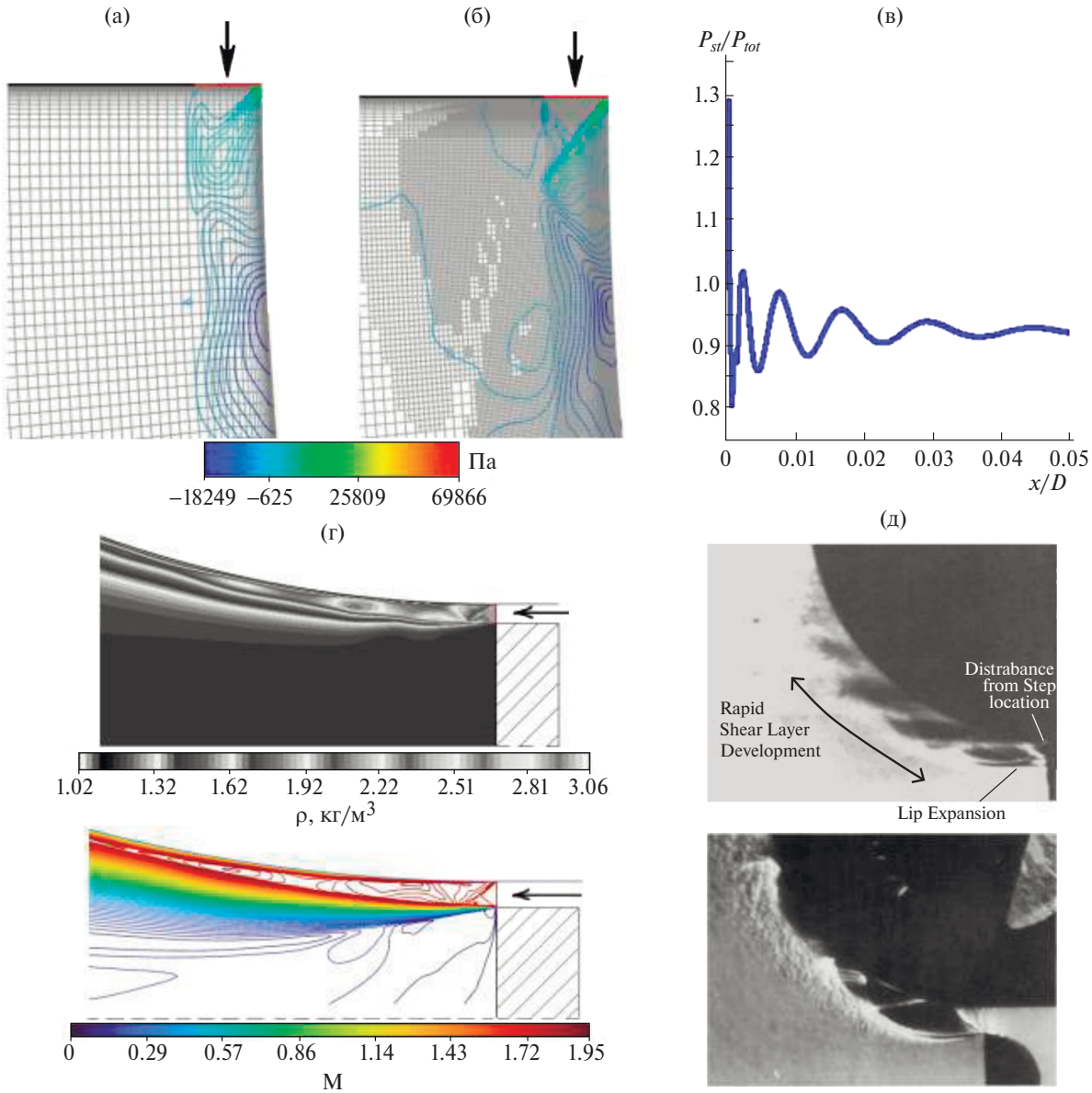



**Рис. 2.** Адаптация расчетной сетки по градиенту давления ($h$ = 0.25 мм, $P_{tot}$ = 6 · 10$^5$) до адаптации (7.2 · 10$^5$ ячеек) (а), после адаптации (1.48 · 10$^6$ ячеек) (б), разрешение прямого скачка вдоль криволинейной поверхности (в), распределения газодинамических параметров в численном расчете (г), визуализация высокоскоростной сжимаемой пристенной струи в экспериментах [5, 6] (д).

и степени нерасчетности струи; 4) отличия в геометрии (например, соотношения $h/R$). Однако, несмотря на имеющиеся отличия, хорошо видна зона смешения струи и затопленного пространства, а также ударно-волновая структура. Из фрагментов визуализации очевидно, что полное давление в экспериментах [5, 6] существенно выше значений, рассмотренных при математическом моделировании применительно к течению в канале, в связи с этим и выше импульс струи.

Для численного моделирования движения радиальной струи вдоль криволинейной поверхности профилированного канала заданы начальные условия, согласно которым истечение струи происходит в затопленное пространство, ограниченное стенкой канала и открытыми границами, на которых выполняются мягкие граничные условия. На стенке канала заданы условия прилипания и адиабатичности. Полная температура и интенсивность турбулентности в струе, истекающей из щелевого сопла шириной 0.25 мм и 0.5 мм, составляют $T$ = 294 K и $Tu$ = 4%, соответственно. Полное давление, соответствующие величины массового расхода через щелевое сопло и значения числа Рейнольдса, указаны в табл. 1.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

Подача струи в затопленное пространство сопровождается перераспределением давления во внутреннем объеме канала, вследствие чего вблизи стенки формируется зона пониженного давления и возникает

**Таблица 1.** Массовый расход через срез щелевого сопла

| | | $P$, Па | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $1.08 \cdot 10^5$ | $1.4 \cdot 10^5$ | $2.8 \cdot 10^5$ | $6 \cdot 10^5$ |
| | | $G_{inlet}$, г/с | | | |
| $h$, мм | 0.25 | 8.77 | 19.56 | 40.46 | 63.04 |
| | 0.5 | 17.76 | 39.42 | 80.90 | 126.07 |
| | | $\mathrm{Re} \cdot 10^3$ | | | |
| $h$, мм | 0.25 | 1.87 | 4.17 | 8.62 | 13.43 |
| | 0.5 | 3.78 | 8.40 | 17.23 | 26.86 |

подсос воздуха из окружающей среды в пристеночной области. Распространение радиальной струи в ограниченном пространстве осесимметричного канала осложняется наличием профилированного сужающегося участка, где вследствие эффекта Коанда струя присоединяется к стенке, по мере движения разворачивается на 90°, и по длине цилиндрической части направление ее движения становится параллельным оси. В связи с этим предметом исследования является структура течения во внутреннем объеме осесимметричного профилированного канала при подаче радиальной струи вдоль поверхности Коанда.

*Поля статического давления на стенке и на оси канала*

Распределение статического давления на стенке канала, нормированное на величину атмосферного давления представлено на рис. 3. Координата $x/D = 0$ соответствует местоположению сопла, через которое вдувается струя и начинается поверхность Коанда. Завершается криволинейная поверхность при значении $x/D = 0.31$. На рис. 3а представлены распределения статического давления на стенке при докритических значениях полного давления в струе, а на рис. 3б — при сверхкритических. Как видно, наиболее сильное разрежение на стенке канала достигается на криволинейном участке. Причем распределение давления имеет минимум при $x/D \approx 0.25$, а затем по завершению криволинейной части выходит на плато. Увеличение давления в форкамере струи приводит к росту разрежения при до- и сверхкритических режимах истечения. Это обусловлено прежде всего увеличением расхода газа в кольцевой струе, как это можно видеть из табл. 1. По этой же причине возрастает уровень разрежения при увеличении ширины щели.

Таким образом, увеличение полного давления в форкамере $P$, как и увеличение ширины щели $h$, при истечении дозвуковой турбулентной струи приводит к увеличению количества эжектируемого воздуха. То есть при подаче в профилированный канал дозвуковой кольцевой турбулентной струи есть два способа улучшения ее эжекционных свойств: увеличение полного давления и ширины щели. При сверхкритической величине полного давления в кольцевой струе распределение статического давления на стенке цилиндрического участка качественно подобно распределению при докритических давлениях (см. рис. 3). Разница состоит в уровне разрежения, создаваемого вдувом кольцевой струи, величина которого при сверхкритических режимах значительно выше. С ростом полного давления в струе увеличивается разрежение вблизи криволинейной стенки канала (см. рис. 3а), и при переходе в диапазон сверхкритических значений

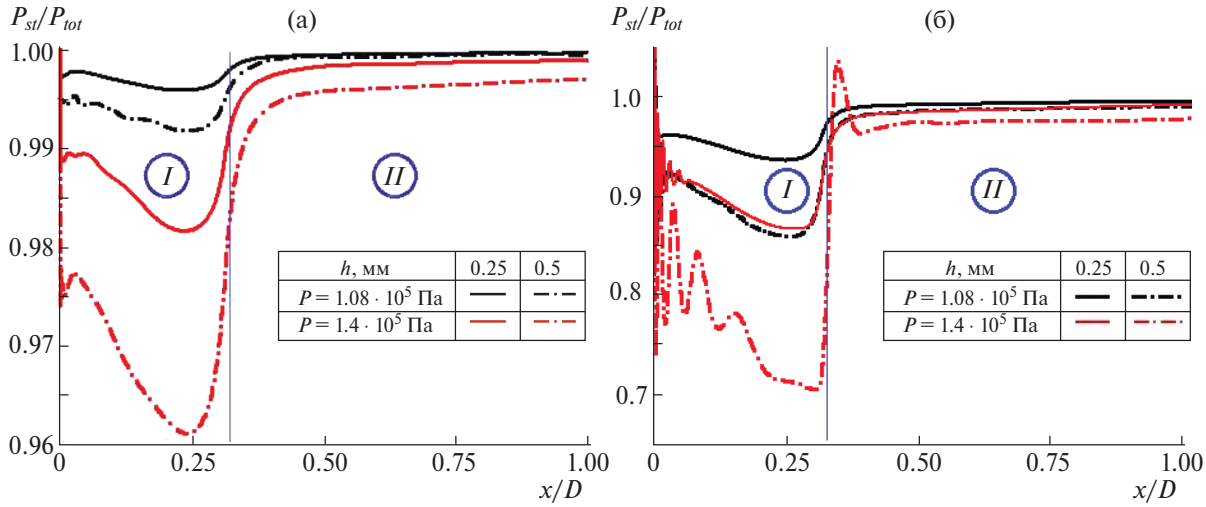



**Рис. 3.** Статическое давление ($P_{st}$) на стенке канала при ширине щели 0.25 и 0.5 мм для докритического (а) и сверхкритического (б) давлений в форкамере (*I* — криволинейная поверхность, *II* — цилиндрический участок).

(см. рис. 3б) в этой области возникают скачки уплотнения, наличие которых обусловлено тем, что скорость течения воздуха превышает местную скорость звука.

Распределение статического давления для щели $h = 0.5$ мм при полном давлении $P = 6 \cdot 10^5$ Па отличается тем, что в области, где криволинейная поверхность стыкуется с цилиндрическим участком канала возникает немонотонность поведения давления с резким изменением его от величины $0.7P_a$ до $1.05P_a$. Резкое изменение давления связано с наличием прямого скачка уплотнения в пристеночном течении. Как видно из рис. 3б, распределение статического давления при $h = 0.25$ мм и $P = 6 \cdot 10^5$ Па практически совпадает с распределением для щели 0.5 мм и давления $P = 2.8 \cdot 10^5$ Па. Однако при подаче высоконапорной струи из щели $h = 0.25$ мм массовый расход сжатого газа на входе будет на 27.7% ниже, а массовый расход эжектируемого из атмосферы воздуха выше на 10.3%. Данный факт может оказывать существенное влияние на важнейший показатель эффективности эжектора — коэффициент эжекции.

Несмотря на переход через скорость звука ($M > 1$), так же имеют место два варианта улучшения эжекционных свойств струи: увеличение ширины щели и повышение полного давления. В рассматриваемых условиях численного расчета полная температура струи составляет 294 К и сохраняется неизменной, в связи с этим повышение давления в струе не приведет к увеличению числа Маха в силу ограниченности энтальпии потока [34]. При достижении на выходе из щелевого сопла критической скорости истечения, последующее увеличение полного давления приведет к тому, что струя, истекающая в ограниченное затопленное пространство, будет стремиться преобразовать внутреннюю энергию в кинетическую, а ее истечение будет сопряжено с возникновением все более сильного разрежения как вблизи стенок, так и во внутреннем объеме канала.

Степень разрежения во внутреннем объеме канала отражает рис. 4, где приведены распределения статического давления на оси канала, нормированные на величину атмосферного давления ($P_a = 10^5$ Па). При докритических давлениях (рис. 4а) разрежение вблизи оси не превышает 0.05%, большее разрежение создается при подаче радиальной струи из щелевого сопла ширины $h = 0.5$ мм, при этом разрежение возле стенки в 7 раз выше. На цилиндрическом участке канала давление повышается, выравнивается скорость и происходит торможение потока. При сверхкритическом давлении в струе (рис. 4б) наибольшее разрежение на оси канала наблюдается при большей ширине щели и достигает 2.8% (при разрежении вблизи стенки ~ 30%). Малое разрежение вблизи оси канала оказывает влияние на величину скорости в ядре потока и эжекционные свойства радиальной щелевой струи, вдуваемой в осесимметричный канал. Основное движение среды происходит вблизи стенки, что приводит к формированию профиля скорости с максимумом в пристенной части канала.

*Локальная структура течения*

Картины полей осредненной аксиальной скорости при полном давлении во входном сечении радиальной струе $P = 1.08 \cdot 10^5$ и $2.8 \cdot 10^5$ Па и для щелей шириной $h = 0.25$ и 0.5 мм представлены на рис. 5. Исследуемое течение имеет сложную структуру, так как щелевая струя с одной стороны ограничена криволинейной стенкой, а с другой — слоем смешения с эжектируемым потоком. В каждом случае область с наиболее высокой величиной аксиальной скорости расположена вблизи стенки канала, что иллюстрирует возникновение эффекта Коанда, предотвращающего отрыв потока от криволинейной поверхности. Струя

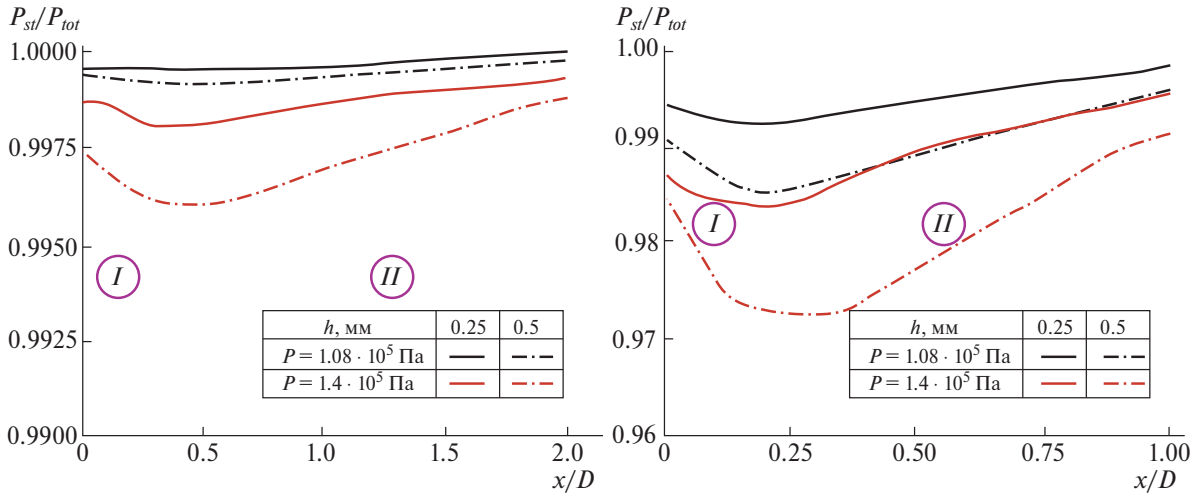



**Рис. 4.** Статическое давление на оси канала при ширине щели 0.25 и 0.5 мм для докритического (а) и сверхкритического (б) давлений в форкамере (*I* — криволинейная поверхность, *II* — цилиндрический участок).

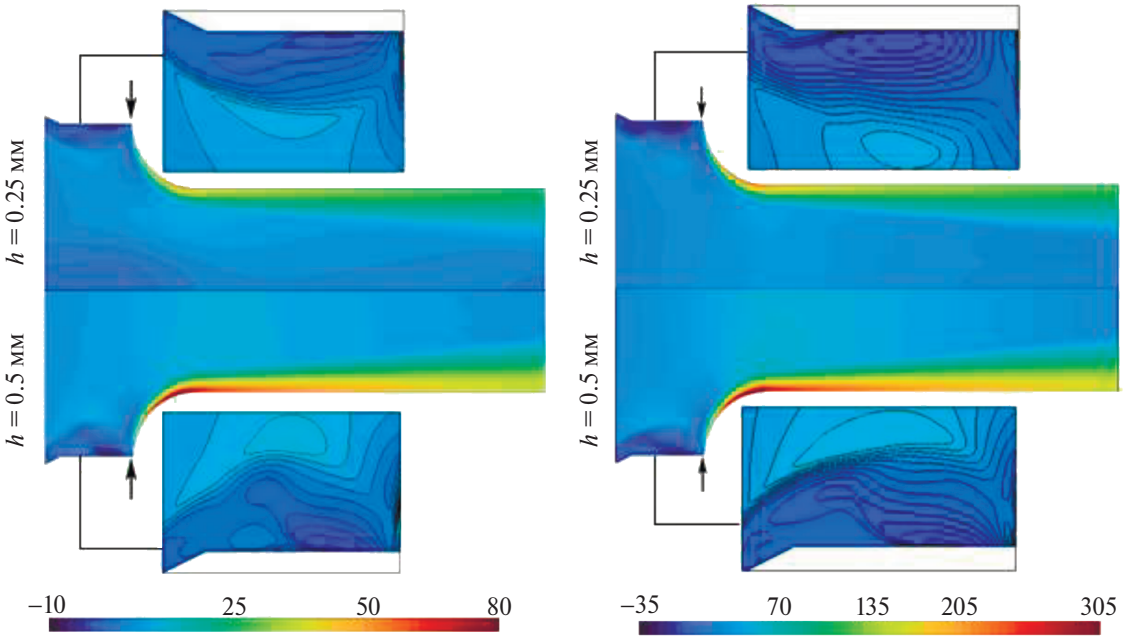



**Рис. 5.** Поле осредненной аксиальной скорости $u$ (м/с) в профилированном канале при докритическом $P = 1.08 \times \times 10^5$ Па (а) и (б) сверхкритическом $P = 2.8 \cdot 10^5$ Па давлениях для различной ширины щели. Стрелками показан срез щелевого сопла, на выносках — поле осредненной скорости в области при $x/D < 0$.

присоединяется к стенке и движется вдоль нее, по мере движения она разворачивается на 90° и на цилиндрическом участке канала вектор скорости струи становится параллелен оси канала.

Вне зависимости от полного давления струи и ширины щели в канале формируются две выраженные области течения с низкой скоростью. Первая расположена вблизи оси канала и ее возникновение обусловлено эжекцией газа из окружающей среды. Во второй области, примыкающей к стенке канала, расположена зона пониженного давления, где возникает отрыв потока и возвратное течение (см. врезки на рис. 5). Протяженность зон рециркуляции и их интенсивность зависят как от полного давления в струе, так и от ширины щели. Максимальная величина продольной скорости достигает $u = 80$ м/с ($P = 1.08 \cdot 10^5$ Па) и 305 м/с ($P = 2.8 \cdot 10^5$ Па). На участке при $x/D < 0$ (слева от щели) вблизи стенки формируется зона возвратного течения, которой соответствуют продольные скорости порядка $u = -10$ м/с (при $P = 1.08 \cdot 10^5$ Па) и −35 м/с (при $P = 2.8 \cdot 10^5$ Па). При движении струи вдоль криволинейной поверхности ($0 < x/D < 0.31$) наблюдается увеличение продольной скорости в пристенной зоне (разгон потока). Вдуваемая струя с одной стороны ограничена стенкой и распределение скорости на данной границе является характерным для распространения турбулентной пристенной струи [39]. Вдоль второй границы струи, обращенной к оси канала, формируется зона смешения, где происходит изменение величины скорости от максимального значения до скорости в ядре потока. Поперечный размер струи, ее расширение и диапазон изменения скорости в ней зависят от величины полного давления и ширины щели (см. рис. 5).

Профили осредненной продольной скорости в характерных сечениях канала представлены на рис. 6, где $x/D = 0$ — срез щелевого сопла, $x/D = 0.16$ — середина криволинейной поверхности, $x/D = 0.31$ — начало цилиндрического участка, $x/D = 1$ — цилиндрический участок, $x/D = 2$ — сечение на выходе из канала. Изменения профиля продольной компоненты скорости по длине канала свидетельствуют о струйном характере течения вблизи стенки и относительно равномерном профиле скорости вблизи оси.

При малом давлении (см. рис. 6а) в сечении $x/D = 0$ вблизи оси канала возникает область течения с отрицательной продольной скоростью (течение в направлении $x/D < 0$), которая выравнивается при движении через сужающийся участок канала, ограниченный криволинейной поверхностью. На цилиндрическом участке канала скорость в ядре потока для щели шириной 0.25 мм практически не отличается от таковой при $h = 0.5$ мм, однако сохраняется различие по величине скорости в пристенной области. При полном давлении в струе выше критического (рис. 6б) в сечении $x/D = 0$ отсутствует область с отрицательной продольной скоростью, а величина скорости в ядре потока существенно выше (примерно в 4 раза), так как кольцевая струя с большим полным давлением, создает большее разрежение во внутреннем объеме канала. Если участок канала, ограниченный криволинейной поверхностью, поджимает поток и обеспечивает увеличение скорости, то на цилиндрическом участке канала происходит плавное его торможение за счет вязких эффектов в пограничном слое на стенке. По мере торможения пристенной струи увеличивается площадь ее сечения и наблюдается тенденция к росту скорости в ядре потока, что видно из профилей

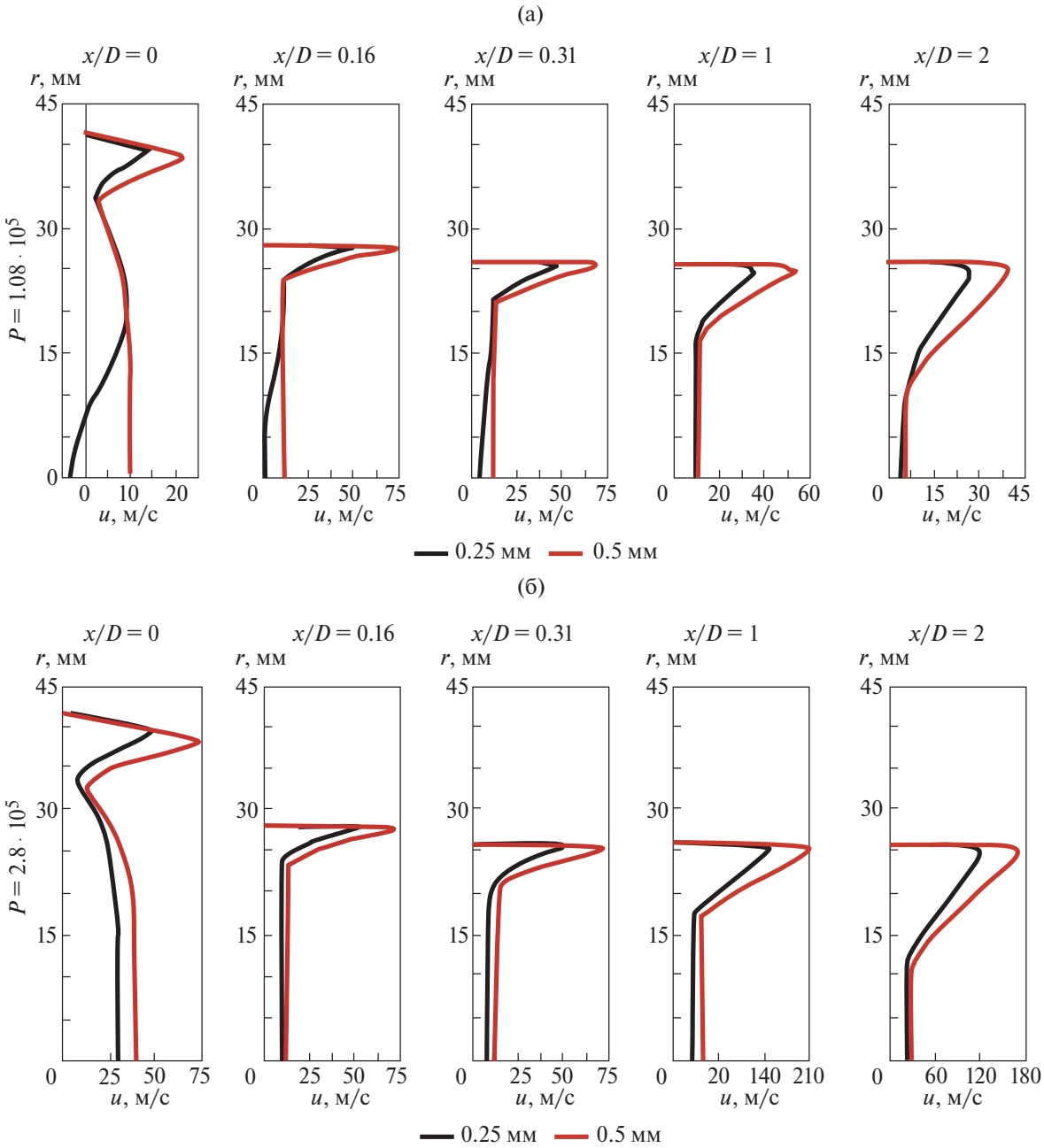



**Рис. 6.** Профили осредненной продольной скорости в характерных сечениях канала при полном давлении в струе $P = 1.08 \cdot 10^5$ (а) и $2.8 \cdot 10^5$ (б).

скорости на выходе (при $x/D = 2$). Влияние сил вязкости приводит к сглаживанию профиля скорости на выходе и формированию более широкой зоны смешения струи и ядра потока.

Из распределений скорости видно, что изменение величины полного давления оказывает существенное влияние на структуру течения и распределение газодинамических параметров в нем, однако общая картина течения подобна: сохраняется выраженная зона пристеночного течения с высокой скоростью [39] и ядро потока вблизи оси, где величина скорости не превышает 20% от максимальной.

На рис. 7 в безразмерном виде представлены профили осредненной аксиальной скорости в сечении $x/D = 2$, полученные в ходе численного решения задачи, а точками отмечены данные экспериментальных измерений [30]. Для сопоставления с результатами численных расчетов были выбраны результаты экспериментального измерения скорости на выходе из канала при $P = 1.4 \cdot 10^5$ Па. В работе [30] не приведена ширина щели и радиус поверхности Коанда, а также вместо цилиндрического участка используется диффузор с полууглом раскрытия 2°. Для того, чтобы нивелировать существующие различия в геометрии сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными осуществлено в безразмерном виде: по оси ординат — скорость, нормированная на максимальную величину в рассматриваемом сече-

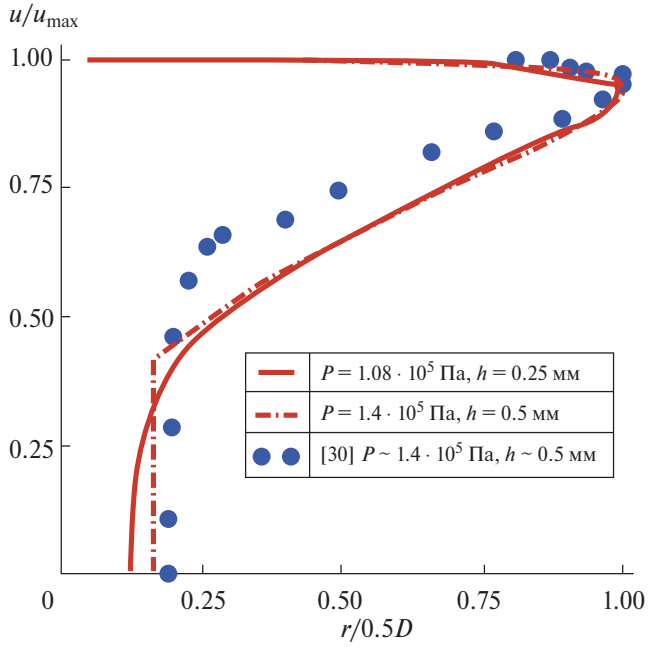



**Рис. 7.** Сравнение результатов численного решения задачи с данными эксперимента [30] профиль осредненной продольной скорости при $h$ = 0.25 и 0.5 в сечении $x/D$ = 2.

нии, по оси абсцисс — координата точки, нормированная на радиус канала в рассматриваемом сечении. Сопоставление результатов отражает соответствие расчетного профиля скорости в пристенной области экспериментальным измерениям. Можно отметить хорошее соответствие скорости в ядре потока — и в расчетах, и в экспериментах ее величина составляет $\sim 0.2u_{max}$. Отличие профиля скорости в зоне смешения пристенной струи и ядра потока может быть обусловлено различиями в геометрии каналов. Также полученные результаты качественно согласуются с результатами математического моделирования других авторов [25, 40], а именно имеют характерное распределение скорости с максимумом в пристенной области и малой скоростью вблизи оси канала.

По результатам численного исследования течения в профилированном канале показано, что подача радиальной кольцевой струи в ограниченное затопленное пространство сопровождается эжекцией газа из атмосферы. Вблизи стенок и оси канала возникает разрежение, интенсивность которого тем выше, чем больше полное давление вдуваемой струи. Важно отметить, что моделирование течения производится с использованием метода конечных объемов до установления и все приведенные выше результаты численного решения являются осредненными — установившееся решение задачи получено при достаточно больших числах Куранта (от 8 до 25). Это связано с тем, что исследуемое течение сопряжено с пульсациями скорости как в пристенной зоне, так и в ядре потока, что явно видно при анализе мгновенных распределений газодинамических параметров во внутреннем объеме канала. В качестве примера на рис. 8 представлены мгновенные поля радиальной скорости в цилиндрической части канала, где видно распространение вихревых структур к выходному сечению канала ($x/D$ = 2). Из мгновенных полей на рис. 8 очевидно наличие зависимости масштабов вихревых структур от ширины щелевого сопла и полного давления в струе. Данные вихревые структуры имеют физическую природу и, по-видимому, являются проявлением крупномасштабной гидродинамической неустойчивости [42]. Авторами работы [28] проведено расчетное и экспериментальное исследование расходящейся радиальной струи и описаны возникающие при этом автоколебательные процессы [41]. Однако истечение расходящейся струи в [28] происходит с большим полным давлением (2.5 МПа), где в ходе торможения происходит разрушение струи и вихревые структуры превращаются в мелкомасштабные турбулентные пульсации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам численного моделирования течения в профилированном канале при подаче радиальной кольцевой струи установлено, что исследуемое течение имеет две выраженные зоны: область высокоскоростной пристеночной струи и ядро потока, скорость в котором не превышает $0.2u_{max}$.

О наличии эжекционных свойств радиальной струи свидетельствует разрежение вблизи стенки и оси канала по всей его длине (как при $x/D < 0$, так и при $x/D > 0$). Истечение радиальной струи в затопленное пространство способствует возникновению потока массы из окружающей среды за счет перераспределения

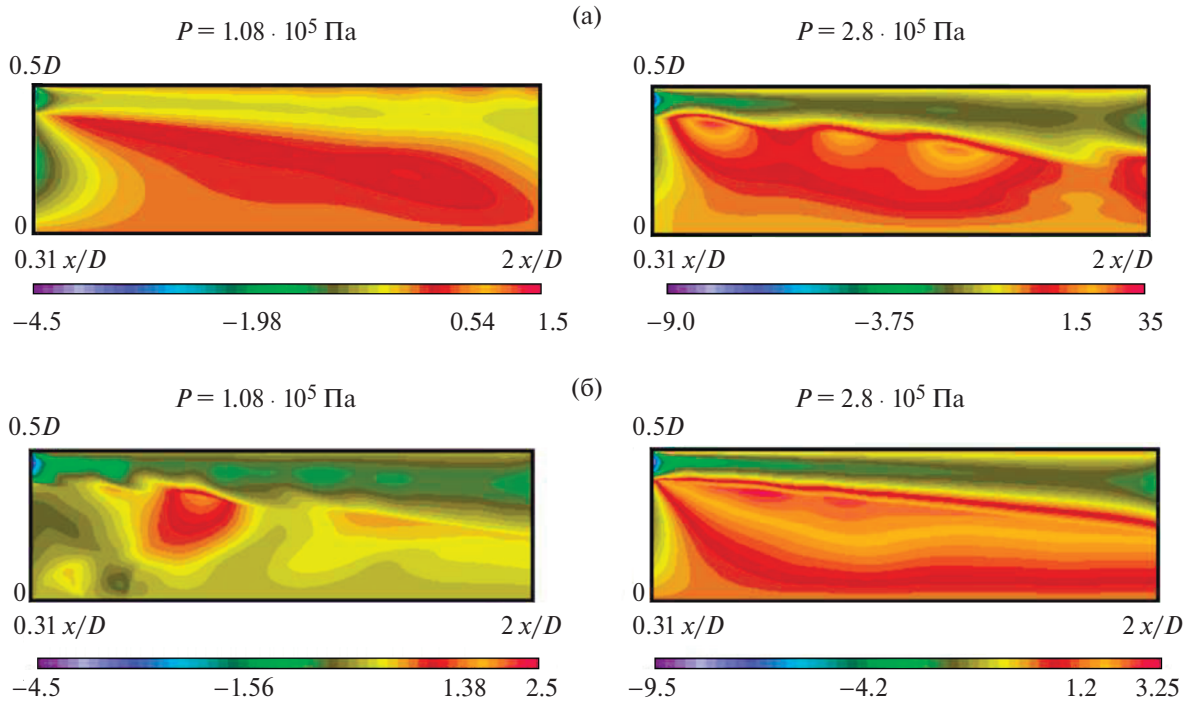



**Рис. 8.** Мгновенные поля радиальной скорости в цилиндрической части канала при ширине щели 0.25 мм (а) и 0.5 мм (б).

давления. При $P < 1.89P_a$, когда турбулентная струя имеет дозвуковую скорость, повышение эффективности эжекции возможно за счет увеличения ширины щели и давления в струе. При $P > 1.89P_a$, когда скорость истечения превышает скорость звука, вблизи щелевого сопла и криволинейной стенки происходит локальная перестройка течения и проявляются эффекты сжимаемости среды, которые необходимо учитывать при оценке эффективности эжекционных свойств высокоскоростной струи. В рассмотренном диапазоне давлений возникающие вблизи среза щели скачки уплотнения затухают под действием сил вязкости в пограничном слое на стенке, и при $x/D > 0.31$ скорость потока ниже местной скорости звука.

Исследуемое течение сопровождается пульсациями скорости и возникновением неустойчивостей, которые могут приводить к возникновению нежелательных акустических эффектов и шума. Необходимы дополнительные экспериментальные и расчетно-теоретические исследования данного класса течений, направленные как на фундаментальное описание протекающих процессов, так и на формулирование практических рекомендаций по улучшению эффективности эжекционных свойств веерной радиальной струи, истекающей в затопленное пространство.

Авторы выражают благодарность С.Ю. Спотарю и И.А. Чохару за полезные обсуждения.

Результаты численных расчетов получены в рамках Государственного задания ИТ СО РАН (121031800217-8).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вулис Л.А., Кашкаров В.П.* Теория струи вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.
2. *Глазнев В.Н., Запрягаев В.И., Усков В.Н., Терехова Н.М., Ерофеев В.К., Григорьев В.В., Кожемякин А.О., Котенок В.А., Омельченко А.В.* Струйные и нестационарные течения в газовой динамике. Новосибирск: Изд-во СОРАН, 2000. 200 с.
3. *Wille R., Fernholtz H.* Report of the first European mechanics colloquium on the Coanda effect // Journal of Fluid Mechanics. 1965. V. 23. No. 4. P. 801–819. https://doi.org/10.1017/S0022112065001702
4. *Lubert C.P.* Some recent experimental results concerning turbulent Coanda wall jets // 168th Meeting of the Acoustical Society of America. 2014. V. 22. Paper 040004. https://doi.org/10.1121/2.0000040
5. *Gregory-Smith D.G., Senior P.* The effects of base steps and axisymmetry on supersonic jets over Coanda surfaces // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1994. V. 15. No. 4. P. 291–298. https://doi.org/10.1016/0142-727X(94)90014-0

6. *Gregory-Smith D.G., Gilchrist A.R., Senior P.* A combined system for measurements of high-speed flow by interferometry, schlieren and shadowgraph // Measurement Science and Technology. 1990. V. 1. P. 419–424. https://doi.org/10.1088/0957-0233/1/5/008
7. *Gregory-Smith D.G., Gilchrist A.R.* The compressible Coanda wall jet — an experimental study of jet structure and breakaway // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1987. V. 8. No. 2. P. 156–164. https://doi.org/10.1016/0142-727X(87)90019-1
8. *Wang Q., Qu F., Zhao Q., Bai J.* Numerical study of the hysteresis effect on the supercritical airfoil for the transonic circulation control // Aerospace Science and Technology. 2022. V. 126. Paper 107645. https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107645
9. *Dragan V.* Numerical investigations of Coanda lift on a double curvature super circulated ramp // International Journal of Civil & Structural Engineering. 2011. V. 2. No. 1. P. 241–248. https://doi.org/10.6088/ijcser.00202010105
10. *Dragan V.* A new mathematical model for high thickness Coanda effect wall jets // Review Air Force Academy. 2013. V. 23. No. 1. P. 23–28.
11. *Shakouchi T., Fukushima S.* Fluidic thrust, propulsion, vector control of supersonic jets by flow entrainment and the Coanda effect // Energies. 2022. V. 15. No. 22. P. 858–861. https://doi.org/10.3390/en15228513
12. *Gandomkar M., Amini Foroushani J.* Experimental and numerical investigation of using Coanda effect for producing underwater propulsion // Modares Mechanical Engineering. 2020. V. 20. No. 3. P. 777–786.
13. *El Halal Y., Marques C.H., Rocha L.A., Isoldi L.A., Lemos R.D.L., Fragassa C., dos Santos E.D.* Numerical study of turbulent air and water flows in a nozzle based on the Coanda effect // Journal of Marine Science and Engineering. 2019. V. 7. No. 2. Paper 21. https://doi.org/10.3390/jmse7020021
14. *Miozzi M., Lalli F., Romano G.P.* Experimental investigation of a free-surface turbulent jet with Coanda effect // Experiments in Fluids. 2010. V. 49. P. 341–353. https://doi.org/10.1007/s00348-010-0885-1
15. *Соколова И.Н.* Экспериментальное исследование пределов реализации течения Коанда // Ученые записки ЦАГИ. 1983. Т. XIV. № 4. С. 124–126.
16. *Соколова И.Н.* Горячие струи Коанда // Ученые записки ЦАГИ. 1990. Т. XXI. № 4. С. 100–103.
17. *Ганич Г.А., Гущина Н.И., Жулев Ю.Г.* Эффект Коанда при выдуве струй из прямоугольных сопл под углом к плоской поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 1994. Т. XXV. № 3–4. С. 121–125.
18. *Жулев Ю.Г., Макаров В.А., Наливайко А.Г.* Интенсификация эффекта Коанда с помощью создаваемых в струе продольных вихрей // Ученые записки ЦАГИ. 1997. Т. 28. № 1. С. 139–143.
19. *Zhou Y., Gu Y., Xue L., Jiao Y., Shi N., Deng S.* Research on the control of supersonic jet under different boundary conditions // Journal of Visualization. 2024. V. 27. P. 19–32. https://doi.org/10.1007/s12650-023-00948-w
20. *Trancossi M., Dumas A., Vucinic D.* Mathematical modeling of Coanda effect // SAE Technical Paper. 2013. Paper 2013-01-2195. https://doi.org/10.4271/2013-01-2195
21. *Saha S., Biswas P., Nath S.* Bifurcation phenomena for incompressible laminar flow in expansion channel to study Coanda effect // Journal of interdisciplinary Mathematics. 2020. V. 23. No. 2. P. 493–502. https://doi.org/10.1080/09720502.2020.1731962
22. *Trancossi M., Pascoa J.* The influence of convective exchanges on Coanda effect // INCAS Bulletin. 2019. V. 11. No. 4. P. 191–202. https://doi.org/10.13111/2066-8201.2019.11.4.17
23. *Matsuo S., Setoguchi T., Kudo T., Yu S.* Study on the characteristics of supersonic Coanda jet // Journal of Thermal Science. 1998. V. 7. No. 3. P. 165–175. https://doi.org/10.1007/s11630-998-0012-2
24. *Kim H., Raghunathan S., Setoguchi T., Matsuo S.* Experimental and numerical studies of supersonic Coanda wall jets // Proc. 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 2000. Paper 0814. https://doi.org/10.2514/6.2000-814
25. *Kim H.D., Rajesh G., Setoguchi T., Matsuo S.* Optimization study of a Coanda ejector // Journal of Thermal Science. 2006. V. 15. No. 4. P. 331–336. https://doi.org/10.1007/s11630-006-0331-2
26. *Dumitrache A., Frunzulica F., Ionescu T.* Coanda effect on the flows through ejectors and channels // Scientific research and education in the Air Force. 2018. V. 20. P. 161–174. https://doi.org/10.19062/2247-3173.2018.20.21

27. *Dumitrache A., Frunzulica F., Ionescu T.C.* Mathematical modelling and numerical investigations on the Coanda effect // Nonlinearity, Bifurcation and Chaos-theory and Applications. 2012. P. 101–132. https://doi.org/10.5772/50403
28. *Киселев С.П., Киселев В.П., Зайковский В.Н.* О механизме автоколебаний сверхзвуковой радиальной струи, истекающей в затопленное пространство // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. № 2. С. 53–63.
29. *Косарев В.Ф., Клинков С.В., Зайковский В.Н., Кундасев С.Г.* Газодинамика сверхзвуковой радиальной струи. Часть I // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 6. С. 693–703.
30. *Ameri M., Dybbs A.* Coanda ejector: why it works // Proc. 5th Int. Conference on Laser Anemometry: Advances and Applications. 1993. V. 2052. P. 289–296.
31. *Ameri M.* An experimental and theoretical study of Coanda ejectors: PhD Thesis. 1993. 168 p.
32. *Куснер Ю.С., Приходько В.Г., Ермолов В.И.* Структура и откачивающие свойства внутренней части кольцевой сверхзвуковой струи // Журнал технической физики. 1985. Т. 55. № 1. С. 186–195.
33. *Зеленецкий В.А., Терехов В.И.* Эжектор для проветривания горных выработок. Патент РФ № 23118119. 27.02.2008. Бюл. № 6.
34. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991. 600 с.
35. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. V. 32. № 8. P. 1598–1605. https://doi.org/10.2514/3.12149
36. *Frunzulica F., Dumitrache A., Preotu O., Dumitrescu H.* Control of two-dimensional turbulent wall jet on a Coanda surface // PAMM. 2011. V. 11. No. 1. P. 651–652. https://doi.org/10.1002/pamm.201110315
37. *Gross A., Fasel H.* RANS, URANS, and LES of Coanda wall jet flows //Proc. 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 2006. Paper 3371. https://doi.org/10.2514/6.2006-3371
38. ANSYS FLUENT 12.1 Theory guide, Solver Theory. ANSYS Inc., 2010.
39. *Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П.* Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. 716 с.
40. *Sierra J., Ardila J., Vélez S., Maya D., Hincapié D.* Simulation analysis of a Coanda — effect ejector using CFD // Tecciencia. 2017. V. 12. No. 22. P. 17–25. https://doi.org/10.18180/tecciencia.2017.22.3
41. *Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Анализ автоколебательных процессов в каверне с открытым типом течения на основе данных вихреразрешающих расчетов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 4. С. 156–166. https://doi.org/10.31857/S1024708422600774
42. *Dunaevich L., Greenblatt D.* Stability and transition on a Coanda cylinder // Physics of Fluids. 2020. V. 32. Paper 084106. https://doi.org/10.1063/5.0013534

# Numerical Study of Flow Structure in an Axisymmetric Channel with Injection of a Radial Jet along the Coanda Surface

**© 2025 M. A. Pakhomov*, N. P. Skibina**, V. I. Terekhov*****

[a] *Kutateladze Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

**e-mail: pma41976@yandex.ru*
**e-mail: uss.skibina@gmail.com*
**e-mail: terekhov@itp.nsc.ru*

The results of numerical study of the flow in a channel with an annular radial jet injected along the Coanda surface are given. To describe the flow of the gas medium, the two-dimensional axisymmetric Reynolds-averaged Navier–Stokes (RANS) equations are used in combination with equations of the semi-empirical $k$–$\omega$ SST turbulence model. The effect of the total pressure and the width of radial jet on the velocity and static pressure distributions is studied and changes in the local structure developed at the sub- and supercritical pressure in the jet are described.

*Keywords:* gas dynamics, Coanda effect, ejection, radial convergent jet