

ISSN 1024-7084

Номер 2

Март - Апрель 2023



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 2, 2023

Исследование течения и спектральных характеристик в проточном гидродинамическом генераторе плоского типа при изменении степени перекрытия потока <i>С. Р. Ганиев, А. И. Крюков, В. П. Рудаков, О. В. Шмырков</i>	3
Математическое моделирование влияния клеточной подвижности и межклеточных активных взаимодействий на сортировку двух типов клеток в культурах биологических тканей <i>С. А. Логвенков</i>	9
Нелинейное уравнение Шредингера для гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде с постоянной завихренностью <i>М. И. Шишина</i>	20
Эволюция потока вязкой электропроводной жидкости на вращающейся стенке при наличии магнитного поля с учетом индукционного и диффузионного эффектов <i>А. А. Гурченков</i>	33
Эффективный тензор ядер релаксации слоистой среды, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой несжимаемой жидкости <i>В. В. Шумилова</i>	46
Турбулентные пульсирующие течения в трубе квадратного сечения <i>Н. В. Никитин, Н. В. Попеленская</i>	55
Структура течения и переход к локальной турбулентности за асимметричным сужением, имитирующим стеноз артерии <i>В. М. Молочников, Н. С. Душин, Н. Д. Пашкова, Я. А. Гатаулин, Е. М. Смирнов, А. Д. Юхнев</i>	72
Об обтекании полутела вращения Рэнкина <i>Г. Л. Королев, Вик. В. Сычёв</i>	85
Фильтрация флюида к скважине через радиальную трещину ГРП при постоянном расходе <i>Е. П. Аносова, З. М. Нагаева, В. Ш. Шагапов</i>	90
Экспериментальное исследование энергоразделения при поперечном обтекании пары круговых цилиндров сжимаемым потоком воздуха <i>Ю. А. Виноградов, А. Г. Здитовец, Н. А. Киселёв, С. С. Попович</i>	102
Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости <i>Л. А. Ткачева</i>	113
Неравновесное сверхзвуковое обтекание затупленной пластины под большим углом атаки <i>С. Т. Суржиков</i>	123
Сравнение эйлерова и лагранжева подходов для нахождения особенностей распределения межзвездной пыли в гелиосфере в рамках модели холодного газа <i>Е. А. Годенко, В. В. Измоденов</i>	138

УДК 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРОТОЧНОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ ПЛОСКОГО ТИПА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СТЕПЕНИ ПЕРЕКРЫТИЯ ПОТОКА

© 2023 г. С. Р. Ганиев^а, А. И. Крюков^{а,**}, В. П. Рудаков^{а,*}, О. В. Шмырков^а

^а Институт машиноведения им. А.А. Благодного РАН, Москва, Россия

*E-mail: v.p.rudakov@mail.ru

**E-mail: lle@bk.ru

Поступила в редакцию 06.04.2022 г.

После доработки 24.09.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

Представлены результаты исследований течения за цилиндрическими телами обтекания в проточном гидродинамическом генераторе плоского типа, полученные на гидродинамическом стенде экспериментальной базы НЦ НВМТ ИМАШ РАН при степени перекрытия потока телами обтекания $S_{II}/S_0 = 10\text{--}82\%$, числах $Re = (0.5\text{--}5) \times 10^5$, давлении на входе $P_{ВХ} = 0.1\text{--}0.9$ МПа. Получено, что при определенных величинах отношения входного к выходному давлению, которые являются постоянными для каждого значения степени перекрытия потока, на частотах $0.5\text{--}5$ кГц возникают мощные пики давления резонансного типа с амплитудой, более чем в 4–5 раза превышающей максимальное значение входного давления.

Ключевые слова: гидродинамика, вихри, амплитуда, частота, резонанс, нелинейные волны, тела обтекания

DOI: 10.31857/S0568528122100176, **EDN:** NSNGTU

Основной задачей в волновой технологии, базирующейся на возбуждении нелинейных колебаний в многофазных средах, постановка которой возникла вследствие запросов практики, является создание научных основ проектирования волновых машин и механизмов, теоретическое обоснование которых изложено в работах [1–3]. Среди известных волновых устройств заметное место занимают проточные волновые генераторы, в плоских профилированных каналах которых установлены препятствия различных форм [4]. В этих генераторах для возбуждения мощных колебаний и волн в обрабатываемых средах, являющихся одновременно и рабочей средой, используются высоко турбулентные, срывные, вихревые потоки жидкости. В генераторах этого типа при размещении в проточной части тела обтекания одновременно протекают и нелинейно взаимодействуют между собой гидродинамические и волновые процессы. Это, по-видимому, явилось следствием отсутствия достаточного количества экспериментальных и достоверных расчетных данных, необходимых для проектирования подобных волновых машин. В ряде имеющихся работ [5–8], где проводились экспериментальные исследования картины течения при обтекании водой одиночного кругового цилиндра в плоской рабочей камере с ограниченной площадью проходного сечения при числах $Re = 7 \times 10^4\text{--}1.9 \times 10^5$, степени перекрытия потока телами обтекания $20\text{--}30\%$, при скоростях набегающего потока $V = 5\text{--}23$ м/с, было показано, что с тела обтекания периодически срываются вихри. Пики переменного давления, замеренные малоинерционным датчиком, вызываются периодически срывающимися вихрями. При этом частота пиков давления точно соответствует числу срывающихся в секунду вихрей. В работах [9, 10] приведены результаты исследования течения воды в сужающихся и расширяющихся каналах круглого сечения без тела обтекания. Было показано, что в проточной части этих каналов при определенных значениях входного давления возникают режимы автоколебаний с амплитудой, сравнимой с входным давлением. Показана кинетика срывных каверн. В работах [11–13] приведены результаты экспериментального исследования проточного генератора плоского типа с различными телами обтекания, степень перекрытия потока в канале которыми составляла 45% . В этих

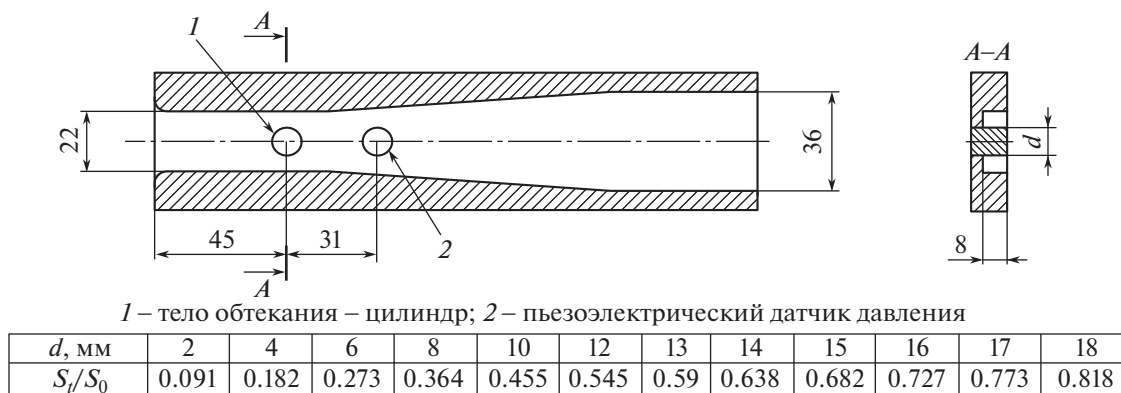


Рис. 1. Принципиальная схема проточного канала генератора плоского типа.

работах показано, что за телами обтекания формируется сложная картина течения. При определенном перепаде давления за телами обтекания возникают пики давления. Частота образования пиков давления линейно зависит от числа Рейнольдса Re , а число Струхала составляет $St = 0.7$. Однако, несмотря на важность представленных в этих работах материалов, они не дают возможности проследить динамику протекания гидродинамических и волновых процессов при изменении в широком диапазоне степени перекрытия потока телами обтекания и определяющих параметров.

1. МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ЭКСПЕРИМЕНТА

Испытания проводились на гидродинамическом стенде, обеспечивающем при давлении на входе $P_{\text{вх}} = 1.7$ МПа расход рабочей жидкости $G = 500$ л/мин. Модель генератора представляла собой плоский канал шириной $b = 22$ мм и высотой $h = 8$ мм (рис. 1). В центре канала к нижней и верхней поверхности проточной части крепились цилиндры диаметрами $d = 2\text{--}18$ мм. Степень перекрытия потока определялась отношением площади поперечного сечения цилиндра S_t к площади поперечного сечения канала S_0 и составляла $S_t/S_0 = 0.1\text{--}0.82$. В качестве рабочего тела использовалась водопроводная вода при $t = 15^\circ\text{C}$. Давление на входе в генератор изменялось в диапазоне $P_{\text{вх}} = 0.2\text{--}1.0$ МПа, давление на выходе в диапазоне $P_{\text{вых}} = 0.1\text{--}0.8$ МПа. Диапазон изменения скорости набегающего потока перед телами обтекания составлял $V_0 = 9.5\text{--}27.5$ м/с, диапазон чисел Рейнольдса $Re = (V_0 d)/\nu = (0.5\text{--}5) \times 10^5$ где ν – кинетическая вязкость рабочей среды. Температура потока воды измерялась термопарой поверхностного типа с погрешностью 0.1°C .

Давление на входе и выходе генератора измерялось манометрами Бурдона класс точности 0.5. Пульсации давления измерялись пьезоэлектрическим датчиком типа 701 К фирмы *Kistler*. Регистрация и обработка полученных данных производились на цифровом осциллографе *Lecroy*. Визуализация картины течения осуществлялась с помощью скоростной цифровой фотокамеры со временем экспозиции $1/80000$ с.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты экспериментальных исследований моделей гидродинамического генератора плоского типа с цилиндрическими телами обтекания показали, что при повышении входного давления в диапазоне $P_{\text{вх}} = 0.2\text{--}1.0$ МПа и отсутствии противодавления ($P_{\text{вых}} = 0.1$ МПа) за цилиндрами образуется мощное турбулентное течение, которое создает заметное гидравлическое сопротивление основному потоку. При этом датчик переменного давления, расположенный в этой зоне, фиксирует низкоамплитудные пульсации давления, характерные для потока жидкости с низкой степенью турбулентности. Величина давления в донной области за цилиндрами P_d с увеличением $P_{\text{вх}}$ вначале резко снижается, затем при $P_{\text{вх}} \geq 0.3$ МПа выходит на постоянное значение $P_d = 1\text{--}3$ КПа, не зависящие от $P_{\text{вх}}$. При этом, как показали картины визуализации течения, за телами обтекания образуется закрытая зона, заполненная периодически возникающими крупными газовыми пузырями, характерными для кипения жидкости при пониженном давлении.

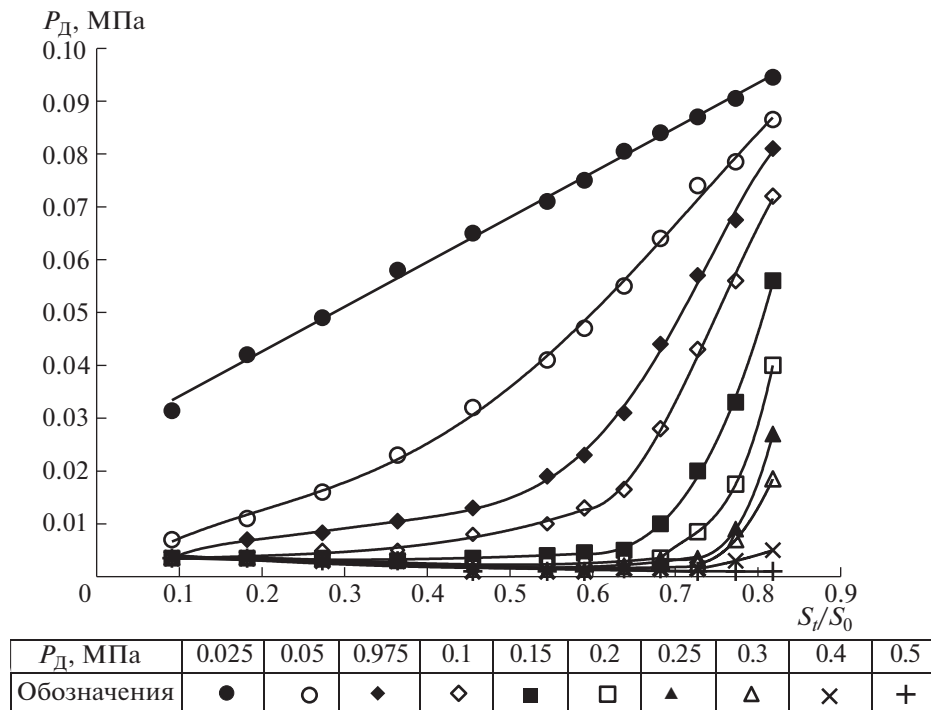


Рис. 2. Зависимости $P_d = F(S_i/S_0, \Delta P)$ для гидродинамического генератора плоского типа $P_{вх} = 0.1$ МПа, $P_{вх} = 0.1–0.9$ МПа.

нии. С увеличением степени перекрытия потока в диапазоне $S_i/S_0 = 0.1–0.82$ величина давления в этой зоне снижается до 1 КПа. Точка выхода зависимости $P_d = F(\Delta P)$, где $\Delta P = P_{вх} - P_{вых}$, на постоянное значение P_d с увеличением S_i/S_0 смещается в сторону больших значений ΔP . В донной области на режимах до возникновения кипения жидкости P_d с увеличением S_i/S_0 возрастает. Особенно резко рост P_d происходит при $S_i/S_0 \geq 0.6$ (рис. 2).

Анализ картин течения показал, что в проточной части гидродинамического генератора плоского типа за цилиндрическими телами обтекания при варьировании величиной перепада давления $\Delta P = P_{вх} - P_{вых}$ возникает известное течение жидкости с отрывом пограничного слоя с поверхности цилиндра и образованием пульсирующих вихревых дорожек, при этом эти дорожки прерывисто заполняют донную область протяженностью 2.5–3 калибра тела обтекания. Анализ результатов измерений пульсаций давления в донной области так же показал, что в проточной части гидродинамического генератора плоского типа за телами обтекания возникают мощные нелинейные волны давления только при определенных значениях отношения $(P_{вых}/P_{вх})_{рез}$, которое является практически независимым от величины $P_{вх}$ и постоянной для каждой степени перекрытия. С увеличением степени перекрытия потока в диапазоне $S_i/S_0 = 0.1–0.82$ величина этого отношения плавно уменьшается с 0.7 до 0.28.

Амплитудно-частотная характеристика мощных нелинейных волн давления и сопровождающих их волн на кратных частотах с небольшими амплитудами (видимо, вследствие резонанса гидродинамических и акустических сил при схлопывании семейства кавитационных пузырьков в вихревых образованиях), показана на (рис. 3).

Амплитуда этих пиков давления A_{max} , измеренная пьезодатчиком в единицах давления, с ростом $P_{вх}$ возрастает для всех значений S_i/S_0 (рис. 4), видимо, вследствие интенсификации процесса схлопывания кавитационных пузырьков при увеличении $P_{вых}$. При этом величина A_{max} может более чем в 4–5 раза превзойти максимальную величину $P_{вхmax}$.

Частота возникновения резонансных пиков давления f с увеличением $P_{вх}$ для всех диаметров тел обтекания линейно возрастает и при $S_i/S_0 = 0.091$ может достигать $f = 5$ кГц. При увеличении S_i/S_0 до 0.818 частота пиков давления снижается на порядок (рис. 5.)

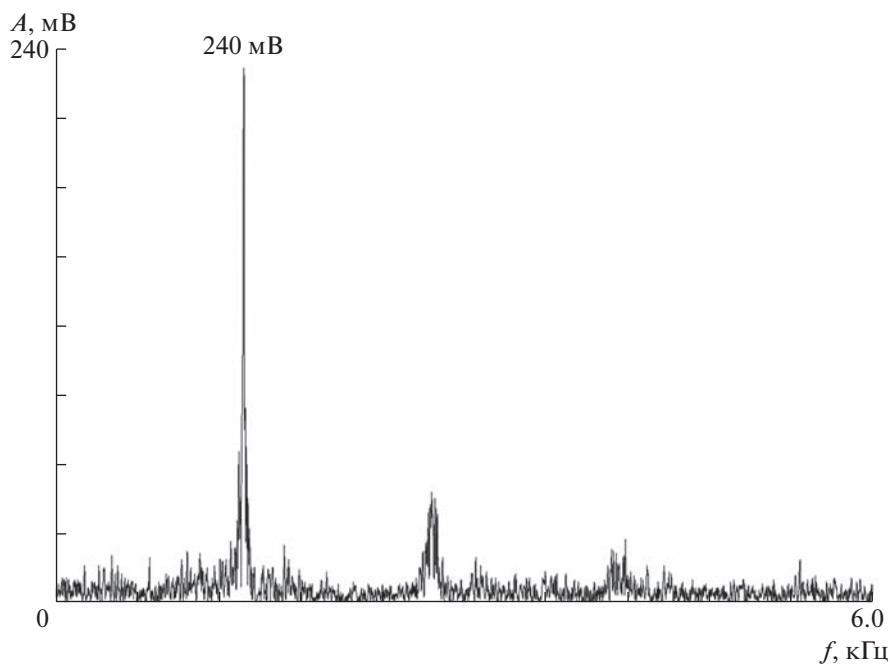


Рис. 3. Амплитудочастотная характеристика пульсаций давления в потоке жидкости за цилиндрическим телом обтекания на режиме возбуждения мощных нелинейных волн давления в гидродинамическом генераторе плоского типа при степени перекрытия $S_l/S_0 = 0.4545$, $P_{BX} = 0.8$ МПа, $P_{ВЫХ}/P_{BX} = 0.625$, $f_{max} = 1.4$ кГц.

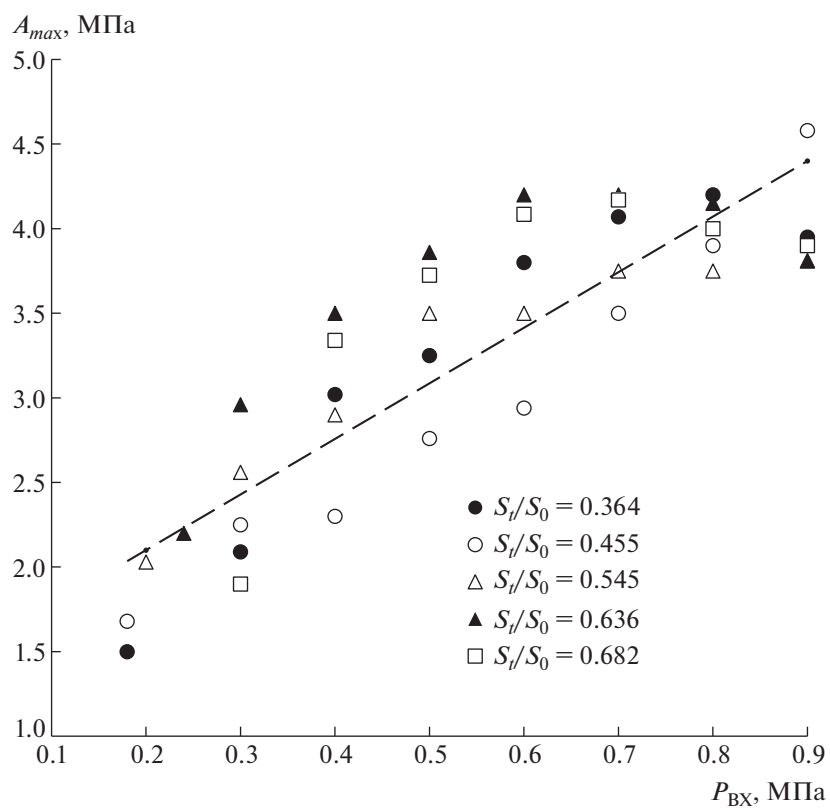


Рис. 4. Зависимость $A_{max} = F(P_{BX}, S_l/S_0)$ для режима возбуждения мощных нелинейных волн давления за цилиндрическими телами обтекания в генераторе плоского типа.

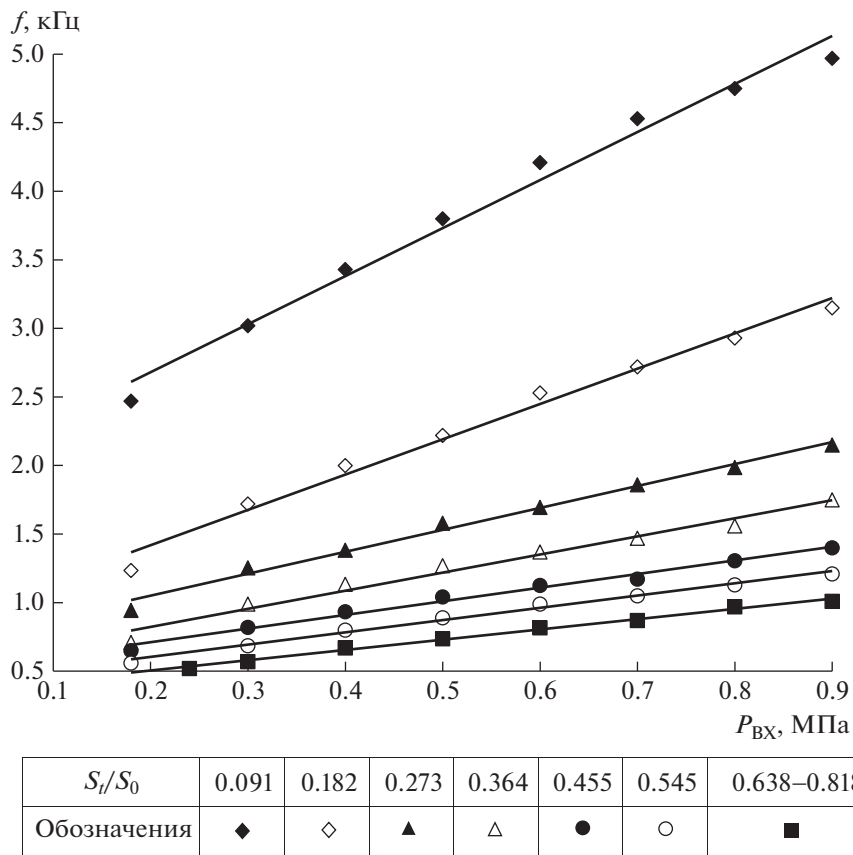


Рис. 5. Зависимости $f = F(P_{BX}, S_l/S_0)$ для гидродинамического генератора плоского типа на режиме возбуждения за телами обтекания мощных нелинейных волн давления.

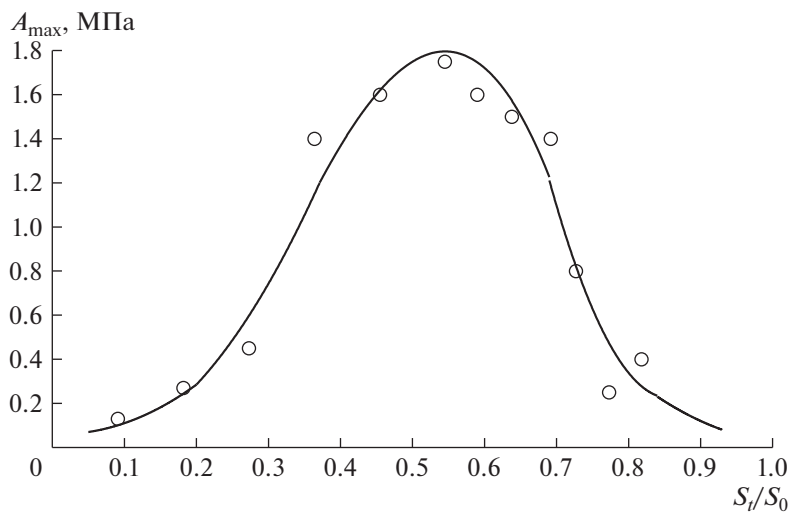


Рис. 6. Зависимость $A_{\max} = F(S_l/S_0)$ для режимов возбуждения нелинейных волн давления при $\Delta P = P_{BX} - P_{ВЫХ} = 0.3$ МПа.

Зависимость $A_{\max} = F(S_l/S_0)$ (рис. 6.) является существенно нелинейной, с наличием характерного максимума при $S_l/S_0 \approx 0.5$. Видно, что наибольшая интенсивность волновых процессов реализуется в настоящем генераторе при установке цилиндрических тел обтекания, диаметры которых лежат в диапазоне $d = 8\text{--}13$ мм ($S_l/S_0 \approx 0.35\text{--}0.6$).

Зависимость $f = F(Re)$ для каждого значения S_f/S_0 носит линейный характер и описывается выражением $f = kRe$, где $k = df/dRe$ — постоянная величина для каждого значения S_f/S_0 . С увеличением S_f/S_0 производная роста зависимости $f = F(Re)$ существенно снижается. Зависимость числа Струхала St от степени перекрытия потока $St = F(S_f/S_0)$ в исследуемом диапазоне чисел $Re = (0.5-5) \times 10^5$ так же носит линейный характер. С ростом S_f/S_0 величина St при $S_f/S_0 = 0.82$ достигает значения $St = 1.2$. Экстраполяция этой зависимости в сторону значений $S_f/S_0 < 0.1$ показывает, что число St стремится к величине $St = 0.2$, полученной для полубесконечного обтекания цилиндра при числах $Re = 10^4-10^5$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований получено в проточной части гидродинамического генератора проточного типа за цилиндрическими телами обтекания при определенных значениях отношения $P_{\text{вых}}/P_{\text{вх}}$, являющихся постоянной величиной для каждого значения S_f/S_0 , реализуется течение с наличием попеременно образующихся вихрей, возникающих в результате отрыва пограничного слоя с поверхности тел обтекания и порождающих мощные пики давления резонансного типа, амплитуда которых более чем в 4–5 раза превышает максимальное значение входного давления;

- амплитуда резонансных пиков давления A_{max} с увеличением $P_{\text{вх}}$ линейно возрастает;
- зависимость $A_{\text{max}} = F(S_f/S_0)$ является существенно нелинейной с наличием характерного максимума при $S_f/S_0 = 0.5$, таким образом, наибольшая интенсивность волновых процессов реализуется при установке тел обтекания, диаметры которых лежат в диапазоне $d = 8-13$ мм ($S_f/S_0 = 0.35-0.6$);
- частота возникновения максимальных пиков давления резонансного типа для каждого значения S_f/S_0 с увеличением $P_{\text{вх}}$ линейно возрастает, в то время как с увеличением S_f/S_0 в диапазоне $0.1-0.82$ снижается на порядок;
- зависимость числа Струхала от степени перекрытия потока $St = F(S_f/S_0)$ в исследуемом диапазоне чисел $Re = (0.5-5) \times 10^5$ носит линейный характер. С ростом S_f/S_0 величина St увеличивается и при $S_f/S_0 = 0.82$ достигает значения $St = 1.2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Нелинейная волновая механика и технологии. М.: Науч.-изд. Центр РХД, 2008. 712 с.
2. Ганиев Р.Ф. Волновые машины и технологии (введение в волновую технологию). М.: Науч.-изд. Центр РХД, 2008. 192 с.
3. Ганиев Р.Ф. Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. Науч.-изд. Центр РХД, 2013. 592 с.
4. Ганиев Р.Ф., Кормилицын В.И., Украинский Л.Е. и др. Патент 2 306 972 МПК B01F 5/00. Устройство для гомогенизации и приготовления смесей. 2007. Бюл. № 27.
5. Шальнев К.К. Критерий возникновения срывной кавитации круглого профиля // ДАН СССР. Гидромеханика. 1948. Т. LXI. Вып. 5. С. 799–802.
6. Шальнев К.К. Кинетическая структура срывной кавитации круглого профиля // ДАН СССР. Гидромеханика. 1954. Т. ХСVII. Вып. 5. С. 785–788.
7. Шальнев К.К. Давление и эрозия в области срывной кавитации круглого профиля // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. Вып. 6. С. 111–119.
8. Шальнев К.К. Условия интенсивности кавитационной эрозии // Изв. АН СССР, ОТН. 1956. Вып. 1. С. 3–20.
9. Daily J.W. Cavitation Characteristics and Infinites Aspect — Ratio Characteristics of a Hydrofoil Section. Trans // ASME. 1949. V. 70. № 3.
10. Эпштейн Л.А. Динамика каверн при течениях жидкости в трубке с пережатием // Тр. ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского. 1972.
11. Пилипенко В.В. Кавитационные автоколебания. Киев: Наукова Думка, 1989. 314 с.
12. Шмырков О.В., Юшков Н.Б., Кормилицын В.И. Исследование характеристик плоского генератора проточного типа с различными телами обтекания // Инж. журн. 2013. № 2. С. 12–19.
13. Кормилицын В.И., Шмырков О.В., Юшков Н.Б. Особенности течения жидкости в плоском канале переменного сечения при высокой загроможденности препятствиями различного вида // ДАН. 2015. Т. 461. № 3. С. 277–280.

УДК 532.5: 531.3: 576.72

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КЛЕТОЧНОЙ ПОДВИЖНОСТИ И МЕЖКЛЕТОЧНЫХ АКТИВНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НА СОРТИРОВКУ ДВУХ ТИПОВ КЛЕТОК В КУЛЬТУРАХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ

© 2023 г. С. А. Логвенков^{a,b,*}

^aНациональный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

^bМГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: logv@bk.ru

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.

После доработки 11.10.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Движение клеток лежит в основе многих биологических явлений. Важную роль в управлении клеточными движениями играют активные напряжения, которые развиваются в биологических тканях в результате механических взаимодействий клеток между собой. Изучение эволюции смесей клеток разных типов, образующих клеточные агрегаты, показало, что активные силовые межклеточные взаимодействия приводят к пространственному разделению клеток разных типов – сортировке клеток. В рамках континуальной модели биологической сплошной среды [24] (клетки разных типов рассматриваются как отдельные фазы), в данной работе проведено исследование влияния параметров, которые характеризуют различные механизмы развития активных межклеточных напряжений, а также адгезию и клеточную подвижность на процесс сортировки двух типов клеток, образующих в начальный момент времени агрегат сферической формы. Показано, что достаточными условиями сортировки клеток разных типов и формирования резкой границы между областями, которые они занимают, является отсутствие стягивающих взаимодействий между клетками разных фаз при условии асимметрии начальных распределений их концентрации или асимметрии параметров, характеризующих развитие активных напряжений в разных фазах. Показано, что клетки той фазы, в которой активные стягивающие межклеточные взаимодействия сильнее (при одинаковых для разных клеточных фаз значениях остальных параметров и одинаковых начальных распределениях концентраций фаз), стремятся занять центральную область сфероид. В то же время клетки другой фазы, между которыми стягивающие взаимодействия слабее, вытесняются на периферию. Увеличение параметра, характеризующего отталкивание клеток, приводит к вытеснению этой клеточной фазы на периферию. Помимо сил активного взаимодействия клеточные движения могут контролироваться как механическими пассивными свойствами среды, так и подвижностью клеток. Асимметрия межфазного распределения этих параметров может приводить к тому, что клетки, обладающие большими стягивающими взаимодействиями, будут вытесняться в периферическую область клеточного сфероид и окружать клетки, между которыми эти взаимодействия слабее.

Ключевые слова: клеточные системы, активные среды, биологическое формообразование

DOI: 10.31857/S0568528122600813, **EDN:** NTKIEV

Миграция клеток как в виде коллективного движения клеточных пластов, в которое оказываются вовлечены большие группы прочно скрепленных между собой клеток, так и миграция клеток, сопровождаемая их движением друг относительно друга, является фундаментальным процессом, который имеет ключевое значение для самых разных биологических явлений, проявляющихся на всех этапах жизни животных и человека. Клеточная миграция необходима как для нормального функционирования многоклеточного организма, так и при развитии заболеваний. Движения эмбриональных клеток лежат в основе формирования структур, которые в процессе развития организма трансформируются в ткани и органы [1–4]. Закрывшие раны в слое клеток сопровождается миграцией клеток в зону повреждения под действием сил, создаваемых самими клетками [4–6]. Миграция клеток является также неотъемлемой частью развития и патологических процессов таких, как рост и метастазирование опухолей [4, 7, 8].

Поля механических напряжений, которые развиваются в тканях в результате активных механических взаимодействий клеток между собой и с внеклеточным матриксом, имеют решающее значение в управлении направленными клеточными движениями, приводящими к формированию различных структур [2, 4, 6–9].

Важной задачей является понимание физических и биологических механизмов на клеточном и тканевом масштабах, управляющих развитием активных напряжений и, тем самым, движением клеток. Регуляция миграции опухолевых клеток представляет несомненную практическую значимость.

Активные взаимодействия между клетками создаются и контролируются механизмами, главным образом связанными с участием межклеточной адгезии (скрепления поверхностей соседних клеток посредством специфических молекул) и сокращением элементов клеточного скелета. Однако проявление этих механизмов может существенно различаться для клеток разных типов и разных тканей.

В одних случаях наблюдается образование различного вида выростов клеточной мембраны (протрузий), способных закрепляться на поверхностях соседних клеток (для эмбриональных клеток) [2, 10–12] или образовывать прочные контакты с внеклеточным матриксом (в частности, для опухолевых клеток) [5, 7]. Развитие сократительных усилий в них приводит к развитию активных напряжений в среде и перемещению клеток.

В других случаях создание активных сил связано с участием натяжения сократительных элементов клеточного скелета в поверхностных областях внутриклеточного пространства (кортикального натяжения) совместно регулируемого с межклеточной адгезией [13–16]. Сила, способствующая сближению клеток, создается натяжением по границе области контакта между клетками, а поверхностные молекулы адгезии обеспечивают прочность механического соединения контактирующих клеток.

В тканях, образованных плотно упакованными клетками, имеющими вид многогранников, механизм межклеточных взаимодействий отличается от двух предыдущих. Сила взаимодействия между клетками этих тканей создается анизотропным сокращением межклеточных границ, в результате чего граница между одной парой клеток исчезает, и появляется новая граница между двумя другими клетками. Анизотропия развития сократительной активности может определяться биологически предпочтительной ориентацией межклеточных границ, на которых образуются сократительные структуры [17, 18], или соседством с клетками другого типа [19–21].

Изучение эволюции простых клеточных систем таких, как пространственные клеточные агрегаты, показало, что активные силовые взаимодействия между клетками приводят к формированию неоднородных клеточных структур [15, 22, 23]. В агрегатах, полученных перемешиванием клеток двух разных типов, происходит их пространственное разделение (сортировка клеток) — формируются структуры, характеризующиеся образованием компактной массы клеток одного типа, окруженной клетками другого типа.

Первые результаты решения ставшей в настоящее время классической задачи о сортировке двух разных типов клеток были получены с использованием дискретных “энергетических” моделей, в которых эволюция системы направлена на минимизацию энергии, учитывающей различные механизмы взаимодействия между соседними клетками. Их обзор приведен в [15, 23].

Дискретные модели, использующие принцип минимизации энергии, позволили получить хорошие результаты при описании сортировки клеток, однако, они оставляют без ответа вопрос о том, как механизмы на клеточном уровне связаны с характеристиками среды на тканевом уровне: как развитие активных напряжений и деформационные характеристики клеточной сплошной среды связаны с адгезионными взаимодействиями клеток и напряжениями в клеточном скелете.

Континуальные модели, описывающие поведение биологических сред, образованных активно взаимодействующими клетками, представлены достаточно небольшой группой работ, кратко обсуждаемых в [24]. Разработанная в [24] модель основывается на общих принципах механики многофазных сплошных сред и описывает эволюцию клеточных систем, используя несомненные физические механизмы, которые связаны с активными межклеточными взаимодействиями и подвижностью клеток.

Исследование различных постановок задач (в рамках континуального подхода), в которых учитывается подвижность границ областей, занятых клетками разных типов выполнено в [25, 26]. Исследуемые постановки задач, описывающие перераспределение клеток в плоском слое и сферическом агрегате, различаются граничными условиями. В обеих постановках внешние границы клеточных фаз подвижны, но в одном случае для обеих фаз эти границы совпадают, а в другом перемещаются независимо в соответствии с условиями их нагружения. Таким образом, оказы-

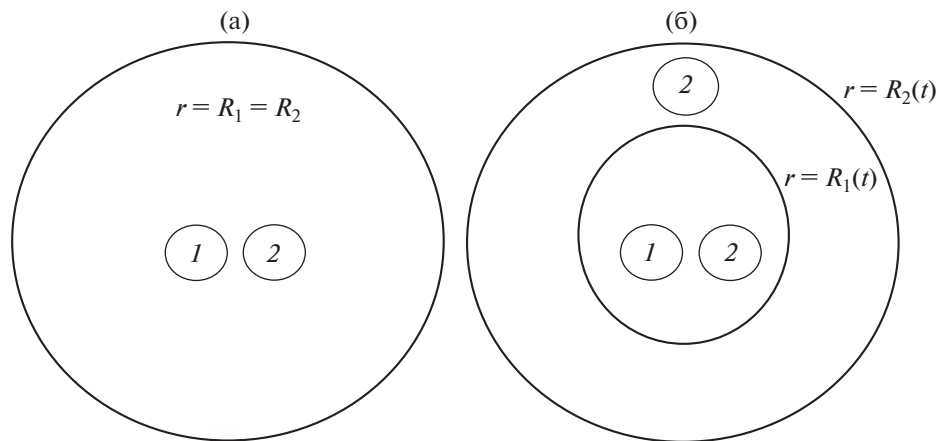


Рис. 1. Схематическое изображение структуры клеточного сфероида, образованного клетками 1-го и 2-го типов в разные моменты времени. Номера клеточных фаз в разных областях сфероида обведены маленькими кругами. (а) Строение в начальный момент времени. (б) Строение в некоторый момент времени t , когда границы клеточных фаз разошлись. Координаты $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$ являются радиусами сфер, ограничивающих первую и вторую клеточную фазы соответственно.

вается возможным описывать образование и перемещение фронтов, разделяющих области с различными объемными концентрациями клеток разных типов. В этих работах выполнено сравнение решений обеих постановок задач с целью выяснения того, какая из них физически более адекватно описывает процесс сортировки клеток.

В данной работе будет проведено исследование степени участия различных физических механизмов управления движением клеток, на процесс сортировки двух типов клеток, образующих в начальный момент времени агрегат сферической формы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу о перераспределении объемных концентраций двух типов клеток, которые в начальный момент времени равномерно перемешаны и образуют клеточный агрегат сферической формы (рис. 1). Постановка задачи об эволюции клеточной системы в рамках разработанной в [24] континуальной модели биологической сплошной многофазной среды, состоящей из двух активно взаимодействующих клеточных фаз и жидкости, подробно описана [26]. Ниже приведены краткое описание полной системы уравнений и основные предположения, включенные в постановку задачи. Более подробно будут обсуждаться только те уравнения, которые описывают механизмы, исследуемые в следующем разделе.

Клеточная среда рассматривается как многофазный континуум. Она образована двумя клеточными фазами, жидкостью и вспомогательными фазами, о которых будет сказано ниже. Решение задачи выполнено в предположении сферической симметрии, и все уравнения написаны в физическом базисе сферической системы координат с началом в центре сферы. У всех тензоров смешанные компоненты считаются равными нулю. Будем отмечать компоненты тензоров в направлениях r , φ и θ соответствующим буквенным индексом, заменяя повторяющийся индекс однократным. У единственной отличной от нуля компоненты векторов скорости в радиальном направлении индекс r опускается, а нижним индексом будем обозначать номер клеточной фазы.

Уравнения неразрывности для клеточных фаз написаны в предположении отсутствия в среде деления и гибели клеток, а также потоков массы между клеточными фазами и жидкостью. Истинные плотности фаз считаются постоянными и равными между собой, поэтому объемные концентрации фаз совпадают с массовыми.

В уравнениях импульсов пренебрегается силой межфазного вязкого трения между клеточными фазами и жидкостью. Это позволяет пренебречь изменением гидростатического давления во внеклеточной жидкости, считая его равным нулю, и решать уравнения для клеточных фаз отдельно от уравнений, описывающих движение жидкости.

Для описания сил активных взаимодействий между клетками в работах [24, 27] было предложено введение вспомогательных фаз, в которых развиваются активные напряжения. Материаль-

ными носителями вспомогательных фаз могут быть соответствующие сократительные структуры клеточного скелета, которые обеспечивают передачу усилий между клетками и приводят к их взаимному движению. Активные взаимодействия между клетками описываются посредством введения трех вспомогательных фаз, две из которых обеспечивают активные взаимодействия между клетками, принадлежащими только к первой или только ко второй клеточной фазе, и характеризующимися тензорами напряжений $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ соответственно. Третья дополнительная фаза с тензором напряжений $\tau^{(12)}$ обеспечивает перекрестные активные взаимодействия между клетками разных фаз. Объемы, занимаемые дополнительными фазами, считаются пренебрежимо малыми в сравнении с объемами основных фаз. Уравнения баланса импульса для клеточных фаз, в пренебрежении инерционными эффектами, учитывают силы их взаимодействия с дополнительными фазами, а также силы межфазного взаимодействия между двумя клеточными фазами.

Выражение для силы взаимодействия между клеточными фазами (пассивного взаимодействия), полученное в [24], учитывает две составляющие, одна из которых связана с действием сил давления в клеточных фазах, вторая — с силой вязкого трения на межфазных поверхностях.

Определяющие соотношения для активных напряжений в дополнительных фазах учитывают как хаотическую активность клеток в создании активных напряжений, которая характеризуется давлениями Π_1 , Π_2 , Π_{12} и проявляется в их отталкивании, так и направленные стягивающие усилия, определяемые неоднородными внешними стимулами — соседством с другими клетками. Предполагается, что активные стягивающие взаимодействия развиваются только между клетками внутри фаз, а между клетками разных фаз отсутствуют. Таким образом, в межфазной перекрестной активной силе будем учитывать только расталкивающую компоненту. Определяющие соотношения для активных напряжений в работе [24] приняты в следующем виде:

$$\tau_{\alpha}^{(1)} = -\Pi_1 + m_1 \frac{3}{4\pi R_s^4} \cdot \phi_1 \int_S \phi_1 \cdot r_{\alpha}^2 ds, \quad \tau_{\alpha}^{(2)} = -\Pi_2 + m_2 \frac{3}{4\pi R_s^4} \cdot \phi_2 \int_S \phi_2 \cdot r_{\alpha}^2 ds \quad (1.1)$$

$$\Pi_1 = E_1 \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_1 - \phi_2}, \quad \Pi_2 = E_2 \frac{\phi_2^2}{1 - \phi_1 - \phi_2}, \quad \tau_{\alpha}^{(12)} = -\Pi_{12} = -E_{12} \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_1 - \phi_2} \quad (1.2)$$

Здесь ϕ_1 и ϕ_2 — объемные концентрации первой и второй клеточных фаз соответственно. Интегрирование в соотношениях (1.1) выполняется по сферической поверхности S фиксированного для данной среды радиуса R_s (радиуса дальнего действия) с центром в рассматриваемой точке. Для точек, находящихся на расстоянии, меньшем R_s от поверхности клеточного сфероиды, интегрирование ведется только по той части поверхности сферы, которая лежит внутри этого объема. Индекс α принимает значения r , ϕ и θ , при этом r_r , r_{ϕ} и r_{θ} — координаты радиус-вектора точек на поверхности сферы S в локальном физическом базисе сферической системы координат.

В общем случае для многоклеточной биологической среды тензор скоростей деформации клеточных фаз можно представить в виде суммы составляющих, связанных с деформацией самих клеток и с их переупаковкой [28]. В работе [29] принята гипотеза о возможности пренебречь первой составляющей по сравнению со скоростью деформирования, связанного с переупаковкой клеток. Будем рассматривать переупаковку клеток как течение, управляемое напряжениями в самих клеточных фазах ($\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ — тензоры напряжений для первой и второй фазы соответственно) и активными напряжениями. Выражения для компонент тензоров скоростей деформации $e_{\alpha}^{(1)}$ и $e_{\alpha}^{(2)}$ (α принимает значения r , ϕ и θ) первой и второй клеточных фаз соответственно примем в следующем виде:

$$e_{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{2\mu_1} (\sigma_{\alpha}^{(1)} - \phi_2 \sigma_{\alpha}^{(2)}) - \frac{1}{2\mu_{11}} \tau_{\alpha}^{(1)} - \frac{1}{2\mu_{12}} \tau_{\alpha}^{(12)} \quad (1.3)$$

$$e_{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{2\mu_2} (\sigma_{\alpha}^{(2)} - \phi_1 \sigma_{\alpha}^{(1)}) - \frac{1}{2\mu_{22}} \tau_{\alpha}^{(2)} - \frac{1}{2\mu_{21}} \tau_{\alpha}^{(12)} \quad (1.4)$$

Выбор знаков учитывает, что растягивающие напряжения во вспомогательных фазах стимулируют сближение клеток (уплотнение клеточной фазы), а растягивающие клеточные напряжения в рассматриваемой фазе и сжимающие клеточные напряжения в соседней фазе этому уплотнению препятствуют. Полная система уравнений дополняется кинематическими соотношениями для компонент тензоров скоростей деформации клеточных фаз.

Граничные условия учитывают возможность независимого перемещения поверхностей, ограничивающих клеточные фазы. Координаты $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$ являются радиусами сфер, которые ограничивают области, занятые первой и второй клеточной фазой соответственно (рис. 1б).

В начальный момент времени клетки обеих фаз заполняют весь объем сферы, и в качестве начальных условий при $t = 0$ будем задавать положение границ клеточных фаз $R_1(0) = R_2(0) = R_0$ и начальные распределения концентраций фаз $\phi_1(0, x) = \phi_{10}(x)$, $\phi_2(0, x) = \phi_{20}(x)$. В дальнейшем при решении задачи будет происходить разделение границ областей, занятых клетками разных типов.

Сила, действующая на внешней границе со стороны окружающей среды, сводится к давлению жидкости и равна нулю. Будем предполагать, что в начальный момент времени (и пока $R_1(t) = R_2(t)$) на внешней границе нагрузка распределена равномерно между фазами пропорционально их концентрациям.

После разделения границ условие отсутствия нагрузки на внешней поверхности сферы справедливо только для клеточной фазы, граница которой является границей сферы (“внешняя” фаза). На границе (внутренняя граница) клеточной фазы, переместившейся вглубь сферы (“внутренняя” фаза), должны быть сформулированы условия, учитывающие перераспределение нагрузки между фазами (условия на разрыве были получены в [25]) и условие непрерывности потока массы внешней фазы.

Перемещение границ $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$ определяется движением клеток соответствующих фаз, поэтому считаются выполненными условия $\dot{R}_1(t) = v_1$ при $r = R_1(t)$ и $\dot{R}_2(t) = v_2$ при $r = R_2(t)$, где v_1 и v_2 — радиальные компоненты векторов скорости клеточных фаз. Из уравнений неразрывности и условия ограниченности скоростей фаз в центре сферы следует, что при $r = 0$: $v_1 = v_2 = 0$.

Граничные условия для ϕ_1 при $r = 0$ и $r = R_1(t)$, а также ϕ_2 при $r = 0$ и $r = R_2(t)$ не ставятся, так как границы фаз перемещаются со скоростями, равными скоростям частиц соответствующих фаз на этих границах. То есть границы $r = 0$ и $r = R_1(t)$ являются характеристиками уравнений соответствующих уравнений неразрывности.

Преобразование и схема численного решения полной системы уравнений с описанными граничными условиями приведены в [26].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Присутствие двух слагаемых в определяющих соотношениях для активных напряжений (1.1) учитывает действие различных механизмов в создании силы взаимодействия между клетками. Вклад различных механизмов в результирующее активное напряжение определяется выбором соответствующих коэффициентов. Первое слагаемое в (1.1), описывающее отталкивание клеток (активное давление), может обеспечиваться не только хаотической активностью клеток, но также и биологическими механизмами, связанными с реакцией клеток на свое окружение. В ряде тканей этот процесс может запускаться специфическими поверхностными молекулами при участии внутриклеточных регуляторов активности клеточного скелета [30, 31]. На клеточном уровне эти реакции характеризуются локальным увеличением сократимости кортикальных элементов клеточного скелета, приводящим к дестабилизации клеточной адгезии, подавлению протрузий в месте контакта, и изменению направления движения клеток. Флуктуации поверхностей клеток [32] и силы электростатического взаимодействия между контактирующими участками мембран соседних клеток также могут принимать участие в отталкивании клеток [33].

Интегральные слагаемые в (1.1) описывают направленные активные стягивающие взаимодействия между клетками. Развитие стягивающих взаимодействий может обеспечиваться как активными сокращениями в протрузиях, так и кортикальным натяжением в клетках. В обоих случаях величина сократительного усилия контролируется клеточной адгезией [34, 35].

Формулировка законов, определяющих скорость деформации клеточных фаз (1.3) и (1.4), предполагает, что процесс взаимного перемещения клеток друг относительно друга может управляться физически различными механизмами. Первые два слагаемых описывают поведение клеточных фаз как вязкое течение, сопровождаемое разрывом одних и образованием других клеточных контактов. Этот процесс контролируется прочностью межклеточных контактов. Физически коэффициенты μ_1 и μ_2 можно рассматривать как коэффициент вязкости среды.

Последние два слагаемых в (1.3) и (1.4) отвечает за перемещения клеток вследствие их механической активности, управляемой активными напряжениями. Этот механизм перемещения у ряда типов клеток проявляется в их способности распластываться и перемещаться на плоском

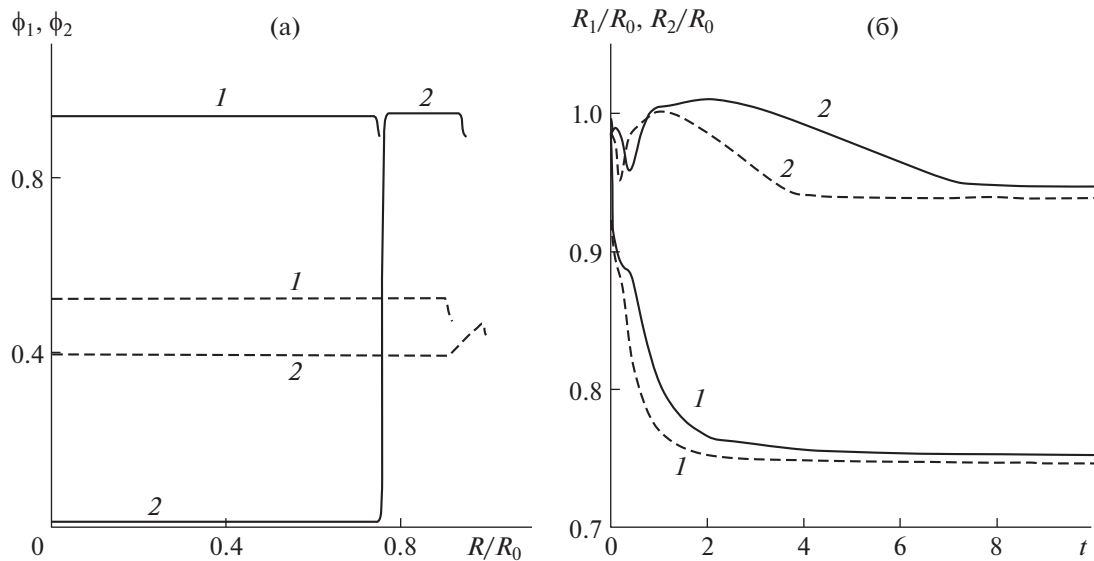


Рис. 2. Решения задачи о сортировке клеток при совпадающих пространственно-однородных начальных условиях $\phi_1(0, x) = \phi_{10}$, $\phi_2(0, x) = \phi_{20}$ и стандартных значениях параметров. (а) Распределения концентраций клеток (1 и 2 для ϕ_1 и ϕ_2 соответственно) в разные моменты времени. Штриховые линии – распределения концентраций при $t = 0.1$, сплошные линии – при $t = 10$. (б) Эволюция границ клеточных фаз (1 и 2 для R_1/R_0 и R_2/R_0 соответственно). Сплошные кривые соответствуют $m_1 = 7$ и $m_2 = 6$, штриховые – $m_1 = 12$ и $m_2 = 11$.

рис. 2а свидетельствует о формировании четкой границы, разделяющей клеточный сфероид на две области, каждая из которых занята клетками только одного типа.

Численное исследование показало, что распределения, представленные на рис. 2а сплошными линиями (при $t = 10$), остаются практически неизменными в последующие моменты времени. Предельные распределения концентрации клеток (при увеличении времени), полученные при $m_1 = 12$ и $m_2 = 11$, почти полностью совпадают со сплошными линиями на рис. 2а (плато расположены на $\sim 2.5\%$ выше).

Эволюция границ клеточных фаз, представленная на рис. 2б, сопровождается их стремлением к некоторым стационарным значениям. При этом стационарные значения радиусов границ клеточных фаз очень слабо зависят от значений коэффициентов, характеризующих развитие активных стягивающих взаимодействий между клетками внутри фаз – увеличение m_1 и m_2 почти в два раза фактически не меняет предельные значения R_1 и R_2 . Однако величины m_1 и m_2 оказывают влияние на скорость сортировки – штриховые линии на рис. 2б быстрее приближаются к своим стационарным значениям.

В работах [30, 31] утверждается, что для формирования и поддержания резкой границы между клетками разных типов достаточны два условия – это отсутствие стягивающих взаимодействий и развитие отталкивающих взаимодействий между клетками разных типов вдоль границы по разные ее стороны даже при идентичности параметров, характеризующих активные межклеточные взаимодействия (таких как адгезия и кортикальное натяжение).

Очевидно, что отсутствие различий между параметрами, характеризующими развитие активных напряжений в разных клеточных фазах, не может привести к сортировке клеток за счет межфазного активного давления, характеризуемого коэффициентом E_{12} , при условии полной идентичности всех остальных определяющих параметров и начальных распределений концентраций фаз. Однако расчеты показали, что если различие между m_1 и m_2 имело место только на некотором начальном интервале времени ($m_1 = 7$ и $m_2 = 6$ при $t < 0.1$), а далее их значения совпадают ($m_1 = m_2 = 6$), то в этом случае сформировавшаяся на начальном этапе асимметрия распределения концентраций фаз (штриховая линия на рис. 2а) в дальнейшем развивается почти также, как и при стандартных параметрах (рис. 2). В отличие от работ [30, 31], формирование четкой границы не требует увеличения значения коэффициента E_{12} , характеризующего расталкивание клеток разных типов. Достаточными условиями сортировки клеток разных типов и формирования резкой границы между областями, которые они занимают, является отсутствие стягивающих взаи-

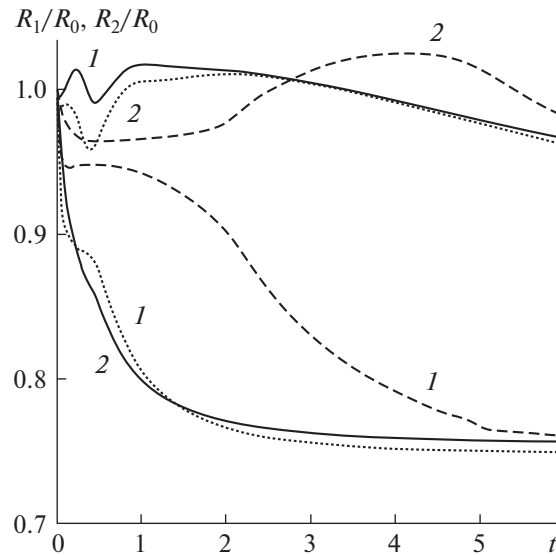


Рис. 3. Эволюция границ клеточных фаз (1 и 2 для R_1/R_0 и R_2/R_0 соответственно) при различных значениях параметра E_1 . Пунктирные линии получены при стандартных значениях параметров ($E_1 = 0.333$), штриховые линии — при $E_1 = 0.483$, сплошные линии — при $E_1 = 0.633$.

модействий между клетками разных фаз при условии асимметрии начальных распределений их концентрации или асимметрии параметров, характеризующих развитие активных напряжений в разных фазах. В рассматриваемой постановке задачи изменение E_{12} оказывает влияние на эволюцию сортировки, однако, предельные распределения и положения границ клеточных фаз остаются практически без изменения.

Б) Рассмотрим влияние составляющей активных напряжений, которая описывает нелинейное активное сопротивление клеток избыточному сближению, обусловленное их отталкиванием. Эти слагаемые описываются активными давлениями (1.2).

Эволюция границ клеточных фаз при различных значениях параметра E_1 (при этом для всех остальных параметров будут использованы стандартные значения) представлена на рис. 3. Видно, что увеличение параметра E_1 , характеризующего активное отталкивание между клетками 1-й фазы, приводит к замедлению развития сортировки клеток на начальном этапе (штриховые линии на рис. 3) при условии, что E_1 не превышает некоторое критическое значение E^* . Замедление сортировки является временным, и графики зависимостей координат границ фаз от времени асимптотически приближаются к зависимостям, полученным при стандартных значениях параметров (пунктирные линии на рис. 3). В результате происходит формирование клеточной структуры, в которой клетки 1-й фазы, характеризуемые большим значением коэффициента m_1 , по-прежнему занимают центральную область и оказываются окруженными клетками 2-й фазы.

Дальнейшее увеличение значения параметра E_1 приводит к существенному изменению эволюции границ клеток. Превышение параметром E_1 критического значения E^* приводит к “инверсии” сортировки. В этом случае клетки 1-й фазы, характеризуемые значением m_1 , большим m_2 , занимают периферическую область сфероида, и окружают клетки 2-й фазы, которые занимают центральную область (координаты границ фаз изображены сплошными линиями на рис. 3). Эволюция пространственно-однородных начальных распределений концентраций клеток происходит качественно сходно кривым на рис. 2а, но с одним важным отличием: номера 1-й и 2-й клеточных фаз следует поменять местами. Таким образом, несмотря на то что активные стягивающие взаимодействия между клетками второй фазы слабее, чем в первой, именно они стремятся занять центральную область слоя. Результаты работы [32] также свидетельствуют о важной роли активного отталкивания клеток при их сортировке. Флуктуации клеточной поверхности, приводящие к активному отталкиванию клеток, являются одним из ключевых факторов, управляющих их пространственным позиционированием.

В) Помимо сил активного взаимодействия клеточные движения могут контролироваться как механическими пассивными свойствами среды, характеризуемыми коэффициентами μ_1 и μ_2 , так и подвижностью клеток, характеризуемой коэффициентами μ_{kn} ($k = 1, 2$ и $n = 1, 2$) в уравнениях (1.3), (1.4).

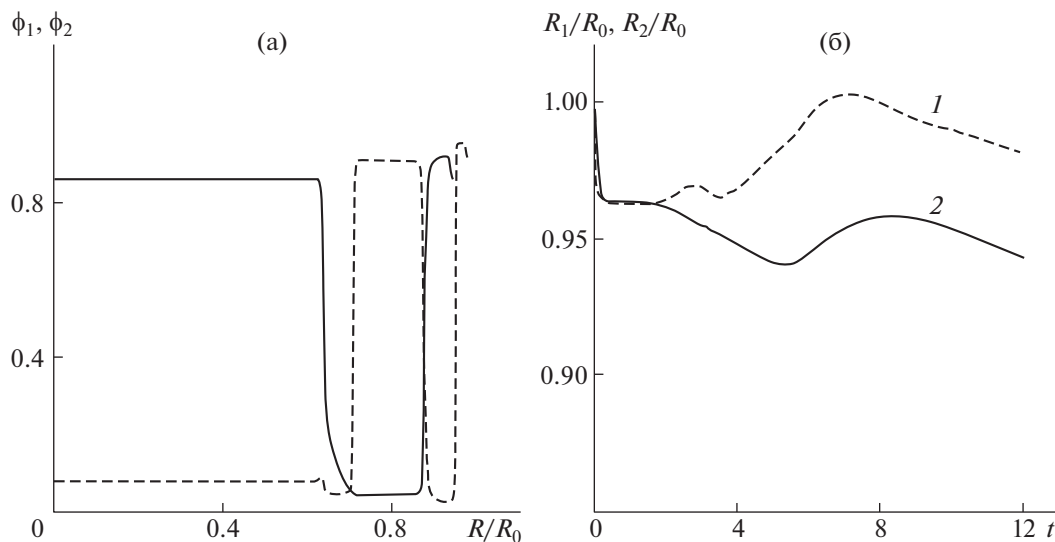


Рис. 4. Решения задачи о сортировке клеток при совпадающих пространственно-однородных начальных условиях $\phi_1(0, x) = \phi_{10}$, $\phi_2(0, x) = \phi_{20}$, $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 10$. (а) Распределения концентраций клеток (1 и 2 для ϕ_1 и ϕ_2 соответственно) при $t = 12$. (б) Эволюция границ клеточных фаз (1 и 2 для R_1/R_0 и R_2/R_0 соответственно).

В работе [15] описаны эксперименты, связанные с изучением сортировки клеток нормально-го эпителия молочной железы и нескольких типов опухолевых клеток. По данным экспериментов нельзя непосредственно оценить значения коэффициентов m_1 и m_2 , характеризующих развитие активных стягивающих напряжений в разных клеточных средах. Однако косвенные данные позволяют предположить, что коэффициент, характеризующий развитие активных стягивающих напряжений в опухолевых клетках определенного типа, меньше аналогичной величины для эпителия. Результаты сортировки клеток показали, что для этой пары типов клеток происходило нарушение ожидаемого сценария: опухолевые клетки, у которых активные стягивающие взаимодействия слабее, чем у эпителиальных клеток, тем не менее занимали центральную область агрегата.

Одним из возможных объяснений наблюдаемой сортировки может являться различие подвижностей рассматриваемых типов клеток, а также различие реологических свойств рассматриваемых клеточных сред — многие ткани демонстрируют переход от жидкого состояния к твердому и наоборот [15].

В.1) Движения клеток друг относительно друга в рамках используемой модели рассматриваются как течение. Исследуем влияние коэффициентов μ_1 и μ_2 , характеризующих вязкости клеточных фаз, на сортировку клеток.

Распределения концентрации клеток, полученные в момент времени $t = 12$ (рис. 4а) при значениях параметров $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 10$ (значения остальных параметров взяты стандартными), показывают инверсию сортировки — клетки 2-й фазы, характеризуемой значением m_2 , меньшим m_1 и обладающие значительно большей вязкостью, стремятся занять центральную область, в которой концентрация клеток 1-й фазы приближается к нулю. Однако пространственное разделение клеток разных фаз, происходящее при данном наборе параметров, нельзя назвать типичной сортировкой (по крайней мере автору не известно описание формирования клеточных структур такого типа). Несмотря на пространственное разделение клеток в центральной области клеточного агрегата, клетки разных фаз остаются “перемешанными” — чередуются слоями — в его периферической области. При этом границы областей, занятых клетками разных фаз, расходятся очень незначительно (рис. 4б). Возможной причиной такой эволюции клеточной системы является неустойчивость границы $r = R_2(t)$ клеток 2-й фазы и при данном наборе параметров, и сферически симметричная постановка задачи является некорректной. Этот вопрос требует дополнительного исследования и в данной работе не рассматривается.

При значениях параметров $\mu_1 = 10$ и $\mu_2 = 1$ проходит стандартная сортировка клеток. Распределения концентраций клеточных фаз и эволюция их границ с увеличением времени приближаются к линиям на рис. 2.

В.2) Различие параметров, характеризующих подвижности клеток разных фаз, также может приводить к нарушению типичного сценария сортировки, когда клетки, обладающие более сильными активными стягивающими взаимодействиями, занимают центральную область и окружены клетками, у которых активные стягивающие взаимодействия слабее.

Вычисления, выполненные при значениях параметров $\mu_{11} = 1.5$, $\mu_{22} = 0.5$, (клетки 1-й фазы являются менее подвижными, чем клетки 2-й фазы), показали, что эволюция начальных пространственно-однородных распределений клеток приводит к формированию клеточной структуры, в которой клетки 1-й фазы занимают периферическую область и окружают клетки 2-й фазы, занимающие центральную область, несмотря на то, что $m_1 > m_2$. Предельные (при больших t) распределения концентраций клеточных фаз и эволюция их границ качественно соответствуют рис. 2, с условием того, что номера 1-й и 2-й клеточных фаз следует поменять местами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Движение клеток друг относительно друга является фундаментальным процессом, который лежит в основе самых разных биологических явлений. Физические и биологические механизмы на клеточном и тканевом масштабах, управляющие движением клеток, до сих пор являются предметом обсуждений.

Изучение эволюции простых клеточных систем таких, как смеси клеток разных типов [15, 22, 23], показало, что активные силовые межклеточные взаимодействия приводят к пространственному разделению клеток разных типов. Экспериментальные данные свидетельствуют о решающей роли параметров, которые характеризуют различные механизмы развития активных напряжений, а также межклеточную адгезию и клеточную подвижность.

В данной работе исследовано влияния различных параметров, характеризующих развитие активных напряжений и деформацию среды, на процесс сортировки двух типов клеток, образующих в начальный момент времени агрегат сферической формы. Решение задачи позволяет оценить роль различных физических механизмов, несомненно вовлеченных в процесс эволюции клеточных систем.

В результате получено, что клетки той фазы, в которой активные стягивающие межклеточные взаимодействия сильнее (при одинаковых для разных клеточных фаз значениях остальных параметров и одинаковых начальных однородных распределениях концентрации фаз), стремятся занять центральную область сфероида. В то же время клетки другой фазы, между которыми стягивающие взаимодействия более слабые, вытесняются на периферию. При этом формируется резкая граница, отделяющая одну фазу от другой.

Показано, что хаотическая активность клеток, проявляющаяся в их активном отталкивании, является одним из важных механизмов, оказывающих влияние на процесс сортировки. Так, увеличение хаотической активности клеток может привести к инверсии сортировки, когда клеточная фаза, обладающая большими активными стягивающим взаимодействиями, будет занимать периферическую область клеточного сфероида и окружать компактную массу клеток, у которых стягивающие взаимодействия слабее.

Помимо характеристик клеточной среды, имеющих отношение к развитию активных напряжений, сортировка клеток контролируется и другими не менее важными параметрами. Подвижность клеток разных фаз и реологические свойства клеточных фаз являются ключевыми факторами, которые оказывают влияние на эволюцию клеточной системы и могут приводить к нарушению стандартного сценария сортировки, приводя к ее инверсии.

Работа поддержана РФФИ (проект № 20-01-00329) и Госпрограммой АААА-А19-119012990119-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davidson L.A., Joshi S.D., Kim H.Y., Dassow M., Zhang L., Zhou J. Emergent morphogenesis: elastic mechanics of a self-deforming tissue // J. Biomech. 2010. V. 43. № 1. P. 63–70.
2. Keller R., Davidson L., Edlund A., Elul T., Ezin M., Shook D., Skoglund P. Mechanisms of convergence and extension by cell intercalation // Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci. 2000. V. 355 (1399). P. 897–922.
3. Keller R., Davidson L.A., Shook D.R. How we are shaped: The biomechanics of gastrulation // Differentiation. 2003. V. 71. P. 171–205.
4. Fried P., Gilmour D. Collective cell migration in morphogenesis, regeneration and cancer // Nat. Rev. Mol. Cell Biol. 2009. V. 10. P. 445–457.

5. *Farooqui R., Fenteany G.* Multiple rows of cells behind an epithelial wound edge extend cryptic lamellipodia to collectively drive cell-sheet movement // *J. Cell. Sci.* 2005. V. 118. P. 51–63.
6. *Serra-Picamal X., Conte V., Vincent R., Anon E., Tambe D.T., Bazellieres E., Butler J.P., Fredberg J.J., Trepas X.* Mechanical waves during tissue expansion // *Nature Physic.* 2012. V. 8. P. 628–634.
7. *Tracqui P.* Biophysical models of tumour growth // *Rep. Progr. Phys.* 2009. V. 72. № 5. P. 056701.
8. *Franssen L.C., Lorenzi T., Burgess A.E.F., Chaplain M. A. J.* A mathematical framework for modelling the metastatic spread of cancer // *Bull. Math. Biol.* 2019. V. 81. P. 1965–2010.
9. *Mammoto T., Ingber D.E.* Mechanical control of tissue and organ development // *Development.* 2010. V. 137. № 9. P. 1407–1420.
10. *Reig G., Pulgar E., Concha M.L.* Cell migration: from tissue culture to embryos // *Development.* 2014. V. 141. № 10. P. 1999–2013.
11. *Gerhart J.C.* Mechanisms regulating pattern formation in the amphibian egg and early embryo. In: “Biological Regulation and Development, Goldberger R. (ed), New York: Plenum Press, 1980. V. 2. P. 133–316.
12. *Belousov L.V., Louchinskaia N.N., Stein A.A.* Tension-dependent collective movements in the early gastrula ectoderm of *Xenopus laevis* embryos // *Dev. Gen. Evol.* 2000. V. 210. P. 92–104.
13. *Maitre J.L., Berthoumieux H., Krens S.F., Salbreux G., Julicher F., Paluch E., Heisenberg C.P.* Adhesion functions in cell sorting by mechanically coupling the cortices of adhering cells // *Science.* 2012. V. 338(6104). P. 253–256.
14. *Theveneau E., Mayor R.* Cadherins in collective cell migration of mesenchymal cells // *Curr. Opin. Cell Biol.* 2012. V. 24. P. 677–684.
15. *Pawlizak S., Fritsch A.W., Grosser S., Ahrens D., Thalheim T., Riedel S., Kiebling T.R., Oswald L., Zink M., Manning M.E., Kas J. A.* Testing the differential adhesion hypothesis across the epithelial-mesenchymal transition // *New Journal of Physics.* 2015. V. 17. № 8. 083049.
16. *Vasioukhin V., Fuchs E.* Actin dynamics and cell-cell adhesion in epithelia // *Curr. Opin. Cell Biol.* 2001. V. 13. № 1. P. 76–84.
17. *Bertet C., Sulak L., Lecuit T.* Myosin-dependent junction remodelling controls planar cell intercalation and axis elongation // *Nature.* 2004. V. 429. P. 667–671.
18. *Lecuit T., Lenne P.F., Munro E.* Force generation, transmission, and integration during cell and tissue morphogenesis // *Annu. Rev. Cell Dev. Biol.* 2011. V. 27. P. 157–184.
19. *Harris A.K.* Is cell sorting caused by differences in the work of intercellular adhesion? A critique of the steinberg hypothesis // *J. Theor. Biol.* 1976. V. 61. P. 267–285.
20. *Brodland G.W.* The Differential Interfacial Tension Hypothesis (DITH): a comprehensive theory for the self-rearrangement of embryonic cells and tissues // *J. Biomech. Eng.* 2002. V. 124. P. 188–197.
21. *Krieg M., Arboleda-Estudillo Y., Puech P.H., Kafer J., Graner F., Muller D.J., Ytisenberg C.-P.* Tensile forces govern germ-layer organization in zebrafish // *Nat. Cell Biol.* 2008. V. 10. P. 429–436.
22. *Steinberg M.S., Wiseman L.L.* Do morphogenetic tissue rearrangements require active cell movements? // *J. Cell Biol.* 1972. V. 55. P. 606–615.
23. *Mehes E., Viscek T.* Segregation mechanisms of tissue cells: from experimental data to models // *Complex Adapt. Syst. Model.* 2013. V. 1. P. 4.
24. *Логвенков С.А., Штейн А.А.* Континуальное моделирование биологической среды, составленной активно взаимодействующими клетками двух разных типов // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. № 6. С. 3–16.
25. *Логвенков С.А., Штейн А.А.* Континуальное моделирование сортировки клеток в плоском слое с учетом возможного расхождения границ областей, занятых клетками двух разных типов // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 3. С. 1–16.
26. *Логвенков С.А.* Моделирование сортировки двух типов клеток в клеточном сфероиде с учетом подвижности границ областей, занятых клетками разных типов // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 6. С. 101–115.
27. *Stein A.A., Logvenkov S.A., Volodyaev I.V.* Continuum modeling of mechano-dependent reactions in tissues composed of mechanically active cells // *BioSystems.* 2018. V. 173. P. 225–234.
28. *Белоусов Л.В., Логвенков С.А., Штейн А.А.* Математическая модель активной биологической сплошной среды с учетом деформаций и переупаковки клеток // *Известия РАН. МЖГ.* 2015. № 1. С. 3–14.
29. *Логвенков С.А., Штейн А.А.* Математическая модель пространственной самоорганизации в механически активной клеточной среде // *Биофизика.* 2017. Т. 62. № 6. С. 1123–1133.
30. *Taylor H.B., Khuong A., Wu Z., Xu Q., Morley R., Gregory L., Poliakov A., Taylor W.R., Wilkinson D.G.* Cell segregation and border sharpening by Eph receptor-ephrin-mediated heterotypic repulsion // *J. R. Soc. Interface.* 2017. V. 14. № 132. P. 20170338.
31. *Canty L., Zarour E., Kashkooli L., François P., Fagotto F.* Sorting at embryonic boundaries requires high heterotypic interfacial tension // *Nat. Commun.* 2017. V. 8. P. 157.
32. *Yanagida A., Corujo-Simon E., Revell C.K., Sahu P., Stirparo G.G., Aspalter I.M., Winkel A.K., Peters R., De Belly H., Cassani D.A.D., Achouri S., Blumenfeld R., Franze K., Hannezo E., Paluch E.K., Nichols J., Chalut K.J.* Cell surface fluctuations regulate early embryonic lineage sorting // *Cell.* 2022. V. 185. № 5. P. 777–793.
33. *Mehes E., Viscek T.* Collective motion of cells: from experiments to models // *Integr. Biol.* 2014. V. 6. № 9. P. 831–854.
34. *Halbleib J.M., Nelson W.J.* Cadherins in development: cell adhesion, sorting, and tissue morphogenesis // *Genes Dev.* 2006. V. 20. P. 3199–214.
35. *Niessen C.M., Leckband D., Yap A.S.* Tissue organization by cadherin adhesion molecules: dynamic molecular and cellular mechanisms of morphogenetic regulation // *Physiol. Rev.* 2011. V. 91. P. 691–731.

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

© 2023 г. М. И. Шишина^{а,*}

^аНижегородский планетарий им. Г.М. Гречко, Нижний Новгород, Россия

*E-mail: java-jsp@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.05.2022 г.

После доработки 20.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

Рассматриваются поверхностные гравитационно-капиллярные волны на глубокой воде с постоянной завихренностью в области, ограниченной свободной поверхностью и бесконечно глубоким плоским дном. Из системы точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных переменных, записанной в неявном виде, с учетом поверхностного натяжения, выведено нелинейное уравнение Шредингера. При выводе нелинейного уравнения Шредингера учтена роль среднего течения. Нелинейное уравнение Шредингера исследовано на модуляционную неустойчивость. Получено солитонное решение нелинейного уравнения Шредингера, представляющее собой солитон типа “девятый вал”.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, поверхностные гравитационно-капиллярные волны, завихренность, конформные переменные, среднее течение, модуляционная неустойчивость, солитон

DOI: 10.31857/S0568528122600321, **EDN:** DUFTMO

Пусть в слое тяжелой жидкости со свободной поверхностью существует двумерное течение с постоянной завихренностью, и на этом потоке рассматриваются поверхностные гравитационно-капиллярные волны. Поскольку характерные масштабы таких волн существенно меньше глубины слоя, то для них выполняются условия глубокой воды, и слой жидкости может считаться бесконечно глубоким. Течение с постоянной завихренностью представляет собой более простую модель волн на сдвиговом потоке.

При изучении поверхностных волн важную роль играет нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Для гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой воды НУШ впервые получил В.Е. Захаров в работе [1] с помощью разработанного гамильтоновского формализма. Позднее НУШ для случая произвольной глубины было независимо получено в [2, 3] с использованием метода многомасштабных разложений в эйлеровых координатах. Также в [4] представлен вывод НУШ с применением метода усредненного лагранжиана. В работах [1–4] при выводе НУШ авторы предполагали волновое движение потенциальным.

Вопрос получения НУШ, описывающего эволюцию слабонелинейных волн на воде с постоянной завихренностью, рассматривался в работах [5–8]. Однако в публикации [9] указана ошибочность НУШ, полученного в [5–8], поскольку при выводе уравнения не учитывалось среднее течение. В работе [9] отмечено, что эвристический метод получения НУШ из нелинейного дисперсионного соотношения [10] не действует в присутствии завихренности, в том числе, в случае бесконечной глубины. В [9] представлен вывод НУШ для волн на воде конечной глубины с постоянной завихренностью из системы нелинейных уравнений в декартовых координатах с использованием метода многих масштабов, и, в предельном случае, когда глубина воды устремляется к бесконечности, из НУШ для волн на воде конечной глубины с постоянной завихренностью получено НУШ для волн на потоке бесконечной глубины с постоянной завихренностью с учетом среднего течения.

В работе [11] результаты [9] применены к пакетам гравитационно-капиллярных волн и выведено нелинейное уравнение Шредингера для огибающей двумерных гравитационно-капиллярных волн, распространяющихся на свободной поверхности вертикального сдвигового потока с

постоянной завихренностью. В [11] исследовано влияние завихренности на модуляционную неустойчивость слабонелинейных гравитационно-капиллярных волновых пакетов и показано, что завихренность существенно изменяет модуляционную неустойчивость цугов гравитационно-капиллярных волн, а именно, инкремент и ширину полосы неустойчивости.

Целью настоящей работы является вывод НУШ для поверхностных гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде с постоянной завихренностью. Отметим, что с помощью методов теории функций комплексного переменного и техники конформных преобразований из системы основных уравнений эволюции поверхностных волн на потоке бесконечной глубины с постоянной завихренностью в области со свободной поверхностью и бесконечно глубоким плоским дном в декартовых координатах получена система точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных переменных [12], разрешенная относительно производной по времени.

Следует отметить, что система уравнений [12] является обобщением уравнений для потенциальных волн на поверхности идеальной жидкости, выведенных в [13–20]. В [13] при использовании конформных преобразований для решения нестационарных задач получены нестационарные интегро-дифференциальные уравнения, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости со свободной поверхностью, а именно: уравнение для конформного преобразования и уравнение для потенциала на границе полуплоскости. В [14–20] найдены новые формы уравнений в комплексных переменных, которые описывают нелинейную динамику поверхностных волн.

Система уравнений [12] в [21] сведена, с использованием теории функций комплексного переменного и методов конформных преобразований, к эквивалентной системе точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных координатах, заданной в неявном виде.

В данной работе при получении НУШ к системе точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных переменных, заданной в неявном виде [21] и записанной с учетом поверхностного натяжения, применен метод многих масштабов. При этом в процессе выполненных преобразований учтена роль среднего течения. Найденное в настоящей работе НУШ для гравитационно-капиллярных волн на потоке бесконечной глубины с постоянной завихренностью в случае отсутствия поверхностного натяжения совпадает с аналогичным результатом работы [9] для гравитационных волн на глубокой воде с постоянной завихренностью.

1. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

1.1. Основные уравнения в декартовых координатах

Пусть двумерное течение идеальной жидкости существует на потоке с постоянной завихренностью ω , свободной границей, глубины H_0 . Рассматриваются волны на поверхности жидкости, длины которых много меньше H_0 . Тогда, при изучении таких возмущений жидкости, слой жидкости может считаться бесконечно глубоким. В плоскости (x, y) идеальная несжимаемая жидкость занимает ограниченную свободной поверхностью $F(x, y, t) = 0$ ($t > 0$ – время) область D ; $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, 0\}$ – вектор скорости течения жидкости.

Вертикальная компонента скорости течения равна нулю при $y \rightarrow -\infty$

$$v_y|_{y \rightarrow -\infty} = 0$$

Рассматриваются волны на потоке с постоянной завихренностью ω

$$\omega = -\Delta\Psi(x, y, t) \quad (1.1)$$

где $\Psi = \Psi(x, y, t)$ – функция тока, такая что

$$v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Общее решение уравнения (1.1), в силу его линейности при постоянном $\omega = \text{const}$, для функции тока может быть представлено в следующем виде

$$\Psi = -\frac{\omega y^2}{2} + \Phi \quad (1.2)$$

где функция $\Phi = \Phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = 0$$

По гармонической функции $\Phi(x, y, t)$ находится сопряженная гармоническая функция $\varphi = \varphi(x, y, t)$ (с точностью до постоянного слагаемого, которое считается равным нулю), связанная с $\Phi(x, y, t)$ условиями Коши–Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Функция φ называется эффективным потенциалом. Тогда функция

$$W(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + i\Phi(x, y, t)$$

представляет собой аналитическую функцию комплексного переменного $z = x + iy$ в области D . Функция $W(z, t)$ условно называется “комплексным потенциалом”.

Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

со следующими граничными условиями на свободной поверхности [12]

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi - \omega \mathbf{x}_0|^2 + \omega \left(\Phi - \frac{\omega y^2}{2} \right) + \frac{p_a}{\rho} + gy \right) \Big|_{F(x, y, t)=0} = 0 \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} - \omega y \frac{\partial F}{\partial x} \right) \Big|_{F(x, y, t)=0} = 0 \quad (1.4)$$

$$p \Big|_{F(x, y, t)=0} = p_a$$

$$\varphi_y \Big|_{y \rightarrow -\infty} = 0$$

где $\mathbf{x}_0$ – единичный вектор оси абсцисс плоскости (x, y) , $\mathbf{v} = \nabla \varphi - \omega \mathbf{x}_0$ – вектор скорости течения жидкости, при этом $\nabla \varphi$ – скорость возмущений относительно среднего течения жидкости $\omega \mathbf{x}_0$, p_a – атмосферное давление на свободной поверхности, ρ – плотность жидкости.

Из граничного условия (1.4) следует, что свободная поверхность воды является линией тока, вдоль которой функция тока $\Psi(x, y, t) = \text{const}$, т.е.

$$\left(\Phi(x, y, t) - \frac{\omega y^2}{2} \right) \Big|_{F(x, y, t)=0} = \text{const}.$$

Тогда “комплексная скорость”

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

Поскольку $\frac{\partial W}{\partial z} = v_x - iv_y$, то $|\mathbf{v}| = \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right| = 0$ на поверхности жидкости.

1.2. Уравнения в конформных координатах

Пусть несжимаемая жидкость в плоскости (x, y) занимает ограниченную свободной поверхностью область $G = \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y \leq f(x, t)\}$. Введем комплексную функцию $z = z(\xi, \eta, t) = x(\xi, \eta, t) + iy(\xi, \eta, t)$, аналитическую в области G . Выполним конформное отображение области G , занятой жидкостью в плоскости $z = x + iy$, в полуплоскость $-\infty < \xi < +\infty, -\infty < \eta \leq 0$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью функции

$$z(\xi, \eta, t) = \xi + i\eta + z_1(\xi, \eta, t) \equiv \xi + i\eta + x_1(\xi, \eta, t) + iy_1(\xi, \eta, t)$$

где $x_1(\xi, \eta, t)$, $y_1(\xi, \eta, t)$ – функции, гармонические в полуплоскости $\text{Im } \zeta \leq 0$ и удовлетворяющие в этой полуплоскости условиям Коши–Римана

$$x_{1\xi} = y_{1\eta}, \quad x_{1\eta} = -y_{1\xi}$$

При этом функции y и x_1 связаны между собой соотношением

$$y = H(x_1)$$

где H – интегральный оператор – преобразование Гильберта

$$H f(u) = \frac{1}{\pi} P.V \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u}$$

Якобиан отображения

$$J = x_\xi^2 + y_\xi^2 \neq 0$$

Функции $\varphi(\xi, \eta, t)$ и $\Phi(\xi, \eta, t)$ – гармонические в полуплоскости $\text{Im } \zeta \leq 0$ ($\zeta = \xi + i\eta$) и удовлетворяют условиям Коши–Римана

$$\varphi_\xi = \Phi_\eta, \quad \varphi_\eta = -\Phi_\xi$$

Следовательно, “комплексный потенциал” $W = \varphi + i\Phi$ является аналитической функцией в полуплоскости $\text{Im } \zeta \leq 0$. При этом на действительной оси

$$W = \varphi + iH(\varphi)$$

Тогда имеем полученную в [12] систему уравнений, разрешенную относительно производной по времени (при $\eta = 0$)

$$\begin{cases} z_t = -iz_\xi(1 + iH)\left(\frac{\Phi_\xi - \omega y y_\xi}{J}\right) \\ \varphi_t + gy + \omega\Phi + \frac{p_a}{\rho} = \varphi_\xi H\left(\frac{\Phi_\xi - \omega y y_\xi}{J}\right) + \frac{\omega y x_\xi}{J} \varphi_\xi - \frac{1}{2J}((\varphi_\xi)^2 - (\Phi_\xi)^2) \end{cases} \quad (1.5)$$

где p_a – атмосферное давление на свободной поверхности, ρ – плотность жидкости.

Следует отметить, что для волн на потоке конечной глубины уравнения, аналогичные (1.5), получены в [22].

2. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

Считая в дальнейшем $p_a = 0$, запишем систему уравнений (1.5) в виде эквивалентной ей системы уравнений, заданной в неявном виде [21] (при $\eta = 0$), учитывая при этом коэффициент поверхностного натяжения воды σ

$$\begin{cases} y_t(1 + x_{1\xi}) - y_\xi x_{1t} - \omega y y_\xi + H(\varphi_\xi) = 0 \\ \varphi_t(1 + x_{1\xi}) - \varphi_\xi x_{1t} + \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) y + g y x_{1\xi} + \omega(H(\varphi)(1 + x_{1\xi}) - \varphi_\xi y) - \\ - H(\varphi_t y_\xi - \varphi_\xi y_t + g y y_\xi + \omega H(\varphi) y_\xi) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

где $y = y(\xi, t)$ – вызванное волновым движением возвышение (огибающая) свободной поверхности над стационарной поверхностью $\eta(\xi, t) = 0$; $\varphi(\xi, t)$ – потенциал поля скоростей, создаваемого волной на поверхности жидкости.

Получим нелинейное уравнение Шредингера для огибающей квазигармонического пакета гравитационно-капиллярных волн, распространяющихся на сдвиговом потоке с постоянной завихренностью ω вдоль оси $O\xi$ под действием внешних сил, полученных от потенциала скорости φ (ось $O\eta$ направлена вертикально вверх).

Предположим, что ξ, t в системе (2.1) – пространственная и временная переменные для несущей волны. Введем набор “медленных” пространственных и временных переменных, которые

описывают движение огибающей волнового пакета, и рассмотрим эти переменные как независимые. Имеем

$$\xi_0 = \xi, \quad \xi_1 = \varepsilon \xi, \quad \xi_2 = \varepsilon^2 \xi, \dots, \quad t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \dots$$

где малый параметр ε — крутизна волны.

Операторы дифференцирования по ξ и t заменяются на следующие

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \dots \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_0 \partial \xi_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \dots \end{aligned}$$

В соответствии с методом многих масштабов решение системы (2.1) ищем в виде разложения в асимптотический ряд по малым степеням ε функций

$$\begin{aligned} y &= \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \dots \\ \varphi &= \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3 + \dots \end{aligned}$$

Подставив в систему (2.1) вместо y и φ их разложения, выделим члены одинаковых порядков малости. В порядке ε получим линеаризованный вариант системы (2.1), а именно

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t_0} + H \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \right) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} + \omega H(\varphi_1) + \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \right) y_1 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Решение линейного приближения y_1 выберем в виде

$$y_1 = \frac{1}{2} (A(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) e^{i\theta} + \text{к.с.}) \quad (2.3)$$

где A — комплексная амплитуда огибающей волнового пакета, $\theta = \Omega t_0 - k \xi_0$, к.с. — комплексно-сопряженное выражение. Из системы (2.2) находим, что

$$\varphi_1 = \frac{i\Omega}{2k} (A(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) e^{i\theta} + \text{к.с.}) \quad (2.4)$$

с точностью до постоянного слагаемого, которое полагаем равным нулю, причем частота волны Ω и волновое число k связаны дисперсионным соотношением

$$\Omega^2 - \Omega \omega - \left(g + \frac{\sigma k^2}{\rho} \right) k = 0 \quad (2.5)$$

Исключая y_1 из системы (2.2), получаем интегро-дифференциальное уравнение для φ_1

$$L(\varphi_1) \equiv \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_0^2} + \omega H \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} \right) - \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \right) H \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \right) = 0 \quad (2.6)$$

где оператор

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + \omega H \left(\frac{\partial}{\partial t_0} \right) - \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \right) H \left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)$$

Решение уравнения (2.6) имеет вид (2.4).

Члены порядка ε^2 в системе (2.1) имеют вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial y_2}{\partial t_0} + \frac{\partial y_1}{\partial t_1} - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} H\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right) - \omega y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} + H\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0}\right) = 0 \right. \\ & \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0} + \omega H(\varphi_2) + \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2}\right) y_2 - 2 \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} H\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right) - g y_1 H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) - \omega \left(H(\varphi_1) H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + y_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \right) - \right. \\ & \left. - H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} + g y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} + \omega \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} H(\varphi_1) \right) = 0 \right. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Исключая y_2 из системы (2.7), приходим к интегро-дифференциальному уравнению для φ_2

$$\begin{aligned} & L(\varphi_2) + \frac{\partial}{\partial t_0} \left[-\frac{2\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} H\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right) - g y_1 H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) - \right. \\ & \left. - \omega \left(H(\varphi_1) H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + y_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \right) - H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} + g y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} + \omega \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} H(\varphi_1) \right) \right] - \\ & - \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \right) \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} H\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} H\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right) - \omega y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} + H\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}\right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставляя в уравнение (2.8) соотношения (2.3), (2.4) для y_1 и φ_1 и учитывая дисперсионное соотношение (2.5), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} & L(\varphi_2) - \frac{\Omega(2\Omega - \omega)}{2k} \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\theta} - \left(\frac{\Omega^2(\Omega - \omega)}{2k^2} + \frac{\Omega\sigma k}{\rho} \right) \frac{\partial A}{\partial \xi_1} e^{i\theta} + \\ & + i \left(\frac{\Omega(4\Omega^2 - 3\Omega\omega + \omega^2)}{4} - \frac{(4\Omega + 3\omega)\sigma k^3}{4\rho} \right) A^2 e^{2i\theta} + \text{к.с.} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Приравнявая к нулю члены, пропорциональные $\exp(i\theta)$, которые будут приводить решение уравнения (2.9) к секулярному росту, находим, что амплитуда A удовлетворяет уравнению

$$(2\Omega - \omega) \frac{\partial A}{\partial t_1} + \left(\frac{\Omega(\Omega - \omega)}{k} + \frac{2\sigma k^2}{\rho} \right) \frac{\partial A}{\partial \xi_1} = 0$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + c_g \frac{\partial A}{\partial \xi_1} = 0 \quad (2.10)$$

где $c_g = \frac{\Omega(\Omega - \omega)}{k(2\Omega - \omega)} + \frac{2\sigma k^2}{\rho(2\Omega - \omega)}$ — групповая скорость.

Уравнение (2.10) означает, что возмущения огибающей волнового пакета в первом приближении распространяются с групповой скоростью, поскольку, как следует из дисперсионного соотношения (2.5)

$$c_g = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = \frac{\Omega(\Omega - \omega)}{k(2\Omega - \omega)} + \frac{2\sigma k^2}{\rho(2\Omega - \omega)}$$

Таким образом, уравнение (2.9) принимает вид

$$L(\varphi_2) + i \left(\frac{\Omega(4\Omega^2 - 3\Omega\omega + \omega^2)}{4} - \frac{(4\Omega + 3\omega)\sigma k^3}{4\rho} \right) A^2 e^{2i\theta} + \text{к.с.} = 0$$

Решение этого уравнения можно записать следующим образом

$$\varphi_2 = \frac{i}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{\Omega(4\Omega^2 - 3\Omega\omega + \omega^2)}{8} - \frac{(4\Omega + 3\omega)\sigma k^3}{8\rho} \right) A^2 e^{2i\theta} + B(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) t_0 + \text{к.с.} \quad (2.11)$$

где вещественная функция B – среднее течение, индуцированное цугом поверхностных волн.

Найдем y_2 из системы уравнений (2.7). Подставляя в уравнения (2.7) соотношения (2.3), (2.4), (2.11) для $y_1, \varphi_1, \varphi_2$ с учетом дисперсионного соотношения (2.5) и уравнения (2.10), после преобразований получим

$$\begin{cases} \frac{\partial y_2}{\partial t_0} + \frac{1}{2(\Omega - \omega)} \left(\Omega \frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{2\sigma k^2}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right) e^{i\theta} - \frac{i\Omega k}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{(2\Omega - \omega)^2}{4} - \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) A^2 e^{2i\theta} + \text{к.с.} = 0 \\ \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \right) y_2 + \frac{i}{2k} \left(\Omega \frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{2\sigma k^2}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right) e^{i\theta} - \\ - \frac{\Omega(\Omega - \omega) + 3\sigma k^3/\rho}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{(2\Omega - \omega)^2}{8} - \frac{\sigma k^3}{2\rho} \right) A^2 e^{2i\theta} + \frac{gk}{2} |A|^2 + B + \text{к.с.} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Решение системы (2.12) ищем в виде

$$y_2 = B_1(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) e^{i\theta} + B_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) e^{2i\theta} + B_3(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.12) и учитывая дисперсионное соотношение (2.5), находим

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{i}{2\Omega(\Omega - \omega)} \left(\Omega \frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{2\sigma k^2}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right) \\ B_2 &= \frac{k}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{(2\Omega - \omega)^2}{8} - \frac{\sigma k^3}{2\rho} \right) A^2 \\ B_3 &= -\frac{k}{2} |A|^2 - \frac{1}{g} B \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y_2 &= -\frac{i}{2\Omega(\Omega - \omega)} \left(\Omega \frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{2\sigma k^2}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \right) e^{i\theta} + \frac{k}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{(2\Omega - \omega)^2}{8} - \frac{\sigma k^3}{2\rho} \right) A^2 e^{2i\theta} - \\ &\quad - \frac{k}{2} |A|^2 - \frac{1}{g} B + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для определения среднего течения, индуцированного волной за счет модуляции огибающей волнового пакета, осредним исходные уравнения (2.1) по периоду волны во втором порядке малости по крутизне волны (при $\eta = 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \omega \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \omega H(\bar{\varphi}) + \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \bar{y} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

где $\bar{y}, \bar{\varphi}$ – средние по периоду волны отклонения поверхности и потенциала. Из (2.15) следует, что средняя скорость индуцированного течения равна нулю во втором порядке по ε , но не равна нулю в третьем порядке по ε и пропорциональна $\varepsilon^3 \omega_1 \partial |A|^2 / \partial \xi_1$, где $\omega_1 = \omega/\Omega$.

Наконец, выделим в системе уравнений (2.1) члены порядка ε^3 . Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial y_3}{\partial t_0} + \frac{\partial y_2}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial t_2} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t_0} \right) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} H \left(\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0} \right) + \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} H \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t_0} \right) - \omega \left(y_1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + y_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) + \\ & + H \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_0} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_0} + \omega H(\varphi_3) + \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \right) y_3 - \frac{2\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} - \frac{2\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_0 \partial \xi_2} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_1^2} + \\ & + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} - g \left(y_1 H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + y_2 H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) \right) - \\ & - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0} \right) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} H \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t_0} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0} \right) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0} \right) - \omega \left(H(\varphi_1) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + H(\varphi_2) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) + \right. \\ & + y_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0} \right) + y_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \left. \right) - H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) - \right. \\ & - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t_0} \right) + g \left(y_1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + y_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) + \\ & \left. + \omega \left(H(\varphi_1) \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + H(\varphi_2) \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Исключая y_3 из системы уравнений (2.16), (2.17), получаем интегро-дифференциальное уравнение для φ_3

$$\begin{aligned} & L(\varphi_3) + \frac{\partial}{\partial t_0} \left[-\frac{2\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} - \frac{2\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_0 \partial \xi_2} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} - \right. \\ & - g \left(y_1 H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + y_2 H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) \right) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) - \\ & - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0} \right) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} H \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t_0} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0} \right) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0} \right) - \\ & - \omega \left(H(\varphi_1) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + H(\varphi_2) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) + y_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0} \right) + y_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \right) - \\ & - H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t_0} \right) + \right. \\ & + g \left(y_1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + y_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) + \omega \left(H(\varphi_1) \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + H(\varphi_2) \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) \left. \right] - \\ & - \left(g - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} \right) \left(\frac{\partial y_2}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial t_2} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t_0} \right) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} H \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) H \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} H \left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial t_0} \right) - \omega \left(y_1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \xi_0} \right) + y_2 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \right) + H \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} \right) \left. \right) = 0 \end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение соотношения (2.3), (2.4), (2.11), (2.14) для $y_1, \varphi_1, \varphi_2, y_2$ и учитывая связь среднего течения с завихренностью ω_1 , после преобразований получаем

$$\begin{aligned}
L(\varphi_3) - \frac{\Omega(2\Omega - \omega)}{2k} \frac{\partial A}{\partial t_2} e^{i\theta} - \frac{\Omega}{2k} \left(\frac{\Omega(\Omega - \omega)}{k} + \frac{2\sigma k^2}{\rho} \right) \frac{\partial A}{\partial \xi_2} e^{i\theta} + \frac{i\Omega}{2k} \left(c_g^2 - \frac{3\sigma k}{\rho} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} e^{i\theta} - \\
- \frac{1}{(\Omega - \omega)(\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho)} \left(\frac{\Omega(4\Omega^4 - 18\Omega^3\omega + 19\Omega^2\omega^2 - 8\Omega\omega^3 + \omega^4)}{8} + \right. \\
\left. + \frac{(32\Omega^3 - 32\Omega^2\omega + 23\Omega\omega^2 - 3\omega^3)\sigma k^3}{8\rho} - \frac{3(6\Omega + \omega)\sigma^2 k^6}{4\rho^2} \right) \frac{\partial(A^2 e^{2i\theta})}{\partial t_1} - \\
- \frac{1}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{\Omega^2(2\Omega - \omega)(4\Omega^2 - 3\Omega\omega + \omega^2)}{8k} + \frac{\Omega(2\Omega - \omega)(4\Omega^2 - 19\Omega\omega + 11\omega^2)\sigma k^2}{8\rho(\Omega - \omega)} + \right. \\
\left. + \frac{(8\Omega^2 - \Omega\omega + 3\omega^2)\sigma^2 k^5}{2\rho^2(\Omega - \omega)} - \frac{3(4\Omega + 3\omega)\sigma^3 k^8}{2\rho^2\Omega(\Omega - \omega)} \right) \frac{\partial(A^2 e^{2i\theta})}{\partial \xi_1} + \\
+ \frac{3ik}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{\Omega(6\Omega^2 - 4\Omega\omega + \omega^2)}{2} - \frac{(3\Omega + 4\omega)\sigma k^3}{\rho} \right) \left(\frac{(2\Omega - \omega)^2}{8} - \frac{\sigma k^3}{2\rho} \right) A^3 e^{3i\theta} + \\
+ \frac{i\Omega k}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{(2\Omega - \omega)(4\Omega^3 - 6\Omega^2\omega + 6\Omega\omega^2 - \omega^3)}{16} - \frac{\omega(8\Omega - 5\omega)\sigma k^3}{8\rho} - \frac{\sigma^2 k^6}{2\rho^2} \right) |A|^2 A e^{i\theta} + \\
+ \frac{i\Omega\omega(2\Omega - \omega)}{2g} B A e^{i\theta} + \omega_1 g \frac{(2\Omega - \omega)}{4} \frac{\partial |A|^2}{\partial \xi_1} + 2 \frac{\partial B}{\partial t_1} + \text{к.с.} = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Исключим секулярные слагаемые. В уравнении (2.18) таковыми будут как слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta)$, так и слагаемые, зависящие только от медленных переменных. Приравняв к нулю члены, пропорциональные $\exp(i\theta)$, и учитывая уравнение (2.10), получаем

$$\begin{aligned}
i \left(\frac{\partial A}{\partial t_2} + c_g \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{2\Omega - \omega} \left(c_g^2 - \frac{3\sigma k}{\rho} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} + \frac{k\omega}{g} B A + \\
+ \frac{k^2}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{4\Omega^3 - 6\Omega^2\omega + 6\Omega\omega^2 - \omega^3}{8} - \frac{\omega(8\Omega - 5\omega)\sigma k^3}{4\rho(2\Omega - \omega)} - \frac{\sigma^2 k^6}{\rho^2(2\Omega - \omega)} \right) |A|^2 A = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Выделяя в уравнении (2.18) медленно меняющиеся слагаемые, приходим к уравнению для функции B

$$\frac{\partial B}{\partial t_1} + \frac{g\omega_1(2\Omega - \omega)}{8} \frac{\partial |A|^2}{\partial \xi_1} = 0$$

Отсюда, с учетом уравнения (2.10), находим, что

$$B = - \frac{g\omega_1(2\Omega - \omega)}{8c_g} |A|^2$$

В итоге уравнение (2.19) принимает вид

$$\begin{aligned}
i \left(\frac{\partial A}{\partial t_2} + c_g \frac{\partial A}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{2\Omega - \omega} \left(c_g^2 - \frac{3\sigma k}{\rho} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} - \frac{k\omega^2(2\Omega - \omega)}{8\Omega c_g} |A|^2 A + \\
+ \frac{k^2}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{4\Omega^3 - 6\Omega^2\omega + 6\Omega\omega^2 - \omega^3}{8} - \frac{\omega(8\Omega - 5\omega)\sigma k^3}{4\rho(2\Omega - \omega)} - \frac{\sigma^2 k^6}{\rho^2(2\Omega - \omega)} \right) |A|^2 A = 0
\end{aligned}$$

Переходя в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, приходим к НУШ для огибающей слабо-модулированного пучка волн небольшой крутизны

$$\begin{aligned}
i A_t + \frac{1}{2\Omega - \omega} \left(c_g^2 - \frac{3\sigma k}{\rho} \right) A_{\xi\xi} - \frac{k^2\omega^2(2\Omega - \omega)^2}{8\Omega(\Omega^2 - \Omega\omega + 2\sigma k^3/\rho)} |A|^2 A + \\
+ \frac{k^2}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho} \left(\frac{4\Omega^3 - 6\Omega^2\omega + 6\Omega\omega^2 - \omega^3}{8} - \frac{\omega(8\Omega - 5\omega)\sigma k^3}{4\rho(2\Omega - \omega)} - \frac{\sigma^2 k^6}{\rho^2(2\Omega - \omega)} \right) |A|^2 A = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где $t \equiv t_2$, $\xi \equiv \xi_1$.

Из дисперсионного соотношения (2.5) следует, что $\omega_1 < 1$. Следовательно, на бесконечной глубине всегда $\omega_1 \neq 2$.

В частности, при $\sigma = 0$ уравнение (2.20) принимает вид

$$iA_t + \frac{\Omega^2 (\Omega - \omega)^2}{k^2 (2\Omega - \omega)^3} A_{\xi\xi} - \frac{k^2 \omega^2 (2\Omega - \omega)^2}{8\Omega^2 (\Omega - \omega)} |A|^2 A + \frac{k^2 (4\Omega^3 - 6\Omega^2 \omega + 6\Omega \omega^2 + \omega^3)}{8\Omega^2} |A|^2 A = 0$$

Отметим, что аналогичное уравнение для волн на глубокой воде получено в [9].

В случае $\omega = 0$, $\sigma = 0$ уравнение (2.20) переходит в классическое нелинейное уравнение Шредингера для волн на глубокой воде [1]

$$iA_t + \frac{1}{8} \frac{\Omega}{k^2} A_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \Omega k^2 |A|^2 A = 0$$

3. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Перепишем уравнение (2.20) в виде

$$iA_t + \alpha A_{\xi\xi} + \beta |A|^2 A = 0 \quad (3.1)$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial k^2} = \frac{1}{2\Omega - \omega} (c_g^2 - 3\sigma k / \rho)$$

$$\beta = -\frac{k^2 \omega^2 (2\Omega - \omega)^2}{8\Omega (\Omega^2 - \Omega \omega + 2\sigma K^3 / \rho)} + \frac{k^2}{\Omega^2 - 3\sigma K^3 / \rho} \left(\frac{4\Omega^3 - 6\Omega^2 \omega + 6\Omega \omega^2 - \omega^3}{8} - \frac{\omega(8\Omega - 5\omega)\sigma k^3}{4\rho(2\Omega - \omega)} - \frac{\sigma^2 k^6}{\rho^2 (2\Omega - \omega)} \right) |A|^2 A$$

Уравнение (3.1) допускает следующее решение

$$A = A_0 \exp(i\beta |A_0|^2 t) \quad (3.2)$$

аналогичное волне Стокса.

Исследуем это решение на устойчивость. Рассмотрим бесконечно малые возмущения решения (3.2)

$$A = A_0 (1 + \delta_1) \exp(i(\beta |A_0|^2 t + \delta_2)) \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.3) в уравнение (3.1) и линеаризуя относительно бесконечно малых возмущений δ_1 и δ_2 , получаем

$$i \frac{\partial \delta_1}{\partial t} - \frac{\partial \delta_2}{\partial t} + \alpha \left(\frac{\partial^2 \delta_1}{\partial \xi^2} + i \frac{\partial^2 \delta_2}{\partial \xi^2} \right) + 2\beta A_0^2 \delta_1 = 0 \quad (3.4)$$

Разделяя в уравнении (3.4) вещественные и мнимые части, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial \xi^2} + 2\beta A_0^2 \delta_1 - \frac{\partial \delta_2}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 \delta_2}{\partial \xi^2} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Решение системы уравнений (3.5) ищем в виде

$$\delta_1 = d_1 e^{\lambda t - iK\xi}, \quad \delta_2 = d_2 e^{\lambda t - iK\xi}$$

Подставляя это решение в уравнения системы (3.5), получаем

$$\begin{cases} (-\alpha K^2 + 2\beta A_0^2)d_1 - \lambda d_2 = 0 \\ \lambda d_1 - \alpha K^2 d_2 = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 = \alpha K^2 (2\beta A_0^2 - \alpha K^2) \quad (3.7)$$

где λ — инкремент модуляционной неустойчивости, K — волновое число модуляции.

Корни уравнения (3.7)

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{K^2 (2\alpha\beta A_0^2 - \alpha^2 K^2)}$$

Корень λ_+ будет вещественным и положительным при условии, что $\alpha\beta > 0$. Следовательно, возмущения неограниченны, и решение (3.2) неустойчиво.

Инкремент неустойчивости достигает максимума $\lambda_{\max} = \beta A_0^2$ при

$$K^2 = K_{\max}^2 = \frac{\beta A_0^2}{\alpha}$$

и обращается в нуль при

$$K^2 = K_0^2 = \frac{2\beta A_0^2}{\alpha}$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\alpha\beta > 0 \quad (3.8)$$

возмущения, волновые числа которых лежат в диапазоне $K^2 < K_0^2$, неустойчивы. Условие (3.8) играет роль критерия Лайтхилла.

4. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Найдем простейшие решения нелинейного уравнения Шредингера (3.1) при условии, что $\alpha < 0$ и $\beta < 0$.

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде произведения двух функций

$$A(\xi, t) = e^{i(pt - q\xi)} V(\xi), \quad \xi = \xi - bt \quad (4.1)$$

где p, q, b — постоянные, $V(\xi)$ — неизвестная функция.

Подставляя (4.1) в уравнение (3.1), получаем

$$\alpha \frac{d^2 V}{d\xi^2} - i(b + 2\alpha q) \frac{dV}{d\xi} - (\alpha q^2 + p)V + \beta V^3 = 0 \quad (4.2)$$

Полагая в (4.2)

$$b + 2\alpha q = 0, \quad \alpha q^2 + p = -a \quad (4.3)$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + \frac{a}{\alpha} V + \frac{\beta}{\alpha} V^3 = 0$$

Умножая обе части последнего уравнения на производную $\frac{dV}{d\xi}$, имеем

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{d\xi} \right)^2 + \frac{a}{2\alpha} V^2 + \frac{\beta}{4\alpha} V^4 \right) = 0$$

Интегрируя это выражение при условии, что $a > 0$, $\alpha = -|\alpha| < 0$, $\beta = -|\beta| < 0$ приходим к уравнению

$$\left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2 = \frac{a}{|\alpha|}V^2 - \frac{|\beta|}{2|\alpha|}V^4 + C \quad (4.4)$$

где C — постоянная интегрирования, которую полагаем равной нулю.

Интегрируя уравнение (4.4), получаем уравнение уединенной волны

$$V(\xi) = \sqrt{\frac{2a}{|\beta|}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{a}{|\alpha|}}(\xi - b\tau)\right) \quad (4.5)$$

(с точностью до постоянного слагаемого, которое полагаем равным нулю).

Найденное решение (4.5) вместе с (4.1) и (4.3) приводит к солитонному решению нелинейного уравнения Шредингера, которое запишется следующим образом:

$$A = \sqrt{\frac{2a}{|\beta|}} \exp\left\{i\left[\frac{b}{2\alpha}\xi - \left(\frac{b^2}{4\alpha} + a\right)\tau\right]\right\} \operatorname{ch}^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{|\alpha|}}(\xi - b\tau)\right) \quad (4.6)$$

где a и b — произвольные постоянные.

Осциллирующая часть решения (4.6) имеет огибающую в форме гиперболического секанса; огибающая перемещается в пространстве с постоянной скоростью b . Решение уравнения (2.20) представляет собой солитон типа “девятый вал”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен вывод нелинейного уравнения Шредингера для поверхностных гравитационно-капиллярных волн на свободной границе потока бесконечной глубины с постоянной завихренностью из системы точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных переменных с учетом поверхностного натяжения, записанной в неявном виде. При выводе уравнения Шредингера учтена роль среднего течения.

Решение нелинейного уравнения Шредингера исследовано на модуляционную неустойчивость.

Найдено решение нелинейного уравнения Шредингера в виде солитона типа “девятый вал”.

Автор выражает глубокую благодарность Ю.И. Троицкой за постоянное внимание к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // Журн. ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
2. Davey A. The propagation of a weakly nonlinear wave // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. P. 769–781.
3. Hasimoto H., Ono H. Nonlinear modulation of gravity waves // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. P. 805–811.
4. Yuen H.C., Lake B.M. Nonlinear deep water waves: Theory and experiment // Phys. Fluids. 1975. V. 18. P. 956–960.
5. Johnson R.S. On the modulation of water waves on shear flows // Proc. R. Soc. Lond. A. 1976. V. 347. P. 537–546.
6. Li J.C., Hui W.H. and Donelan M.A. Effects of velocity shear on the stability of surface deep water wave trains // Nonlinear Water Waves K. Horikawa and H. Maruo. Eds. Springer. 1987. P. 213–220.
7. Oikawa M., Chow K., Benney D.J. The propagation of nonlinear wave packets in a shear flow with a free surface // Stud. Appl. Math. 1987. V. 76. P. 69–92.
8. Baumstein A. I. Modulation of gravity waves with shear in water // Stud. Appl. Math. 1998. V. 100. P. 365–390.
9. Thomas R., Kharif C., Manna M. A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity // Phys. Fluids. 2012. V. 24. 127102.
10. Simmen J.A., Saffman P.G. Steady deep-water waves on a linear shear current // Stud. Appl. Maths. 1985. V. 73. P. 35–57.
11. Hsu H.C., Kharif C., Abid M., Chen Y.Y. A nonlinear Schrödinger equation for gravity–capillary water waves on arbitrary depth with constant vorticity. Part 1. // J. Fluid. Mech. 2018. V. 854. P. 146–163.

12. Досаев А.С., Троицкая Ю.И., Шишина М.И. Моделирование в переменных Дьяченко поверхностных гравитационных волн на свободной границе потока с постоянной завихренностью // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 1. С. 62–73.
13. Овсянников Л.В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды // Сб. науч. тр. СО АН СССР. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1973. Вып. 15. С. 104–125.
14. Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // Phys. Lett. A. 1996. V. 221. № 1–2. P. 73–79.
15. Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы. 1996. V. 22. № 10. P. 916–928. [Dyachenko A.I., Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. Nonlinear dynamics of the free surface of an ideal fluid // Plasma Phys. Reports. 1996. V. 22. № 10. P. 829–840.].
16. Дьяченко А.И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2001. Т. 376. № 1. С. 27–29.
17. Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
18. Chalikov D., Sheinin D. Numerical modeling of surface waves based on principal equations of potential wave dynamics // Technical Note. NOAA/NCEP/OMB: 1996. P. 54.
19. Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // J. Comp. Phys. 2005. V. 210. P. 247–273.
20. Ruban V.P. Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Lett. A. 2005. V. 340. № 1–4. P. 194–200.
21. Шишина М.И. Стационарные поверхностные гравитационные волны на свободной границе потока с постоянной завихренностью // Процессы в геосредах. 2016. V. 8. С. 71–77.
22. Ruban V.P. Explicit equations for two-dimensional water waves with constant vorticity // Phys. Rev. 2008. E. 77. 037302.

УДК 532.516:534:1

ЭВОЛЮЦИЯ ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТЕНКЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ ИНДУКЦИОННОГО И ДИФфуЗИОННОГО ЭФФЕКТОВ

© 2023 г. А. А. Гурченков

Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

E-mail: Challenge2005@mail.ru

Поступила в редакцию 21.06.2022 г.

После доработки 30.09.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Изучается эволюция течения вязкой электропроводной жидкости на вращающейся пластине в присутствии магнитного поля. Представлено аналитическое решение трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. При этом используется полное уравнение магнитной индукции, т.е. учитывается как индукционный эффект, так и диссипация энергии вследствие протекания электрических токов. Жидкость вместе с ограничивающей плоскостью вращается как одно целое с постоянной угловой скоростью вокруг перпендикулярного к плоскости направления. Неустановившийся поток индуцирован внезапно начинающимися колебаниями стенки и приложенным магнитным полем, направленным перпендикулярно плоскости. Определены поле скоростей и индуцированное магнитное поле в потоке вязкой электропроводной жидкости, заполняющей полупространство, ограниченное плоской стенкой. Рассматривается ряд частных случаев движения стенки. На основании полученных результатов исследуются отдельные структуры пограничных слоев у стенки.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, электропроводная жидкость, нормальные колебания, пограничные слои

DOI: 10.31857/S0568528122600709, **EDN:** NTGGUV

В магнитной гидродинамике характер взаимодействия проводящей жидкости и магнитного поля определяется магнитным числом Рейнольдса, который представляет собой отношение инерционных сил к силам, обеспечивающим диффузию магнитного поля в проводящей жидкости. По величине магнитного числа Рейнольдса (Re_m) процессы в магнитной гидродинамике делятся на три класса – это процессы с малой ($Re_m \ll 1$), умеренной ($Re_m \sim 1$) и большой ($Re_m \gg 1$) проводимостью. Случай малой проводимости реализуется, в частности, в лабораторных установках с жидкими металлами и низкотемпературной плазмой, при этом магнитное поле мало изменяется и можно считать, что оно задано извне. Движущаяся в этом поле проводящая жидкость индуцирует электрический ток, который, создавая силу Лоренца, влияет на движение жидкости, тем самым создает МГД-эффекты. В противоположном случае, т.е. в случае большой проводимости среды или при ее больших размерах (условие выполняется для астрофизических объектов, а также для горячей плазмы термоядерных устройств) можно пренебречь диффузией магнитного поля. Это случай гидродинамического приближения, когда перенос преобладает над диффузией. В общем третьем случае изменение магнитного поля складывается из его переноса движущимся проводящим веществом и диффузией относительно этого вещества – при этом необходимо использовать полное уравнение индукции. Данное исследование обобщает предыдущие результаты [1–6]. Так, в работе [1] изучалось нестационарное движение вязкой жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой в отсутствие магнитного поля. В [2] рассматривался неустановившийся поток вязкой несжимаемой жидкости на вращающейся пластине в отсутствие вдува (отсоса) среды и магнитного поля. Показано, что один из двух пограничных слоев, формирую-

щихся на стенке, неограниченно растет при наличии резонанса $\omega = 2\Omega$ (ω — частота колебаний стенки, 2Ω — удвоенная частота вращения системы стенка-жидкость). Кроме того, решение зависит от порядка операций в двойном предельном переходе $t \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 2\Omega$, где t — время. Установившееся решение уравнений Навье—Стокса при наличии вдува (отсоса) среды рассмотрено в [3]. Нестационарный поток вязкой несжимаемой жидкости на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды изучался в [4]. Одна из последних работ [5] посвящена изучению течения электропроводной жидкости между параллельными стенками с изолирующими свойствами в постоянном магнитном поле, но жидкость предполагается идеальной, а течение жидкости стационарным. В работе [6] рассмотрен нестационарный поток вязкой несжимаемой электропроводной жидкости на вращающейся пластине. Задача рассмотрена в магнитно-гидродинамическом приближении, т.е. для случая бесконечно большой проводимости жидкости. Большое число работ посвящено численным исследованиям задач. Так, в работах [7–10] представлены численные исследования задачи о течении сжимаемого газа около пластины с движущейся против потока поверхностью и в приближении пограничного слоя рассмотрена затопленная незакрученная струя вязкой несжимаемой жидкости, вытекающая из отверстия. Обсуждаются неустойчивые периодические по времени и устойчивые стационарные решения данной задачи. В [11] предложена математическая модель, основанная на системе дифференциальных уравнений неоднородной многокомпонентной механики жидкости. Метод позволяет в единой постановке анализировать динамику и тонкую структуру обтекания препятствий в широком диапазоне параметров течения. В [12] обсуждается теория электромагнитной гидродинамики, которая в полном объеме в гидродинамическом приближении учитывает электро-ионную структуру плазмы, в том числе инерцию электронов и ионов и их взаимодействие. В [13] приведен анализ быстрого прямого атомно-молекулярного, механического с потоком или волнообразного с групповой скоростью и медленного диффузионного переноса энергии. Обсуждаются различные типы неустойчивостей в механике жидкостей и газов. В работе [14] методом математического моделирования исследуется закрученное течение со свободной поверхностью с возникающей на ней воронкой. Методами видеорегистрации в [15] прослежена эволюция картины распределения вещества капли чернил, свободно падающей на взволнованную поверхность жидкости. Методами теории сингулярных возмущений в линейном и слабо нелинейном приближениях в [16] рассмотрена задача генерации пучков периодических внутренних волн в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости полосой, колеблющейся вдоль наклонной плоскости. В [17] выполнены исследования гидродинамики и теплообмена при опускном течении жидкого металла в прямоугольном канале с соотношением сторон примерно 3/1 в компланарном магнитном поле (МП) при условии неоднородного (одностороннего) обогрева канала. В настоящей работе представлено исследование нестационарного потока вязкой электропроводной жидкости на вращающейся пластине при наличии магнитного поля с использованием полного уравнения магнитной индукции. Поток индуцирован продольными колебаниями пластины.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Рассмотрим движение вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в полупространстве, ограниченном плоской стенкой, которая вращается вместе со стенкой как одно целое с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$, причем вектор ω_0 образует с этой плоскостью угол β ($0 < \beta < \pi/2$). Бесконечная пластина H ограничивает полупространство Q , заполненное несжимаемой жидкостью плотности ρ , кинематической вязкости ν и магнитной проницаемости μ . Жидкость находится в поле массовых сил с потенциалом U .

Свяжем с пластиной декартову систему координат $Oxyz$ с осями e_x, e_y, e_z так, что плоскость Oxz совпадает с пластиной, а ось Oy направлена перпендикулярно пластине внутрь жидкости. Схематично постановка задачи представлена на рис. 1.

В момент времени $t > 0$ пластина начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $u(t)$ и в этот момент включается однородное магнитное поле с индукцией B_0 , которое направлено перпендикулярно пластине, т.е. $B_0 = B_0 e_y$.

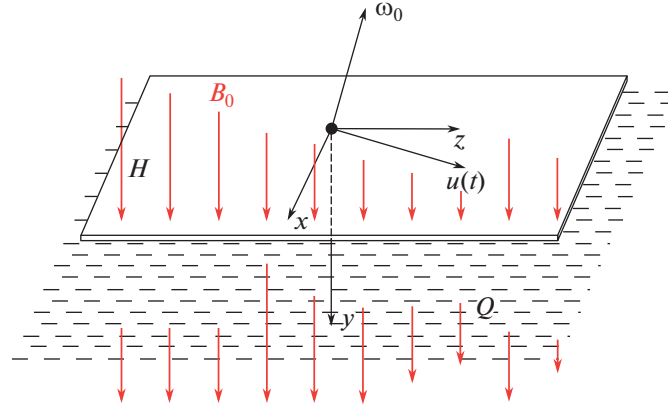


Рис. 1. Схематичное представление геометрии задачи.

Уравнения движения жидкости в системе координат $Oxyz$, вращающейся с угловой скоростью ω_0 имеют вид:

$$\begin{cases} \omega_0 \times \omega_0 \times \mathbf{r} + 2\omega_0 \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla U + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho \mu} \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \\ \text{div} \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{r} \in Q \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B} \\ \text{div} \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{r} \in Q \end{cases} \quad (1.1)$$

Граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{r} \in H, \quad t > 0 \\ |\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)| &\rightarrow 0, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \mathbf{r} \in Q \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 = \text{const}, \quad \mathbf{r} \in H, \quad t > 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) &= 0, \quad \mathbf{r} \in Q \end{aligned}$$

Здесь t — время, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор относительно полюса O , $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, P — давление, ν_m — магнитная вязкость.

Решение системы (1.1), удовлетворяющее начальным и граничным условиям, ищем в виде

$$\begin{cases} \mathbf{v} = v_x(y, t) \mathbf{e}_x + v_z(y, t) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{B} = B_x(y, t) \mathbf{e}_x + B_0 \mathbf{e}_y + B_z(y, t) \mathbf{e}_z \\ P = \frac{\rho}{2} (\omega_0 \times \mathbf{r})^2 + \rho U + \rho q(y, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

где q — новая функция давления.

Тогда система (1.1) распадается на подсистемы:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\omega_0 \mathbf{e}_y \cdot v_z = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu \rho} B_0 \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} - 2\omega_0 \mathbf{e}_y \cdot v_x = \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu \rho} B_0 \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\mathbf{v}(\omega_0 \times \mathbf{e}_y) - \left(B_z \frac{\partial B_z}{\partial y} + B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \frac{1}{\mu \rho} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_m \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_m \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (1.5)$$

Обозначим $\omega_y = \omega_0 \mathbf{e}_y = \Omega$ и введем комплексную структуру

$$\begin{aligned}\hat{v} &= v_x(y, t) + i v_z(y, t), \quad \hat{u}(t) = u_x + i u_z \\ \hat{B} &= B_x(y, t) + i B_z(y, t)\end{aligned}$$

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - i 2 \Omega \hat{v} = v \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \frac{B_0}{\mu \rho} \frac{\partial \hat{B}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + v_m \frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial y^2} \end{cases} \quad (1.6)$$

Граничные и начальные условия

$$\begin{aligned}y = 0, \quad t > 0; \quad \hat{v}(y, t) &= \hat{u}(t), \quad \hat{B}(y, t) = 0 \\ y \rightarrow \infty; \quad |\hat{v}(y, t)| &\rightarrow 0, \quad |\hat{B}(y, t)| \rightarrow 0 \\ t = 0, \quad y > 0; \quad \hat{v}(y, 0) &= 0, \quad \hat{B}(y, 0) = 0\end{aligned}$$

Исключая магнитную индукцию из уравнений (1.6), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{v}(y, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[(v + v_m) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i 2 \Omega \right] \hat{v}(y, t) - \left(\frac{B_0^2}{\mu \rho} - i 2 \Omega v_m \right) \frac{\partial^2 \hat{v}(y, t)}{\partial y^2} + v v_m \frac{\partial^4 \hat{v}(y, t)}{\partial y^4} &= 0 \\ y = 0, \quad t > 0; \quad \hat{v}(y, t) &= \hat{u}(t) \\ y \rightarrow \infty; \quad |\hat{v}(y, t)| &\rightarrow 0 \\ t = 0, \quad y > 0; \quad \hat{v}(y, t) &= 0\end{aligned} \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) найдем с помощью синус-преобразования Фурье, которое введем формулой [18]

$$\tilde{v}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{v}(y, t) \sin \lambda y dy$$

Дифференциальное уравнение (1.7) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{v}(\lambda, t)}{\partial t^2} + \left[\lambda^2 (v + v_m) - i 2 \Omega \right] \frac{\partial \tilde{v}(\lambda, t)}{\partial t} + \left(\lambda^4 v v_m + \frac{B_0^2}{\mu \rho} \lambda^2 - i 2 \Omega v_m \lambda^2 \right) \tilde{v}(\lambda, t) &= \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\lambda (v + v_m) u'_t + \lambda u \left(\frac{B_0^2}{\mu \rho} - i 2 \Omega v_m + \lambda^2 v v_m \right) \right] &= \mu(\lambda, t) \\ \tilde{v}(\lambda, 0) = 0 \quad \tilde{v}_t(\lambda, 0) = 0\end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\text{Здесь } \mu(\lambda, t) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(v + v_m) u'_t + u \left(\frac{B_0^2}{\mu \rho} - i 2 \Omega v_m + \lambda^2 v v_m \right) \right]$$

Граничное условие учтено автоматически.

Характеристическое уравнение (1.8) и его корни

$$q^2 + [\lambda^2 (v + v_m) - i 2 \Omega] q + \left(\lambda^4 v v_m + \frac{B_0^2}{\mu \rho} \lambda^2 - i 2 \Omega v_m \lambda^2 \right) = 0$$

$$q_{1,2} = -\frac{1}{2}[\lambda^2(v + v_m) - i2\Omega] \pm \frac{1}{2}\sqrt{[\lambda^2(v - v_m) - i2\Omega]^2 - 4\lambda^2\left(\frac{B_0^2}{\mu\rho}\right)} = \sigma \pm \omega$$

$$\sigma = -\frac{1}{2}[\lambda^2(v + v_m) - i2\Omega]$$

$$\omega^2 = \frac{1}{4}\left[[\lambda^2(v - v_m) - i2\Omega]^2 - 4\lambda^2\left(\frac{B_0^2}{\mu\rho}\right)\right]$$

Решение неоднородного уравнения (1.8) имеет вид

$$\tilde{V}(\lambda, t) = c_1 \exp(q_1 t) + c_2 \exp(q_2 t),$$

где c_1, c_2 находятся по методу Лагранжа вариации произвольных постоянных

$$\begin{cases} c_1' \exp(q_1 t) + c_2' \exp(q_2 t) = 0 \\ c_1' \exp(q_1 t) + c_2' q_2 \exp(q_2 t) = \mu(\lambda, t) \end{cases}$$

$$c_1(t) = \tilde{c}_1 + \int_0^t \frac{\mu(\lambda, \tau) \exp(-q_1 \tau)}{q_1 - q_2} d\tau, \quad c_2(t) = \tilde{c}_2 - \int_0^t \frac{\mu(\lambda, \tau) \exp(-q_2 \tau)}{q_1 - q_2} d\tau$$

Наконец

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\lambda, t) &= \tilde{c}_1 \exp(q_1 t) + \tilde{c}_2 \exp(q_2 t) + \\ &+ \frac{1}{q_1 - q_2} \int_0^t \mu(\lambda, \tau) (\exp(q_1(t - \tau)) - \exp(q_2(t - \tau))) d\tau \end{aligned} \quad (1.9)$$

Удовлетворяя начальным условиям, получаем

$$\tilde{V}(\lambda, t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \mu(\lambda, \tau) \exp(\sigma(t - \tau)) \operatorname{sh} \omega(t - \tau) d\tau \quad (1.10)$$

Для нахождения $\hat{V}(y, t)$ применим обратное синус-преобразование Фурье [19]

$$\hat{V}(y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{V}(\lambda, t) \sin \lambda y d\lambda$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \hat{V}(y, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\omega} \int_0^t \left[(v + v_m) u_t' + u \left(\frac{B_0^2}{\mu\rho} - i2\Omega v_m + \lambda^2 v v_m \right) \right] \exp(\sigma(t - \tau)) \operatorname{sh} \omega(t - \tau) d\tau \sin \lambda y d\lambda \\ \hat{V}(y, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \left[(v + v_m) u_t' + u \left(\frac{B_0^2}{\mu\rho} - i2\Omega v_m + \lambda^2 v v_m \right) \right] \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda y}{\omega} \exp(\sigma(t - \tau)) \operatorname{sh} \omega(t - \tau) d\lambda d\tau \end{aligned} \quad (1.11)$$

Вектор касательных напряжений, действующий со стороны жидкости на стенку, определяется выражением [1]

$$\hat{F} = \rho v \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

Подставляя скорость $\hat{V}(y, t)$ из (1.11), получаем

$$\hat{F} = \rho v \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \left[(v + v_m) u_t' + u \left(\frac{B_0^2}{\mu\rho} - i2\Omega v_m + \lambda^2 v v_m \right) \right] \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\omega} \exp(\sigma(t - \tau)) \operatorname{sh} \omega(t - \tau) d\lambda \right\} d\tau \quad (1.12)$$

Полученные соотношения полностью решают задачу.

2. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОЕ ДВИЖЕНИЕМ СТЕНКИ

Пусть плоскость H начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0)\exp\lambda t$, $\lambda = \alpha + i\omega$. Рассмотрим “нормальные” колебания вязкой электропроводной жидкости в полупространстве, ограниченном плоскостью H , т.е. будем изучать класс движений, в котором все временные факторы зависят от времени посредством множителя $\exp\lambda t$. Тогда система уравнений (1.5) принимает вид

$$\begin{cases} \lambda \hat{V} - i2\Omega \hat{V} = v \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} + \frac{B_0}{\mu\rho} \frac{\partial \hat{B}}{\partial y} \\ \lambda \hat{B} = B_0 \frac{\partial \hat{V}}{\partial y} + v_m \frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Граничные и начальные условия

$$\begin{aligned} y = 0, \quad t > 0: \quad \hat{V}(y; t) &= \hat{u}(0); \quad \hat{B}(y; t) = 0 \\ y \rightarrow \infty: \quad \hat{V}(y; t) &\rightarrow 0, \quad \hat{B}(y; t) \rightarrow 0 \\ t = 0; \quad y > 0: \quad \hat{V}(y; 0) &= 0, \quad \hat{B}(y; 0) = 0 \end{aligned}$$

Исключая из (2.1) магнитную индукцию, для функции $\hat{V}(y)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$vv_m \frac{d^4 \hat{V}}{dy^4} - \left[\lambda(v + v_m) + \frac{B_0^2}{\mu\rho} - i2\Omega v_m \right] \frac{d^2 \hat{V}}{dy^2} + \lambda(\lambda - i2\Omega) \hat{V} = 0 \quad (2.2)$$

и граничные условия

$$y = 0, \quad \hat{V}(0) = \hat{u}(0); \quad y \rightarrow \infty; \quad \hat{V}(y) \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

Характеристическое уравнение (2.2) имеет вид

$$vv_m x^4 - \left(\lambda(v + v_m) + \frac{B_0^2}{\mu\rho} - i2\Omega v_m \right) x^2 + \lambda(\lambda - i2\Omega) = 0 \quad (2.4)$$

Введем обозначение

$$G = \frac{1}{2vv_m} \left(\lambda(v + v_m) + \frac{B_0^2}{\mu\rho} - i2\Omega v_m \right)$$

Корни уравнения (2.4)

$$x_j = \pm \sqrt{G \pm \sqrt{G^2 - \frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{vv_m}}}, \quad \overline{j = 1, 4}$$

Решение уравнения (2.2) запишется в виде

$$\hat{V}(y) = \sum_j C_j \exp x_j y \quad (2.5)$$

где C_j подлежат определению из граничных условий (2.3). Запишем магнитную индукцию, найденную по полю скоростей, так

$$\hat{B}(y) = \frac{\mu\rho}{B_0} (\lambda - i2\Omega) \sum_{j=1}^4 C_j \frac{1}{x_j} \exp x_j y - \frac{\mu\rho}{B_0} v \sum_{j=1}^4 C_j x_j \exp x_j y \quad (2.6)$$

Из условий ограниченности решения на бесконечности надо положить константы C_3 и C_4 равными нулю, так как им соответствуют корни x_3 и x_4 , имеющие перед радикалом знак плюс. Удовлетворяя граничным условиям (2.3), получаем систему алгебраических уравнений для определения C_j , ($j = 1, 2$)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \hat{u}(0) \\ (\lambda - i2\Omega) \left(\frac{C_1}{x_1} + \frac{C_2}{x_2} \right) - \nu(C_1 x_1 + C_2 x_2) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Заметим, что корни x_j можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{G + \sqrt{G^2 - \frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu\nu_m}}} = -(m + n) \\ x_2 &= -\sqrt{G - \sqrt{G^2 - \frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu\nu_m}}} = -(m - n) \\ m &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{G + \sqrt{\frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu\nu_m}}}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{G - \sqrt{\frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu\nu_m}}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учетом этого замечания и обозначений

$$d_1 = \frac{\lambda - i2\Omega}{x_1} - \nu x_1, \quad d_2 = \frac{\lambda - i2\Omega}{x_2} - \nu x_2$$

система уравнений (2.7) перепишется в виде

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \hat{u}(0) \\ d_1 C_1 + d_2 C_2 = 0 \end{cases} \quad \Delta = d_2 - d_1 = -2n \left(\nu + \sqrt{\frac{\nu\nu_m(\lambda - i2\Omega)}{\lambda}} \right)$$

Определяя C_1 и C_2 , находим поле скоростей жидкости в форме

$$\hat{V}(y, t) = \frac{\hat{u}(0)}{\Delta} \exp(-\alpha t) (d_2 \exp(-(m + n)y) - d_1 \exp(-(m - n)y)) \exp(i\omega t) \quad (2.9)$$

3. СТРУКТУРА ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

Рассмотрим более подробно выражение для поля скоростей (2.9).

В выражение для m и n входит величина G , которую представим в виде

$$\begin{aligned} G &= \frac{B_0^2 - \mu\rho\alpha(\nu + \nu_m)}{2\mu\rho\nu\nu_m} + i \frac{\omega\nu + \nu_m(\omega - 2\Omega)}{2\nu\nu_m} = C + iD \\ C &= \frac{B_0^2 - \mu\rho\alpha(\nu + \nu_m)}{2\mu\rho\nu\nu_m}, \quad D = \frac{\omega\nu + \nu_m(\omega - 2\Omega)}{2\nu\nu_m} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Величину $\sqrt{\lambda(\lambda - i2\Omega)}/\nu\nu_m$ представим в виде суммы:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\lambda(\lambda - i2\Omega)}{\nu\nu_m}} &= \sqrt{\frac{\alpha^2 - \omega(\omega - 2\Omega)}{\nu\nu_m} + i \frac{(-2\alpha)(\omega - \Omega)}{\nu\nu_m}} = A + iB \\ A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - \omega(\omega - 2\Omega)}{\nu\nu_m} \right)^2 + \frac{4\alpha^2(\omega - \Omega)^2}{(\nu\nu_m)^2}} + \frac{\alpha^2 - \omega(\omega - 2\Omega)}{\nu\nu_m} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - \omega(\omega - 2\Omega)}{\nu\nu_m} \right)^2 + \frac{4\alpha^2(\omega - \Omega)^2}{(\nu\nu_m)^2}} - \frac{\alpha^2 - \omega(\omega - 2\Omega)}{\nu\nu_m} \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{C + A + i(D + B)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1 + iB_1) \quad (3.4)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{C - A + i(D - B)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_2 + iB_2) \quad (3.5)$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(C+A)^2 + (D+B)^2} + C + A \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(C+A)^2 + (D+B)^2} - C - A \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(C-A)^2 + (D-B)^2} + C - A \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(C-A)^2 + (D-B)^2} - C + A \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

С помощью равенств (3.4)–(3.9) поле скоростей жидкости представим в виде суперпозиции плоских волн, которая имеет вид

$$\hat{V}(y, t) = M_1 \exp i(\omega t - k_1 y) + M_2 \exp i(\omega t + k_1 y) \quad (3.10)$$

$$M_1 = \frac{\hat{u}(0)}{\Delta} d_2 \exp \left(-\alpha t - \frac{y}{\delta_1} \right), \quad M_2 = \frac{\hat{u}(0)}{\Delta} d_1 \exp \left(-\alpha t + \frac{y}{\delta_2} \right).$$

Первая из этих волн излучается стенкой в полупространство, заполненное вязкой электропроводной жидкостью. Эта волна распространяется вдоль оси y с фазовой скоростью $V_f = \omega/k_1$ и затухает на расстоянии δ_1 от стенки — это толщина пограничного слоя, которая определяется выражением $\delta_1 = \sqrt{2}/(A_1 + A_2)$. Волновое число $k_1 = (B_1 + B_2)/\sqrt{2}$. Вторая волна имеет ту же структуру, при этом волновое число и величина пограничного слоя имеют вид: $k_2 = (B_1 - B_2)/\sqrt{2}$, $\delta_2 = \sqrt{2}/(A_1 - A_2)$. Вторая волна набегает на стенку из бесконечности со скоростью $V_f = \omega/k_2$. Фазовые скорости этих волн различны и зависят от частоты, т.е. среда обладает дисперсией. Групповые скорости этих волн также различны. Они зависят от коэффициентов затухания и вращения стенки, магнитной индукции и параметров жидкости. Амплитуды этих волн зависят от величины проекции угловой скорости на ось y , параметров движения стенки, магнитной индукции и параметров жидкости.

Выберем индукцию магнитного поля $B_0^2 = \mu \alpha (v + v_m)$ и введем безразмерные переменную и параметры: $Y = \omega/\alpha$ и $S = 2\Omega/\alpha$, $\gamma = v/v_m$. В этом случае безразмерные волновые числа принимают вид:

$$k_{1,2} \times 2 \sqrt{\frac{2v}{\alpha}} = (\sqrt{A^2 + (D+B)^2} - A)^{\frac{1}{2}} \pm (\sqrt{A^2 + (D-B)^2} + A)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2}{\delta_{1,2}} \times \sqrt{\frac{2v}{\alpha}} = (\sqrt{A^2 + (D+B)^2} + A)^{\frac{1}{2}} \pm (\sqrt{A^2 + (D-B)^2} - A)^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \sqrt{\gamma} \left(\sqrt{(1-Y^2 + Ys)^2 + (2Y-s)^2} + (1-Y^2 + Ys) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D+B = \frac{(\gamma+1)Y-s}{\sqrt{2}} + \sqrt{\gamma} \left(\sqrt{(1-Y^2 + Ys)^2 + (2Y-s)^2} - (1-Y^2 + Ys) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$D-B = \frac{(\gamma+1)Y-s}{\sqrt{2}} - \sqrt{\gamma} \left(\sqrt{(1-Y^2 + Ys)^2 + (2Y-s)^2} - (1-Y^2 + Ys) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Параметр γ , введенный выше, представляет отношение вязкостей, кинематической и магнитной, т.е. отношение магнитного числа Рейнольдса к числу Рейнольдса, связанного с вязкостью жидкости. На следующих рисунках представлено поведение волновых чисел и групповых скоростей в зависимости от частоты колебаний стенки для случая, когда изменение магнитного поля в равной мере обеспечивается его переносом движущимся проводящим веществом и диффузией магнитного поля относительно этого вещества. Анализ зависимостей волновых чисел $k(\omega)$ показал, что это комплексное число, действительная часть которого определяет зависимость фазовой скорости волны от частоты, а мнимая часть — зависимость коэффициента затухания амплитуды

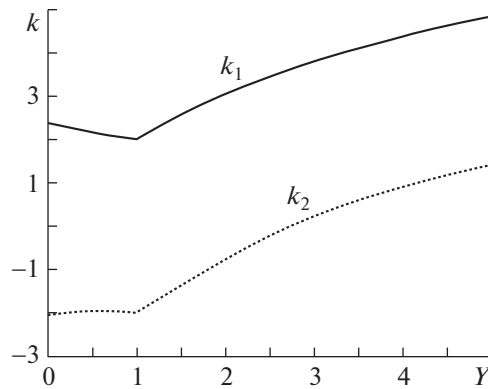


Рис. 2. Зависимость волновых чисел k_1 , k_2 от частоты Y : $\gamma = 1$.

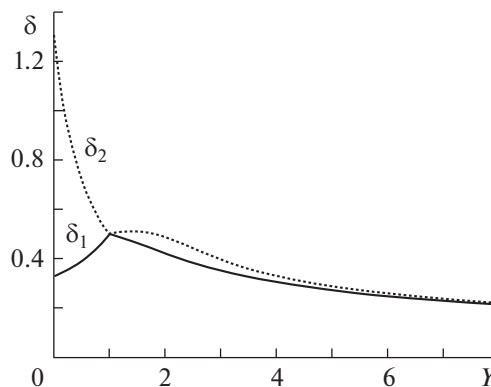


Рис. 3. Зависимость величин пограничных слоев δ_1 , δ_2 от частоты Y : $\gamma = 1$.

волны от частоты. Дисперсия связана с внутренними свойствами материальной среды, обычно выделяются частотная дисперсия, при которой поляризация в диспергирующей среде зависит от значений поля в предшествующие моменты времени (память), и пространственная дисперсия, когда поляризация в данной точке зависит от значений поля в некоторой области. Кроме того, анализ зависимостей волновых чисел $k_{1,2}$, $\delta_{1,2}$ от Y при определенном выборе магнитной индукции показал, что существуют особые точки нестационарной задачи, в которых волновые числа имеют угловые точки, в которых соответствующие производные не существуют.

Так, на рис. 2 представлены графики зависимости волновых чисел k_1 и k_2 от Y (частота ω при фиксированных s ($s = 2$) и значении параметра $\gamma = v/v_m = 1$). На интервале $0 < Y < 1$ волновое число k_1 монотонно убывает, в то время как k_2 остается постоянным. При $Y > 1$ волновые числа монотонно возрастают. Отметим, что при $Y = 1$ оба волновых числа имеют угловую точку, в которой не существует производная $dk/d\omega$.

На рис. 3 показана зависимость величин пограничных слоев δ_1 , δ_2 от Y при значении параметра $\gamma = 1$. На интервале $0 < Y < 1$ эти функции ведут себя диаметрально противоположно. Так, функция $\delta_1(Y)$ монотонно возрастает до значения 0.5 при $Y = 1$ и затем монотонно убывает, асимптотически приближаясь к величине 0.2. Функция $\delta_2(Y)$ при $0 < Y < 1$ монотонно убывает от значений 1.3 до 0.5 в точке $Y = 1$ и стремится к значению 0.2 как и функция $\delta_1(Y)$. Обе функции при $Y = 1$ имеют угловые точки.

На рис. 4 представлен характер зависимости волновых пакетов от Y (частота ω при фиксированных s ($s = 2$) и значении параметра $\gamma = v/v_m = 1$). Скорость волнового пакета V_{g1} , излучаемого колеблющейся стенкой, носит сложный характер. На интервале $0 < Y < 1$ скорость монотонно убывает от отрицательных значений -2 до значения -4.75 , что свидетельствует о наличии ано-

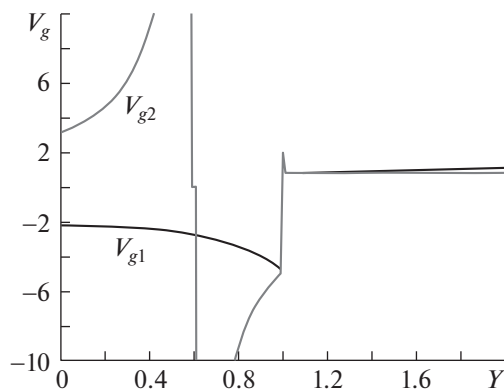


Рис. 4. Зависимость волновых пакетов V_{g1} , V_{g2} , от частоты Y : $\gamma = 1$.

мальной дисперсии среды. В особой точке $Y = 1$ скорость V_{g1} имеет скачок, равный $|6.75|$, изменяясь от -4.75 до $+2$. Далее в этой точке скорость падает до 1 и остается постоянной при увеличении частоты. Скорость V_{g2} (скорость набегающей волны) имеет еще более сложный характер. В интервале $0 < Y < 1$ существует особая точка $Y = 0.6$, в которой скорость терпит бесконечный разрыв, изменяясь от $+\infty$ слева от 0.6 до $-\infty$ справа от 0.6 . Далее скорость V_{g2} , оставаясь отрицательной, возрастает до значения -4.75 при $Y = 1$. Это вторая особая точка V_{g2} , в которой она терпит конечный скачок, величина которого по модулю равна $|6.75|$, и, достигнув значения 2 , терпит еще скачок, опустившись до значения $V_{g2} = 1$. Это значение остается постоянным при увеличении частоты колебаний стенки.

Рассмотрим гармонические колебания стенки $\hat{u}(t) = \hat{u}(0) \exp(i\omega t)$.

В этом случае

$$\alpha = 0, \quad A = 0, \quad C = 0$$

$$D = \frac{\omega v + v_m(-2\Omega)}{2vv_m}, \quad B = \sqrt{\frac{\omega(\omega - i2\Omega)}{vv_m}}$$

Волновые числа первой волны

$$k_1 = \frac{\sqrt{D+B}}{2} + \frac{\sqrt{D-B}}{2}, \quad \delta_1 = \left(\frac{\sqrt{D+B}}{2} + \frac{\sqrt{D-B}}{2} \right)^{-1}$$

Волновые числа второй волны

$$k_2 = \frac{\sqrt{D+B}}{2} - \frac{\sqrt{D-B}}{2}, \quad \delta_2 = \left(\frac{\sqrt{D+B}}{2} - \frac{\sqrt{D-B}}{2} \right)^{-1}$$

Рассмотрим случай резонанса $\omega = 2\Omega$. Тогда $D = \Omega/v_m$, $B = 0$.

Волновые числа первой волны $\delta_1 = \sqrt{v_m/\Omega}$, $k_1 = \sqrt{\Omega/v_m}$ зависят только от магнитной вязкости жидкости и проекции угловой скорости вращения системы стенка-жидкость на нормаль к стенке и не зависят от вязкости жидкости.

Для второй волны $\delta_2 = \infty$, $k_2 = 0$, т.е. набегающая волна отсутствует, и пограничный слой заполняет все полупространство.

4. О СОПОСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПОЛНЫМ УРАВНЕНИЕМ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ С РЕШЕНИЕМ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Представляет интерес сравнить решение уравнений гидродинамики с использованием полного уравнения магнитной индукции, представленное в данной работе, с решением этой задачи в гидродинамическом приближении, которое опубликовано в [6]. Формулы для волновых чисел

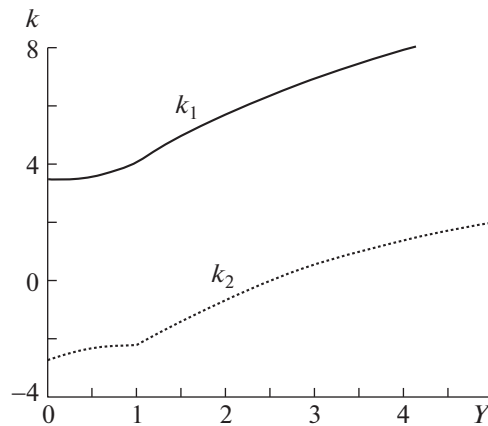


Рис. 5. Зависимость волновых чисел k_1, k_2 от частоты Y : $\gamma = 5$.

и групповых скоростей, выражающие функциональную зависимость от частоты колебаний стенки, полученные в данной работе, содержат параметр $\gamma = v/v_m$ — отношение кинематической вязкости к магнитной вязкости и, который вообще говоря, может меняться в широких пределах. Поэтому графики соответствующих функций должны сильно отличаться. Кроме того, выбранное магнитное поле $B_0^2 = \mu\alpha(v + v_m) = v(1 + 1/\gamma)$ зависит от параметра γ и совпадает с полем работы [6] только при $\gamma = 1$. Поэтому для корректности сопоставления графиков волновых чисел и волновых пакетов как функций частоты колебаний стенки с соответствующими графиками работы [6] было выбрано значение параметра $\gamma = 1$. Сопоставление результатов показало, что графики волновых чисел и волновых пакетов существенно отличаются. Особенно сильно отличие проявляется при сопоставлении графиков волновых пакетов. В [6] волна, излучаемая стенкой, имеет скорость V_{g1} , которая монотонно возрастает с ростом частоты Y . В представленной работе скорость излучаемой стенкой волны имеет сложный характер. На интервале $0 < Y < 1$ скорость монотонно убывает от отрицательных значений -2 до значения -4.75 , что свидетельствует о наличии аномальной дисперсии среды. В особой точке $Y = 1$ скорость V_{g1} имеет скачок, равный $[6.75]$, изменяясь от -4.75 до $+2$. Далее в этой точке скорость падает до 1 и остается постоянной при увеличении частоты. Скорость волны, набегающей на стенку в [6], имеет две угловые точки при $Y = 0.5$ и $Y = 0.55$ и далее с ростом частоты монотонно возрастает. В данной работе скорость V_{g2} (скорость набегающей волны) имеет еще более сложный характер. В интервале $0 < Y < 1$ существует особая точка $Y = 0.6$, в которой скорость терпит бесконечный разрыв, изменяясь от $+\infty$ слева от $Y = 0.6$ до $-\infty$ справа от $Y = 0.6$. Далее скорость V_{g2} , оставаясь отрицательной, возрастает до значения -4.75 при $Y = 1$. Это вторая особая точка V_{g2} , в которой она терпит конечный скачок, величина которого по модулю равна $[6.75]$, и, достигнув значения 2 , терпит еще скачок, опустившись до значения $V_{g2} = 1$. Это значение остается постоянным при увеличении частоты колебаний стенки. Из сопоставления решений становится ясно, как диссипативный член в уравнении индукции перестраивает картину течения вязкой электропроводной жидкости. Представляет интерес оценить влияние изменения параметра γ на картину течения жидкости. Численный анализ для $\gamma = 5$ представлен на рис. 5, 6, 7.

На рис. 5 представлена зависимость волновых чисел k_1 и k_2 как функции частоты Y . Они монотонно возрастают с увеличением частоты, причем k_1 растет, начиная с $k_1(0) = 3.5$, а k_2 с отрицательных значений $k_2(0) = -2.7$ с угловой точкой при $Y = 1$, при этом $Y(1) = -2.2$. На рис. 6 показаны графики функций $\delta_1(Y)$ и $\delta_2(Y)$. Волновое число δ_1 возрастает от значения $\delta_1(0) = 0.25$ с максимумом $\delta_1(0.5) = 0.34$ и затем монотонно убывает до 0.1 . Волновое число δ_2 (набегающая волна) убывает с $\delta_2(0) = 0.63$ до значения $\delta_2(0.5) = 0.34$ — угловая точка и затем резко возрастает до $\delta_2(1) = 0.45$ — угловая точка и затем монотонно убывает до 0.1 . Графики групповых скоростей представлены на рис. 7. Скорость волнового пакета, излучаемого стенкой, V_{g1} , имеет бесконечный разрыв в точке $Y = 0.15$, причем скорость падает от отрицательных значений $V_{g1}(0) = -5.5$ до $-\infty$,

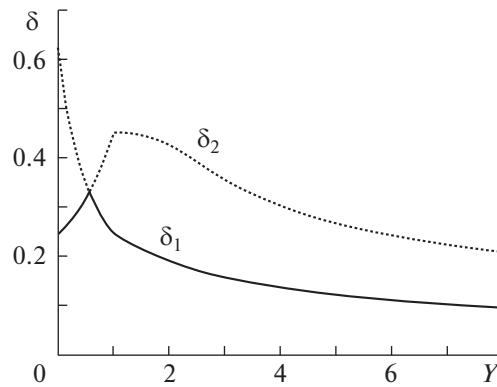


Рис. 6. Зависимость величин пограничных слоев δ_1 , δ_2 от частоты Y : $\gamma = 5$.

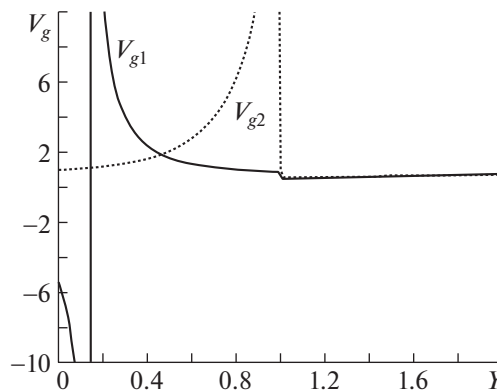


Рис. 7. Зависимость волновых пакетов V_{g1} , V_{g2} , от частоты Y : $\gamma = 5$.

затем скачком возрастает до $+\infty$ и резко убывает на интервале $0.5 < Y < 1$ до значения $V_{g1}(1) = 1$ и, опустившись до значения 0.7, остается постоянной с ростом частоты. Скорость набегающей волны V_{g2} возрастает от $V_{g1}(0) = 1$ до $+\infty$ на интервале $0 < Y < 1$. В точке $Y = 1$ скорость скачком падает до $V_{g1}(1) = 0.7$ и остается постоянной с ростом частоты. Проведенный анализ показывает, как диффузионный член в уравнении индукции меняет картину течения электропроводной жидкости. Кроме того, изменяя величины вкладов в изменение магнитного поля от переноса движущимся проводящим веществом и диффузией относительно этого вещества, можно наблюдать, как меняются волновые числа набегающих на стенку и излучаемых стенкой волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ задачи неустановившегося течения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в плоско-параллельной конфигурации. Найдены точные решения трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. В отличие от гидродинамического приближения здесь используется полное уравнение магнитной индукции. При этом никаких ограничений на характер движения пластины не накладывается. Определены поле скоростей в потоке и векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на стенку. Для случая “нормальных” колебаний пластины поле скоростей вязкой электропроводной жидкости представлено в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся вдоль оси y навстречу друг другу. Волна, излучаемая стенкой, распространяется с фазовой скоростью $V_{f1} = \omega/k_1$ и затухает на расстоянии δ_1 от стенки. Вторая волна набегаёт на стенку из бесконечности со скоростью $V_{f2} = \omega/k_2$ и затухает на расстоянии δ_2 . При этом волновые числа зависят от частоты, т.е. среда обладает дисперсией. Анализ зависимости групповых скоростей V_{g1} и V_{g2} от Y (частота ω при фиксированных

$s = 2$ и $\gamma = 1$) показал, что существуют особые точки нестационарной задачи, в которых волновые пакеты терпят конечные и бесконечные разрывы, принимая как положительные, так и отрицательные значения, что свидетельствует о наличии аномальной дисперсии. Для случая незатухающих колебаний стенки рассмотрен случай резонанса и исследована структура пограничных слоев, примыкающих к стенке. Показано, что в этом случае существует только волна, излучаемая стенкой, причем волновые числа этой волны зависят только от магнитной вязкости электропроводной среды и проекции угловой скорости на ось y и не зависят от кинематической вязкости. Волна, набегающая на стенку, отсутствует, и пограничный слой заполняет все полупространство. Математическая процедура интегрирования системы дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи может быть использована при исследовании более сложных задач. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для учета силовых воздействий при движении жидкости в каналах различной формы, а также в задачах фильтрации и при моделировании различных физических явлений в движущейся жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
2. Thornley C.I. On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // *Quan J. Mech and Appl. Math.* 1968. V. 21. № 4. P. 451–461.
3. Gupta A.S. Ekman Layer on a Porous Plate // *J. Phys. of Fluid.* 1971. V. 15. № 5. P. 930–941.
4. Гурченков А.А., Яламов Ю.И. Нестационарный поток на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды // *ПМТФ*. 1980. № 4. С. 66–69.
5. Холодова Е.С. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат наук, С-Петербургский государственный университет. С-Петербург, 2019. 451 с.
6. Гурченков А.А. Нестационарный поток вязкой несжимаемой электропроводной жидкости на вращающейся пластине. // *ПММ*. 2021. Т. 5–6. С. 770–778.
7. Гайфуллин А.М., Накрохин С.А. Обтекание сжимаемым газом пластины с движущейся против потока поверхностью // *Изв. РАН. МЖГ*. 2021. № 1. С. 47–51.
8. Гайфуллин А.М., Жвик В.В. Связь дальней асимптотики струи с профилем скорости в отверстии // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. 2020. Т. 495. С. 50–53.
9. Гайфуллин А.М., Жвик В.В. Нелокальный закон сохранения в свободной затопленной струе // *ЖВМиМФ*. 2021. Т. 61. № 10. С. 1646–1656.
10. Dimitrieva N.F. Stratified Flow Structure near the Horizontal Wedge // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54. № 7. P. 940–947.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519030111>
11. Dimitrieva N.F. Calculation of nonuniform fluid flows in a gravity field // In *Proc. Topical Problems of Fluid Mechanics*, ed. D. Šimurda, T. Bodnár, Prague, 2020. P. 48–55.
<https://doi.org/10.14311/TPFM.2020.007>
12. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика : [монография] / Гавриков М.Б. Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша. М.: КРАСАНД, 2018. 583 с.
13. Chashechkin Yu D. Differential fluid mechanics – basis of the theory of flows with combustion // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 1891. P. 0112023.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1891/1/012023>
14. Ермаков М.К. Моделирование вихревого течения с воронкой на основе матричного метода. 12-я Международн. конф. — школа молодых ученых “Волны и вихри в сложных средах” М. 01–03 декабря 2021 г.
15. Чашечкин Ю.Д. Эволюция тонкоструктурного распределение вещества свободно падающей капли в смешивающихся жидкостях // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2019. Т. 55. № 3. С. 67–77.
16. Chashechkin Yuli D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // *Mathematics*. 2021. V. 9. № 586.
<https://doi.org/10.3390/math9060586>
17. Поддубный И.И., Разуванов Н.Г. Исследование гидродинамики и теплообмена при опускном течении жидкого металла в канале прямоугольного сечения в компланарном магнитном поле // *Теплоэнергетика*. 2016. № 2. С. 13–21.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 632 с.
19. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров М.: Наука, 1978. 832 с.

УДК 532.516:534-18:517.958

ЭФФЕКТИВНЫЙ ТЕНЗОР ЯДЕР РЕЛАКСАЦИИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА И ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. В. В. Шумилова^{а,*}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: v.v.shumilova@mail.ru

Поступила в редакцию 23.06.2022 г.

После доработки 11.10.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Выведены явные формулы для расчета компонентов эффективного тензора ядер релаксации двухфазной слоистой среды с периодической микроструктурой. Первая фаза такой среды состоит из изотропного вязкоупругого материала, а вторая фаза — из вязкой несжимаемой жидкости. Установлено, в частности, что компоненты указанного тензора зависят от объемной доли жидкости внутри ячейки периодичности и не зависят от числа слоев и расстояний между ними.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, вязкоупругость, тензор ядер релаксации, эффективная среда

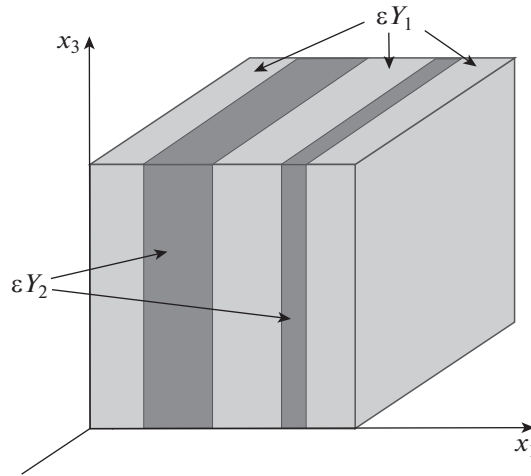
DOI: 10.31857/S0568528122600424, **EDN:** NSTBGN

Одним из основных направлений механики гетерогенных сред является исследование динамических свойств двухфазных микронеоднородных сред, состоящих из твердого материала и жидкости. Важной частью этого исследования является определение эффективных динамических характеристик с помощью известных физико-механических параметров фаз исходных сред и их геометрического распределения.

Строго обоснованные эффективные (усредненные) модели для двухфазных сред, состоящих из твердого материала и вязкой жидкости, были построены в [1–6]. В частности, было установлено, что эффективные среды представляют собой однородные вязкоупругие материалы, обладающие как вязкостью, так и памятью. Таким образом, если твердая фаза состоит из упругого материала или вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта, то соответствующая эффективная среда приобретает такое свойство, которым не обладают по отдельности ни твердая, ни жидкая фаза исходной среды. Эффект появления памяти при изучении макроскопического поведения суспензии, состоящей из упругих сферических частиц в ньютоновской вязкой среде, был также обнаружен Р. Кристенсеном [7].

Среди множества геометрических моделей двухфазных сред особый интерес представляют слоистые среды. Это связано с тем, что для таких сред часто удается найти явные формулы для расчета их эффективных характеристик по известным толщине и параметрам слоев (см., например, [5, 6, 8, 9]). Стоит также отметить, что наличие таких формул дает возможность решать не только прямые, но и обратные задачи по определению толщины и параметров слоев на основе экспериментальных данных.

В данной статье выводятся формулы для нахождения компонентов эффективного тензора ядер релаксации двухфазной плоскостной слоистой среды с периодической микроструктурой. В качестве первой фазы рассматривается изотропный вязкоупругий материал, а в качестве второй фазы — вязкая несжимаемая жидкость. Предполагается, что число жидких слоев внутри ячейки периодичности равно M ($M \geq 1$), а их суммарная объемная доля равна h ($0 < h < 1$). Для вывода искомых формул решаются вспомогательные стационарные и эволюционные задачи на единичном кубе. Доказывается, в частности, что компоненты эффективного тензора ядер релаксации зависят от h и не зависят от числа слоев и расстояний между ними внутри ячейки периодичности.

Рис. 1. Ячейка периодичности Y_ϵ при $M = 2$.

Точно такой же результат был получен в [9] для двухфазных слоистых вязкоупругих материалов (в этом случае h обозначает долю одной из вязкоупругих фаз).

1. ИСХОДНАЯ И УСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, заполненная двухфазной средой с периодической структурой. В качестве ячейки периодичности рассмотрим куб $Y_\epsilon = \epsilon Y$, где $Y = (0,1)^3$ — единичный куб, а величина ϵ много меньше линейных размеров области Ω . Предполагаем, что ячейка Y_ϵ содержит M ($M \geq 1$) слоев вязкой несжимаемой жидкости и $M + 1$ слоев изотропного вязкоупругого материала, параллельных плоскости Ox_2x_3 . Для более ясного представления о внутренней структуре ячейки Y_ϵ введем обозначения

$$Y_1 = \bigcup_{m=0}^M (h_{2m}, h_{2m+1}) \times (0,1)^2, \quad Y_2 = \bigcup_{m=1}^M (h_{2m-1}, h_{2m}) \times (0,1)^2$$

$$\Gamma = \partial Y_1 \cap \partial Y_2 = \bigcup_{m=1}^{2M} \{h_m\} \times (0,1)^2$$

где $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \dots < h_{2M} < h_{2M+1} = 1$. Будем считать, что множество ϵY_1 представляет собой вязкоупругую часть, а множество ϵY_2 — жидкую часть ячейки Y_ϵ (рис. 1). Объединение всех вязкоупругих и жидких слоев области Ω обозначим соответственно через $\Omega_{1\epsilon}$ и $\Omega_{2\epsilon}$, а суммарную объемную долю жидкости внутри Y_ϵ — через h :

$$h = \frac{|\epsilon Y_2|}{|Y_\epsilon|} = \frac{|Y_2|}{|Y|} = \sum_{m=1}^M (h_{2m} - h_{2m-1})$$

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений и малых деформаций в вязкоупругой фазе $\Omega_{1\epsilon}$, записываются в виде

$$\sigma_{ij}^\epsilon = \Gamma_{ijkh}(t) * e_{kh}(\mathbf{u}^\epsilon) \quad (1.1)$$

В развернутой форме

$$\sigma_{ij}^\epsilon = a_{ijkh} e_{kh}(\mathbf{u}^\epsilon) + b_{ijkh} e_{kh} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^\epsilon}{\partial t} \right) - d_{ijkh}(t) * e_{kh}(\mathbf{u}^\epsilon)$$

Здесь $\mathbf{u}^\epsilon(x, t)$ — вектор перемещений; $e_{kh}(\mathbf{u}^\epsilon) = e_{kh}^x(\mathbf{u}^\epsilon) = (\partial u_k^\epsilon / \partial x_h + \partial u_h^\epsilon / \partial x_k) / 2$ — компоненты тензора малых деформаций; σ_{ij}^ϵ — компоненты тензора напряжений; символ $*$ — операция сверт-

ки по переменной t ; $\Gamma(t)$ – тензор ядер релаксации: $\Gamma(t) = \delta(t)a + \delta'(t)b - d(t)$; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; a , b и $d(t)$ – тензоры модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации соответственно. Отметим, что в (1.1), как везде ниже, предполагается суммирование по повторяющимся индексам, а индексы i, j, k, h принимают значения от 1 до 3.

Компоненты тензоров a , b и $d(t)$ заданы в виде

$$\begin{aligned} a_{ijkh} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \\ b_{ijkh} &= \zeta \delta_{ij} \delta_{kh} + \eta_{\parallel} (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \\ d_{ijkh}(t) &= \left(G_1(t) - \frac{1}{3} G(t) \right) \delta_{ij} \delta_{kh} + \frac{1}{2} G(t) (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \end{aligned}$$

где λ и μ – параметры Ламе; ζ и $\eta_{\parallel}$ – коэффициенты вязкости; δ_{ij} – символ Кронекера; $G(t)$ и $G_1(t)$ – регулярные части ядер сдвиговой и объемной релаксации [10]. Кроме того, предполагается, что

$$G_1(t) = k_1 G(t), \quad G(t) = \sum_{n=1}^N v_n e^{-\gamma_n t}, \quad \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{\gamma_n} \leq K$$

где $k_1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$; $v_n, \gamma_n \in \mathbb{R}^+$ ($n = 1, \dots, N$); $\gamma_i < \gamma_j$ при $i < j$; $K = 2\mu$ при $k_1 = 0$ и $K = \min\{2\mu, (\lambda + 2\mu/3)/k_1\}$ при $k_1 > 0$ [11].

Определяющие соотношения в жидкой фазе $\Omega_{2\varepsilon}$ записываются в виде

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = -\delta_{ij} p^{\varepsilon} + 2\eta_2 e_{ij} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t} \right)$$

где $p^{\varepsilon}(x, t)$ – давление, а η_2 – динамический коэффициент вязкости жидкости.

Математическая модель, описывающая колебания двухфазной среды в области Ω , имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_s \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} + f_i(x, t), \quad x \in \Omega_{s\varepsilon}, \quad s = 1, 2 \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t} &= 0, \quad x \in \Omega_{2\varepsilon}, \quad [\mathbf{u}^{\varepsilon}]_{S_{\varepsilon}} = 0, \quad [\sigma_{il}]_{S_{\varepsilon}} = 0 \\ \mathbf{u}^{\varepsilon}(x, t)|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \mathbf{u}^{\varepsilon}(x, 0) = \frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\rho_s = \text{const} > 0$ – плотность среды в $\Omega_{s\varepsilon}$, $f_i(x, t)$ – компоненты вектора объемной силы, $[g]_{S_{\varepsilon}}$ – скачок функции g при переходе через границы слоев $S_{\varepsilon} = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}$.

Используя результаты [4], можно выписать усредненную модель, соответствующую исходной модели (1.2) и построенную при $\varepsilon \rightarrow 0$. Она имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x, t), \quad x \in \Omega \\ \mathbf{u}^{\varepsilon}(x, 0) &= \frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эта модель описывает колебания однородного вязкоупругого материала с постоянной плотностью $\rho = \rho_1(1 - h) + \rho_2 h$ и определяющими соотношениями:

$$\sigma_{ij} = \Gamma_{ijkh}^0(t) * e_{kh}(\mathbf{u}), \quad \Gamma^0(t) = \delta(t)\alpha + \delta'(t)\beta - g(t)$$

Здесь α и β – постоянные тензоры модулей упругости и коэффициентов вязкости, а $g(t)$ – тензор регулярных частей ядер релаксации эффективной среды. Компоненты этих тензоров находятся по формулам

$$\alpha_{ijkh} = (1 - h)a_{ijkh} + \int_{Y_1} (b_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{D}^{kh}) + a_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{Z}^{kh})) dy + \int_{Y_2} (2\eta_2 e_{ij}^y(\mathbf{D}^{kh}) - \delta_{ij} A^{kh}) dy \quad (1.4)$$

$$\beta_{ijkh} = (1-h)b_{ijkh} + \eta_2 h(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) + \int_{Y_1} b_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{Z}^{kh}) dy + \int_{Y_2} (2\eta_2 e_{ij}^y(\mathbf{Z}^{kh}) - \delta_{ij} B^{kh}) dy \quad (1.5)$$

$$g_{ijkh}(t) = (1-h)d_{ijkh}(t) + \int_{Y_1} (d_{ijlm}(t)e_{lm}^y(\mathbf{Z}^{kh}) + d_{ijlm}(t) * e_{lm}^y(\mathbf{W}^{kh})) dy - \\ - \int_{Y_1} \left(a_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{W}^{kh}) + b_{ijlm} e_{lm}^y \left(\frac{\partial \mathbf{W}^{kh}}{\partial t} \right) \right) dy - \int_{Y_2} \left(2\eta_2 e_{ij}^y \left(\frac{\partial \mathbf{W}^{kh}}{\partial t} \right) - \delta_{ij} S^{kh} \right) dy \quad (1.6)$$

Здесь $\{\mathbf{Z}^{kh}(y), B^{kh}(y)\}$, $\{\mathbf{D}^{kh}(y), A^{kh}(y)\}$, $\{\mathbf{W}^{kh}(y, t), S^{kh}(y, t)\}$ – Y -периодические решения задач:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{Z}^{kh}, B^{kh})) = 0, \quad y \in Y, \quad \operatorname{div} \mathbf{Z}^{kh} = -\delta_{kh}, \quad y \in Y_2 \\ \int_Y \mathbf{Z}^{kh} dy = 0, \quad [\mathbf{Z}^{kh}]_\Gamma = 0, \quad [\sigma_{il}^{(1)}(\mathbf{Z}^{kh}, B^{kh})]_\Gamma = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{D}^{kh}, \mathbf{Z}^{kh}, A^{kh})) = 0, \quad y \in Y, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}^{kh} = 0, \quad y \in Y_2 \\ \int_Y \mathbf{D}^{kh} dy = 0, \quad [\mathbf{D}^{kh}]_\Gamma = 0, \quad [\sigma_{il}^{(2)}(\mathbf{D}^{kh}, \mathbf{Z}^{kh}, A^{kh})]_\Gamma = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (\sigma_{ij}^{(3)}(\mathbf{W}^{kh}, \mathbf{Z}^{kh}, S^{kh})) = 0, \quad y \in Y, \quad \operatorname{div}_y \mathbf{W}^{kh} = 0, \quad y \in Y_2 \\ \int_Y \mathbf{W}^{kh} dy = 0, \quad \mathbf{W}^{kh}(y, 0) = \mathbf{D}^{kh}(y), \quad y \in Y \\ [\mathbf{W}^{kh}]_\Gamma = 0, \quad [\sigma_{il}^{(3)}(\mathbf{W}^{kh}, \mathbf{Z}^{kh}, S^{kh})]_\Gamma = 0 \quad (1.9)$$

соответственно. Здесь введены обозначения:

$$\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{Z}^{kh}, B^{kh}) = b_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{Z}^{kh}) + b_{ijkh}, \quad y \in Y_1 \\ \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{Z}^{kh}, B^{kh}) = 2\eta_2 e_{ij}^y(\mathbf{Z}^{kh}) + \eta_2 (\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}) - \delta_{ij} B^{kh}, \quad y \in Y_2 \\ \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{D}^{kh}, \mathbf{Z}^{kh}, A^{kh}) = b_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{D}^{kh}) + a_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{Z}^{kh}) + a_{ijkh}, \quad y \in Y_1 \\ \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{D}^{kh}, \mathbf{Z}^{kh}, A^{kh}) = 2\eta_2 e_{ij}^y(\mathbf{D}^{kh}) - \delta_{ij} A^{kh}, \quad y \in Y_2 \\ \sigma_{ij}^{(3)}(\mathbf{W}^{kh}, \mathbf{Z}^{kh}, S^{kh}) = a_{ijlm} e_{lm}^y(\mathbf{W}^{kh}) + b_{ijlm} e_{lm}^y \left(\frac{\partial \mathbf{W}^{kh}}{\partial t} \right) - d_{ijlm}(t) * e_{lm}^y(\mathbf{W}^{kh}) - \\ - d_{ijlm}(t) e_{lm}^y(\mathbf{Z}^{kh}) - d_{ijkh}(t), \quad y \in Y_1 \\ \sigma_{ij}^{(3)}(\mathbf{W}^{kh}, \mathbf{Z}^{kh}, S^{kh}) = 2\eta_2 e_{ij}^y \left(\frac{\partial \mathbf{W}^{kh}}{\partial t} \right) - \delta_{ij} S^{kh}, \quad y \in Y_2$$

Нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{Z}^{kh}(y) = \mathbf{Z}^{hk}(y), \quad \mathbf{D}^{kh}(y) = \mathbf{D}^{hk}(y), \quad \mathbf{W}^{kh}(y, t) = \mathbf{W}^{hk}(y, t) \\ B^{kh}(y) = B^{hk}(y), \quad A^{kh}(y) = A^{hk}(y), \quad S^{kh}(y, t) = S^{hk}(y, t)$$

поэтому для нахождения компонентов эффективного тензора ядер релаксации $\Gamma^0(t)$ достаточно знать решения вспомогательных задач (1.7)–(1.9) при $k \leq h$.

2. РЕШЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА ЕДИНИЧНОМ КУБЕ

Будем искать решение задачи (1.7) при $k = h = 1$ в виде

$$\mathbf{Z}^{11}(y) = (z(y_1), 0, 0), \quad B^{11}(y) = B_1 = \text{const}$$

где $z(y_1)$ – кусочно-линейная функция

$$z(y_1) = A_m y_1 + C_m, \quad y_1 \in (h_{m-1}, h_m), \quad m = 1, \dots, 2M + 1$$

Из (1.7) и условия Y -периодичности решения $\mathbf{Z}^{11}(y)$ следует, что функция $z(y_1)$ и постоянная B_1 должны удовлетворять условиям

$$z(0) = z(1), \quad \int_0^1 z(y_1) dy_1 = 0, \quad [z]_{y_1=h_m} = 0, \quad m = 1, \dots, 2M \quad (2.1)$$

$$\left(b_{i111} + b_{i111} \frac{dz}{dy_1} \right) \Big|_{h_{2n-1}+0} = \left(2\eta_2 \frac{dz}{dy_1} + 2\delta_{i1}\eta_2 - \delta_{i1}B_1 \right) \Big|_{h_{2n-1}+0} \quad (2.2)$$

$$\left(b_{i111} + b_{i111} \frac{dz}{dy_1} \right) \Big|_{h_{2n}+0} = \left(2\eta_2 \frac{dz}{dy_1} + 2\delta_{i1}\eta_2 - \delta_{i1}B_1 \right) \Big|_{h_{2n}+0} \quad (2.3)$$

$$\frac{dz}{dy_1} = -1, \quad y_1 \in (h_{2n-1}, h_{2n}), \quad n = 1, \dots, M \quad (2.4)$$

Из (2.2)–(2.4) сразу находим

$$A_1 = A_2 = \dots = A_{2M+1}, \quad A_2 = A_4 = \dots = A_{2M} = -1 \\ B_1 = -b_1(1 + A_1), \quad b_1 = b_{1111} = \zeta + 2\eta_1 \quad (2.5)$$

Далее, граничные условия в (2.1) приводят к равенствам

$$A_m h_m + C_m = A_{m+1} h_m + C_{m+1}, \quad m = 1, \dots, 2M$$

которые ввиду (2.5) можно переписать в виде

$$C_{2m+1} - C_{2m} + (A_1 + 1)h_{2m} = 0, \quad m = 1, \dots, M$$

$$C_{2m} - C_{2m-1} - (A_1 + 1)h_{2m-1} = 0, \quad m = 1, \dots, M$$

Складывая эти равенства при всех $m = 1, \dots, M$ и учитывая, что в силу условия 1-периодичности функции $z(y_1)$

$$C_1 = A_1 + C_{2M+1} \quad (2.6)$$

находим

$$A_1 = \frac{h}{1-h}, \quad B_1 = -\frac{b_1}{1-h}$$

Таким образом,

$$C_m = C_{m+1} + \frac{(-1)^m h_m}{1-h}, \quad m = 1, \dots, 2M$$

Откуда получим

$$C_m = C_{2M+1} + \frac{1}{1-h} \sum_{k=m}^{2M} (-1)^k h_k = C_1 - \frac{1}{1-h} \left(h - \sum_{k=m}^{2M} (-1)^k h_k \right), \quad m = 1, \dots, 2M \quad (2.7)$$

С другой стороны, из второго условия в (2.1) имеем

$$\frac{h}{1-h} \sum_{m=0}^M (h_{2m+1}^2 - h_{2m}^2) - \sum_{m=1}^M (h_{2m}^2 - h_{2m-1}^2) + 2 \sum_{m=1}^{2M+1} C_m (h_m - h_{m-1}) = 0 \quad (2.8)$$

Так как

$$\frac{h}{1-h} \sum_{m=0}^M (h_{2m+1}^2 - h_{2m}^2) - \sum_{m=1}^M (h_{2m}^2 - h_{2m-1}^2) = \frac{1}{1-h} \left(h - \sum_{m=1}^{2M} (-1)^m h_m^2 \right)$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{2M+1} C_m (h_m - h_{m-1}) &= C_1 + \frac{1}{1-h} \left(-h + \sum_{m=1}^{2M} (h_m - h_{m-1}) \sum_{k=m}^{2M} (-1)^k h_k \right) = \\ &= C_1 + \frac{1}{1-h} \left(-h + \sum_{m=1}^{2M} (-1)^m h_m^2 \right)\end{aligned}$$

то из (2.6)–(2.8) получаем

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1}{2(1-h)} \left(h - \sum_{m=1}^{2M} (-1)^m h_m^2 \right) \\ C_m &= \frac{1}{2(1-h)} \left(-h - \sum_{m=1}^{2M} (-1)^m h_m^2 + 2 \sum_{k=m}^{2M} (-1)^k h_k \right) \\ C_{2M+1} &= -\frac{1}{2(1-h)} \left(h + \sum_{m=1}^{2M} (-1)^m h_m^2 \right)\end{aligned}$$

Аналогично находятся решения задач (1.7) при остальных значениях k и h . В окончательном виде при $k \leq h$ они имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}^{11}(y) &= \mathbf{Z}^{22}(y) = \mathbf{Z}^{33}(y) = (z(y_1), 0, 0), \quad \mathbf{Z}^{23}(y) = (0, 0, 0) \\ \mathbf{Z}^{12}(y) &= (0, c_1 z(y_1), 0), \quad \mathbf{Z}^{13}(y) = (0, 0, c_1 z(y_1)), \quad B^{11}(y) = -\frac{b_1}{1-h} \\ B^{12}(y) &= B^{13}(y) = B^{23}(y) = 0, \quad B^{22}(y) = B^{33}(y) = -2\eta_2 - \frac{\zeta + 2\eta_1 h}{1-h} \\ c_1 &= \frac{(1-h)(\eta_2 - \eta_1)}{\eta_{12}}, \quad \eta_{12} = \eta_1 h + \eta_2(1-h)\end{aligned}$$

Подставляя найденные решения $\mathbf{Z}^{kh}(y)$ в (1.8) и повторяя предыдущие рассуждения, находим решения задач (1.8) при $k \leq h$:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^{11}(y) &= \mathbf{D}^{22}(y) = \mathbf{D}^{33}(y) = \mathbf{D}^{23}(y) = (0, 0, 0), \quad \mathbf{D}^{12}(y) = (0, c_2 z(y_1), 0) \\ \mathbf{D}^{13}(y) &= (0, 0, c_2 z(y_1)), \quad A^{11}(y) = -\frac{a_1}{1-h}, \quad A^{12}(y) = A^{13}(y) = A^{23}(y) = 0 \\ A^{22}(y) &= A^{33}(y) = -\frac{\lambda + 2\mu h}{1-h}, \quad a_1 = a_{111} = \lambda + 2\mu, \quad c_2 = -\frac{\mu \eta_2 (1-h)}{\eta_{12}^2}\end{aligned}$$

Подставляя, в свою очередь, $\mathbf{Z}^{kh}(y)$ и $\mathbf{D}^{kh}(y)$ в (1.9), нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^{11}(y, t) &= \mathbf{W}^{22}(y, t) = \mathbf{W}^{33}(y, t) = \mathbf{W}^{23}(y, t) = (0, 0, 0) \\ S^{11}(y, t) &= \frac{1}{1-h} \left(k_1 + \frac{2}{3} \right) \sum_{n=1}^N v_n e^{-\gamma_n t}, \quad S^{23}(y, t) = 0 \\ S^{22}(y, t) &= S^{33}(y, t) = \frac{1}{1-h} \left(k_1 + h - \frac{1}{3} \right) \sum_{n=1}^N v_n e^{-\gamma_n t}\end{aligned}$$

Нам остается найти решения задач (1.9) при $k = 1, h = 2$ и при $k = 1, h = 3$. Будем искать $\mathbf{W}^{12}(y, t)$ и $\mathbf{W}^{13}(y, t)$ в виде

$$\mathbf{W}^{12}(y, t) = (0, p(t)z(y_1), 0), \quad \mathbf{W}^{13}(y, t) = (0, 0, p(t)z(y_1)), \quad p(0) = c_2$$

Из граничных условий задачи (1.9) следует, что $S^{12}(y, t) = S^{13}(y, t) = 0$, а функция $p(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\eta_{12} \frac{dp}{dt} - \frac{h}{2} G(t) * p(t) + \mu h p(t) = \frac{\eta_2(1-h)}{2\eta_{12}} G(t) \quad (2.9)$$

Покажем, что решение $p(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $p(0) = c_2$, имеет вид

$$p(t) = \sum_{k=1}^{N+1} p_k e^{-\xi_k t} \quad (2.10)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_{N+1}$ — корни рационального уравнения, а $p_1, \dots, p_{N+1}$ — решение линейной системы уравнений. Действительно, подставляя (2.10) в (2.9), получаем

$$\sum_{k=1}^{N+1} A_k p_k e^{-\xi_k t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N B_n v_n e^{-\gamma_n t} = 0 \quad (2.11)$$

$$A_k = \eta_{12} \xi_k - \mu h - \frac{h}{2} \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{\xi_k - \gamma_n}, \quad B_n = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{h p_k}{\xi_k - \gamma_n} + \frac{\eta_2(1-h)}{\eta_{12}}$$

Ясно, что равенство (2.11) выполняется только тогда, когда $A_k = 0$ и $B_n = 0$ для всех $k = 1, \dots, N+1$ и $n = 1, \dots, N$. Отсюда следует, что $\xi_1, \dots, \xi_{N+1}$ — корни уравнения

$$\eta_{12} \xi - \mu h = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^N \frac{v_n}{\xi - \gamma_n} \quad (2.12)$$

Величины $p_1, \dots, p_{N+1}$ — решение системы $N+1$ линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N+1} p_k = -\frac{\mu \eta_2(1-h)}{\eta_{12}^2}, \quad \sum_{k=1}^{N+1} \frac{p_k}{\xi_k - \gamma_n} + \frac{\eta_2(1-h)}{\eta_{12} h} = 0, \quad n = 1, \dots, N$$

Отметим, что корни уравнения (2.12) — положительные и различны, поэтому без ограничения общности можно считать, что $0 < \xi_1 < \dots < \xi_{M+1}$.

3. ЭФФЕКТИВНЫЙ ТЕНЗОР ЯДЕР РЕЛАКСАЦИИ

Перейдем к выводу формул для вычисления компонентов эффективного тензора $\Gamma^0(t)$ с помощью найденных выше решений вспомогательных задач (1.7)–(1.9). Перед этим следует отметить, что компоненты эффективного тензора удовлетворяют классическим условиям симметрии, т.е. $\Gamma_{ijkh}^0(t) = \Gamma_{jikh}^0(t) = \Gamma_{ijhk}^0(t) = \Gamma_{hkij}^0(t)$. Нетрудно также убедиться, что $\Gamma_{ijkh}^0(t) = 0$ как только $\delta_{ij}\delta_{kh} + \delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk} = 0$. Более того, эффективная среда является трансверсально изотропной, т.е. выполнены соотношения

$$\Gamma_{2222}^0(t) = \Gamma_{3333}^0(t), \quad \Gamma_{1122}^0(t) = \Gamma_{1133}^0(t), \quad \Gamma_{1212}^0(t) = \Gamma_{1313}^0(t)$$

$$\Gamma_{2222}^0(t) - \Gamma_{2233}^0(t) = 2\Gamma_{2323}^0(t)$$

Таким образом, нам достаточно вывести формулы для компонентов тензоров α , β и $g(t)$ с индексами $\{1111\}$, $\{2222\}$, $\{1122\}$, $\{1212\}$, $\{2323\}$.

Полагая $i = j = k = h = 1$ и подставляя решения задач (1.7)–(1.9) в формулы (1.4)–(1.6), последовательно находим

$$\alpha_{1111} = a_1(1-h) + \frac{a_1 h}{1-h} \sum_{m=0}^M \int_{h_{2m}}^{h_{2m+1}} dy_1 + \frac{a_1}{1-h} \sum_{m=1}^M \int_{h_{2m-1}}^{h_{2m}} dy_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{1-h}$$

$$\beta_{1111} = b_1(1-h) + 2\eta_2 h + \frac{b_1 h}{1-h} \sum_{m=0}^M \int_{h_{2m}}^{h_{2m+1}} dy_1 + \left(-2\eta_2 + \frac{b_1}{1-h}\right) \sum_{m=1}^M \int_{h_{2m-1}}^{h_{2m}} dy_1 = \frac{\zeta + 2\eta_1}{1-h}$$

$$g_{1111}(t) = (1-h)d_{1111}(t) + \frac{hd_{1111}(t)}{1-h} \sum_{m=0}^M \int_{h_{2m}}^{h_{2m+1}} dy_1 + \frac{G(t)}{1-h} \left(k_1 + \frac{2}{3}\right) \sum_{m=1}^M \int_{h_{2m-1}}^{h_{2m}} dy_1 = \frac{1}{1-h} \left(k_1 + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^N v_n e^{-\gamma_n t}$$

Аналогично выводятся формулы для остальных искоемых компонентов тензоров α , β и $g(t)$. В окончательном виде они записываются в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{2222} &= \frac{\lambda + 2\mu(1-2h+2h^2)}{1-h}, & \alpha_{1212} &= \frac{\mu\eta_2^2(1-h)}{\eta_{12}^2} \\ \alpha_{1122} &= \frac{\lambda + 2\mu h}{1-h}, & \alpha_{2323} &= (1-h)\mu, & \beta_{1212} &= \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_{12}}, & \beta_{1122} &= \frac{\zeta + 2\eta_1 h}{1-h} \\ \beta_{2222} &= 4\eta_2 h + \frac{\zeta + 2\eta_1(1-2h+2h^2)}{1-h}, & \beta_{2323} &= \eta_1(1-h) + \eta_2 h \\ g_{2222}(t) &= \frac{1}{1-h} \left(k_1 - 2h(1-h) + \frac{2}{3}\right) \sum_{n=1}^N v_n e^{-\gamma_n t} \\ g_{1122}(t) &= \frac{1}{1-h} \left(k_1 + h - \frac{1}{3}\right) \sum_{n=1}^N v_n e^{-\gamma_n t}, & g_{1212}(t) &= -\eta_2 \sum_{k=1}^{N+1} \xi_k p_k e^{-\xi_k t} \\ g_{2323}(t) &= \frac{1-h}{2} \sum_{n=1}^N v_n e^{-\gamma_n t} \end{aligned}$$

Анализ полученных формул показывает, что компоненты тензора $\Gamma^0(t)$ не зависят от числа вязкоупругих и жидких слоев внутри ячейки периодичности Y_ϵ . Для их вычисления требуется знать лишь объемную долю h жидкости внутри Y_ϵ , тензор ядер релаксации $\Gamma(t)$ вязкоупругих слоев и динамическую вязкость η_2 жидкости. С другой стороны, так как $\rho = \rho_1(1-h) + \rho_2 h$, то эффективная плотность ρ также не зависит от числа M . Это означает, что коэффициенты и ядра сверток эффективных уравнений акустики (3) не зависят от общего числа слоев внутри Y_ϵ и расстояний между ними. С этой точки зрения среда, для которой ячейка Y_ϵ состоит из двух или более жидких слоев с их суммарной толщиной ϵh , эквивалентна среде (с такими же характеристиками фаз), для которой Y_ϵ состоит из одного жидкого слоя толщины ϵh .

Используя результаты [3–5] и следуя приведенной выше схеме решения вспомогательных задач, аналогичным образом можно вывести явные формулы для расчета компонентов тензора $\Gamma^0(t)$ в случаях, когда: 1) $b \neq 0$, $d(t) = 0$; 2) $b = 0$, $d(t) \neq 0$; 3) $b = 0$, $d(t) = 0$. Заметим, что первый случай соответствует среде, состоящей из жидкости и вязкоупругого материала Кельвина–Фойгта, а третий случай – среде, состоящей из жидкости и упругого материала.

Во всех трех случаях компоненты тензоров α и β вычисляются по тем же формулам, что и выше. Отметим, что если $b = 0$, то $\zeta = \eta_1 = 0$ и, следовательно, $\beta_{1111} = \beta_{1122} = \beta_{1212} = 0$, $\beta_{2222} = 4\eta_2 h$, $\beta_{2323} = \eta_2 h$.

Во втором случае компоненты тензора $g(t)$ также вычисляются по формулам, выведенным нами для общего случая $b \neq 0$, $d(t) \neq 0$. В первом и третьем случаях все компоненты тензора $g(t)$ равны нулю, кроме следующих:

$$g_{1m1m}(t) = g_{m11m}(t) = g_{1mm1}(t) = \frac{h(1-h)\mu^2\eta_2^2}{\eta_{12}^3} \exp\left(-\frac{\mu h t}{\eta_{12}}\right), \quad m = 2, 3$$

Отметим, что утверждение о независимости эффективных уравнений акустики от числа слоев исходной среды внутри ячейки периодичности остается верным для всех трех перечисленных выше случаев твердой фазы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена математическая модель колебаний многослойной среды, состоящей из чередующихся слоев изотропного вязкоупругого материала и вязкой несжимаемой жидкости. С помо-

щью соответствующей усредненной модели показано, что эффективный тензор ядер релаксации слоистой среды имеет три аддитивные составляющие: одну регулярную $g(t)$ и две сингулярные $\delta(t)\alpha$ и $\delta'(t)\beta$, где α , β и $g(t)$ – эффективные тензоры модулей упругости, коэффициентов вязкости и регулярных частей ядер релаксации соответственно. Найдены периодические решения вспомогательных задач на единичном кубе и с их помощью выведены явные формулы для вычисления компонентов тензоров α , β , $g(t)$. Показано, что для применения этих формул требуется знать лишь объемную долю жидкости внутри ячейки периодичности, тензор ядер релаксации вязкоупругих слоев и динамическую вязкость жидкости. Полученные формулы позволяют решать не только прямые, но и обратные задачи, к числу которых относится, например, задача по определению доли жидкости внутри взятого образца слоистой среды при известных параметрах ее фаз и по имеющимся экспериментальным данным.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
2. Sanchez-Hubert J. Asymptotic study of the macroscopic behavior of a solid-liquid mixture // Math. Methods Appl. Sci. 1980. № 2. P. 1–18.
3. Gilbert R.P., Mikelić A. Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I // Nonlinear Analysis. 2000. V. 40. № 1. P. 185–212.
4. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Усреднение уравнений акустики для пористого вязкоупругого материала с долговременной памятью, заполненного вязкой жидкостью // Диф. уравнения. 2012. Т. 48. № 8. С. 1174–1186.
5. Шамаев А.С., Шумилова В.В. Спектр одномерных колебаний в комбинированной слоистой среде, состоящей из вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 17–25.
6. Shumilova V.V. Spectrum of one-dimensional vibrations of a layered medium consisting of a Kelvin–Voigt material and a viscous incompressible fluid // Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ. 2013. Т. 6. № 3. С. 349–356.
7. Кристиensen P. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
8. Победра Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984. 336 с.
9. Shumilova V.V. Homogenization of the system of acoustic equations for layered viscoelastic media // J. Math. Sci. 2022. V. 261. № 3. P. 488–501.
10. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. Шамаев А.С., Шумилова В.В. О спектре одномерных колебаний композита, состоящего из слоев упругого и вязкоупругого материалов // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15. № 4. С. 124–134.

УДК 532.517.3

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПУЛЬСИРУЮЩИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

© 2023 г. Н. В. Никитин^{a,*}, Н. В. Попеленская^{a,**}

^aМГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: nvnikitin@mail.ru

**E-mail: aero.natap@mail.ru

Поступила в редакцию 01.11.2022 г.

После доработки 11.11.2022 г.

Принята к публикации 11.11.2022 г.

Численно исследуются турбулентные пульсирующие течения в трубе квадратного сечения. Рассматривается режим доминирования потока, когда расход жидкости остается положительным во всех фазах осцилляционного цикла. Изучены течения при нескольких значениях частоты осцилляций. Результаты сопоставляются с ламинарными осциллирующими течениями и турбулентным стационарным течением в квадратной трубе, а также пульсирующими турбулентными течениями в круглой трубе. Определены интегральные и пульсационные характеристики турбулентности, их зависимость от частоты осцилляций. Обнаружено, в частности, что при рассмотренном числе Рейнольдса $Re = 2200$ коэффициент сопротивления в пульсирующих течениях оказывается ниже, чем в стационарном. Снижение сопротивления увеличивается с ростом периода осцилляций, достигая величины в 14.7%. Характерной особенностью турбулентных течений в трубах прямоугольного сечения является возникновение вторичных течений Прандтля 2-го рода. В работе подробно изучены детали вторичных течений в условиях пульсирующего потока.

Ключевые слова: турбулентные течения в трубах, пульсирующие течения, вторичные течения, уравнения Навье–Стокса, прямое численное моделирование

DOI: 10.31857/S0568528122600886, **EDN:** NTOIHM

Пульсирующими называются течения, сочетающие ненулевой средний поток и периодическую (чаще всего гармоническую) осциллирующую составляющую. Важность изучения нестационарных потоков в целом и пульсирующих потоков в трубах в частности очевидна. Большинство биологических потоков пульсирует, возможно, потому, что перистальтический насос является самым простым насосом, используемым в биологических системах. Пульсирующие потоки свойственны многим инженерным приложениям, таким как течения в поршневых насосах, потоки во впускных или выпускных коллекторах двигателей внутреннего сгорания, потоки в гидравлических и пневматических линиях и системах управления. Несмотря на их большую технологическую и биомедицинскую значимость, пульсирующие турбулентные потоки изучены слабо, даже в простой геометрии. Одной из причин этого является повышенная сложность, создаваемая осциллирующей составляющей движения, которая увеличивает число соответствующих параметров подобия с одного (в случае стационарного потока) до трех. В большинстве выполненных ранее исследований изучались пульсирующие течения в круглой трубе и, в меньшей степени, в плоском канале. Соответствующие ссылки можно найти в обзорных работах [1, 2], а также в обзорах более современных работ [3, 4]. Интенсивность осцилляций определяется параметром β , равным отношению амплитуды осцилляций скорости к средней скорости течения. Различают режимы течения с доминированием среднего потока, что характеризуется значениями $\beta < 1$, и режимы с доминированием осцилляций, когда $\beta > 1$. В первом случае обратных движений жидкости (навстречу направлению основного потока) либо вовсе не возникает, либо их появление ограничено пристенными зонами и непродолжительными отрезками времени пульсационного цикла. Имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о том, что выбор безразмерного параметра, характеризующего частоту осцилляций $\omega = 2\pi/T$ (здесь T – период), не однозначен. В ламинарных течениях чаще всего используется число Стокса $\Omega = R\sqrt{\omega/2\nu}$ [5]

(R – радиус трубы, ν – вязкость жидкости), выражающее отношение радиуса трубы к толщине стоксовского слоя $\sqrt{2\nu/\omega}$. В турбулентных течениях чаще используются параметры $\Omega_t = 2\omega R/u_\tau$ [6] или $\omega^+ = \omega\nu/u_\tau^2$ [7]. Здесь $u_\tau = \tau_w/\rho$ – динамическая скорость, τ_w – среднее напряжение трения на стенке, ρ – плотность жидкости. В [6] определено пять основных режимов пульсаций в зависимости от значений Ω_t : квазистационарный режим ($\Omega_t \leq 10^{-1}$), низкочастотный режим ($10^{-1} < \Omega_t \leq 1$), режим промежуточных частот ($1 < \Omega_t \leq 10$), высокочастотный режим ($\Omega_t \sim 10$) и режим быстрых осцилляций ($\Omega_t \sim 10^2$ и выше).

В данной работе численно исследуются пульсирующие течения в трубе квадратного сечения. Рассматриваются режимы с доминированием среднего потока ($\beta = 0.5$) в диапазоне частот, соответствующих промежуточным и высокочастотным режимам по классификации [6]. Основное внимание уделяется особенностям распределения скорости по сечению трубы на разных фазах колебания потока. Турбулентные течения в прямоугольных трубах, кроме геометрических отличий, характеризуются наличием вторичных течений, концентрирующихся в угловых областях поперечного сечения [8]. Одной из целей настоящей работы является изучение турбулентных вторичных течений (вторичных течений Прандтля 2-го рода) в условиях пульсирующего потока. Вычисления проведены при числе Рейнольдса $Re = 2200$, для которого имеются подробные результаты расчетов стационарных течений [9, 10].

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в длинной трубе квадратного поперечного сечения $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \{|x| < \infty, -h \leq y, z \leq h\}$. Нестационарное поле скорости $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и кинематическое давление $p(t, \mathbf{x})$ отыскиваются путем численного решения уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

На твердых стенках трубы $y, z = \pm h$ ставятся условия прилипания, в направлении x используются условия периодичности. Величина продольного периода L_x выбирается достаточно большой, превышающей все существенные масштабы турбулентных структур в рассматриваемом течении. Условие пространственной периодичности поля скорости диктует периодичность градиента давления, откуда следует, что само давление представляется в виде $p(t, x, y, z) = -d_p(t)x + p'(t, x, y, z)$, где функция p' , как и поле скорости L_x -периодична вдоль x . Переменная $-d_p(t)$ представляет собой средний (по пространству) градиент давления, вызывающий движение жидкости. Положительное значение d_p отвечает силе давления, действующей в положительном направлении x . Величина $d_p(t)$ в каждый момент времени выбирается из условия периодического во времени изменения средней расходной скорости потока $u_b(t) = \bar{u}_b(1 + \beta \sin \omega t)$ с постоянными значениями $\bar{u}_b$, β и ω . При описании нестационарных потоков в трубах возникает необходимость использования осреднения по разным переменным: среднее по времени, фазовое среднее, среднее по продольной координате, среднее по сечению трубы. Для избежания путаницы для средней расходной скорости потока будем использовать термин удельный расход (расход на единицу площади сечения трубы) или, для краткости, расход. В данной работе исследованы течения при числе Рейнольдса $Re = h\bar{u}_b/\nu = 2200$, относительной амплитуде осцилляций расхода $\beta = 0.5$ и периоде осцилляций в диапазоне от $T = 5h/\bar{u}_b$ до $T = 100h/\bar{u}_b$. В качестве начального поля скорости берется поле скорости установившегося стационарного турбулентного течения ($\beta = 0$), рассчитанного при рассматриваемом числе Рейнольдса [10]. Отметим, что минимальным числом Рейнольдса, при котором в квадратной трубе поддерживается турбулентный режим, является $Re = 1077$ [11], таким образом, число Рейнольдса, рассчитанное по мгновенному удельному расходу $hu_b(t)/\nu$ и изменяющееся при $\beta = 0.5$ во времени в пределах от 1100 до 3300, не выходит за пределы диапазона турбулентных течений. Можно ожидать, что при выбранных значениях Re , β течение будет оставаться турбулентным даже при $T \rightarrow \infty$. Численные эксперименты, проведенные в данной работе, подтверждают это предположение.

Для численного решения задачи применяется универсальный метод решения уравнений Навье–Стокса [12], использующий конечно-разностный метод дискретизации по пространствен-

ным координатам и полуявную схему интегрирования по времени. В продольном направлении используется равномерная расчетная сетка, а в поперечных — неравномерная, со сгущением узлов сетки вблизи твердых стенок. При варьировании сеточных параметров (размера расчетной области L_x , и числа узлов сетки N_x, N_y, N_z) установлено, что набором, достаточным для удовлетворительной точности всех вычислений при рассматриваемом числе Рейнольдса, является $L_x = 10h, N_x = N_y = N_z = 128$. Большинство представляемых ниже результатов получено при этих значениях параметров.

2. ЛАМИНАРНОЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРУБЕ

Предположим, что течение ламинарно, однонаправленно, однородно в продольном направлении и периодически (гармонично) во времени. Поле продольной компоненты скорости и градиент давления можно в этом случае отыскивать в виде $u(t, y, z) = \text{Re}\{U(y, z) \exp(i\omega t)\}$; $d_p(t) = \text{Re}\{D_p \exp(i\omega t)\}$ (Re обозначает действительную часть комплексной величины). Для комплексных амплитуд U и D_p из (1.1) получается уравнение

$$i\omega U = D_p + \nu \nabla^2 U \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) описывает как осциллирующие, так и стационарные течения. В последнем случае достаточно положить $\omega = 0$. Пульсирующее течение представляется суммой стационарного и осциллирующего решений. Численные решения (2.1) для геометрии прямоугольной трубы были получены ранее в [13, 14]. Применялись конечноразностные методы. Определены соотношения между фазами и амплитудами колебаний расхода, напряжения трения на стенке и градиента давления в зависимости от частоты осцилляций и отношения сторон поперечного сечения.

Решение (2.1) с нулевыми условиями на границах прямоугольника $|y| \leq h, |z| \leq sh$ можно выписать, точно воспользовавшись методом Галеркина

$$U(y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} U_{jk} \cos(\beta_j y/h) \cos(\beta_k z/sh)$$

$$U_{jk} = \frac{4D_p h^2}{\nu} \frac{(-1)^{j+k}}{\beta_j \beta_k (2i\Omega^2 + \beta_j^2 + \beta_k^2/s^2)} \quad (2.2)$$

$$U_b = \frac{4D_p h^2}{\nu} G; \quad G(\Omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j^2 \beta_k^2 (2i\Omega^2 + \beta_j^2 + \beta_k^2/s^2)}$$

Здесь $\beta_n = (n-1/2)\pi$, $\Omega = h\sqrt{\omega/2\nu}$ — число Стокса, U_b — комплексная амплитуда удельного расхода: $u_b(t) = \text{Re}\{U_b \exp(i\omega t)\}$.

Выражения (2.2) дают связь между модулями и аргументами удельного расхода U_b и градиента давления D_p

$$|U_b| = \frac{4h^2}{\nu} |D_p| |G|; \quad \arg(U_b) = \arg(D_p) + \arg(G) \quad (2.3)$$

Графики $|G|/G(0)$ и $\varphi = \arg(G)$ в зависимости от числа Стокса Ω для случая квадратной трубы ($s = 1$) приведены на рис. 1. В квадратной трубе $G(0) = 0.0351$, что несколько больше, чем в круглой трубе, где соответствующее значение составляет 0.03125. Можно показать, что обратная к $G(0)$ величина есть число Пуазейля $\text{Po} = c_f \text{Re}_D$, где c_f — коэффициент сопротивления, а число Рейнольдса Re_D вычисляется через среднюю скорость и гидравлический диаметр $D = 2h$ (в круглой трубе $D = 2R$). Для приведенных значений $G(0)$ получаем $\text{Po} = 32$ и $\text{Po} \approx 28.5$ для круглой и квадратной трубы соответственно, что согласуется с данными, представленными в [15] (Fig. 3–13). С ростом частоты осцилляций $|G|$ быстро уменьшается, приближаясь к зависимости $|G| \sim \Omega^{-2}$. Уменьшение $|G(\Omega)|$ говорит о том, что для поддержания нужной амплитуды колебаний расхода требуются все большие и большие амплитуды градиента давления. Величина $\varphi = \arg(G)$ имеет смысл разности фаз колебаний расхода и градиента давления $d_p(t)$. При малых частотах φ имеет

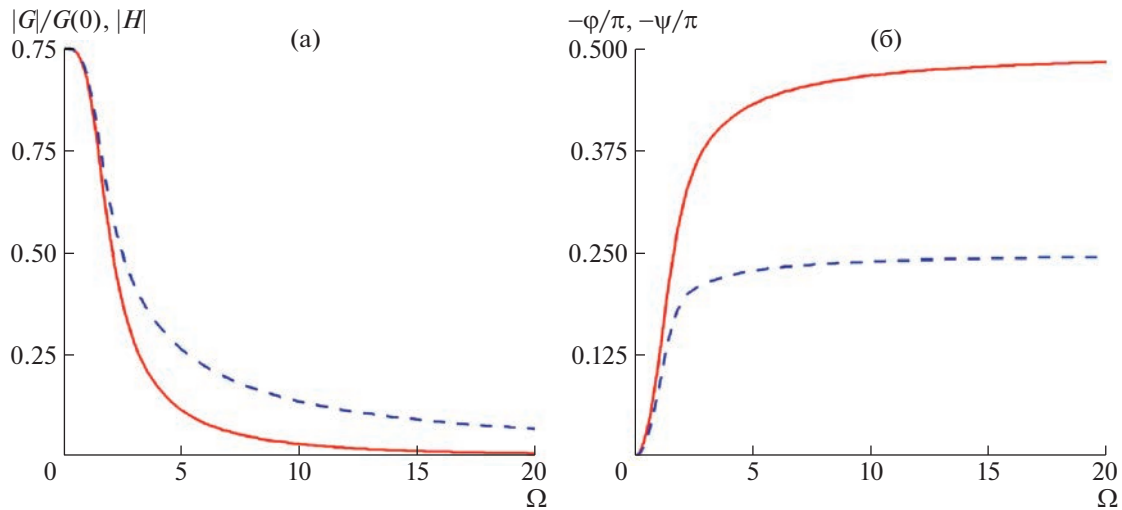


Рис. 1. Модули (а) и аргументы (б) функций $G(\Omega)$ (2.2) — сплошные линии и $H(\Omega)$ (2.4) — прерывистые линии. Течение в квадратной трубе.

близкие к нулю значения, т.е. колебания расхода происходят почти синфазно с колебаниями градиента давления $d_p(t)$. При $\Omega > 0$ аргумент G становится отрицательным, приближаясь к асимптотическому значению $\varphi = -\pi/2$ при $\Omega \rightarrow \infty$. Отрицательный знак φ указывает на то, что колебания расхода отстают по фазе от колебаний $d_p(t)$.

Еще одна важная характеристика течения — среднее по периметру напряжение трения на стенке $\tau_w(t) = \text{Re}\{T_w \exp(i\omega t)\}$. Интегрируя (2.1) по сечению трубы, получим связь комплексных амплитуд трения на стенке и градиента давления

$$T_w = \frac{\rho s h}{s+1} D_p H; \quad H(\Omega) = 1 - 8i\Omega^2 G \quad (2.4)$$

Модуль и аргумент ψ функции $H(\Omega)$ для случая квадратной трубы ($s = 1$) также показаны на рис. 1. С ростом Ω величина $|H|$ уменьшается, хотя и не так быстро, как $|G|$. Аргумент H отрицателен при $\Omega > 0$, но имеет меньшее абсолютное значение, чем аргумент G , т.е. осцилляции трения на стенке остаются по фазе от осцилляций давления, но опережают осцилляции расхода. При $\Omega \rightarrow \infty$ аргумент H стремится к предельному значению $\psi = -\pi/4$. Полученные соотношения между фазами колебаний градиента давления, расхода и среднего трения на стенке совпадают с результатами [13]. Аналогичные сдвиги по фазе при высоких частотах, $-\pi/4$ и $-\pi/2$, для среднего трения на стенке и для расхода относительно колебаний градиента давления наблюдаются и в круглой трубе [16].

Пульсирующее течение, как было отмечено выше, описывается суммой стационарного и осциллирующего решений (2.1). Для рассматриваемых в настоящей работе течений, удельный расход в которых изменяется по закону $u_b(t) = \bar{u}_b(1 + \beta \sin(\omega t))$ при $\beta = 0.5$, поле скорости в ламинарном течении можно представить в виде

$$u(t, y, z) = \bar{u}_b[\bar{u}(y, z) + \gamma_u(y, z) \sin(\omega t + \varphi_u(y, z))]$$

Здесь $\bar{u}$ есть среднее (по времени), γ_u — амплитуда осцилляций и φ_u — сдвиг по фазе (относительно колебаний расхода) для скорости $u/\bar{u}_b$ в точке (y, z) . Удельные расходы, соответствующие $\bar{u}(y, z)$ и $\gamma_u(y, z)$, равны 1 и 0.5 соответственно.

На рис. 2 представлены графики изменения $\bar{u}(y, z)$ и $\gamma_u(y, z)$ вдоль двух линий в плоскости поперечного сечения квадратной трубы: вдоль срединного перпендикуляра к стенке на отрезке от стенки до центра сечения трубы и вдоль диагонали от угловой точки до центра сечения трубы. По оси абсцисс отложены расстояния до ближайшей стенки d и до ближайшей угловой точки d_0 соответственно. На рис. 3 даны графики изменения фазы $\varphi_u(y, z)$ вдоль тех же линий. Показаны результаты для четырех значений частоты осцилляций, соответствующих значениям числа Стокса $\Omega = 18.6, 13.1, 10.7$ и 9.3 , для которых в дальнейшем представляются результаты расчетов

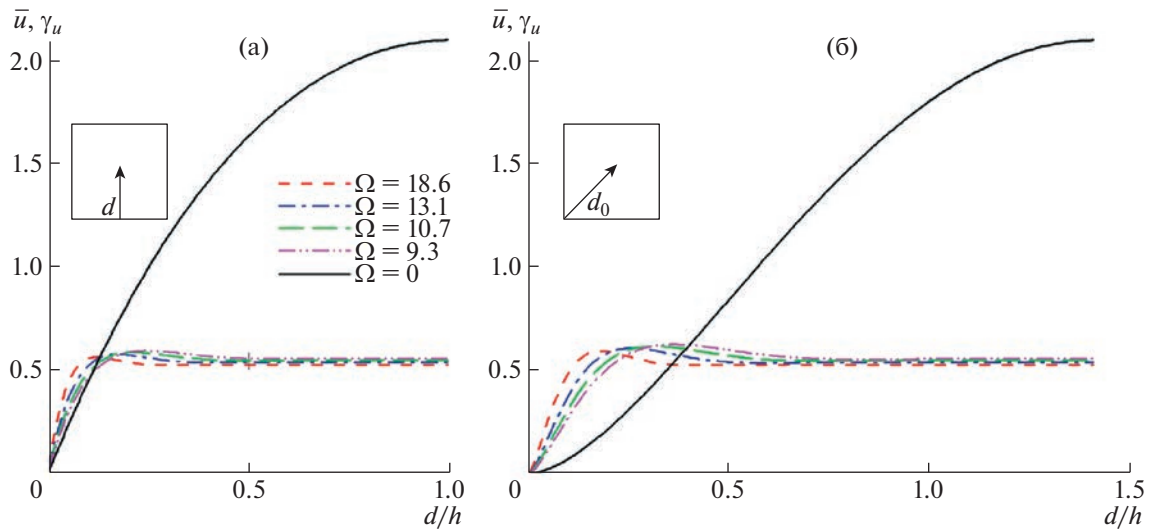


Рис. 2. Графики изменения среднего значения $\bar{u}(y, z)$ (сплошные линии) и амплитуды колебаний $\gamma_u(y, z)$ (прерывистые линии) скорости вдоль срединного перпендикуляра к стенке на отрезке от стенки до центра сечения трубы (а) и вдоль диагонали от угловой точки до центра сечения трубы (б). По оси абсцисс отложены расстояния до ближайшей стенки d и до ближайшей угловой точки d_0 соответственно. Течение в квадратной трубе.

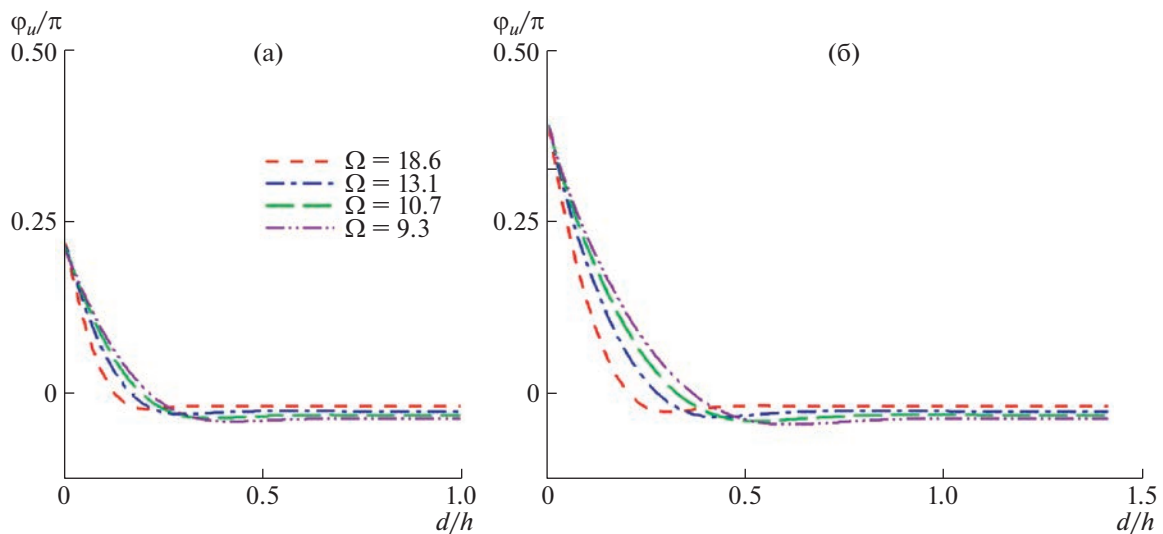


Рис. 3. Графики изменения сдвига по фазе $\phi_u(y, z)$ колебаний скорости относительно колебаний расхода вдоль тех же линий, что и на рис. 2.

турбулентных течений. Вдоль срединных линий симметрии сечения трубы поле средней скорости имеет распределение, близкое к параболическому, с максимальным значением $\bar{u} \approx 2.1$ на оси трубы. Это значение несколько превышает аналогичную величину скорости в течении Пуазейля в круглой трубе, составляющую 2.0. Вдоль диагоналей профили средней скорости имеют точки перегиба и приближаются к угловым точкам с нулевой производной.

Профили амплитуды колебаний скорости $\gamma_u(y, z)$ вдоль обеих линий ведут себя немонотонно, вырастая с ростом d, d_0 до максимального значения, и уменьшаясь затем до выхода на плато, на котором остаются почти постоянными по величине. Наличие локального максимума в распределениях амплитуды колебаний составляет так называемый аннулярный эффект Ричардсона [17], который наблюдается в осциллирующих течениях при высоких частотах. Теоретическое расстояние от точки локального максимума $\gamma_u(y, z)$ до стенки $d/h = 2.28\Omega$. Положение максимумов на

рис. 2а хорошо согласуется с теоретическим значением при всех рассмотренных Ω . В диагональных распределениях $\gamma_u(y, z)$ точка максимума располагается несколько дальше от стенки: $d/h \approx 2.39\Omega$ во всех вариантах.

Наличие плато в распределениях $\gamma_u(y, z)$ в центральной части канала свидетельствует о том, что вязкие эффекты незначительны в этой области, и член $\partial u / \partial t$ в уравнении движения компенсируется градиентом давления d_p . Это значит, что колебания этих двух величин согласованы по фазе, а следовательно, колебания u отстают по фазе от d_p на $\pi/2$, так же, как и колебания расхода при больших Ω . Эти рассуждения согласуются с близким к нулевым значениям фазового сдвига ϕ_u колебаний $u(t, y, z)$ относительно колебаний расхода, показанными на рис. 3. В центральной области трубы ϕ_u имеет небольшие отрицательные значения, приближающиеся к нулевым при увеличении Ω . В пристенных областях колебания скорости обгоняют по фазе колебания расхода. Вблизи плоской стенки это опережение составляет 0.22π , что близко к разности фаз между колебаниями среднего по периметру напряжения трения и расхода, показанному на рис. 1б. Этот факт можно объяснить тем, что именно на плоской стенке (за пределами угловых областей) набирается интегральная величина трения на стенке. В угловых областях трение близко к нулю, а колебания скорости опережают колебания расхода на 0.39π , приближаясь по фазе к колебаниям градиента давления.

Отметим также, что амплитуда колебаний скорости $\gamma_u(y, z)$ в пристенной области превосходит величину среднего значения $\bar{u}(y, z)$. Последнее означает, что на определенных фазах колебаний движение жидкости в пристенной области направлено навстречу основному потоку. Вблизи плоской стенки толщина слоя возникновения обратного течения почти не меняется с изменением Ω , слегка увеличиваясь от $d/h \approx 0.11$ при $\Omega = 9.3$ до $d/h \approx 0.13$ при $\Omega = 18.6$. Максимальная величина обратного течения составляет около $0.2\bar{u}_b$ и достигается в моменты времени, опережающие на $\approx \pi/8$ фазы минимального расхода, т.е. при $\omega t \approx 3\pi/2 - \pi/8$. Области обратного течения в угловых областях более обширны по площади. Их протяженность вдоль диагонали поперечного сечения несколько сокращается с ростом частоты от $d_0/h \approx 0.40$ при $\Omega = 9.3$ до $d_0/h \approx 0.36$ при $\Omega = 18.6$. Максимальная величина обратного течения, наоборот, растет с частотой до $0.4\bar{u}_b$ при $\Omega = 18.6$ и достигается в моменты времени, близкие к фазам минимального расхода, т.е. при $\omega t \approx 3\pi/2$.

3. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для представления в настоящей работе отобраны результаты исследования турбулентных пульсирующих течений при $Re = 2200$, $\beta = 0.5$ и периодом осцилляций потока $T = 20, 40, 60$ и 80 . Здесь и далее все величины представляются в безразмерном виде. В качестве масштабов берутся половина стороны квадрата в сечении трубы h и удельный расход стационарной составляющей течения $\bar{u}_b$. Таким образом, например, изменение удельного расхода со временем описывается выражением $u_b(t) = 1 + \beta \sin \omega t$.

Для сравнения также проведены расчеты пульсирующих течений в круглой трубе при аналогичных значениях числа Рейнольдса $Re = Ru_b/\nu = 2200$ (R – радиус трубы), амплитуды и периодов осцилляций. Отметим, что число Рейнольдса в настоящей работе определяется через радиус трубы, а не диаметр, как при традиционном определении. Поэтому значение $Re = 2200$ на самом деле вдвое превышает общепринятое число Рейнольдса перехода к турбулентности в стационарном течении в трубе.

Обнаружено, что в турбулентных режимах во всех исследованных вариантах флуктуации гидродинамических величин, кроме случайной составляющей, имеют периодическую компоненту с периодом, диктуемым осцилляциями основного потока. Для анализа данных в установившемся пульсирующем течении используется фазовое осреднение, которое обозначается угловыми скобками. Для функций, зависящих от времени и пространственных координат, это осреднение проводится по формуле

$$\langle f \rangle(t, y, z) = \frac{1}{NL_x} \sum_{n=N_0+1}^{N_0+N} \int_0^{L_x} f(t + nT, x, y, z) dx \quad (3.1)$$

Таблица 1. Параметры расчетных вариантов

№	T	ω	Ω	Ω_r	$\tau_w \times 10^3$	$\Delta c_f (\%)$
1	20	0.314	18.6	9.27	4.57	–2.3
2	40	0.157	13.1	4.79	4.28	–8.5
3	60	0.105	10.7	3.27	4.05	–13.5
4	80	0.0785	9.3	2.48	3.99	–14.7
5	$\beta = 0$				4.68	0

Здесь время t меняется в пределах одного периода осцилляций: $t \in [0, T]$. Параметр N_0 в (3.1) выбирается с целью отсека начального отрезка развития течения, предшествующего выходу на установившийся пульсационный режим. В соответствии с используемой постановкой задачи фазовое среднее не должно меняться вдоль однородной продольной координаты. Поэтому для ускорения сходимости фазового осреднения в (3.1) также используется осреднение по x . В трубе круглого сечения процедура осреднения обычно включает осреднение по однородной угловой координате. В трубе квадратного сечения применяется осреднение по восьми симметричным точкам в плоскости (y, z) . В работе фазовые средние вычислялись в 8 точках по времени, соответствующих $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$. Число периодов осреднения N в (3.1) выбиралось достаточно большим, не менее 50 даже при наибольших значениях периода T .

Кроме фазового среднего используется среднее по времени, обозначаемое надчеркиванием

$$\overline{f}(y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T \langle f \rangle(t, y, z) dt$$

Разность $\langle f \rangle - \overline{f}$ описывает осцилляционную составляющую, которая имеет нулевое среднее. Разность между мгновенным значением и фазовым средним величины f представляет собой случайную турбулентную флуктуацию и обозначается штрихом

$$f'(t, x, y, z) = f - \langle f \rangle$$

Некоторые параметры отобранных для представления вариантов даны в табл. 1. Приведены значения периода и частоты осцилляций, а также соответствующие им значения числа Стокса Ω и параметра $\Omega_r = 2\omega h/u_\tau$, введенного в [6]. Согласно классификации [6], рассмотренные варианты относятся к категории промежуточных частот, кроме первого варианта ($T = 20$), который можно отнести к режиму высокочастотных осцилляций.

В шестом столбце табл. 1 даны значения среднего по времени напряжения трения на стенке. В пятой строке приведено соответствующее значение для стационарного течения в квадратной трубе при том же числе Рейнольдса. Во всех вариантах пульсирующих течений получено уменьшение среднего трения по сравнению со стационарным потоком. Падение среднего трения и, соответственно, падение коэффициента сопротивления $c_f = 2\overline{\tau}_w$, показанное в последнем столбце табл. 1, увеличивается с ростом периода осцилляций и достигает 14.7% при $T = 80$. В расчетах пульсирующих течений в круглой трубе также получено снижение среднего трения по сравнению со стационарным течением. Это снижение также увеличивается с ростом периода осцилляций и составляет 2.9, 8.2 и 14.8% при $T = 20, 40$ и 60 соответственно. При увеличении периода осцилляций в круглой трубе до $T = 80$ получена ламинаризация потока. Эффект снижения турбулентного трения в пульсирующем течении в круглой трубе был обнаружен ранее в эксперименте [18]. При $Re > 3000$ это наблюдалось в узком диапазоне параметров в режимах доминирования осцилляций ($\beta > 1$). Было сделано предположение, что на определенных фазах колебаний происходит обратный переход, благодаря чему среднее трение снижается. Позже в численном исследовании [19] показано, что даже в режимах снижения среднего трения значительные турбулентные флуктуации сохраняются на всех фазах осцилляций потока.

Изменения осредненных по фазе среднего градиента давления $\langle d_p \rangle(t)$ и среднего (по площади боковой поверхности трубы) напряжения трения $\langle \tau_w \rangle(t)$ во всех вариантах приведены на рис. 4. Сплошные черные линии показывают соответствующие постоянные значения в стационарном

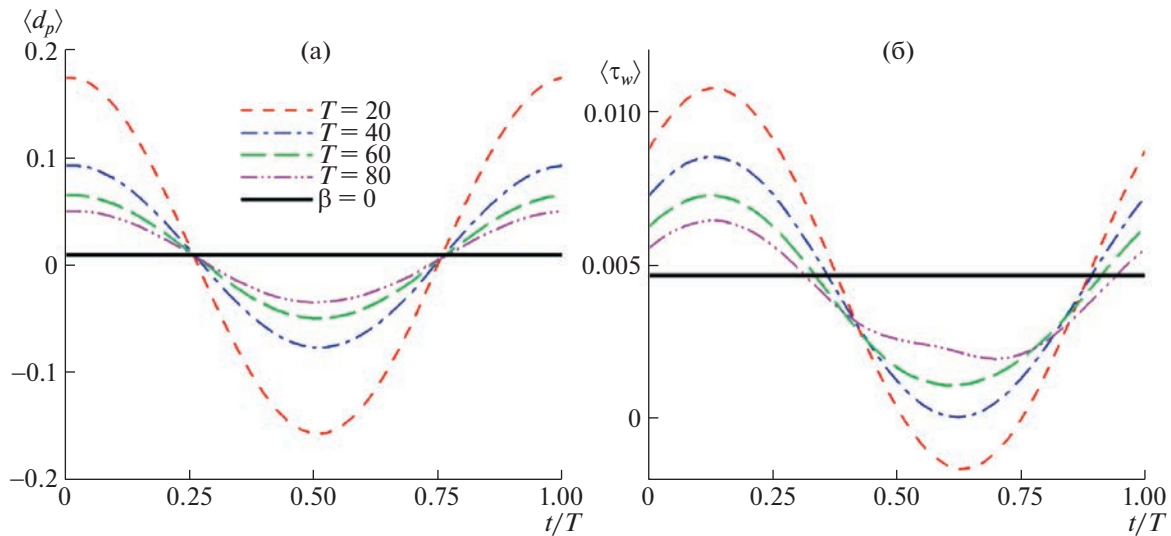


Рис. 4. Колебания осредненных по фазе (а) среднего градиента давления $\langle d_p \rangle(t)$ и (б) среднего трения на стенке $\langle \tau_w \rangle(t)$.

течении. Представленные характеристики имеют почти гармоническое поведение $\langle d_p \rangle(t) \approx d_p + \gamma_p \sin(\omega t + \varphi_p)$ и $\langle \tau_w \rangle(t) \approx \tau_w + \gamma_\tau \sin(\omega t + \varphi_\tau)$. Как видно из рис. 4, положения экстремумов представленных величин меняются слабо при изменении периода осцилляций, что согласуется с поведением осциллирующих течений в ламинарном режиме при высоких значениях числа Стокса. Колебания трения и колебания градиента давления опережают колебания средней скорости по времени на $T/8$ и $T/4$ или по фазе на $\pi/4$ и на $\pi/2$ соответственно. Таким образом, соотношения фаз колебаний этих величин совпадает с поведением в ламинарном течении при больших частотах. Амплитуды осцилляций γ_p, γ_τ как градиента давления, так и трения на стенке увеличиваются с ростом частоты, что также качественно соответствует ламинарному поведению. При наибольшем периоде осцилляций характер поведения представленных величин начинает отклоняться от гармонического, что особенно заметно на графике $\langle \tau_w \rangle(t)$ для $T = 80$ в диапазоне $t/T = 0.4-0.7$. Такое изменение свидетельствует о влиянии нелинейных эффектов, что подтверждается значительным уровнем турбулентных флуктуаций в этой области параметров. Отметим, что функции $\langle d_p \rangle(t)$ и $\langle \tau_w \rangle(t)$ при $T \leq 60$ качественно и количественно близки к соответствующим характеристикам в круглой трубе.

На рис. 5а показаны изменения амплитуды турбулентных флуктуаций $A_t = \sqrt{2K_t}$, где $K_t(t)$ – среднее по сечению трубы значение кинетической энергии турбулентности $k_t(t, y, z) = 0.5 \langle u_i' u_i' \rangle$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование). На рис. 5б представлены графики амплитуды вторичных течений $A_{sf}(t)$, где

$$A_{sf}^2(t) = \frac{1}{S} \iint_S (\langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2) dy dz$$

Здесь v, w – поперечные компоненты вектора скорости, S – площадь поперечного сечения трубы. Скорость изменения амплитуды турбулентных флуктуаций в целом пропорциональна величине расхода. На первой половине периода осцилляций, когда $u_b(t) > 1$, амплитуда флуктуаций растет, а на второй половине, когда $u_b(t) < 1$, падает. Эта зависимость особенно выражена при наибольшем периоде $T = 80$, когда моменты смены знака dA_t/dt практически совпадают с моментами смены знака осцилляционной части расхода. В этом же варианте достигаются максимальные и минимальные значения A_t . Достижение максимума A_t при $t/T \approx 0.5$ согласуется с появлением нелинейных искажений в графике $\langle \tau_w \rangle(t)$ для $T = 80$, показанном на рис. 4б. С ростом частоты осцилляций амплитуда изменения $A_t(t)$ падает, изменение dA_t/dt начинает отста-

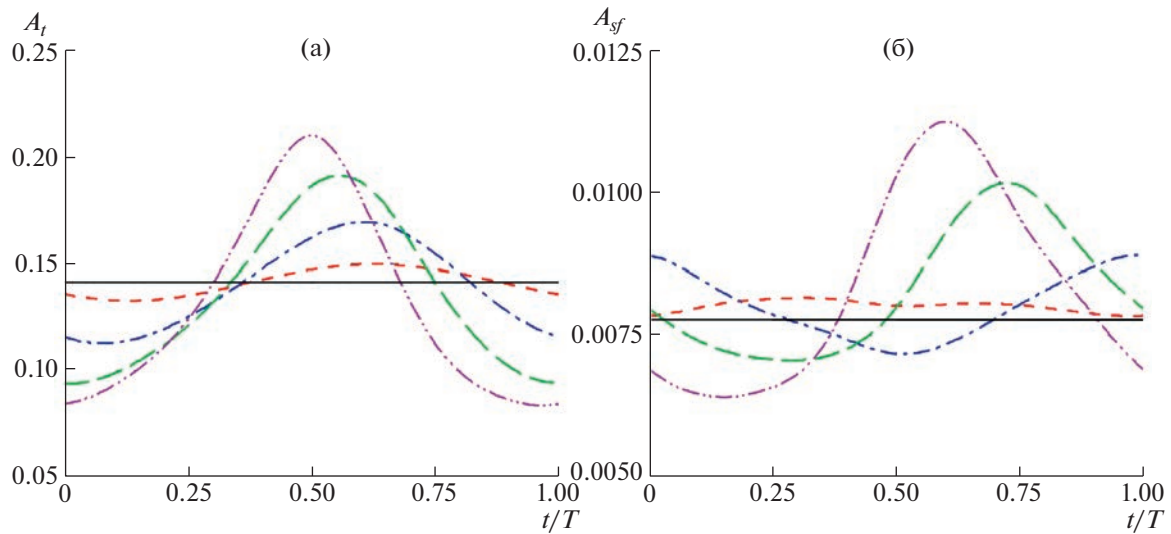


Рис. 5. Амплитуда турбулентных флуктуаций скорости (а) и амплитуда вторичных течений (б). Обозначения линий те же, что и на рис. 4.

вать от изменения $u_b(t)$. При наибольшей частоте это отставание достигает $T/8$, что эквивалентно $\pi/4$ в фазовом выражении. В нескольких исследованиях пульсирующих течений в круглой трубе, начиная с эксперимента [20], отмечается, что интенсивность турбулентности возрастает на фазе замедления потока и, наоборот, затухает на фазе ускорения. Результаты данной работы в целом согласуются с этими наблюдениями: во всех вариантах максимальные значения A_t приходятся на фазу, близкую к моменту наибольшего замедления потока. Однако следует отметить, что рост амплитуды турбулентных флуктуаций начинается несколько раньше наступления замедления, еще на фазе завершения ускорения потока.

Более подробное изучение поведения флуктуаций различных компонент скорости показывает, что основной составляющей энергии турбулентности являются флуктуации продольной компоненты скорости. Максимальные значения квадрата продольных флуктуаций $\langle u'^2 \rangle$ примерно на порядок превышают аналогичные значения для поперечных флуктуаций $\langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle$. Кроме того, эти максимумы несколько разделены по фазе — максимумы поперечных флуктуаций отстают от продольных, и это отставание увеличивается с частотой. Поведение амплитуды вторичных течений, показанное на рис. 5б, качественно соответствует поведению амплитуды поперечных пульсаций скорости. Изменение уровня вторичных течений в пределах одного периода осцилляций уменьшается с ростом частоты, максимальная их амплитуда запаздывает по фазе от максимальной амплитуды флуктуаций скорости, соответствуя в большей степени поведению амплитуды поперечных пульсаций. В [8, 21] сформулирован механизм образования турбулентных вторичных течений в прямых трубах некруглого поперечного сечения. Источником возникновения вторичных течений являются именно турбулентные флуктуации скорости в поперечном сечении трубы. Наблюдаемая амплитудная и фазовая связь между вторичными течениями и интенсивностью поперечных флуктуаций скорости в пульсирующих течениях качественно согласуется с упомянутым механизмом.

Производство p_t и диссипация d_t кинетической энергии турбулентности в точке (y, z) поперечного сечения трубы в безразмерном представлении описываются выражениями

$$p_t(t, y, z) = -\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

$$d_t(t, y, z) = \frac{2}{\text{Re}} \langle e'_{ij} e'_{ij} \rangle \quad (3.3)$$

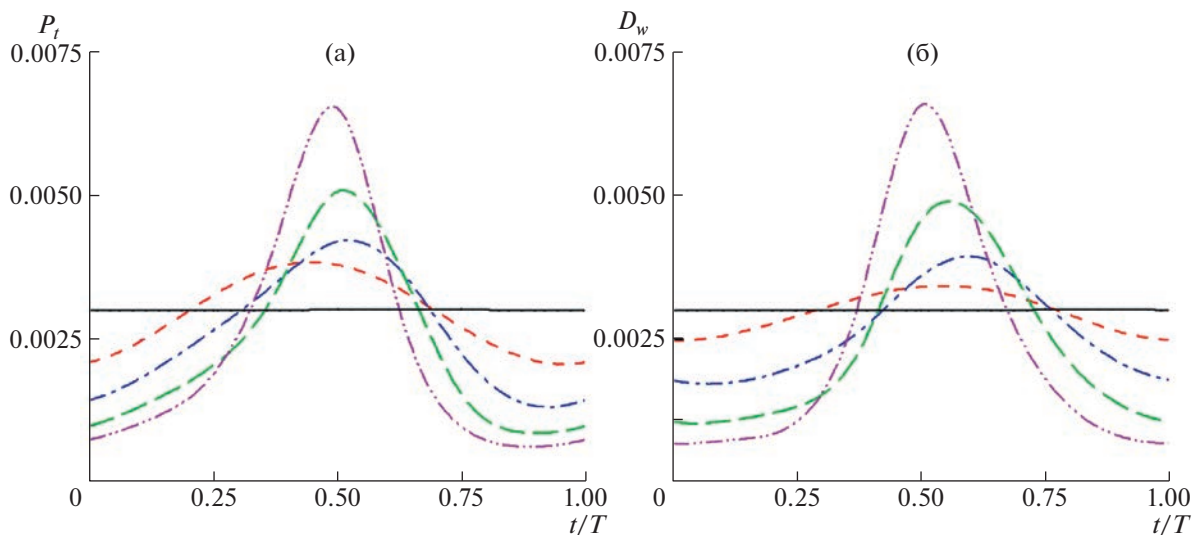


Рис. 6. Средние по сечению трубы производство (а) и диссипация (б) кинетической энергии турбулентности. Обозначения линий те же, что и на рис. 4.

В последнем выражении $e'_{ij} = 0.5(\partial u'_i/\partial x_j + \partial u'_j/\partial x_i)$ – компоненты тензора скоростей деформации турбулентных флуктуаций. Изменение кинетической энергии k_t в точке определяется конкуренцией производства и диссипации, а также изменением за счет различных механизмов внутреннего переноса. При интегрировании по площади поперечного сечения вклад переносных членов обнуляется, и для изменения средней по сечению кинетической энергии $K(t)$ получаем

$$\frac{dK(t)}{dt} = P_t - D_t$$

где $P_t(t)$, $D_t(t)$ – средние по сечению трубы значения производства (3.2) и диссипации (3.3) кинетической энергии. Графики $P_t(t)$ и $D_t(t)$ для всех расчетных вариантов приведены на рис. 6. При всех T период наибольшего производства энергии приходится на фазу уменьшения расхода. С ростом периода осцилляций амплитуда изменения $P_t(t)$ увеличивается, максимальные значения P_t все больше концентрируются в окрестности точки $t/T = 0.5$, где du_b/dt достигает минимума. Изменение диссипации энергии $D_t(t)$ в целом повторяет $P_t(t)$. Важное отличие состоит в небольшом запаздывании по фазе, в результате чего получается, что $P_t > D_t$ на первой половине периода, и наоборот, $P_t < D_t$ – на второй. Такое поведение соответствует изменению амплитуды турбулентности (рис. 5а), которая растет на первом полупериоде и уменьшается на втором. Отставание диссипации кинетической энергии от производства можно объяснить тем, что диссипация происходит на меньших пространственных масштабах, чем масштабы, возбуждаемые в процессе производства, и для их образования посредством каскадного процесса требуется некоторое время.

4. ПОЛЕ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ И ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Турбулентные течения в прямоугольных трубах характерны появлением вторичных течений в плоскости поперечного сечения. Флуктуационные движения частиц жидкости по искривленным траекториям в угловых областях поперечного сечения вызывают локальные повышения давления в углах. В результате возникает градиент давления, действующий вдоль стенок в обе стороны от каждой угловой точки. В пристенной области действие градиента давления может быть скомпенсировано только силой трения, действующей навстречу движению. Так возникают вторичные течения, в виде растекания жидкости в стороны от угла вдоль смежных стенок и компенсирующего притока к углу вдоль биссектрисы [8, 21]. Действие вторичных течений проявля-

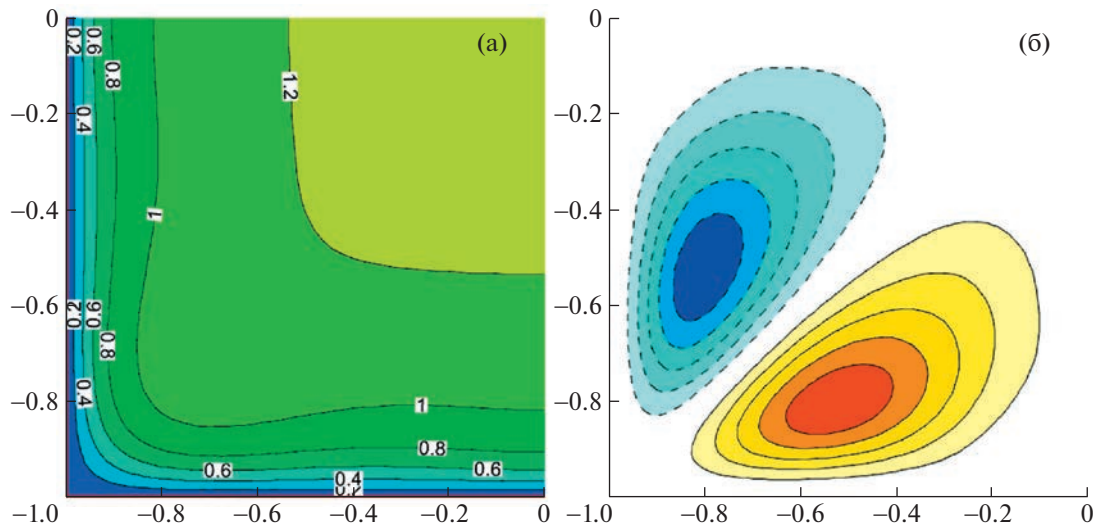


Рис. 7. Распределения продольной компоненты средней скорости $\bar{u}(y, z)$ (а) и линии тока вторичного течения (б) в стационарном ($\beta = 0$) течении. Показана четверть поперечного сечения трубы.

ется в искажениях изолиний средней скорости с характерными выпуклостями, направленными в сторону углов.

Распределение средней скорости с упомянутыми особенностями и линии тока вторичных течений в плоскости поперечного сечения квадратной трубы в стационарном ($\beta = 0$) турбулентном течении при $Re = 2200$ ([10]) показаны на рис. 7. Представлена четверть сечения трубы, соответствующая 3-му квадранту. В остальных четвертях картина движения симметрична. Линии тока вторичного течения совпадают с изолиниями функции тока $\bar{\Psi}(y, z) : v = \partial\bar{\Psi}/\partial z, \bar{w} = -\partial\bar{\Psi}/\partial y$. На рис. 7б и далее на аналогичных рисунках даны поля функций тока и их изолинии с шагом ± 0.0004 . Положительные значения функции тока отмечены сплошными изолиниями, им соответствует движение частиц жидкости против часовой стрелки. Отрицательные значения и движение по часовой стрелке показаны прерывистыми линиями. Максимальная скорость вторичного течения в сторону угла вдоль биссектрисы составляет около 0.02, примерно с такой же максимальной скоростью происходит растекание вдоль стенок.

В рассмотренных вариантах пульсирующих течений интенсивность вторичных течений и связанной с ними деформации изолиний продольной скорости увеличивается с ростом периода осцилляций. Распределения по сечению трубы фазовых средних продольной компоненты скорости $\langle u \rangle(t, y, z)$ в моменты времени $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$ для варианта *ТА* приведены на рис. 8а–з. Панели (а) и (д) соответствуют моментам времени $\omega t = 0$ и π , т.е. моментам наибольшего ускорения и замедления потока соответственно. Панели (в) и (ж) отвечают $\omega t = \pi/2$ и $3\pi/2$, когда расход принимает максимальное и минимальное значения. На последней панели (з) представлено поле среднего по времени $\bar{u}(y, z)$. Так же, как и на рис. 7, показана четверть сечения трубы. Для сравнения на рис. 9 показаны аналогичные распределения, соответствующие наименьшему из периодов осцилляций $T = 20$. Как видно из рис. 8а–з, изолинии средней скорости при $T = 80$ в каждый момент претерпевают более существенные искажения, чем в стационарном течении. В наибольшей степени это относится к первой половине периода, когда расход превышает среднее значение. Среднее по времени, изображенное на рис. 8и, также заметно отличается от поля скорости в стационарном течении. При наименьшем периоде искажения изолиний $\langle u \rangle(t, y, z)$ выражены существенно слабее и незначительно изменяются в разные моменты времени. В свою очередь, среднее по времени при $T = 20$ близко к стационарному случаю, представленному на рис. 7а.

На рис. 10 изображены линии тока вторичных течений в различные моменты осцилляционного цикла, а также линии тока течения, осредненного по времени. Представлены результаты для варианта $T = 80$. При меньших периодах изменение вторичных течений во времени менее выражено. При наименьшем периоде $T = 20$ вторичные течения во все моменты времени практически не отличаются от распределения в стационарном течении, показанном на рис. 7б. В со-

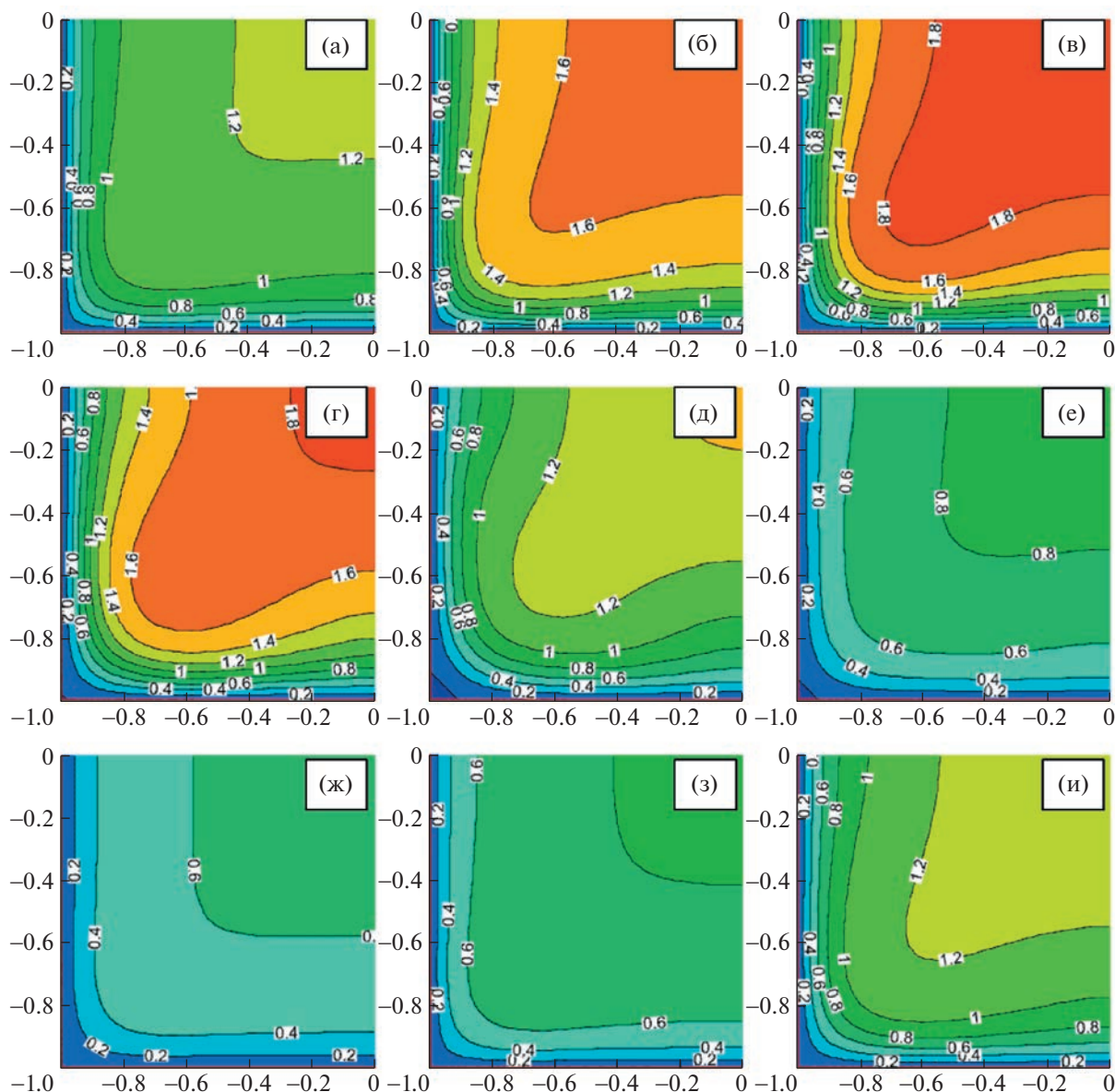


Рис. 8. Распределения фазовых средних продольной компоненты скорости $\langle u \rangle(t, y, z)$ в моменты времени $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$ (а–г) и среднего по времени $\bar{u}(y, z)$ (и). $T = 80$.

ответствии с изменением интегральной амплитуды вторичных течений, показанном на рис. 5б, максимальная интенсивность вторичного течения при $T = 80$ достигается в фазах, следующих за моментом наибольшего замедления потока, именно при $\omega t = 5\pi/4$, когда скорость потока приближается к минимальному уровню. Скорость вторичного течения в максимуме почти на 50% превышает среднее значение, которое, в свою очередь, на 20% меньше, чем в стационарном течении. Интересно, что наиболее значительные искажения в форме изолиний средней скорости наблюдаются не в те моменты времени, когда вторичные течения максимальны по амплитуде, а скорее наоборот, в моменты минимального их уровня. Это можно объяснить тем, что эти моменты соответствуют максимальной скорости потока, а следовательно, и максимальным градиентам средней скорости, благодаря чему даже небольшие по величине поперечные движения приводят к заметным искажениям в распределении продольной скорости.

Изменение во времени осредненной по фазе скорости течения в каждой точке поперечного сечения можно представить в виде

$$\langle u \rangle(t, y, z) = \bar{u}(y, z) + \gamma_u(y, z) \sin(\omega t + \varphi_u(y, z)) + \delta_u(t, y, z) \quad (4.1)$$

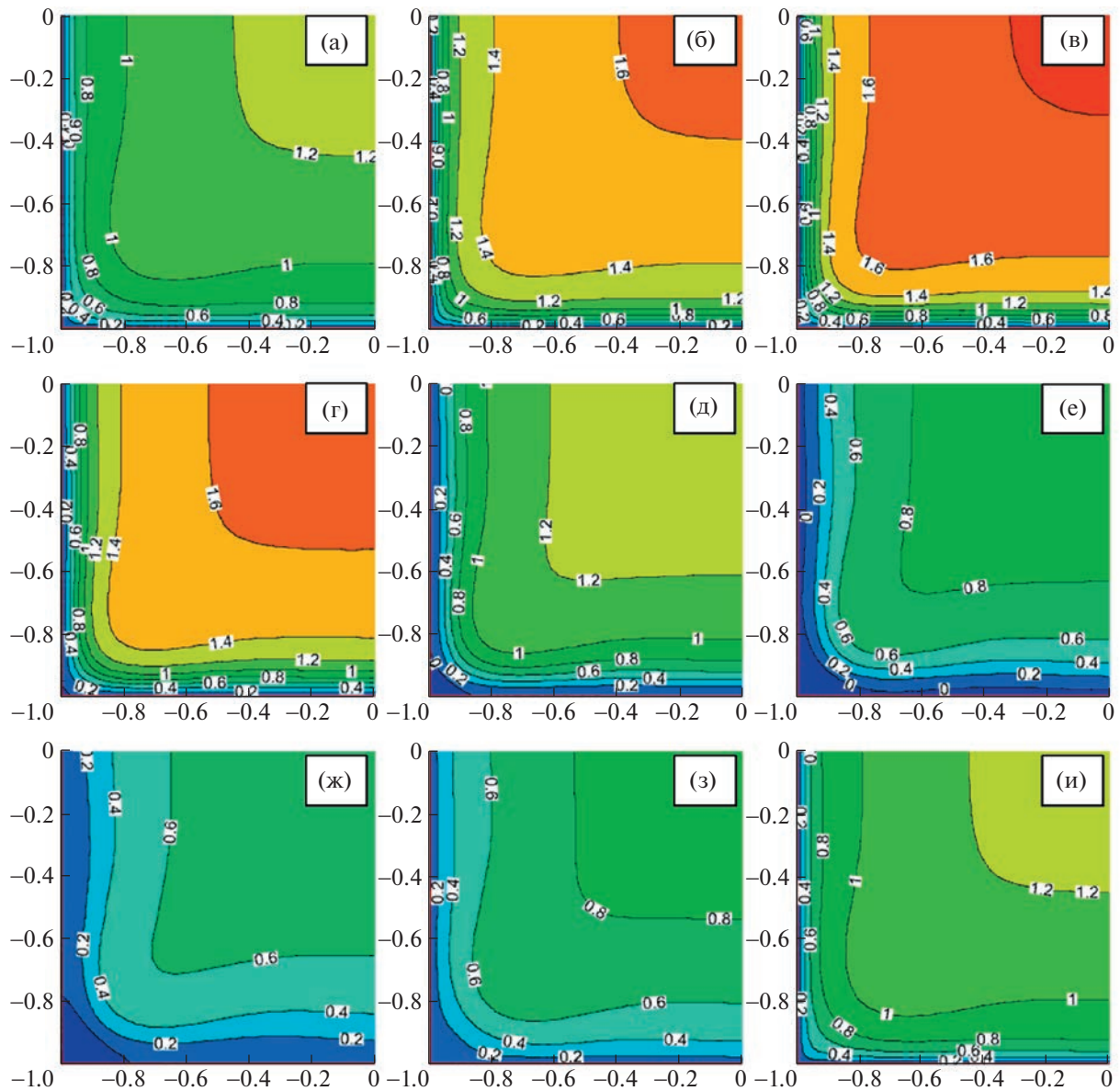


Рис. 9. Распределения фазовых средних продольной компоненты скорости $\langle u \rangle(t, y, z)$ в моменты времени $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$ (а–з) и среднего по времени $\bar{u}(y, z)$ (и). $T = 20$.

Последнее слагаемое в (4.1) включает старшие гармоники разложения периодической функции $\langle u \rangle(t)$ в ряд Фурье. Величины γ_u , ϕ_u при каждом (y, z) определялись по 8 полям $\langle u \rangle(t, y, z)$ с использованием процедуры наименьших квадратов. Оказалось, что гармоническое приближение (без учета последнего слагаемого в (4.1)) приближает поле $\langle u \rangle(t, y, z)$ при всех значениях периода T с точностью до единиц процентов. Графики изменения среднего значения $\bar{u}(y, z)$ и амплитуды осцилляций $\gamma_u(y, z)$ продольной скорости вдоль срединного перпендикуляра к стенке и вдоль диагонали от угловой точки до центра сечения трубы представлены на рис. 11 для всех значений T . На рис. 12 даны графики изменения фазы $\phi_u(y, z)$ вдоль тех же линий. Распределения средней скорости $\bar{u}(y, z)$ по нормали к стенке отличаются от ламинарного случая, представленного на рис. 2а, типично турбулентной, наполненной формой с заметно бóльшим градиентом на стенке и существенно меньшим значением на оси трубы (1.33 против 2.1). С ростом периода осцилляций скорость в пристенной зоне (до $d = 0.3$) заметно снижается, что находит отражение в падении коэффициента сопротивления по сравнению со стационарным течением. Уменьшение ско-

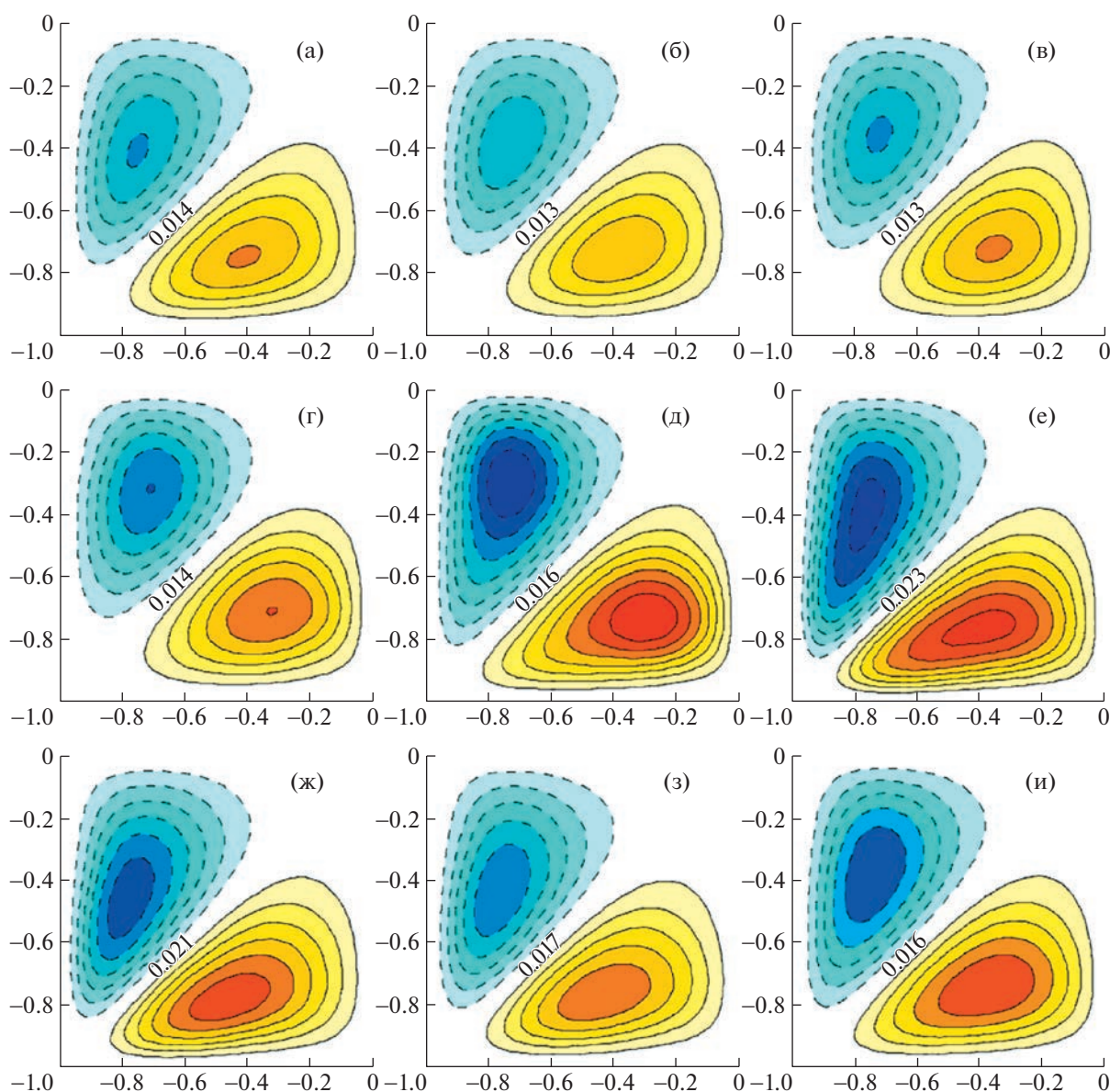


Рис. 10. Линии тока средних по фазе вторичных течений в моменты времени $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$ (а–з) и среднего по времени (и). На диагонали $z = y$ указаны максимальные значения скорости вторичного течения. $T = 80$.

рости в пристенной зоне компенсируется ускорением среднего течения вдоль диагональной линии. В отличие от ламинарного течения профили средней скорости в турбулентных течениях вдоль диагонали имеют не одну, а три точки перегиба. Впрочем, выраженность дополнительных точек перегиба уменьшается с ростом периода осцилляций.

Максимальная амплитуда осцилляций $\gamma_u(y, z)$ имеет ту же величину 0.5–0.6, что и в ламинарных течениях, хотя и несколько увеличивается с ростом T . Аннулярный эффект, заключающийся в немонотонном поведении γ_u при удалении от стенки в турбулентных течениях, сохраняется, однако с ростом T становится менее выраженным, особенно вблизи плоского участка стенки. Точка локального максимума γ_u сдвигается в сторону ядра потока. Так же, как и в ламинарных течениях, амплитуда осцилляций в значительной степени остается почти постоянной на большей части сечения трубы, хотя эта область сокращается с ростом периода осцилляций. Протяженность отрезков, на которых γ_u превышает среднее значение скорости, и на которых возникают движения в обратном направлении, существенно сокращается. Вблизи плоской стенки эти

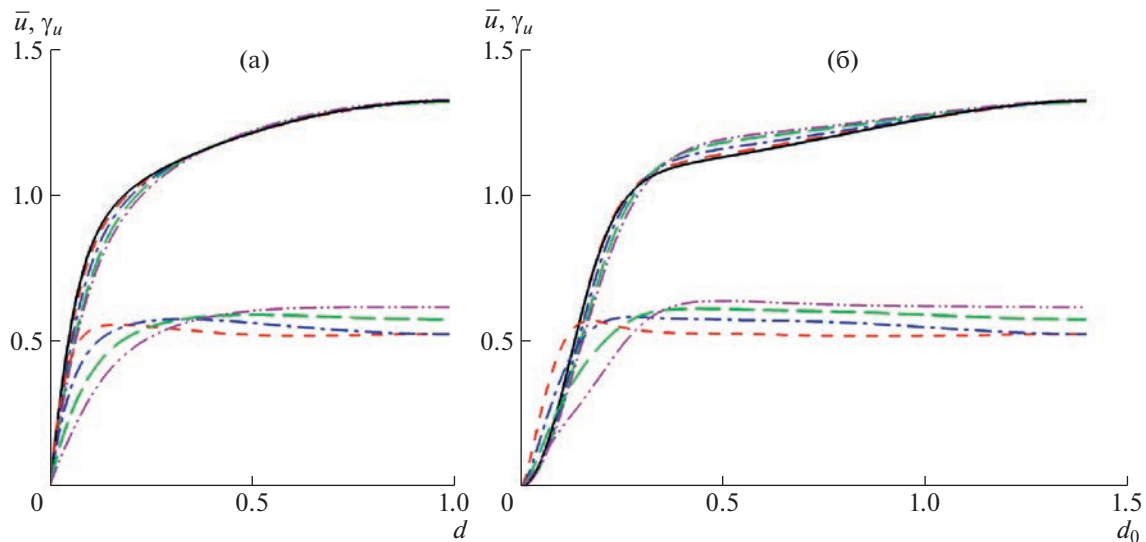


Рис. 11. Графики изменения среднего значения $\bar{u}(y, z)$ (в верхней части рисунка) и амплитуды колебаний $\gamma_u(y, z)$ (в нижней части рисунка) скорости вдоль тех же линий, что и на рис. 2. Обозначения линий те же, что и на рис. 4.

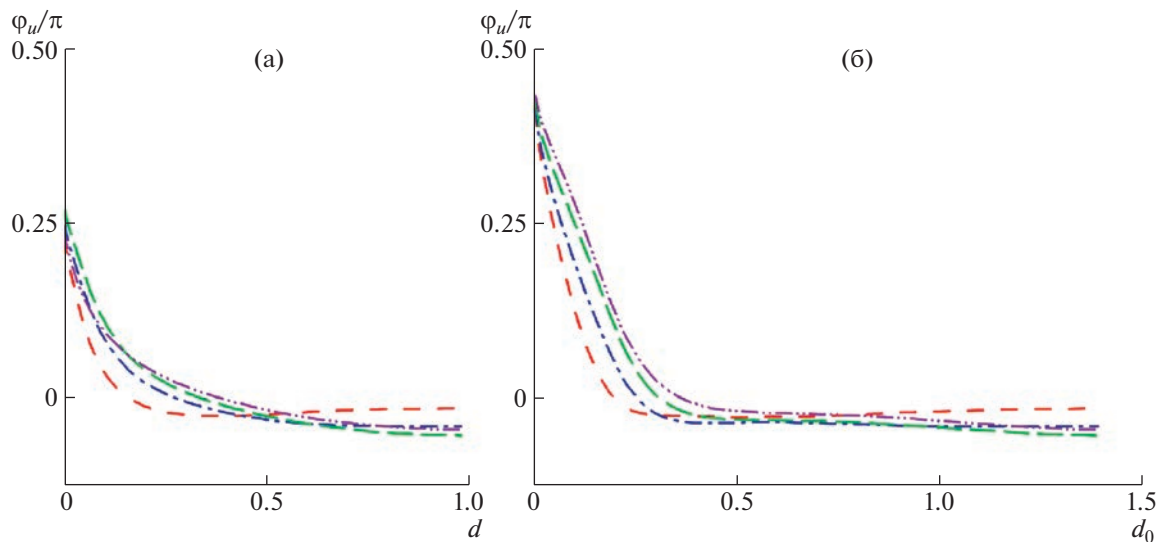


Рис. 12. Графики изменения сдвига по фазе $\phi_u(y, z)$ колебаний скорости относительно колебаний расхода вдоль тех же линий, что и на рис. 2. Обозначения линий те же, что и на рис. 4.

области пропадают практически полностью, в угловых областях они уменьшаются до $d_o \approx 0.14$ при T (при больших значениях T эта область еще короче), тогда как в ламинарных течениях область обратных течений простирается до $d_o \approx 0.4$.

Поведение фазы осцилляций $\phi_u(y, z)$ в турбулентных и ламинарных потоках качественно и количественно близко. В ядре потока $\phi_u(y, z)$ имеет незначительное отрицательное значение, т.е. колебания ядра несколько отстают от колебаний расхода. В пристенных областях осцилляции скорости опережают поток. Опережение по фазе в этих областях аналогично ламинарным течениям: около $\pi/4$ вблизи плоской стенки и $\approx 0.4\pi$ вблизи углов. Положительные значения ϕ_u отражаются в моментах появления обратных течений на рис. 8 и 9. Области отрицательных зна-

чений $\langle u \rangle$ наблюдаются в моменты, предшествующие минимуму расхода, соответствующему панели (ж). Так, при $T = 80$ небольшие отрицательные скорости можно заметить в угловых областях на панелях (д) и (е). При $T = 20$ области отрицательных скоростей более выражены. В угловых областях они заметны на панелях (д)–(ж). А на панели (е), соответствующей фазовому сдвигу на $\pi/4$ от момента минимума расхода, наблюдаются отрицательные скорости и вблизи плоского участка стенки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное исследование пульсирующих турбулентных течений в трубе квадратного сечения. Использован универсальный метод решения уравнений Навье–Стокса, сочетающий конечно-разностный метод дискретизации по пространственным координатам и полунейную схему интегрирования по времени. Расчеты проведены при $Re = 2200$, для которого ранее проводились расчеты стационарного течения. Рассмотрен режим доминирования потока, когда расход имеет положительную величину во все фазы движения.

Дано точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее ламинарные осциллирующие течения в прямоугольных трубах. Проведен анализ этих решений для случая трубы квадратного сечения. Найдены амплитудные и фазовые соотношения между колебаниями градиента давления, расхода и среднего напряжения трения на стенке. Изучены распределения скорости по сечению трубы. Определены области возникновения, амплитуды и фазы обратных течений.

Турбулентные режимы течения исследованы для случаев, когда безразмерный удельный расход изменяется со временем по закону $u_b(t) = 1 + \beta \sin \omega t$ при $\beta = 0.5$. Представлены результаты расчета течений, соответствующих четырем значениям периода осцилляций: $T = 2\pi/\omega$ от $T = 20$ до $T = 80$. Проведено сравнение с ламинарными течениями в квадратной трубе и турбулентными течениями в круглой трубе, которые изучались в прошлом как экспериментально, так и численно. Обнаружено, что средний по времени коэффициент сопротивления в пульсирующих течениях имеет меньшее значение, чем в стационарном течении. Разница растет с периодом осцилляций и достигает 14.7% при $T = 80$. Аналогичное уменьшение сопротивления отмечено и в круглой трубе.

Рассчитаны изменения во времени осредненных по фазе характеристик течения: средней по объему трубы кинетической энергии турбулентности, ее генерации и диссипации, амплитуды вторичных течений. Во всех вариантах максимальные значения энергии турбулентных флуктуаций приходится на фазу, близкую к моменту наибольшего замедления потока. Однако следует отметить, что ее рост начинается несколько раньше наступления замедления потока, еще на фазе завершения ускорения. Изменение кинетической энергии турбулентности определяется конкуренцией производства и диссипации. Обнаружено, что обе эти величины имеют близкое по форме распределение по времени на периоде осцилляций с максимальным значением в районе $\omega t = \pi$ с небольшим запаздыванием диссипации относительно колебаний производства. Обнаружено, что основной вклад в кинетическую энергию турбулентности вносят флуктуации продольной компоненты скорости. Энергия поперечных флуктуаций уступает на порядок по величине и изменяется с некоторой задержкой по фазе. Отмечено, что колебания интенсивности вторичных течений также отстают по фазе от колебаний энергии турбулентности и согласованы с колебаниями энергии поперечных флуктуаций.

Проведено подробное исследование распределений средней продольной скорости по сечению трубы на разных фазах колебания потока. Даны сопоставления с ламинарными пульсирующими течениями и турбулентным стационарным течением. От ламинарного течения распределения скорости отличаются в первую очередь наполненностью профилей с заметным уменьшением скорости на оси трубы и характерными искривлениями изолиний, вызванными действием вторичных течений. От стационарного течения пульсирующие течения отличаются значительно большими искривлениями изолиний, что особенно характерно для первой половины осцилляционного цикла, когда расход превышает среднее значение. Отмеченное свойство наиболее выражено при наименьших частотах. Изменение активности вторичных течений со временем падает с ростом частоты осцилляций и практически исчезает при $T = 20$. При наименьшей частоте, соответствующей $T = 80$, амплитуда колебаний скорости вторичных течений достигает почти 50% от среднего уровня, хотя само среднее значение оказывается на 20% меньше, чем в стационарном течении.

В целом впервые выполнено подробное исследование основных особенностей турбулентных пульсирующих течений в трубах квадратного поперечного сечения. Отдельное внимание уделено вторичным течениям, отсутствующим в ламинарных течениях, а также и в турбулентных течениях в круглых трубах.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 22-21-00184, с использованием вычислительных ресурсов ОВК НИЦ “Курчатовский институт” <http://computing.nrcki.ru/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brereton G.J., Mankbadi R.R.* Review of recent advances in the study of unsteady turbulent internal flows // *Appl. Mech. Rev.* 1995. V. 48. № 4. P. 189–212.
2. *Carpinlioglu M.O., Gundogdu M.Y.* A critical review on pulsatile pipe flow studies directing towards future research topics // *Flow Meas. Instrum.* 2001. V. 12. P. 163–174.
3. *Manna M., Vacca A., Verzicco R.* Pulsating pipe flow with large-amplitude oscillations in the very high frequency regime. Part 1. Time-averaged analysis // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 700. P. 246–282.
4. *Papadopoulos P.K., Vouras A.P.* Pulsating turbulent pipe flow in the current dominated regime at high and very-high frequencies // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2016. V. 58. P. 54–67.
5. *Stokes G.G.* On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Cambridge Philos. Soc.* 1850. V. 9. P. 1–86.
6. *Ramaprian B.R., Tu S.W.* Fully developed periodic turbulent pipe flow. Part 2. The detailed structure of the flow // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 137. P. 59–81.
7. *Tardu S.F., Binder G.* Wall shear stress modulation in unsteady turbulent channel flow with high imposed frequencies // *Phys. Fluids.* 1993. V. 5. P. 2028–2034.
8. *Никитин Н.В., Попеленская Н.В., Stroh A.* Вторичные течения Прандтля 2-го рода. Проблемы описания, предсказания, моделирования // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 4. С. 73–99.
9. *Gavrilakis S.* Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 244. P. 101–129.
10. *Никитин Н.В., Пиманов В.О., Попеленская Н.В.* К вопросу об образовании вторичных течений Прандтля 2-го рода // *ДАН.* 2019. Т. 484. № 4. С. 420–425.
11. *Uhlmann M., Pinelli A., Kawahara G., Sekimoto A.* Marginally turbulent flow in a square duct // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 588. P. 153–162.
12. *Nikitin N.* Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // *J. Comput. Phys.* 2006. V. 217. P. 759–781.
13. *Yakhot A., Arad M., Ben-Dor G.* Numerical investigation of a laminar pulsating flow in a rectangular duct // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 1999. V. 29. P. 935–950.
14. *Валуева Е.П., Пурдин М.С.* Пульсирующее ламинарное течение в прямоугольном канале // *Теплофизика и аэромеханика.* 2015. Т. 22. № 6. С. 761–773.
15. *White F.M.* Viscous fluid flow, 3rd edition. International edition: McGraw-Hill publication, 2006. 629 p.
16. *Uchida S.* Pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion // *Z. angew. Math. Phys.* 1956. V. 7. P. 403–422.
17. *Richardson E.G., Tyler E.* The transfer velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established // *Proc. Phys. Soc. Lond.* 1929. V. 42. P. 1–15.
18. *Lodahl C.R., Sumer B.M., Fredsoe J.* Turbulent combined oscillatory flow and current in a pipe // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 373. P. 313–348.
19. *Manna M., Vacca A.* Spectral dynamic of pulsating turbulent pipe flow // *Comput. Fluids.* 2007. V. 37. P. 825–835.
20. *Gerrard J.H.* An experimental investigation of pulsating turbulent water flow in a tube // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46. P. 43–64.
21. *Nikitin N.* Turbulent secondary flows in channels with no-slip and shear-free boundaries // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 917. P. A24.

УДК 532.526

СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ И ПЕРЕХОД К ЛОКАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ЗА АСИММЕТРИЧНЫМ СУЖЕНИЕМ, ИМИТИРУЮЩИМ СТЕНОЗ АРТЕРИИ

© 2023 г. В. М. Молочников^{a,b,*}, Н. С. Душин^{a,**}, Н. Д. Пашкова^{a,b,***},
Я. А. Гатаулин^{c,****}, Е. М. Смирнов^{c,*****}, А. Д. Юхнев^{c,*****}

^aФедеральный исследовательский центр Казанский научный центр РАН, Казань, Россия

^bКазанский национальный исследовательский технический университет им А.Н. Туполева, Казань, Россия

^cСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: vmolochnikov@mail.ru

**E-mail: ndushin@bk.ru

***E-mail: pashkova-2000@mail.ru

****E-mail: yakov_gataulin@mail.ru

*****E-mail: smirnov_em@spbstu.ru

*****E-mail: a.yukhnev@mail.ru

Поступила в редакцию 28.11.2022 г.

После доработки 20.12.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Представлены результаты экспериментальных исследований и численного моделирования структуры течения в отрывной области за асимметричным сужением гладкого канала, имитирующим односторонний 70% стеноз артерии. Число Рейнольдса составляло 1800. Измерение мгновенных векторных полей скорости потока выполнялось с использованием SIV-метода. Численное решение получено методом моделирования крупных вихрей. Задание входных возмущений при численном моделировании, близких к условиям эксперимента, позволило получить удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных полей скорости и компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Получены данные о формировании области локальной турбулизации потока за сужением и последующей реламинаризации течения вниз по потоку. Показано, что вблизи горла сужения формируется пара вторичных вихрей, локализованная в пределах области отрыва потока.

Ключевые слова: асимметричное сужение канала, вихреразрешающее моделирование, отрыв потока, локальная турбулизация, входные возмущения, реламинаризация

DOI: 10.31857/S056852812260093X, **EDN:** NTTDUV

Течение жидкости в каналах переменного поперечного сечения широко распространено в различных технических приложениях: в теплообменниках и системах охлаждения, в элементах химического оборудования и бурильной техники, ядерных реакторах и т.д. Очень часто локальные сужения каналов используются в качестве пассивных интенсификаторов теплоотдачи: их расположение с некоторым шагом на стенках каналов приводит к разрушению пограничного слоя и обеспечивает интенсивный массо- и теплообмен между основным потоком и областью низкоскоростного течения вблизи стенки.

Исследования течения вязкой жидкости в области сужения канала имеют важное значение и для углубленного понимания гемодинамики сердечно-сосудистой системы человека [1–4]. Выраженное локальное сужение (стеноз) артерии – одно из наиболее распространенных заболеваний, которое может привести к ишемическому инсульту, длительной нетрудоспособности человека или даже летальному исходу. Кроме того, у перенесших инсульт остается высокий риск развития повторного ишемического эпизода. Этот риск связан как с возможным ростом тканей внутреннего слоя сосудов (интимы) ниже по потоку от сужения, и, соответственно, расширению области поражения артерии, так и с уносом частиц тканей непосредственно из области сужения с последующей закупоркой сосудов.

Наиболее часто в качестве основных причин прогрессирования атеросклероза и роста толщины интимы называется низкое напряжение пристеночного сдвига [1–8]. Установлено также, что, помимо величины сдвиговых напряжений, на рост внутреннего слоя стенки пораженного сосуда существенное влияние оказывает динамика изменения этого параметра: высокие градиенты напряжения трения на стенке по времени и пространству коррелируют с ускоренным ростом толщины интимы. Кроме того, при высоких значениях поверхностного трения, равно как и его градиентов, характерных для стенозированных сосудов, высока вероятность отрыва частей атеросклеротических бляшек с возможной последующей блокировкой более мелких сосудов вниз по течению.

Возникновение аномальных (высоких или низких) значений поверхностного трения связано с гемодинамикой в области сужения артерии, вызванного атеросклеротическими изменениями. Пульсирующий поток крови в крупных, не пораженных атеросклерозом сосудах чаще всего ламинарный. Течение в просвете стенозированного сосуда характеризуется увеличением скорости потока и напряжения трения на стенке. Вниз по потоку от локального сужения формируется область отрыва потока, в пределах которой поверхностное трение существенно ниже, чем за ее пределами. Кроме того, результаты клинических исследований структуры течения в артериях с различными нарушениями кровотока показали, что обтекание препятствия в виде выраженного локального сужения сосуда может сопровождаться потерей устойчивости сдвиговых слоев и локальной турбулизацией течения даже при весьма умеренных числах Рейнольдса потока перед сужением [9–11].

Исследования гидродинамических неустойчивостей и перехода к турбулентности в жестких моделях крупных кровеносных сосудов со стенозом проводились как для стационарного по расходу, так и для пульсирующего потока при различных вариантах формы стеноза и его степени – доли поперечного сечения сосуда, перекрытой стенозом. Как правило, кровеймитирующая жидкость полагалась ньютоновской, обоснование приемлемости данного приближения дается, например, в [12, 13]. Первые экспериментальные [14–16] и расчетные работы [17, 18] данной направленности ограничивались случаем осесимметричной формы сужения, с наибольшим интересом к течению через клинически значимый стеноз (степень 75% или около того). Приведенные в данных работах результаты для стационарного в среднем потоке через гемодинамически значимый стеноз косинусообразного профиля в целом показали, что критическое число Рейнольдса потери устойчивости ламинарного течения лежит выше значения $Re = 500$ (при расчете по среднерасходной скорости и диаметру канала, D , до участка сужения), а условия перехода к локальной турбулентности за стенозом возникают при значениях Re , близких к 1000. В частности, авторы работы [18], применяя метод прямого численного моделирования и расчетный трехмерный анализ на основе методов линейной и нелинейной теории гидродинамической устойчивости, установили, что переход к турбулентности за 75% стенозом (общей протяженностью $2D$) носит жесткий характер, с достаточно выраженным интервалом гистерезиса по числу Рейнольдса: $690 < Re < 722$, где верхнее значение, рассчитанное по линейной теории устойчивости, определяет условия абсолютной неустойчивости стационарного ламинарного течения.

Сильное влияние даже малого отклонения от осесимметричной геометрии на условия перехода к локальной турбулентности за стенозом было показано в расчетной работе [19], авторы которой, выполняя прямое численное моделирование стационарного по расходу течения в канале с осесимметричным 75% стенозом (также протяженностью $2D$), получали решения с устойчивым ламинарным режимом течения, как при $Re = 500$, так и при $Re = 1000$. Однако при введении эксцентриситета 5% диаметра канала в решении при $Re = 1000$ наблюдался локальный переход к турбулентности вниз по течению от стеноза на расстоянии приблизительно пять диаметров канала, что подтверждалось появлением инерционного интервала в спектрах пульсаций скорости. Далее вниз по потоку пульсации скорости быстро затухали, и течение вновь становилось ламинарным. Было показано также, что ламинарно-турбулентный переход за стенозом сопровождался значительными временными и пространственными градиентами напряжения трения. В работе [20] теми же авторами представлены результаты расчетов, выполненных для 75% стеноза с 5% эксцентриситетом в случае наложения гармонических пульсаций расхода с амплитудой 67% от среднего по циклу; при этом среднее по циклу число Рейнольдса было около 600. Расчеты показали, что в области за стенозом в фазе ускорения потока формируется разгонный вихрь, который в фазе максимальной скорости разрушается с формированием турбулентного пятна ниже по потоку. Наибольший уровень турбулентных пульсаций наблюдался в начале фазы торможения потока.

Гармонически пульсирующее течение в канале номинально квадратного сечения ($H \times H$) с односторонним 50% косинусообразным стенозом протяженностью $2H$ исследовалось численно в [21] для среднего за период колебаний числа Рейнольдса, изменяющегося в интервале от 1000 до 2000. Расчеты выполнены по методу моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) с оценкой подсеточной вязкости по модели Смагоринского; использованные сетки, покрывающие расчетную область общей длиной 20 калибров, содержали около 0.5 млн. элементов. Обнаружено, что максимальные значения турбулентных пульсаций скорости наблюдаются вблизи стенки канала, на которой формируется стеноз, на расстоянии до шести калибров. Показано наличие выраженного инерционного интервала в спектрах пульсаций скорости в этой области.

Течение за асимметричным 70% стенозом с наибольшим эксцентриситетом круглого горла экспериментально исследовалось в работе [22] методом PIV (Particle Image Velocimetry) для случая пульсирующего (не гармонически) потока при пиковом значении числа Рейнольдса, равном 1803; среднее по циклу значение данного параметра составляло 650. Измерения на установке, обеспечивающей полную развитость ламинарного течения в подводящей круглой трубке, выполнены в [22] для трех вариантов стеноза близкой геометрии: двух жестких и одного деформируемого, под действием потока; в первом (базовом) варианте недеформируемый односторонний стеноз характеризовался общей протяженностью $2D$ и косинусообразным профилем в плоскости симметрии. Приведенные в [22] результаты измерений, выполненные преимущественно в плоскости симметрии рабочего участка, количественно определяют влияние вариаций в моделях стеноза на осредненные по многим циклам профили скорости для разных фаз цикла (кратко, “осреднение по фазе”), а также на осредненное по фазе поле значений генерационного члена в уравнении баланса кинетической энергии турбулентности и временные зависимости отдельных составляющих данного уравнения в области наибольших значений генерационного члена.

В [23] численно изучается течение в модели кровеносного сосуда с односторонним 70% стенозом при числе Рейнольдса $Re = 1803$, соответствующем пиковому значению данного параметра в экспериментальной работе [22]. Решение получено методом LES с использованием динамической модели подсеточной вязкости Джермано–Лилли на сетке, содержащей около 4.5 млн ячеек. В трехмерном потоке за сужением канала выделяются: зона струйного течения, протяженная рециркуляционная область и вторичные течения, которые вблизи горла стеноза имеют вид пары вихрей Дина, характерных для течения в криволинейном канале, и четырехвихревое строение в рециркуляционной области. Дается анализ поля кинетической энергии турбулентности, развившейся в результате неустойчивости течения в слое смещения на границе рециркуляционной области, а также поля сдвиговых турбулентных напряжений. Показано, что высокий уровень турбулентных напряжений наблюдается на участке протяженностью около четырех калибров, примерно там же, где в экспериментах [22] наблюдались высокие значения генерационного члена в фазе максимального расхода. Ниже по потоку течение реламинируется.

Результаты численного исследования влияния вариаций формы стеноза (10 вариантов) на ламинарно-турбулентный переход в модели коронарной артерии представлены в недавней работе [24]. Трехмерные нестационарные расчеты на сетках, включающих около 5 млн элементов, проведены с применением пакета ANSYS Fluent на основе уравнений Навье–Стокса с аппроксимацией конвективных членов по противопоточной схеме второго порядка точности, фактически, по методу ILES (Implicit Large Eddy Simulation). Степень стеноза для всех его форм оставалась постоянной, равной 73%; временная зависимость расхода была задана по физиологическим данным, с пиковым значением числа Рейнольдса около 850. Показано, что протяженность струйного течения, формирующегося при прохождении горла стеноза, существенно зависит от формы стеноза. Признаки перехода к турбулентности, который наблюдается почти во всех случаях, за исключением осесимметричного стеноза, и идентифицируется по росту амплитуды пульсаций скорости, начинаются в области рассеивания струйного течения, где максимальное мгновенное значение продольной компоненты скорости вдвое меньше максимальной мгновенной скорости струи в области сужения. Далее вниз по потоку наблюдается реламинизация течения: профили скорости приобретают характерную параболическую форму. Определено положение области турбулизации потока в зависимости от формы стеноза и дан анализ спектральных характеристик пульсаций скорости потока в этой области.

Изложенное выше позволяет сделать следующие выводы. В здоровых сосудах сохраняется, главным образом, ламинарный режим течения, который может нарушаться по причине различных сосудистых заболеваний, приводящих к искривлению сосудов или их локальному сужению (стенозу). Отложение склеротических бляшек на стенках сосудов вызывает появление областей

отрыва потока, которые способствуют дальнейшему усугублению атеросклероза. Большинство исследователей связывают эти процессы с низким напряжением трения на стенке и его большими пространственными или временными градиентами в области отрыва потока за сужением (стенозом). Отрыв потока может вызывать локальную турбулизацию течения и, как следствие, увеличение интенсивности пульсаций динамических параметров потока. Эти явления активно исследуются в последние десятилетия с применением различных экспериментальных и расчетных методов. Однако в целом проблема развития ламинарно-турбулентного перехода в областях весьма разнообразных по геометрии стенозов артерий и его гемодинамические последствия изучены недостаточно. Остаются открытыми и вопросы влияния нерегулярных входных возмущений, которые могут развиваться, например, при прохождении потока крови через область бифуркации сосудистого русла, находящуюся выше по потоку от стеноза.

Настоящая работа охватывает результаты первого этапа исследования, направленного в целом на улучшение понимания структуры отрывного течения и перехода к турбулентности в постстенотических кровотоках и предусматривающего использование комбинированного подхода: сочетания экспериментальных исследований и численного моделирования. Представляемые результаты получены при изучении в среднем стационарного течения в канале с асимметричным сужением косинусоидального профиля при степени сужения 70% и числе Рейнольдса $Re = 1800$, находящемся в интервале физиологических значений при оценке по максимальному расходу крови в бедренной артерии человека за период сердечных сокращений. На данном этапе исследования авторы использовали традиционный на сегодняшний день подход к моделированию постстенотических кровотоков, согласно которому упругость стенок сосудов не учитывается.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Экспериментальные исследования выполнялись с использованием установки, схема которой показана на рис. 1. Движение жидкости в рабочем участке 1 установки обеспечивается за счет статического напора, создаваемого напорным баком 4, установленным на жесткой раме. Жидкость из напорного бака через рабочий участок поступает в накопительную емкость 6, откуда при помощи погружного насоса 7 возвращается в напорный бак. Требуемый расход жидкости в рабочем участке устанавливается при помощи расходной шайбы 10, расположенной в сливном трубопроводе и контролируется прямыми измерениями веса жидкости, проходящего через рабочий участок в течение заданного промежутка времени. Постоянный уровень жидкости в напорном баке поддерживается при помощи устройства перелива 5.

Рабочий участок 1 представляет собой участок трубы с асимметричным сужением (асимметричным стенозом, рис. 2), геометрия которого задана выражением [22]

$$\frac{d(x)}{D} = \left(1 - \frac{S}{200}\right) - \frac{S}{200} \cos\left(\frac{2x\pi}{L}\right), \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$\frac{c(x)}{D} = \frac{1}{2} - \frac{d(x)}{2D}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

Здесь D – диаметр трубы до и за участком сужения, d – локальный диаметр проходного сечения на участке стеноза, $S = (1 - d_{\min}/D) \times 100\%$, L – протяженность области сужения, $S = 45\%$, $L = 2D$ (в представляемых экспериментах внутренний диаметр трубы $D = 17$ мм). Площадь минимального проходного сечения ($x = 0$) на стенозированном участке составляет 30.25% от площади поперечного сечения трубы за пределами стеноза, т.е. рассматривается случай стеноза 69.75% (округленно, 70%).

В качестве рабочей жидкости использовалась дистиллированная вода. Эксперименты выполнялись в условиях стационарного изотермического потока при числе Рейнольдса, рассчитанном по среднерасходной скорости $\langle U \rangle$ и диаметру D , $Re = 1800 \pm 25$. Указанный разброс значений числа Рейнольдса в экспериментах обусловлен, главным образом, изменением температуры рабочей жидкости, которая поддерживалась на уровне $20 \pm 0.5^\circ\text{C}$. Значение расхода перед проведением опытов измерялось весовым способом с неопределенностью $\pm 1\%$. Длина включенного участка прямой гладкой трубы, составлявшая $120D$, выбиралась из условия ее достаточности для достижения (при данном числе Рейнольдса) состояния развитости ламинарного течения перед входом в рабочий участок, с профилем скорости, соответствующим решению Пуазейля.

Измерения мгновенных векторных полей скорости ниже по потоку от области сужения выполнялись с использованием техники SIV (Smoke Image Velocimetry) [25] на основе съемки картины течения скоростной камерой Эверкам 2000-4М в световом ноже, создаваемом лазером не-

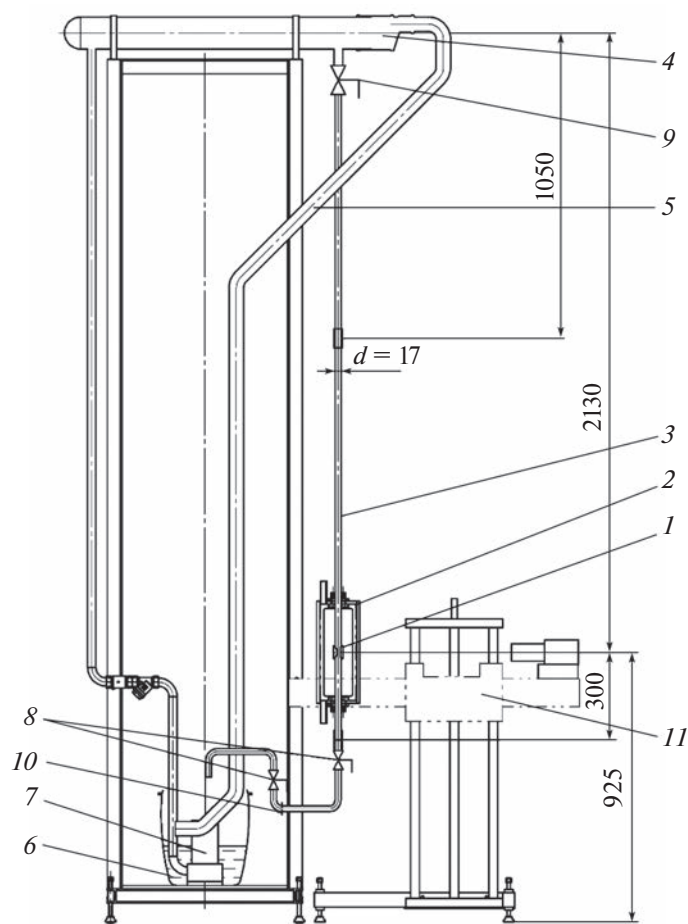


Рис. 1. Установка для исследования стационарного течения через область сужения (стеноз) артерии: 1 – область исследуемого течения; 2 – прозрачный бокс; 3 – предвключенный участок гладкой прямой трубы; 4 – напорный бак; 5 – система перелива; 6 – емкость; 7 – погружной насос; 8, 9 – запорные вентили; 10 – сливной трубопровод с расходной шайбой; 11 – координатное устройство.

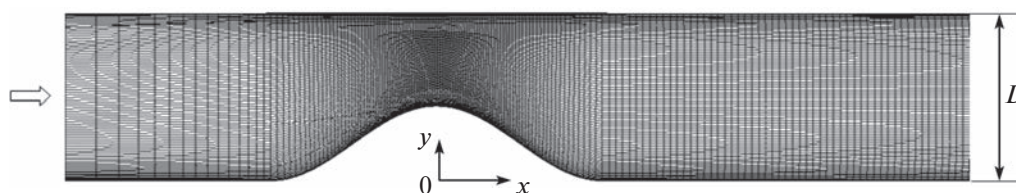


Рис. 2. Геометрия рабочего участка, моделирующего асимметричный стеноз артерии, и вид расчетной сетки в продольном срединном сечении.

прерывного действия SSP-ST-532-NB-5-5-LED-VAC. В качестве трассеров использовались полиамидные частицы диаметром 5 мкм. Камера и лазер устанавливались на координатном устройстве 11, обеспечивающем их перемещение относительно рабочего участка. Съемки выполнялись в плоскости xu , совпадающей со срединным продольным сечением рабочего участка (плоскостью геометрической симметрии). Для снижения погрешности результатов измерений, вызванной отличием коэффициентов преломления рабочей жидкости и воздуха, рабочий участок размещался в заполненном глицерином боксе, выполненном в форме прямоугольного параллелепипеда.

Результаты предварительных измерений профилей скорости потока перед областью сужения ($x/D = -10$) в двух взаимно перпендикулярных сечениях показал их удовлетворительное соответ-

ствие профилю Пуазейля. Уровень среднеквадратичных пульсаций скорости потока в указанном поперечном сечении предвключенной трубы составлял порядка 0.5% от среднерасходной скорости потока. Измеренный спектр пульсаций свидетельствовал о приблизительно равномерном распределении амплитуды по частотам. Предположительно источником этих пульсаций являются неустраняемые низкоамплитудные колебания площадки (пола), на которой закреплена рама установки, и колебания свободной поверхности жидкости в напорном баке 4 (см. рис. 1).

2. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Течение в модели кровеносного сосуда со стенозом той же геометрии рассчитывалось по методу моделирования крупных вихрей с искусственным введением входных пульсаций скорости (“турбулентного контента”). Необходимость задания входного турбулентного контента в расчетах, предусматривающих сравнение с данными измерений на описанной выше установке, проистекала из результатов начальных сопоставлений измеренных профилей скорости за стенозом с данными численного моделирования, выполненного ранее [23] в предположении отсутствия каких-либо входных возмущений.

Аналогично [23], расчеты проводились с применением гидродинамического “конечно-объемного” кода общего назначения ANSYS CFX (версия 18.2), со вторым порядком точности пространственной и временной дискретизации. Число Рейнольдса Re полагалось равным 1803. Возможность задания входного турбулентного контента обеспечивалась посредством применения гибридного зонального RANS/LES подхода, в котором предусматривается активация генератора синтетической турбулентности на границе между RANS-зоной, рассчитываемой на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, и LES-зоной, расчеты для которой проводятся по методу моделирования крупных вихрей. В настоящих расчетах RANS-зона, расположенная перед входом в участок сужения, составляла всего один калибр, и в ее пределах распределение скорости мало отличалось от заданного на входе в расчетную область профиля Пуазейля. В качестве замыкающей RANS модели использовалась $k-\omega$ SST модель турбулентности. Расчеты течения в LES-зоне выполнялись с использованием модели Смагоринского для оценки подсеточной вязкости, с уменьшенным в несколько раз коэффициентом Смагоринского относительно стандартного значения.

Помимо параболического распределения скорости, на входе в расчетную область (вход в RANS-зону) задавалась локальная интенсивность турбулентности $Tu = 1\%$. Данное значение было выбрано по результатам предварительных параметрических расчетов, исходя из условия приемлемой согласованности опытных и расчетных данных по протяженности отрывной зоны за стенозом (обсуждение и иллюстрации даются ниже).

На выходной границе расчетной области, располагавшейся на расстоянии $20D$ от места сужения, задавалось условие постоянного давления; указанная протяженность расчетной области достаточна для того, чтобы выходное граничное условие не оказывало сколько-нибудь существенного влияния на течение вблизи стеноза. На стенках трубы задавалось условие прилипания.

Расчеты проводились на сетке, содержащей около 4.5 млн гексаэдральных ячеек. Фрагмент расчетной сетки в продольном сечении модели показан на рис. 2. На участке сужения и на всем выходном участке продольный шаг сетки был равномерным и составлял $0.04D$, при этом максимальный шаг в поперечных направлениях составлял $0.02D$. На входном участке продольный шаг сетки постепенно уменьшался до $0.04D$ при подходе к началу сужения. Нормированный шаг по времени составлял $0.006t_s$, где $t_s = D/\langle U \rangle$ – характерный временной масштаб задачи; выбранный временной шаг обеспечивал локальные значения числа Куранта меньше единицы во всей LES-зоне (необходимое условие устойчивости явной численной схемы). Для аппроксимации конвективных слагаемых уравнений движения применялась центральная схема второго порядка точности. Временная выборка, использованная для получения осредненных характеристик потока, накапливалась на протяжении $1050t_s$; предшествующий временной интервал, охватывающий около $600t_s$, был достаточен для выхода на статистически установившийся режим течения. Расчеты проводились на кластере “Политехник – РСК Торнадо” суперкомпьютерного центра “Политехнический” (<http://www.scc.spbstu.ru>).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Измерения актуальной скорости выполнялись в плоскости симметрии для сечений рабочего участка со следующими координатами: $x/D = 2.0; 2.57; 3.13; 3.7; 4.27; 4.84; 5.41; 6.0; 6.55; 7.12; 7.69$;

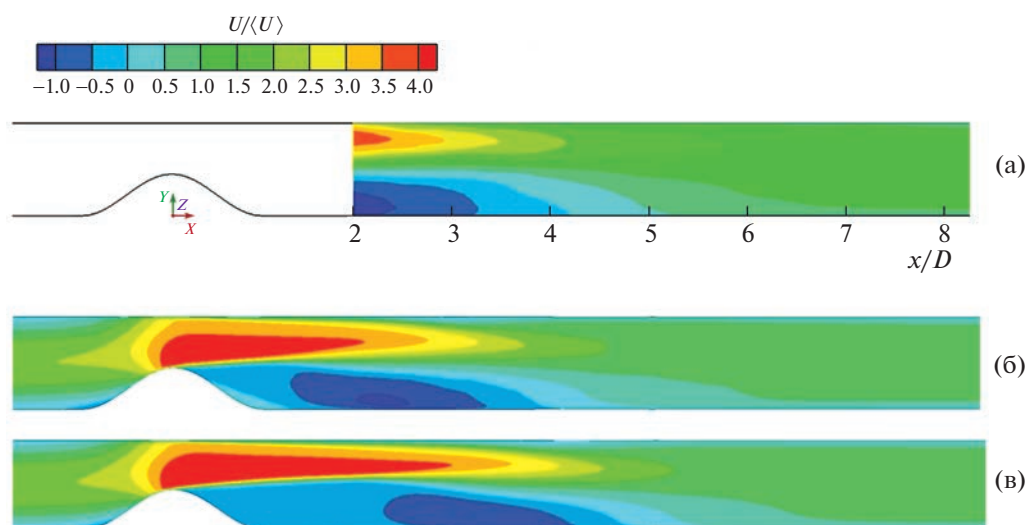


Рис. 3. Поле осредненной продольной скорости потока $U/\langle U \rangle$ в плоскости симметрии модели кровеносного сосуда со стенозом: (а) — эксперимент; (б) — расчет с введением входных возмущений; (в) — расчет без входных возмущений [20].

8.27 (для сечений $x/D < 2$ измерения не проводились по причине непрозрачности материала, из которого сделана вставка, имитирующая стеноз артерии). На основе совокупности измеренных профилей осредненной по времени продольной скорости построено, посредством применения процедуры интерполяции, двумерное поле, которое приведено на рис. 3 в сопоставлении с расчетными данными, полученными в настоящей работе с искусственным введением турбулентного контента на входе в участок сужения и в работе [23] для случая нулевых входных возмущений. Хорошо виден эффект учета входных возмущений, приводящий к существенному сокращению протяженности отрывной (рециркуляционной) зоны за стенозом по сравнению со случаем нулевых возмущений и, как следствие, к значительно лучшему согласованию с результатами измерений, в том числе и по протяженности высокоскоростной струи, образующейся при прохождении потоком горла стеноза.

Максимальная скорость потока в высокоскоростной струе более чем в 4 раза превышает среднерасходную скорость потока перед сужением. Далее вниз по потоку струя теряет свою интенсивность, размывается и при $x/D \approx 5$ скорость потока в ней становится сопоставимой со среднерасходной скоростью $\langle U \rangle$. По результатам измерений и расчетов с введенными входными возмущениями, продольный размер рециркуляционной области, нормированный на базовый диаметр D , составляет 4.1 ± 0.1 ; при нормировке на высоту стеноза этому соответствует значение 7.4. Следует отметить, что продольный размер рециркуляционной области определялся как разница координат точек присоединения и отрыва потока, с учетом того, что отрыв происходит сразу же за горлом стеноза. Укажем также, что решение, полученное при нулевых входных возмущениях, дает положение точки присоединения потока $x/D = 5.3$ [23].

На рис. 4 показаны поля осредненных по времени составляющих скорости в трех поперечных сечениях модели сосуда, полученные в расчетах с введенными входными возмущениями. Видно, что сформировавшаяся в области стеноза струя с относительно высокими локальными скоростями характеризуется также наличием интенсивного поперечного (вторичного) течения в виде парного вихря (рис. 4а). Эта пара вихрей, схожих с вихрями Дина в криволинейных трубах, образуется в передней части стеноза, где течение происходит по криволинейным линиям тока, соответственно геометрии стеноза. В свою очередь, возникший в стенозе парный вихрь индуцирует вторичное течение (противоположной циркуляции) в зоне обратного течения за стенозом.

Поперечное течение резко трансформируется в окрестности конца зоны обратного течения (рис. 4б), а затем практически полностью вырождается. Распределение осредненной продольной скорости на расстоянии около $10D$ от центра стеноза вновь приобретает осесимметричный вид, с максимумом скорости в центре сосуда (рис. 4в).

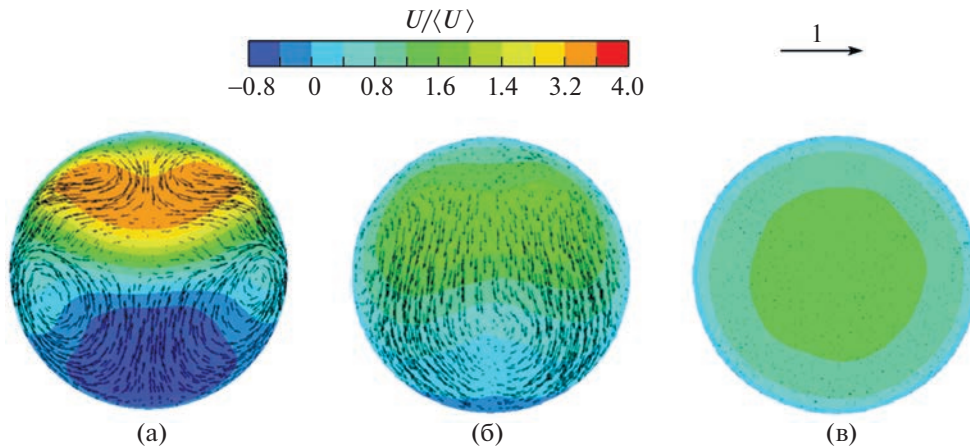


Рис. 4. Расчетное поле продольной скорости с наложенными векторами поперечной скорости в трех сечениях канала за стенозом: (а–в) – $x/D = 2, 4, 10$.

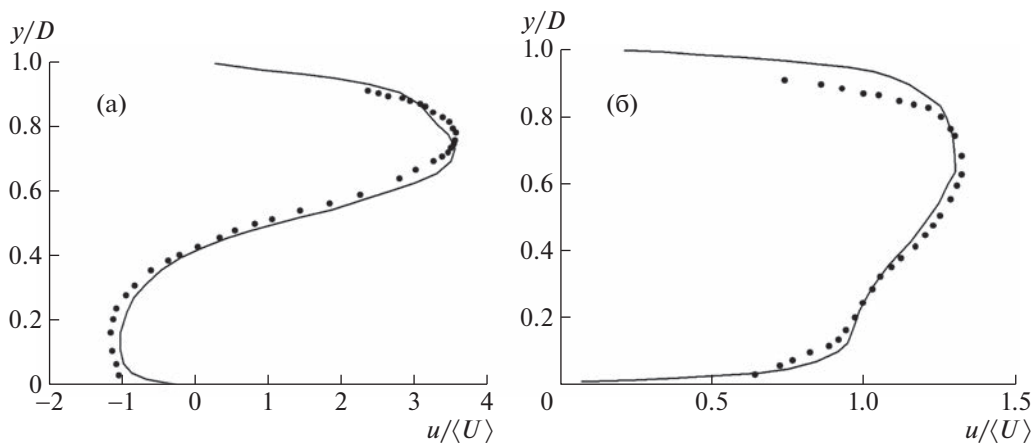


Рис. 5. Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) профилей скорости потока в плоскости симметрии за областью сужения: а, б – $x/D = 2, 6.55$.

На рис. 5 в качестве примера приведено сопоставление расчетных и экспериментальных профилей скорости на двух расстояниях от стеноза ($x/D = 2$ и 6.55). Видно, что результаты в основном согласуются между собой.

Наиболее интересная особенность изучаемого течения заключается в формировании за стенозом области локальной турбулентности. Для иллюстрации этой особенности на рис. 6 показаны изоповерхности Q -критерия, построенные по данным численного моделирования для двух вариантов расчета: с нулевыми входными возмущениями [23] и с введением возмущений. Построенные изоповерхности раскрашены по локальным значениям модуля скорости и наглядно визуализируют область существования разномасштабных турбулентных вихревых структур, которые возникают в результате проявления гидродинамических неустойчивостей, присущих сдвиговому течению струйного характера, формирующемуся за стенозом. В варианте расчета с наложенными входными возмущениями переход к состоянию потока с трехмерными турбулентными образованиями происходит практически сразу за стенозом. Во втором варианте отчетливо прослеживается формирование квазидвумерных вихрей вследствие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, и область перехода к турбулентности сдвинута вниз по потоку.

На рис. 7 приведены экспериментальные профили среднеквадратичных значений пульсаций продольной компоненты скорости потока, u_{rms} , измеренные в плоскости симметрии рабочего участка на разных расстояниях от горла стеноза. Видно, что уже в первом из обследованных сечений ($x/D = 2$) пульсации скорости весьма велики, с пиковым значением u_{rms} , составляющим

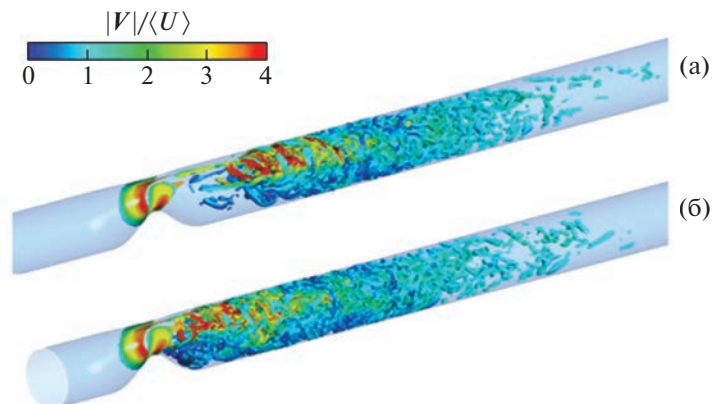


Рис. 6. Визуализация вихревых структур в канале с местным асимметричным сужением: раскрашенные по модулю скорости изоповерхности Q -критерия по результатам расчетов без наложения (а) и с наложением (б) входных возмущений.

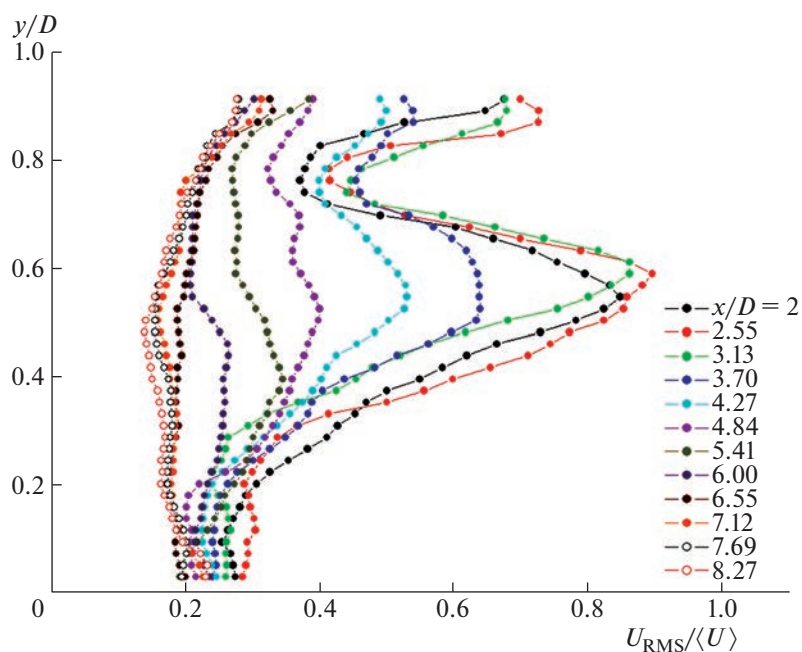


Рис. 7. Экспериментальные профили среднеквадратичных значений пульсаций продольной компоненты скорости потока.

около 90% от среднерасходной скорости $\langle U \rangle$, или же около 27% от среднерасходной скорости в горле стеноза, $\langle U_S \rangle = 3.3\langle U \rangle$. Тот же уровень максимальных значений u_{rms} наблюдается и в двух последующих сечениях ($x/D = 2.55$ и 3.13). При этом во всех трех сечениях пиковые значения u_{rms} находятся при $y/D \approx 0.6$, где наблюдаются и максимальные значения градиента средней скорости (см. рис. 5). Начиная с сечения $x/D = 3.5$, уровень пульсаций скорости резко снижается, и при $x/D > 6$ распределение пульсаций становится почти равномерным по ядру потока, характеризуясь значением $u_{\text{rms}}/\langle U \rangle \approx 0.2$.

Представленные на рис. 8 примеры сравнения расчетных и экспериментальных профилей среднеквадратичных пульсаций продольной скорости свидетельствует об общей согласованности характера сопоставляемых распределений и уровней интенсивности пульсаций, измеренных и рассчитанных при разных расстояниях от стеноза. Наблюдаемые различия интенсивности пульсаций обусловлены, по-видимому, некоторым смещением в экспериментах плоскости све-

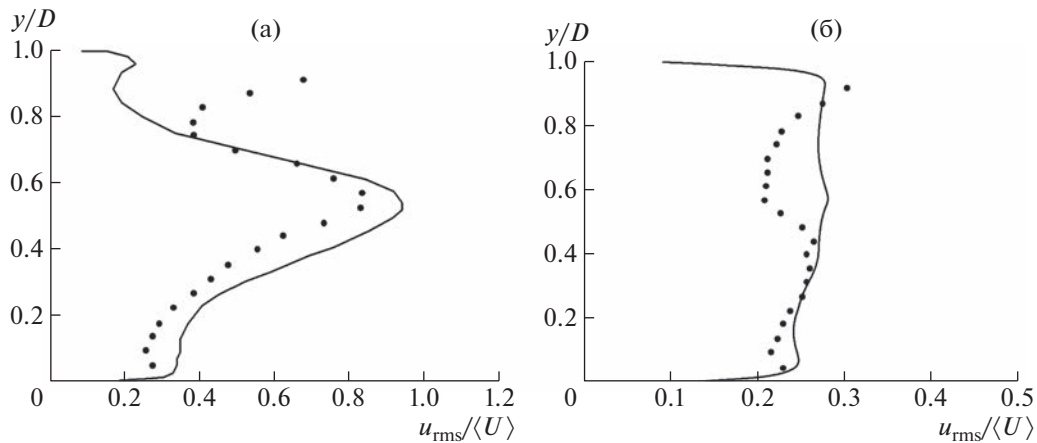


Рис. 8. Сопоставление расчетных (линии) и экспериментальных (точки) профилей среднеквадратичных пульсаций скорости: а, б – $x/D = 2, 6.55$.

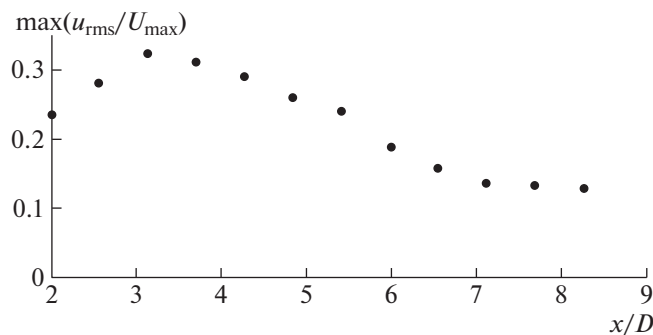


Рис. 9. Изменение характерной интенсивности пульсаций скорости вниз по потоку за сужением.

тового ножа от плоскости симметрии канала, которое в большей степени сказывается на величине измеряемых значений u_{rms} .

Для общей оценки степени турбулизации потока на разных расстояниях от горла стеноза введем характерную интенсивность турбулентности как отношение двух величин: максимальной по сечению величины среднеквадратичных пульсаций продольной скорости и максимальной по сечению осредненной скорости потока U_{max} . Использование для нормировки скоростных пульсаций максимальной в сечении скорости обусловлено тем, что именно U_{max} определяет характерную величину поперечного градиента скорости в слое смешения за стенозом, который, в свою очередь, определяет развитие гидродинамических неустойчивостей и переход к турбулентности. Изменения введенной интенсивности турбулентности вниз по потоку от стеноза иллюстрируются на рис. 9, где график построен по экспериментальным данным. Из рисунка видно, что интенсивность пульсаций скорости достигает максимальных значений при $x/D \approx 3.2$, затем снижается и при $x/D \geq 8$ практически не меняется.

На рис. 10 поле касательных рейнольдсовых напряжений $u'v'/\langle U \rangle^2$, рассчитанных по численно разрешаемым составляющим пульсационного движения, сопоставляется с результатами измерений по методу SIV. Видно, что как в расчете, так и в эксперименте сдвиговое турбулентное напряжение значительно по величине лишь в области $x/D < 5$, что является дополнительным свидетельством локализации турбулентности в ближнем следе за стенозом. Область с максимальными значениями рейнольдсовых напряжений располагается на расчетном и экспериментальном поле практически в одном и том же месте. Вместе с тем предсказываемые в расчете максимальные значения напряжения приблизительно на 25% выше по сравнению с измеренными.

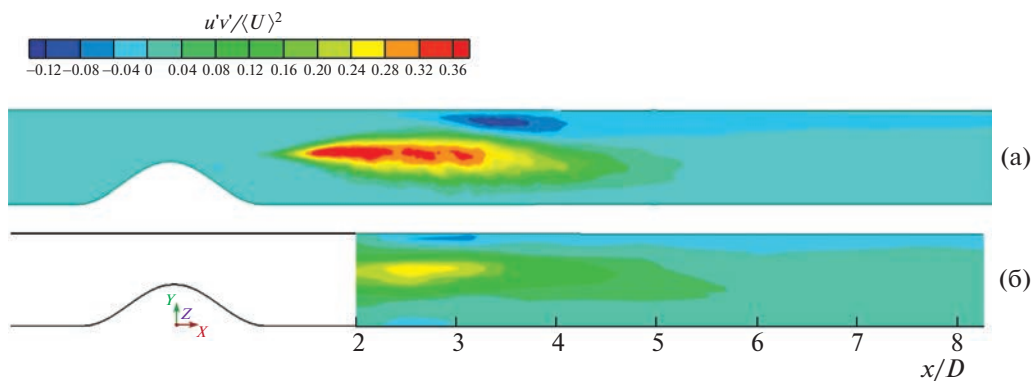


Рис. 10. Поля рейнольдсовых напряжений $u'v' / \langle U \rangle^2$ в плоскости симметрии: а — численное моделирование с введением входных возмущений; б — эксперимент.

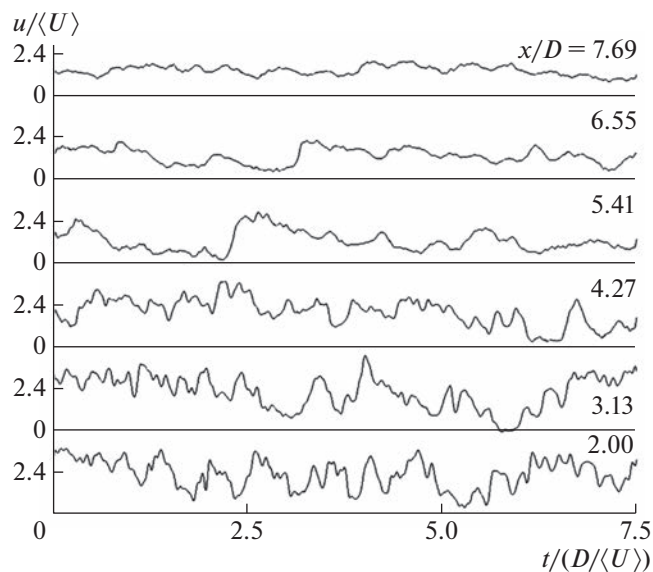


Рис. 11. Осциллограммы продольной компоненты скорости потока на разных расстояниях от сужения.

На рис. 11 приведены экспериментальные осциллограммы продольной компоненты скорости потока в точках, соответствующих координатам максимумов среднеквадратичных пульсаций скорости в поперечных сечениях канала (см. рис. 7). Как видно из рисунка, течение за стенозом сопровождается относительно низкочастотными пульсациями скорости потока, которые вызваны формированием и движением разномасштабных вихревых структур в слое смещения за сужением. Наибольшая амплитуда пульсаций наблюдается при $x/D = 3.13$, что соответствует данным рис. 9. Далее вниз по потоку амплитуда пульсаций заметно снижается (рис. 11).

Для двух сечений за стенозом ($x/D = 3.13$ и 7.69) на рис. 12 показаны экспериментальные спектры пульсаций скорости потока в точках, соответствующих максимальному значению u_{rms} в поперечном сечении канала (см. рис. 7). На приведенных спектрах можно выделить инерционный интервал, протяженность которого снижается с увеличением расстояния от стеноза. Однако различие в частоте пульсаций на границах этого интервала менее, чем на порядок, не позволяет дать достоверное заключение о законе изменения амплитуды пульсаций на этом интервале. Тем не менее характер приведенных спектров свидетельствует о локальной турбулизации потока, с признаками последующей ламинаризации по мере удаления от стеноза.

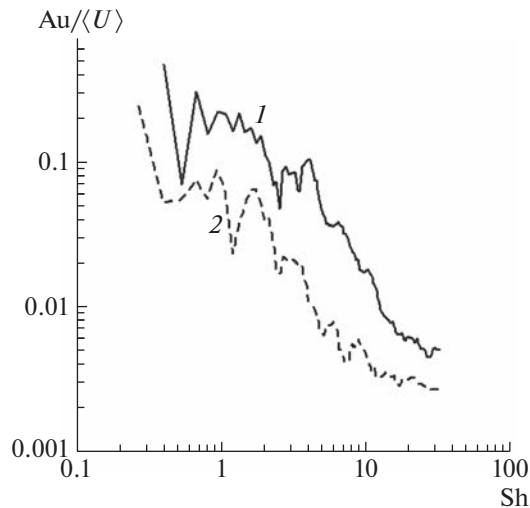


Рис. 12. Спектр пульсаций продольной компоненты скорости потока в точках, расположенных на разных расстояниях от стеноза: 1, 2 – $x/D = 3.13, 7.69$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено расчетно-экспериментальное исследование течения в модели кровеносного сосуда с асимметричным сужением косинусоидального профиля при степени сужения 70% и числе Рейнольдса $Re = 1800$, находящемся в интервале физиологических значений при оценке по максимальному расходу крови в бедренной артерии человека за период сердечных сокращений. Эксперимент выполнен с использованием оптического метода SIV, обеспечивающего возможность измерения мгновенных векторных полей скорости потока с высоким пространственным и временным разрешением. Трехмерное численное решение получено методом моделирования крупных вихрей.

Экспериментальные данные, полученные при измерениях в продольном центральном сечении канала (плоскости симметрии), определенно указывают на существование за стенозом области с достаточно развитой локальной турбулентностью, протяженность которой на 30–40% превосходит длину отрывной (рециркуляционной) зоны, формирующейся за горлом стеноза. Уже в первом из обследованных сечений, находящемся на расстоянии двух калибров (диаметров канала) от горла стеноза, пульсации продольной скорости весьма велики, с пиковым значением среднеквадратичной величины u_{rms} , составляющим около 90% от среднерасходной скорости на участках до и после сужения. Тот же уровень максимальных значений u_{rms} наблюдается и на последующих полутора калибрах. Далее уровень пульсаций скорости резко снижается, и в последних обследованных сечениях (6–8 калибров от горла стеноза) распределение пульсаций становится почти равномерным по ядру потока, характеризуясь значением u_{rms} около 20% от среднерасходной скорости. Временные осциллограммы и спектры пульсаций скорости на последних сечениях отчетливо свидетельствуют о вырождении высокочастотных составляющих, что является признаком последующей реламинаризации течения.

Численное вихреразрешающее моделирование, имеющее в отношении эксперимента как сопоставительное, так и поддерживающее значение, проведено с учетом нерегулярных входных возмущений, которые фиксируются в потоке перед рабочим участком, моделирующим стеноз на экспериментальной установке, и вызваны, предположительно, вибрациями пола и конструктивных элементов установки. Учет входных возмущений осуществлен посредством искусственного введения в расчетную модель входной синтетической турбулентности, добавляемой к входному распределению скорости в виде профиля Пуазейля. Расчетные данные, полученные для поля осредненной по времени продольной скорости и наиболее интересных компонент тензора рейнольдсовых напряжений, удовлетворительно согласуются с результатами измерений методом SIV в плоскости симметрии канала. В результате учета нерегулярных возмущений на входе в канал расчетная протяженность отрывной зоны сократилась примерно на 25%, по сравнению с величиной, предсказанной ранее в расчетах [23] с отсутствующими входными возмущениями, и составила, в согласии с экспериментом, величину около 4 диаметров канала. Общая структура

осредненного течения за стенозом аналогична предсказанной в [23], и характеризуется наличием зоны высокоскоростного струйного течения, относительно протяженной рециркуляционной области и значительных по интенсивности вторичных течений, имеющих вид пары вихрей вблизи горла стеноза и двух пар вихрей в рециркуляционной области.

Исследования выполнены при финансовой поддержке гранта РНФ 20-61-47068 (научные результаты) и Государственного задания ФИЦ “Казанский научный центр РАН” (апробация метода SIV).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glagov S., Zarins C., Giddens D.P., Ku D.N.* Hemodynamics and atherosclerosis. Insights and perspectives gained from studies of human arteries // *Arch. Pathol. Lab. Med.* 1988. V. 112. № 10. P. 1018–1031.
2. *Wootton D.M., Ku D.N.* Fluid mechanics of vascular systems, diseases, and thrombosis // *Annu. Rev. Biomed. Eng.* 1999. V. 1. № 1. P. 299–329.
3. *Berger S.A., Jou L.D.* Flows in stenotic vessels // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. V. 32. № 1. P. 347–382.
4. *Weinberg P.D.* Hemodynamic wall shear stress, endothelial permeability and atherosclerosis-A triad of controversy // *Front Bioeng. Biotechnol.* 2022. V. 10. Art. 836680. P. 1–29.
5. *Caro C.G., Fitz-Gerald J.M., Schroter R.C.* Atheroma and arterial wall shear-observation, correlation and proposal of a shear dependent mass transfer mechanism for atherogenesis // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. B. Biological Sciences.* 1971. V. 177. № 1046. P. 109–133.
6. *Gibson C.M., Diaz L., Kandarpa K., Sacks F.M., Pasternak R.C., Sandor T., Feldman C., Stone P.H.* Relation of vessel wall shear stress to atherosclerosis progression in human coronary arteries // *Arterioscler. Thromb. Vasc. Biol.* 1993. V. 13. № 2. P. 310–315.
7. *Caro C.G.* Discovery of the role of wall shear in atherosclerosis // *Arterioscler. Thromb. Vasc. Biol.* 2009. V. 29. № 2. P. 158–161.
8. *Barber T.* Wall shear stress and near-wall flows in the stenosed femoral artery // *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng.* 2017. V. 20. № 10. P. 1048–1055.
9. *Khalifa A.M.A., Giddens D.P.* Analysis of disorder in pulsatile flows with application to poststenotic blood velocity measurement in dogs // *J. Biomech.* 1978. V. 11. № 3. P. 129–141.
10. *Hutchison K.J., Karpinski E.* In vivo demonstration of flow recirculation and turbulence downstream of graded stenoses in canine arteries // *J. Biomech.* 1985. V. 18. № 4. P. 285–296.
11. *Wong E.Y., Nikolov H.N., Rankin R.N., Holdsworth D.W., Poepping T.L.* Evaluation of distal turbulence intensity for the detection of both plaque ulceration and stenosis grade in the carotid bifurcation using clinical Doppler ultrasound // *Eur. Radiol.* 2013. V. 23. № 6. P. 1720–1728.
12. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир. 1983. 400 с.
13. *Ku D.N.* Blood flow in arteries // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1997. V. 29. № 1. P. 399–434.
14. *Cassanova R.A., Giddens D.P.* Disorder distal to modeled stenoses in steady and pulsatile flow. // *J. Biomech.* 1978. V. 11. № 10–12. P. 441–453.
15. *Ahmed S.A., Giddens D.P.* Flow disturbance measurements through a constricted tube at moderate Reynolds numbers // *J. Biomech.* 1983. V. 16. № 12. P. 955–963.
16. *Ojha M., Cobbold C., Johnston K., Hummel R.* Pulsatile flow through constricted tubes: An experimental investigation using photochromic tracer methods // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 203. P. 173–197.
17. *Mallinger F., Drikakis D.* Instability in three-dimensional unsteady stenotic flows // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2002. V. 23. № 5. P. 657–663.
18. *Sherwin S.J., Blackburn H.M.* Three-dimensional instabilities of steady and pulsatile axisymmetric stenotic flows // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 533. P. 297–327.
19. *Varghese S.S., Frankel S.H., Fischer P.F.* Direct numerical simulation of stenotic flows. Part 1. Steady flow // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 582. P. 253–280.
20. *Varghese S.S., Frankel S.H., Fischer P.F.* Direct numerical simulation of stenotic flows. Part 2. Pulsatile flow // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 582. P. 281–318.
21. *Paul M.C., Molla M.M.* Investigation of physiological pulsatile flow in a model arterial stenosis using large-eddy and direct numerical simulations // *Appl. Math. Model.* 2012. V. 36. № 9. P. 4393–4413.
22. *Choi W., Park J.H., Byeon H.* Flow characteristics around a deformable stenosis under pulsatile flow condition // *Phys. Fluids.* 2018. V. 30. № 1. P. 011902.
23. *Гатаулин Я.А., Смирнов Е.М.* Численное исследование структуры и локальной турбулизации течения в кровеносном сосуде с односторонним стенозом // *Науч.-техн. ведомости С.-Петербург. гос. политехн. ун-та. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 14. № 1. С. 72–84.
24. *Freidoonimehr N., Chin R., Zander A., Arjomandiet V.* Effect of shape of the stenosis on the hemodynamics of a stenosed coronary artery // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. № 8. P. 081914.
25. *Мухеев Н.И., Душин Н.С.* Метод измерения динамики векторных полей скорости турбулентного потока по видеосъемке дымовой визуализации // *Приборы и техника эксперимента.* 2016. № 6. С. 114–122.

УДК 532.526.2

ОБ ОБТЕКАНИИ ПОЛУТЕЛА ВРАЩЕНИЯ РЭНКИНА

© 2023 г. Г. Л. Королев^{а,*}, Вик. В. Сычёв^а

^аЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*E-mail: glk777@mail.ru

Поступила в редакцию 20.08.2022 г.

После доработки 10.10.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Исследовано осесимметричное течение несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса около полутела вращения Рэнкина. Установлено, что в решении задачи для системы уравнений пограничного слоя линии нулевого поверхностного трения не возникает. Рассмотренное течение является безотрывным, что находится в полном соответствии с имеющимся экспериментальным результатом.

Ключевые слова: решение Рэнкина, пограничный слой, отрыв

DOI: 10.31857/S0568528122600576, **EDN:** NSYFUF

При рассмотрении обтекания тонкого тела вращения при больших числах Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$ течение в масштабах последнего описывается решением краевой задачи теории малых возмущений (см. [1, 2]). Оно становится несправедливым вблизи передней точки торможения [3, 4]. В настоящей работе изучено осесимметричное течение в пограничном слое, который развивается в малой окрестности этой точки для сильно затупленного тела.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим осесимметричное установившееся течение несжимаемой жидкости около тонкого тела вращения, установленного под нулевым углом атаки к однородному набегающему потоку.

Введем следующие обозначения: ℓx , ℓr , — оси цилиндрической системы координат; u_∞ , $u_\infty v$ — соответствующие проекции вектора скорости; $p_\infty + \rho^* u_\infty^2$ — давление; $\ell^2 u_\infty \psi$ — функция тока; $Re = u_\infty \ell / \nu^*$ — число Рейнольдса. Здесь ℓ — продольный размер тела; u_∞ и p_∞ — абсолютная величина вектора скорости и значение давления в набегающем потоке, направленном вдоль оси Ox ; ρ^* — плотность, ν^* — кинематический коэффициент вязкости. Поместим начало системы координат на оси симметрии в малой окрестности передней критической точки.

Пусть $r = \tau f(x)$, $0 < x < 1$ и $f(x)$ — гладкая функция, определяющая форму поверхности тела в меридиональной плоскости. При этом τ — малый параметр: $\tau = \tau(Re) \rightarrow 0$ при $Re \rightarrow \infty$. Предположим, что носовая часть тела имеет степенную форму

$$f(x) = a_0 x^\alpha + o(x^\alpha) \quad (1.1)$$

при $x \rightarrow +0$, $a_0 > 0$, $0 \leq \alpha < 1$. Согласно результатам теории малых возмущений, как для плоских [3–5], так и осесимметричных течений [1], асимптотические разложения решений теряют свою равномерную пригодность при $x = O(\tau^\lambda)$, $r = O(\tau^\lambda)$, $\lambda = (1 - \alpha)^{-1}$. Изменения скорости и давления здесь суть величины порядка единицы. Тогда асимптотическое представление решения в этой области имеет вид

$$\begin{aligned} X = \tau^{-\lambda} x = O(1), \quad R = \tau^{-\lambda} r = O(1) \\ (u, v, p) = (U, V, P) + o(1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим течение для предельного случая, когда в (1.1) значение $\alpha = 0$.

Подстановка (1.2) в систему уравнений Навье–Стокса при условии, что локальное число Рейнольдса $Re^* = \tau^\lambda Re \rightarrow \infty$ при $Re \rightarrow \infty$ ($\lambda = 1$), приводит к уравнению для потенциального течения идеальной жидкости

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0, \quad U = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (1.3)$$

где $\Psi(X, R)$ и $\Phi(X, R)$ – функция тока и потенциал течения в рассматриваемой области. Пусть последнее описывается здесь решением Рэнкина [6], которое есть сумма потенциалов однородного потока и источника, помещенного (для простоты) в точку $X = R = 0$

$$\begin{aligned} \Phi &= X - \frac{Q_0}{4\pi\rho}, \quad U = 1 + \frac{Q_0 X}{4\pi\rho^3} \\ \Psi &= \frac{R^2}{2} - \frac{Q_0 X}{4\pi\rho}, \quad \rho = (X^2 + R^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где Q_0 – обильность источника. Нетрудно видеть, что на оси симметрии находится точка торможения

$$U(X, 0) = 1 + \frac{Q_0 X}{4\pi|X|^3} = 0, \quad X = X_0 = -\left(\frac{Q_0}{4\pi}\right)^{1/2} \quad (1.5)$$

Тогда поверхность тока, проходящая через эту точку, согласно (1.4), (1.5), есть

$$\Psi = \frac{R^2}{2} - \frac{Q_0 X}{4\pi\rho} = \frac{Q_0}{4\pi} \quad (1.6)$$

Введем сферические координаты ρ, θ

$$\rho = (X^2 + R^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{R}{X}\right) \quad (1.7)$$

Приняв (1.6) за поверхность обтекаемого тела и введя для нее обозначение $R = G(X)$, имеем

$$G^2 = \frac{Q_0}{2\pi} \left(\frac{X}{(X^2 + G^2)^{1/2}} + 1 \right) \quad (1.8)$$

или, используя (1.6), (1.7), запишем соответствующие уравнения в параметрической форме

$$\begin{aligned} X &= x_0(t) = -r_0(t) \operatorname{ctg} t, \quad t = \pi - \theta, \quad 0 \leq t < \pi \\ R &= r_0(t) = \left(\frac{Q_0}{2\pi}\right)^{1/2} (1 - \cos t)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Наконец, из (1.3), (1.4), (1.6)–(1.9) следует (см. [7]), что скорость $U_s(t)$ вдоль поверхности тока $\Psi = Q_0/4\pi$ есть

$$U_s = \left(\frac{1}{2}(1 - \cos t) + \frac{3}{4} \sin^2 t \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

При $X \rightarrow \infty$, согласно (1.8), (1.9), $G \rightarrow (Q_0/\pi)^{1/2}$, т.е. $a_0 = (Q_0/\pi)^{1/2}$ (см. (1.1))

Замена $X = Q_0^{1/2} X^0$, $R = Q_0^{1/2} R^0$, $\Phi = Q_0^{1/2} \Phi^0$, $\Psi = Q_0 \Psi^0$ в (1.4) исключает постоянную Q_0 . Вариация этого параметра приводит лишь к изменению масштаба течения в целом. Поэтому, не ограничивая общности, будем полагать $Q_0 = 1$.

График функции $G(X)$ (см. [6]) дан на рис. 1. На рис. 2 представлена функция $U_e(s) = U_s(t)$ из (1.10), где s – длина дуги, отсчитываемая от точки торможения вдоль поверхности тела в меридиональной плоскости

$$s(t) = \int_0^t (x_0'^2 + r_0'^2)^{1/2} dt^0 \quad (1.11)$$

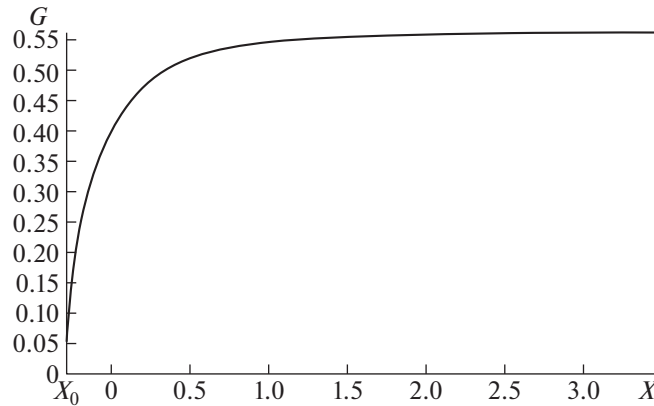


Рис. 1. Контур полутела Рэнкина в меридиональной плоскости.

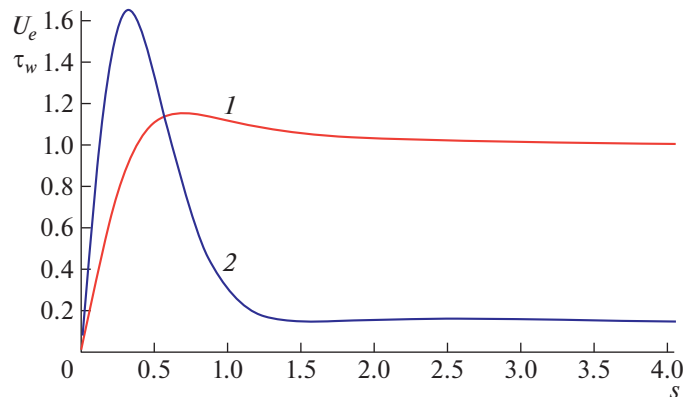


Рис. 2. Касательная составляющая вектора скорости $U_e(s)$ (1) и распределение трения $\tau_w(s)$ (2) вдоль поверхности тела.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для удовлетворения условию прилипания на поверхности тела в области, где $x = O(\tau)$, $r = O(\tau)$, введем пограничный слой. Пусть s, n ортогональная криволинейная система координат, связанная здесь с поверхностью тока $\Psi = Q_0/4\pi$, $\Psi = \tau^{-2}\psi$. Для пограничного слоя, как обычно [8]

$$s = O(1), \quad n = \text{Re}^{*-1/2} N, \quad \Psi = \frac{Q_0}{4\pi} + \text{Re}^{*-1/2} \Psi_0(s, N) + o(\text{Re}^{*-1/2})$$

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial s} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial N} - U_e \frac{dU_e}{ds} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial N^2} \quad (2.1)$$

$$R_0 U_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial N}, \quad R_0 V_0 = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial s}$$

где $R_0(s) = G(X)$ – расстояние точки на поверхности тела от оси симметрии.

Преобразование Степанова–Манглера

$$\xi = \int_0^s R_0^2 ds^0, \quad \eta = R_0 N, \quad \Psi_0 = \psi_0(\xi, \eta), \quad U_e = u_e(\xi) \quad (2.2)$$

приводит (2.1) к виду, соответствующему плоскому течению

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \eta^2} - u_e \frac{du_e}{d\xi} = \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial \eta^3} \quad (2.3)$$

$$\eta = 0: \Psi_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \eta} = 0, \quad \eta \rightarrow \infty: \frac{\partial \Psi_0}{\partial \eta} \rightarrow u_e(\xi)$$

Здесь также приведены краевые условия прилипания на поверхности и сращивания с решением в области, где $X = O(1)$, $R = O(1)$.

Рассмотрим решение вблизи точки торможения $s = n = 0$. Согласно (1.9)–(1.11), при $s \rightarrow 0$: $R_0 = s + O(s^3)$, $U_e = q_0 s + O(s^3)$, $q_0 = 2(\pi/Q_0)^{1/2}$. Тогда течение в пограничном слое при $s \rightarrow 0$ описывается известным решением Хомана [9]. Это решение в переменных ξ, η имеет вид

$$u_e = q_0(3\xi)^{1/3} + O(\xi), \quad \Psi_0 = (3^{4/3} q_0/2)^{1/2} \xi^{2/3} h(\xi) + O(\xi^{5/3})$$

$$\xi = (2 \cdot 3^{-2/3} q_0)^{1/2} \eta \xi^{1/3}, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

$$h''' + hh'' + \frac{1}{2}(1 - h'^2) = 0, \quad h(0) = h'(0) = 0, \quad h'(\infty) = 1$$

Решение задачи для уравнения в (2.4), относящегося к типу Фолкнера-Скан, дано в [9] (см. также [8]).

Заметим, что при $s = O(\text{Re}^{*-1/2})$, $n = O(\text{Re}^{*-1/2})$ течение описывается точным решением [9] системы уравнений Навье–Стокса.

Численное решение задачи (2.3), (2.4) было получено после следующего представления

$$\mu = \xi^{1/3}, \quad v = (2q_0)^{1/2} (3\xi)^{-1/3} Q_e^{1/2}(\mu)\eta$$

$$u_e = q_0(3\xi)^{1/3} Q_e(\mu), \quad \Psi_0 = \left(\frac{q_0}{2}\right)^{1/2} (3\xi)^{2/3} Q_e^{1/2}(\mu)F(\mu, v) \quad (2.5)$$

которое учитывает особое поведение в (2.4) и, в силу регулярности $F(\mu, v)$ при $\mu \rightarrow 0$, позволяет проводить расчет от сечения $\mu = 0$. В результате внесения (2.5) в (2.3), (2.4) приходим к задаче

$$\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial v} - \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) - \frac{\mu Q_e'}{4 Q_e} \left(F \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - 2 \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 + 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 - 1 \right) - F \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial v^3}$$

$$v = 0: F = \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad v \rightarrow \infty: \frac{\partial F}{\partial v} \rightarrow 1, \quad F(0, v) = h(v)$$

На рис. 2 представлен график функции

$$\tau_w(s) = \frac{\partial U_0}{\partial N} \Big|_{N=0} = (2q_0^3)^{1/2} R_0(s) Q_e^{3/2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \Big|_{v=0}$$

которая определяет поверхностное трение согласно (2.1), (2.2), (2.5). Оказалось, что, как и в случае плоского течения около полутела Рэнкина [10], $\tau_w(s)$ всюду положительна, несмотря на существование интервала s , где градиент давления неблагоприятен. Точки $s = 1.526$ и $s = 2.467$ являются для нее точками слабо выраженных минимума и максимума. При $s \rightarrow \infty$ решение задачи имеет асимптотику Прандтля-Блазиуса: $\tau_w = O(s^{-1/2})$.

Таким образом обтекание полутела вращения Рэнкина является безотрывным, что находится в соответствии с экспериментальным результатом Верле [11] (см. [12]), полученным путем визуализации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показал, что обтекание при больших числах Рейнольдса полутела вращения в форме Рэнкина является безотрывным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van Dyke M.D.* Second-order slender-body theory – axisymmetric flow // NASA Tech. Rep. 1959. R-47. 26 p.
2. *Cole J.D.* Perturbation methods in applied mathematics. Waltham: Blaisdell, 1968. 260 p.
3. *Jones R.T.* Leading-edge singularities in thin-airfoil theory // J. Aeronaut. Sci. 1950. V. 17. № 5. P. 307–310.
4. *Van Dyke M.D.* Second-order subsonic airfoil theory including edge effects // NACA Rep. 1956. № 1274. 23 p.
5. *Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. Stanford: Parabolic Press, 1975. 271 p.
6. *Rankine W.J.M.* On the mathematical theory of stream-lines, especially those with four foci and upwards // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1871. V. 161. Pt. II. P. 267–306.
7. *Сычев В.В., Башкин В.А.* Лекции по теоретической гидродинамике. Ч. I. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2003. 188 с.
8. *Rosenhead L.* (Ed.) Laminar boundary layers. Oxford: Clarendon Press, 1963, 688 p.
9. *Homann F.* Der Einfluß großer Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel // ZAMM. 1936. Bd. 16. H. 3. S. 153–164.
10. *Королев Г.Л., Сычев В.В.* О пограничном слое при обтекании полутела Рэнкина // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 62–65.
11. *Werlé H.* Le décollement sur les corps de révolution à basse vitesse // La Rech. Aéron. 1962. № 90. P. 3–14.
12. *Van Dyke M.* An album of fluid motion. Stanford: Parabolic Press, 1982. 176 p.

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ ФЛЮИДА К СКВАЖИНЕ ЧЕРЕЗ РАДИАЛЬНУЮ ТРЕЩИНУ ГРП ПРИ ПОСТОЯННОМ РАСХОДЕ

© 2023 г. Е. П. Аносова^{a,*}, З. М. Нагаева^{a,b,**}, **В. Ш. Шагапов^{b,***}**

^aУфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

^bИнститут механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

*E-mail: ae0809@mail.ru

**E-mail: Nagaeva_Zilya@mail.ru

***E-mail: Shagapov@rambler.ru

Поступила в редакцию 28.09.2022 г.

После доработки 31.10.2022 г.

Принята к публикации 10.11.2022 г.

Рассматривается задача об отборе жидкости из пласта в скважину или закачке жидкости из скважины в пласт при наличии трещины ГРП, перпендикулярной стволу скважины, в режиме постоянного расхода. Получены аналитические решения, описывающие эволюцию давления в трещине при постоянном расходе флюида из пласта в скважину. Построены приближенные решения с использованием метода последовательной смены стационарных состояний (ПССС). Сравнение численных результатов точного и приближенного решений показывает, что они практически совпадают. Проанализировано влияние коллекторских характеристик пласта и трещины на эволюцию давления в трещине и в скважине.

Ключевые слова: трещина гидроразрыва пласта (ГРП), постоянный расход, распределение давления, интегро-дифференциальное уравнение, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S0568528122600692, **EDN:** NTEWPR

В настоящее время в связи с тем, что значительная часть запасов нефти является трудноизвлекаемой в силу низкой проницаемости пластов или высокой вязкости самой нефти, представляют большой интерес задачи, описывающие фильтрацию флюида в призабойной зоне, подверженной различным физико-химическим и механическим воздействиям. Существенная часть работ [1–5] посвящена задачам фильтрации вокруг скважины при наличии трещин, полученных путем гидроразрыва пласта (ГРП).

В работах [6–9] приведена модель, описывающая фильтрацию флюида в трещине ГРП и в окружающем трещину пласте. В [6] приводится решение, описывающее изменение давления жидкости на скважине при поддержании постоянного дебита. В статьях [7–9] описывается распределение давления в трещине ГРП при режиме поддержания постоянного давления на скважине и при поддержании постоянного расхода жидкости. Во всех упомянутых выше работах рассматривались наиболее распространенные в настоящее время вертикальные скважины с вертикальной трещиной ГРП, симметричной относительно оси скважины.

В данной работе рассматривается процесс нестационарной фильтрации флюида в трещине ГРП, перпендикулярной оси скважины, при поддержании постоянного расхода жидкости на скважине. Для решения поставленной задачи предложена математическая модель в виде интегро-дифференциального уравнения. Найдены точное аналитическое решение через функции Бесселя и приближенное решение, полученное с помощью метода последовательной смены стационарных состояний (ПССС), удобное для практического применения и хорошо согласующееся с точным решением.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается трещина ширины d_f , образованная гидроразрывом пласта и представляющая собой область пористой и проницаемой среды между двумя параллельными вертикальными

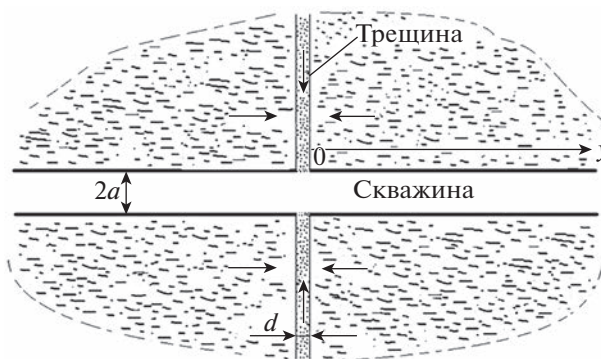


Рис. 1. Схема системы “скважина–трещина ГРП”.

плоскостями, расположенная перпендикулярно к горизонтальной цилиндрической скважине (рис. 1). Течение жидкости в трещине — радиально-симметричное. Запишем уравнение неразрывности для флюида в трещине

$$\frac{\partial(m_f \rho_f)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho_f v_f)}{\partial r} = -2 \left(\frac{\rho_p v_p}{d_f} \right) \Big|_{y=0} \quad (a < r) \quad (1.1)$$

где m_i и ρ_i — пористость и плотность флюида (здесь и в дальнейшем нижние индексы f и p соответствуют значениям параметров в трещине и окружающей ее пористой среде), v_i — скорость фильтрации жидкости, a — радиус скважины. Величина в правой части уравнения (1.1) выражает приток флюида из пласта в трещину. Для ее определения решим сопряженную фильтрационную задачу в пласте вне трещины. Для этого запишем уравнение неразрывности в пористой среде

$$\frac{\partial(m_p \rho_p)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_p v_p)}{\partial y} = 0 \quad (0 < y < \infty) \quad (1.2)$$

Ось Oy отсчитывается от стенки трещины.

Для описания процесса фильтрации в трещине и в пласте примем закон Дарси

$$v_f = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial r} \quad (a < r < \infty), \quad v_p = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_p}{\partial y} \quad (a < r < \infty, \quad 0 < y < \infty) \quad (1.3)$$

где k_i ($i = f, p$) — коэффициент проницаемости, μ — динамическая вязкость флюида. Сжимаемость жидкости учитывается в акустическом приближении

$$P_i - P_0 = C^2 (\rho_i - \rho_0) \quad (i = f, p) \quad (1.4)$$

где C — скорость звука для жидкости, индекс (0) внизу для давления и плотности соответствует их невозмущенным значениям. Флюид считаем слабо сжимаемым ($|\rho_i - \rho_0| \ll \rho_i \approx \rho_0$). Тогда уравнения (1.1) и (1.2) с учетом (1.3) и (1.4) можно привести к виду

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\varkappa_f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) + 2 \frac{m_p \varkappa_p}{m_f d_f} \left(\frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (a < r < \infty) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \varkappa_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \quad (a < r < \infty, \quad 0 < y < \infty) \quad (1.6)$$

где $\varkappa_i = \frac{k_i \rho_0 C^2}{m_i \mu}$ ($i = f, p$).

Отметим, что P_f — функция переменных t и r , а P_p — функция переменных t , r и y . В результате система (1.5) и (1.6) может быть сведена к одному интегро-дифференциальному уравнению

для P_f . Действительно, величина давления P_p на поверхности стенки трещины ($y = 0$) должна быть равна P_f . Это условие запишется как

$$P_p = P_f \quad (a < r < \infty, \quad y = 0)$$

Будем считать, что в пористой среде вдали от трещины давление однородное и равно P_0 , т.е.

$$P_p = P_0 \quad (a < r < \infty, \quad y = \infty)$$

Согласно уравнению (1.6) линии тока для фильтрационного течения в пласте полагаются прямыми, направленными перпендикулярно к границе трещин ГРП. Это допущение основано на том, что, во-первых, забойный участок скважины обсажен (поступление флюида в скважину происходит только из трещины). Во-вторых, проницаемость пласта k_p на несколько порядков ниже, чем проницаемость в трещине ГРП k_f ($k_p \ll k_f$). Вследствие этого составляющая скорости фильтрации $v_{p(r)}$ в пласте вблизи трещины вдоль нее значительно меньше, чем скорость фильтрации v_f в трещине ($|v_{p(r)}| < |v_f|$). Ниже, в п. 3 будет представлен более детальный анализ для диапазона расстояния r и времени t , когда линии тока в пласте вблизи трещины ГРП почти прямые. Отметим также, что это допущение о прямолинейности линий тока сильно упрощает решение задачи.

Согласно принципу Дюамеля [10] решение уравнения (1.6), удовлетворяющее начальному и граничному условиям

$$P_p = P_0 \quad (t \leq t_0, \quad 0 < y < \infty), \quad P_p = P_f \quad (t > t_0, \quad y = 0) \quad (1.7)$$

может быть записано как

$$P_p - P_0 = \int_{t_0}^t \frac{\partial u(y, t - \tau)}{\partial t} (P_f(\tau, r) - P_0) d\tau \quad (1.8)$$

где

$$u(y, t - \tau) = 1 - \Phi(y / (2\sqrt{\alpha_p(t - \tau)})) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/(2\sqrt{\alpha_p(t - \tau)})}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

После несложных преобразований с учетом условий (1.7) решение (1.8) можно привести к виду

$$P_p - P_0 = \int_{t_0}^t \frac{\partial (P_f(\tau, r) - P_0)}{\partial \tau} u(y, t - \tau) d\tau \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в уравнение (1.5) и полагая $t_0 = -\infty$, получим следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение для P_f , как

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \frac{\alpha_f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_f}{\partial r} \right) - 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial (P_f(\tau, r) - P_0)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \alpha_p(t - \tau)}} \quad (1.10)$$

Левая часть этого уравнения связана с упругостью трещины. Как показано в [7], для рассматриваемых задач это слагаемое не существенное, и в дальнейшем им пренебрегаем.

2. ФИЛЬТРАЦИЯ ФЛЮИДА В СКВАЖИНУ ЧЕРЕЗ ТРЕЩИНУ В РЕЖИМЕ ПОСТОЯННОГО РАСХОДА

На основе уравнения (1.10), пренебрегая эффектом упругости флюида в трещине (полагая равной нулю левую часть этого уравнения), рассмотрим радиальный режим фильтрации в трещине.

Пусть в исходном состоянии ($t \leq 0$) жидкость в трещине и в пласте находится в покое, и, следовательно, давление однородно. В момент времени $t = 0$ начинается с постоянным расходом отбор ($q > 0$) или нагнетание ($q < 0$) жидкости из скважины в трещину. Требуется определить поле давления P_f в трещине и закон изменения давления $P_{f(w)}$ в скважине. Рассмотрим случай,

когда $q > 0$. В рамках отмеченных допущений уравнение (1.10) и его система начальных и граничных условий запишутся как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta P_f}{\partial r} \right) = \chi_f \int_0^t \frac{\partial \Delta P_f}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \quad (a < r < \infty) \quad \left(\chi_f = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\sqrt{\alpha_p}}{\alpha_f} \right) \quad (2.1)$$

$$\Delta P_f = 0 \quad (\Delta P_f = P_f - P_0) \quad (t \leq 0, \quad r > a) \quad (2.2)$$

$$q = - \frac{2\pi a d_f k_f}{\mu} \left(\frac{\partial \Delta P_f}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = \text{const} \quad (2.3)$$

Из условия (2.3) следует

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial r} \Big|_{r=a} = - \frac{q\mu}{2\pi a d_f k_f} \quad (2.4)$$

Далее будем использовать преобразование Лапласа [11]

$$\Delta \overline{P}_f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Delta P_f dt$$

Из уравнения (2.1) с учетом (2.2) получаем для $\Delta \overline{P}_f$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \Delta \overline{P}_f}{dr} \right) = \chi_f \sqrt{\lambda} \Delta \overline{P}_f \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\Delta \overline{P}_f(\lambda; r) = C_1 I_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r}) + C_2 K_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r}) \quad (2.6)$$

где $I_0(z)$ и $K_0(z)$ – модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка соответственно [12]. Учитывая ограниченность ΔP_f на бесконечности, имеем $C_1 = 0$. Следовательно,

$$\Delta \overline{P}_f(\lambda; r) = C_2 K_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r}) \quad (2.7)$$

Продифференцируем обе части уравнения (2.7) по переменной r , тогда

$$\frac{\partial}{\partial r} (\Delta \overline{P}_f(\lambda; r)) = C_2 K'_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r}) \sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda}} \quad (2.8)$$

Учитывая, что производная $K'_0(z) = -K_1(z)$, ($K_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка [10, 12]) из (2.8) при $r = a$ получим

$$C_2 = \frac{q\mu}{2\pi a d_f k_f \lambda^{\frac{5}{4}} \sqrt{\chi_f} K_1(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} a})} \quad (2.9)$$

Тогда решение (2.6) с учетом выражения для C_2 из (2.9) будет иметь вид

$$\Delta \overline{P}_f(\lambda; r) = \frac{q\mu K_0(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} r})}{2\pi a d_f k_f \lambda^{\frac{5}{4}} \sqrt{\chi_f} K_1(\sqrt{\chi_f \sqrt{\lambda} a})} \quad (a < r < \infty)$$

Найдем производную $\frac{\partial}{\partial t} (\Delta P_f(t; r))$ функции $\Delta P_f(t; r)$, используя формулу Меллина (формулу обратного преобразования Лапласа)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta P_f(t; r)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} \lambda \overline{P}_f(\lambda; r) e^{\lambda t} d\lambda$$

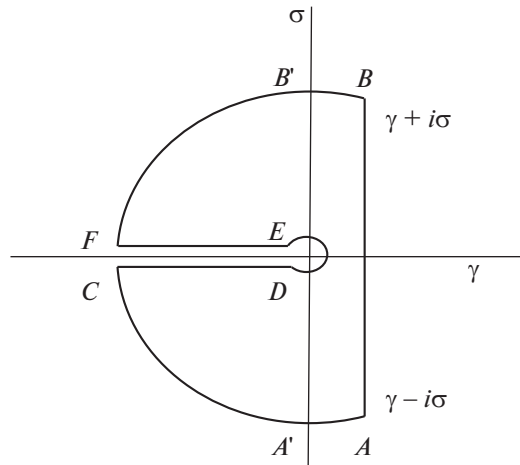


Рис. 2. Контур интегрирования.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta P_f(t; r)) = \frac{q\mu}{4\pi^2 i a d_f k_f \sqrt{\chi_f}} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \frac{K_0(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda} r)}{\lambda^{\frac{1}{4}} K_1(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda} a)} e^{\lambda t} d\lambda \quad (2.10)$$

где γ — положительное вещественное число.

Подынтегральная функция в (2.10) аналитична при всех комплексных значениях переменной λ за исключением нуля. Для вычисления этого интеграла воспользуемся контуром, изображенным на рис. 2. Согласно теореме Коши имеем

$$\int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FB}$$

Интегралы вдоль дуг AC , FB при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Интеграл по дуге DE при $\xi \rightarrow 0$ тоже стремится к нулю. Интеграл по отрезку CD равен

$$\int_{CD} \frac{K_0(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda} r)}{\lambda^{\frac{1}{4}} K_1(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda} a)} e^{\lambda t} d\lambda = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{i\pi}{4}} r\right) e^{-u^4 t} 4u^2 du}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{i\pi}{4}} a\right) e^{-\frac{i\pi}{4}}}$$

Интеграл по отрезку EF равен

$$\int_{EF} \frac{K_0(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda} r)}{\lambda^{\frac{1}{4}} K_1(\sqrt{\chi_f} \sqrt{\lambda} a)} e^{\lambda t} d\lambda = - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{i\pi}{4}} r\right) e^{-u^4 t} 4u^2 du}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{i\pi}{4}} a\right) e^{\frac{i\pi}{4}}}$$

Следовательно, выражение для производной $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta P_f(t; r))$ можем записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta P_f(t; r)) = \frac{q\mu}{\pi^2 i a d_f k_f \sqrt{\chi_f}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{i\pi}{4}} r\right)}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{-\frac{i\pi}{4}} a\right) e^{-\frac{i\pi}{4}}} - \frac{K_0\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{i\pi}{4}} r\right)}{K_1\left(\sqrt{\chi_f} u e^{\frac{i\pi}{4}} a\right) e^{\frac{i\pi}{4}}} \right) e^{-u^4 t} u^2 du \quad (2.11)$$

Интегрируя выражение для производной (2.11) по переменной t , находим искомую функцию $\Delta P_f(r; t)$

$$\Delta P_f(t; r) = \frac{q\mu}{\pi^2 i a d_f k_f \sqrt{\chi_f}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \left(\frac{K_0 \left(\sqrt{\chi_f} u e^{-i\frac{\pi}{4}} r \right)}{K_1 \left(\sqrt{\chi_f} u e^{-i\frac{\pi}{4}} a \right) e^{-i\frac{\pi}{4}}} - \frac{K_0 \left(\sqrt{\chi_f} u e^{i\frac{\pi}{4}} r \right)}{K_1 \left(\sqrt{\chi_f} u e^{i\frac{\pi}{4}} a \right) e^{i\frac{\pi}{4}}} \right) (1 - e^{-u^4 t}) du \quad (2.12)$$

Из решения (2.12), полагая $r = a$, получим закон изменения давления в скважине как

$$\Delta P_{f(w)}(t) = \frac{q\mu}{\pi^2 i a d_f k_f \sqrt{\chi_f}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \left(\frac{K_0 \left(\sqrt{\chi_f} u e^{-i\frac{\pi}{4}} a \right)}{K_1 \left(\sqrt{\chi_f} u e^{-i\frac{\pi}{4}} a \right) e^{-i\frac{\pi}{4}}} - \frac{K_0 \left(\sqrt{\chi_f} u e^{i\frac{\pi}{4}} a \right)}{K_1 \left(\sqrt{\chi_f} u e^{i\frac{\pi}{4}} a \right) e^{i\frac{\pi}{4}}} \right) (1 - e^{-u^4 t}) du \quad (2.13)$$

Отметим, что полученные решения при граничных условиях $P_p = P_0$ при $y \rightarrow \infty$ и $P_f = P_0$ при $r \rightarrow \infty$ соответствуют начальному этапу функционирования скважины, когда влияние границы пласта, влияние фильтрационных полей соседних трещин (в случае системы радиальных трещин), а также радиальной границы трещины слабые.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПССС ЗАДАЧИ О ФИЛЬТРАЦИИ К СКВАЖИНЕ ЧЕРЕЗ ТРЕЩИНУ В РЕЖИМЕ ПОСТОЯННОГО РАСХОДА

Одним из наиболее широко использующихся приближенных методов решения задач теории упругого режима фильтрации является метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС). Он основан на предположении, что давление в пласте меняется во времени значительно медленнее, чем по координатам [13].

Рассмотрим функционирование скважины в режиме постоянного расхода ($q = \text{const}$, $t > 0$), исходные состояния в пласте и в трещине примем, как в п. 2. Требуется определить эволюцию распределения давления в трещине ΔP_f и закон изменения давления в скважине $\Delta P_{f(w)}$ при граничном условии, аналогичном (2.3).

Согласно гипотезе, принятой в методе ПССС, для распределения давления в пластах вблизи трещины ГРП имеем

$$P_p = -\Delta P_f \frac{y}{l_p} + P_f, \quad l_p = \sqrt{2\alpha_p t} \quad (0 < y < l_p) \quad (3.1)$$

Из этого выражения следует

$$\frac{\partial P_p}{\partial y} = -\Delta P_f \frac{1}{\sqrt{2\alpha_p t}}. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (1.5) и учитывая вышеизложенное допущение относительно левой части этого уравнения, получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta P_f}{\partial r} \right) - \frac{\chi_f}{\sqrt{2t}} \Delta P_f = 0 \quad (3.3)$$

Общее решение уравнения (3.3) имеет вид

$$\Delta P_f(t; r) = C_1 I_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) + C_2 K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) \quad (3.4)$$

Учитывая ограниченность ΔP_f на бесконечности, из (3.4) получим

$$\Delta P_f(t; r) = C_2 K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) \quad (3.5)$$

Продифференцируем выражение (3.5) по переменной r

$$\frac{\partial \Delta P_f(t; r)}{\partial r} = C_2 K_0'(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}$$

Учитывая условие (2.4), при $r = a$ получим

$$C_2 = -\frac{q\mu}{d_f k_f} \sqrt{\frac{\sqrt{2t}}{\chi_f}} \frac{1}{K_1(a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})}$$

Тогда общее решение запишется как

$$\Delta P_f(t; r) = -\frac{q\mu}{2\pi a d_f k_f} \sqrt{\frac{\sqrt{2t}}{\chi_f}} \frac{K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})}{K_1(a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})} \quad (3.6)$$

Отсюда, для закона изменения давления в скважине ($r = a$) имеем

$$\Delta P_{f(w)}(t) = -\frac{q\mu}{2\pi a d_f k_f} \sqrt{\frac{\sqrt{2t}}{\chi_f}} \frac{K_0(a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})}{K_1(a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})} \quad (3.7)$$

Проведем анализ решения (3.7) для больших времен, когда $\xi_* = 1$ ($\xi_* = a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}$). Из этого условия получим следующее неравенство для времени

$$t^{1/4} \geq t_*^{1/4}, \quad t_* = \chi_f^2 a^4$$

Примем некоторые типичные характерные величины для системы “скважина, пласт и радиальная трещина ГРП”: $m_p = m_f = 10^{-1}$, $k_p = 10^{-15}$ м², $k_f = 10^{-10}$ м², $\rho_0 = 860$ кг/м³, $\mu = 10^{-2}$ Па · с, $a = 10^{-1}$ м, $d_f = 3 \times 10^{-3}$ м. Тогда, согласно выражению для χ_f из (2.5), имеем следующую оценку $\chi_f \approx 0.15 \sqrt{\text{с/м}^2}$ и для вышеприведенных характерных величин рассматриваемой системы получим $t_* = 2.25 \times 10^{-6}$ с. Следовательно, в рассматриваемой задаче всегда $t \geq t_*$, и поэтому можно считать $\xi \ll 1$. Для функций $K_0(\xi)$ и $K_1(\xi)$ справедливы при малых значениях параметра ξ асимптотики [10]

$$K_0(\xi) = -\left(\gamma + \ln\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) \quad \text{и} \quad K_1(\xi) = \xi^{-1} \quad (3.8)$$

Здесь $\gamma = 0.5772$ – постоянная Эйлера. Подставляя (3.8) в (3.7), находим

$$\Delta P_{f(w)}(t) = \frac{q\mu}{2\pi k_f d_f} \left(\gamma + \ln\left(\frac{1}{2} a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}\right) \right) \approx \frac{q\mu}{2\pi k_f d_f} \ln(0.75 a\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) \quad (3.9)$$

Полученное выражение может быть использовано при гидродинамическом исследовании скважины, подверженной ГРП. Действительно, из (3.9) следует

$$\Delta P_{f(w)} = \frac{q\mu}{2\pi k_f d_f} \left(\ln(0.75\sqrt{\chi_f} a) - \frac{1}{4} \ln t \right) \quad (3.10)$$

Это асимптотическое решение можно, в свою очередь, записать как

$$\Delta P_{f(w)} = B - A \ln t, \quad A = \frac{q\mu}{8\pi k_f d_f}, \quad B = 4A \ln(0.75\sqrt{\chi_f} a) \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) в координатной плоскости $(\ln t, \Delta P_{f(w)})$ является уравнением прямой. Причем, как показывают вышеприведенные численные оценки для t_* , при отборе жидкости с постоянным расходом q , функционирование скважины почти мгновенно должно выйти на этот асимптотический режим. Поэтому, обрабатывая промысловые данные в координатах $(\ln t, \Delta P_{f(w)})$,

можем определить A и B , и тем самым найти проводимость трещины $k_f d_f$ и величину χ_f . Этот метод аналогичен способу, изложенному в [13], по определению проводимости пласта по кривым восстановления давления при больших временах.

Отметим, что формулы (3.10) и (3.11) можно записать для системы из n радиальных трещин. Если считать, что параметры всех трещин близки, то для этого в этих формулах надо q заменить на nq .

Используя выражение для $K_1(\xi)$, решение (3.6) можно записать как

$$\Delta P_f = \frac{q\mu}{2\pi k_f d_f} K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}}) \quad (3.12)$$

Следовательно, для распределения давления в трещине ГРП имеет место автомодельное решение. Отсюда, если перепад давления ΔP_f принять за постоянное фиксированное значение, то величины r и t связаны следующим законом

$$r = \xi\sqrt{\sqrt{2t}/\chi_f} \quad (\xi = \text{const})$$

Таким образом, фиксированное значение давления в трещине для рассматриваемого режима фильтрации распространяется по закону $r \sim t^{1/4}$.

Как отмечено в п. 1, приведенные выше точные и приближенные решения получены при допущении, что линии тока в пласте прямые, перпендикулярные к границам (“берегам”) трещины ГРП. Определим зоны в плоскости (r, t) (радиальная координата – время), где выполняется принятое допущение с некоторой точностью. Для радиальной $v_{p(r)}$ и нормальной $v_{p(n)}$ составляющих скоростей фильтрации в пласте вблизи стенок трещины можем записать

$$v_{p(r)} = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_p}{\partial y} \quad \text{и} \quad v_{p(n)} = -\frac{k_p}{\mu} \frac{\partial P_f}{\partial r}$$

поскольку вблизи стенки трещины имеет место

$$\frac{\partial P_p}{\partial r} = \frac{\partial P_f}{\partial r}$$

Тогда, используя решения (3.1) для P_p и (3.12) для P_f , для отношения величин радиальной и нормальной составляющих скоростей фильтрации будем иметь

$$\left| \frac{v_{p(r)}}{v_{p(n)}} \right| = \sqrt{\chi_f \varepsilon_p \sqrt{2t}} \left| \frac{K_1(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})}{K_0(r\sqrt{\chi_f/\sqrt{2t}})} \right| = \varepsilon \quad (3.13)$$

Отсюда следует, для того чтобы линии тока для скоростей фильтрации приближались к трещинам ГРП под углом, близким к прямому углу, должно выполняться условие $\varepsilon \ll 1$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для параметров, определяющих свойства и состояния пористого пласта, флюида и трещины, приняты величины $m_p = m_f = 10^{-1}$, $k_f = 10^{-10}$ м², $\rho_0 = 860$ кг/м³, $C = 1.5 \times 10^3$ м/с, $\mu = 10^{-2}$ Па · с, $a = 10^{-1}$ м, $d_f = 3 \times 10^{-3}$ м, $P_0 = 10$ МПа. Для величины расхода принято значение $q = 5 \times 10^{-5}$ м³/с.

На рис. 3 показано распределение давления в трещине при различных значениях коэффициента проницаемости пласта для фиксированного момента времени. На этом и в следующих рисунках сплошными и точечными линиями изображены графики, построенные по точным и приближенным решениям соответственно. Кроме того, на рисунках представлены фрагменты графиков вблизи призабойного участка в увеличенных масштабах.

Из характера кривых распределения давления следует, что уменьшение коэффициента проницаемости пласта на один порядок (в десять раз) приводит примерно к двукратному росту перепада давления ΔP_f между пластовым значением P_0 ($P_p = P_0$, $y \rightarrow \infty$) и значением в трещине.

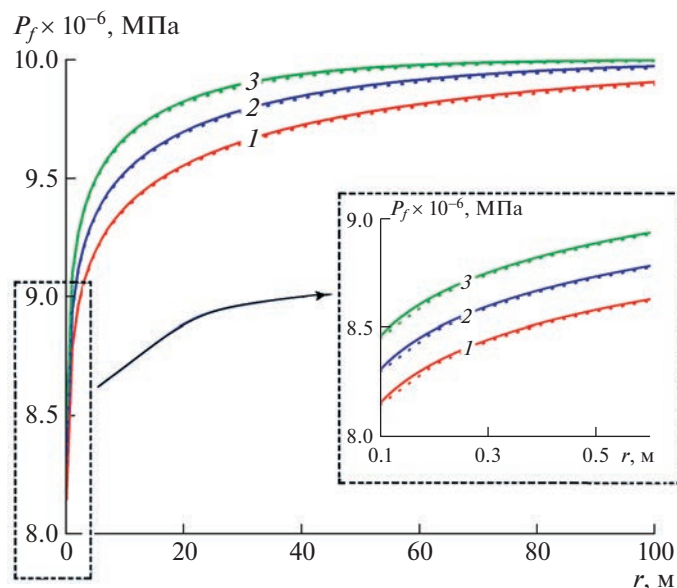


Рис. 3. Распределение давления в трещине в момент времени $t = 10^5$ с для различных значений коэффициента проницаемости пласта: 1–3 – $k_p = 10^{-16}, 10^{-15}, 10^{-14}$ м². Сплошные линии соответствуют точным аналитическим решениям, точечные – приближенным.

Следует также отметить, что в случае более низкопроницаемых пластов давление трещине ГРП приближается к пластовому значению медленнее с ростом радиальной координаты r . Так, если в случае более низкопроницаемого пласта ($k_p = 10^{-16}$ м²) расстояние от скважины, на котором перепад давления $\Delta P_f = P_f - P_0 \approx 0.25$ МПа, составляет около 60 м, то при проницаемости $k_p = 10^{-14}$ м² такое значение перепада наблюдается при гораздо более близком к скважине расстоянии (примерно на 20 м).

На рис. 4 изображены графики, иллюстрирующие эволюцию давления в трещине для различных моментов времени. Здесь также видно, что точные и приближенные решения практически совпадают.

На рис. 5 представлены графики для распределения давления в трещине для различных значений дебита.

На рис. 6 показаны законы снижения давления в скважине для различных значений коэффициента проницаемости пласта (а) и проводимости трещины $C_f = k_f d_f$ (б). Для времени принята логарифмическая шкала. Сплошные линии получены на основе общего решения (2.13), точечные линии построены согласно решению (3.9).

Таким образом, из представленных результатов расчетов также видно, что решения, полученные с использованием метода ПССС, практически совпадают с точными аналитическими решениями.

На рис. 7 зона, расположенная ниже линии 1, определяемой уравнением (3.13) при $\varepsilon = 1$, соответствует множеству значений (r, t) , для которых в пласте величина нормальной скорости фильтрации $v_{p(n)}$ больше величины радиальной скорости $v_{p(r)}$. Зона, расположенная ниже линии 2, определяемой тем же уравнением при $\varepsilon = 0.1$, соответствует области переменных (r, t) , где величина нормальной скорости фильтрации $v_{p(n)}$ в 10 раз больше величины радиальной скорости $v_{p(r)}$. Для параметров скважины, пласта и трещины ГРП приняты вышеприведенные значения.

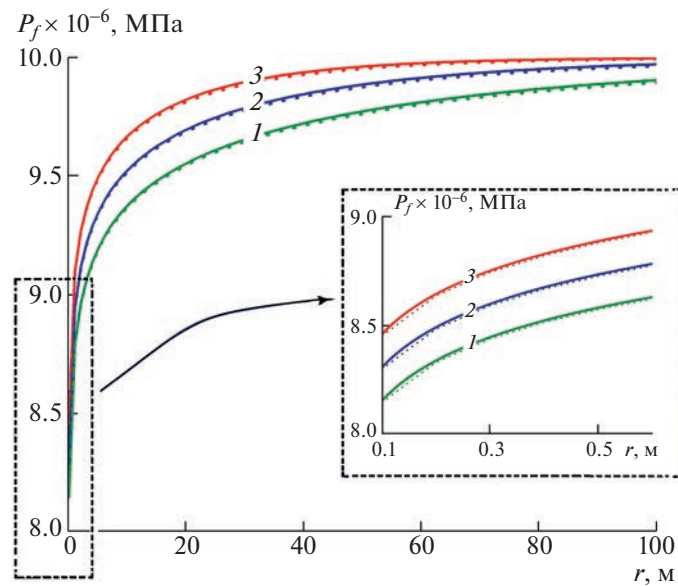


Рис. 4. Эволюция давления в трещине для различных моментов времени: 1–3 – $t = 10^4, 10^5, 10^6$ с при $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$.

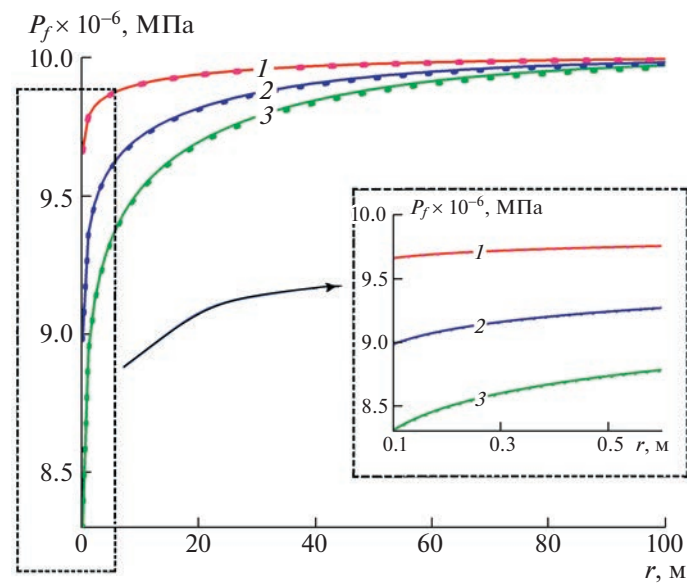


Рис. 5. Распределение давления в трещине для различных значений дебита: 1–3 – $q = 10^{-5}, 3 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ при $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$ в момент времени $t = 10^5$ с.

Отметим, что в представленных картинах зона (r, t) , где радиальная скорость фильтрации меньше, чем нормальная скорость, несколько занижена, поскольку в приведенных оценках не учтено торможение радиальной скорости фильтрации вблизи обсаженной скважины. Кроме того, как нам представляется, в плане определения расхода флюида из пласта в трещину, некоторое отклонение линий тока от прямых, перпендикулярных по отношению к трещине ГРП, несущественно.

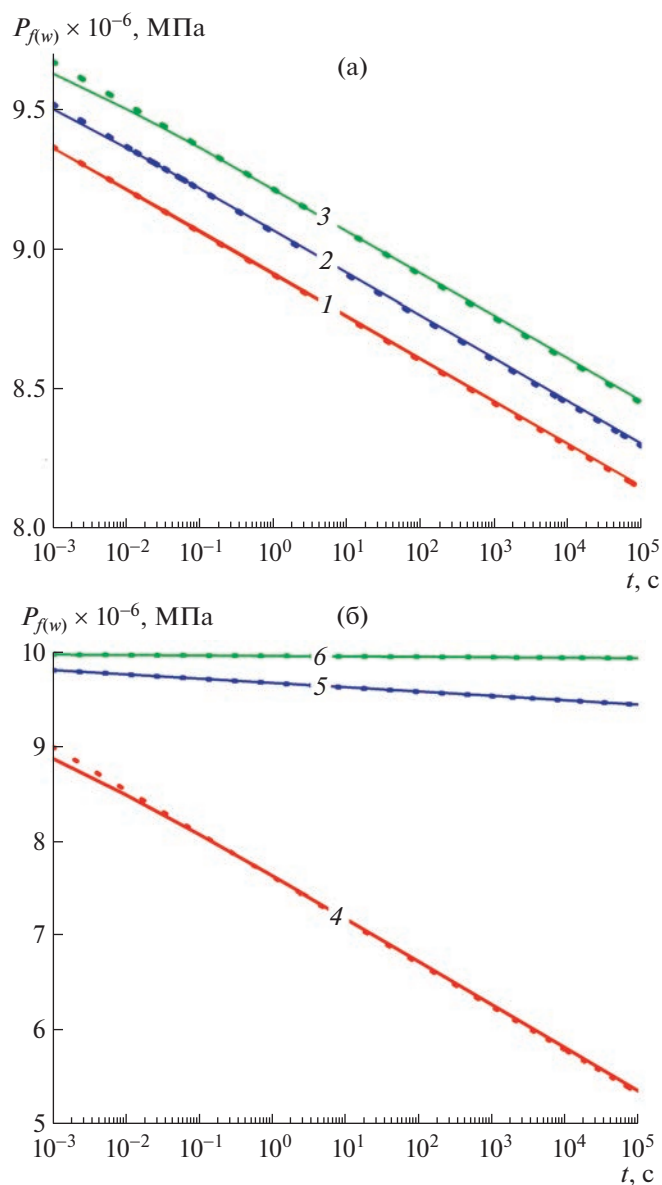


Рис. 6. Динамика снижения давления в скважине при дебите $q = 5 \times 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$ для (а) различных значений коэффициента проницаемости пласта и (б) для различных значений проводимости трещины при проницаемости пласта $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$: 1–3 – $k_p = 10^{-16}, 10^{-15}, 10^{-14} \text{ м}^2$; 4–6 – $C_f = 10^{-13}, 10^{-12}, 10^{-11} \text{ м}^3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные точные и приближенные решения, описывающие эволюцию давления в трещине ГРП и, в том числе, на забое скважины при задании постоянного значения расхода флюида, позволяют определять параметры трещины ГРП по кривым изменения давления в призабойной зоне, сопоставляя их с промысловыми данными, получаемыми на скважине при прочих известных значениях параметров пласта и флюида. Показано хорошее согласование результатов, полученных с помощью метода последовательной смены стационарных состояний (ПССС) с точными, но значительно более сложными решениями. Это обстоятельство может быть полезным при разработке численных алгоритмов, учитывающих в наиболее полном объеме особенности реальных систем “скважина–пласт, подверженный ГРП”, такие как многомерные эффекты, реаль-

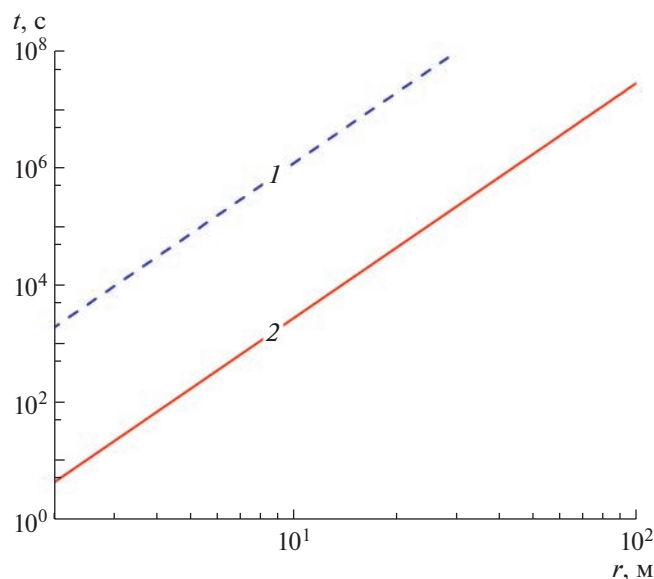


Рис. 7. Зоны фильтрации на плоскости : 1–2 – значения = 1, 0.1 в (3.13). В зоне, расположенной ниже линии 1, нормальная скорость больше радиальной скорости фильтрации, а в зоне, ниже линии 2, нормальная скорость превышает радиальную скорость фильтрации в пласте вблизи стенки трещины ГРП более чем в 10 раз.

ные условия на границах пласта и трещины ГРП, а также переходные режимы функционирования скважин.

Предложен метод оценки неизвестных значений коллекторских характеристик призабойной зоны (например, величины проводимости трещины) на основе сравнения дебита скважины и давления в забое с точными теоретическими решениями.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prats M.* Effect of vertical fractures on reservoir behavior – incompressible fluid case // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1961. V. 1. № 2. P. 105–118.
2. *Prats M., Hazebroek P., Strickler W.R.* Effect of vertical fractures on reservoir behavior – compressible fluid case // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1962. V. 2. № 2. P. 87–94.
3. *Каневская Р.Д., Дияшев И.Р., Некипелов Ю.В.* Применение гидравлического разрыва пласта для интенсификации добычи и повышения нефтеотдачи // Нефтяное хозяйство. 2002. № 5. С. 96–101.
4. *Астафьев В.И., Федорченко Г.Д.* Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2007. № 2 (15). С. 128–132.
5. *Экономидес М., Олини Р., Валько П.* Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2007. 237 с.
6. *Cinco-Ley H., Samaniego V.F., Dominguez A.N.* Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture // Soc. Pet. Eng. J. 1978. V. 18. № 4. P. 253–264.
7. *Шагапов В.Ш., Нагаева З.М.* К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5 (345). С. 121–130.
8. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
9. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 6–14.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.Н.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
11. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. 2-е изд., доп. М.: Высшая школа, 1975. 408 с.
12. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
13. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.

УДК 532.582.6

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГОРАЗДЕЛЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ ПАРЫ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ СЖИМАЕМОМ ПОТОКОМ ВОЗДУХА

© 2023 г. Ю. А. Виноградов^{а,*}, А. Г. Здитовец^{а,**},
Н. А. Киселёв^{а,***}, С. С. Попович^{а,****}

^аМГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: vinograd@imec.msu.ru

**E-mail: zditovets@mail.ru

***E-mail: kiselev.nick.a@gmail.com

****E-mail: pss1@mail.ru

Поступила в редакцию 03.11.2022 г.

После доработки 11.11.2022 г.

Принята к публикации 11.11.2022 г.

Экспериментально исследовано влияние расстояния между двумя поперечно обтекаемыми круговыми цилиндрами на распределение температуры и статического давления по их поверхности. Исследования проводились при числах Маха набегающего потока $M = 0.295$ и 0.365 и числах Рейнольдса $Re_D = 6.4 \times 10^4$ и 7.9×10^4 соответственно. Получено распределение коэффициентов давления и восстановления температуры на поверхности одного из цилиндров. Показано, что в зависимости от расстояния между цилиндрами коэффициенты давления и восстановления температуры могут быть как больше, так и меньше значений, полученных при обтекании одиночного цилиндра при идентичных параметрах набегающего потока.

Ключевые слова: энергоразделение, поперечное обтекание, круговой цилиндр, коэффициент давления, коэффициент восстановления температуры

DOI: 10.31857/S0568528122600904, **EDN:** NTSOFA

Процесс перераспределения полной энтальпии (температуры торможения) в потоках сжимаемого газа без обмена энергией с окружающей средой принято называть энергоразделением [1]. На его основе созданы устройства для безмашинного разделения потока на холодный и горячий (с температурой торможения меньше и больше начальной), например, трубы Ранка–Хилша [2], Гартмана–Шпренгера [3], Леонтьева [4]. Повышение эффективности существующих устройств [5–9], проектирование новых [10, 11] и умелое использование эффекта энергоразделения в обычном теплообменном оборудовании [12], напрямую связано с пониманием причин энергоразделения, а также способов воздействия на его величину. В связи с этим актуальным является изучение процесса энергоразделения, возникающего при обтекании тел канонической формы (круговых цилиндров), так называемый эффект Эккерта–Вайса [13], состоящий в возникновении области пониженной температуры на подветренной стороне поперечно обтекаемого цилиндра. Величина эффекта может достигать существенных значений. Например, в работе [14] получено, что при числе Маха набегающего потока 0.65 и температуре торможения 25°C температура поверхности кругового цилиндра снижалась на 28°C градусов в окрестности задней критической точки и была ниже статической температуры набегающего потока.

Проблема энергоразделения при поперечном обтекании изолированного цилиндра исследовалась во многих, в основном, экспериментальных работах [13–24]. Предложенная в [14] связь эффекта Эккерта–Вайса с процессом схода вихрей была неявно подтверждена в работах [17, 18]. В [18] было показано, что при возникновении резонанса между частотой стоячих акустических волн в аэродинамической трубе и частотой схода вихрей наблюдается существенное снижение донного давления и температуры поверхности в задней критической точке цилиндра, что косвенно свидетельствовало о связи эффекта с интенсификацией вихрей. При внесении раздели-

тельной пластины в область формирования вихрей наблюдались подавление их интенсивности, резкий рост давления и температуры поверхности в донной области [17].

В работе [21] методом прямого численного моделирования проанализированы механизмы, вызывающие энергоразделение в жидкой частице, и их вклад в перераспределение полной энтальпии у поверхности и в следе плохообтекаемого тела. Показано, что вблизи поверхности плохообтекаемого тела необходимо учитывать все механизмы, ответственные за перераспределение полной энтальпии в жидких частицах: пульсации давления, работа вязких сил и теплопроводность, тогда как в области развитого следа можно пренебречь диссипативными механизмами.

В [22] воздействие на процесс вихреобразования осуществлялось путем изменения расстояния между двумя одинаковыми круговыми цилиндрами, обтекаемыми поперечным потоком. Течение, как и в [21], моделировалось на основе численного решения уравнений Навье—Стокса для задач двумерного обтекания теплоизолированных тел потоком вязкого совершенного газа при $Re_D \leq 1000$ и числах Маха $0.1 \leq M \leq 0.8$. Было показано существенное влияние процесса вихреобразования и режимов интерференции на интенсивность эффекта Эккерта—Вайса. Получены режимы, на которых эффект энергоразделения имеет большую величину, чем при обтекании одиночного кругового цилиндра, и при этом распространяется на большую площадь поверхности. Данный результат является новым и необходимость экспериментального подтверждения очевидна. В реальном течении могут проявиться факторы, не учтенные в математической модели, используемой в работе [22], что может повлиять как на снижение, так и на увеличения искомого эффекта.

В настоящей работе, инициированной численными результатами [22], проведено экспериментальное исследование эффекта Эккерта—Вайса при поперечном обтекании пары одинаковых круговых цилиндров при числах Маха набегающего потока $M = 0.295; 0.365$ и числах Рейнольдса $Re_D = 6.4 \times 10^4; 7.9 \times 10^4$ соответственно. Оси цилиндров расположены в плоскости, перпендикулярной направлению потока. Относительное расстояние между осями цилиндров изменялось в диапазоне, позволяющем охватить режимы интерференции, характерные для данного типа расположения цилиндров. Согласно классификации работы [25], в зависимости от относительного расстояния P/D (где D — диаметр цилиндра, P — расстояние между осями цилиндров) на докритическом режиме обтекания $Re_D < 2 \times 10^5$ можно выделить следующие режимы интерференции.

Одиночная вихревая дорожка $1 < P/D < 1.1-1.2$ — течение за парой цилиндров напоминает течение за плохообтекаемым телом;

Бистабильный режим $1.2 < P/D < 2.0-2.2$ — формируются два следа (узкий и широкий), а течение в зазоре формирует струю, отклоняющуюся к узкому следу. Такое течение бистабильно, что означает нерегулярную смену широкого и узкого следа, и, следовательно, направления струи.

Спаренная вихревая дорожка $2.7 < P/D < 4.0-5.0$ — формируются одинаковые по ширине две вихревые дорожки. Они синхронизированы по частоте и фазе, зеркальны относительно оси зазора.

В итоге для значений $P/D = 1.1; 1.5; 2.0; 3.0; 4.0$ и одиночного цилиндра по измерениям температуры и давления получены распределения коэффициента давления и коэффициента восстановления температуры (характеризующего энергоразделение) на поверхности цилиндра. Проведено сравнение результатов, полученных для одиночного цилиндра, с известными экспериментальными данными.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Экспериментальный стенд. Экспериментальные исследования проводились на дозвуковой аэродинамической установке, рабочая часть которой представляет собой плоский канал без боковых стенок — рис. 1.

Воздух из окружающей среды поступал в высоконапорный центробежный вентилятор, который через мягкий рукав соединен с форкамерой 1. В форкамере установлены две сетки — детурбуляторы и спрямляющая решетка (хонейкомб), предназначенные для разрушения вихревых структур и получения равномерного потока воздуха в рабочем канале. Из форкамеры воздух через профилированное сопло 2 поступал в рабочий канал 3. Степень поджатия в сопле — 6.4. Рабочий канал установки образован верхней и нижней плоской стенкой (без боковых стенок), его длина 650 мм, высота 50 мм, ширина 360 мм (ширина сопла 300 мм). Материал стенок — оргстек-

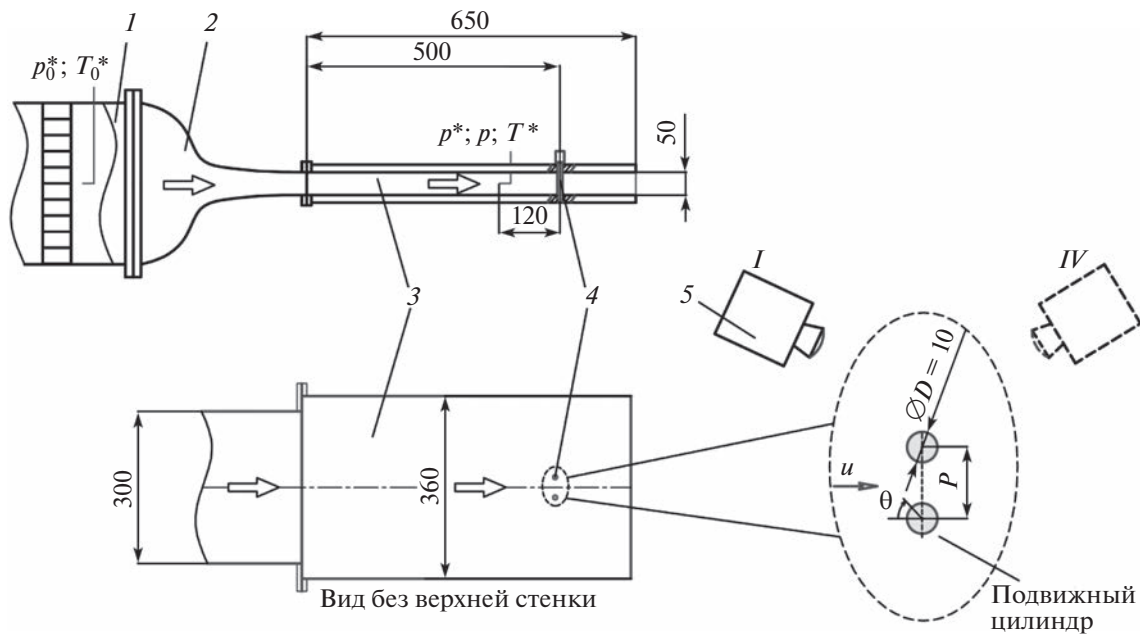


Рис. 1. Схема экспериментального стенда: 1 — форкамера; 2 — профилированное сопло; 3 — рабочий канал; 4 — исследуемые круговые цилиндры; 5 — тепловизор InfraTEC 8855.

ло толщиной 10 мм. Для плавного изменения скорости потока использовался частотный преобразователь, при помощи которого регулировалась частота вращения вентилятора. Таким образом, в рабочем канале достижим диапазон скоростей от 5 до 130 м/с с шагом ≈ 1 м/с.

Модель. В качестве моделей использовались цилиндры 4 круглого поперечного сечения (диаметр $D = 10$ мм), изготовленные из эбонита — материала с низким коэффициентом теплопроводности, порядка 0.16 Вт/(м К). Цилиндры располагались на расстоянии 500 мм от среза сопла, таким образом, что плоскость, проходящая через оси цилиндров, была перпендикулярна скорости набегающего потока. Расстояние между осями цилиндров ($P/D = 1.1; 1.5; 2.0; 3.0; 4.0$) изменялось при помощи автоматического устройства позиционирования (перемещался только один цилиндр — правый относительно направления потока рис. 1). В крайнем положении расстояние между осями цилиндров составляло $P = 40$ мм, при этом цилиндры были расположены симметрично относительно оси канала. Для измерения распределения температуры и давления на поверхности цилиндра использовались две полностью идентичные модели. В поверхность первой заподлицо заделана термопара — размер спая 0.2 мм, на поверхности второй на том же расстоянии — приемник статического давления диаметром 0.3 мм. Степень удлинения рабочей части модели — $50 \text{ мм}/10 \text{ мм} = 5$. Загромождение канала при размещении одного цилиндра $(10 \text{ мм}/300 \text{ мм}) \times 100\% = 3.3\%$, при размещении двух цилиндров — 6.6% .

Система измерения. Во время проведения экспериментального исследования регистрировались следующие параметры: давление и температура торможения потока в форкамере p_0^* и T_0^* соответственно; профили статического давления p и давления торможения p^* в канале трубкой Пито—Прандтля; профиль температуры торможения T^* в канале зондом, прикрепленным к трубке Пито—Прандтля; давление и температура на поверхности цилиндра p_θ и $T_{w\theta}$ соответственно.

Давление измерялось дифференциальными датчиками фирмы “Honeywell”, работающими в диапазоне ± 17 кПа. Температура торможения измерялась зондами с хромель-алюмелиевыми термопарами (К-тип), температура поверхности цилиндра — железо-константановой термопарой (J-тип), заделанной в поверхность цилиндра. Для контроля измерения температуры поверхности цилиндра использовался тепловизор InfraTEC 8855 (поз. 5, рис. 1). Спектральный диапазон: 8.0–10.0 мкм. Формат детектора (ИК-элементы): 640×512 пикс. Температурное разрешение при 30°C — не менее 0.035°C . Тепловизор располагался в двух возможных положениях относительно цилиндров (рис. 1). Таким образом, фиксировалось температурное поле в окрестности

передней и задней критических точек без искажений, характерных при измерении температуры на сильно искривленных поверхностях.

Сбор и обработка экспериментальных данных осуществлялись многоканальными аналогово-цифровыми преобразователями NI PCI-6071 и NI USB-9213 для сигналов с датчиков давления и термопар соответственно. Дальнейшая обработка и регистрация сигналов осуществлялись в программной среде LabVIEW. Тепловизионные изображения обрабатывались в специализированном программном обеспечении IRBIS3.

Обработка данных. Скорость сжимаемого потока определялась из следующего соотношения [26]

$$\frac{p^* - p}{0.5\rho^* u^2} = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{u}{a^*} \right)^2 \quad (1.1)$$

где $a^* = \sqrt{\gamma R T^*}$ – скорость звука в адиабатически заторможенном потоке, м/с; $\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты воздуха; R – газовая постоянная воздуха, Дж/(кг К); $\rho^* = p^*/(R T^*)$ – плотность воздуха по параметрам торможения, кг/м³; T^* – температура торможения потока, К; $(p^* - p)$ – разность давлений на трубке Пито–Прандтля, Па.

Из выражения (1.1) для дозвукового течения следует

$$u = \sqrt{\frac{2\rho^* a^{*2} - 2a^* \sqrt{\rho^{*2} a^{*2} - 2\rho^* (p^* - p)}}{\rho^*}}$$

Для определения числа Маха набегающего потока использовалось выражение

$$M = \sqrt{\frac{2/(\gamma + 1)\lambda^2}{1 - (\gamma - 1)/(\gamma + 1)\lambda^2}}$$

где $\lambda = u/\sqrt{2\gamma/(\gamma + 1)RT^*}$ – приведенная скорость.

Число Рейнольдса, определенное по диаметру цилиндра

$$Re_D = \frac{\rho u D}{\mu}$$

где $\rho = \rho^* \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$ – статическая плотность, кг/м³, μ – динамическая вязкость, Па · с, определенная по статической температуре потока $T = T^* \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2 \right)$.

Коэффициент восстановления давления и коэффициент восстановления температуры определялись по выражениям (1.2) и (1.3) соответственно

$$C_p = \frac{p_\theta - p}{p^* - p} \quad (1.2)$$

$$r = \frac{T_{w\theta} - T}{T^* - T} \quad (1.3)$$

где p_θ и $T_{w\theta}$ – давление и температура, измеренные на поверхности цилиндра для данного значения угла θ (см. рис. 1).

Оценка неопределенности измерений. По определению суммарная стандартная неопределенность оценки y представляет собой положительный квадратный корень из суммарной дисперсии

$$U(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 U^2(x_i)}$$

где $f = f(x_i)$ – функциональная зависимость оцениваемой величины y от входных величин x_i ; $U(x_i)$ – стандартная неопределенность входной величины x_i .

Таблица 1. Неопределенности измерения

Входная величина, x_i	Стандартная неопределенность, $U(x_i)$	Оцениваемая величина, y	Суммарная стандартная неопределенность оценки y , $U(y)$
p_0^* ; p^* ; p ; p_θ	197 Па	u	1.8 м/с
T_0^* ; T^*	0.2 К	M	0.0053
$T_{w\theta}$	0.5 К	c_p	0.035
T_w (тепловизор)	0.6 К	r	0.07
P	0.25 мм	P/D	0.02
D	0.07 мм	—	—

Таблица 2. Основные характеристики потока

M	u , м/с	T^* , °C	Re_D
0.295	103	34–35	6.4×10^4
0.365	128	37–39	7.9×10^4

В расчете принимаем, что знание погрешности величины x_i позволяет оценить ее верхний и нижний предел. Тогда для всех практических целей вероятность нахождения значения x_i в интервале Δ_- и Δ_+ близка к единице, а вне пределов этого интервала несущественна. Таким образом, стандартная неопределенность входной величины x_i , согласно [27], определяется выражением: $U^2(x_i) = \Delta^2/3$.

Неопределенности измерения входных и оцениваемых величин приведены в табл. 1.

Таким образом, результаты, приведенные в работе, нужно воспринимать следующим образом: $x \pm U(x)$ и $y \pm U(y)$.

2. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Основные характеристики потока представлены в табл. 2.

Число Маха $M = 0.365$ — максимально достижимое на данной аэродинамической установке, в этом случае центробежный вентилятор вращался с максимальной частотой 50 Гц; при $M = 0.295$ частота вращения вентилятора составляла 40 Гц. Исследования проводились в два этапа: на первом этапе измерялось распределение статического давления на поверхности правого цилиндра p_θ ; на втором этапе (после смены моделей) — распределение температуры поверхности правого цилиндра $T_{w\theta}$. После перемещения правого цилиндра в заданное положение P/D , технологические отверстия в верхней и нижней стенке канала, вдоль которых перемещался цилиндр, плотно закрывались заглушками. Поворот цилиндра вокруг собственной оси осуществлялся шаговым двигателем. Для каждого относительного расстояния между цилиндрами — P/D измерения охватывали угол поворота цилиндра на 450° с шагом 1.8° . На каждом шаге регистрировались все измеряемые величины, при этом время нахождения датчика в заданной позиции составляло 4 с при измерениях давления и 10 с при измерениях температуры. Далее выполнялись три записи показаний с датчиков с интервалом времени 1 с. Из предварительных экспериментов было установлено, что такой продолжительности достаточно для установления стационарных показаний как давления, так и температуры.

Измерения профиля скорости и температуры торможения по высоте канала проводились отдельно от измерений p_θ и $T_{w\theta}$, во избежание влияния возмущений от трубки Пито—Прандтля и зонда температуры торможения на структуру обтекания цилиндров. Измерения производились на оси канала на расстоянии 120 мм выше по потоку от плоскости расположения осей цилиндров, для всех значений P/D пары цилиндров и для одиночного цилиндра. В результате получено, что взаимное расположение цилиндров не существенно (в пределах неопределенности изме-

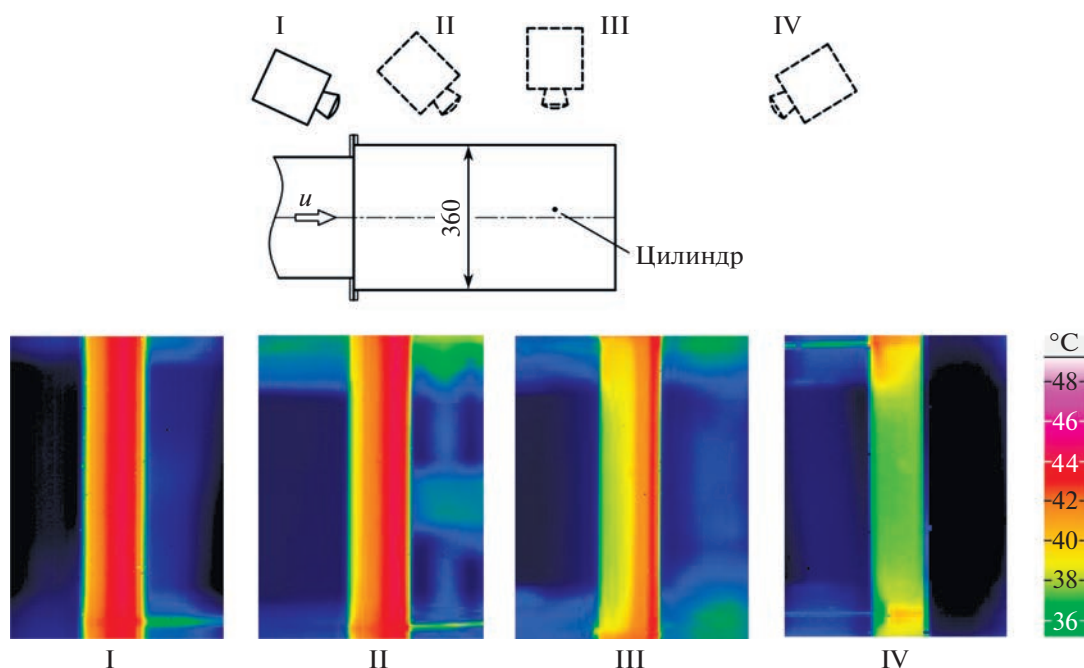


Рис. 2. Температура поверхности одиночного кругового цилиндра при обтекании поперечным потоком $M = 0.365$; I–IV – расположение тепловизора относительно направления потока.

рения) влияет на значение числа Маха в ядре потока. В случае одиночного цилиндра число Маха в ядре потока в среднем на 0.005 выше по сравнению с парой цилиндров при одинаковой частоте вращения вентилятора. Толщина динамического пограничного слоя составляла $\approx 5.1 \pm 0.05$ мм.

Поскольку стенки канала выполнены из теплоизоляционного материала, то течение можно считать изотермическим. Разность между температурой торможения, измеренной в форкамере, и температурой торможения, измеренной зондом — $(T_0^* - T^*)$, также не превышала неопределенности измерения на всей высоте перемещения зонда в канале — 46 мм (не доходя 2 мм до каждой из стенок канала).

В результате для определения коэффициента давления C_p (1.2) при соответствующих величинах P/D использовались значения давления торможения и статического давления, измеренные трубкой Пито—Прандтля и осредненные по ядру потока. Для определения коэффициента восстановления температуры r (1.3) использовалось значение температуры торможения $T^* = T_0^*$, измеренное в форкамере в тот же момент времени, что и температура поверхности цилиндра $T_{w\theta}$.

Для контроля показаний термопары, измеряющей температуру поверхности цилиндра, а также для регистрации температурного поля цилиндра производились измерения тепловизором. При исследовании обтекания пары цилиндров тепловизор устанавливался в двух положениях — позиции I и IV на рис. 1. В случае одиночного цилиндра тепловизор дополнительно к указанным выше положениям устанавливался под углом 45° и 90° к направлению потока — рис. 2 позиции II и III.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Одиночный цилиндр. На рис. 2 приведены термограммы поверхности цилиндра, зафиксированные в четырех разных положениях тепловизора относительно цилиндра. Число Маха набегающего потока $M = 0.365$. Как можно видеть, температура поверхности цилиндра постоянна в продольном направлении, за исключением пристенных участков сверху и снизу высотой не более 5 мм. Показания термопары и тепловизора в соответствующих точках цилиндра совпадают в пределах неопределенности измерения.

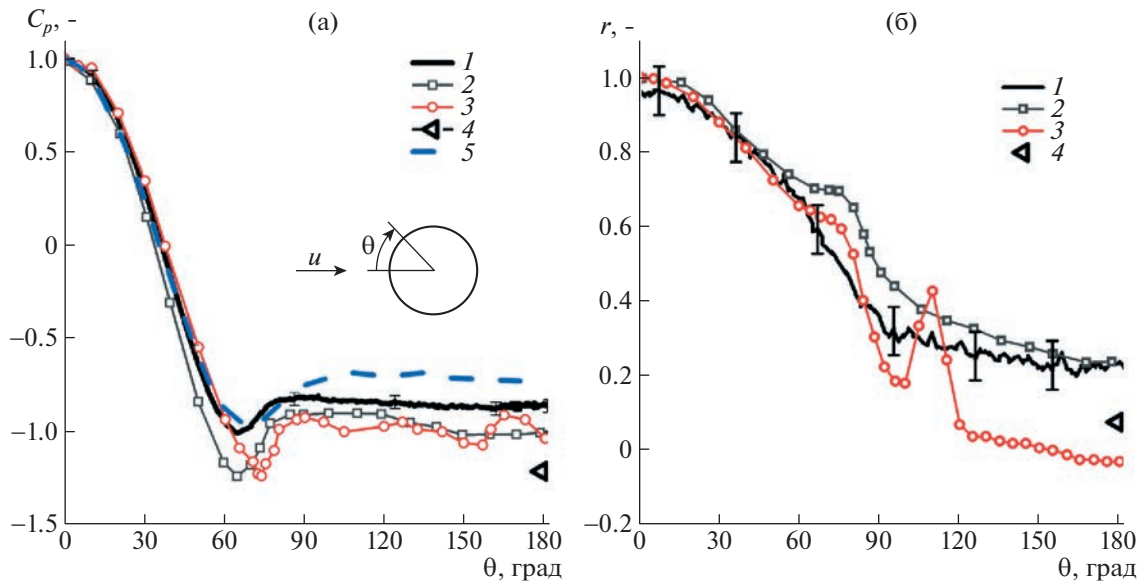


Рис. 3. Распределение коэффициента давления (а) и коэффициента восстановления температуры (б) при поперечном обтекании одиночного кругового цилиндра сжимаемым потоком воздуха: 1 – настоящая работа ($M = 0.365$; $Re_D = 7.9 \times 10^4$); 2 – данные [13] ($M = 0.375$; $Re_D = 7.1 \times 10^4$); 3 – [14] ($M = 0.35$; $Re_D = 1.2 \times 10^5$); 4 – [18] ($M = 0.35$; $Re_D = 10^5$); 5 – [30] ($M = 0.4$; $Re_D = 4 \times 10^3$). Данные [14, 18, 30] преобразованы с помощью изоэнтропических соотношений для определения c_p и r согласно выражениям (1.2) и (1.3).

На рис. 3 нанесены значения C_p и r , полученные в настоящей работе для $M = 0.365$; $Re_D = 7.9 \times 10^4$, и результаты других авторов, полученные для близких значений чисел Маха $M = 0.35$ – 0.4 в диапазоне чисел Рейнольдса $Re_D = 4 \times 10^3$ – 1.2×10^5 . Согласно классификации режимов поперечного обтекания цилиндра несжимаемым потоком, приведенным в работе [28], данный диапазон чисел Рейнольдса соответствует одному режиму обтекания, который характеризуется монотонным ростом абсолютной величины коэффициента донного давления $C_{pB} = |C_p(\theta = 180^\circ)|$ при увеличении Re_D . По диапазону чисел Маха все данные принадлежат режиму бескачкового обтекания цилиндра. В настоящей работе параметры потока наиболее близки к параметрам, реализованным в [13] ($M = 0.375$; $Re_D = 7.1 \times 10^4$). Как видно (рис. 3а), значение $C_p(\theta = 180^\circ) \approx -1.0$, измеренное в [13], отличается от полученного в настоящей работе $C_p(\theta = 180^\circ) = -0.84$, что может быть вызвано влиянием относительного удлинения цилиндра (в настоящей работе $L/D = 5.0$, в [13] $L/D = 20.0$). Например, в работе [29] показано, что с ростом L/D с 1.0 до 10 в случае поперечного обтекания одиночного кругового цилиндра несжимаемым потоком при $Re_D = 10^4$ абсолютная величина $|C_p(\theta = 180^\circ)|$ увеличивается на 14%.

Распределение коэффициента восстановления температуры по поверхности цилиндра качественно совпадает с данными Эккерта (рис. 3б). Также можно отметить тенденцию к снижению коэффициента восстановления температуры в донной области $r(\theta = 180^\circ)$ при увеличении Re_D .

На рис. 4 приведены основные результаты – распределение коэффициента давления C_p и коэффициента восстановления температуры r по поверхности правого по потоку цилиндра при поперечном обтекании пары цилиндров для различных значений относительного расстояния P/D между ними.

Следует отметить (см. рис. 4а,б), что при $P/D = 1.5$ коэффициент давления в области $\theta = 90^\circ$ – 300° имеет выраженное минимальное и максимальное значение. Например, при числе Маха набегающего потока $M = 0.295$ коэффициент давления принимает значения -0.61 и -0.87 , а при $M = 0.365$ его значения составляют -0.63 и -0.87 . Как отмечено в работе [31], такое явление характерно для бистабильного режима и означает нерегулярную смену широкого и узкого

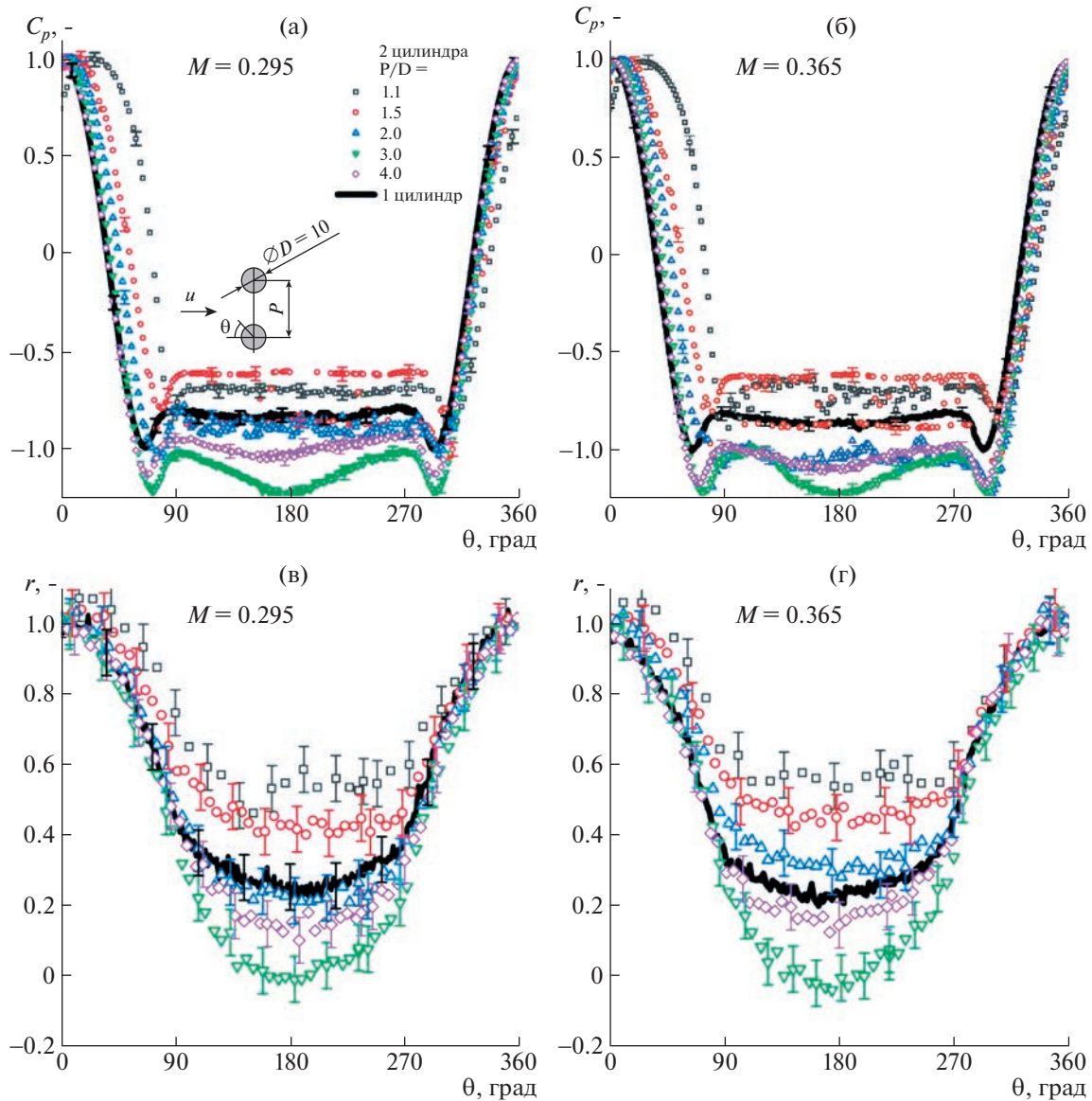


Рис. 4. Распределение коэффициента давления (а, б) и коэффициента восстановления температуры (в, г) в зависимости от относительного расстояния между цилиндрами для параметров потока $M = 0.365$; $Re_D = 7.9 \times 10^4$ (б, г) и $M = 0.295$; $Re_D = 6.4 \times 10^4$ (а, в).

следа за цилиндрами, приводящего к снижению/росту сопротивления. Также при изменении P/D изменялось положение точки торможения потока $C_p \approx 1.0$. Так, например, при обтекании одиночного цилиндра $C_p \approx 1.0$ при $\theta \approx 0^\circ$. При обтекании пары цилиндров значения угла θ точек со значениями $C_p \approx 1.0$ приведены в табл. 3.

Данные результаты отражают ту же тенденцию к смещению точки торможения потока, которая наблюдалась в [31] при поперечном обтекании пары цилиндров несжимаемым потоком ($Re_D = 5.5 \times 10^4$). Согласно [31], при изменении $P/D = 1.1, 1.5, 1.9, 2.4, 4.0$ координата точки $C_p \approx 1.0$ принимала значения $\theta = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ, 5^\circ, 0^\circ$ соответственно.

Как видно из рис. 4в,г, для реализованных значений чисел Маха влияние расстояния P/D на распределение коэффициента восстановления температуры сосредоточено главным образом в области отрыва $\theta > 70^\circ$. Следует отметить, что положение области с $r \approx 1.0$ в случае обтекания

Таблица 3. Изменение угловой координаты точки торможения потока

P/D	1.1	1.5	2.0	3.0	4.0
θ при $M = 0.295$	25.2	14.4	7.2	3.6	0
θ при $M = 0.365$	25.2	10.8	9	5.4	0

пары цилиндров перемещается вслед за перемещением точки $C_p \approx 1.0$ и располагается в ее окрестности. Минимальные же значения r достигаются в окрестности задней критической точки.

На рис. 5а представлено распределение абсолютной величины коэффициента донного давления $C_{pB} = C_p(\theta = 180^\circ)$, а также величина коэффициента восстановления температуры в донной области $r_B = r(\theta = 180^\circ)$ в зависимости от P/D для исследованных значений числа Маха. При этом влияние числа Маха оставалось незначительно (на уровне неопределенности измерения r). Наибольшее снижение коэффициента восстановления температуры относительно значений, полученных при обтекании одиночного цилиндра, наблюдалось при $P/D = 3.0$, тогда как при $P/D = 1.1$ и $P/D = 1.5$ наблюдался рост значений r_B . Следует отметить, что согласно численным расчетам [22], наименьшее значение коэффициента восстановления температуры $r_B \approx -0.3$ при поперечном обтекании пары цилиндров потоком с параметрами $M = 0.40$; $Re_D = 10^3$ достигалось при $P/D = 1.5$ на бистабильном режиме, а наибольшее — $r_B \approx 0.25$ при $P/D = 1.1$ на режиме одиночной вихревой дорожки.

Как отмечалось в работах [14, 17, 18], изменение абсолютной величины C_{pB} , вызванное такими причинами, как: изменение числа Маха, внесение разделительной пластины в область формирования вихря или резонансом частот схода вихрей и стоячих звуковых волн в аэродинамической трубе, сопровождалось изменением коэффициента восстановления температуры r_B . На рис. 5а можно наблюдать очевидную корреляцию между значением C_{pB} и r_B , а именно: снижение C_{pB} ведет к снижению r_B и наоборот. На рис. 5б для оценки масштаба эффекта Эккерта–Вайса приведена величина снижения температуры стенки в задней критической точке отно-

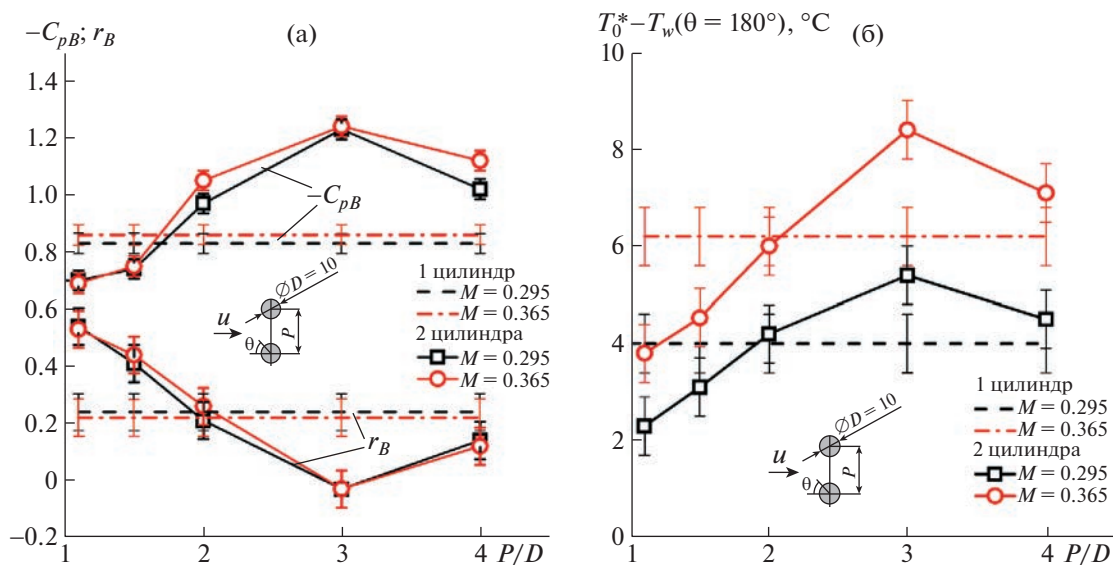


Рис. 5. Коэффициент донного давления $C_{pB} = C_p(\theta = 180^\circ)$ и коэффициент восстановления температуры в донной области $r_B = r(\theta = 180^\circ)$ (а); разность между температурой торможения и температурой поверхности цилиндра в задней критической точке $T_0^* - T_w(\theta = 180^\circ)$ (б) в зависимости от относительного расстояния между цилиндрами P/D для параметров потока $M = 0.365$; $Re_D = 7.9 \times 10^4$ и $M = 0.295$; $Re_D = 6.4 \times 10^4$. Значение C_{pB} при $P/D = 1.5$ определено как среднее между максимальной и минимальной величиной.

сительно температуры торможения набегающего потока для всех режимов, реализованных в настоящей работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние расстояния между двумя поперечно обтекаемыми круговыми цилиндрами на распределение температуры и статического давления по их поверхности. Относительное расстояние между осями цилиндров изменялось в диапазоне, позволяющем охватить режимы интерференции, характерные для данного типа расположения цилиндров. Исследования проводились при числах Маха набегающего потока $M = 0.295$ и 0.365 и числах Рейнольдса $Re_D = 6.4 \times 10^4$ и 7.9×10^4 соответственно. Получено распределение коэффициентов давления и восстановления температуры (характеризующего энергоразделение) на поверхности одного из цилиндров. Показано, что наибольшее снижение коэффициента восстановления температуры относительно значений, полученных при обтекании одиночного цилиндра, происходит на режиме спаренной вихревой дорожки при $P/D = 3.0$, тогда как при $P/D = 1.1$ и $P/D = 1.5$ (режим одиночной вихревой дорожки и бистабильный режим соответственно) наблюдался рост значений r_B .

Таким образом, получено экспериментальное подтверждение теоретическим результатам [22], а именно возможность повышения эффекта Эккерта–Вайса на определенных режимах обтекания пары круговых цилиндров.

В работе применялись элементы системы панорамной диагностики до- и сверхзвуковых газовых потоков, закупленной по Программе развития МГУ (идентификатор № 470040072). Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00443, <https://rscf.ru/project/22-29-00443/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eckert E.R.G.* Energy separation in fluid streams // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 1986. V. 13. № 2. P. 127–143.
[https://doi.org/10.1016/0735-1933\(86\)90053-9](https://doi.org/10.1016/0735-1933(86)90053-9)
2. *Eiamsa-ard S., Promvong P.* Review of Ranque–Hilsch effects in vortex tubes // *Renew. Sust. Energ. Rev.* 2008. V. 2. № 7. P. 1822–1842.
<https://doi.org/10.1016/j.rser.2007.03.006>
3. *Raman G., Srinivasan K.* The powered resonance tube: From Hartmann’s discovery to current active flow control applications // *Prog. Aerosp. Scie.* 2009. V. 45. № 4–5. P. 97–123.
<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2009.05.001>
4. *Леонтьев А.И.* Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // *ДАН.* 1997. Т. 354. № 4. С. 475–477.
5. *Golubkina I.V., Osipov A.N.*, Compressible gas-droplet flow and heat transfer behind a condensation shock in an expanding channel // *Int. J. Therm. Sci.* 2022. V. 179. P. 107576.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2022.107576>
6. *Leontiev A.I., Zditovets A.G., Vinogradov Y.A., Strongin M.M., Kiselev N.A.* Experimental investigation of the machine-free method of temperature separation of air flows based on the energy separation effect in a compressible boundary layer // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2017. V. 88. P. 202–219.
<https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2017.05.021>
7. *Вигдорovich И.И., Леонтьев А.И.* Энергоразделение газов с малыми и большими числами Прандтля // *Изв. РАН. МЖГ.* 2013. № 6. С. 117–134.
8. *Vinogradov Y.A., Zditovets A.G., Leontiev A.I., Popovich S.S., Strongin M.M.* Experimental research of shock wave processes influence on machineless gas flow energy separation effect // *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. V. 891. № 1. P. 012080.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012080>
9. *Макаров М.С., Макарова С.Н.* Эффективность энергоразделения при течении сжимаемого газа в плоском канале // *Теплофизика и аэромеханика.* 2013. Т. 20. № 6. С. 777–787.
10. *Leontiev A.I., Zditovets A.G., Kiselev N.A., Vinogradov Y.A., Strongin M.M.* Experimental investigation of energy (temperature) separation of a high-velocity air flow in a cylindrical channel with a permeable wall // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2019. V. 105. P. 206–215.
<https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2019.04.002>
11. *Khazov D.E., Leontiev A.I., Zditovets A.G., Kiselev N.A., Vinogradov Y.A.* Energy separation in a channel with permeable wall // *Energy.* 2022. V. 239. P. 122427.
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.122427>

12. Бирюк В.В., Веретенников С.В., Гурьянов А.И., Пиралишвили Ш.А. Вихревой эффект. Технические приложения. М: ООО “Научтехлитиздат”, 2014. 216 с. ISBN:978-5-93728-143-2.
13. Eckert E., Weise W. Messungen der temperaturverteilung auf der oberfläche schnell angestromter unbeheizter körper // Forsch. Geb. Ing. Wesen. 1942. V. 13. № 6. P. 246–254.
<https://doi.org/10.1007/BF02585343>
14. Ryan L.F. Experiments on Aerodynamic Cooling Experiments on aerodynamic cooling. PhD thesis. Swiss Federal Institute of Technology. Zurich. 1951.
<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000092033>
15. Popovich S.S., Kiselev N.A., Zditovets A.G., Vinogradov Y.A. Experimental study of the adiabatic wall temperature of a cylinder in a supersonic cross flow // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 2039. № 1. P. 012029.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2039/1/012029>
16. Попович С.С., Леонтьев А.И., Луцик В.Г., Макарова М.С. Коэффициент восстановления температуры в сжимаемом турбулентном пограничном слое // Теплофиз. выс. темп. 2022. Т. 60. № 3. С. 455–480.
<https://doi.org/10.31857/S0040364422030115>
17. Thomann H. Measurements of the recovery temperature in the wake of a cylinder and of a wedge at Mach numbers between 0.5 and 3. Tech. Rep. Report 84, National Aeronautical Research Institute (FFA), Sweden, 1959.
18. Kurosaka M., Gertz J.B., Graham J.E., Goodman J.R., Sundaram P., Riner W.C., Kuroda H., Hankey W.L. Energy separation in vortex street // J. Fluid Mech. 1987. V. 178. P. 1–29.
<https://doi.org/10.1017/S0022112087001095>
19. Kulkarni K.S., Goldstein R.J. Energy separation in the wake of a cylinder: Effect of Reynolds number and acoustic resonance // Int. J. Heat Mass Transf. 2009. V. 52. № 17–18. P. 3994–4000.
<https://doi.org/10.1016/j.jheatmasstransfer.2009.03.024>
20. Burazer J. Energy separation in transient and steady-state flow across the cylinder // J. Theor. Appl. Mech. 2018. V. 45. № 1. P. 83–94.
<https://doi.org/10.2298/TAM171130006B>
21. Alekseyuk A.I., Osiptsov A.N. Direct numerical simulation of energy separation effect in the near wake behind a circular cylinder // Int. J. Heat Mass Transf. 2018. V. 119. P. 665–677.
<https://doi.org/10.1016/j.jheatmasstransfer.2017.11.133>
22. Alekseyuk A.I. The Eckert–Weise effect and energy separation under the flow interference behind side-by-side cylinders // J. Fluid Mech. 2021. V. 915. P. A95.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2021.128>
23. Алексюк А.И. Области пониженной полной энтальпии в ближнем следе за телом в потоке вязкого газа // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 69–80.
<https://doi.org/10.31857/S0568528122010017>
24. Alekseyuk A.I. Influence of vortex street structure on the efficiency of energy separation // Int. J. Heat Mass Transf. 2019. V. 135. P. 284–293.
<https://doi.org/10.1016/j.jheatmasstransfer.2019.01.103>
25. Zdravkovich M.M. The effects of interference between circular cylinders in cross flow // J. Fluids Struct. 1987. V. 1. № 2. P. 239–261.
[https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(87\)90355-0](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(87)90355-0)
26. Shapiro A.H. The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. New York: The Ronald Press Company. Vol. 1. 1953.
27. ГОСТ Р 54500.3-2011 / Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008 <https://docs.cntd.ru/document/1200088855>
28. Williamson C.H.K. Vortex Dynamics in the Cylinder Wake // Annu. Rev. Fluid Mech. 1996. V. 28. № 1. P. 477–539.
<https://doi.org/10.1146/annurev.fl.28.010196.002401>
29. Szepessy S., Bearman P.W. Aspect ratio and end plate effects on vortex shedding from a circular cylinder // J. Fluid Mech. 1992. V. 234. № 1. P. 191.
<https://doi.org/10.1017/S0022112092000752>
30. Nagata T., Noguchi A., Kusama K., Nonomura T., Komuro A., Ando A., Asai K. Experimental investigation on compressible flow over a circular cylinder at Reynolds number of between 1000 and 5000 // J. Fluid Mech. 2020. V. 893. P. A13.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2020.221>
31. Mahbub Alam M., Moriya M., Sakamoto H. Aerodynamic characteristics of two side-by-side circular cylinders and application of wavelet analysis on the switching phenomenon // J. Fluids Struct. 2003. V. 18 № 3–4. P. 325–346.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2003.07.005>

УДК 532.59:539.3

ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕЧЕНИЯ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

© 2023 г. Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.

После доработки 20.12.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Исследовано поведение ледяного покрова на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием движущейся прямолинейно с постоянной скоростью области давления при наличии потока со сдвигом скорости. Течение жидкости не потенциально. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной с учетом равномерного сжатия. Движение нагрузки может происходить под произвольным углом к направлению течения. Предполагается, что в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, прогиб льда является установившимся. Использован метод преобразования Фурье в рамках линейной теории волн. Исследованы критические скорости и прогиб ледяного покрова в зависимости от градиента скорости течения, направления движения и коэффициента сжатия.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, сдвиг скорости, движущаяся нагрузка, критическая скорость

DOI: 10.31857/S0568528123700044, **EDN:** NTTSET

Ледяной покров на поверхности рек, озер, морей и океана часто используется для создания дорог, взлетных полос, причалов и плавающих платформ для разведочного бурения. Для безопасности работ на льду необходимо изучать закономерности его поведения при механическом воздействии.

В настоящее время задача о поведении ледяного покрова под действием прямолинейно движущейся нагрузки изучена достаточно хорошо при ее стационарном и нестационарном движении. Имеется значительное число работ о действии различных физических факторов на характер распространения изгибно-гравитационных волн в плавающем ледяном покрове [1–9]. Однако влияние течения со сдвигом скорости изучено недостаточно. Имеется несколько работ на эту тему [10–15], в которых рассмотрена двумерная задача для линейного профиля скорости течения. В этом случае возмущения в жидкости носят потенциальный характер. Достаточно хорошо изучено воздействие сдвига скорости течения на поверхностные волны (см. [16–23] и имеющуюся в них библиографию). В трехмерном случае возмущения не потенциальны, носят вихревой характер [23].

Задача о влиянии сдвигового течения на изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове в трехмерной постановке находится на начальной стадии изучения. В [24] исследована трехмерная начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием импульсной и периодической нагрузки осесимметричного вида при наличии сдвигового потока. В работе [25] решена задача Коши–Пуассона для случая, когда имеются линейный сдвиг скорости по двум направлениям и неравномерное сжатие ледяного покрова.

В настоящей работе приведено решение задачи о поведении плавающего ледяного покрова под действием прямолинейно с постоянной скоростью движущейся нагрузки при наличии течения с линейным сдвигом скорости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный ледяной покров, плывущий на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H с вертикальным сдвигом скорости. Ледяной покров моделируется упругой бесконечной пластиной постоянной толщины. В подвижной декартовой системе координат $Ox\eta z$, связанной с пластиной, с центром O на верхней границе жидко-

сти, осью Ox , направленной противоположно основному течению и осью Oz , направленной вертикально вверх, вектор скорости жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (U(z) + u, v, w), \quad U(z) = \gamma z$$

где γ — константа, основное течение жидкости $U(z)$ не потенциально, имеет постоянную завихренность, u, v, w — возмущенные компоненты скорости, малые по сравнению с основным течением. Предполагается, что заданное внешнее давление p_0 равномерно распределено по прямоугольной области шириной $2b$ и длиной $2a$. Область давления движется с постоянной скоростью V под углом ψ к оси Ox . Давление внешней нагрузки равно $p_0 = gM/(4ab)$, где M — масса движущегося тела, g — ускорение свободного падения. Данная нагрузка моделирует судно на воздушной подушке.

Рассмотрим движение жидкости. Скорость течения жидкости удовлетворяет уравнениям Эйлера и неразрывности

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P/\rho - g\mathbf{i}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$P = -\rho g z + p$$

Здесь d/dt — полная производная по времени, P — гидродинамическое давление, которое складывается из гидростатической части и возмущенного гидродинамического давления p , ρ — плотность жидкости, $\mathbf{i}_z$ — единичный орт оси Oz . Прогиб ледяного покрова $\eta(x, y, t)$ описывается уравнением изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа-Лява

$$D\Delta^2\eta + Q\Delta\eta + \rho_0 h d^2\eta/dt^2 = -\rho g\eta + p(x, y, 0, t) - p_0(x, y, t), \quad (1.2)$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины, E — модуль Юнга, ρ_0, h — плотность и толщина льда, ν — коэффициент Пуассона, Q — сжимающие усилия в пластине.

Ставятся граничные условия: условие непротекания на дне

$$w(x, y, -H, t) = 0 \quad (1.3)$$

а на верхней границе жидкости кинематическое условие

$$w(x, y, 0, t) = d\eta/dt \quad (1.4)$$

и динамическое условие (1.2). Условие излучения ставится в следующем виде: перед нагрузкой распространяются только те волны, групповая скорость которых больше скорости нагрузки.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение строится аналогично работе [21]. Введем безразмерные переменные, параметры и функции по формулам

$$(x', y', z', H', b') = (x, y, z, H, b)/a, \quad t' = t\sqrt{g/a}$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{ag}}, \quad S = \gamma\sqrt{a/g}, \quad \beta = \frac{D}{\rho ga^4}, \quad q = \frac{Q}{\rho ga^2}, \quad \chi = \frac{\rho_0 h}{\rho a}$$

$$(U', u', v', w') = (U, u, v, w)/\sqrt{ag}, \quad \eta' = \eta/a, \quad (p', p'_0) = (p, p_0)/(\rho ga)$$

Штрихи далее опускаем. Поскольку мы ищем стационарное решение в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, то в исходной системе координат, связанной с ледяной пластиной, возмущенные скорости движения жидкости имеют вид

$$(u, v, w) = (u(\mathbf{r}_1, z), v(\mathbf{r}_1, z), w(\mathbf{r}_1, z)), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{F}t$$

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{F} = (F \cos \psi, F \sin \psi)$$

В предположении малости возмущенных скоростей по сравнению с основным течением уравнения (1.1) линеаризуются. Применяем преобразование Фурье по переменным x, y . Известные функции u, v, w, η, p ищем в виде

$$(u, v, w)(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y),$$

$$\eta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

$$p(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

Функцию $p_0(\mathbf{r}_1)$ также представим в виде

$$p_0(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

Тогда из системы уравнений (1.1) получаем

$$\begin{aligned} i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{u} + S\bar{w} &= -ik_x \bar{p} \\ i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{v} &= -ik_y \bar{p} \\ i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{w} &= -\bar{p}_z \\ ik_x \bar{u} + ik_y \bar{v} + \bar{w}_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Умножим первое уравнение на ik_x , второе уравнение на ik_y и сложим. С помощью четвертого уравнения находим

$$-i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + ik_x S \bar{w} = k^2 \bar{p}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (2.2)$$

Дифференцируем по z и получаем с учетом третьего уравнения

$$i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - k^2 \bar{w} \right) = 0$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - k^2 \bar{w} = 0 \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) с условием (1.3) на дне записывается в виде

$$\bar{w}(\mathbf{k}, z) = kA(\mathbf{k}) \operatorname{sh} k(z + H)$$

Подставляем это выражение в уравнения (2.1), (2.2) и находим остальные компоненты скорости и давление

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{k}, z) &= iA(\mathbf{k}) \left(k_x \operatorname{ch} k(H + z) + \frac{Sk_y^2 \operatorname{sh} k(z + H)}{k(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})} \right) \\ \bar{v}(\mathbf{k}, z) &= iA(\mathbf{k}) \left(k_y \operatorname{ch} k(H + z) - \frac{Sk_x k_y \operatorname{sh} k(z + H)}{k(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})} \right) \\ \bar{p}(\mathbf{k}, z) &= -i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})A(\mathbf{k}) \operatorname{ch} k(H + z) + ik_x SA(\mathbf{k}) \operatorname{sh} k(H + z)/k \end{aligned}$$

Из условия (1.4) следует

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{F} \bar{\eta} = kA(\mathbf{k}) \operatorname{sh} kH$$

Тогда уравнение движения пластины (1.2) записывается в виде

$$[\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 - k_x S(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})/k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 \operatorname{cth} kH/k] \bar{\eta} = -\bar{p}_0$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{r}_1) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} k \operatorname{th} kH dk_x dk_y}{[(\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2)k - Sk_x(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}/k)] \operatorname{th} kH - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/0}^{\pi} \int_{-\pi/0}^{\pi} \frac{\bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} k^2 \operatorname{th} kH dk d\alpha}{[(\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2)k - S \cos \alpha(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})] \operatorname{th} kH - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где (k, α) — полярные координаты в k -плоскости.

Для того, чтобы картина волн была стационарна, компонента скорости источника, нормальная к гребню волны, должна быть равна фазовой скорости гребня [1]. В размерных переменных получаем $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})/k = \omega/k$. Поэтому функция в знаменателе формулы (2.4) представляет собой дисперсионное соотношение изгибно-гравитационных волн в ледяной пластине, вызванных движением нагрузки, при наличии течения со сдвигом скорости, где ω заменено на $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})$.

Теперь удобно перейти в систему координат Ox_1y_1z , движущуюся вместе с нагрузкой, повернутую относительно исходной системы координат на угол ψ , с осью Ox_1 , направленной вдоль линии движения, осью Oy_1 – перпендикулярной к ней. В этой системе координат получаем

$$\begin{aligned}\sigma &= \alpha - \psi, \quad \bar{p}_0(\mathbf{k}) = 4p_0 \frac{\sin(k \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma)}{k^2 \cos \sigma \sin \sigma} \\ \eta(x_1, y_1) &= -\frac{p_0}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{f_1(k, \sigma)}{f(k, \sigma)} e^{ik(x_1 \cos \sigma + y_1 \sin \sigma)} dk d\sigma \\ f(k, \sigma) &= [\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi k^2 F^2 \cos^2 \sigma - SF \cos(\sigma + \psi) \cos \sigma] \text{th} k H - k F^2 \cos^2 \sigma \\ f_1(k, \sigma) &= \frac{\sin(k \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma) \text{th} k H}{k \sin \sigma \cos \sigma}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Из полученных ранее результатов в отсутствие течения известно, что существует критическое значение скорости, равное минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн. При скорости движения нагрузки, меньшей критической, волны в ледяном покрове не образуются, деформации льда носят локальный характер вблизи области нагрузки. При наличии течения со сдвигом скорости также существует критическая скорость и находится аналогично работе [4]. Преобразуем уравнение $f(k, \sigma) = 0$ к виду

$$\begin{aligned}& [2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - \chi F^2 k^2 (1 + \cos 2\sigma) - SF \cos \psi (1 + \cos 2\sigma) + SF \sin \psi \sin 2\sigma] \text{th} k H - \\ & - k F^2 (1 + \cos 2\sigma) = G(k, \psi) - \cos 2\sigma [F^2 k (1 + \chi k \text{th} k H) + SF \text{th} k H \cos \psi] + SF \text{th} k H \sin \psi \sin 2\sigma = 0 \quad (2.6) \\ & G(k, \psi) = [2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - \chi F^2 k^2 - SF \cos \psi] \text{th} k H - F^2 k\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\varphi &= \arcsin \left(\frac{SF \text{th} k H \sin \psi}{B(k, \psi)} \right) \\ B(k, \psi) &= \sqrt{S^2 F^2 \text{th}^2 k H \sin^2 \psi + (F^2 k (1 + \chi k \text{th} k H) + SF \text{th} k H \cos \psi)^2}\end{aligned}$$

Тогда (2.6) можно записать в виде

$$G(k, \psi) - B(k, \psi) \cos(2\sigma + \varphi) = 0$$

Отсюда находим

$$\cos(2\sigma + \varphi) = \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \quad (2.7)$$

Чтобы решение существовало, необходимо, чтобы

$$\left| \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \right| \leq 1$$

Возводим в квадрат, преобразуем и в результате получаем: критическое значение числа Фруда F_* определяется как минимум функции $\Phi(k)$

$$\Phi(k) = 2d(k) \frac{\sqrt{S^2 \text{th}^2 k H + 4d(k)d_1(k)\text{th} k H - S \text{th} k H \cos \psi}}{S^2 \text{th}^2 k H \sin^2 \psi + 4d(k)d_1(k)}$$

$$d(k) = \beta k^4 - qk^2 + 1, \quad d_1(k) = k(1 + \chi k \text{th} k H)$$

$$F_* = \Phi(k_*), \quad \Phi'(k_*) = 0$$

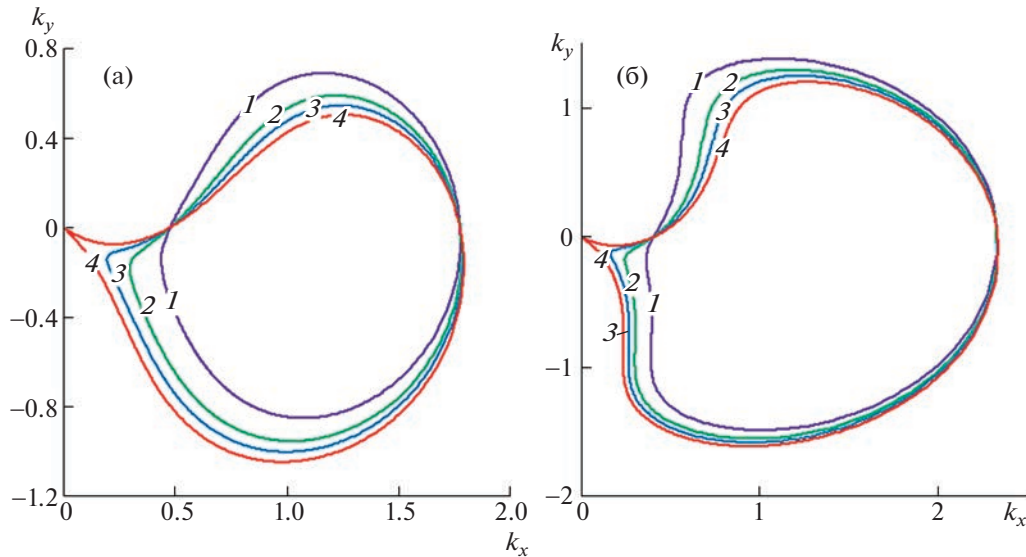


Рис. 1. Кривые волновых чисел C_k при $\psi = \pi/2$ в случаях отсутствия сжатия $\bar{Q} = 0$ (а) и $\bar{Q} = 1.5$ (б): 1–4 – $S = 0.3, 0.7, 0.9, 1.1$.

При $F > F_*$ функция $f(k, \sigma)$ имеет нули $k_1 = k_1(\sigma)$ и $k_2 = k_2(\sigma)$, $k_1 < k_2$ в некоторых областях значений угла σ . Поэтому при этих значениях угла σ интеграл по k в выражении (2.5) является интегралом в смысле главного значения. Контур интегрирования деформируется таким образом, чтобы выполнить условие излучения. Известно, что групповая скорость изгибно-гравитационных волн больше их фазовой скорости для коротких волн и меньше для длинных волн. Короткие волны соответствуют упругой ветви дисперсионной кривой, а длинные волны – гравитационной ветви. Поэтому при $\cos \sigma > 0$ корень k_1 обходится сверху, а корень k_2 – снизу, при $\cos \sigma < 0$ – наоборот.

Картины гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле строятся с помощью асимптотических методов аналогично тому, как в случае отсутствия течения [1, 26]. Положения гребней волн в дальнем поле определяются с помощью кривой волновых чисел C_k в k -плоскости, удовлетворяющей уравнению $f(k, \sigma) = 0$. Кривые C_k удобно строить с помощью формулы (2.7). Примеры вида кривых C_k изображены на рис. 1 при $\psi = \pi/2$, $S = 0.3, 0.7, 0.9, 1.1$, в случаях отсутствия сжатия $Q = 0$ (а) и $Q/\sqrt{\rho g D} = 1.5$ (б).

Стационарная картина волн содержит только те волны, волновые числа которых лежат на кривой C_k . Из любой точки $P_0 = (k_0, \sigma_0)$ на C_k волны излучаются в направлении, нормальном к C_k и соответствующем возрастанию ω . Вертикальное смещение ледяного покрова η в дальнем поле от этой точки выражается формулой

$$\eta(\mathbf{r}_1) \approx -\frac{f_1(k_0, \sigma_0)}{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_{P_0} \right]^{-1} \left(\frac{2\pi}{\kappa_0 r_1} \right)^{1/2} e^{i(k_0 r_1 \cos(\sigma_0 - \theta) + \mu)} \quad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{r}_1 = (r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta)$; κ_0 – величина кривизны кривой C_k в точке P_0 ; $\partial/\partial n$ – дифференцирование по нормали к C_k , соответствующей возрастанию ω ; $\mu = \pi/4$, если кривая C_k выпукла в этой точке и $3\pi/4$ в противном случае. Гребни волн являются линиями постоянной фазы $k_0 r_1 \cos(\sigma_0 - \theta) = K$, K – константа. Таким образом, каждой точке P_0 на C_k соответствует точка на волновом гребне с полярными координатами в (x_1, y_1) -плоскости

$$\left(\frac{K}{k_0 \cos(\sigma_0 - \theta)}, \theta \right)$$

Если кривая волновых чисел C_k имеет точку перегиба, то соответствующая линия распространения волны L является каустикой, и линии гребней имеют заострения в точке их пересечения с линией L [1, 26]. В точке перегиба константа K меняется скачком, так как меняется сдвиг фазы μ в формуле (2.8).

С ростом параметра S кривая C_k приближается к началу координат в k -плоскости. При $S > S_*$ кривая C_k проходит через начало координат, где критическое значение параметра S_* находится из условия

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \right| - 1 = 0$$

При $S = S_*$ касательные к верхней и нижней ветвям кривой C_k при $k = 0$ совпадают. При $S > S_*$ касательные к кривой C_k в начале координат составляют некоторый угол с k_x -осью. Существует область за нагрузкой, в которой волны не распространяются, так как нет нормалей к кривой C_k в этих направлениях.

Из формулы (2.8) следует, что амплитуда волн в дальнем поле в общем случае порядка $O(r^{-1/2})$ и пропорциональна $\kappa_0^{-1/2}$. Таким образом, относительно плоские участки кривой C_k с малой кривизной дают большие амплитуды волн в соответствующих направлениях, поскольку все точки этого участка кривой C_k излучают волны примерно в одном направлении [1]. Из рис. 1 видно, что в случае $\bar{Q} = 0$ такие направления находятся за нагрузкой под некоторым углом к оси Ox . В случае $\bar{Q}/\sqrt{\rho g D} = 1.5$ такие участки дают большие амплитуды в отрицательной части оси Ox , если $S < S_*$. Асимптотика амплитуд изгибно-гравитационных волн в дальнем поле в каустических направлениях дана в работе [1].

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проводились для ледяного покрова при следующих входных параметрах задачи: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922.5$ кг/м³, $\nu = 0.3$, $a = 20$ м, $b = 10$ м, толщина льда $h = 1$ м, глубина жидкости $H = 100$ м, скорость движения нагрузки $V = 20$ м/с. Сжимающие усилия в пластине заданы в виде $Q = \bar{Q}\sqrt{\rho g D}$, $\bar{Q} = 0$ и 1.5.

На рис. 2 приведены зависимости критических скоростей изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове от направления движения нагрузки при различных значениях параметра сдвига S и $\bar{Q} = 0, 1.5$. Из графиков видно, что минимальные критические скорости достигаются при $\psi = 0$, когда нагрузка движется противоположно течению жидкости. Максимальные критические скорости наблюдаются при $\psi = \pi$, когда нагрузка движется по течению. При $\psi = \pi/2$ критическая скорость при любых значениях параметра S близка к ее значению в отсутствие течения. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются. Видно, что сдвиг скорости, направление движения и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн.

На рис. 3а показаны зависимости прогиба ледяного покрова вдоль линии движения нагрузки $\eta(x_1, 0)$ от координаты x_1 в отсутствие сжатия $\bar{Q} = 0$ при $S = 0$, а также $S = 0.4$ и $\psi = 0, \pi$. При наличии сдвига скорости и $\psi = 0$ нагрузка движется против течения, при этом волны перед нагрузкой укорачиваются, встречая сопротивление, а волны за нагрузкой удлиняются, что объясняется двумя причинами. С одной стороны, они сносятся потоком. С другой стороны, выполаживание волн за нагрузкой для изгибно-гравитационных волн при увеличении разности между скоростью нагрузки и критической скоростью наблюдается и в отсутствие течения [1]. При $\psi = \pi$ нагрузка движется по течению, в этом случае волны перед нагрузкой удлиняются, а после нагрузки укорачиваются, амплитуды волн значительно выше, чем в предыдущих случаях, т.к. скорость движения нагрузки ближе к критической скорости.

На рис. 3б приведены зависимости прогиба ледяного покрова на линии движения от координаты x_1 в отсутствие течения $S = 0$, при $\bar{Q} = 0$ и $\bar{Q} = 1.5$. Видно, что при увеличении коэффициента сжатия льда прогиб за нагрузкой значительно увеличивается, а перед нагрузкой уменьшается.

На рис. 4 изображены картины гребней изгибно-гравитационных волн при $\bar{Q} = 0$, $\psi = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ и различных значений параметра сдвига S . При $\psi = 0$ изменение картин волновых гребней аналогично тому, как меняются картины гребней при увеличении скорости нагрузки в

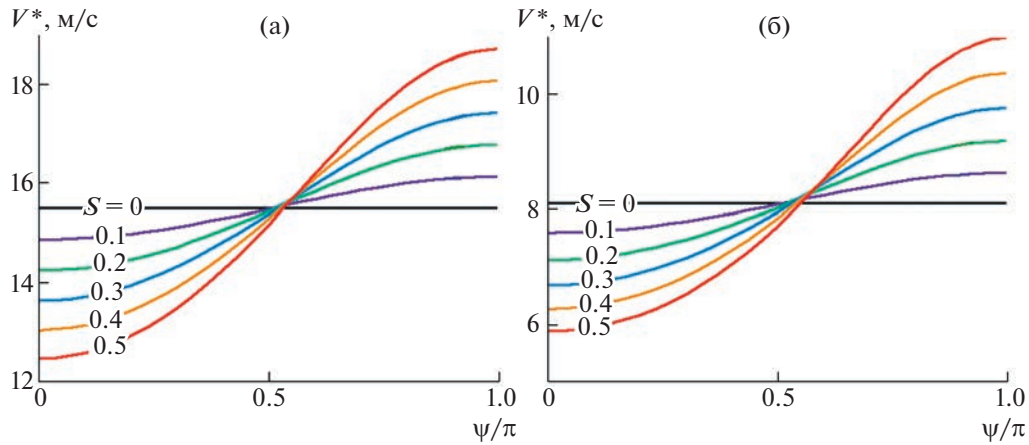


Рис. 2. Критические скорости изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове при $h = 1$ м и различных значениях параметра сдвига S : а, б – $\bar{Q} = 0, 1.5$.

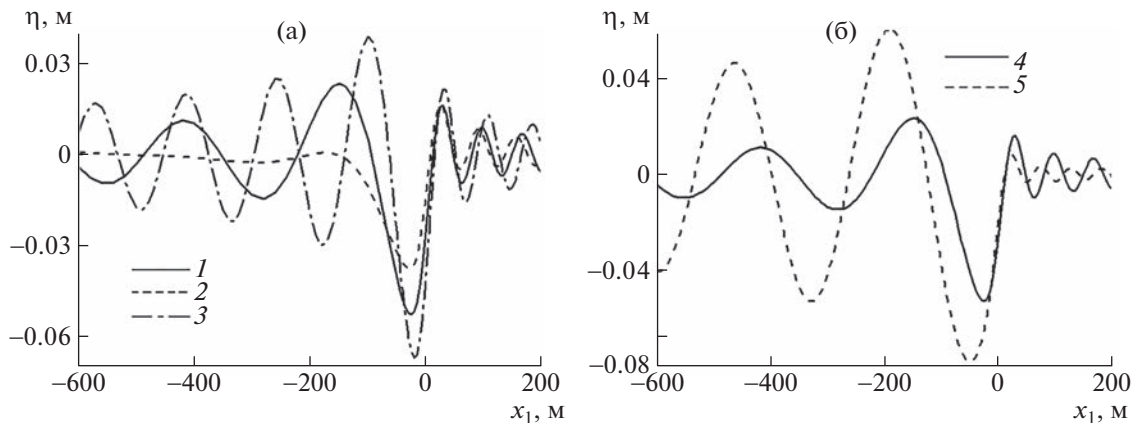


Рис. 3. Зависимость прогиба ледяного покрова от координаты x_1 : (а) – $\bar{Q} = 0$, 1 – $S = 0$, 2, 3 – $(S, \psi) = (0.4, 0)$, $(0.4, \pi)$; (б) – $S = 0$, 4, 5 – $\bar{Q} = 0, 1.5$.

отсутствие течения [1]. При увеличении параметра S волны за нагрузкой становятся длиннее, амплитуда их меньше, появляются каустики и заострения. При $S > S_*$ кривая S_k проходит через начало координат, и волн за нагрузкой нет. Этому случаю соответствуют картины волновых гребней в крайнем правом столбце рис. 4 при $\psi < 2\pi/3$.

При $\psi = \pi/6$ картины волновых гребней аналогичны картинам при $\psi = 0$ при тех же значениях параметра S , но симметрия слегка нарушена. При дальнейшем увеличении угла ψ симметрия нарушается еще сильнее. Например при $\psi = \pi/3$, $S = 0.4$ и $\psi = \pi/2$, $S = 0.7$ заострения наблюдаются только при $y_1 > 0$.

При фиксированном значении угла $\psi \neq 0, \pi$ симметрия сильнее нарушается с ростом параметра S . С увеличением угла ψ критическая скорость изгибно-гравитационных волн растет, разница между скоростью нагрузки и критической уменьшается. Поэтому при $\psi = 2\pi/3$ каустики и заострения линий гребней наблюдаются только при больших значениях параметра S .

На рис. 5 представлены трехмерные графики прогиба ледяного покрова в ближнем поле при $\bar{Q} = 0$ и различных значениях угла ψ и параметра сдвига S . При $\psi = 0$ и $S = 0.4$ (рис. 5а) волны за нагрузкой очень длинные и малой амплитуды, близкой к нулю. При $\psi = \pi/3$ и $S = 0.4$ (рис. 5б) волны за нагрузкой длинные, симметрия нарушена. На рис. 5в ($\psi = \pi/3$, $S = 0.4$) и 5г ($\psi = 2\pi/3$, $S = 1$) волновое движение ярко выражено во всех областях.

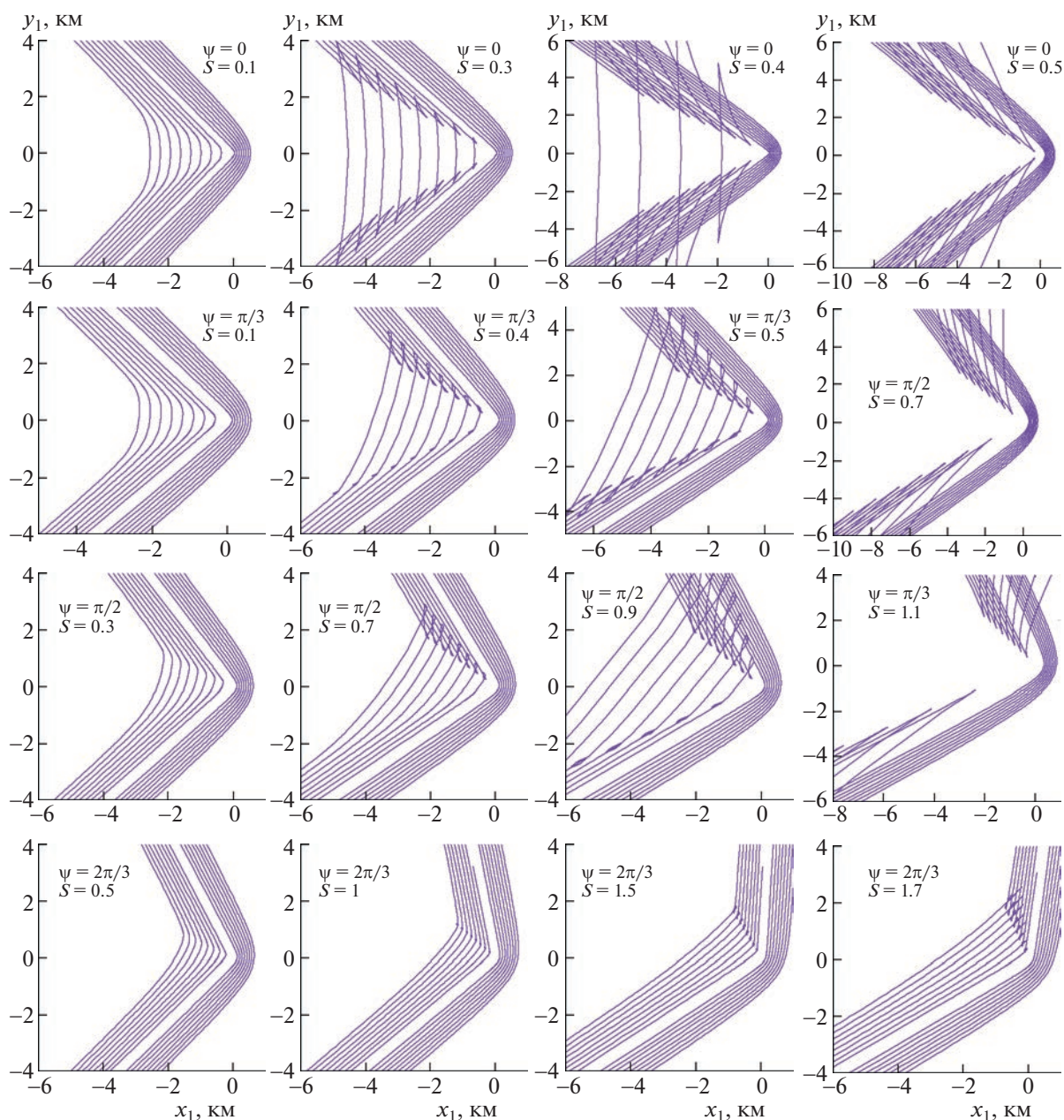


Рис. 4. Картины гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле при $\bar{Q} = 0$, $\psi = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ и различных значениях параметра S .

Как указано выше, сжатие льда оказывает сильное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн, при $\bar{Q} = 1.5$ они почти в два раза меньше, чем при $\bar{Q} = 0$. Скорость нагрузки $V = 20$ м/с значительно выше критических скоростей при $\bar{Q} = 1.5$, и гребни изгибно-гравитационных волн имеют заострения и каустики даже для $S = 0$. Если скорость нагрузки уменьшить, например, до $V = 12$ м/с, то картины гребней волн в дальнем поле будут похожи на те, что при $\bar{Q} = 0$.

Картина волновых гребней в дальнем поле (а) и прогиб ледяного покрова в ближнем поле (б) при $\bar{Q} = 1.5$, $V = 20$ м/с, $\psi = 0$, $S = 0.1$ изображены на рис. 6. Трехмерные графики ледяного покрова при $\bar{Q} = 1.5$, $V = 20$ м/с и различных значениях параметров ψ и $S < S_*$ визуально типичны

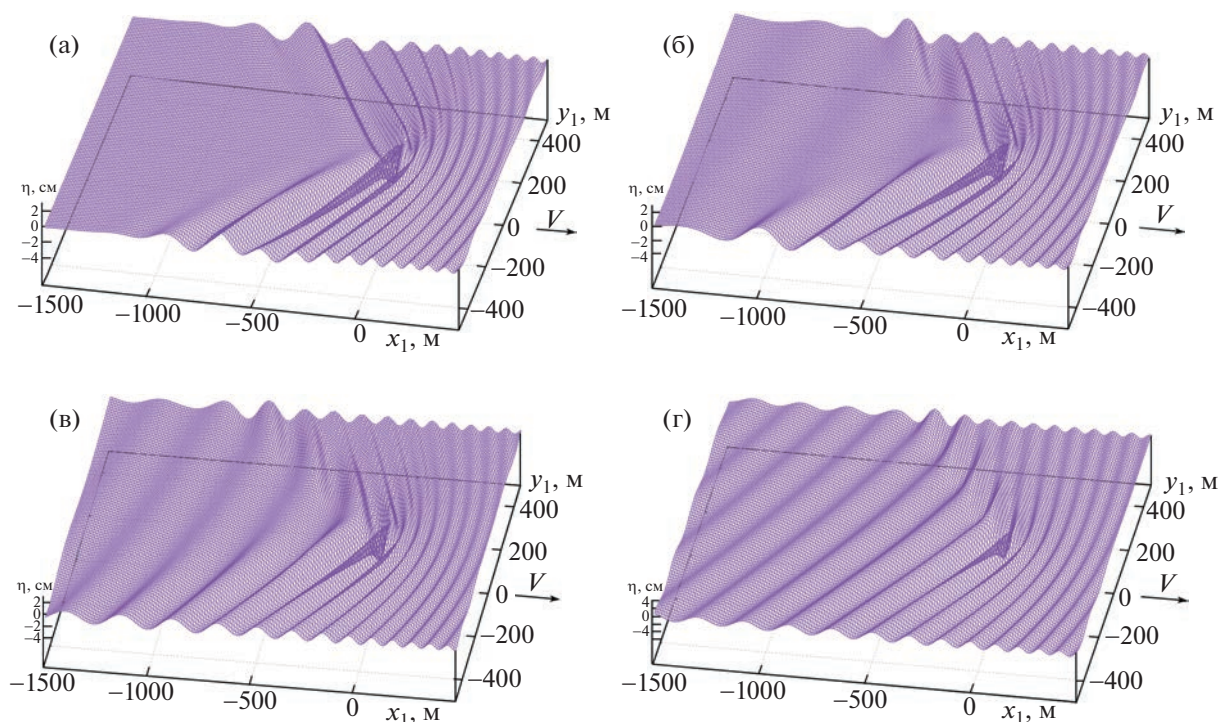


Рис. 5. Вертикальные смещения ледяного покрова при $\bar{Q} = 0$: (а–г) – $(S, \psi) = (0.4, 0), (0.4, \pi/3), (0.4, \pi/2), (1, 2\pi/3)$.

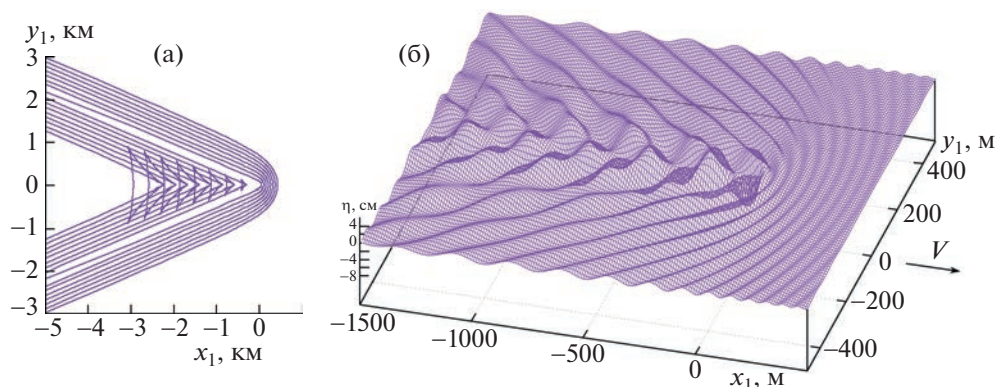


Рис. 6. Картина гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле (а) и вертикальные смещения ледяного покрова в ближнем поле (б) при $\bar{Q} = 1.5, \psi = 0, S = 0.1$.

и похожи на тот, который изображен на рис. 6б. Амплитуды прогиба ледяного покрова значительно выше, чем при отсутствии сжатия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние сдвига скорости жидкости на стационарные изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове при равномерном прямолинейном движении нагрузки под произвольным углом к направлению течения с учетом однородного сжатия льда. Поле скоростей жидкости не потенциально. Показано, что сдвиг скорости, направление движения нагрузки и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн и прогиб ледяного покрова. Максимальные критические скорости наблюдаются в тех случаях, когда нагрузка движется по течению. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются.

Если нагрузка движется против течения, то волны перед нагрузкой укорачиваются, встречая сопротивление, а волны за нагрузкой удлиняются. Если нагрузка движется по течению, то волны перед нагрузкой удлиняются, а за нагрузкой укорачиваются, и амплитуды волн значительно выше, чем в предыдущем случае. При увеличении коэффициента сжатия амплитуды прогиба льда значительно увеличиваются за нагрузкой и уменьшаются перед нагрузкой. Увеличение параметра сдвига S оказывает качественно такое же влияние, как увеличение скорости движения нагрузки. Картины гребней изгибно-гравитационных волн имеют такой же характер, что и в отсутствие течения, но симметрия нарушена при боковом натекании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davys J.W., Hosking R.I., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 269–287.
2. Schulkes R.M.S.M., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1987. V. 180. P. 297–318.
3. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangle load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 173–197.
4. Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
5. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследования напряженно-деформированного состояния полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 112–117.
6. Squire V.A. Moving Loads on Ice Plates / V.A. Squire, R.J. Hosking, A.D. Kerr, et al. Dordrecht: Kluwer, 1996.
7. Yeung R.W., Kim J.W. Effects of a translating load on a floating plate-structural drag and plate deformation // J. Fluids Structures. 2000. V. 14. № 7. P. 993–1011.
8. Nugroho W.S., Wang K., Hosking R.J., Milinazzo F. Time-dependent response of a floating flexible plate to an impulsively started steadily moving load // J. Fluid Mech. 1999. V. 381. P. 337–355.
9. Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А. Исследование напряженно-деформируемого состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 5. С. 214–221.
10. Букатов А.Е., Мордашев В.И. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на развитие волнового возмущения потока однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // ПМТФ. 1981. № 1. С. 122–129.
11. Суворов А.М. Развитие колебаний ледяного покрова в море при наличии горизонтального течения со сдвигом скорости // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 63–69.
12. Суворов А.М., Черкесов Л.В. Нестационарные вынужденные колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости со сдвигом скорости // Прикладная механика. 1980. № 5. С. 102–106.
13. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Морской гидрофизический институт РАН. Севастополь. 2017. 357 с.
14. Das S., Kar P., Sahoo T., Meylan M.H. Flexural-gravity wave motion in the presence of shear current: Wave blocking and negative energy waves // Phys. Fluids. 2018. V. 30. 106606. <https://doi.org/10.1063/1.5052228>
15. Стурова И.В. Задача Коши—Пуассона для жидкости под ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 47–56.
16. Суворов А.М., Тананаев А.Н., Черкесов Л.В. Нестационарные пространственные волны в потоке однородной жидкости со сдвигом скорости. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 14–21.
17. Санников В.Ф. Корабельные волны в однородном море с линейным профилем скорости по глубине // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 22–31.
18. Суворов А.М., Черкесов Л.В. Волны от поверхностных возмущений в потоке стратифицированной жидкости со сдвигом скорости // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 128–138.
19. Ellingsen S.A. Initial surface disturbance on shear current: The Cauchy-Poisson problem with a twist // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 082104.
20. Li Y., Ellingsen S.A. Initial Value Problems for Water Waves in the Presence of a Shear Current // Proc. 25-th Intern. Ocean and Polar Engng Conf. 2015. Kona. Big Island. Hawaii. USA. June 21–26 2015. P. 543–549.
21. Ellingsen S.A. Ship waves in the presence of uniform vorticity // J. Fluid Mech. 2014. V. 742. R2. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.28>
22. Li Y., Ellingsen S.A. Ship waves on uniform shear current at finite depth: wave resistance and critical velocity // J. Fluid Mech. 2016. V. 791. P. 539–567.
23. Ellingsen S.A. Oblique waves on a vertical sheared current are rotational // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2016. V. 56. P. 156–160.
24. Ткачева Л.А. Начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием нагрузки при наличии сдвигового потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 2. С. 66–76.
25. Стурова И.В. Задача Коши—Пуассона для жидкости со сдвиговым течением и неравномерно сжатым ледяным покровом // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 4. С. 69–76.
26. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Изд-во Мир. 1981.

УДК 533.6.011

НЕРАВНОВЕСНОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД БОЛЬШИМ УГЛОМ АТАКИ

© 2023 г. С. Т. Суржиков^а

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: surg@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 05.10.2022 г.

После доработки 11.10.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Сформулирована компьютерная модель, предназначенная для изучения процессов неравновесной физико-химической газовой динамики при обтекании затупленной пластины конечных размеров сверхзвуковым потоком разреженного воздуха для условий лабораторных экспериментов. Компьютерная модель основана на двухмерных уравнениях Навье–Стокса, сохранения энергии поступательных степеней свободы атомов и молекул, колебательных степеней свободы двухатомных молекул, уравнений химической кинетики и диффузии отдельных компонент частично ионизованного газового потока. Дан анализ основных газодинамических и кинетических процессов при обтекании затупленной пластины при числах Маха $M = 10$ и 20 . Показано образование областей термической неравновесности.

Ключевые слова: обтекание затупленной пластины, уравнения Навье–Стокса, неравновесные процессы колебательной релаксации, физико-химическая кинетика разреженных газовых потоков

DOI: 10.31857/S0568528122600722, **EDN:** EPLRMF

Задача обтекания сверхзвуковым потоком острых и затупленных пластин является одной из классических задач газовой динамики, изучаемой экспериментально, теоретически и с использованием численного моделирования уже более 70 лет. Несмотря на кажущуюся простоту постановки такой задачи, оказалось, что структура течения у пластины является весьма сложной. Особенно это проявляется при больших сверхзвуковых скоростях обтекания, когда все поперечные размеры существенно уменьшаются, а нелинейные взаимодействия структурных элементов течения усиливаются.

Во-первых, стало ясно, что постановка задачи обтекания острой пластины является идеализированной настолько, что описать структуру течения в рамках теории механики сплошной среды не представляется возможным. Небольшой участок течения вблизи передней кромки может быть описан с привлечением уравнения Больцмана или, что реализуется гораздо чаще – в рамках компьютерных методов типа имитационного моделирования, основанного на алгоритмах Монте-Карло. Фактически эти задачи решаются в рамках самостоятельного научного направления, исследующего течения сильно разреженных газов [1].

В монографии [2] при обсуждении вопроса, какую пластину можно считать заостренной, вводится приближенный критерий, основанный на теории механики сплошной среды: кромку можно считать острой, если ее затупление не оказывает заметного влияния на распределение давления вдоль пластины при течении невязкого газа. Дается приближенная количественная оценка условий обтекания острой кромки: число Рейнольдса $Re_{b,\infty} = \rho_\infty V_\infty R_b / \mu_\infty < 100$, где R_b – радиус скругления кромки, ρ_∞ , μ_∞ – плотность и коэффициент динамической вязкости в набегающем со скоростью V_∞ потоке.

Очевидно, что сложность постановки аэродинамических экспериментов состоит в том, что, во-первых, не существует реально абсолютно заостренных кромок, а во-вторых – организация измерений на очень малых расстояниях от кромки практически невозможна. В экспериментальных исследованиях кромки пластин всегда затуплены. При очень малых радиусах скругления, например при $R_b \sim 0.005$ см [3], можно с запасом считать, что течение формируется у заостренной

кромки. При этом заметим, что, по крайней мере, одна сторона пластины представляет собой клин, поэтому структуры течения у двух поверхностей хотя и независимы, но различны. В работе [2] были выделены элементы структуры сжатого слоя у поверхности заостренной пластины: пограничный слой, ударная волна, область смыкания пограничного слоя с ударной волной и область течения, где пограничный слой отделен от ударной волны зоной невязкого течения. Вблизи кромки выделяется область свободно-молекулярного движения и область использования моделей течения со скольжением. В этой же работе изложена теория сильного и слабого вязко-невязкого взаимодействия пограничного слоя и ударной волны, которая получила признание и широкое распространение до настоящего времени. Заметим, что указанные выше структурные элементы течения наблюдаются не только в эксперименте, но хорошо идентифицируются в результатах компьютерного моделирования в рамках уравнений Навье—Стокса, где никаких искусственных разделений поля течения не производится.

При обтекании затупленной пластины необходимо учитывать еще один структурный элемент поля течения — энтропийный слой, появление которого обусловлено образованием отошедшей ударной волны вблизи затупления. За фронтом ударной волны формируется не только пограничный слой у поверхности, но и область нагретого газа между пограничным слоем и фронтом ударной волны. Иногда пограничный слой сливается с ударной волной, но в достаточно плотном газе и вниз по течению между ними образуется область невязкого течения. При больших числах Маха газ может нагреваться до очень высоких температур, при которых наблюдается диссоциация и даже ионизация газа. В первых работах [4–7] и в большом числе последующих публикаций было установлено сильное влияние энтропийного слоя на всю газодинамическую структуру сжатого слоя над затупленной пластиной, на распределение давления, поверхностного трения, плотности тепловых потоков к поверхности.

Важным развитием работ по обтеканию затупленных пластин гиперзвуковым потоком явилось установление роли нагрева пластины, взаимодействия с внешними акустическими возмущениями, нелинейного взаимодействия между акустическими модами возмущений в пограничных слоях на развитие неустойчивости течения, ламинарно-турбулентного перехода и развития структурных особенностей турбулентного пограничного слоя [8–10].

Отдельный раздел гиперзвуковой аэродинамики острых и затупленных пластин включает класс задач химически неравновесных течений у поверхности и, как отдельный подкласс — изучение процессов физико-химической кинетики, включая процессы релаксации внутренних степеней свободы молекулярных компонент течения [11–16].

В данной работе рассматривается задача о сверхзвуковом обтекании затупленной пластины под углами атаки $\alpha = 10\text{--}45^\circ$ разреженным потоком воздуха, в котором протекают неравновесные процессы физико-химической кинетики, включая химические реакции, диссоциацию и ионизацию. Особое внимание уделяется изучению закономерностей релаксационных процессов термализации колебательных степеней свободы молекул N_2 и O_2 , которые оказывают заметное влияние на скорость химических превращений в газе и на структуру течения газа у наветренной и подветренной поверхностей.

С использованием методов компьютерного моделирования представлены результаты решения двух задач. Исходные данные для первой задачи отвечают условиям эксперимента [3], где набегающий на пластину сильно разреженный поток газа формировался в сопле гиперзвуковой аэродинамической трубы при числе Маха $M = 20$. Продольный размер испытываемой пластины составил $L = 10$ см.

Во второй задаче рассмотрено обтекание такой же пластины существенно более плотным потоком воздуха $M = 10$. Главной целью данного исследования, выполненного в рамках полной системы уравнений Навье—Стокса, является изучение конфигурации поля течения с учетом химических реакций вплоть до диссоциации и ионизации, а также термализации внутренних степеней свободы при увеличении угла атаки затупленной пластины и плотности набегающего потока вплоть до появления отрывного течения над подветренной поверхностью.

1. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Двумерная задача ламинарного обтекания затупленной пластины конечного размера потоком вязкого, теплопроводного, сжимаемого химически и термически неравновесного воздуха без выделения фронта ударной волны формулируется на основе уравнений неразрывности, Навье—Стокса, сохранения энергии поступательного движения частиц в форме уравнения теплопроводности Фурье—Кирхгоффа, сохранения массы химических компонент (уравнений диффу-

зии), сохранения колебательной энергии в отдельных колебательных модах двухатомных молекул модах и химической кинетики в каждом элементарном объеме эйлеровой расчетной сетки

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S_{\mu,x}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S_{\mu,y}, \quad (1.3)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{V} \operatorname{grad} T = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \mathbf{V} \operatorname{grad} p + \Phi_\mu + Q_V - Q_h + Q_d, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \mathbf{V} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_i + \dot{w}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_s, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \rho_{i(m)} e_{V,i(m)}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{i(m)} e_{V,i(m)} \mathbf{V}) = -\operatorname{div}(e_{V,i(m)} \mathbf{J}_{i(m)}) + \dot{e}_{V,i(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N_V, \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{dX_i}{dt} \right)_n = (b_{i,n} - a_{i,n}) \left[k_{f,n} \prod_j^{N_s} X_j^{a_{j,n}} - k_{r,n} \prod_j^{N_s} X_j^{b_{j,n}} \right], \quad (1.7)$$

где t — время; x, y — ортогональные декартовы координаты; u, v — проекции вектора скорости $\mathbf{V}$ на оси координат x и y ; p, ρ, T — давление, плотность и температура поступательного движения частиц; λ — коэффициент теплопроводности; Y_i — массовая доля i -го компонента смеси газов общим числом N_s ; $c_p, c_{p,i}$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении смеси газов и отдельных компонент; $c_p = \sum_i^{N_s} Y_i c_{p,i}$; $\mathbf{J}_i$ — плотность диффузионного потока и эффективный коэффициент диффузии i -го компонента; $\mathbf{J}_i = -\rho D_i \operatorname{grad} Y_i$.

В правой части уравнения (1.4) присутствуют слагаемые Q_V, Q_h, Q_d — объемные мощности тепловыделения, обусловленные процессами колебательной релаксации в газовой смеси, химическими реакциями и диффузионными процессами переноса тепла $Q_V = -\sum_{m=1}^{N_V} \dot{e}_{V,i(m)}, Q_h = \sum_{i=1}^{N_s} h_i \dot{w}_i$,

$Q_d = \sum_{i=1}^{N_s} \rho c_{p,i} D_i (\operatorname{grad} Y_i \cdot \operatorname{grad} T)$. Здесь: N_V — число колебательных мод (в рассматриваемом случае $N_V = 2$: $m = 1$ для колебательной энергии N_2 , $m = 2$ для колебательной энергии O_2); $h_i, \dot{w}_i$ — энтальпия и массовая скорость химических превращений для i -го компонента смеси; $\dot{e}_{V,m}$ — источник колебательной энергии в m -й моде; $R_{i(m)} = R_0 / M_{i(m)}$, $R_0 = 8.314 \times 10^7$ эрг/(К · моль) — универсальная газовая постоянная; $\rho_{i(m)}, M_{i(m)}, D_{i(m)}, \mathbf{J}_{i(m)} = -\rho_{i(m)} D_{i(m)} \operatorname{grad} Y_i$ — плотность, молекулярный вес, эффективный коэффициент диффузии в многокомпонентной газовой смеси, вектор плотности диффузионного потока i -го компонента газовой смеси, обладающего m -й модой колебательного движения; θ_m — характеристическая колебательная температура ($\theta_{m=1}(N_2) = 3396$ К, $\theta_{m=2}(O_2) = 2275$ К).

Компоненты тензора вязких напряжений $S_{\mu,x}, S_{\mu,y}$ и диссипативная функция Φ_μ содержат переменные в пространстве динамические коэффициенты вязкости μ , определяемые температурой поступательных степеней свободы и химическим составом газовой смеси, которые находят-ся в процессе решения задачи

$$S_{\mu,x} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$S_{\mu,y} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$\Phi_{\mu} = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Система уравнений (1.1)–(1.7) замыкается калорическим уравнением состояния – термодинамическим соотношением для определения внутренней энергии смеси газов и каждой ее компоненты, а также термическим уравнением состояния идеального газа

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R_0 T}{M_{\Sigma}}, \quad (1.8)$$

где $M_{\Sigma} = \left(\sum_i^{N_s} Y_i / M_i \right)^{-1}$ – суммарный молекулярный вес смеси газов.

Принципиальной особенностью рассматриваемой задачи является учет неравновесного возбуждения внутренних степеней свободы двухатомных молекул. Уравнение (1.6) в общем виде описывает процессы колебательного возбуждения молекулярных компонент газовой смеси N_2 и O_2 , поэтому далее будем считать, что каждая из упомянутых молекул кроме 3 поступательных и 2 вращательных степеней свободы обладают по одной колебательной моде движения (одной формой колебательного движения). Считается, что вращательное возбуждение молекул находится в равновесии с поступательными степенями свободы, что обосновано в [17–20]. Мерой колебательного возбуждения молекул является так называемая температура колебательного возбуждения молекулы i -й молекулы в m -й моде $T_{V,i(m)}$. Тогда удельная внутренняя энергия i -й компоненты газовой смеси записывается в виде

$$e_i = \frac{3}{2} R_i T + \delta_i R_i T + \delta_i R_i \frac{\theta_{i(m)}}{\exp\left(-\frac{\theta_{i(m)}}{T_{V,i(m)}}\right) - 1}, \quad R_i = \frac{R_0}{M_i}, \quad (1.9)$$

где $\delta_i = 1$ для двухатомных молекул, $\delta_i = 0$ для атомов. Уравнение (1.6) позволяет определить удельную внутреннюю энергию m -й колебательной моды i -й молекулы

$$e_{V,i(m)} = \frac{R_{i(m)} \theta_{i(m)}}{\exp(\theta_{i(m)} / T_{V,i(m)}) - 1},$$

откуда и находится температура колебательного возбуждения. Предполагается использование межъядерного потенциала вида гармонического осциллятора, а остальные молекулы, кроме N_2 и O_2 , возбуждены равновесно с температурой поступательного движения.

В итоге калорическое уравнение состояния смеси газов формулируется в виде

$$e = \int_{T_0}^T c_V dT, \quad c_V = \sum_i^{N_s} Y_i c_{V,i}, \quad (1.10)$$

а энтальпия вычисляется по формуле

$$h = e + p / \rho. \quad (1.11)$$

При определении $\dot{e}_{V,i(m)}$ учитывались процессы колебательно-поступательной (VT) релаксации и изменения удельной колебательной энергии за счет химических реакций (VC-процессы)

$$\dot{e}_{V,m} = \dot{e}_{V,m}(VT) + \dot{e}_{V,m}(VC).$$

Релаксационное изменение энергии в каждой колебательной моде рассчитывалось по приближенной теории Ландау–Теллера

$$\dot{e}_{V,i(m)}(VT) = \rho_{i(m)} \frac{e_{V,i(m)}^0 - e_{V,i(m)}}{\tau_{i(m)}},$$

$e_{V,m}^0 = e_{V,m}(T_V = T)$ – равновесная удельная энергия колебательного движения в m -й колебательной моде i -го компонента; $\tau_{i(m)}$ – характерное время релаксации m -й колебательной моды, кото-

рое определялось по приближенным соотношениям Милликена и Вайта [20] с поправкой Парка [19], ограничивающей величину $\tau_{i(m)}$ снизу

$$\tau_m = \tau_{VT,i(m)} + \frac{1}{N_i \sigma_{V,i(m)} \sqrt{8kT/(\pi m_{i(m)})}}, \quad \sigma_{V,i(m)} = \sigma'_{V,i(m)} (50000/T)^2,$$

$$p \tau_{VT,i(m)} = \exp[A_{VT,i(m)}(T^{-1/3} - B_{VT,i(m)}) - 18.42],$$

$$A_{VT,i(m)} = 0.00116 \eta_{i(m)}^{0.5} \theta_m^{1.333}, \quad B_{VT,i(m)} = 0.015 \eta_m^{0.25},$$

η_m — приведенная масса двухатомной молекулы, $m_{i(m)}$ — масса молекулы i -го компонента; N_i — полная концентрация всех молекул при заданных температуре T и давлении p ; $\sigma_{V,i(m)}$ — сечение столкновения колебательно-возбужденной частицы, характерное значение которого равно $3 \times 10^{-17} \text{ см}^2$.

Изменение колебательной энергии за счет протекания химических реакций учитывалось по модели

$$e_{V,m}(\text{VC}) = e_{V,m} \frac{1}{2} (\dot{w}_{i(m)} - |\dot{w}_{i(m)}|),$$

где предполагалось, что уменьшение колебательной энергии в m -й моде в 1 см^3 за 1 с пропорционально объемной скорости исчезновения молекул, имеющих эту колебательную моду.

Диффузионный перенос энергии колебательного возбуждения молекул учитывался за счет их диффузии, т.е. плотность потока колебательной энергии за счет диффузии определялась по формуле

$$e_{V,m} \mathbf{J}_{V,i(m)} = -e_{V,m} \rho_{i(m)} D_{V,i(m)} \text{grad } Y_i,$$

где $D_{V,i(m)}$ — эффективный коэффициент диффузии энергии колебательного возбуждения, который принимался равным определенному выше эффективному коэффициенту диффузии.

Кроме термического и калорического уравнений состояния важными для решаемой задачи является способ расчета переносных свойств многокомпонентного газа: вязкости, теплопроводности и коэффициентов диффузии.

Для этих целей используются комбинаторные соотношения [21]

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_c} (Y_i/\mu_i)}, \quad \lambda = 0.5 \left[\sum_{i=1}^{N_c} x_i \lambda_i + \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_c} (x_i/\lambda_i)} \right], \quad D_i = \frac{1 - x_i}{\sum_{j \neq i}^{N_c} (x_j/D_{ij})},$$

а также соотношения, получаемые в первом приближении теории Чепмена—Энскога для динамических коэффициентов вязкости, коэффициентов теплопроводности и бинарной диффузии [22]

$$\mu_i = 2.67 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{M_i T}}{\sigma_i^2 \Omega_i^{(2,2)*}}, \quad \text{г/см} \cdot \text{с}$$

$$\lambda_i = 8330 \sqrt{\frac{T}{M_i}} \frac{1}{\sigma_i^2 \Omega_i^{(2,2)*}}, \quad \text{эрг/см} \cdot \text{К}$$

$$D_{i,j} = 1.858 \times 10^{-3} \sqrt{T^3 \frac{M_i + M_j}{M_i M_j}} \frac{1}{p \sigma_{i,j}^2 \Omega_{i,j}^{(1,1)*}}, \quad \text{см}^2/\text{с}$$

где x_i — относительная мольная концентрация, $x_i = p_i/p = Y_i M_\Sigma/M_i$, σ_i — радиус частицы i -го типа, A ; $\Omega_i^{(2,2)*} = f(T_i)$ — интеграл столкновений для вязкости и теплопроводности; $T_i = kT/\varepsilon_i$, ε_i — параметр потенциала Ленарда—Джонса, характеризующий глубину потенциальной ямы. Интегралы столкновений для вязкости и диффузии рассчитывались по аппроксимациям Анфимова

$$\Omega_i^{(2,2)*} = 1.157 T_i^{-0.1472}, \quad \Omega_{i,j}^{(1,1)*} = 1.074 T_{i,j}^{-0.1604},$$

где $T_{i,j} = \frac{kT}{\varepsilon_{i,j}}$, $\varepsilon_{i,j} = \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j}$, $\sigma_{i,j} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j)$.

Массовая скорость химических превращений в каждом элементарном расчетном объеме определялась при решении системы кинетических уравнений (1.7). Здесь X_i — объемно-мольная концентрация i -й компоненты; N_r — число химических реакций; $S_{f,n}$, $S_{r,n}$ — скорости прямой и обратной реакции; $k_{f,n}$, $k_{r,n}$ — константы скоростей прямых и обратных реакций; $a_{i,n}$, $b_{i,n}$ — стехиометрические коэффициенты n -й химической реакции, определяемые с использованием канонической формы уравнений химической кинетики:

$$\sum_{j=1}^{N_s} a_{j,n} [X_j] = \sum_{j=1}^{N_s} b_{j,n} [X_j], \quad n = 1, 2, \dots, N_r,$$

где $[X_j]$ — химические символы реагентов и продуктов химических реакций. Массовая скорость образования i -й компоненты в единице объема определяется по формуле

$$\dot{w}_i = M_i \sum_{n=1}^{N_r} (b_{i,n} - a_{i,n}) (S_{f,n} - S_{r,n}), \text{ г/}(\text{см}^3 \cdot \text{с})$$

Константы скоростей прямой (f) и обратной (r) реакций определяются обобщенной аррениусовской зависимостью

$$k_{f(r),n} = A_{f(r),n} T^{n_{f(r),n}} \exp\left(-\frac{E_{f(r),n}}{kT}\right), \quad (1.12)$$

где $A_{f(r),n}$, $n_{f(r),n}$, $E_{f(r),n}$ — аппроксимирующие коэффициенты; k — постоянная Больцмана; n — номер химической реакции в кинетической модели. Константы аппроксимации скоростей прямых реакций заимствовались из [19]. Константы скоростей обратных реакций рассчитывались с использованием констант равновесия [23], аппроксимированных в форме обобщенного закона Аррениуса

$$K_n = A_n T^{n_n} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right). \quad (1.13)$$

Аппроксимация констант равновесия в форме (1.13) тестировалась в [24] сравнением с данными Парка [19], основанными на данных JANAF [25].

Малость концентраций заряженных частиц позволила использовать условие квазинейтральности для нахождения мольных концентраций электронов.

Используемые в расчетах константы скоростей диссоциации $k_f = k_d$ подвергались модификации с целью учесть термическую неравновесность молекул. Исследование разных моделей неравновесной диссоциации показало на заметное их влияние на результаты расчетов интенсивности ионизационных процессов. Однако в данной работе применялась лишь эвристическая модель Парка [19]. В этой модели температура T_a , используемая в (1.12), рассчитывалась для каждой из колебательных мод по формуле

$$T_{a,i(m)} = \sqrt{TT_{V,i(m)}}, \quad (1.14)$$

где T — поступательная температура, $T_{V,i(m)}$ — колебательная температура в m -й колебательной моде.

Сформулированная расчетная модель, основанная на системе уравнений в частных производных (1.1)–(1.6), системе кинетических дифференциальных уравнений первого порядка (1.7) для каждой компоненты газовой смеси, включающая термическое и калорическое уравнения состояния (1.8), (1.9)–(1.11), а также систему замыкающих соотношений для определения теплофизических свойств индивидуальных компонент газового течения позволяют решить задачу обтекания затупленной пластины конечного размера вязким, теплопроводным и химически реагирующим газом с учетом ионизации и неравновесной диссоциации. Подчеркнем, что эта задача решалась без выделения ударных волн и каких-либо разрывов газодинамических параметров. На внешних границах расчетной области, кроме выходного сечения, задавались параметры невозмущенного потока. В выходном сечении, где течение также было сверхзвуковым, задавались нулевые производные компонент скорости, плотности, давления, концентраций химических компонент и энергии колебательных мод вдоль соответствующих линий тока. Считалось, что на поверхности происходит рекомбинация заряженных частиц, и массовые доли всех компо-

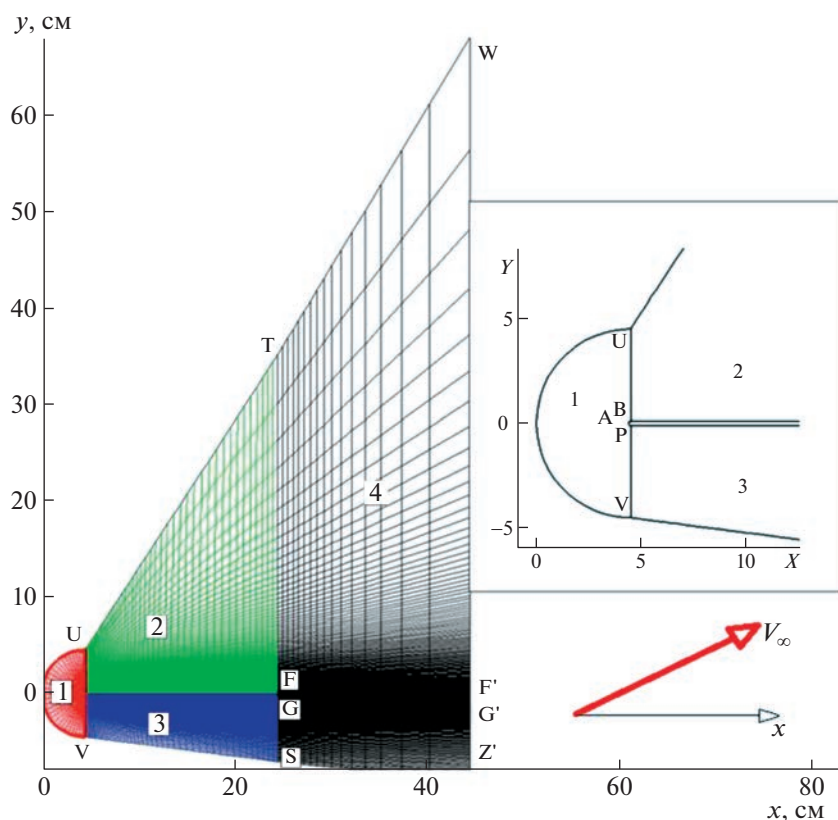


Рис. 1. Схема решаемой задачи и расчетная четырехблочная сетка. Показаны номера блоков и характерных точек аналитически созданной расчетной сетки.

нент восстанавливаются до условий в набегающем потоке. Задавались условия прилипания и постоянная температура поверхности $T_w = 297$ K.

В расчетах использовался авторский компьютерный код, в котором реализована многосеточная многоблочная расчетная технология. Схема решаемой задачи с четырьмя расчетными блоками показана на рис. 1. Здесь представлена промежуточная расчетная сетка. Окончательное решение получалось после двукратного удвоения числа узлов. Использовался конечно-разностный метод с численным методом определения компонентов якобиана в пределах каждого блока, применявшихся для трансформации реальной криволинейной сетки в прямоугольную область. Первый блок расчетной сетки предназначался для описания течения в окрестности затупления пластины с радиусом $R_b = 0.1$ см. Вдоль пластины длиной $L = 10$ см и 130 см с наветренной стороны располагался блок 3, а с подветренной — блок 2. Четвертый блок предназначался для описания течения в следе. Замыкающая граница пластины толщиной $h = 0.2$ см была плоской. Течение в этой области описывалось достаточно подробно, так что различались элементы возвратно-вихревого течения за срезом пластины, которые взаимодействовали с пограничными слоями, развивающимися вдоль нижней и верхней поверхностей.

Для получения численного решения использовался гибридный явно-неявный алгоритм интегрирования. Уравнения Навье—Стокса и неразрывности интегрировались с использованием AUSM-алгоритма [26] в варианте аппроксимации функций на контактом разрыве второго порядка. Система уравнений сохранения энергии поступательных и колебательных степеней свободы (1.4), (1.6), а также уравнений диффузии (1.5) интегрировалась неявным методом второго порядка аппроксимации. Система кинетических уравнений (1.7) интегрировалась с использованием обобщенного метода Ньютона [27]. Такая комбинация методов позволила выполнять интегрирование уравнений движения с предельно допустимым уровнем критерия Куранта—Фридрихса—Леви (Courant—Friedrichs—Lewy, CFL). На каждом шаге по времени уточнялись теплофизические, переносные и кинетические функции и коэффициенты, входящие в систему интегрируемых уравнений.

Таблица 1. Исходные данные обтекания пластины длиной $L = 10$ см под разными углами атаки

№ вар.	p_∞ , эрг/см ³	ρ_∞ , г/см ³	T_∞ , К	M_∞	T_w , К
1	12	3.25×10^{-7}	12.4	20	12.4
2	12000	1.84×10^{-5}	227	10	227

В подавляющем большинстве случаев получалось установившееся решение с величиной невязки менее 10^{-6} . В расчетных вариантах, где наблюдалось появление отрывного течения над подветренной поверхностью, наблюдалось периодическое нестационарное решение с величиной численной невязки компонент скорости и температуры порядка 10^{-3} . Попытки увеличения точности нестационарного расчета за счет уменьшения параметра CFL не приводили к видимому изменению решения, а задача изучения особенностей нестационарной структуры течения в данной работе не ставилась. Подробности разработанной методики компьютерного моделирования приведены в [24].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Выполнены две серии численных экспериментов для исходных данных, представленных в табл. 1. Первая серия расчетов проводилась для условий экспериментов [3].

На рис. 2 показаны числа Маха и температура поступательных степеней свободы при угле атаки $\alpha = 10^\circ$, для которого проводились измерения в экспериментах [3]. Хорошо видны основные структурные элементы поля, о которых говорилось выше, — ударные волны, отходящие от затупления пластины, области пограничного слоя с дозвуковыми скоростями движения и повышенной температурой внутри пограничного слоя. Например, на расстоянии $x = 20$ см от кромки пластины температура внутри пограничного слоя достигает ~ 380 К в то время, когда на внешней границе динамического пограничного слоя она составляет ~ 120 К, а для поверхности — 297 К. Самая высокая температура поступательных степеней свободы достигается в окрестности затупления пластины ~ 1000 К, что близко к теоретическому значению температуры торможения $T_0 = 1004$ К.

Еще одна зона повышенной температуры наблюдается в ближнем следе, где встречаются потоки, сходящие с верхней и нижней поверхностей (рис. 2б). Здесь газ нагревается до температуры $T \sim 350$ К. В среднем, температура в сжатом слое над подветренной поверхностью снижается при увеличении угла атаки. Над наветренной поверхностью и в ближнем следе, наоборот, при увеличении угла атаки температура возрастает.

На рис. 3 приведено распределение температур колебательного возбуждения молекул N_2 (далее, для краткости, колебательных температур), а также разницы между температурами колебательного возбуждения и температурой поступательных степеней свободы (далее, для краткости, поступательная температура) $\Delta T_v = T_v - T$. Подчеркнем, что положительные значения величины ΔT_v означают превышение колебательной температуры над поступательной температурой.

Хорошо видно (рис. 3а), что в области ближнего следа формируются две области повышенной температуры колебательного возбуждения (на рис. 3а они обозначены римскими цифрами I и II), а в пограничном слое у наветренной стороны пластины, наоборот — поступательная температура систематически превышает колебательную температуру (зона III на рис. 3а). Поэтому отметим существование трех областей термической неравновесности в потоке, причем первые две области с повышенной колебательной температурой разделены почти равновесной областью с незначительным превышением колебательной температуры над поступательной. Однако следует учитывать тот факт, что образование указанных областей колебательной неравновесности во многом зависит от характерных релаксационных времен колебательных мод. В частности, распределения колебательных температур для кислорода свидетельствуют о большей скорости процессов термализации колебаний молекул O_2 . Это не удивительно, поскольку хорошо известно соотношение между характерными временами колебательной релаксации $\tau_{O_2} < \tau_{N_2}$ [19].

Появление зон неравновесного колебательного возбуждения двухатомных молекул является следствием общих закономерностей неравновесного обтекания пластины под углом атаки. За фронтом ударной волны, образующейся вблизи затупления пластины, наблюдается быстрый

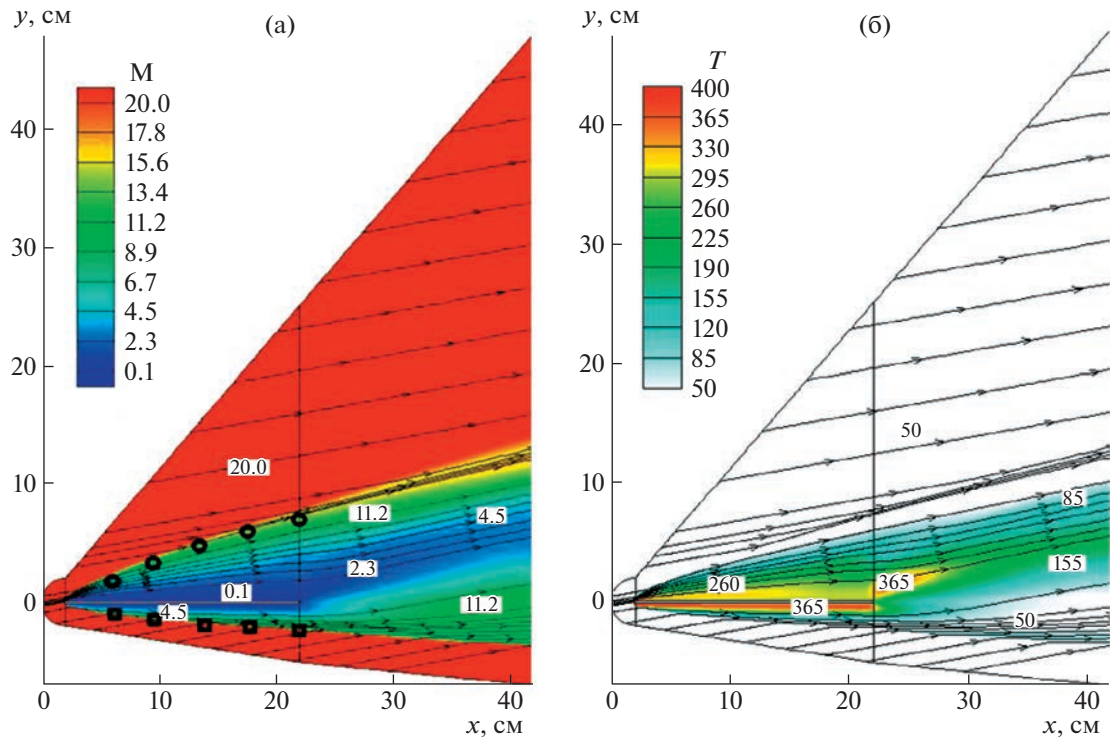


Рис. 2. Распределение чисел Маха и температуры поступательных степеней свободы для исходных данных первого варианта при угле атаки $\alpha = 10^\circ$. Дискретные точки – экспериментальные данные [3] для $\alpha = 10^\circ$ (квадраты) и $\alpha = -10^\circ$ (кружки).

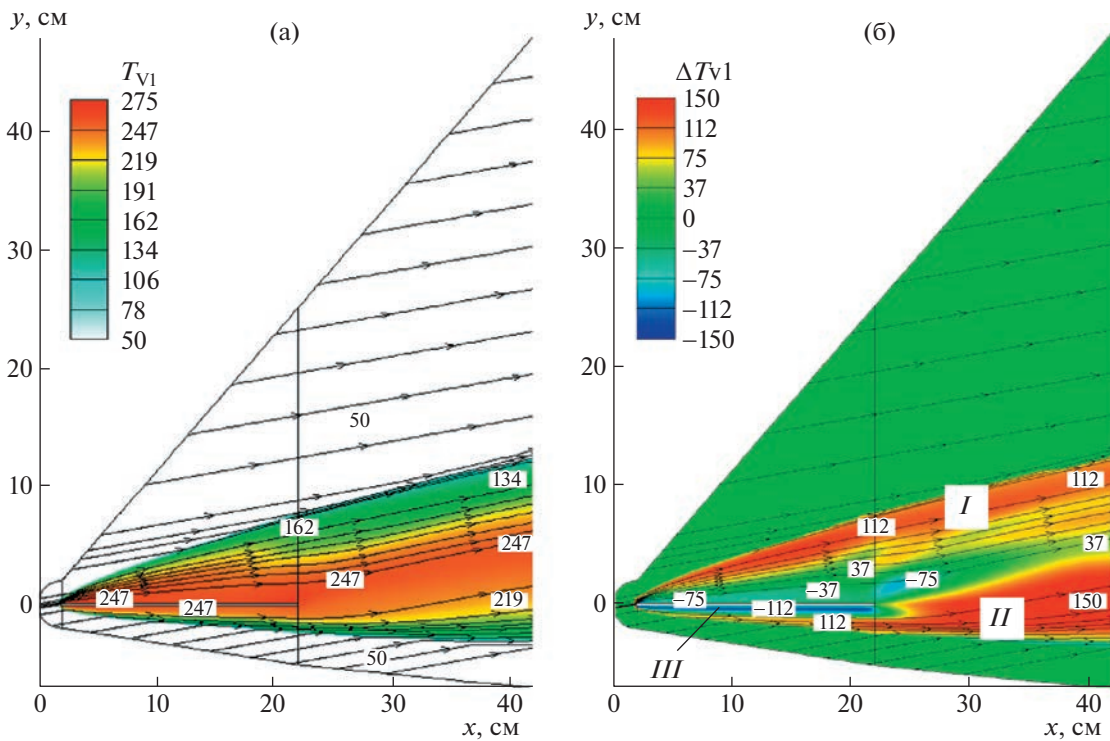


Рис. 3. Колебательная температура $T_{v1} = T_v(N_2)$ (а) и разность $\Delta T_{v1} = T_v(N_2) - T$ (б) для условий эксперимента [3] при $\alpha = 10^\circ$.

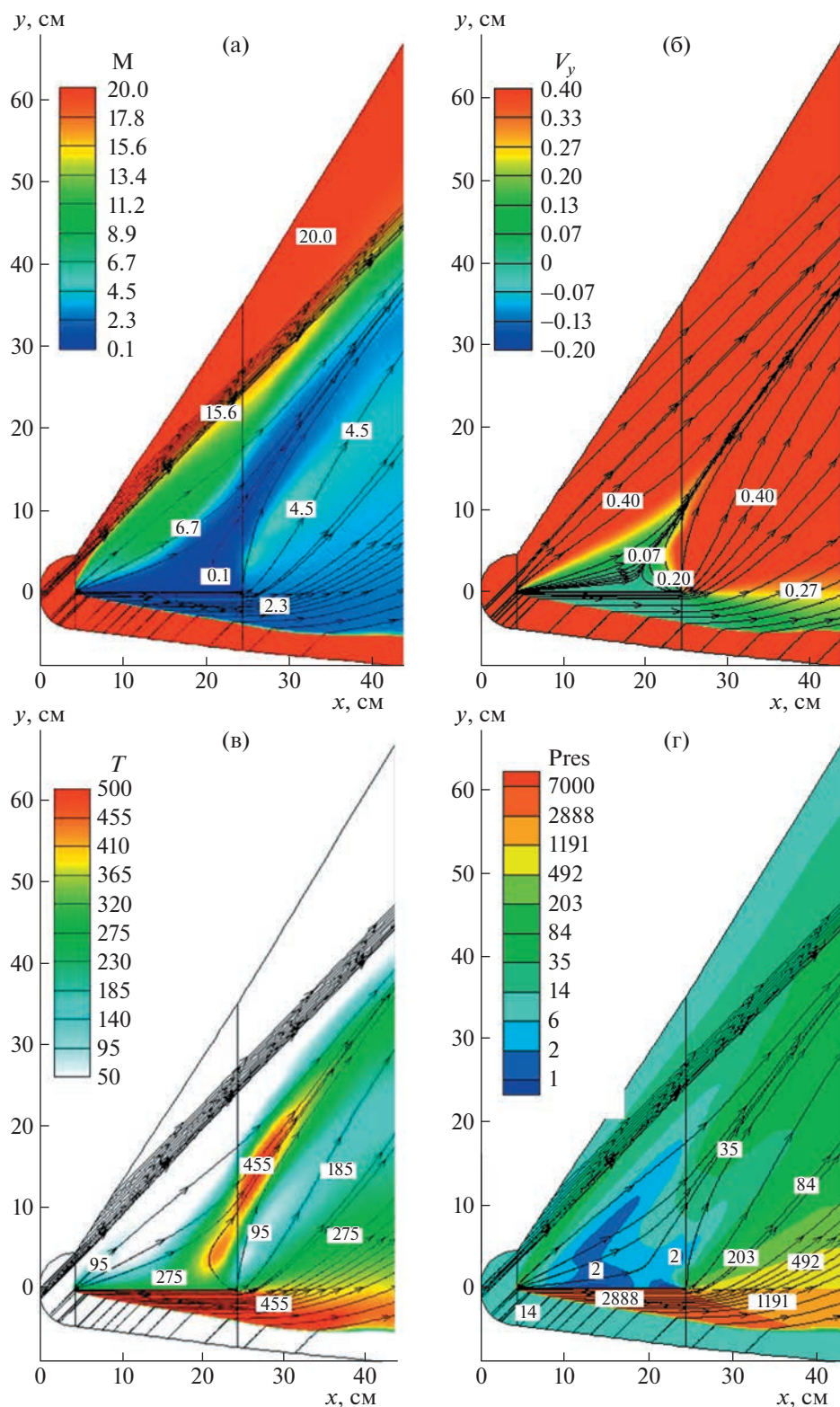


Рис. 4. Распределение чисел Маха (а), y -компоненты скорости $V_y = v/V_\infty$ (б), температуры поступательных степеней свободы (в) и давления ($Pres$, в эрг/см³; г) условий эксперимента [3] под углом атаки $\alpha = 45^\circ$.

рост поступательной температуры и существенно более медленное возрастание колебательных температур, что непосредственно связано с фундаментальными физическими закономерностями — для возбуждения колебаний двухатомных молекул требуется в десятки тысяч раз большее

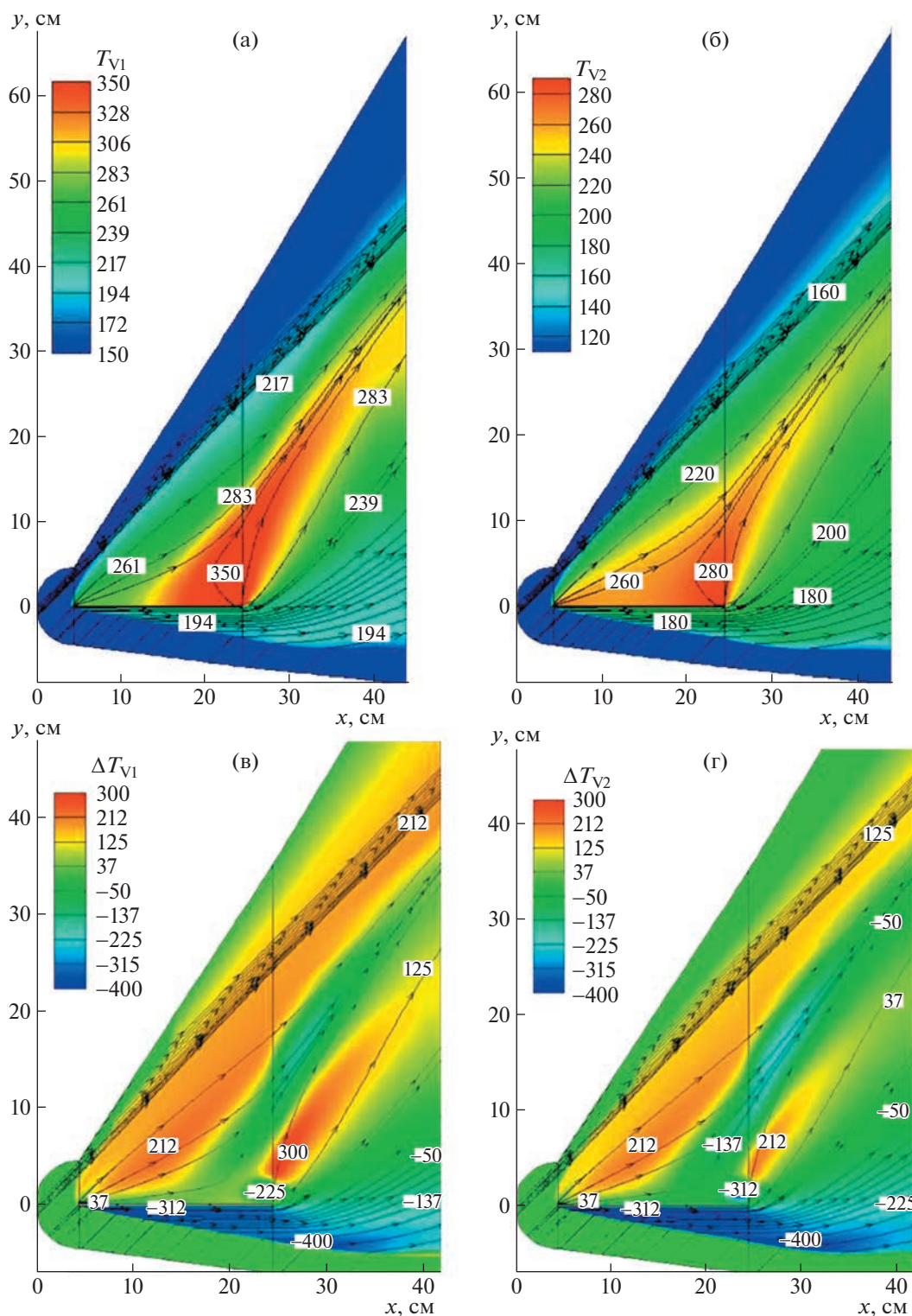


Рис. 5. Температурное распределение колебательных степеней свободы молекул N_2 (а) и O_2 (б) и разности $\Delta T_{V1} = T_V(N_2) - T$ (в), $\Delta T_{V2} = T_V(O_2) - T$ (г) для условий эксперимента [3] при угле атаки $\alpha = 45^\circ$.

число столкновений между ними, чем для возбуждения поступательных степеней свободы. Таким образом, течение за фронтом ударной волны у затупления начинается с явного запаздывания колебательной температуры от поступательной. Вблизи наветренной поверхности поступательная температура резко возрастает при увеличении давления и плотности, а колебательные степени свободы не успевают термализоваться.

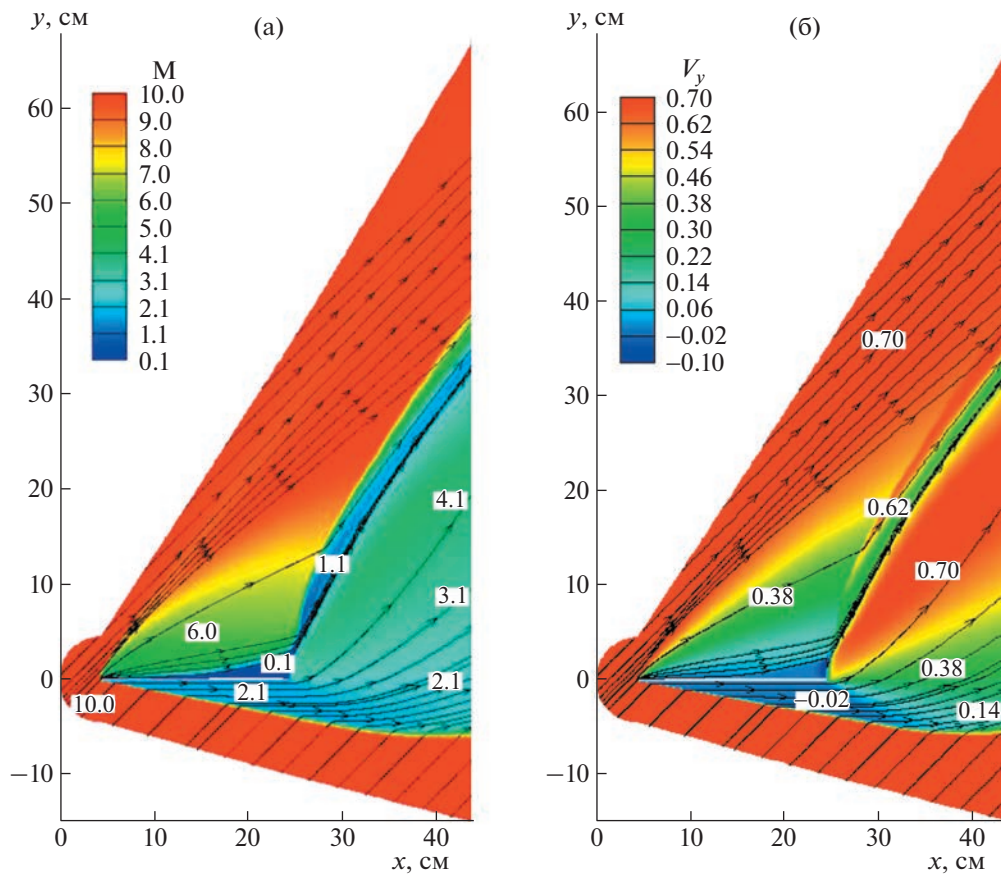


Рис. 6. Распределение чисел Маха (а) и y -компоненты скорости потока $V_y = v/V_\infty$ (б) для условий второго расчетного варианта при угле атаки $\alpha = 45^\circ$.

Поступательная температура за фронтом косо́й ударной волны значительно ниже, чем за прямой, поэтому температура колебательного возбуждения может даже ее превосходить. Вблизи подветренной поверхности и в следе наблюдается хорошо изученная закономерность превосходства колебательных температур над поступательной. Картина процесса становится обратной той, которая наблюдается за ударной волной. В течение разрежения поступательная температура резко падает, а для падения температуры колебательного возбуждения не хватает интенсивности столкновений молекул. И только в области столкновения потоков, истекающих с наветренной и подветренной сторон пластины (зоны I и II на рис. 3а), снова наблюдается резкое увеличение поступательной температуры.

На рис. 4 показаны результаты расчетов обтекания затупленной пластины при тех же самых условиях, но при угле атаки $\alpha = 45^\circ$. Все отмеченные выше закономерности в изменении структуры течения при увеличении угла атаки остаются прежними, но проявляются в большей степени. Давление от значений в пограничном слое у наветренной поверхности падает до давления у подветренной поверхности более, чем в 1000 раз (рис. 4г). Наблюдаются две области течения с повышенной поступательной температурой (рис. 4в): одна — вблизи наветренной стороны, где набегающий поток создает зону сжатия у поверхности. Вторая — в верхней части следа над подветренной стороной. Здесь поступательная температура достигает величины примерно $0.5T_0$.

На рис. 5а,б приведены распределения колебательных температур, а на рис. 5в,г разницы между температурами колебательных и поступательных степеней свободы. Эти данные хорошо иллюстрируют влияние характерных времен релаксации колебаний молекул на температуру колебательного возбуждения. В областях наибольшего разрежения над поверхностью колебательные температуры превосходят поступательную температуру более, чем на 300 К.

Изменения, происходящие в потоке при увеличении плотности набегающего потока, отражены на рис. 6 и 7, где показаны условия течения при статическом давлении в набегающем потоке

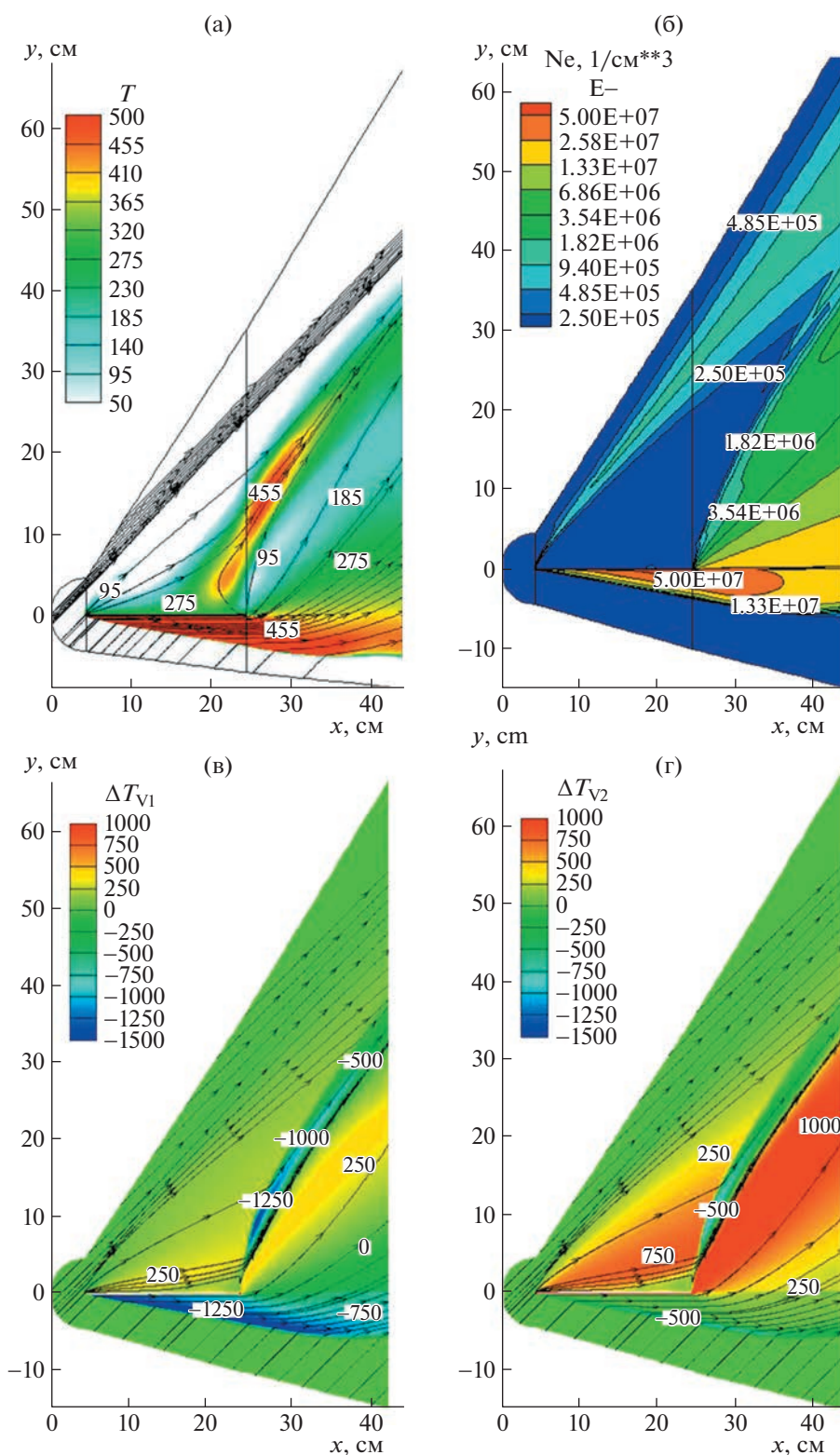


Рис. 7. Температурное распределение поступательных степеней свободы (а), плотности электронов (б) и разность между температурой колебательного возбуждения молекул $\Delta T_{v1} = T_v(N_2) - T$ (в) и $\Delta T_{v2} = T_v(O_2) - T$ (г) для второго расчетного варианта при угле атаки $\alpha = 45^\circ$.

в 10^3 раз больше, чем в предыдущем варианте. При этих условиях у подветренной поверхности вблизи заднего среза пластины уже возникает небольшая зона возвратно-вихревого течения. Она отвечает числам Маха $M = 0.1$ (рис. 6а). На рис. 6б вблизи верхней задней кромки видна об-

ласть отрицательных значений y -компоненты скорости, что подтверждает наличие небольшой вихревой зоны. Отметим, что в этой области наблюдается повышенная осцилляция численного решения, которая, однако, не приводит к катастрофическим последствиям в численном решении.

Поступательная температура достигает у нижней (наветренной) поверхности значений $T \sim 2300$ К, а над верхней поверхностью, в зоне разрежения, падает до значений ~ 200 К (рис. 7а). Примечательно, что в следе, где сходятся потоки, обтекающие пластину сверху и снизу, температура опять возрастает до ~ 2000 К. Напомним, что в предыдущем расчетном варианте (при меньшей плотности набегающего потока) масштаб температур в наиболее горячих областях был порядка 500 К. Еще до больших температур нагреваются колебательные степени свободы молекул N_2 и O_2 (рис. 7в,г). В данном случае, как и прежде, наблюдается наличие двух зон повышенных колебательных температур, отходящих от передней и задней кромок пластины, разделенных областью относительно больших поступательных температур.

Еще одним важным итогом увеличения давления в набегающем потоке является заметная ионизация воздуха в сжатом слое у наветренной поверхности и в ближнем следе (рис. 7б). В области пониженного давления над подветренной поверхностью ионизация не наблюдается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения задачи неравновесной аэрофизики обтекания затупленной пластины конечных размеров разработана и реализована сопряженная модель физико-химической газовой динамики, в которой наряду с уравнениями Навье—Стокса численно интегрируются уравнения химической кинетики, сохранения энергии поступательных и колебательных степеней свободы, кинетики диссоциации и ионизации. Для повышения вычислительной эффективности разработанного численного метода использована многосеточная многоблочная технология гибридного явно-неявного алгоритма.

Выполненное расчетное исследование показало, что обтекание затупленной пластины конечных размеров сверхзвуковым потоком разреженного воздуха под большими углами атаки сопровождается образованием нескольких областей течения, в которых не достигается термализация внутренних степеней свободы. Это оказывает сильное влияние как на структуру течения в окрестности обтекаемой пластины, так и на протекание химических реакций в потоке, которые в конечном счете определяют степень ионизации газа при больших сверхзвуковых скоростях.

Разработанный метод использовался для интерпретации экспериментальных данных по сверхзвуковому обтеканию пластины под углом атаки.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00062).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bird G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Clarendon Press. Oxford. 1994. 458 p.
2. Hayes W.D., Probstein R.F. Hypersonic Flow Theory. New York.: Acad. Press, 1959. 464 p.
3. Маслов А.А., Миронов С.Г., Поплавская Т.В., Ветлуцкий В.Н. О влиянии угла атаки на гиперзвуковое обтекание пластины // ТВТ. 1998. Т. 36. № 5. С. 754–760.
4. Черный Г.Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматлит, 1959. 220 с.
5. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. М.: Физматлит. 2007. 760 с.
6. Cheng H.K., Hall J.G., Golian T.C., Hertzberg A. Boundary-Layer Displacement and Leading-Edge Bluntness Effects in High-Temperature Hypersonic Flow // JARS. 1961. V. 28. № 5. P. 353–381. <https://doi.org/10.2514/8.9002>
7. Yakura J.K. Theory of Entropy Layers and Nose Bluntness in Hypersonic Flow // P. 421–470. <https://doi.org/10.2514/5.9781600864810.0421.0470> in book Hypersonic Flow Research / Ed. by Riddell F.R. New York.: Academic Press, 1962. 758 p.
8. Маслов А.А., Поплавская Т.В., Миронов С.Г., Цирюльников И.С. Волновые процессы в ударном слое на пластине, расположенной под углом атаки // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 4. С. 39–47.
9. Маслов А.А., Миронов С.Г., Кудрявцев А.Н., Поплавская Т.В., Цирюльников И.С. Управление возмущениями в гиперзвуковом ударном слое на пластине нестационарным воздействием с поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 3. С. 52–161.
10. Лысенко В.И. Влияние энтропийного слоя на устойчивость сверхзвукового ударного слоя и переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный // ПМТФ. 1990. № 6. С. 74–80.

11. *Hall J.G., Eschenroeder A.Q., Marrone P.V.* Blunt-nose inviscid airflows with coupled nonequilibrium processes // *J. Aerosp. Sci.* 1962. V. 29. P. 1038–1051.
12. *Mallinson S.G., Mudford N.R., Gai S.L.* Leading-edge bluntness effects in hypervelocity flat plate flow // *Phys. Fluids*. 2020. 32. 046106.
<https://doi.org/10.1063/1.5138205>
13. *Rose P., Stark W.* Stagnation Point Heat Transfer Measurements in Dissociated Air // *JAS.* 1958. № 2. P. 86–97.
14. *Lees L.* Laminar Heat Transfer over Blunt-Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds // *Jet Propulsion*. 1956. № 4. P. 259–274.
15. *Fay J.A. and Riddell F.* Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air // *JAS.* 1958. № 2.
16. *Shang J.S., Surzhikov S.T.* Nonequilibrium radiative hypersonic flow simulation // *Progress in Aerospace Sciences*. 2012. V. 53. P. 46–65.
17. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит. 1966. 687 с.
18. *Clarke J.F., McChesney M.* The Dynamics of Real Gases. London.: ButterWorths, 1964. 419 p.
19. *Park C.* Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics. N.Y.: Wiley-Intern. Publ. 1990. 358 p.
20. *Millikan R.C. and White D.R.* Systematic of Vibrational Relaxation // *J. Chemical Physics*. 1963. V. 39. № 12. P. 3209–3212.
21. *Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.W.* Transport Phenomena / 2nd Ed. N.Y.: Wiley. 2002. 912 p.
22. *Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B.* The Molecular Theory of Gases and Liquids Revised Edition. Wiley-Interscience, 1964. 1280 p.
23. *Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А. и др.* Термодинамические свойства индивидуальных веществ. М.: Наука. 1978. 495 с.
24. *Суржигов С.Т.* Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. М.: Физматлит, 2018. 543 с.
25. *Chase M.W., Davies C.A., Downey J.R. Jr., Frurip D.J., McDonald R., Syverud A.N.* JANAF Thermochemical Tables / Third ed. Parts 1 and 2 // *J. Physical and Chemical Reference Data*. 1985. V. 14. № 1 Supl. P. 1–1856.
26. *Liou M.-S.* A Sequel to AUSM: AUSM+ // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 129. P. 364–382.
27. *Seleznev R.K., Surzhikov S.T.* A Generalized Newton Method for Differential Equation of Chemical Kinetics // *AIAA 2013-3009*. 2013. 17 p.

УДК 533.9

СРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРОВА И ЛАГРАНЖЕВА ПОДХОДОВ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕЖЗВЕЗДНОЙ ПЫЛИ В ГЕЛИОСФЕРЕ В РАМКАХ МОДЕЛИ ХОЛОДНОГО ГАЗА

© 2023 г. Е. А. Годенко^{a,b,c,*}, В. В. Измоленов^{a,b,c}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^bИнститут космических исследований РАН, Москва, Россия

^cМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: godenko.egor@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.10.2022 г.

После доработки 11.10.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Межзвездные пылевые частицы проникают в гелиосферу, область пространства, занятую солнечным ветром, вследствие относительного движения Солнца и окружающей его межзвездной среды. Внутри гелиосферы на движение частиц действует главным образом электромагнитная сила, которая определяется гелиосферным магнитным полем. Под действием этой силы траектории пылевых частиц могут пересекаться и самопересекаться. В результате возникают области накопления межзвездной пыли, которые представляют большой интерес как с теоретической точки зрения, так и в контексте планирования будущих космических миссий. Целью данной работы является моделирование распределения межзвездной пыли, а также исследование особенностей ее распределения внутри гелиосферы. Для описания пылевой компоненты используется приближение холодной среды, а для нахождения распределения концентрации используются два подхода для описания среды — эйлеров и лагранжев. Для решения уравнения неразрывности в лагранжевых координатах используется полный лагранжев метод, или метод Осипцова. В результате найдены все особенности распределения пылевой компоненты, которые лежат на каустиках (огнивающих семейств траекторий частиц пыли), а также регулярные (без сингулярности в концентрации) области повышенной концентрации. Показано, что области накопления пылевой компоненты находятся в окрестности гелиосферного токового слоя, на котором магнитное поле меняет свою полярность, а также в хвостовой части гелиосферы. Проведено сравнение эффективности метода Осипцова решения уравнения неразрывности в лагранжевых координатах с широко используемым в литературе методом Монте-Карло (эйлеров подход). Показано, что по сравнению с методом Осипцова метод Монте-Карло требует чрезвычайно высокого разрешения расчетной сетки для достижения сопоставимого уровня точности расчетов.

Ключевые слова: пыль, гелиосфера, лагранжев подход

DOI: 10.31857/S0568528122600783, **EDN:** NTGNJS

ВВЕДЕНИЕ

Окружающая Солнечную систему локальная межзвездная среда состоит из плазменной, нейтральной и пылевой компонент. Из-за относительного движения Солнца и межзвездной среды частицы пыли проникают в гелиосферу — область, занятую плазмой солнечного ветра. Присутствие частиц межзвездной пыли внутри гелиосферы было экспериментально подтверждено измерениями космического аппарата (КА) Улисс [1]. По данным КА Кассини [2] удалось определить химический состав межзвездной пыли в окрестности Сатурна. В рамках миссии КА Стардаст [3] несколько образцов межзвездной пыли было доставлено на Землю. Исследование распределения частиц межзвездной пыли предоставляет возможность удаленной диагностики межзвездного вещества, окружающего нашу Солнечную систему, поэтому эта область исследований сейчас активно развивается. В настоящее время планируется ряд новых космических экспериментов по изучению пыли. Для анализа полученных экспериментальных дан-

ных, а также для планирования будущих миссий по исследованию межзвездной пыли необходимо проводить теоретические исследования распределения этих частиц в гелиосфере.

Первые исследования траекторий межзвездных пылевых частиц [4, 5] были инициированы задолго до их экспериментального обнаружения. Динамика движения пылинок, в основном, определяется действием трех сил: гравитационным притяжением к Солнцу, радиационным давлением со стороны солнечных фотонов, а также электромагнитной силой. В случаях, когда гравитационное притяжение к Солнцу преобладает над радиационным давлением, происходит накопление пылевых частиц за счет гравитационной фокусировки [4]. Однако возможна и обратная ситуация, когда радиационное давление превосходит гравитационное притяжение — в этом случае происходит фильтрация частиц пыли на расстояниях порядка нескольких астрономических единиц [6]. Для пылинок относительно небольшого размера, а также для частиц, для которых гравитационное притяжение и радиационное давление взаимно компенсируются, основной силой, определяющей динамику, является электромагнитная сила.

В работах [7–13] исследовались распределения пылевой компоненты в гелиосфере с учетом различных физических эффектов. При этом использовался метод Монте-Карло, а распределения пылевых частиц по пространству и скоростям определялись на численных сетках с небольшим пространственным разрешением. Такие методы не позволяют эффективно находить и исследовать возможные сингулярности в распределениях, так как для этого требуется чрезвычайно высокое разрешение сетки и, как следствие, большое количество моделируемых частиц.

В данной работе для нахождения распределения пыли мы используем альтернативный лагранжев подход. Пылевая компонента рассматривается в рамках модели холодного газа, а для определения концентрации частиц решается уравнение неразрывности, записанное в лагранжевых координатах. Для решения уравнения неразрывности в лагранжевых переменных используется полный лагранжев метод (ПЛМ), который в литературе часто называют методом Осипцова [14]. ПЛМ был уже неоднократно применен к решению различных задач: взаимодействие гиперзвукового потока и сверхзвукового источника с дисперсной фазой (модель испарения ядра, [15]); неортогональное столкновение двух различных вязких несжимаемых потоков, один из которых содержит твердые инерционные частицы [16]; обтекание запыленным газом каскада турбин [14]; исследование областей накопления частиц в самогравитирующих средах [17] и так далее. Некоторые результаты применения лагранжева метода к вычислению концентрации межзвездной пыли в гелиосфере изложены в [18].

Для сравнения результатов и оценки эффективности ПЛМ проведены вычисления концентрации межзвездной пыли также и в рамках классического эйлерова подхода методом Монте-Карло. Математические постановки задач, используемые при эйлеровом и лагранжевом подходах, представлены в разделе 1. В разделе 2 описаны факторы, влияющие на динамику движения межзвездных пылевых частиц в гелиосфере. Результаты моделирования представлены в разделе 3. В разделе 4 сформулированы выводы о преимуществах и недостатках каждого из представленных методов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для математического описания подходов, используемых для моделирования распределения концентрации пыли, введем декартову и связанную с ней сферическую системы координат (рис. 1). Начало системы координат O совместим с Солнцем, ось Oy направим навстречу вектору скорости набегающего потока межзвездной среды v_{ISM} , ось Oz — вдоль оси вращения Солнца, ось Ox дополняет систему $Oxyz$ до правильного трехгранника. Полярный угол ϑ сферической системы координат будем отсчитывать от оси Oz , азимутальный угол φ — от оси Ox к оси Oy . Будем также предполагать, что гелиосферный токовый слой (поверхность, на которой меняет знак полярность магнитного поля) является плоским, стационарным и лежит в плоскости Oxy . Такое предположение позволяет наглядно продемонстрировать эффекты, связанные с сингулярностями распределения концентрации.

1.1. Решение кинетического уравнения для пылевой компоненты методом Монте-Карло

Стандартным подходом к описанию движения пылевой компоненты является подход, основанный на кинетической теории. В рамках этого подхода для функции распределения по скоростям f_d решается кинетическое уравнение

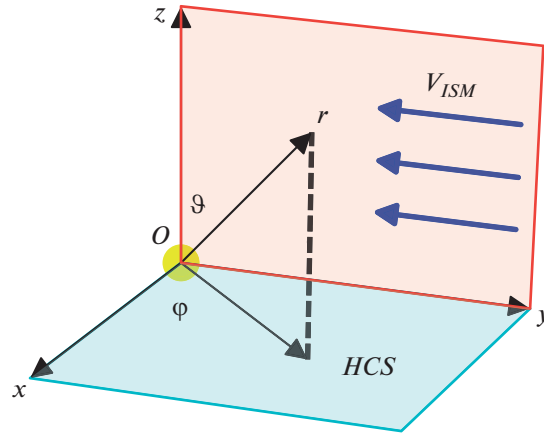


Рис. 1. Система координат. Начало координат O совпадает с Солнцем, ось Oy направлена навстречу вектору скорости набегающего потока межзвездной среды, ось Oz — вдоль оси вращения Солнца, ось Ox дополняет систему $Oxyz$ до правильного трехгранника. Плоскость голубого цвета (Oxy) соответствует поверхности гелиосферного токового слоя (HCS).

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{F}$ — поле результирующей силы, действующей на частицы пыли, а $\frac{\partial f_d}{\partial t} = 0$ в силу предположения о стационарности гелиосферного магнитного поля. Из-за относительно малой концентрации пылевых частиц в межзвездной среде ($\sim 50 \text{ км}^{-3}$) можно пренебречь столкновениями пылевых частиц между собой, поэтому интеграл столкновений в правой части уравнения (1.1) отсутствует.

Несмотря на то что в реальности в распределении пыли по скоростям может присутствовать небольшая дисперсия (до 15%, [19]), будем предполагать, что все частицы начинают свое движение в гелиосфере с одинаковой скоростью, равной $\mathbf{v}_{ISM}$. Поэтому в качестве граничного условия будем использовать дельта-функцию

$$f_d|_{y \rightarrow +\infty} = n_{ISM} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ISM}),$$

где n_{ISM} — концентрация пыли в межзвездной среде.

Макроскопические характеристики пылевой компоненты определяются как соответствующие интегралы от функции распределения. Например, для концентрации имеем:

$$n_d(\mathbf{r}) = \int f_d(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

Решение кинетического уравнения (1.1) находится методом Монте-Карло. Вся расчетная область разбивается на ячейки. Начальную плоскость $y = y_\infty$, откуда начинают свое движение пробные частицы пыли, выберем на расстоянии $y_\infty = 100$ астрономических единиц (а.е.) от Солнца, что приблизительно соответствует расстоянию до гелиосферной ударной волны [20, 21]. Положение частиц на начальной плоскости разыгрывается случайным образом. Далее численно решаются уравнения движения частиц и рассчитываются траектории. Вдоль траекторий при прохождении частицами пыли расчетной ячейки вычисляется время нахождения частицы внутри ячейки. Это время является случайной величиной, математическое ожидание которой равно искомой концентрации (с точностью до нормировки). При достаточно большом количестве рассмотренных траекторий выборочное среднее по полученным реализациям случайной величины будет стремиться к математическому ожиданию по закону больших чисел:

$$\frac{F_0}{N} \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\Delta \mathbf{r}_c} \rightarrow n_d(\mathbf{r}_c),$$

где F_0 — поток частиц, входящих в расчетную область через границу в единицу времени, N — количество рассмотренных траекторий пылинок, t_i — время, которое i -я частица пыли провела в

ячейке с центром в точке $\mathbf{r}_c$, $\Delta \mathbf{r}_c$ — объем этой ячейки. Более подробно используемый метод решения описан в работе [13].

1.2. Модель холодного газа. Лагранжев подход

Наряду с кинетическим подходом для описания распределения межзвездной пыли в гелиосфере можно использовать модель холодного газа, которая определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial n_d}{\partial t} + \operatorname{div}(n_d \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \end{cases} \quad (1.2)$$

где в правой части уравнения движения отсутствуют компоненты тензора напряжений. Такой подход для описания пылевой компоненты использовался, например, в работе [22]. Граничные условия для системы (1.2) формулируются следующим образом:

$$n_d|_{y \rightarrow +\infty} = n_{ISM}, \quad \mathbf{v}|_{y \rightarrow +\infty} = -v_{ISM} \mathbf{e}_y.$$

Характеристики системы уравнений (1.2) совпадают с траекториями частиц пыли, а траектории для заданной электромагнитной силы могут пересекаться, что означает, что в точке пересечения траекторий решения (1.2) не существует. Эту проблему можно устранить, если использовать лагранжев подход к описанию движения сплошной среды.

Уравнение неразрывности в лагранжевых переменных имеет следующий вид:

$$n_d(t, \mathbf{r}_0) |\det(J_{ij}(t, \mathbf{r}_0))| = n_d(0, \mathbf{r}_0), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ — лагранжевы координаты частицы. В качестве лагранжевых координат рассматриваются декартовы координаты пылинки в начальный момент времени. $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{j,0}}$ — матрица Якоби преобразования от лагранжевых координат $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ к эйлеровым (x_1, x_2, x_3) . Таким образом, задача вычисления концентрации пылевых частиц вдоль их траекторий сводится к вычислению компонент матрицы J_{ij} , а для этого нужно сформулировать дифференциальные уравнения на поиск компонент J_{ij} [15].

Рассмотрим радиус-вектор $\mathbf{r}$ и вектор скорости $\mathbf{v}$ индивидуальной частицы как функции лагранжевых координат и времени: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}(t, x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_0) = \mathbf{v}(t, x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$. В этом случае уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} \frac{\partial x_i(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} = v_i, \\ \frac{\partial v_i(t, \mathbf{r}_0)}{\partial t} = F_i. \end{cases}$$

В рамках полного лагранжева метода вводится еще одна вспомогательная матрица $\Omega_{ij} = \frac{\partial J_{ij}}{\partial t}$ и проводится следующая цепочка преобразований с учетом достаточной гладкости компонент радиус-вектора и вектора скорости

$$\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{j,0}} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_{j,0}} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial F_i}{\partial x_{j,0}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{j,0}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_k} J_{kj}.$$

Поскольку поле результирующей силы $\mathbf{F}$ задано (см. разд. 2), то для каждой *фиксированной частицы пыли* получаем замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [15]

$$d \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i, \\ \frac{\partial v_i}{dt} = F_i, \\ \frac{dJ_{ij}}{dt} = \Omega_{ij}, \\ \frac{d\Omega_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_k} J_{kj}. \end{cases} \quad (1.4)$$

В качестве начальных условий нужно взять начальные координаты рассматриваемой фиксированной частицы (т.е. в нашем случае просто ее лагранжевы координаты), а скорость положить равной $\mathbf{v}_{ISM} = -v_{ISM}\mathbf{e}_y$. В этом случае компоненты матриц J_{ij} и Ω_{ij} могут быть вычислены как

$$\begin{cases} \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = -v_{ISM}\mathbf{e}_y, \\ J_{ij}|_{t=0} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{j,0}} \right) \Big|_{t=0} = \delta_{ij}, \\ \Omega_{ij}|_{t=0} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{j,0}} \right) \Big|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Решая систему (1.4) с начальными условиями (1.5), будем находить компоненты J_{ij} , а далее из уравнения (1.3) вычислять распределение концентрации вдоль траекторий пылевых частиц.

2. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МЕЖЗВЕЗДНЫХ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ

В обоих описанных выше методах вычисления распределения концентрации необходимым шагом является определение характеристик записанных уравнений, которые совпадают с траекториями частиц. На движение частиц межзвездной пыли в гелиосфере основное влияние оказывают три силы: сила гравитационного притяжения, сила радиационного давления и электромагнитная сила. Для простоты будем считать, что пылинки имеют сферическую форму, и их радиус равен a . Силы гравитационного притяжения и радиационного давления обратно пропорциональны квадрату расстояния до Солнца и направлены в противоположные стороны вдоль линии, соединяющей Солнце и частицу пыли. В зависимости от химического состава пылинок и их размера возможен случай, когда эти силы уравновешивают друг друга. В данной работе для удобства демонстрации и анализа особенностей в распределении концентрации пыли будет рассмотрен именно такой случай. Силы гравитационного притяжения и радиационного давления полностью компенсируют друг друга, например, в случае астрономических силикатов (MgFeSiO_4 , [23]) размера $a = 0.37$ мкм. Следовательно, на такие частицы действует только электромагнитная сила.

Поскольку силовые линии солнечного магнитного поля вморожены в солнечный ветер, выражение для электромагнитной силы имеет следующий вид:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c_0 m} [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) \times \mathbf{B}], \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}_p$ — скорость плазмы солнечного ветра, q — электрический заряд пылинки, m — масса пылинки, c_0 — скорость света, $\mathbf{B}$ — индукция гелиосферного магнитного поля. Тогда в гауссовой системе единиц для заряда и массы будут справедливы следующие соотношения: $q = Ua$, $m = \frac{4}{3}\rho\pi a^3$, где U — поверхностный потенциал пылинки, ρ — массовая плотность материала, из которого состоят частицы пыли. Будем предполагать, что распределение скорости плазмы солнечного ветра является сферически-симметричным (что справедливо внутри области, ограниченной гелиосферной ударной волной)

$$\mathbf{v}_p = v_{sw}\mathbf{e}_r, \quad (2.2)$$

а для гелиосферного магнитного поля будем использовать модель Паркера [24]

$$B_r = p B_E \left(\frac{r_E}{r} \right)^2, \quad B_\varphi = -p \frac{B_E \Omega r_E}{v_{sw}} \left(\frac{r_E}{r} \right) \sin \theta, \quad B_\theta = 0, \quad (2.3)$$

где B_E — индукция магнитного поля на орбите Земли, r_E — расстояние от Солнца до Земли, Ω — угловая скорость вращения Солнца вокруг своей оси, p — полярность гелиосферного магнитного поля, которая меняет свой знак при пересечении поверхности гелиосферного токового слоя. В данном случае предполагается, что гелиосферный токовый слой плоский, стационарный и находится в плоскости, перпендикулярной оси солнечного вращения, поэтому

$$p = \begin{cases} -1, & z > 0, \\ 1, & z \leq 0. \end{cases}$$

Такая конфигурация магнитного поля, как будет показано в дальнейшем, создает особые условия в гелиосфере для возникновения сингулярностей в распределении концентрации пылевых частиц.

Если подставить выражения (2.2) и (2.3) для скорости солнечного ветра и индукции магнитного поля в (2.1), а затем провести обезразмеривание на характерные величины $L_* = \frac{GM_S}{v_{ISM}^2}$ и $V_* = v_{ISM}$, то получим следующее выражение для результирующей силы в безразмерном виде

$$\hat{\mathbf{F}} = p\varepsilon \left[(\kappa \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{e}_r) \times \left(\alpha \frac{\mathbf{e}_r}{\hat{r}^2} - \frac{\sin \vartheta}{\hat{r}} \mathbf{e}_\varphi \right) \right],$$

где введены безразмерные параметры

$$\varepsilon = \frac{3UB_E \Omega r_E^2}{4\pi a^2 c_0 v_{ISM}^2}, \quad \kappa = \frac{v_{ISM}}{v_{sw}}, \quad \alpha = \frac{v_{sw}}{L_* \Omega},$$

$$\text{а } \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} L_* / V_*^2, \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / L_*, \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} / V_*, \quad \hat{r} = r / L_*.$$

Для Солнца значения безразмерных параметров $\kappa = v_{ISM} / v_{sw} \approx 26.4 / 400.0 \approx 0.07 \ll 1$, $\alpha = v_{sw} / (L_* \Omega) \approx 0.8$, поэтому всеми членами, содержащими в качестве множителя параметр κ , можно пренебречь, и выражение для вектора результирующей силы в безразмерном виде принимает упрощенный вид

$$\hat{\mathbf{F}} = -p\varepsilon \frac{\sin \vartheta}{\hat{r}} \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.4)$$

т.е. существенное влияние на динамику пылинок оказывает только азимутальная компонента гелиосферного магнитного поля. В результате получаем, что траектории движения межзвездных пылевых частиц можно находить с помощью численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \hat{\mathbf{v}}, \\ \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = -p\varepsilon \frac{\sin \vartheta}{\hat{r}} \mathbf{e}_\varphi. \end{cases}$$

Можно заметить, что все пылевые частицы, которые в начальный момент находились в плоскости $X=0$ (изображена красным на рис. 1), не выходят за ее пределы (вектор $\mathbf{e}_\varphi$ для таких частиц тоже будет лежать в этой плоскости). Для простоты будем рассматривать только частицы, траектории которых лежат в плоскости $X=0$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для начала на качественном уровне покажем, как происходит движение межзвездных пылевых частиц. На рис. 2 представлены траектории частиц межзвездной пыли в плоскости $X=0$. В небольшой окрестности гелиосферного токового слоя (до ~ 1 а.е.) образуются каустики — огибающие семейств траекторий частиц пыли. По определению, каустики каждым своим конечным сегментом касаются бесконечного числа траекторий из соответствующего семейства, поэтому в

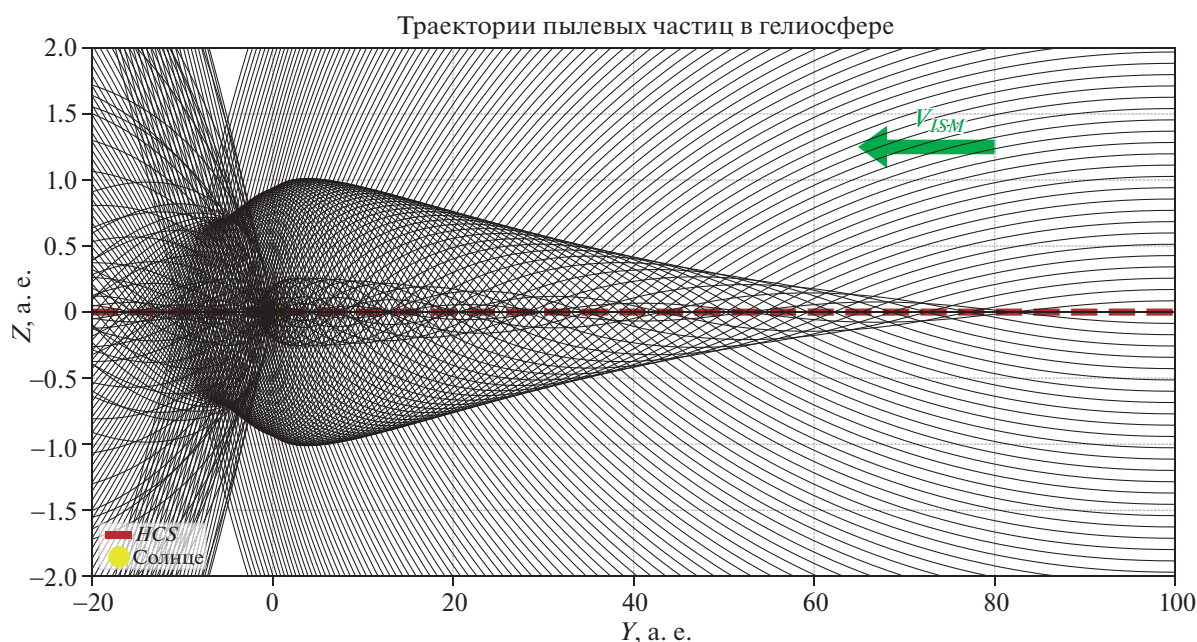


Рис. 2. Траектории частиц межзвездной пыли в гелиосфере в плоскости $X=0$. В малой окрестности гелиосферного токового слоя (прямая $Z=0$) формируются каустики – огибающие семейств траекторий частиц пыли. *HCS* – гелиосферный токовый слой.

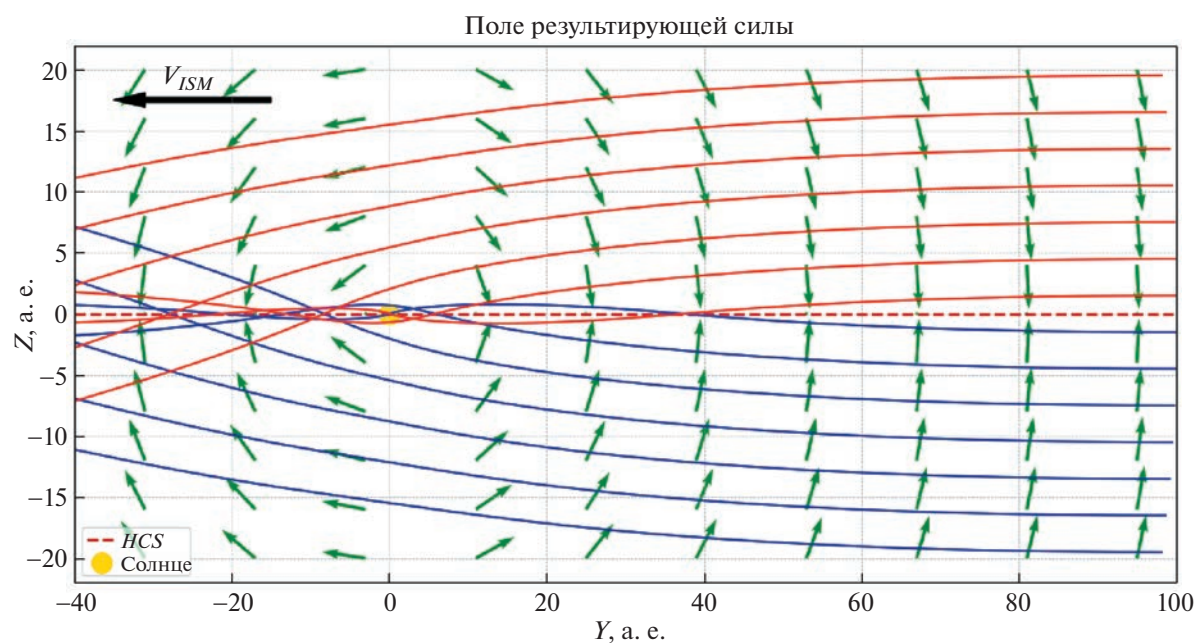


Рис. 3. Поле направлений результирующей силы, действующей на частицы. Электромагнитная сила в каждой точке направляет пылинки к плоскости токового слоя. Возникают колебания частиц пыли вокруг плоскости токового слоя. Амплитуда этих колебаний уменьшается по ходу движения частиц в гелиосфере.

их окрестности должны формироваться области резкого повышения концентрации частиц пыли. Формирование каустик происходит из-за того, что полярность межпланетного магнитного поля, а следовательно и направление действующей на частицу силы, меняется при пересечении токового слоя. Поле направлений вектора результирующей силы, действующей на частицы, показано на рис. 3. Полярность гелиосферного магнитного поля такова, что электромагнитная сила в каждой точке направляет пылинки к плоскости токового слоя, поэтому частицы осциллиру-

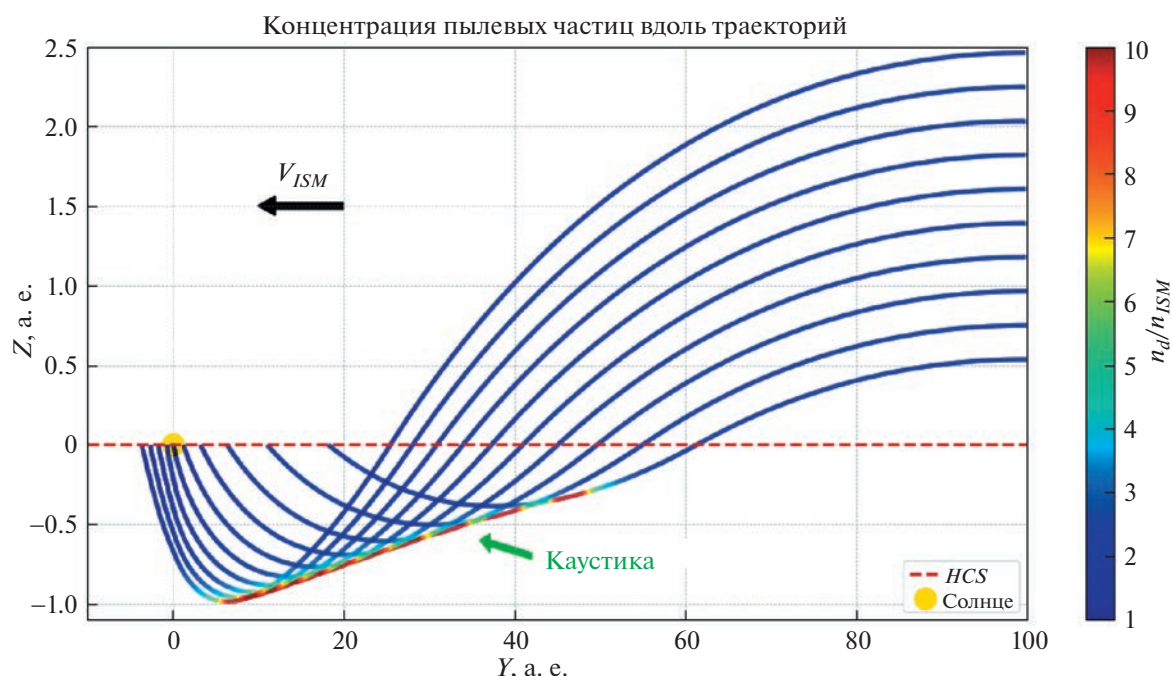


Рис. 4. Траектории частиц межзвездной пыли и концентрация, вычисленная вдоль этих траекторий с использованием метода Осипова. Когда траектория касается огибающей, концентрация резко возрастает из-за того, что величина якобиана приближается к нулю.

ют вокруг этой плоскости. Более того, из выражения (2.4) следует, что абсолютная величина этой силы обратно пропорциональна расстоянию до Солнца, поэтому амплитуда осцилляций вокруг токового слоя будет уменьшаться вдоль траектории, и, следовательно, общий поток пылинок будет сужаться при приближении к Солнцу, за счет чего и происходит формирование каустик.

3.1. Результаты: лагранжев подход

В лагранжевом подходе концентрация частиц вычисляется вдоль их траекторий. На рис. 4 показаны начальные участки нескольких траекторий пылевых частиц в плоскости $X = 0$, а концентрация пыли вдоль этих траекторий показана цветом. Когда траектория касается огибающей, концентрация резко возрастает из-за того, что величина якобиана приближается к нулю. Это происходит вследствие того, что трубка тока из траекторий, начинающих свое движение из некоторого конечного участка на границе расчетной области, в окрестности огибающей сужается до нулевой ширины [13] под действием электромагнитной силы, прижимающей пылинки к плоскости токового слоя.

Лагранжев подход позволяет продолжить расчет концентрации вдоль траектории и после прохождения первой каустики. В дальнейшем траектории продолжают осциллировать вокруг гелиосферного токового слоя, образуя множественные вторичные каустики. Эти каустики уже гораздо сложнее увидеть на рисунках с траекториями. Однако полный лагранжев метод позволяет определить точно положения всех вторичных каустик, так как при их пересечении концентрация вдоль траектории неограниченно возрастает. На рис. 5 представлены траектории пылевых частиц и несколько каустик. Каустики были получены на основе точек траекторий, где значение концентрации превышает некоторое предельное (для наглядности визуализации для каждой каустики это значение свое). Разные каустики соответствуют разным типам траекторий: каустика красного цвета огибает траектории, которые один раз пересекли токовый слой, каустики синего цвета соответствуют траекториям, которые два раза пересекли эту плоскость и так далее — чем ближе каустика располагается к плоскости токового слоя, тем больше пересечений этой поверхности испытали траектории пылевых частиц (до пересечения с каустикой), которые эта каустика огибает.

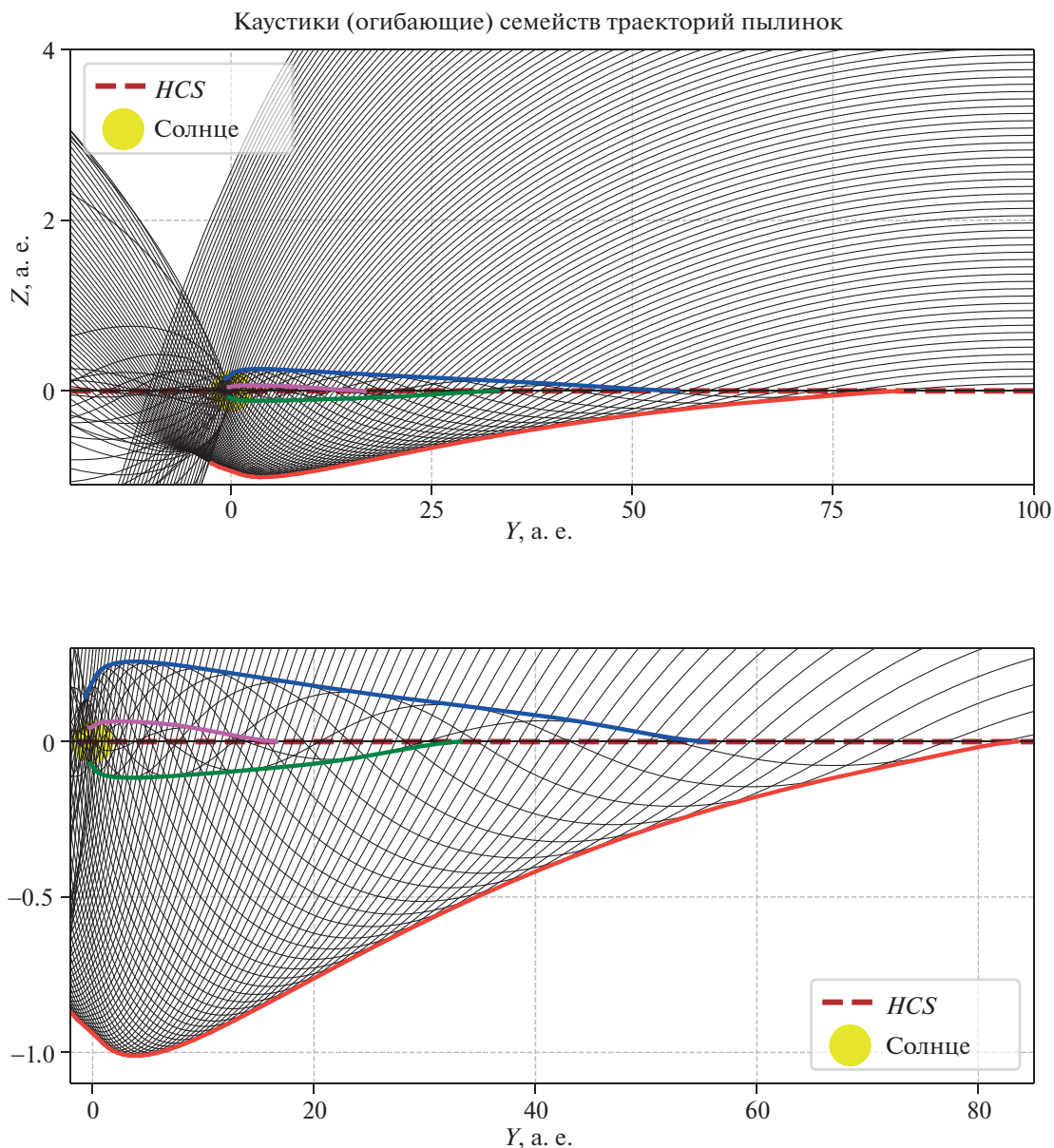


Рис. 5. Каустики траекторий пылевых частиц в гелиосфере. Разные каустики соответствуют разным типам траекторий пылевых частиц по количеству пересечений частицами плоскости токового слоя.

3.2. Эйлеров подход

Для сравнения эффективности эйлерова и лагранжева подходов при определении особенностей в распределении концентрации межзвездной пыли мы провели расчеты методом Монте-Карло. На рис. 6 представлено двумерное распределение концентрации частиц межзвездной пыли в плоскости $X = 0$, полученное в рамках эйлерова подхода. Видно, что в окрестности плоскости гелиосферного токового слоя по обе стороны от него на расстояниях до 1 а.е. образуется область повышенной концентрации пыли, ограниченная тонкими слоями резкого увеличения концентрации. Данные слои как раз соответствуют упомянутым каустикам, и возникновение области повышенной концентрации связано с особой конфигурацией гелиосферного магнитного поля с отрицательной полярностью над токовым слоем и положительной — под ним.

Одномерные распределения концентрации вдоль линий $X = 0, Y = \bar{Y}$ для различных значений $\bar{Y}$ представлены на рис. 7. В малой окрестности токового слоя для всех $Y \geq 0$ наблюдается

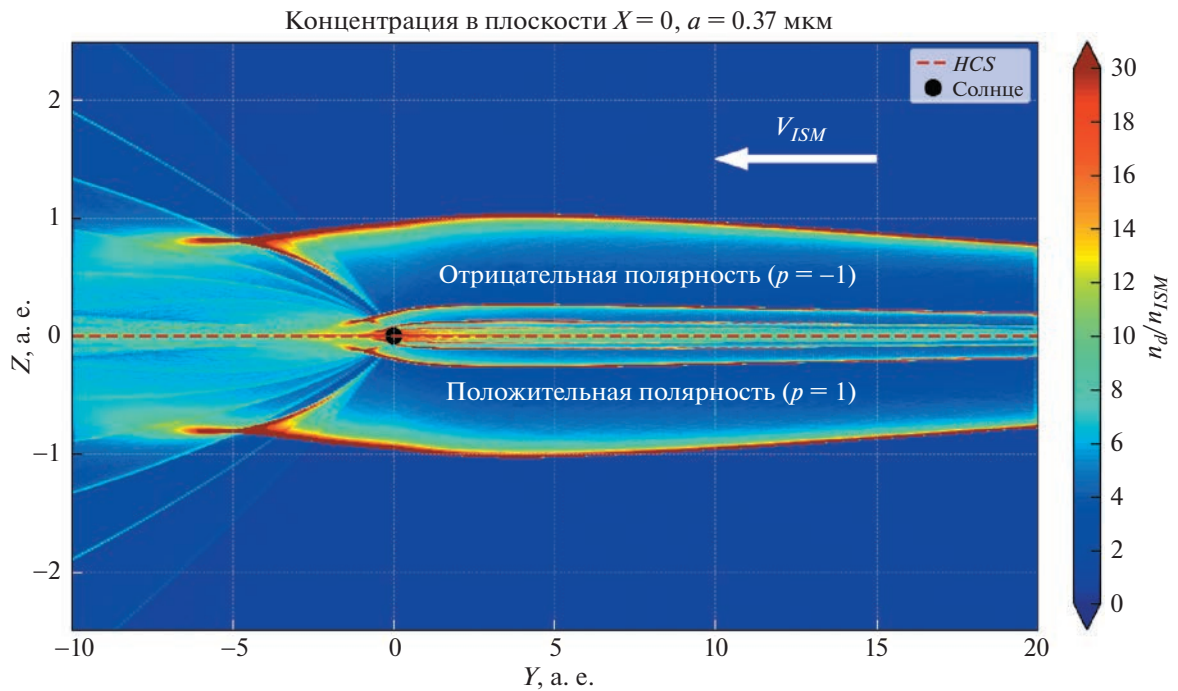


Рис. 6. Распределение концентрации межзвездной пыли в плоскости $X = 0$, вычисленное с использованием эйлерова подхода. В окрестности плоскости гелиосферного токового слоя по обе стороны от него образуется область повышенной концентрации пыли. Количество рассмотренных траекторий $N = 2\,000\,000$, относительная статистическая ошибка не превышает 3% в каждой точке. Размер ячеек сетки расчетной области 0.001 а.е.

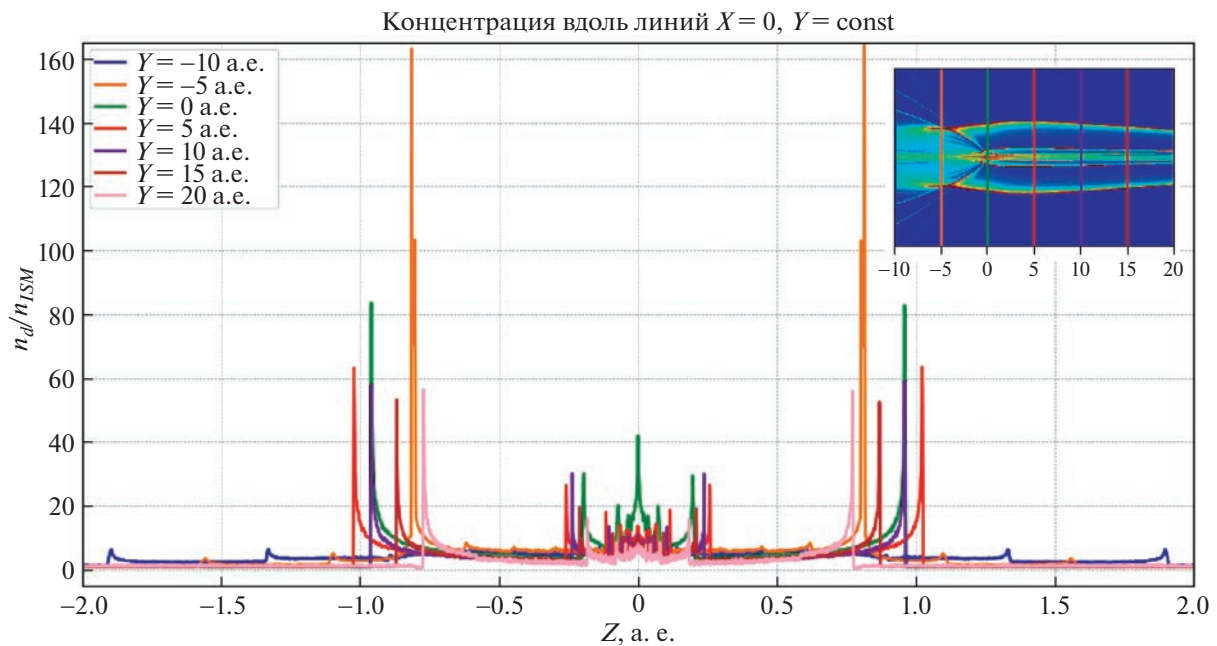


Рис. 7. Распределение концентрации межзвездной пыли в плоскости $X = 0$, $Y = \bar{Y}$ для фиксированных значений $\bar{Y} = -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20$ а.е. В окрестности гелиосферного токового слоя наблюдается сложная структура, состоящая из множества тонких слоев резкого повышения концентрации.

сложная структура, состоящая из нескольких менее ярко выраженных особенностей в распределении концентрации, хотя механизм их образования подобен тому же, что и для особенностей, лежащих на внешних каустиках, ограничивающих область повышенной концентрации. При

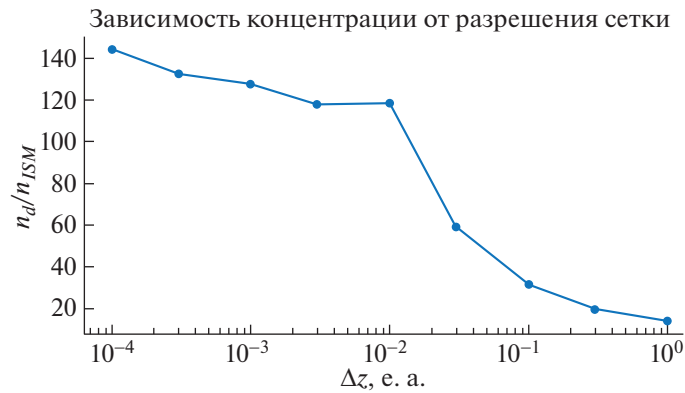


Рис. 8. Исследование сходимости концентрации в окрестности каустики от размера ячейки сетки. Численное значение концентрации в ячейке, содержащей каустику, монотонно возрастает с увеличением разрешения сетки, за исключением перехода от сетки с ячейками размера 10^{-2} а.е. к сетке с ячейками размера 3×10^{-3} а.е.

$Y < 0$ эта структура разрушается, и особенности пропадают, однако на расстоянии ~ 0.8 а.е. от гелиосферного токового слоя возникают другие особенности, и примечательно, что значение концентрации в этих точках является наибольшим среди всех рассмотренных ($Y = -5$ а.е. на рис. 7).

На рис. 7 в области $Y > 0$ точки, в которых концентрация принимает наибольшие значения, очевидно, соответствуют положениям внешней каустики при различных Y . Исследуем то, как численное значение концентрации в ячейке, содержащей точку каустики, зависит от разрешения сетки. На рис. 8 представлена зависимость соответствующей величины от размера сетки ΔZ для точки внешней каустики при $Y = 5$ а.е. За исключением перехода от сетки с ячейками размера 10^{-2} а.е. к сетке с ячейками размера 3×10^{-3} а.е. наблюдается монотонное возрастание значения концентрации в ячейке, содержащей точку каустики, с увеличением разрешения сетки. Такая зависимость указывает на наличие сингулярности в распределении концентрации в этой ячейке, т.е. ожидается, что концентрация будет возрастать до бесконечности при увеличении разрешения сетки. Однако возможность использования сеток еще более высокого разрешения ограничена мощностью имеющихся вычислительных ресурсов. Таким образом, можем заключить, что эйлеров подход не является эффективным при исследовании особенностей распределения концентрации пылевых частиц.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом работы является определение областей накопления пылевой компоненты внутри гелиосферы. В рамках лагранжева подхода для модели холодного газа методом Осипцова нами были определены все каустики семейств траекторий частиц межзвездной пыли. Именно на каустиках в рамках холодной модели концентрация частиц становится бесконечной, возникают сингулярности — интегрируемые особенности — в распределении концентрации частиц. Данные особенности были найдены также в рамках эйлерова подхода с использованием метода Монте-Карло. Было показано, что для получения сопоставимой с методом Осипцова точности вычислений требуется чрезвычайно высокое разрешение расчетной сетки, а следовательно, и большое количество рассматриваемых частиц. Так, для приемлемых значений относительной статистической погрешности (до 5%) при использовании метода Монте-Карло в каждую ячейку расчетной сетки должно попадать по 100–200 частиц пыли, в то время как в рамках метода Осипцова достаточно провести вычисления вдоль одной траектории.

Необходимо отметить, что в настоящей работе делался ряд предположений. Самыми существенными из них являются: 1) предположение о стационарности и плоской форме гелиосферного токового слоя, 2) модель холодного газа.

В реальности гелиосферный токовый слой поворачивается в соответствии с 22-летним циклом солнечной активности, и, следовательно, конфигурация магнитного поля, при которой происходит фокусировка пылевых частиц, будет справедлива лишь непродолжительный промежуток времени — в определенные периоды солнечных минимумов. Упрощенная постановка с плоским стационарным гелиосферным токовым слоем позволила получить наглядные результаты,

исследовать физическую причину образования областей накопления частиц, а также определить ограничения на параметры вычислительных схем, что, как было показано в работе, особенно важно при использовании эйлерова подхода. Стоит отметить, что описанные в работе численные модели могут быть легко обобщены и на случай нестационарного неплоского токового слоя.

Вторым принятым упрощением является модель холодного газа. В настоящее время данное упрощение используется во всех основных моделях распределения межзвездной пыли в гелиосфере. Тем не менее наличие некоторой тепловой компоненты в скоростях частиц следует ожидать из-за флуктуаций электромагнитного поля в межзвездной среде. Оценки показывают (см., например, [19]), что тепловые скорости межзвездных частиц в среде составляют до 15% от их массовой скорости.

Работа выполнена в рамках гранта РНФ 19-12-00383.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grun E., Zook H.A., Baguhl M., Balogh A., Fechtig H., Forsyth R., Hanner M.S., Horanyi M., Kissel J., Lindblad B.-A., Linkert D., Linkert G., Mann I., McDonnell J.A.M., Morfill G.E., Phillips J.L., Polanskey C., Schwehm G., Sidiq N., Staubach P., Svestka J., Taylor A.* Discovery of Jovian dust streams and interstellar grains by the Ulysses spacecraft // *Nature*. 1993. V. 362. P. 428–430.
<https://doi.org/10.1038/362428a0>
2. *Altobelli N., Postberg F., Fiege K., Tieloff M., Kimura H., Sterken V.J., Hsu H.-W., Hillier J., Khawaja N., Moragas-Klostermeyer G., Blum J., Burton M., Srama R., Kempf S., Grun E.* Flux and composition of interstellar dust at Saturn from Cassini's Cosmic Dust Analyzer // *Science*. 2016. V. 352. № 6283. P. 312–318.
<https://doi.org/10.1126/science.aac6397>
3. *Westphal A.J., Stroud R.M., Bechtel H.A., Brenker F.E., Butterworth A.L., Flynn G.J., Frank D.R., Gainsforth Z., Hillier J.K., Postberg F., Simionovici A.S., Sterken V.J., Nittler L.R., Allen C., Anderson D., Ansari A., Bajt S., Bastien R.K., Bassim N., Bridges J., Brownlee D.E., Burchell M., Burghammer M., Changela H., Cloetens P., Davis A.M., Doll R., Floss C., Grun E., Heck P.R., Hoppe P., Hudson B., Huth J., Kearsley A., King A.J., Lai B., Leitner J., Lemelle L., Leonard A., Leroux H., Lettieri R., Marchant W., Ogliore R., Ong W.J., Price M.C., Sandford S.A., Tresseras J.-A.S., Schmitz S., Schoonjans T., Schreiber K., Silversmit G., Solé V.A., Srama R., Stadermann F., Stephan T., Stodolna J., Sutton S., Tieloff M., Tsou P., Tyliczszak T., Vekemans B., Vincze L., Von Korff J., Wordsworth N., Zevin D., Zolensky M.E.* Evidence for interstellar origin of seven dust particles collected by the Stardust spacecraft // *Science*. 2014. V. 345. № 6198. P. 786–791.
<https://doi.org/10.1126/science.1252496>
4. *Bertaux J.L., Blamont J.E.* Possible evidence for penetration of interstellar dust into the Solar System // *Nature*. 1976. V. 262. № 5566. P. 263–266.
<https://doi.org/10.1038/262263a0>
5. *Levy E.H., Jokipii J.R.* Penetration of interstellar dust into the solar system // *Nature*. 1976. V. 264. P. 423.
<https://doi.org/10.1038/264423a0>
6. *Sterken V.J., Altobelli N., Kempf S., Kruger H., Srama R., Strub P., Grun E.* The filtering of interstellar dust in the solar system // *Astronomy and Astrophysics*. 2013. V. 552. P. A130.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201219609>
7. *Morfill G.E., Grun E.* The motion of charged dust particles in interplanetary space - II. Interstellar grains // *Planetary and Space Science*. 1979. V. 27. № 10. P. 1283–1292.
[https://doi.org/10.1016/0032-0633\(79\)90106-5](https://doi.org/10.1016/0032-0633(79)90106-5)
8. *Landgraf M.* Modeling the motion and distribution of interstellar dust inside the heliosphere // *Journal of Geophysical Research*. 2000. V. 105. № A5. P. 10303–10316.
<https://doi.org/10.1029/1999JA900243>
9. *Linde T.J., Gombosi T.I.* Interstellar dust filtration at the heliospheric interface // *Journal of Geophysical Research*. 2000. V. 105. № A5. P. 10411–10418.
<https://doi.org/10.1029/1999JA900149>
10. *Sterken V.J., Altobelli N., Kempf S., Schwehm G., Srama R., Grun E.* The flow of interstellar dust into the solar system // *Astronomy and Astrophysics*. 2012. V. 538. P. A102.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117119>
11. *Slavin J.D., Frisch P.C., Muller H.-R., Heerikhuisen J., Pogorelov N.V., Reach W.T., Zank G.* Trajectories and Distribution of Interstellar Dust Grains in the Heliosphere // *The Astrophysical Journal*. 2012. V. 760. № 1. P. 46.
<https://doi.org/10.1088/0004-637X/760/1/46>
12. *Alexashov D.B., Katushkina O.A., Izmodenov V.V., Akaev P.S.* Interstellar dust distribution outside the heliosphere: deflection at the heliospheric interface // *MNRAS*. 2016. V. 458. № 3. P. 2553–2564.
<https://doi.org/10.1093/mnras/stw514>

13. *Godenko E.A., Izmodenov V.V.* Effects of Dispersion of the Dust Velocity in the LISM on the Interstellar Dust Distribution inside the Heliosphere // *Astronomy Letters*. 2021. V. 47. № 1. P. 50–60.
<https://doi.org/10.1134/S1063773721010047>
14. *Healy D.P., Young J.B.* Full Lagrangian methods for calculating pconcentration fields in dilute gas-pflows // *Proceedings of the Royal Society of London Series A*. 2005. V. 461. № 2059. P. 2197–2225.
<https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1413>
15. *Osiptsov A.N.* Full Lagrangian Modelling of Dust Admixture in Gas Flows // *Astrophysics and Space Science*. 2000. V. 274. P. 377–386.
<https://doi.org/10.1023/A:1026557603451>
16. *Лебедева Н.А., Осипцов А.Н.* Течения вблизи критических точек при несимметричном столкновении вязких дисперсных потоков // *Изв. РАН. МЖГ*. 2007. № 5. С. 85–97.
17. *Ahuja R., Belonoshko A.B., Johansson B., Osiptsov A.N.* Inertial phase separation in rotating self-gravitating media // *Fluid Dynamics*. 2004. V. 39. № 6. P. 920–932.
<https://doi.org/10.1007/s10697-005-0027-2>
18. *Mishchenko A.V., Godenko E.A., Izmodenov V.V.* Lagrangian fluid approach for the modelling of peculiarities of the interstellar dust distribution in the astrospheres/heliosphere // *MNRAS*. 2020. V. 491. № 2. P. 2808–2821.
<https://doi.org/10.1093/mnras/stz3193>
19. *Hoang T., Lazarian A., Schlickeiser R.* Revisiting Acceleration of Charged Grains in Magnetohydrodynamic Turbulence // *The Astrophysical Journal*. 2012. V. 747. № 1. P. 54.
<https://doi.org/10.1088/0004-637X/747/1/54>
20. *Баранов В.Б., Измоиенов В.В.* Модельные представления о взаимодействии солнечного ветра со сверхзвуковым потоком межзвездной среды. Предсказание и интерпретация экспериментальных данных // *Изв. РАН. МЖГ*. 2006. № 5. С. 19–40.
21. *Izmodenov V.V., Alexashov D.B.* Magnitude and direction of the local interstellar magnetic field inferred from Voyager 1 and 2 interstellar data and global heliospheric model // *Astronomy and Astrophysics*. 2020. V. 633. P. L12.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201937058>
22. *van Marle A.J., Meliani Z., Keppens R., Decin L.* Computing the Dust Distribution in the Bow Shock of a Fast-moving, Evolved Star // *The Astrophysical Journal Letters*. 2011. V. 734. № 2. P. L26.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201937058>
23. *Greenberg J.M., Li A.* What are the true astronomical silicates? // *Astronomy and Astrophysics*. 1996. V. 309. P. 258–266.
24. *Parker E.N.* Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields // *The Astrophysical Journal*. 1958. V. 128. P. 664.
<https://doi.org/10.1086/146579>