

ISSN 1024-7084

Номер 3

Май - Июнь 2023

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2023

К 100-летию юбилею Горимира Горимировича Чёрного	3
О возможности развития неустойчивости поверхности купола всплывающего пузыря <i>Е. Е. Мешков, Р. В. Мокрецов, И. А. Новикова, С. Ю. Седов, И. Р. Смагин</i>	6
К теории магнитоиндуцированных циркуляций в тромбированных каналах <i>А. Ю. Мусихин, А. Ю. Зубарев</i>	12
Реконструкция трехмерных структур электрогидродинамических течений, индуцированных геометрией плоского лезвия <i>Z. Yan, C. Louste, J. Fang, and W. Wu</i>	22
Сжимаемые течения с осциллирующими границами <i>О. А. Логвинов</i>	36
Касательное напряжение сдвига при колебательном течении вязкоупругой несжимаемой жидкости в плоском канале <i>К. Наврузов, Ш. Б. Шарипова</i>	47
Влияние малых углов атаки на возникновение турбулентности в сверхзвуковых пограничных слоях на стреловидных крыльях <i>А. Д. Косинов, В. Л. Кочарин, А. В. Ливерко, А. Н. Семенов, Н. В. Семенов, Б. В. Смородский, С. Н. Толкачев, А. А. Яцких</i>	59
Влияние выдува и отсоса газа на неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя <i>А. В. Новиков, А. О. Образ, Д. А. Тимохин</i>	69
О решении обратной задачи расчета форсунки с газожидкостным двухфазным потоком <i>П. В. Зотикова, Н. А. Кучеров, И. А. Лепешинский, В. А. Решетников</i>	77
Влияние начальной формы пузырька на динамику всплытия в неподвижной вязкой жидкости <i>И. В. Моренко</i>	83
Численное исследование влияния пористых элементов крыла на свойства сверхзвуковых концевых вихрей <i>А. Е. Луцкий, А. В. Северин</i>	94
Оценка эффективности вытеснения масла мицеллярным раствором с добавлением наночастиц из насыпной модели пористой среды <i>А. И. Муллаянов, Ю. А. Питюк</i>	103
Генерация вертикальной тонкой структуры внутренними волнами на морском шельфе <i>А. А. Слепышев</i>	111
Структура ударной волны в кислороде <i>А. И. Ерофеев, С. В. Русаков</i>	125

К 100-летию юбилею Горимира Горимировича Чёрного

DOI: 10.31857/S1024708423800013, EDN: TMZRWY



В январе текущего года исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося ученого-механика современности, одного из основоположников современной школы газовой динамики, замечательного человека и блестящего профессора академика АН СССР и России Горимира Горимировича Чёрного (21.01.1923–06.11.2012). Великая страна рождает великих людей – таких, как Горимир Горимирович, который студентом добровольцем ушел на фронт защищать Родину, а после войны создал научную школу мирового уровня. Его жизнь неразрывно связана с жизнью нашей страны в сложное послереволюционное время, в тяжелые годы Великой Отечественной войны, в годы мирного строительства и научного прогресса и последующее горькое время ослабления и распада Советского Союза.

5 июля 1941 г. Горимир Чёрный, закончив 1-й курс мехмата МГУ, стал артиллеристом 8-й Краснопресненской дивизии народного ополчения и в начале октября 1941 г. оказался на фронте. Познав горечь поражений, потерь боевых товарищей, двух окружений под Вязьмой, плена (с побегами), ранений и госпиталей с трепанацией черепа, допросов в “Смерше” и иные невзгоды, Горимир Чёрный вернулся в действующую армию, участвовал в операции “Багратион” (Белоруссия, 1944), штурмах Кенигсберга и Берлина и освобождении Праги. Закончил войну сержантом с боевыми наградами, включая медаль “За отвагу” и ордена “Славы” III степени, “Отечественной войны” I степени и “Красной Звезды”.

Вернувшись в МГУ осенью 1945 г., Г.Г. Чёрный в 1949 г. блестяще закончил кафедру гидромеханики под руководством завкафедры Леонида Ивановича Седова, который тогда же был заместителем Начальника “Центрального института авиационного моторостроения (ЦИАМ) им. П.И. Баранова” по науке. Только благодаря ему выпускник с направлением (из-за плена) учителем в сибирскую глушь, был принят на работу в ЦИАМ. Через 3 года по инициативе Л.И. Седова в ЦИАМ была создана лаборатория “Газовой динамики”, начальником которой по его же инициативе был назначен 29-летний инженер Чёрный. Пробыв ее начальником 18 лет, он сразу стал лидером формирующейся научной школы.

Активная научная деятельность Г.Г. Чёрного началась в эпоху мощного развития науки, ее важнейшего раздела механики и в первую очередь — механики жидкости, газа и плазмы. Этим направлениям он посвятил всю свою творческую жизнь, и многие успехи в указанных направлениях связаны с его именем. Г.Г. Чёрный внес решающий вклад в решение важнейших научных проблем, связанных с воздушно-реактивными и ракетными двигателями, летательными аппаратами, оптимальными аэродинамическими формами, горением и детонацией, пространственными и нестационарными течениями при любых скоростях, включая гиперзвуковые, сильными разрывами в разных средах, проблемами плавления и разрушения тел. Его результаты опубликованы в многочисленных статьях, в получивших мировое признание монографиях (Г.Г. Чёрный Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с., переведена в США; Чёрный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.), в уникальных ретроспективных сборниках: “Газовая динамика. Избранное” (М.: Физматлит, 2005. 2-е издание. Т. 1, 720 с. и т. 2, 752 с.), “Механика жидкости и газа. Избранное” (М.: Физматлит, 2003. 752 с.) и в “их 4-ом томе” (Чёрный Г.Г. Избранные труды. М.: Наука, 2009. 759 с.). Последний содержит и самый полный список публикаций Великого Ученого. К 80-летию юбилею Горимира Горимировича список его работ опубликован в журнале “Прикладная математика и механика” (2003. Т. 67. Вып. 1. С. 7–14).

Научный стиль Г.Г. Чёрного характеризуют глубокое проникновение в суть проблем, создание принципиально новых физико-математических моделей, использование разнообразного математического аппарата и доведение исследований до окончательного важного с теоретической и практической точек зрения результата. Все это позволило ему стать авторитетнейшим ученым-механиком России. Он оказал ощутимое положительное влияние на систему преподавания механики на мехмате МГУ и в Московском физико-техническом институте, где читал курсы гидродинамики, газовой динамики и аэродинамики, ставшие образцом для нескольких поколений преподавателей. Долгое время ему довелось заведовать отделением механики мехмата МГУ.

Многогранна научно-организаторская роль Горимира Горимировича. Он внес основополагающий вклад в становление и развитие двух руководимых им научных коллективов — газодинамической лаборатории ЦИАМ (“Лаборатории Чёрного”), занявшей ведущие позиции в области газовой и физической газовой динамики, и Института механики МГУ — одного из лидеров отечественной и мировой механики. В Институте механики МГУ под его руководством многие годы проходил самый авторитетный в нашей стране семинар по течениям газа, включая течения со сложными физико-химическими процессами. Обширные знания и глубокое понимание механики руководителем семинара привлекали многочисленных исследователей от маститых ученых до аспирантов и студентов. Большое значение для научной атмосферы и поддержания высокого уровня исследований по механике имел огромный авторитет Горимира Горимировича, мнения которого воспринимались научным сообществом как не подлежащие сомнению. Несколько десятилетий Горимир Горимирович возглавлял Национальный комитет по теоретической и прикладной механике СССР, а затем России.

Г.Г. Чёрный в течение длительного времени авторитетно представлял нашу страну в международных научных организациях, и его деятельность высоко оценивалась Мировой научной общественностью. Он занимал ведущие позиции в реализации современных международных программ по гиперзвуку, плазменной аэродинамике, по течениям с детонацией и горением.

Горимир Горимирович считал неприемлемым современное положение отечественной науки и предлагаемые способы ее развития. Особенно это касается механики, так как возникла тенденция умаления ее основополагающей роли. В своих выступлениях и статьях Г.Г. Чёрный подчеркивал, что развитию механики человечество обязано своими важнейшими достижениями, что участие ученых-механиков в советском ядерном и аэрокосмическом проектах во многом определило их успех, и что внедрение в научные и практические приложения нано- и биотехнологий невозможно без привлечения методов механики.

На судьбу Горимира Горимировича огромное влияние оказала Великая Отечественная война. “Это короткое время — всего четыре года — наполнено событиями и переживаниями, с которыми не может сравниться все, что было со мной в моей уже долгой жизни до войны и после нее”, — написано в заключительной книге его воспоминаний об этом времени (Г.Г. Чёрный. Военные годы. СПб.: Издательство “Любавич”, 2010. 570 с.). Книга эта уникальна. Она включает дневниковые записи, которые Г.Г. Чёрный вел в последний год войны, отрывки из писем родным в то же время, а также современный комментарий (в том числе, политико-философского характера) к этим материалам, затрагивающий довоенное и послевоенное время. Дневниковые записи и

письма не редактировались, оставаясь свидетельствами того времени. Это позволяет сполна почувствовать мироощущение молодого человека-солдата, его страдания и надежды, взаимоотношения с окружающими. Поражает искренность автора: он открыт читателю полностью. Книга написана прекрасным языком. Отзывы на нее разных групп читателей (участников войны, профессионалов-литераторов, ученых, простых людей) полны благодарности. Как автор замечательной и важной для нашей истории книги Г.Г. Чёрный был принят в Союз писателей России.

Горимир Горимирович – многогранная личность с самыми разными увлечениями. Международная научная известность позволила ему посетить многие страны и континенты. Здесь он, вооруженный фото- и видеосистемами, с увлечением постигал культурные особенности посещаемых мест. На всех, кто общался с ним, производили неизгладимое впечатление его интеллигентность, ум, доброта, взвешенный подход ко всем вопросам жизни и науки.

Деятельность Горимира Горимировича была направлена на постоянное повышение научного уровня советской и российской научной периодики, в частности журнала “Механика жидкости и газа” (Известия АН СССР и РАН), в котором он четверть века был главным редактором.

Научные достижения Горимира Горимировича получили высокую оценку. Он лауреат четырех Государственных премий СССР и РФ, премии Совета Министров СССР, дважды награжден самой престижной для отечественных аэродинамиков 1-й премией и Золотой медалью им. Н.Е. Жуковского, лауреат премий и медалей им. М.В. Ломоносова, С.А. Чаплыгина и Л.И. Седова. Его трудовая деятельность отмечена орденами “Трудового Красного Знамени”, “Дружбы Народов”, “Знак Почета” и “Орден Почета”, золотой медалью ВДНХ.

Пример жизни Горимира Горимировича, пришедшейся на один из самых сложных периодов в истории нашей страны, его достижения как ученого-механика, академика АН СССР и РАН, достойны огромного уважения и увековечивания, на что и был нацелен Всероссийский научный симпозиум по проблемам аэромеханики и газовой динамики, посвященный 100-летию со дня рождения Г.Г. Чёрного, прошедший в Институте механики МГУ в январе этого года. Начался симпозиум открытием мемориальной доски Горимиру Горимировичу в холле 2-го этажа Института. В ЦИАМ на здании, где трудился гениальный Руководитель “Лаборатории Чёрного”, мемориальная доска установлена в 2014 г.

УДК 532.5

О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТИ КУПОЛА ВСПЛЫВАЮЩЕГО ПУЗЫРЯ

© 2023 г. **Е. Е. Мешков^a**, **Р. В. Мокрецов^{a,b}**, **И. А. Новикова^{a,b,*}**,
С. Ю. Седов^{a,b}, **И. Р. Смагин^b**

^a Саровский физико-технический институт – филиал НИЯУ МИФИ, Саров, Россия

^b Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт
экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), Саров, Россия

*E-mail: irinamonachova@mail.ru

Поступила в редакцию 29.06.2022 г.

После доработки 22.10.2022 г.

Принята к публикации 22.10.2022 г.

Представлены результаты экспериментов по исследованию устойчивости купола водяного пузыря, всплывающего в растворе соли, с регистрацией методом PLIF течения в плоскости, совпадающей с осью симметрии пузыря. Эксперименты демонстрируют возможность развития неустойчивости в окрестности полюса купола подобного пузыря в соответствии с ранее опубликованными результатами расчетного моделирования.

Ключевые слова: неустойчивость Рэлея–Тейлора, купол всплывающего пузыря, малое число Атвуда, ускоренное сдвиговое течение, реламинаризация, метод PLIF

DOI: 10.31857/S0568528122600436, **EDN:** NSVJKE

Явление устойчивости поверхности купола большого воздушного пузыря, всплывающего в воде, привлекало внимание исследователей с 40-х гг. XX в. Анализ механизмов подавления неустойчивости Рэлея–Тейлора на поверхности купола такого пузыря [1] связывает это с действием поверхностного натяжения и кривизной купола. Существует другая точка зрения, в соответствии с которой устойчивость купола пузыря объясняется действием ускоренного сдвигового течения воды по поверхности всплывающего пузыря [2–5], эффекта аналогичного реламинаризации турбулентного пограничного слоя под действием ускорения течения [6]. В экспериментах (например, см. [2, 3]) наблюдалось действие подобного эффекта реламинаризации в случае воздушного пузыря Тейлора, всплывающего в воде. В этом случае число Атвуда составляло $A \approx 1$ ($A = \frac{\rho_t - \rho_l}{\rho_t + \rho_l} \approx 1$, где ρ_t – плотность тяжелого вещества, ρ_l – плотность легкого вещества). Экспериментальное и расчетное исследование подъема водяного пузыря в растворе поваренной соли ($A \ll 1$) представлены в [7]. При этом в расчете в малой окрестности полюса пузыря наблюдается развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в форме струи раствора соли, “проваливающейся” в водяной пузырь, однако, используемая в экспериментах методика, согласно которой в режиме видеосъемки регистрировалась форма пузыря, наполненного подкрашенной чернилами водой не позволяла достаточно надежно зарегистрировать неустойчивость купола пузыря.

Ниже приведены результаты серии экспериментов с водяным пузырем, всплывающим в растворе соли, но с визуализацией течения с применением варианта метода лазерного ножа PLIF (Planar Laser Induced Fluorescence) [8]), подтверждающие результаты расчета [7].

1. ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В этих экспериментах использовалась аналогичная [7] методика получения пузыря из воды, всплывающем в растворе соли в вертикальном канале сечением 11×11 см². Пузырь образовывался при разрушении оболочки детского резинового шарика, наполненного водой (при комнатной температуре) под небольшим давлением (~10 кПа). Шарик располагался на дне канала, наполненного раствором поваренной соли, на оси симметрии канала. Разрушение наполненного ша-

рика осуществлялось в его полюсе иглой, проходящей через отверстие, через которое производилось заполнение шарика водой. Объем шарика, заполненного водой, составлял около 0.5 л.

После прорыва и быстрого (время ~ 1 мс) сжатия оболочки резинового шарика картина течения в плоскости, совпадающей с осью симметрии пузыря, визуализировалась при помощи метода PLIF. В этом методе через стенку канала и пузырь пропускался луч лазера (длина волны 532 нм), трансформированный при помощи цилиндрической оптики в световой тонкий лист; вода в пузыре содержит вещество родамин 6G, флуоресцирующее под действием лазерного излучения. Максимум полосы поглощения раствора Родамина 6G приходится на длину волны $\lambda = 525$ нм, что позволяет эффективно использовать лазерный источник с длиной волны излучения $\lambda = 532$ нм. Максимум полосы испускания раствора родамина 6G в воде приходится на длину волны $\lambda = 555$ нм [8], что позволяет визуально отличать излучение флуоресценции в плоскости луча лазера от рассеянного излучения лазера. По сравнению с экспериментами [7], в которых получался общий вид всплывающего пузыря, в данном случае наблюдается внутренняя структура течения. Отметим, что количество родамина в воде пузыря незначительно (микрограммы) и не влияет на число Атвуда.

Регистрация картины течения в плоскости луча лазера осуществлялась цифровым фотоаппаратом Casio Exilim EX-F1 в режиме скоростной видеосъемки со скоростью 300 кадров в секунду.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ.

На рис. 1а приведены кадры видеोगраммы развития неустойчивости Рэлея–Тейлора в малой окрестности полюса водяного пузыря, всплывающего в растворе соли. Неустойчивость развивается в форме локальной струи раствора соли, “проваливающейся” в пузырь. Одновременно наблюдается расширение струи, а с другой стороны, тенденция к захлопыванию в месте входа струи в пузырь и одновременно намешивание воды в тело струи.

На рис. 1б, в приведены для сравнения результаты эксперимента и расчета течения [7]. Из сравнения результатов эксперимента (рис. 1а) и расчета (рис. 1в) следует, что в нашем случае возможно формирование течения, сходное с расчетом – развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в окрестности полюса пузыря – в эксперименте наблюдается образование струи, проникающей в пузырь. Однако в картинах течения струи в расчете и эксперименте наблюдаются существенные отличия: формирование кольцевого выброса по периметру основания струи; образование вихрей на кромке выброса под действием затекающей в пузырь струи; существенное расширение струи в поперечном направлении. Наконец, струя и возмущение боковой поверхности пузыря развиваются в эксперименте значительно быстрее, чем в расчете. По-видимому, все это можно объяснить относительно большой величиной начального возмущения поверхности пузыря в эксперименте, вызванного движением фрагментов резиновой оболочки и иглы, приближающей оболочку – рис. 2.

Результаты серии экспериментов с водяным пузырем и регистрацией течения методом PLIF в принципе подтверждают результаты расчета [7]. В самом общем случае при подъеме, из состояния покоя осесимметричного водяного пузыря в растворе соли, в окрестности полюса пузыря (при отсутствии стабилизирующего действия поверхностного натяжения) реализуются условия для развития неустойчивости Рэлея–Тейлора. Размер этой окрестности (круга неустойчивости) будет определяться главным образом окружностью на поверхности пузыря, за пределами которой реализуется достаточно интенсивное ускоренное сдвиговое течение – рис. 3. Происходит это в силу симметрии течения – в полюсе купола пузыря скорость течения (в системе координат, связанной с куполом) будет равна нулю, а вне оси симметрии по мере удаления от нее скорость течения по куполу нарастает, и вместе с этим нарастает ускорение течения и возникает (скорее всего, плавный) переход от неустойчивости к устойчивости – к зоне, где неустойчивость подавляется ускоренным сдвиговым течением.

Пузырь всплывает практически с постоянной скоростью, и на его боковой поверхности возникает сдвиговое течение с практически постоянной скоростью; и в этой зоне развивается неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.

На рис. 4 проведена зависимость от времени глубины проникновения струи раствора соли в пузырь.

Ране в [7] наблюдалось различие результатов расчета и эксперимента (рис. 1б и рис. 1в) – в экспериментах неустойчивость купола пузыря не была зарегистрирована. В [7] это объяснялось возможным отклонением от осевой симметрии формы всплывающего пузыря и возникающего течения. По результатам настоящих опытов можно предположить, что причиной также мо-

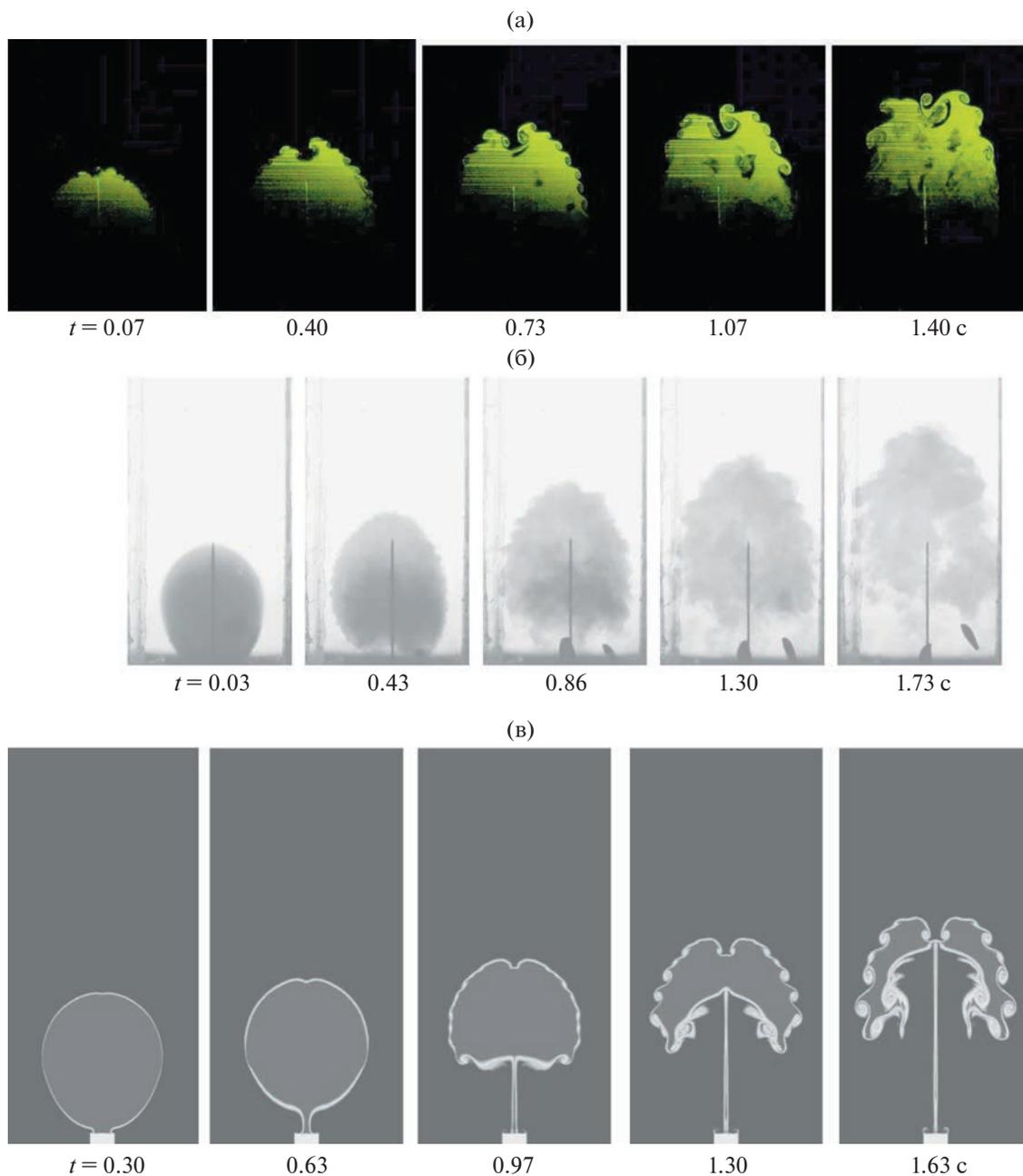


Рис. 1. (а) Кадры видеопленки развития неустойчивости в окрестности полюса водяного пузыря, всплывающего в растворе соли. Неустойчивость развивается в форме локальной струи раствора соли, проваливающейся в пузырь. (б) Кадры видеосъемки подъема пузыря из подкрашенной чернилами воды в растворе поваренной соли [7]. (в) Результат двумерного расчета по программе STAR-CCM+ v11.06 [7]. В эксперименте раствор содержит 15 г соли на литр воды, $A = 0.006$. Время в экспериментах отсчитывается от момента пробы иглой резиновой оболочки с точностью 0.03 с.

жет являться недостаточная прозрачность воды в пузырях, окрашенной чернилами. Следует отметить, что, несмотря на развитие неустойчивости в окрестности полюса пузыря, последний не разрушается на более мелкие фрагменты, как это предполагалось в [1].

В связи с приведенными результатами можно вернуться к вопросу о критическом размере воздушного пузыря, всплывающего в воде, при котором может происходить его разрушение. По представлениям [1], если устойчиво поднимающийся пузырь с устойчивой гладкой поверхностью в начальный момент испытывает малое возмущение, амплитуда возмущения увеличива-

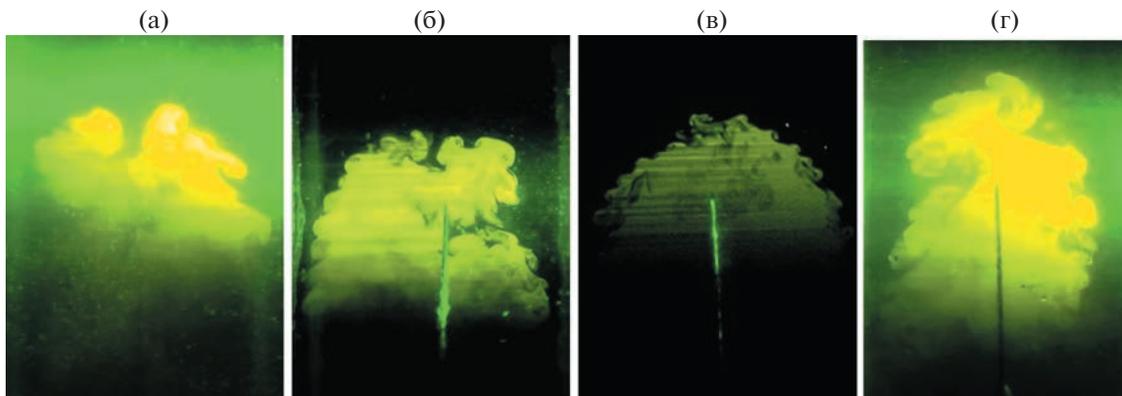


Рис. 2. Вариация формы пузыря в различных опытах может объясняться влиянием движения иглы и фрагментов разорванной резиновой оболочки пузыря: (а) Опыт № 2018.10.12/3, $t = 0.49$ с. (б) Опыт № 2018.10.12./1, $t = 0.47$ с. (в) Опыт № 2018.12.14/2, $t = 0.47$ с. (г) Опыт № 2018.10.12./2, $t = 0.47$ с.

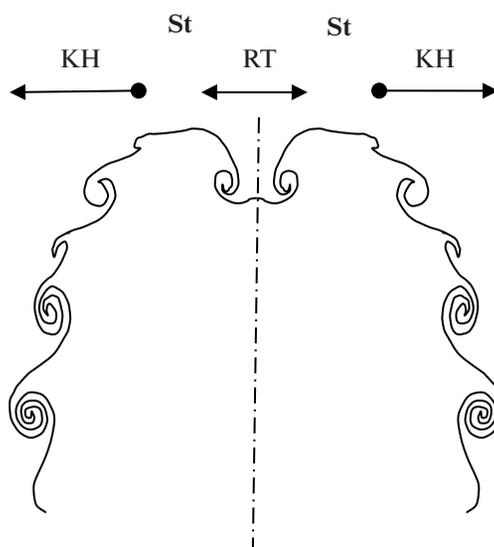


Рис. 3. Расположение зон неустойчивого и устойчивого течения на поверхности водяного пузыря, всплывающего в растворе соли: **RT** – область, в которой развивается неустойчивость Рэлея–Тейлора – “круг неустойчивости”; **КН** – область развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на боковой поверхности пузыря под действием сдвигового течения с постоянной (или слабо меняющейся) скоростью; **St** – пояс устойчивости, область в которой неустойчивости подавляются ускоренным сдвиговым течением.

ется и может стать достаточно большой, чтобы вызвать эффекты, приводящие к разрушению пузыря и его распаду на более мелкие, но устойчивые пузыри. В то же время эксперименты [9] с пузырями объемом до ~ 0.3 л показывают, что при внесении на поверхность купола воздушного пузыря конечных возмущений (в том числе большой амплитуды) пузыри сохраняют устойчивость; при этом возмущения поверхности купола как бы “скатываются” вниз, оставляя гладкий купол.

С другой стороны, воздушные пузыри очень большого объема (~ 14 – 15 литров) в процессе подъема из состояния покоя с глубины 2.5 м очень рано трансформируются в вихревое кольцо диаметром более метра, состоящее из очень мелких пузырьков [10].

3. ОЦЕНКА РАЗМЕРА КРУГА НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА КУПОЛЕ ВСПЛЫВАЮЩЕГО ЖИДКОГО ПУЗЫРЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ БЕГУЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Оценим область углов, разделяющую преимущественно стоячие возмущения и бегущие возмущения (положение круга неустойчивости), пренебрегая здесь поверхностным натяжением.

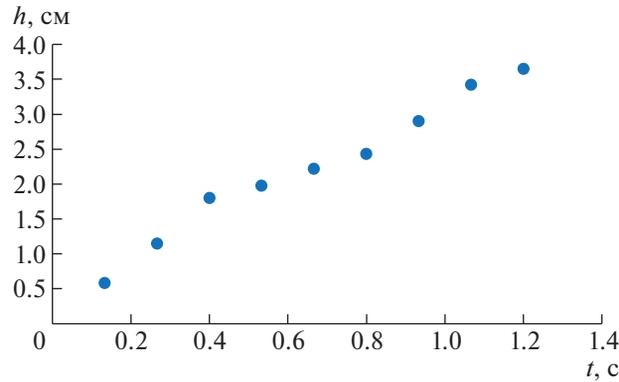


Рис. 4. Временная зависимость глубины проникновения h в пузырь струи раствора соли вследствие развития неустойчивости в окрестности полюса пузыря. Величина h измеряется от вершины контура купола пузыря, полученного интерполяцией по невозмущенным участкам поверхности купола; направление оси совпадает с направлением струи.

Характерное время развития неустойчивости Рэлея–Тейлора стоячего возмущения (в предположении не скатывающегося возмущения) в линейном приближении определяется выражением $t_R = \sqrt{\lambda_0/2\pi g}$. Здесь λ_0 – длина волны возмущения, g – ускорение свободного падения. Возьмем для оценок длину волны возмущения на пузыре $\lambda_0 = 2\pi R \sin \vartheta_0$, где R – радиус пузыря, ϑ_0 – угол, отсчитываемый от вертикальной оси симметрии пузыря. Тогда характерное время роста стоячих возмущений $t_R(\vartheta_0) = \sqrt{R \sin \vartheta_0/g}$. Для времени скатывания бегущего возмущения по поверхности пузыря примем время достижения возмущением экватора пузыря $\vartheta = \pi/2$, начиная со значения угла ϑ_0 в начальный момент времени $t = 0$. Приняв зависимость для скорости возмущения $v_0(\vartheta) = \sqrt{2gR(1 - \cos \vartheta)} = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{gR}$, мы имеем в виду случай, когда возмущения скатываются с поверхности купола пузыря подобно материальной точке с гладкой твердой сферы за счет силы тяжести.

Это время составляет величину [11]

$$t_S(\vartheta_0) = \left(\arctan h \left(\cos \frac{\vartheta_0}{2} \right) - \arctan h \left(\cos \frac{\pi}{4} \right) \right) \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Если время роста “стоячих” возмущений $t_R(\vartheta_0)$ больше времени скатывания бегущих возмущений $t_S(\vartheta_0)$, то возмущения не успевают вырасти. Таким образом, критическое значение начального угла ϑ_{crit} , разделяющего две области возмущений, находится из равенства $t_R(\vartheta_0) = t_S(\vartheta_0)$, откуда находим $\theta_0 = \vartheta_{crit} = 41^\circ$.

Итак, для углов, меньших ϑ_{crit} , на поверхности пузыря может развиваться неустойчивость Рэлея–Тейлора, а для углов, больших ϑ_{crit} , возмущения скатываются с поверхности. Ниже экватора, вблизи пузыря, появляется и зона вихревого движения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика исследования устойчивости поверхности купола водяного пузыря, всплывающего из состояния покоя в растворе соли с применением PLIF–метода.

Результаты экспериментов указывают на возможность развития неустойчивости в окрестности полюса водяного пузыря, всплывающего в растворе соли, в соответствии с расчетом и общепринятыми представлениями о развитии неустойчивости Рэлея–Тейлора. Однако характер развития неустойчивости в этом случае заметно отличается от типичной картины развития неустойчивости.

На основе совокупности результатов настоящих экспериментов и результатов можно заключить, что устойчивость купола всплывающего пузыря определяется не только действием поверх-

ностного натяжения и кривизной купола, но и осесимметричным ускоренным сдвиговым течением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batchelor G.K.* The stability of a large gas bubble rising through liquid // *J. Fluid Mech.* 1987. P. 399–422.
2. *Meshkov E.E.* Some peculiar features of hydrodynamic instability development // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2013. P. 371.
3. *Мешков Е.Е.* К вопросу о структуре зоны перемешивания на неустойчивой контактной границе // *ЖЭТФ.* 2018. № 1. С. 150–156.
4. *Sreenivasan K.R., Abarzhi S.I.* Acceleration and turbulence in Rayleigh–Taylor mixing // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* 2013. P. 371.
5. *Taylor G.I.* The Criterion for Turbulence in Curved Pipes // *Proc. Roy. Soc. A.* 1929. P. 243–249.
6. *Narasimha R., Sreenivasan K.R.* Relaminarization in highly accelerated turbulent boundary layers // *J. Fluid Mechanics.* 1973. № 3. P. 417–447.
7. *Kanygin R.I., Kashcheev A.D., Kudryavtsev A.Yu., Meshkov E.E., Novikova I.A.* The stability of the dome of a liquid bubble rising in a dense liquid // *Phys. Scr.* 2018. № 2.
8. *Crimaldi J.P.* Planar laser induced fluorescence in aqueous flows // *Exp Fluids.* 2008. P. 851–863.
9. *Bazarov Yu., Kuratov S.E., Meshkov D.E., Meshkov E.E., Ol'khov O.V., Sedov S.Yu., Sivolgin V.S.* Analysis of hydrodynamic instability growth in a 2D flow // *Phys. Scr.* 2010. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2010/T142/014018>
10. *Жидов И.Г., Мешков Е.Е., Попов В.В., Рогачев В.Г., Толмьяков А.И.* Образование вихревого кольца при всплывании большого воздушного пузыря в воде // *ЖПМТФ.* 1977. № 3. С. 75–78.
11. *Седов С.Ю.* // *Вопросы атомной науки и техники.* 2008. № 4. С. 46–53.

УДК 532.5

К ТЕОРИИ МАГНИТОИНДУЦИРОВАННЫХ ЦИРКУЛЯЦИЙ В ТРОМБИРОВАННЫХ КАНАЛАХ

© 2023 г. А. Ю. Мусихин^{а,*}, А. Ю. Зубарев^{а,*}

^аУральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,
Екатеринбург, Россия

*E-mail: Antoniusmagna@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.

После доработки 14.01.2023 г.

Принята к публикации 14.01.2023 г.

Предложены теоретическая модель и метод ее приближенного анализа для течений, индуцируемых бегущим магнитным полем в канале, заполненном немагнитной жидкостью и введенной в нее каплей феррожидкости. Один конец канала предполагается закрытым (тромбированным). Цель работы – развитие научной основы магнитоиндуцированной интенсификации транспорта лекарств в тромбированных кровеносных сосудах.

Ключевые слова: магнитная жидкость, осциллирующий магнитный поток, поле-индуцированный поток, тромбоз

DOI: 10.31857/S1024708423600033, EDN: TMZEZZ

Тромбирование кровеносных сосудов является тяжелым и трудноизлечимым заболеванием, нередко приводящим к летальным исходам. Основным методом лечения тромбозов является инъекция специальных лекарств (тромболитиков) для растворения тромбов и восстановления кровотока. Однако в тромбированном кровеносном сосуде с остановившимся кровотоком распространение тромболитиков возможно только диффузионным, т.е. медленным и малоэффективным способом. Перспективный метод решения этой проблемы был предложен и запатентован в [1, 2]. Основная идея этого метода состоит в инъектировании, в тромбированный кровеносный сосуд, капли растворимой феррожидкости с нано-размерными магнитными частицами и в воздействии на это место переменного магнитного поля, создаваемого внешними электромагнитами. Под действием этого поля частицы приходят во вращательное и поступательное движение, передающееся несущей жидкости. В результате в кровеносном сосуде возникают циркуляционные течения, интенсифицирующие перемешивание несущей жидкости и введенных в нее тромболитиков. Это обеспечивает более эффективный транспорт лекарств к месту нахождения тромба.

Очевидно практическое применение этого метода требует тщательного изучения особенностей генерирования течений, их структуры, выявления оптимальной конфигурации магнитного поля и других физических характеристик системы. Несмотря на предпринятые исследования по этой теме (см., например, [2–6]), на настоящий момент многие важные ее аспекты не изучены. Так, в теоретических моделях [2, 5, 6] рассматривался бесконечно длинный канал с каплей (облаком) феррожидкости и влияние самого тромба на генерируемые течения не рассматривалось.

В этой работе предлагаются модель течений, генерируемых бегущим осциллирующим полем в канале с каплей феррожидкости, находящейся рядом с тромбом, а также приближенный метод решения возникающих уравнений.

1. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Ради максимального упрощения математической стороны дела, в качестве модели кровеносного сосуда рассмотрим не цилиндрический канал, а полубесконечную плоскую щель, заполненную немагнитной ньютоновской жидкостью. При соблюдении реалистических отношений между продольными и поперечными, к оси канала, масштабами задачи, результаты плоской мо-

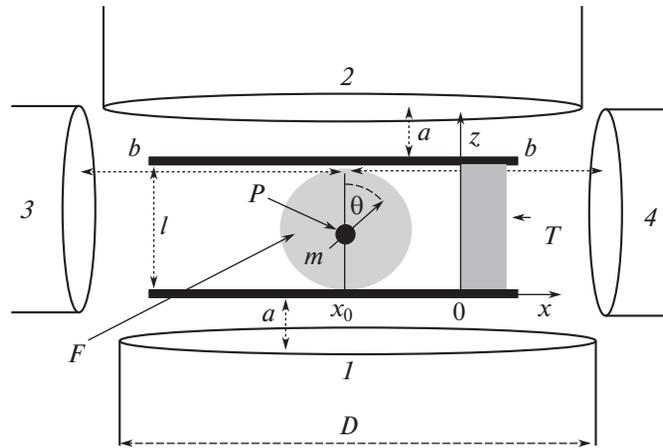


Рис. 1. Иллюстрация рассматриваемой системы. P – частица, T – тромб, F – феррожидкость.

дели, по крайней мере, по порядку величины должны соответствовать ситуации в цилиндрических каналах. Отметим, что переход к цилиндрической геометрии не приводит к принципиальным трудностям, но делает вычисления более громоздкими и менее прозрачными. Поэтому, исходя из методических соображений, здесь рассматривается именно плоская задача.

Рассматриваемая модельная система проиллюстрирована на рис. 1. Левый конец щели закрыт непроницаемой для жидкости стенкой, моделирующей тромб; в щели невдалеке от стенки находится капля растворимой феррожидкости.

Как и в [5], здесь рассмотрим случай вращающегося магнитного поля, создаваемого четырьмя соленоидами, показанными на рис. 1.

Расстояние $2b$ между соленоидами вдоль оси щели предполагается много большим толщины щели l и характерного размера капли. Мы будем предполагать, что внутри капли (облака) феррожидкости эффективная вязкость среды η совпадает с вязкостью несущей жидкости вне капли. Такое приближение вполне оправдано, если объемная концентрация Φ частиц в капле не превышает нескольких процентов. Начальная (в нулевой момент времени) $\Phi_0(x, z)$ концентрация частиц предполагается известной. Для максимального упрощения вычислений мы рассмотрим двумерную модель, предполагая, что все физические величины зависят только от координат x, z и времени. Наконец, предположим, что магнитное поле достаточно велико, чтобы энергия Зеемана взаимодействия наночастицы с полем была существенно выше тепловой энергии системы. Поэтому мы пренебрежем броуновским вращением частиц. Очевидно, что с практической точки зрения случай сильных полей представляет наибольший интерес с точки зрения генерации течений в жидкости.

Мы предположим, что все соленоиды, иллюстрированные на рис. 1, создают переменное поле с одной и той же угловой частотой ω ; ток, и, следовательно, поле соленоидов 1 и 4 зависят от времени как $\cos\omega t$, ток и поле соленоидов 2 и 3 – как $\sin\omega t$. Тогда полное поле в точке x, z можно представить в виде

$$H_x = (H_{01x}(x, z) - H_{04x}(x, z))\cos\omega t + (H_{02x}(x, z) + H_{03x}(x, z))\sin\omega t \quad (1.1)$$

$$H_z = (H_{01z}(x, z) + H_{04z}(x, z))\cos\omega t + (-H_{02z}(x, z) + H_{03z}(x, z))\sin\omega t$$

Здесь H_{01}, H_{02}, H_{03} и H_{04} – амплитуды полей, создаваемых соленоидами с номерами 1–4 соответственно. Знак “минус” в скобках (1.1) означает, что северный полюс соленоида 1 расположен напротив северного полюса соленоида 2; аналогичная ситуация с соленоидами 3 и 4. Амплитуды H_{01}, H_{02}, H_{03} и H_{04} могут быть найдены из стандартных результатов расчетов полей, создаваемых соленоидами. Явные выражения для них даны в Приложении. Результирующее поле $H = \sqrt{H_x^2 + H_z^2}$ для некоторых моментов времени изображено на рис. 2.

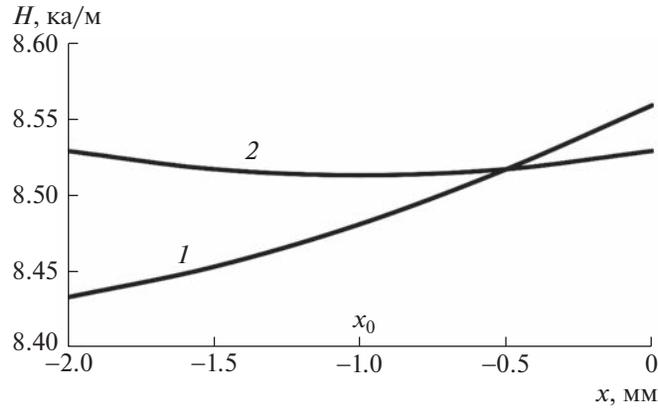


Рис. 2. Значение амплитуды магнитного поля вблизи тромба в зависимости от координаты x для различных времен t при фиксированном $z = 1/5$ и $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$. Кривая 1: $t = \tau_H/8 \text{ с}$; кривая 2: $t = \tau_H/12$; $\tau_H = 0.314 \text{ с}$ — период изменения поля, $x = -x_0$ — координата центра облака феррожидкости, $x = 0$ — положение тромба.

В приближении механики сплошных сред уравнение течения жидкости с феррочастицами может быть представлено в виде (см., например, [7, 8])

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \Gamma + F_x \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma + F_z \\ \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial z} v_z &= 0 \\ \Gamma &= \mu_0 M \Phi (H_z \sin \theta - H_x \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ оператор Лапласа, Γ — момент магнитных сил, действующих на единицу объема жидкости, θ — угол между направлением магнитного момента \mathbf{m} частицы и осью Oz , показанной на рис. 1; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}$ — магнитная проницаемость вакуума; M — намагниченность материала частицы; $\mathbf{F} = \mu_0 \Phi (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H}$ — пондеромоторная сила, действующая на единицу объема жидкости в неоднородном магнитном поле \mathbf{H} ; Φ — объемная концентрация частиц в капле; $\mathbf{M} = \mathbf{m}/V_p$, $M = |\mathbf{M}|$; V_p — объем частицы. Величина $1/2\Gamma$ в (1.1) является антисимметричным напряжением, возникающим в феррожидкости, вследствие действия момента сил Γ [7, 8]. Отметим, что уравнение (1.2) записано в форме, соответствующей малым числам Рейнольдса, построенных на скорости течения среды и толщине щели. Обоснование этого приближения обсуждается в конце раздела Результаты.

Граничные условия к уравнению (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} z = 0, t: \quad v_x = v_z = 0 \\ x \rightarrow -\infty: \quad v_x, v_z \rightarrow 0 \\ x = 0: \quad v_x, v_z = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

В рамках “не броуновского приближения” уравнение для угла θ может быть записано в виде [8]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{6\eta\Phi} \Gamma \quad (1.4)$$

Расчеты [5, 6] показывают, что для реалистических условий член $\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) / 2$ в (1.4) мало по сравнению двумя другими членами. Очевидно, по порядку величины должно выполняться соот-

ношение $\partial\theta/\partial t \sim \omega$. Следовательно, из (1.4) получаем оценку $\Gamma \sim 6\eta\Phi\omega$. Учитывая, что характерный размер капли, внедренной в канал, в поперечном к его оси направлении не может быть больше соответствующего размера канала l , производная $\partial\Gamma/\partial z$ может быть оценена так $\partial\Gamma/\partial z \sim \Gamma/l$. В экспериментах обычно $\omega \sim 10 \text{ с}^{-1}$, для оценки вязкости несущей жидкости примем, что она примерно равна вязкости крови $\eta \sim 5 \times 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$. Кровеносные сосуды, подверженные риску тромбирования, как правило, имеют диаметр порядка нескольких миллиметров. Следовательно, по порядку величины $\partial\Gamma/\partial z \sim 6\eta\Phi\omega/l \sim 300\Phi \text{ Па/м}$. Очевидно, в продольном к оси канала направлении размер капли может быть больше, чем ширина канала, это значит, что должно выполняться неравенство $\partial\Gamma/\partial x < \partial\Gamma/\partial z$.

Оценим теперь величину плотности пондеромоторной силы F . В медико-биологических приложениях обычно используются частицы окислов железа — магнетита или маггемита. Их преимущества — они доступны, обладают достаточно высокими магнитными характеристиками и, главное, биосовместимы. Для этих частиц намагниченность насыщения материала $M \sim 5 \times 10^5 \text{ А м}$ (см., например, [9]). В экспериментах обычно используются поля с напряженностью $H \sim 5 \times 10^4 \text{ А м}$. Характерный линейный масштаб изменения поля в области капли феррожидкости по порядку величины определяется ее расстояниями a, b до электромагнитов. Имея в виду, что электромагниты должны находиться вне организма пациента, можно принять, что эти расстояния должны быть порядка десяти сантиметров. Отсюда $F \sim 4\pi \cdot \Phi \times 10^{-7} \cdot 5 \times 10^5 \cdot 5 \times 10^4 / 10^{-1} \text{ Па/м} \times 10^5 \text{ Па/м}$. Следовательно, плотность пондеромоторной силы F для типичных ситуаций оказывается намного больше плотности сил $\partial\Gamma/\partial x, \partial\Gamma/\partial z$ антисимметричных напряжений. Поэтому последние можно не учитывать в уравнениях (1.2). Также несложно показать, что для рассматриваемых систем инерционные члены $\rho\partial v_x/\partial t$ и $\rho\partial v_z/\partial t$ в (1.2) не играют существенной роли и ими, в первом приближении, можно пренебречь. Действительно, по порядку величины характерное время инерционной релаксации жидкости в канале может быть оценено как $\tau_{in} \sim \rho l^2/\eta$. Для используемых характерных значений ρ, l и η получаем $\tau_{in} \sim 0.2\text{с}$. При угловой частоте поля $\omega \sim 10 \text{ с}^{-1}$, период изменения поля $\tau_H = 2\pi/\omega \sim 0.6\text{с}$. Следовательно, время инерционной релаксации жидкости существенно меньше периода поля, что позволяет в первом приближении рассматривать уравнения (1.2) в квазистационарной форме, пренебрегая частными производными $\rho\partial v_x/\partial t$ и $\rho\partial v_z/\partial t$.

В рамках этих приближений уравнения течения в канале могут быть представлены в виде:

$$-\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F} = 0, \quad \text{div}\mathbf{v} = 0, \quad (1.5)$$

с граничными условиями (1.3).

Плотность пондеромоторной силы \mathbf{F} можно представить в виде:

$$\mathbf{F} = \mu_0\Phi(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H} = \mu_0\Phi M \left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{H} \quad (1.6)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона.

Из уравнения (1.4) с учетом явного вида магнитного момента Γ , приведенного в (1.2), следует, что по порядку величины характерное время τ_θ релаксации угла θ может быть оценено так: $\tau_\theta \sim \eta/\mu_0 M H$. Подставляя сюда приведенные выше оценки для η, M и H , получаем $\tau_\theta \sim 10^{-6}\text{с}$. При частотах поля $\omega \sim 10 \text{ с}^{-1}$, время τ_θ намного меньше периода поля $2\pi/\omega$. Поэтому можно считать, что в каждый момент времени вектор \mathbf{M} практически параллелен вектору \mathbf{H} . Это позволяет использовать следующую приближенную форму соотношения (1.6)

$$\mathbf{F} = \mu_0\Phi M \left(\frac{H_x}{H} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{H_z}{H} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{H}, \quad H = \sqrt{H_x^2 + H_z^2} \quad (1.7)$$

Для дальнейшего удобно ввести функцию тока Ψ так, что

$$v_x = \frac{\partial}{\partial z} \Psi, \quad v_z = -\frac{\partial}{\partial x} \Psi \quad (1.8)$$

Отметим, что при такой форме записи компонент скорости \mathbf{v} , уравнение несжимаемости $\text{div}\mathbf{v} = 0$ выполняется автоматически.

Вычислив ротор от обеих частей первых двух уравнений (1.2) и учитывая (1.5) и (1.7), а также уравнение $\text{rot} \mathbf{H} = 0$, после несложных вычислений получаем

$$\Delta^2 \Psi = G(x, z, t)$$

$$G(x, z, t) = \frac{\mu_0 M}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial z} H \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Phi - \frac{\partial}{\partial x} H \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Phi \right] \quad (1.9)$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}$$

Граничные условия (3) сейчас могут быть переписаны так

$$z = 0, l: \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$$

$$x = 0: \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

$$x \rightarrow -\infty: \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \rightarrow 0$$

Последнее условие (1.10) вместе с условием $\partial \Psi / \partial x = 0$ при $z = 0, l$ означает, что на границах щели функция тока Ψ не зависит от координаты x , т.е. равна постоянной величине. Поскольку конкретное значение этой величины не имеет физического смысла, можно придать ей нулевое значение. Тогда это условие может быть переписано в виде

$$z = 0, l: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0; \quad x \rightarrow -\infty: \quad \Psi \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

Уравнение (1.9) содержит четвертые производные от искомой функции Ψ по координатам. Точные аналитические решения таких уравнений не известны. Численное их решение тоже сталкивается с плохо преодолимыми сложностями; надежные алгоритмы решения таких задач нам не известны. Поэтому здесь воспользуемся идеями метода сращиваемых асимптотических разложений, суть которого состоит в сращивании решений (1.9–1.11), получаемых в различных участках течения.

Прежде всего, рассмотрим область канала вдали от тромба, на расстояниях значительно превышающих ширину l канала и характерный размер капли (облака) феррожидкости. В этой области линейный масштаб изменения скорости течения вдоль продольной оси x намного больше, чем в поперечном направлении вдоль оси z . Поэтому уравнение (1.9) с граничными условиями (1.11) можно представить в виде

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} \Psi = G(x, z, t) \quad (1.12)$$

$$z = 0, l: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0; \quad x \rightarrow -\infty: \quad \Psi \rightarrow 0$$

Обозначим решение этой задачи Ψ_0 . Оно имеет вид

$$\Psi_0 = J(x, z) + \frac{1}{6} A z^3 + \frac{1}{2} B z^2$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = I(x, z) + \frac{1}{2} A z^2 + B z$$

$$J(x, z) = \iiint_{000}^{z_3 z_2 z_1} G(x, z', t) dz' dz_1 dz_2 dz_3 \quad (1.13)$$

$$I(x, z) = \frac{\partial J}{\partial z} = \iint_{000}^{z_2 z_1} G(x, z', t) dz' dz_1 dz_2$$

$$A = \frac{12}{l^3} \left[J(l) - \frac{1}{2} I(l)l \right], \quad B = \frac{2}{l^2} [I(l)l - 3J(l)]$$

Обсудим теперь поведение функции Ψ в непосредственной близости от тремба, т.е. при $x \rightarrow 0$. Для чего разложим функцию Ψ в ряд Тейлора вблизи точки $x = 0$:

$$\Psi = \Psi(0) + \Psi'x + \frac{1}{2} \Psi''x^2 + \dots \tag{1.14}$$

где штрихи в Ψ означают производные по x при $x = 0$. Граничное условие (10) $\partial\Psi/\partial z = 0$ при $x = 0$ означает, что на “трембе” функция $\Psi(x = 0, z)$ не зависит от координаты z . Поскольку при $z = 0, l$ выполняется граничное условие $\Psi = 0$, это означает, что $\Psi(x = 0, z) = 0$. Условие $\partial\Psi/\partial x = 0$ при $x = 0$ означает, что $\Psi' = 0$. Таким образом, первым исчезающим членом в разложении (1.14) является член $\Psi''x^2/2$. Учитывая это, представим функцию Ψ в экстраполяционной форме, удовлетворяющей всем граничным условиям:

$$\Psi = \begin{cases} \alpha x^2 \Psi_0(x, z, t), & x^2 < \alpha^{-1} \\ \Psi_0(x, z, t), & x^2 > \alpha^{-1} \end{cases} \tag{1.15}$$

где α – коэффициент, который определяем из условия наилучшего соответствия формы (1.15) дифференциальному уравнению (1.9). Это условие формулируем следующим образом. Запишем функцию

$$L(\alpha) = \int_0^l \int_0^l [\Delta^2 \Psi(x, z, t) - G(x, z, t)]^2 dz dx \tag{1.16}$$

и выберем α , обеспечивающее наименьшее значение L . Идеологически такой подход близок к классическому вариационному методу Онсагера определения термодинамических функций жидких кристаллов [10, 11].

Перепишем (1.16) в виде

$$L(\alpha) = \int_0^{\alpha^{-1/2}l} \int_0^l [\alpha \Delta^2(x^2 \Psi_0(x, z, t)) - G(x, z, t)]^2 dz dx + \int_{\alpha^{-1/2}l}^l \int_0^l [\Delta^2 \Psi_0(x, z, t) - G(x, z, t)]^2 dz dx. \tag{1.17}$$

Отсюда получаем уравнение для определения α , которое может быть решено численно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} L(\alpha) &= 2\alpha \int_0^{\alpha^{-1/2}l} \int_0^l [\Delta^2(x^2 \Psi_0(x, z, t))]^2 dz dx - 2 \int_0^{\alpha^{-1/2}l} \int_0^l G(x, z, t) \Delta^2(x^2 \Psi_0(x, z, t)) dz dx - \\ &- \frac{\alpha^{1/2}}{2} s_1(\alpha^{-1/2}) + \alpha^{-1/2} s_2(\alpha^{-1/2}) - \frac{\alpha^{-3/2}}{2} s_3(\alpha^{-1/2}) + \frac{\alpha^{-3/2}}{2} s_4(\alpha^{-1/2}) = 0 \\ s_1(y) &= \int_0^l [\Delta^2(x^2 \Psi_0(y, z, t))]^2 dz, \quad s_2(y) = \int_0^l G(y, z, t) \Delta^2(x^2 \Psi_0(y, z, t)) dz, \\ s_3(y) &= \int_0^l G(y, z, t)^2 dz, \quad s_4(y) = \int_0^l [\Delta^2 \Psi_0(y, z, t) - G(y, z, t)]^2 dz. \end{aligned} \tag{1.18}$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Решение задачи (1.12–1.18) определяется концентрацией феррочастиц Φ , фигурирующей в выражении (1.9) для функции G . Вообще говоря, эти уравнения для функции тока Ψ необходимо решать совместно с уравнением для концентрации Φ , учитывая, что ее изменения со временем могут проследить за счет миграции частиц в неоднородном магнитном поле; за счет их диффузии и вследствие конвективного движения в генерируемых потоках несущей жидкости. Совместное решение уравнений (1.9–1.12) для Ψ и стандартного уравнения неразрывности для Φ делает задачу существенно нелинейной, численное решение которой требует больших компьютерных ресурсов.

Заметим, однако, что в работе [5] показано, что для рассматриваемых систем характерное время магнитофоретической миграции магнитных наночастиц с диаметром 15–20 нм на расстояния, сопоставимые с шириной канала, составляет порядка 140 ч, что намного больше времен, представляющих интерес с точки зрения транспорта тромболитиков. Диффузионное распространение частиц на эти расстояния также требует порядка ста часов. Поэтому мы ограничимся анализом начальной стадии генерации течений жидкости в канале, предполагая, что концентрация Φ на этой стадии равна своему начальному значению. Интервал времени, когда это приближение оправданно, обсуждается ниже.

Конкретное начальное значение функции $\Phi(x, z)$ определяется конкретным способом инъецирования феррожидкости в канал (кровеносный сосуд) и вряд ли может быть задано в общем виде. Здесь в качестве примера рассмотрим ситуацию, когда профиль концентрации феррочастиц не зависит от поперечной координаты z и имеет вид Гауссова распределения вдоль оси x

$$\Phi = \Phi^0 \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.1)$$

Здесь дисперсия σ задает характерный размер капли; x_0 – координата ее центра (расстояние от центра до тромба). Физически такое приближение означает, что размер инъецированной капли феррожидкости намного больше ширины l канала; после инъецирования, за счет диффузии, капля несколько расплывается вдоль оси канала.

Характерное время изменения профиля концентрации за счет конвективного переноса частиц по порядку величины равно отношению характерного размера капли σ к среднеквадратичной скорости \bar{v}_x течения в направлении оси канала. Последняя, для выбранных параметров системы, оценена в дальнейшем в (2.4) как несколько десятков микрон в секунду. Если $\sigma \sim 1$ см, то характерное время конвективной деформации профиля Φ оказывается порядка нескольких сотен или тысячи секунд. По крайней мере, на таких временных интервалах приближение независимости Φ от времени является вполне оправданным.

Используя (2.1), получаем

$$G(x, z, t) = \frac{\mu_0 M}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial z} H \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Phi \right] = -\frac{\mu_0 M}{\eta} \Phi^0 \frac{2(x - x_0)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial}{\partial z} H(x, z, t) \quad (2.2)$$

Функции J и I , определенные в (1.13), сейчас имеют вид:

$$J(x, z) = -\frac{\mu_0 M}{\eta} \Phi^0 \frac{2(x - x_0)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right) \int_0^z \int_0^{z_1} H dz' dz_2 \quad (2.3)$$

$$I(x, z) = \frac{\partial J}{\partial z} = -\frac{\mu_0 M}{\eta} \Phi^0 \frac{2(x - x_0)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right) \int_0^z H dz_1$$

Уравнение (1.18) относительно коэффициента α было решено численно с учетом (2.2) и (2.3). Продольная компонента скорости течения феррожидкости в канале может быть получена из (1.8) и (1.15)

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \begin{cases} \alpha x^2 \frac{\partial \Psi_0(x, z, t)}{\partial z}, & x^2 < \alpha^{-1} \\ \frac{\partial \Psi_0(x, z, t)}{\partial z}, & x^2 > \alpha^{-1} \end{cases} \quad (2.4)$$

Результаты расчетов v_x из (2.4) представлены на рис. 3 и 4. При расчетах были выбраны следующие значения параметров системы: объемная концентрация частиц в центре капли $\Phi_0 = 0.016$; дисперсия $\sigma = 1$ см. Для всех соленоидов характеристики одинаковы: диаметр $D = 1$ см; ток $I = 8$ А; высота $h = 1$ см; количество витков $N = 10^4$; координата центра облака $x_0 = -1$ мм, ширина канала $l = 2$ мм. Намагниченность материала ферромагнитных частиц $M = 500$ кА/м. Угловые частоты поля $\omega = 10$ и 20 с⁻¹. Можно заметить, что увеличение частоты магнитного поля ведет к росту скорости течения феррожидкости. На рис. 3б видно, что непосредственно рядом с тромбом ($x \sim -0.012$ мм) продольная скорость течения v_x порядка 0.1 мкм/с. На расстояниях от

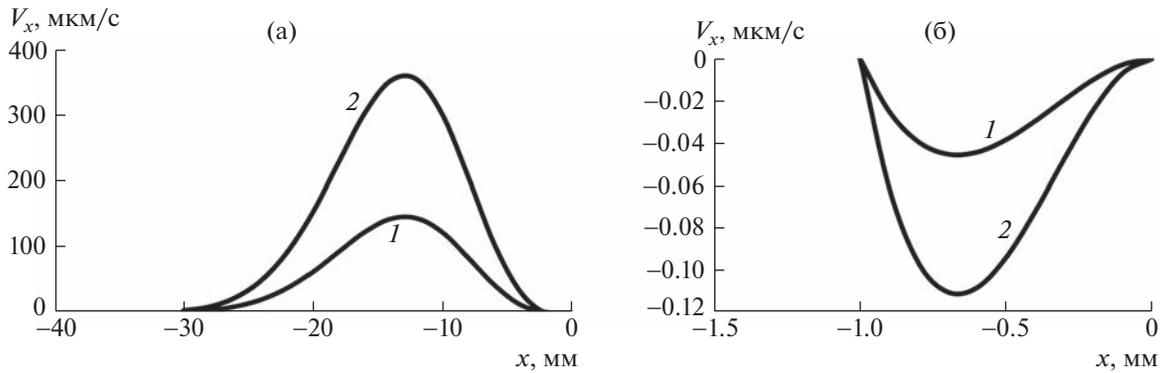


Рис. 3. Продольная компонента скорости v_x в зависимости от координаты x на расстоянии от центра тромба $x \sim -12$ мм (а) и вблизи тромба $x = 0$ (б) для различных частот ω при фиксированном $z = l/5$ и $t = 1$ с. Кривая 1: $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$; кривая 2: $\omega = 20 \text{ с}^{-1}$.

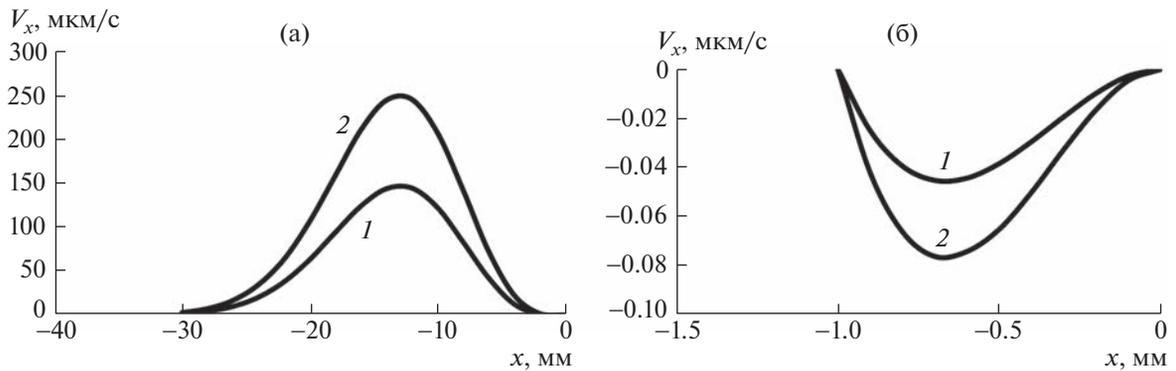


Рис. 4. Продольная компонента скорости v_x в зависимости от координаты x на расстоянии от центра тромба $x \sim -12$ мм (а) и вблизи тромба $x = 0$ (б) для различных времен t при фиксированном $z = l/5$ и $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$. Кривая 1: $t = 1$ с; кривая 2: $t = 0.5$ с.

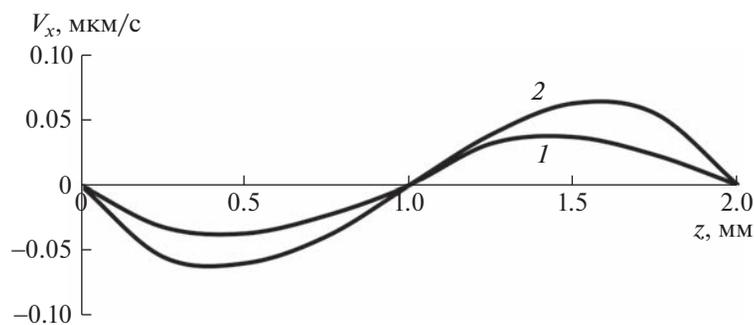


Рис. 5. Продольная компонента скорости v_x в зависимости от координаты z для различных времен t при фиксированном $x = x_0/2$ и $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$. Кривая 1: $t = 1$ с; кривая 2: $t = 0.5$ с.

тромба порядка размера капли феррожидкости ($x \sim 10 - 12$ мм) (рис. 3а) скорость достигает значений 350 мкм/с. На рис. 4 представлена скорость v_x при разных моментах времени. На рис. 5 показана скорость течения v_x как функция от координаты z , поперечной к оси канала при фиксированной координате x .

Среднеквадратичную скорость \bar{v}_x циркуляционных течений в окрестности феррожидкости можно оценить как несколько десятков микрон в секунду, что на полтора–два порядка величины больше скорости диффузионного транспорта тромболитиков в неподвижной среде, оцененной в [2], примерно 0.8 мкм/с. Это подтверждает эффективность магнитного метода интенсификации транспорта лекарств в тромбированных сосудах. Решение задачи о конвективной диффузии молекулярной примеси (тромболитиков) в канале с магнитоиндуцированными циркуляционными течениями, с учетом возникновения тонкого диффузионного пограничного слоя вблизи тромба, может являться предметом отдельного исследования.

Обсудим теперь правомерность приближения малых чисел Рейнольдса, которому соответствует уравнение (1.2). Как видно из рис. 3–5, скорость течения жидкости не превышает 500 мкм/с. При таких скоростях для канала диаметром порядка 1 мм (что, как отмечалось, соответствует диаметру кровеносного сосуда, тромбирование которого опасно для здоровья и жизни человека) и несущей жидкости с вязкостью крови (примерно, $4 - 5 \times 10^{-3}$ Па с) число Рейнольдса порядка 0.1. Это обосновывает выбранное линейное приближение (1.2) течения жидкости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена модель генерации циркуляционных течений в канале с немагнитной жидкостью и инжектированной в нее облаком нанодисперсной феррожидкости под действием бегущего осциллирующего магнитного поля. Один конец канала предполагался закрытым (тромбированным). Расчеты показывают, что, при вполне реалистических параметрах системы, частоты и напряженности магнитного поля, в канале вблизи облака феррожидкости могут быть генерированы течения с амплитудой продольной скорости порядка 10–100 мкм/с. Амплитуда скорости максимальна в центре капли и убывает по мере удаления от нее. Эти потоки могут существенно интенсифицировать транспорт нейтральной молекулярной примеси (лекарства) в несущей жидкости, что подтверждает идею, высказанную в [1, 2], о перспективности метода генерирования магнитоиндуцированных течений в тромбированных кровеносных сосудах для интенсификации в них транспорта тромболитиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 21-52-12013.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления компонент амплитуд H_{01} , H_{02} , H_{03} , H_{04} полей, создаваемых соленоидами на рис. 1 в формуле (1.1), используется закон Био–Савара–Лапласа:

$$H_{01x}(x, z) = \frac{I \cdot D \cdot N}{8\pi h} \int_{-(h+a)}^{-a} dz' \left(\int_0^{2\pi} \frac{(z - z') \cos \varphi}{\left[(z - z')^2 + \left(\frac{D}{2} \sin \varphi \right)^2 + \left(x - x_0 - \frac{D}{2} \cos \varphi \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right)$$

$$H_{01z}(x, z) = \frac{I \cdot D \cdot N}{8\pi h} \int_{-(h+a)}^{-a} dz' \left(\int_0^{2\pi} \frac{\frac{D}{2} - (x - x_0) \cos \varphi}{\left[(z - z')^2 + \left(\frac{D}{2} \sin \varphi \right)^2 + \left(x - x_0 - \frac{D}{2} \cos \varphi \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right)$$

$$H_{02x}(x, z) = \frac{I \cdot D \cdot N}{8\pi h} \int_{a+l}^{a+l+h} dz' \left(\int_0^{2\pi} \frac{(z - z') \cos \varphi}{\left[(z - z')^2 + \left(\frac{D}{2} \sin \varphi \right)^2 + \left(x - x_0 - \frac{D}{2} \cos \varphi \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right)$$

$$\begin{aligned}
 H_{02z}(x, z) &= \frac{I \cdot D \cdot N}{8\pi h} \int_{a+l}^{a+l+h} dz' \left(\int_0^{2\pi} \frac{\frac{D}{2} - (x - x_0) \cos \varphi}{\left[(z - z')^2 + \left(\frac{D}{2} \sin \varphi\right)^2 + \left(x - x_0 - \frac{D}{2} \cos \varphi\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right) \\
 H_{03x}(x, z) &= \frac{I \cdot D \cdot N}{8\pi h} \int_{-(b+x_0)}^{-(h+b+x_0)} dx' \left(\int_0^{2\pi} \frac{\frac{D}{2} - (z + l/2) \cos \varphi}{\left[(x - x')^2 + \left(\frac{D}{2} \sin \varphi\right)^2 + \left((z + l/2) - \frac{D}{2} \cos \varphi\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right) \\
 H_{03z}(x, z) &= \frac{I \cdot D \cdot N}{8\pi h} \int_{-(b+x_0)}^{-(h+b+x_0)} dx' \left(\int_0^{2\pi} \frac{(x - x') \cos \varphi}{\left[(x - x')^2 + \left(\frac{D}{2} \sin \varphi\right)^2 + \left((z + l/2) - \frac{D}{2} \cos \varphi\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right) \\
 H_{04x}(x, z) &= \frac{I \cdot D \cdot N}{8\pi h} \int_{b-x_0}^{h+b-x_0} dx' \left(\int_0^{2\pi} \frac{\frac{D}{2} - (z + l/2) \cos \varphi}{\left[(x - x')^2 + \left(\frac{D}{2} \sin \varphi\right)^2 + \left((z + l/2) - \frac{D}{2} \cos \varphi\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right) \\
 H_{04z}(x, z) &= \frac{I \cdot D \cdot N}{8\pi h} \int_{b-x_0}^{h+b-x_0} dx' \left(\int_0^{2\pi} \frac{(x - x') \cos \varphi}{\left[(x - x')^2 + \left(\frac{D}{2} \sin \varphi\right)^2 + \left(\left(z + \frac{l}{2}\right) - \frac{D}{2} \cos \varphi\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right)
 \end{aligned}$$

где I – ток в соленоиде, h – высота соленоида, N – количество витков в нем, a – расстояние от вертикальных соленоидов до сосуда, b – расстояние от горизонтальных соленоидов до центра облака феррожидкости, координата которого вдоль оси канала равна $-x_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Creighton Francis M.* Magnetic-based systems for treating occluded vessels: U.S. Patent № 8.308.628. 2012.
2. *Clements M.J.* A mathematical model for magnetically-assisted delivery of thrombolytics in occluded blood vessels for ischemic stroke treatment: Doctoral dissertation, Texas University, 2016.
3. *Gabayno J.L.F., Liu D.W., Chang M., & Lin Y.H.* // *Nanoscale*. 2015. V. 7. № 9. P. 3947–3953. <https://doi.org/10.1039/x0xx00000x>
4. *Li Q., Liu X., Chang M., & Lu Z.* // *Materials*. 2018.V. 11. № 11. P. 2313–2325.
5. *Musikhin A., Zubarev A., Raboisson-Michel M., Verger-Dubois G., Kuzhir P.* // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2020. V. 378. P. 20190250.
6. *Chirikov D., Zubarev A., Kuzhir P., Raboisson-Michel M., Verger-Dubois G.* // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2022 V. 231. P. 1187–1194.
7. *Rosensweig R.* *Ferrohydrodynamics*. New York.: Cambridge, 1985.
8. *Покровский В.* Статистическая механика разбавленных суспензий. М.: Наука, 1978.
9. *Odenbach S.* *Magnetoviscous Effect in Ferrofluids*, Springer, 2002.
10. *Onsager L.* // *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 1949. V. 5. P. 627.
11. *de Gennes P.G.* *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford.: Clarendon Press, 1974.

УДК 532.5

РЕКОНСТРУКЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУР ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЕЙ ПЛОСКОГО ЛЕЗВИЯ

© 2023 г. Z. Yan^{a,b,*}, C. Louste^{c,**}, J. Fang^{a,***}, and W. Wu^{d,****}

^aCollege of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai, China

^bLogistics Engineering College, Shanghai Maritime University, Shanghai, China

^cInstitut PPRIME, Université de Poitiers, Futuroscope Chasseneuil, Futuroscope Chasseneuil, France

^dNingbo Weiji Electronics Co.Ltd, Ningbo, China

*E-mail: zlyan@shmtu.edu.cn

**E-mail: christophe.louste@univ-poitiers.fr

***E-mail: jafang@dhu.edu.cn

****E-mail: wwz@zjweiji.com

Поступила в редакцию 21.06.2022 г.

После доработки 24.08.2022 г.

Принята к публикации 12.09.2022 г.

Метод лазерной анемометрии по изображениям частиц (PIV-метод) возник как мощный инструмент для измерения полей электрогидродинамических (ЭГД) течений. Трехмерная (3D) структура ЭГД-течений, индуцированных некоторым актуатором в геометрии плоского лезвия, реконструируется в данной работе на основе серии измерений параллельных полей вдоль ножевого электрода. Вдоль электрода наблюдается неоднородное распределение интенсивности инъекции и скорости. При использовании набора тонко нарезанных слоев графиков в различных полях зрения в трехмерной декартовой системе координат становится очевидным, что приложенное напряжение, расположение и расстояние между электродами, а также поверхность электродов, как и их краевая неровность, оказывают исключительно сильное воздействие на структуру ЭГД-струй. Данные, полученные в настоящем исследовании, послужат дополнением к полной картине трехмерной структуры струи и могут быть широко использованы для стимулирования выбора подходящих положений вдоль ножевого электрода для исследования плоских профилей.

Ключевые слова: электрогидродинамика, лазерная анемометрия по изображениям частиц, PIV-метод, диэлектрическая жидкость, трехмерные структуры, геометрия плоского лезвия

DOI: 10.31857/S0568528122600862, **EDN:** OGMLEC

Являясь перспективной междисциплинарной ветвью гидромеханики и электростатики, электрогидродинамика (ЭГД) позволяет систематически исследовать явления (теоретически и экспериментально), рассматривая структуру течения и его устойчивость, а также эффективность преобразования электрической энергии в кинетическую [1–6]. Из всех экспериментальных исследований, лазерная анемометрия по изображениям частиц (цифровая трассерная визуализация потоков, PIV-метод) стала доминирующим подходом к измерениям электроконвективных течений, благодаря существенным преимуществам над конкурирующими технологиями, такие как лазерная доплеровская методика измерения скорости частиц. В исследованиях электрогидродинамических течений значительный прогресс был достигнут по той причине, что именно с помощью PIV-метода полное поле скоростей может быть измерено во всех деталях, что позволяет исследовать сложные течения, включая вихревые структуры, отрыв потока, напряжения Рейнольдса и характеристики турбулентности [7]. Тщательно подбирая размер и концентрацию трассерных частиц, можно преодолеть такие технические трудности измерений, как возмущения движения частиц, возникающие в результате воздействия электропроводности и сил тяжести, а также плохую идентификацию траекторий частиц на оцифрованных изображениях, обусловленную их слабой отражательной способностью [8, 9]. Таким образом, полученные данные наводят на мысль, что применение PIV-метода к диэлектрическим жидкостям демонстрирует

его реальные возможности [8, 10]. Чтобы облегчить углубленный анализ характеристик потока в электрическом поле и поле течения без рассмотрения сложной геометрии течения, некоторые исследователи предпочитают выполнять PIV-эксперименты на двумерных течениях. Совсем недавно исследование структур течения и особенностей электрического поля в геометрии плоского лезвия привлекало растущее внимание не только из-за некоторых практических приложений, таких как методы ЭГД-накачки, но также по причине относительно легкой обработки данных, в которых ЭГД-течения, генерированные двумерным актуатором, естественно рассматривались как двумерные структуры [10–12]. Однако предположение, что двумерная конфигурация актуатора будет приводить к некоторой двумерной структуре течения, в данной работе нуждается в весьма осторожной интерпретации.

Теоретически, электроконвективные течения в общем случае называются “ЭГД-факелы.” Такое название определяется из перспективы происхождения течения жидкости. В ранних исследованиях, которые указывают, что кулоновская сила, возникающая в ЭГД-течениях, может быть сравнима с плавучестью тепловых факелов [13], было сделано сравнение происхождения течения, обусловленного жидкостью, из-за воздействия напряжения на острых электродах и индуцированного горячими тепловыми линиями. Тем не менее ЭГД-факелы и тепловые факелы обнаруживают некоторые отличные друг от друга свойства. Например, иногда плотность теплового факела отличается от плотности окружающей жидкости, тогда как плотность ЭГД-факела такая же, как плотность окружающей диэлектрической жидкости, что приводит к некоторым типам поведения ЭГД-течения, подобным поведению классической падающей струи в гидродинамике. Таким образом, с точки зрения равенства плотности, ЭГД-течения можно называть “ЭГД-струями.”

Действительно, обращаясь теперь к двумерной задаче, плоская струя в гидродинамике производится в узкой щели и только в том случае, когда отношение сторон сопла (обозначенного AR (aspect ratio), когда речь идет об отношении длинной стороны сопла к короткой) является достаточно большим (в общем случае, $AR \geq 20$), так что поле скоростей, рассматриваемое статистически, будет двумерным [14]. Аналогично геометрии выходного сопла плоской струи, в ЭГД-случае ножевой электрод, имея большое отношение длины лезвия к его ширине (как правило, $AR \geq 100$), как кажется, играет подобную роль в создании двумерных ЭГД-струй. Предыдущий обзор полей ЭГД-течения продемонстрировал, что жидкость в средней области ниже поверхности лезвия течет вниз при малом отношении $V_z/V_y = 0.02$ [10]. Большая скорость V_y , направленная вниз, наблюдается в двух углах кромки лезвия, что может влиять на предположение о двумерной картине струи в середине области. Кроме того, микроскопическая морфология поверхности электрода, детектированная и проверенная методом атомно-силовой микроскопии, также может влиять на двумерные особенности струи. Согласно этим данным, максимальная напряженность электрического поля, генерированного плоским электродом с дисперсной неровностью, гораздо выше, чем напряженность электрического поля, индуцированного абсолютно гладким электродом [15], что приводит к неоднородному распределению электрического поля ниже лезвия и, таким образом, к разной скорости струи. Вплоть до настоящего времени, слишком мало внимания было уделено структурной визуализации ЭГД-струй вдоль лезвия, представляя более вероятными измерения поля профиля струи в произвольном месте в среднем сечении. Отсюда следует, что в настоящем исследовании необходимо выяснить, какое расстояние от лезвия необходимо для того, чтобы свойство двумерности ЭГД-струи не нарушалось.

Таким образом, настоящее исследование предлагает свежее исследование для реконструкции трехмерной структуры струй, которое основывается на серии параллельных измерений полей скоростей вдоль ножевого электрода. Это позволит заполнить имеющийся пробел в литературе и поможет сделать рациональный выбор позиции в будущих экспериментах.

1. МЕТОДИКА

1.1. Методика и стратегия измерений

В настоящем исследовании используются следующие свойства диэлектрической жидкости: плотность 850 кг/м^3 , кинематическая вязкость $4.3 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, электрическая проводимость без поля усиленной диссоциации равна $1.15 \times 10^{-9} \text{ С/м}$, и диэлектрическая постоянная равна 2.2. Жидкость в сосуде приводится в движение плоским актуатором в ответ на высоковольтный сигнал постоянного тока. Общепринятая двумерная система PIV используется для освещения области измерений и записи изображений профильного поля (см. плоскость A на рис. 1). Для измерений в плоскости A двойной импульс лазерной системы на алюмоиттриевом гранате, легиро-

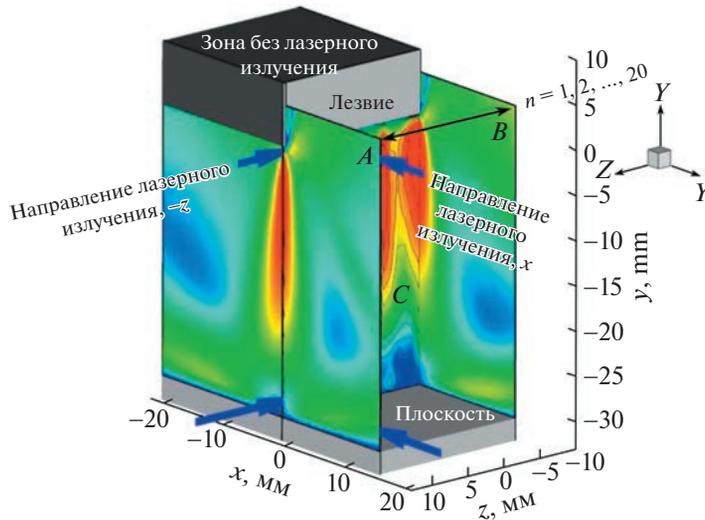


Рис. 1. Два набора PIV-экспериментов, состоящих из: (1) плоскость X ниже поверхности лезвия при $x = 0$ мм (плоскость C), CCD камера, снимающая плоский срез с помощью пелены лазерного излучения по направлению $-z$; (2) 20 последовательных плоскостей Z в интервале от $z = -6$ мм (плоскость B) до $z = 13$ мм (плоскость A) с постоянным шагом 1 мм, CCD камера, снимающая поля профилей струи с помощью пелены лазерного излучения по направлению $-z$.

ванном неодимом, эмитирует пелену лазерного излучения с направления $-x$ и поток, засеянный трассерными частицами, охватывается цифровой CCD-камерой, луч зрения которой перпендикулярен плоскости лазерного излучения. Те, кто заинтересован в детальной информации об экспериментальной установке, могут найти подробности в [10].

Ввиду концентрации в настоящем исследовании на осредненном во времени поле течения, для нас недостаточно реконструировать трехмерное поле течения с использованием стереоскопического PIV-метода, в котором требуются две камеры, чтобы визуализировать частицы в слоях лазерного излучения под двумя различными углами, и требуется сложная процедура для трактовки излишних данных. В рассматриваемом случае подход с многослойным лазерным излучением достаточен для получения трехмерных измерений с одной камерой [7]. Для каждой отдельно взятой плоскости (например, (V_x, V_y) в плоскости A на рис. 1) общепринятая двумерная PIV-система способна измерить двумерное распределение компонент скорости в соответствующей плоскости лазерного излучения. Две ключевые компоненты платформы поддержки контейнера являются основными благоприятствующими факторами в стратегии измерений. Во-первых, направляющий рельс позволяет перемещать сосуд вдоль оси z , что делает возможным для лазера осветить 20 последовательных Z -плоскостей в диапазоне от $z = -6$ мм (плоскость B) до $z = 13$ мм (плоскость A) с постоянным пространственным шагом в 1 мм. Во-вторых, поддон контейнера позволяет сосуду поворачиваться на 90° , что облегчает плоские измерения на поверхности лезвия (плоскость C).

Короче говоря, когда условия в виде приложенного напряжения U и расстояния между электродами H заданы, стратегия исследования трехмерной структуры ЭГД струй содержит два шага, а именно, измерение в X плоскости при $x = 0$ мм (плоскость C) для проверки двумерности течения в геометрии плоского лезвия и набор измерений в Z плоскостях (от плоскости A до плоскости B) для трехмерной реконструкции и визуализации ЭГД-течений.

1.2. Надежность PIV-измерений

Для каждого измерения в плоскости рассчитывается осредненное во времени поле течения, чтобы дать общее представление о форме течения, происходящее из 1000 мгновенных измеренных полей течения. Может возникнуть вопрос: достаточны ли 1000 имеющихся результатов измерений для вычисления среднего поля течения? В этом разделе будет исследована надежность измерений. Считая, что PIV-измерения будут выполняться в двух направлениях (z и x), представим абсолютное значение скорости и относительную ошибку (в %) с вероятностью 0.997 в z и x плоскостях на рис. 2 и 3 соответственно.

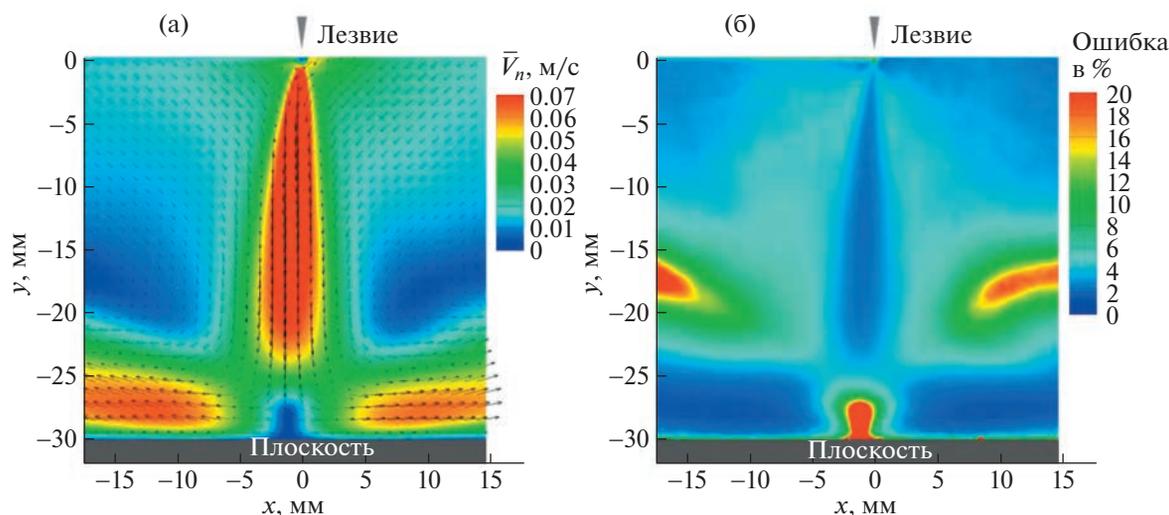


Рис. 2. Изображение PIV-скорости поля профилей для случая $U = -30$ кВ, $H = 3$ см: абсолютная величина скорости \bar{V}_n (м/с) и векторы ее направления (а), относительная ошибка в % с вероятностью 0.997 (б).

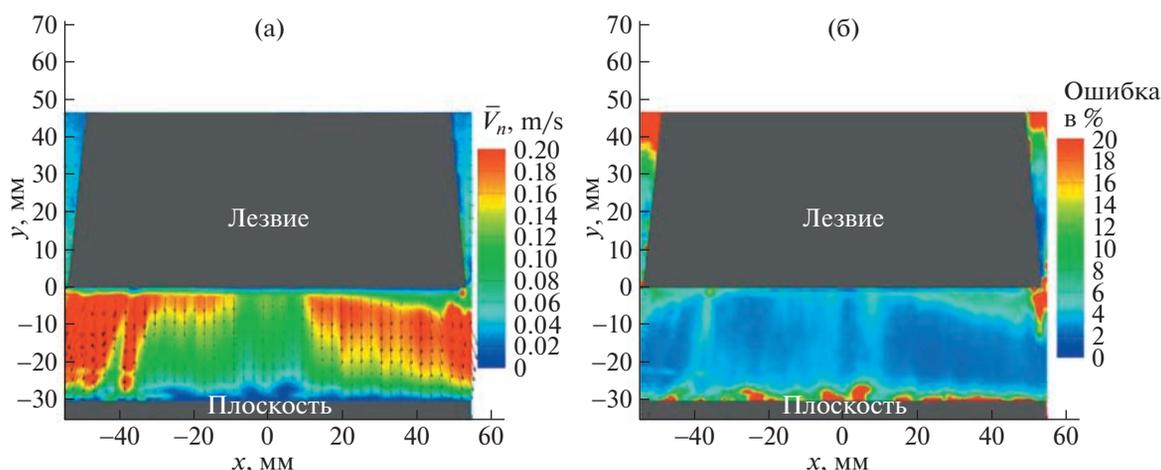


Рис. 3. Изображение PIV скорости плоского поля для случая $U = -30$ кВ, $H = 3$ см: абсолютная величина скорости \bar{V}_n (м/с) и векторы ее направления (а), относительная ошибка в % с вероятностью 0.997 (б).

На рис. 2а и 3а средняя скорость \bar{V}_n имеет доверительный уровень 99.7% с доверительным интервалом $\Delta V = 3\sigma/\sqrt{n-1}$, где σ представляет собой стандартное отклонение \bar{V}_n и n есть число измерений. Как результат, на рис. 2б и 3б изображена относительная ошибка (в %), заданная выражением $(\Delta V_i / \bar{V}_n \times 100)\%$. Очевидно, что на рис. 2б процент ошибки меньше 2% как для вертикальной срединной области, так и для двух горизонтальных пристенных струй, откуда следует, что процент ошибки меньше 4% на границах зоны турбулентного смешения [16]. Тем не менее в центре двух вращающихся вихрей процент ошибки выше 15%. Это вызвано наличием почти стационарного течения с небольшой величиной \bar{V}_n в этой области. Что касается центра зоны падения струи, процент ошибки превышает 20% из-за совместного влияния небольшой скорости течения и его отражения от пластины. На рис. 3 осредненное во времени плоское поле имеет процент ошибки менее 4% в большей части площади, исключая зоны вблизи углов лезвия и плоского электрода. Ясно, что неоднородная скорость распределена вдоль ножевого электрода на рис. 3а, что еще больше подчеркивает важность проведенного исследования трехмерной структуры.

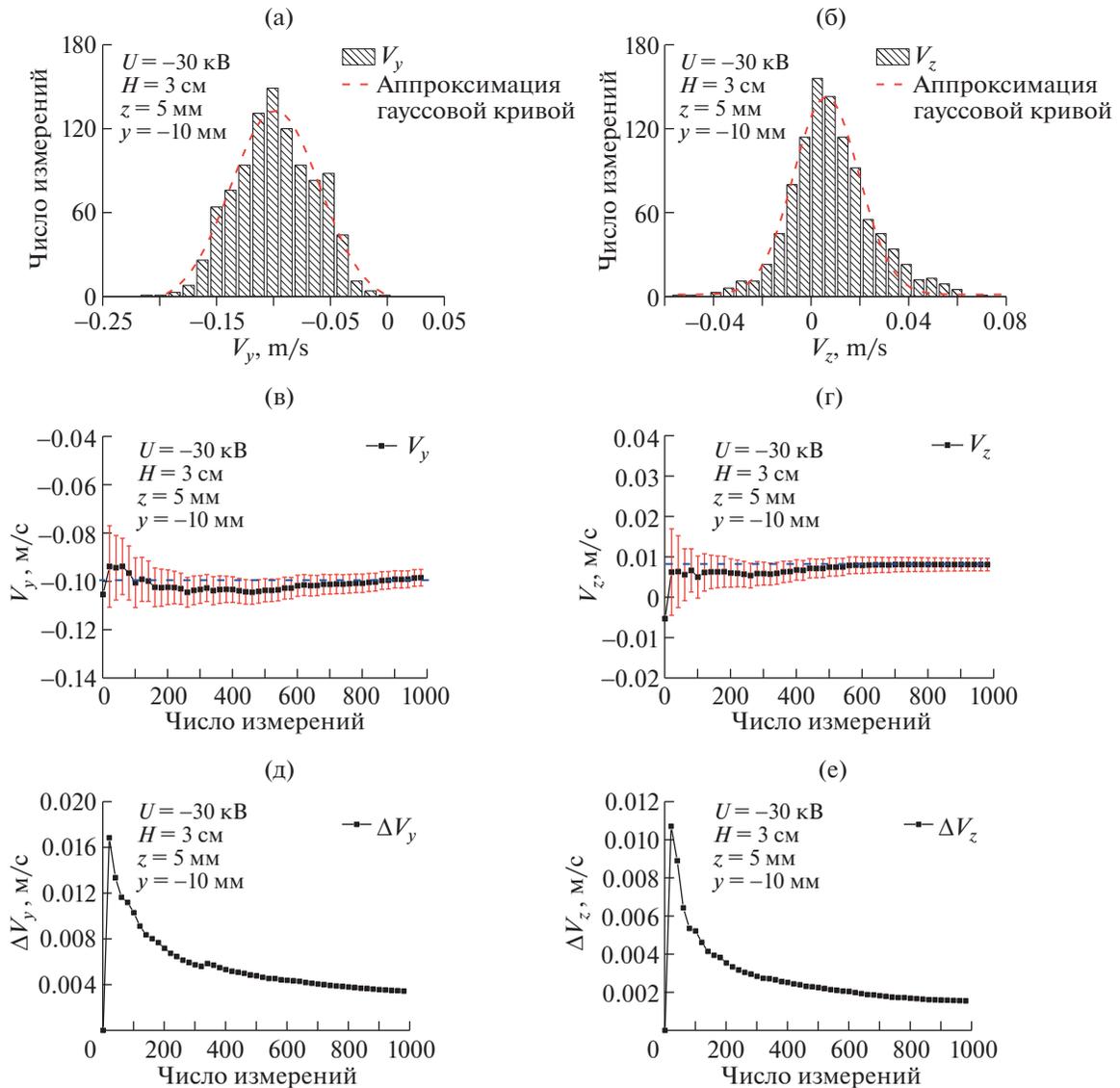


Рис. 4. Статистический анализ скорости в одной точке ($z = 5$ мм, $y = -10$ мм) плоскости $x = 0$ мм в случае $U = -30$ кВ, $H = 3$ см: гистограммы V_y (а) и V_z (б) на основе 1000 испытаний, расхождение средней скорости V_y (в) и V_z (г) в зависимости от объема выборки, сходимость неопределенности скорости ΔV_y (д) и ΔV_z (е) в зависимости от объема выборки.

Рассматривая поле скоростей целиком, можно утверждать, что достоверность PIV-измерений сохраняется в соответствии с анализом, проведенным выше. Переходя к анализу надежности 1000 измерений в некоторой точке поля течения, можно запросить подтверждение, что число замеров также достаточно для правильного вычисления величины, усредненной по времени. Например, рисунок изображает статистический анализ скорости в некоторой произвольной точке в x -плоскости измерений. Поскольку справедливость поточечного статистического анализа в z -плоскости была уже подтверждена в [17], процедуру анализа не будем повторять в настоящей работе. Очевидно, что на рис. 4а и 4б все 1000 примеров V_y и V_z попадают в статистическую последовательность и каждая гистограмма хорошо укладывается в гауссову кривую распределения. Рисунки 4в и 4г показывают эволюцию средней скорости \bar{V}_n (символы в виде черных квадратов) и ее неопределенности ΔV_i (символы в виде красных отрезков) в зависимости от числа замеров. В данном примере имеем $\bar{V}_y = -98.48 \pm 3.35$ мм/с и $\bar{V}_z = 9.08 \pm 1.98$ мм/с, когда $n = 1000$. Как можно видеть на рис. 4д и 4е, значение $n \approx 800$, кажется, является порогом, на котором \bar{V}_i поддержи-

вается без изменений и ΔV_i сходится к некотором асимптотическому значению (здесь индекс i принимает значения x или y).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Двумерность течений

В этом разделе будет проверена двумерность ЭГД-течений, индуцированных актуатором в виде плоского лезвия, с помощью интеграла от дивергенции скорости в профильном поле. Хорошо известно, что несжимаемая вязкая ньютоновская жидкость должна теоретически удовлетворять уравнению неразрывности в виде $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. Применяя теорему о дивергенции векторного поля, также известную как теорема Грина–Остроградского, можно проанализировать количество жидкости, протекающей через некоторый контрольный объем. Этот метод, который реализуется посредством интегрирования дивергенции векторного поля по заданному объему, играет важную роль в обеспечении сохранения потока жидкости. Известно, что равная нулю дивергенция означает, что ни источники, ни стоки не существуют внутри контрольного объема в случае несжимаемой жидкости. Следовательно, чистый поток (разность между количеством вытекшей и притекшей жидкостями) может быть определен как

$$D_{net} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} dv, \quad (2.1)$$

где Ω – контрольный объем. Чтобы проверить двумерность ЭГД-струи в нашем случае, вычислим интеграл от дивергенции поля скоростей в случае двумерного вида уравнения (2.1), т.е. $\iint_S (\partial \bar{V}_x / \partial x + \partial \bar{V}_y / \partial y) ds$. Каждый контрольный объем S в поле профиля струи (Z плоскость) представляет собой квадратную сетку 0.506×0.506 мм. Рисунок 5 подтверждает, что D_{net} практически равно нулю во всей области (зеленый цвет), это означает, что скорость в z направлении (по нормали к плоскости рис. 5) либо постоянна или равна нулю. Вообще говоря, типичная трехмерная ЭГД-струя, генерированная трехмерной геометрией, имеет не пренебрежимо малую \bar{V}_z . Например, соотношение $\bar{V}_z = \bar{V}_x$ верно для некоторой ЭГД-струи в геометрии плоской точки, даже в конфигурации плоского лезвия, скорость \bar{V}_z не столь велика, как \bar{V}_x . Как было отмечено ранее [17], имеет место очень маленькое значение \bar{V}_z / \bar{V}_y в средней части лезвия, что результируется в пренебрежении \bar{V}_z при обработке экспериментальных данных [17]. Основываясь на этом анализе, то, что \bar{V}_z равно нулю, а не постоянной величине, оказывается верным в большей части площади на рис. 5. Однако вблизи плоского электрода положительное значение (красный цвет) D_{net} , которое представляет собой жидкость, вытекающую из Z плоскости, есть признак трехмерного поведения. Это может быть вызвано либо неперпендикулярным падением струи на пластину, либо отражением жидкости во всех направлениях вблизи пластины. К счастью, трехмерное поведение вблизи зоны падения не влияет на анализ двумерности поведения жидкости ниже ножевого электрода. В проводимом исследовании основная область струи рассматривается как зона основного внимания для рассмотрения.

На рис. 6 построены три члена дивергенции скорости и их неопределенности вдоль центральной линии $x = 0$ в плоскости Z . Это иллюстрирует тренд эволюции и позволяет сравнить амплитуду трех компонент в поле течения, чтобы отразить двумерный характер струи. На практике каждая компонента в декартовых координатах состоит из члена, усредненного во времени, и его неопределенности, что используется для критической оценки надежности данных. Таким образом, дивергенция может быть задана следующим образом:

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k} = \overline{\frac{\partial V_k}{\partial x_k}} + \Delta \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right), \quad (2.2)$$

где индекс k обозначает три возможные компоненты. Учитывая правило дифференцирования суммы, первое слагаемое в правой части уравнения (2.2) можно заменить на $\partial \bar{V}_k / \partial x_k$, которое может быть вычислено с помощью центральной разности. В декартовых координатах имеем

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} = \frac{\bar{V}_x(i+1, j) - \bar{V}_x(i-1, j)}{2h}, \quad (2.3)$$

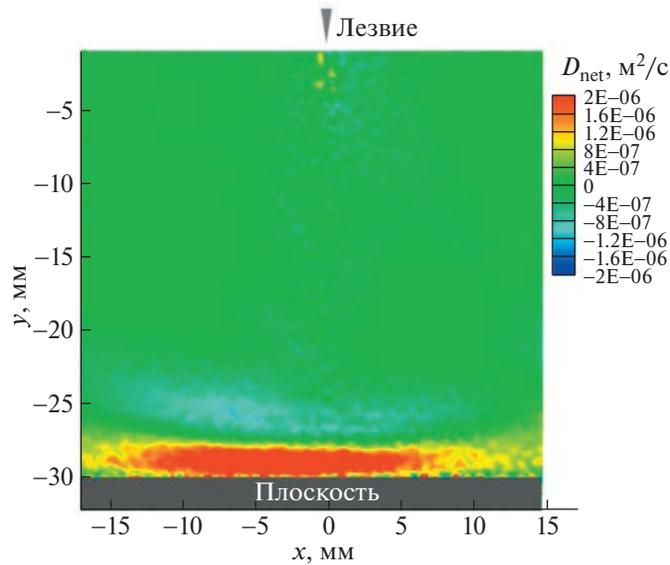


Рис. 5. Проверка двумерности течения, значение D_{net} , вычисленное интегрированием дивергенции векторного поля по двумерному контрольному объему 0.506×0.506 мм, в случае $U = -30$ кВ, $H = 3$ см.

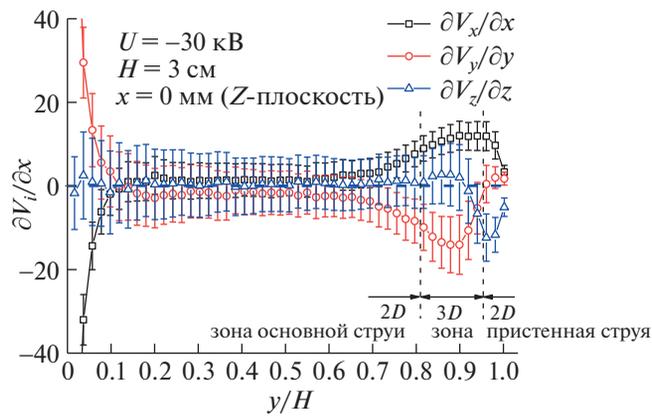


Рис. 6. Частные производные компонент скорости на средней линии струи в случае $U = -30$ кВ, $H = 3$ см.

$$\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} = \frac{\bar{V}_y(i, j+1) - \bar{V}_y(i, j-1)}{2h}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} \right), \quad (2.5)$$

где h – расстояние между узлами квадратной сетки в плоскости Z . Соответственно, выражения для неопределенности для этих членов могут быть записаны как в [18]:

$$\Delta \left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} \right) = \frac{\sqrt{(\Delta V_x(i+1, j))^2 + (\Delta V_x(i-1, j))^2}}{2h}, \quad (2.6)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} \right) = \frac{\sqrt{(\Delta V_y(i, j+1))^2 + (\Delta V_y(i, j-1))^2}}{2h}, \quad (2.7)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial z} \right) = \frac{\sqrt{(\Delta V_x(i+1, j))^2 + (\Delta V_x(i-1, j))^2 + (\Delta V_y(i, j+1))^2 + (\Delta V_y(i, j-1))^2}}{2h}, \quad (2.8)$$

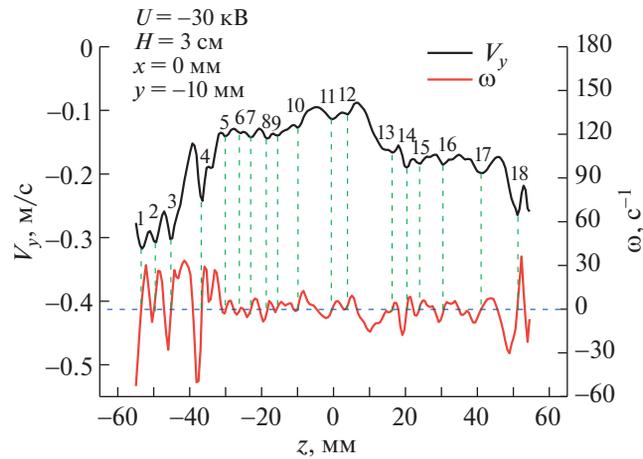


Рис. 7. Распределение скорости V_y вдоль ножевого электрода (вдоль направления z) в плоскости $x = 0$ мм, линия $y = -10$ мм в случае $U = -30$ кВ, $H = 3$ см. (1): неоднородное распределение скорости, указывающее на различную интенсивность инъекции на кромке лезвия, где 18 точек максимумов скорости имеют место вдоль лезвия и (2): соответствующая угловая скорость ω , для лучшей визуализации максимума скорости.

где ΔV_k – неопределенность скорости, определенная в предыдущей части. Ясно, что вдоль оси $\partial \bar{V}_z / \partial z$ (символы в виде голубых треугольников) изменяется вблизи нуля при рассмотрении неопределенности скорости (символы в виде голубых отрезков) в основной области. На рис. 6 двумерность оказывается справедливой в областях $y/H < 0.8$ и $y/H > 0.95$, где $\partial \bar{V}_x / \partial x$ и $\partial \bar{V}_y / \partial y$ симметричны относительно нуля и, таким образом, взаимно уничтожают друг друга. Отметим, что на практике $x = 0$ в плоскости Z вовсе не обязательно совпадает с центральной осью струи, возникающей при наличии небольшого угла наклона (что означает $\bar{V}_x \neq 0$ при $x = 0$). Вот почему можно видеть большие значения $\bar{V}_x / \partial x$ и $\partial \bar{V}_y / \partial y$ при $y/H < 0.05$, и симметрия этих двух слагаемых означает, что некоторое двумерное течение развивается в плоскости Z без наличия z -компоненты скорости в этой области.

Аналогичная ситуация может быть найдена в зоне падения ($y/H > 0.95$), где баланс $\partial \bar{V}_x / \partial x$ и $\partial \bar{V}_z / \partial z$ дает почти нулевое значение $\partial \bar{V}_y / \partial y$. Это приводит к тому, что пристенная струя течет по пластине в z -направлении в плоскости Y (параллельно плоскости электрода). Однако область вблизи плоскости ($0.82 < y/H < 0.95$) демонстрирует особенность, где ни один из этих трех членов не доминирует. Такая трехмерная характеристика может быть отнесена к комбинации изменения градиента давления, отражения скорости и угла наклона струи.

Хотя вышеприведенные исследования могут продемонстрировать, что двумерное течение в общем случае может возникнуть ниже ножевого электрода, этот результат должен быть интерпретирован с осторожностью. Действительно, неоднородное распределение скорости уже было найдено на рис. 3а и свидетельство о конкуренции струй может ясно просматриваться на рис. 7. На нем изображены 18 положений максимальной скорости, определенные вдоль всей длины ножевого электрода при построении графика V_y при $y = -10$ мм. Что стоит отметить по поводу продольной скорости на рис. 7, так это то, что распределение \bar{V}_y не остается постоянным при смене заданного y . Инжекция становится более интенсивной по обе стороны из-за граничного эффекта и в средней области струя кажется поджатой. Более точное детектирование может быть выполнено с использованием угловой скорости ω , которая задается выражением $0.5(\partial \bar{V}_y / \partial x - \partial \bar{V}_x / \partial y)$. В этом методе положение $\omega = 0$ отмечает место, где ω из отрицательного становится положительным, соответствуя точке сильной инъекции на ножевом электроде. Присутствие дисперсных пиков может быть результатом совместного влияния приложенного напряжения, межэлектродного зазора и шероховатости электрода. В следующем разделе будет приведено углубленное обсуждение этого факта, основываясь на трехмерной структуре струй.

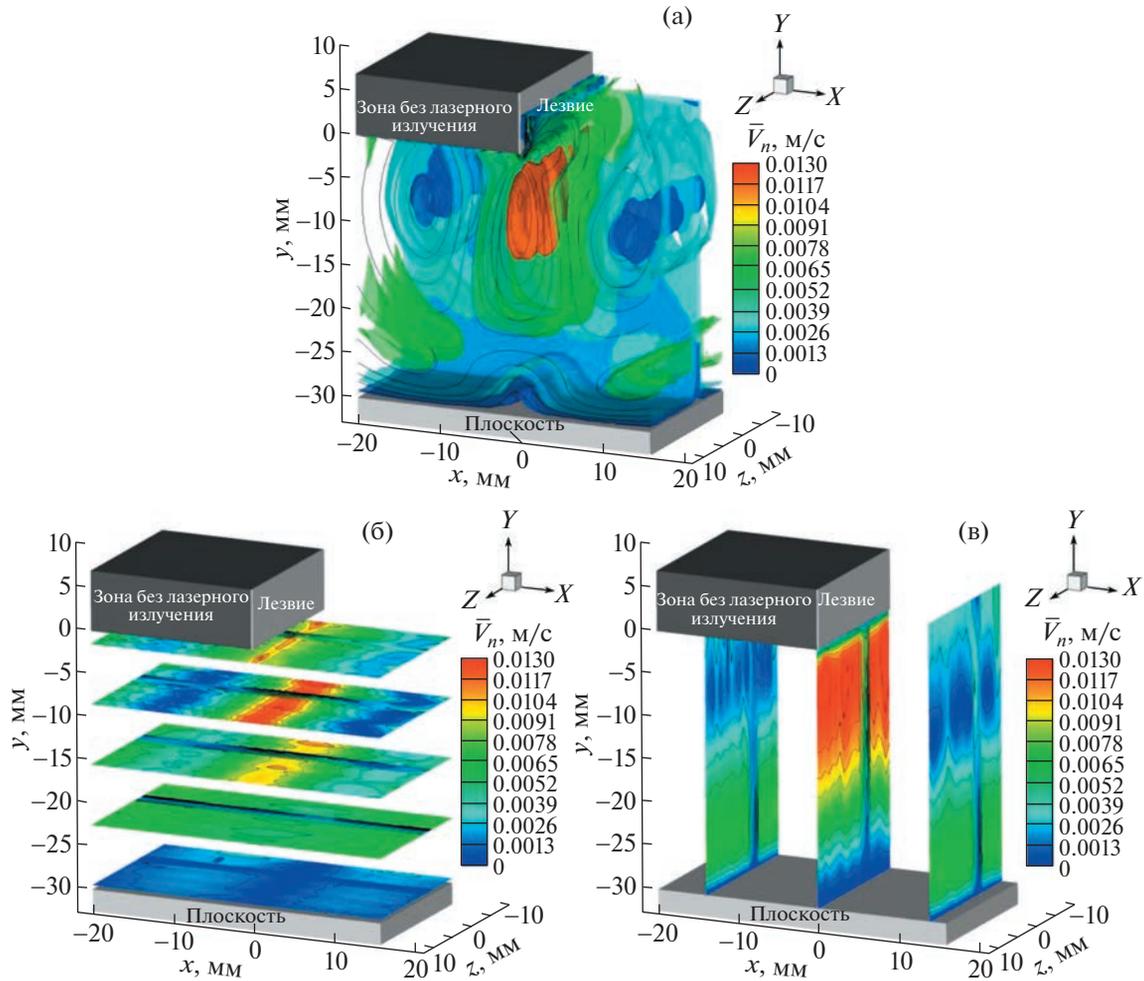


Рис. 8. Реконструкция трехмерной структуры ЭГД-струи на основе 20 последовательных плоскостей Z в случае $U = -10$ кВ, $H = 3$ см: контуры изоповерхностей абсолютной величины скорости (а), срезы плоскости Y в направлении потока (б), и срезы плоскости X по размаху поперек потока (в).

2.2. Реконструкция трехмерной структуры

Были проведены две серии экспериментов с подбором расстояния между электродами от 1 до 3 см и в каждой серии к ножевому электроду были приложены отрицательные напряжения от -10 до -30 кВ соответственно. Поскольку усредненная по времени скорость ЭГД-струи при положительном напряжении оказывается меньше, чем при отрицательных напряжениях, были выбраны более эффективные отрицательные напряжения для проведения экспериментов [8]. В этом процессе электроны испускаются с металлического электрода в жидкость и объединяются с нейтральными молекулами, образуя отрицательные ионы. Постепенное накопление отрицательных зарядов той же самой полярности, как и у электрода, приводит к гомогенно заряженному слою и эти объемные заряды отрицательной полярности удаляются от ножевого электрода и приближаются к плоскому электроду за счет кулоновских сил. Под влиянием вязкого трения движение этих зарядов одновременно вызывает движение окружающей жидкости.

Для визуализации трехмерной структуры поля течения в средней области лезвия измеренные параллельные мульти-плоскости были связаны на длине 2 см в z -направлении в средней части, как изображено на рис. 8–11.

2.2.1. Структура, зависящая от электрического поля. В предыдущем исследовании [10] были отмечена сильная зависимость между максимальной скоростью в центральной части струи и средней напряженностью электрического поля. Например, режим сильной инжекции характеризуется большим наклоном кривой $\bar{V}_{max}(\bar{E}_m)$ в случае сильного электрического поля, что соответ-

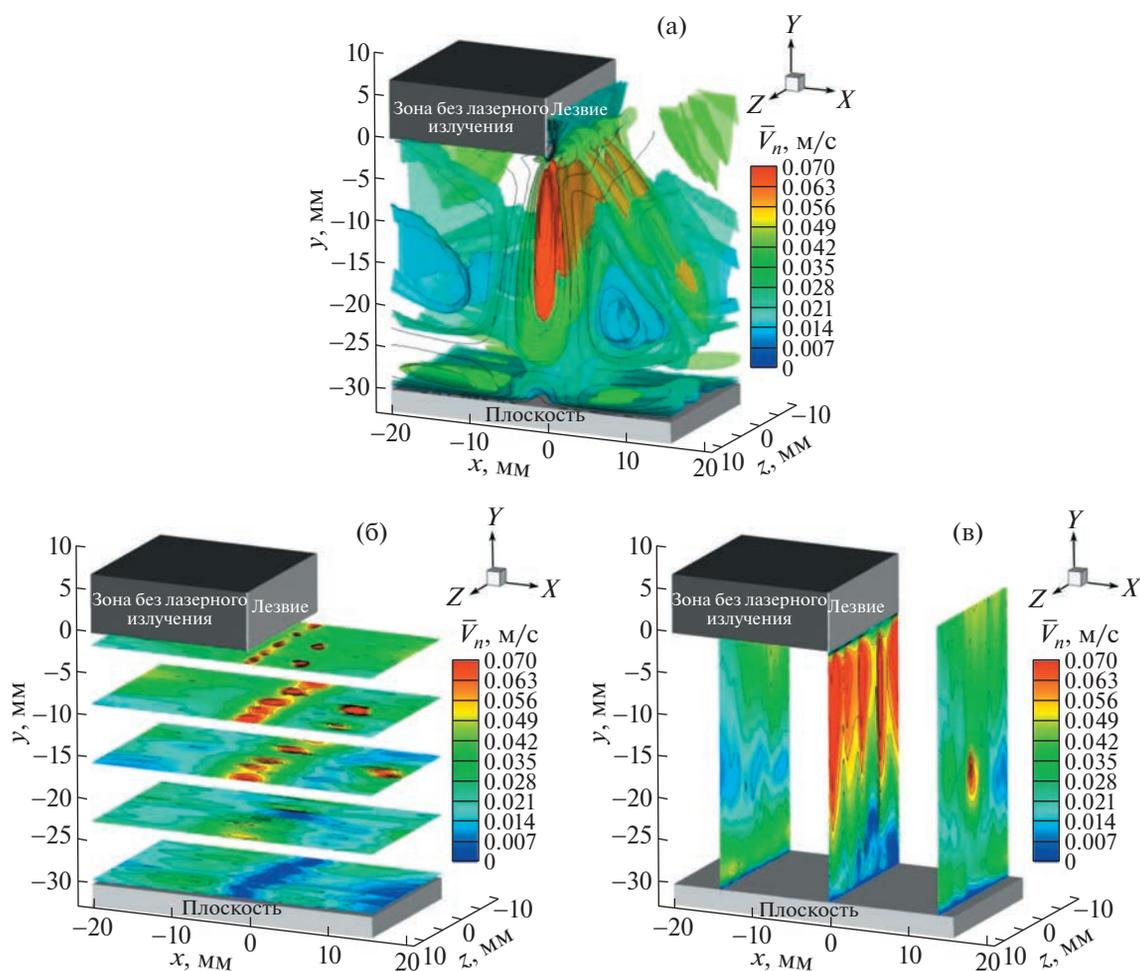


Рис. 9. Реконструкция трехмерной структуры ЭГД-струи на основе 20 последовательных плоскостей Z в случае $U = -30$ кВ, $H = 3$ см: контуры изоповерхностей абсолютной величины скорости (а), срезы плоскости Y в направлении потока (б), и срезы плоскости X по размаху поперек потока (в).

ствует генерации струи с большей скоростью и меньшей полушириной, также как в случае двух пристенных струй вдоль пластины (см. ситуацию на рис. 11, в которой $U = -30$ кВ и $H = 1$ см). Наоборот, режим слабой инжекции с малым наклоном данной кривой в слабом электрическом поле отождествляется со струей с небольшой скоростью и большей полушириной, как в случае двух больших вихрей, вращающихся в противоположных направлениях (см. случай на рис. 8а, в котором $U = -10$ кВ и $H = 3$ см). В случае средней напряженности электрического поля струя с умеренной скоростью и умеренной полушириной сопровождается двумя пристенными струями, не полностью развитыми на плоском электроде, обе эти струи последовательно смещаются вверх в дальнем поле и участвуют в закрутке вихрей рядом с основной струей (см. случаи на рис. 9а, когда $U = -30$ кВ и $H = 3$ см, и на рис. 10а, когда $U = -10$ кВ и $H = 1$ см). Очевидно, что хотя средняя напряженность электрического поля в этих двух случаях равна 1000 кВ/м, между рис. 9 и 10 можно видеть существенную разницу, как в скорости, так и в трехмерной структуре течения. Эту несогласованность можно объяснить, в частности, невозможностью использования среднего электрического поля в качестве критерия в столь сильном асимметричном электрическом поле, которое индуцируется плоским ножевым электродом. Ссылаясь на график $\bar{V}_{max}(\bar{E}_m)$ в [10], можно перевести (транслировать) кривые с различными зазорами между электродами так, чтобы позволить всем кривым накладываться одна на другую на графике и, таким образом, горизонтальные координаты, соответствующие смещенным кривым, будут переопределены как эквивалентное электрическое поле \bar{E}_{eq} . Используя такой метод, можно вывести, что условие $U = -10$ кВ, $H = 1$ см эквивалентно условию $U = -17.2$ кВ, $H = 3$ см, пересчитанному на генерацию ЭГД струи

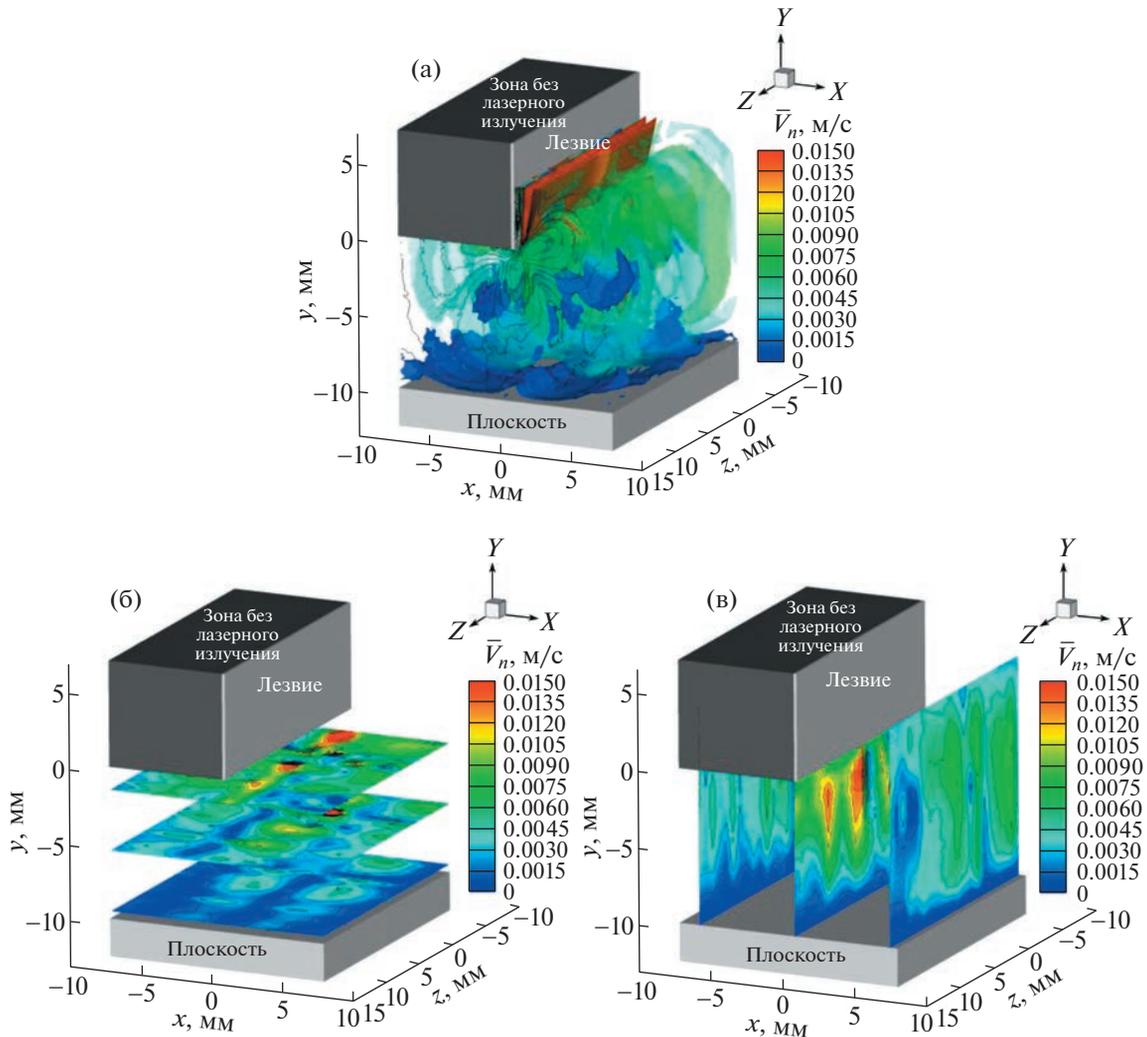


Рис. 10. Реконструкция трехмерной структуры ЭГД-струи на основе 20 последовательных плоскостей Z в случае $U = -10$ кВ, $H = 3$ см: контуры изоповерхностей абсолютной величины скорости (а), срезы плоскости Y в направлении потока (б), и срезы плоскости X по размаху поперек потока (в).

с тем же самым максимумом скорости. Отметим, что абсолютная величина этого напряжения (17.2 кВ), соответствующая \bar{E}_{eq} , значительно ниже по сравнению с величиной 30 кВ, связанной с \bar{E}_m . Таким образом, справедливо, что при условии для напряжения и зазора между электродами на рис. 10а возникает менее интенсивная струя с более слабой инжекцией, чем струя на рис. 9а.

2.2.2. Параметрическое влияние ЭГД-струй. Структура ЭГД-струи есть следствие общего влияния факторов, относящихся к приложенному напряжению, зазору между электродами и шероховатости электродов. На вопрос по поводу такого параметра, как напряжение, когда высокое электрическое напряжение приложено к электроду, можно сказать, что несколько теоретических механизмов, связанных с границей раздела металл/жидкость, способны привести к движению жидкости, такому как инжекция за счет излучения поля и инжекция за счет электрохимической реакции [19]. Ввиду относительно высокой удельной проводимости рабочей жидкости ($\sim 10^{-9}$ См/м) и того факта, что область трехмерной реконструкции все еще находится в центральной зоне лезвия (там, где напряженность электрического поля порядка 10^7 В/м), механизм электрохимической инжекции должен быть рассмотрен для этой зоны и перенос электронов имеет место внутри электрического двойного слоя (ЭДС), тогда процесс транспорта реагентов включается в рассмотрение [20–22]. Подводя итог, разность потенциалов в электрическом двойном слое существенно определяет интенсивность инжекции заряда. Это влечет тот факт, что феноменологически приложенное напряжение воздействует на скорость и структуру индуцированной

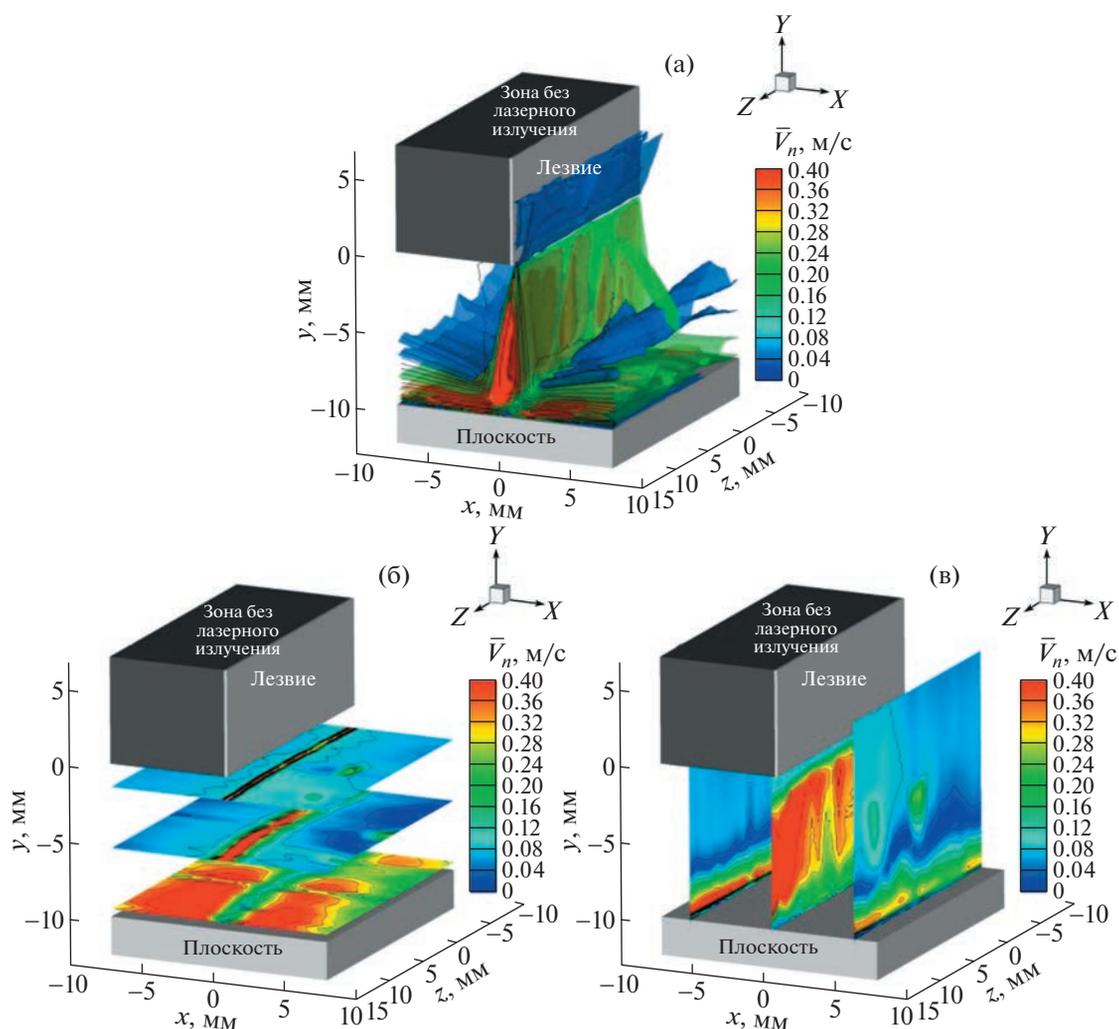


Рис. 11. Реконструкция трехмерной структуры ЭГД-струи на основе 20 последовательных Z-плоскостей в случае $U = -30$ кВ, $H = 1$ см: контуры изоповерхностей абсолютной величины скорости (а), срезы плоскости Y в направлении потока (б), и срезы плоскости X по размаху поперек потока (в).

ной струи. Однако более скоростная струя на кромке лезвия может ассоциироваться с инъекцией за счет излучения поля, в которой рабочая функция материала электрода (в рассматриваемом случае это 4.48 эВ для нержавеющей стали [15]) определяет минимальную энергию, необходимую для ухода электрона с поверхности материала. В настоящем исследовании интересной находкой было то, что механизм инъекции сильно ослаблен при $z = 0$ мм в центре лезвия (см. все срезы в плоскости X на рис. с 8в по 11в). Довольно выраженное подавление инъекции может быть отмечено в центре лезвия при $U = -10$ кВ, что может возникать из-за величины напряжения, которое приближается к порогу возникновения струи.

Другой неожиданный результат состоит в том, что при $U = -30$ кВ существуют явления дополнительной инъекции вдоль ножевого электрода с дополнительными ЭГД-струями, текущими наклонно вниз в диэлектрической жидкости при $z = 4$ и 10 мм (см. рис 9а и 11а). Поскольку эти дополнительные струи главным образом получены в том же положении вдоль ножевого электрода (в случае $H = 3$ см см. срез с $y = -0.5$ мм на рис. 9б и срез с $x = 12$ мм на рис. 9в, а в случае $H = 1$ см см. также срез с $y = -0.5$ мм на рис. 11б и срез с $x = 6$ мм на рис. 11в), а возможным объяснением может быть то, что шероховатость электрода изменяет первоначальный радиус кривизны вдоль электрода, делая локальное электрическое поле в этих специфических положениях более интенсивным, чем ожидалось. Будучи подверженным воздействию высокого напряжения, процесс переноса электронов может быть облегчен и дополнительные струи могут быть индуцированы в со-

ответствующих положениях. Однако в случае $U = -10$ кВ локальное электрическое поле все же недостаточно сильное, чтобы генерировать дополнительные ЭГД-струи (см. рис. 8 и 10).

Обращаясь к эффекту зазора между электродами, можно сказать, что, по-видимому, при низком напряжении струя движется вниз вдоль лезвия с относительно малой скоростью и распространяется при почти равной скорости, делая в этом случае влияние межэлектродного пространства несущественным. Однако при высоком напряжении межэлектродное пространство играет более важную роль во влиянии на эволюцию и растекание струи. Очевидно, что для большего зазора (например, $H = 3$ см) неоднородное распределение скорости гораздо более выражено вдоль лезвия (см. срез с $x = 0$ мм на рис. 9в). Несогласованность распределения скорости вдоль лезвия может быть существенно связана с нерегулярностью емкости инжекции заряда, когда струя имеет достаточно пространства для развития вниз по потоку. Тем не менее при меньшем зазоре (например, $H = 1$ см) потенциально несогласованное развитие струи вдоль лезвия экранируется этим коротким расстоянием и дает квазиоднородное распределение скорости.

Наиболее поразительное наблюдение состоит в том, что вероятность появления инжекции заряда вдоль кромки лезвия существенно зависит от эквивалентного электрического поля \bar{E}_{eq} . Отметим, что порядок усиления \bar{E}_{eq} можно перечислить следующим образом (см. рис. 8, 10, 9 и 11). При меньших значениях \bar{E}_{eq} , положение инжектируемой зоны главным образом определяется распределением шероховатости электрода. По мере того, как \bar{E}_{eq} возрастает, во все больших и больших областях на лезвии достигается порог инжекции и, таким образом, ожидается, что число зон с эффективной инжекцией также последовательно возрастает. В настоящем исследовании три области могут быть видны в срезе при $y = -0.5$ мм на рис. 8б, четыре области на рис. 10б, пять областей на рис. 9б и непрерывная зона, образованная объединением многих областей может быть видна на рис. 11б. Наличие пяти областей инжекции на двух сантиметрах длины на рис. 9б поддерживает наблюдение, зафиксированное на рис. 7, что 4–5 областей обнаружены в середине лезвия. Эти трехмерные структуры приводят к выводу, что в произвольно заданном сечении (плоскость Z) в середине ножевого электрода некоторая двумерная ЭГД-струя расширяется вниз по потоку в направлениях x и y . Как оказывается, выбор положения слева или справа от центра лезвия подходит для анализа ЭГД-течений в рассматриваемой геометрии, поскольку это целевое положение делает возможным выбор двумерной ЭГД-струи с некоторой заданной скоростью.

ВЫВОДЫ

Общая цель настоящего исследования состоит в изучении двумерности ЭГД-струи, произведенной геометрией плоского ножевого электрода, с точки зрения ее трехмерной структуры. Это первое широкое исследование распределения скоростей ЭГД-струи вдоль всего ножевого электрода. Для обеспечения трехмерной визуализации вдоль ножевого электрода был развит продвинутый подход, основанный на общепринятой двумерной PIV-системе с измерениями многослойной пелены лазерного излучения.

Для подтверждения возможностей реализуемого метода приведены относительные ошибки, как в поле трехмерного распределения скоростей, так и в плоском поле скоростей. Подобным образом выполнен статистический анализ скорости в произвольной точке, чтобы проверить и обосновать необходимое число PIV измерений. Затем 20 последовательных полей профиля струи были записаны с использованием единственной CCD-камеры в плоскости Z при разных условиях приложенного напряжения и межэлектродного зазора. Структура струи была выстроена заново в диапазоне 2 см в середине лезвия. Двумерность течения была впервые продемонстрирована картой чисто гидродинамического течения в плоскости Z и сравнением дивергенции трех компонент скорости с последующим анализом влияния таких параметров, как напряжение, межэлектродный зазор и шероховатость электродов.

Трехмерная визуализация, вместе со срезами в плоскостях X и Y , более практична для идентификации структуры ЭГД-струи и исследования влияния параметров на струю. Скорее эквивалентное электрическое поле \bar{E}_{eq} , чем среднее значение электрического поля \bar{E}_m , должно быть выбрано в качестве критерия для определения максимума скорости, интенсивности инжекции и поведения течения в различных случаях. Драматический рост эффекта падения струи и уменьшение ее полуширины наблюдаются в случае более сильного \bar{E}_{eq} . Что касается влияния параметров, можно утверждать, что приложенное напряжение играет важную роль в подавлении струй

в средней части лезвия, а также в генерации дополнительных струй при определенных положениях стороны лезвия. Межэлектродный зазор имеет значительный эффект в скорости распространения вдоль лезвия в направлении потока, когда приложено высокое напряжение. Эквивалентное электрическое поле \bar{E}_{eq} и шероховатость электродов вносят вклад в распределение и плотность ЭГД-струй вдоль лезвия. При усилении \bar{E}_{eq} число зон с эффективной инжекцией может быть непосредственно определено с помощью срезов в направлении y .

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Национального Научного Фонда Естественных Наук Китая (Грант № 51907118).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vázquez P.A., Talmor M., Seyed-Yagoobi J., Traoré P., Yazdani M.* In-depth description of electrohydrodynamic conduction pumping of dielectric liquids: Physical model and regime analysis // *Phys. Fluids*. 2019. V. 31. № 11. P. 113601–113615.
2. *Vasilkov S.A., Chirkov V.A., Stishkov Yu.K.* Electrohydrodynamic flow caused by field-enhanced dissociation solely // *Phys. Fluids*. 2017. V. 29. № 6. P. 063601–063607.
3. *Ситников А.А., Стишков Ю.К.* Трехионная модель ЭГД-течений в системе электродов “провод над плоскостью” // *Изв. РАН. МЖГ*. 2017. № 2. С. 3–10.
4. *Григорьев А.И., Михеев Г.Е., Ширяева С.О.* Электростатическая неустойчивость поверхности объемно заряженной струи диэлектрической жидкости, движущейся относительно материальной среды // *Изв. РАН. МЖГ*. 2017. № 5. С. 3–14.
5. *Yang L., Talmor M., Shaw B.C., Minchev K.S., Jiang C., Seyed-Yagoobi J.* Flow distribution control in meso scale via electrohydrodynamic conduction pumping // *IEEE Trans. Ind. Appl.* 2017. V. 53. № 2. P. 1431–1438.
6. *Wang Q., Guan Y., Huang J., Wu J.* Chaotic electro-convection flow states of a dielectric liquid between two parallel electrodes // *Eur. J. Mech. B-fluid*. 2021. V. 89. P. 332–348.
7. *John G., Liu P.L.F., Pedersen G.K.* PIV and Water Waves. Singapore: World Scientific, 2000.
8. *Daaboul M., Louste C., Romat H.* PIV measurements on charged plumes–influence of SiO₂ seeding particles on the electrical behavior // *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* 2009. V. 16. № 2. P. 335–342.
9. *Afanasyev S., Lavrenyuk D., Nikolaev P., Stishkov Yu.* A semiautomatic method for computer processing of the velocity profile in EHD flows // *Surf. Engin. Appl. Electrochem.* 2007. V. 43. P. 18–23.
10. *Yan Z., Louste C., Traoré P., Romat H.* Velocity and turbulence intensity of an EHD impinging dielectric liquid jet in blade–plane geometry // *IEEE Trans. Ind. Appl.* 2013. V. 49. № 5. P. 2314–2322.
11. *Wu J., Traoré P., Louste C., Pérez A.T., Vázquez P.A.* Heat transfer enhancement by an electrohydrodynamic plume induced by ion injection from a hyperbolic blade, in: *IEEE 18th International Conference on Dielectric Liquids*. June 30–July 3. 2014. Bled. P. 1–4.
12. *Жакин А.И., Кузько А.Е.* Электрогидродинамические течения и теплообмен в системе электродов лезвие–плоскость // *Изв. РАН. МЖГ*. 2013. № 3. С. 31–42.
13. *Vázquez P.A., Pérez A.T., Castellanos A.* Thermal and electrohydrodynamic plumes. A comparative study // *Phys. Fluids*. 1996. V. 8. № 8. P. 2091–2096.
14. *Deo R., Mi J., Nathan G.* The influence of nozzle aspect ratio on plane jets // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2007. V. 31. P. 825–838.
15. *Sha Y., Zhou Y., Nie D., Wu Z., Deng J.* A study on electric conduction of transformer oil // *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* 2014. V. 21. № 3. P. 1061–1069.
16. *Абрамович Г.Н.* Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960.
17. *Yan Z., Louste C., Traoré P., Romat H.* Experimental estimation of the electric force induced by a blade-plane actuator in dielectric liquids // *J. Electrostat.* 2013. V. 71. P. 478–483.
18. *Drosg M.* Dealing with Uncertainties: A Guide to Error Analysis. Wien: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
19. *Castellanos A.* Electrohydrodynamics. New York: Springer-Verlag, 1998.
20. *Bockris J.O.M., Reddy K.N., Gamboa-Aldeco M.* Modern Electrochemistry 2A Fundamentals of Electrode/Second Ed. New York: Springer, 2000.
21. *Pletcher D.* Electrochemistry, Vol. 8: A Review of Chemical Literature. London: Burlington House, 1983.
22. *Bockris J., Conway B., Yeager E.* Comprehensive Treatise of Electrochemistry: The Double Layer. New York: Springer, 1980.

УДК 532.12:534.14

СЖИМАЕМЫЕ ТЕЧЕНИЯ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ГРАНИЦАМИ

© 2023 г. О. А. Логвинов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: oleglogvinov@mail.ru

Поступила в редакцию 24.10.2022 г.

После доработки 16.12.2022 г.

Принята к публикации 16.12.2022 г.

Рассматривается течение вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости в плоском канале с жесткими осциллирующими стенками. Показано, что даже исчезающе малая сжимаемость может быть причиной зарождения резонанса – резкого увеличения амплитуды колебания параметров течения при правильно подобранной частоте колебания стенок. Приведено точное аналитическое выражение для ведущей резонансной частоты. Численные расчеты продемонстрировали возможность кумулятивного эффекта – резкого возрастания массового расхода течения даже при постоянном градиенте давлений.

Ключевые слова: сжимаемость, вязкость, теплопроводность, кумулятивный резонанс

DOI: 10.31857/S1024708422600828, EDN: TMPLGN

Во многих технологических природных и физиологических процессах распространены течения в каналах с подвижными границами. Различные течения с осциллирующими твердыми частями возникают в авиационной промышленности. Отдельное, давно и успешно развивающееся в нашей стране направление связано с вибрационным воздействием на деформируемый пласт, насыщенный фильтрующейся жидкостью. В работах [1, 2] получено решение для стационарных колебаний двухфазной системы “пласт–жидкость” и показана возможность резкого увеличения амплитуды колебаний (резонанса) на определенных частотах для конкретных граничных условий. Установлено, что для всех параметров резонанс соответствует колебаниям пористого скелета и жидкости в одной фазе. Показано, что резонансные частоты дают возможность создавать значительные амплитуды на большом расстоянии от источника колебаний.

Количество работ, так или иначе относящихся к задачам с полностью или частично подвижными границами, огромно. В настоящем кратком обзоре остановимся лишь на некоторых из них.

В работе [3] рассматривалось течение несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале или цилиндрической трубе с жесткими стенками, движущимися по своей нормали, так что ширина канала или радиус трубы меняются со временем по заданному периодическому закону. В случае малой амплитуды колебаний стенок ε (отнесенной к ширине или радиусу канала) решение получалось при произвольных вибрационных числах Рейнольдса α (произведение числа Рейнольдса на число Струхала) разложением в ряды по ε . Интересно, что при малых α средние скорости индивидуальных частиц направлены к стенкам, тогда как при больших α дрейф происходит, в основном, от стенок. Исключение составляют частицы, образующие тонкий пограничный слой.

Также в [3] изучалось движение боковых стенок канала, возникающее в результате их упругого отклика на периодические давления, приложенные как на концах канала, так и на самих стенках. Оказалось, что система жидкость – стенки обладает собственной частотой. А в случае, если эта частота оказывается кратной частоте осцилляций внешнего давления, возможно возникновение резонанса. Предложенная постановка имеет приложение к течению крови в коронарных артериях больших млекопитающих.

В работе [4] рассматривалась линейная устойчивость решения, полученного в [3], для случая плоского канала. Было показано, что увеличение вибрационного числа Рейнольдса для достаточно больших амплитуд колебаний стенок ведет к детерминированному хаосу по сценарию Фейгенбаума через каскад удвоения периода.

В [5] рассматривалась задача, аналогичная [3], но при наличии еще и силы тяжести (направление течения образовывало острый угол с направлением силы тяжести). Показано, что большим вибрационным числом Рейнольдса соответствует падение расхода, а не его увеличение как при малых числах Рейнольдса. Причина заключалась в том, что осредненное по времени поле скорости складывается из двух компонент. Первая определяется только колебаниями стенок и не дает вклада в средний расход. Вторая компонента связана с совместным действием трех факторов: колебаний, гравитации и перепада давлений. Распределение второй компоненты в зависимости от продольной координаты имеет точку экстремума по середине канала: для малых вибрационных чисел Рейнольдса этот экстремум оказывается максимумом, для больших — минимумом.

В работе [6] численно моделировались колебания газа, возникающие в плоском канале при симметричном относительно продольной оси возбуждении упругих стенок канала. Установлен характер резонансных колебаний газа в окрестности области возбуждения при различных скоростях потока.

В работе [7] изучался массоперенос в плоском канале с вибрирующими упругими стенками. Решение строилось разложением по малому параметру ϵ . Рассматривались не только колебания в виде бегущих волн, но и более общие виды движений стенок. Выяснилось, что при больших вибрационных числах Рейнольдса стоячие волны дают максимальный расход, на порядок превосходящий расход в случае бегущих по упругим границам волн. Таким образом, было опровергнуто устоявшееся мнение, что бегущие волны — оптимальный механизм прокачки жидкости в канале с колеблющимися деформируемыми стенками.

В [8] экспериментально моделировались течения воздуха в осциллирующей цилиндрической трубе. Частоты осцилляций давления в “покоящейся” трубе совпадают с ее собственными частотами. При вынужденных же осцилляциях стенок соответствующие частоты осцилляций давления являются высшими гармониками для частот стенок. Среднее давление при этом падает, а максимальное падение происходит в центре трубы. Расход также испытывает осцилляции, но на гораздо меньших частотах и с незначительными амплитудами.

Завершая обзор, отметим, что, если скорость невозмущенного течения мала по сравнению со скоростью звука в жидкости (числа Маха заметно меньше единицы), сжимаемостью жидкости почти всегда пренебрегают. Однако в работе [9] на основе линейной теории было показано, что в течениях с полностью или частично осциллирующими границами даже исчезающе малая сжимаемость может сыграть ключевую роль при зарождении резонанса. Численные расчеты, в свою очередь, продемонстрировали возможность кумулятивного эффекта — резкого возрастания массового расхода течения даже при постоянном градиенте давлений.

Настоящая работа развивает идеи, лежащие в основе [9]. Главным отличием является рассмотрение полной постановки задачи с учетом уравнения энергии и термодинамического уравнения состояния для совершенного газа, тогда как в [9] жидкость считалась слабо сжимаемой. Мотивация заключается в том, чтобы проследить изменения температуры в резонансных режимах. При численном моделировании также учитываются изменения вязкости и теплопроводности вместе с изменениями температуры. Однако эти изменения оказываются несущественными.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение *вязкой сжимаемой теплопроводной* жидкости (газа) в длинном плоском канале с жесткими стенками. Некоторые части стенок образуют вибрирующие секции, способные осциллировать с постоянной частотой ω в направлении, перпендикулярном основному потоку, рис. 1а. Амплитуда осцилляций ϵ мала по сравнению с шириной канала l . Отдельная секция с соответствующими граничными условиями показана на рис. 1б.

Течение описывается двумерными уравнениями Навье–Стокса в декартовых координатах (x, y) , уравнением неразрывности и уравнением баланса энергии с коэффициентами μ динамической вязкости и θ теплопроводности, зависящими от температуры T . Система замыкается уравнениями состояния (термодинамическим и энергетическим) совершенного газа с постоянными теплоемкостями c_p и c_v

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

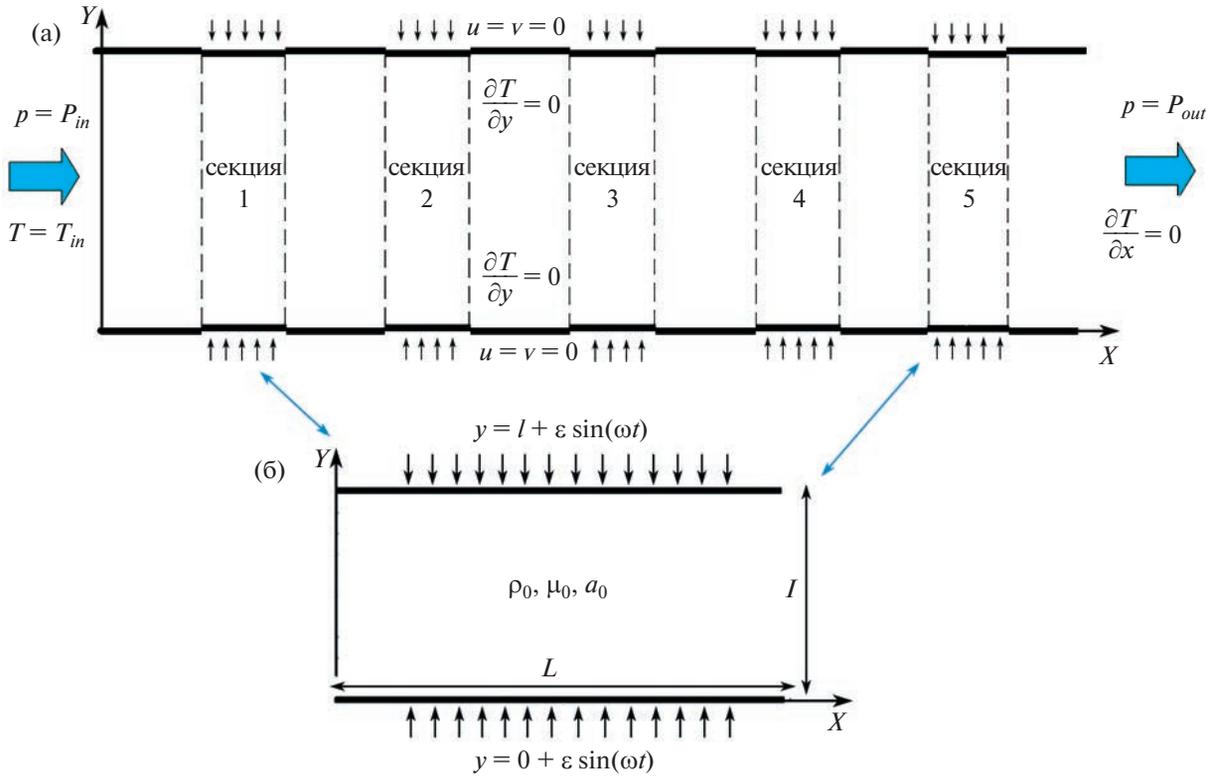


Рис. 1. (а) Геометрия плоского канала с пятью осциллирующими секциями стенок; (б) Отдельная осциллирующая секция.

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \quad (1.3)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\theta \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Theta \quad (1.4)$$

$$p = \rho RT, \quad e = c_v T \quad (1.5)$$

$$\mu = \mu_{\text{contr}} \frac{T_{\text{contr}} + T_{\mu}}{T + T_{\mu}} \left(\frac{T}{T_{\text{contr}}} \right)^{3/2}, \quad \theta = \theta_{\text{contr}} \frac{T_{\text{contr}} + T_{\theta}}{T + T_{\theta}} \left(\frac{T}{T_{\text{contr}}} \right)^{3/2} \quad (1.6)$$

В системе (1.1)–(1.6) приняты следующие обозначения: u, v – компоненты вектора скорости; p – давление, ρ – плотность, T – абсолютная температура; e – удельная внутренняя энергия, $R = c_p - c_v$ – газовая постоянная, а Θ – диссипативная функция

$$\Theta = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

Уравнения (1.2) и (1.3) выписаны в рамках гипотезы Стокса – объемная вязкость считается равной нулю: $\xi^{\text{vol}} = \lambda + 2\mu/3 \equiv 0$, где λ – второй коэффициент вязкости.

Формулы (1.6) – зависимости Сазерленда коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры для совершенного газа, в которых μ_{contr} и θ_{contr} – контрольные вязкость и теплопроводность при контрольной температуре T_{contr} , а T_{μ} и T_{θ} – постоянные Сазерленда, характеризующие конкретный газ.

Систему (1.1)–(1.6) необходимо дополнить начальными и граничными условиями. На входе в канал задаются постоянные входное давление и температура: $p = P_{in}$, $T = T_{in}$. На выходе из канала – постоянное выходное давление и “мягкое” условие по температуре: $p = P_{out}$, $\partial T/\partial x = 0$. На вибрирующих секциях стенок канала задаются гармонические осцилляции вертикальной скорости и условие теплоизоляции

$$\{x \in X_{vibe}, y = 0 + \varepsilon \sin(\omega t)\} : u = 0, \quad v = V_d(t) = \varepsilon \omega \cos(\omega t), \quad \partial T/\partial y = 0 \quad (1.7a)$$

$$\{x \in X_{vibe}, y = l + \varepsilon \sin(\omega t)\} : u = 0, \quad v = V_u(t) = \varepsilon \omega \cos(\omega t), \quad \partial T/\partial y = 0 \quad (1.7b)$$

На покоящихся частях стенок ставятся обычные условия прилипания и теплоизоляции. В условиях (1.7) X_{vibe} означает множество тех $x \in [0; \Lambda]$, которые соответствуют вибрирующим секциям. Здесь и далее, Λ – длина всего канала, L – длина одной секции.

Начальные условия определяют состояние покоя

$$\{t = 0\} : u = 0, \quad v = 0, \quad p = p_0, \quad T = T_0 \quad (1.8)$$

Замкнутая математическая модель (1.1)–(1.8) составляет основу настоящей статьи, состоящей из двух частей. В первой части аналитически рассматриваются линеаризованные решения для одной осциллирующей секции (рис. 1б). Во второй нелинейная система (1.1)–(1.8) решается конечно-разностным методом в полной геометрии канала с пятью осциллирующими секциями (рис. 1а).

2. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим малые возмущения начального состояния покоя в упрощенной геометрии – для единственной вибрирующей секции, рис. 1б. Параметры основного течения будут обозначаться нижним индексом ноль, возмущения – штрихами.

Из уравнений (1.1)–(1.3) можно исключить компоненты скоростей

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{a_0^2}{\gamma} \Delta \rho' + \rho_0 R \Delta T' + \frac{4}{3} v_0 \frac{\partial}{\partial t} \Delta \rho' \quad (2.1)$$

где $a_0^2 = \gamma R T_0$ – невозмущенная скорость звука, $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, v_0 – невозмущенная кинематическая вязкость.

Тогда уравнение (2.1) и линеаризованное уравнение (1.4) образуют замкнутую систему для определения отклонений плотности и температуры. Отклонение давления определяется первым (линеаризованным) уравнением (1.5) в явном виде.

Исключая из уравнений (2.1) и (1.4) температуру, можно прийти к следующему уравнению для плотности (штрихи в дальнейшем изложении опустим)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_0^2 \Delta \right] \rho' - \Delta \left[(b_0^2 + \gamma c_0^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_0^2 c_0^2 \Delta - \gamma b_0^2 c_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta \right] \rho' = 0 \quad (2.2)$$

где $b_0^2 = 4v_0/3$, а $c_0^2 = \theta_0/\rho_0 c_p$ – температуропроводность жидкости.

Отметим, что при отсутствии диссипативных эффектов (вязкости и теплопроводности) уравнение (2.2) сводится к обычному волновому уравнению. Поскольку общее решение уравнения (2.2) достаточно громоздко, более наглядным представляется разделить исследование влияния диссипативных эффектов: сначала рассмотреть вязкую, но нетеплопроводную жидкость ($c_0^2 = 0$), а затем невязкую, но теплопроводную. Оба результата сравнить затем со случаем идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости. Можно показать, что температура в обоих случаях удовлетворяет уравнению, полностью аналогичному уравнению (2.2) для плотности.

Граничные условия для уравнения (2.2) примем в следующем виде

$$x = 0 : \quad \rho = \rho_{in}, \quad x = L : \quad \rho = \rho_0 \quad (2.3a)$$

$$y = 0 : \quad \rho = \rho_0 [1 + (S/\rho_0) \sin(\omega t)], \quad y = l : \quad \rho = \rho_0 [1 + (S/\rho_0) \sin(\omega t)] \quad (2.3b)$$

где S – некоторая константа.

Отметим, что граничные условия на стенках канала линеаризованы и “снесены” на их невозмущенное положение.

Начальные условия имеют вид

$$t = 0 : \quad \rho = \rho_0, \quad \partial\rho/\partial t = 0 \quad (2.4)$$

Для решения уравнения (2.2) применим методом Фурье разделения переменных. Изложим только общую схему без вычислительных подробностей.

1. Введением переменной $\rho = \rho_0 + S \sin(\omega t) + \tilde{\rho}$ обнуляются граничные условия (2.3б) в направлении y . Переменные разделяются. Решение раскладывается по собственным функциям

$$\sin(\pi n y / l) : \tilde{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, t) \cdot \sin \frac{\pi n y}{l}$$

2. Введением новой переменной $F_n = \tilde{F}_n - (\rho_{in} - \rho_0) c_n (x - L) / L - S c_n \sin(\omega t)$ обнуляются граничные условия (2.3а) в направлении x . Переменные разделяются. Решение раскладывается по

$$\text{собственным функциям } \sin(\pi k x / L) : \tilde{F}_n = \sum_{k=0}^{\infty} T_{nk}(t) \cdot \sin \frac{\pi k x}{L}.$$

3. Задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для неизвестных функций времени $T_{nk}(t)$ с заданными начальными условиями.

Приведем только окончательные уравнения. При отсутствии теплопроводности функции $T_{nk}(t)$ должны удовлетворять следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 T_{nk}}{dt^2} + 2\alpha_{nk} \frac{dT_{nk}}{dt} + \omega_{0nk}^2 T_{nk} = A'_{nk} \sin(\omega t) + B'_{nk} \cos(\omega t) + C'_{nk} \quad (2.5a)$$

$$2\alpha_{nk} = b_0^2 \Omega_{nk}, \quad \omega_{0nk}^2 = a_0^2 \Omega_{nk}, \quad \Omega_{nk} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2$$

$$A'_{nk} = S \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 c_n d_k \frac{a_0^2}{\gamma}, \quad B'_{nk} = S \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 c_n d_k b_0^2 \omega, \quad C'_{nk} = \frac{a_0^2}{\gamma} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 c_n e_k (\rho_{in} - \rho_0)$$

При отсутствии вязкости уравнение для функций $T_{nk}(t)$ принимает вид

$$\frac{d^3 T_{nk}}{dt^3} + \gamma \beta_{nk} \frac{d^2 T_{nk}}{dt^2} + \omega_{0nk}^2 \frac{dT_{nk}}{dt} + \beta_{nk} \omega_{0nk}^2 T_{nk} = A''_{nk} \sin(\omega t) + B''_{nk} \cos(\omega t) + C''_{nk} \quad (2.5b)$$

$$\beta_{nk} = c_0^2 \Omega_{nk}, \quad \omega_{0nk}^2 = a_0^2 \Omega_{nk}, \quad A''_{nk} = S \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 c_n d_k c_0^2 \left(a_0^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - \gamma \omega^2 \right)$$

$$B''_{nk} = S \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 c_n d_k a_0^2 \omega, \quad C''_{nk} = a_0^2 c_0^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 c_n e_k (\rho_{in} - \rho_0)$$

Коэффициенты Фурье c_n , d_k и e_k в уравнениях (2.5) определяются соотношениями

$$c_n = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n), \quad d_k = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k), \quad e_k = \frac{2}{\pi k} \quad (2.6)$$

Начальные условия для уравнений (2.5) имеют вид:

$$t = 0 : \quad T_{nk} = (\rho_{in} - \rho_0) c_n e_k, \quad \frac{dT_{nk}}{dt} = 0 \quad (2.7)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.5а), отвечающего случаю отсутствия теплопроводности, является суммой общего (2.8а) и частного (2.9а) решений

$$T_{nk,vis}^{gen}(t) = e^{-\alpha_{nk} t} \left[D'_{1nk} \sin(\sqrt{\omega_{0nk}^2 - \alpha_{nk}^2} \cdot t) + D'_{2nk} \cos(\sqrt{\omega_{0nk}^2 - \alpha_{nk}^2} \cdot t) \right] \quad (2.8a)$$

$$T_{nk,vis}^{part}(t) = \Psi'_{nk} \sin(\omega t + \theta'_{nk}) + \frac{C'_{nk}}{\omega_{0nk}^2} \quad (2.9a)$$

$$\Psi'_{nk} = \frac{\sqrt{A'^2_{nk} + B'^2_{nk}}}{\sqrt{(\omega^2_{0nk} - \omega^2)^2 + 4\alpha'^2_{nk}\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\theta'_{nk} = \frac{B'_{nk}(\omega^2_{0nk} - \omega^2) - 2\alpha'_{nk}\omega A'_{nk}}{A'_{nk}(\omega^2_{0nk} - \omega^2) + 2\alpha'_{nk}\omega B'_{nk}}$$

Аналогично, решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.5б), отвечающего случаю отсутствия вязкости, является суммой общего (2.8б) и частного (2.9б) решений, однако найти собственные значения аналитически в этом случае не получается, так как они удовлетворяют алгебраическому уравнению третьей степени. При этом легко можно показать, что действительные части всех трех собственных чисел отрицательны. Таким образом, неограниченного растущих во времени решений у уравнения (2.5б) нет

$$T^{\text{gen}}_{nk,\text{cond}}(t) = D''_{1nk}e^{\lambda_1 t} + D''_{2nk}e^{\lambda_2 t} + D''_{3nk}e^{\lambda_3 t}, \quad \lambda_i = (\lambda_x)_i + i(\lambda_y)_i, \quad (\lambda_x)_i < 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.8б)$$

$$T^{\text{part}}_{nk,\text{cond}}(t) = \Psi''_{nk} \sin(\omega t + \theta''_{nk}) + \frac{C''_{nk}}{\beta_{nk}\omega^2_{0nk}} \quad (2.9б)$$

$$\Psi''_{nk} = \frac{\sqrt{A''^2_{nk} + B''^2_{nk}}}{\sqrt{\beta_{nk}^2(\omega^2_{0nk} - \gamma\omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2_{0nk} - \omega^2)^2}}, \quad \operatorname{tg}\theta''_{nk} = \frac{B_{nk}\beta_{nk}(\omega^2_{0nk} - \gamma\omega^2) - A_{nk}\omega(\omega^2_{0nk} - \omega^2)}{A_{nk}\beta_{nk}(\omega^2_{0nk} - \gamma\omega^2) + B_{nk}\omega(\omega^2_{0nk} - \omega^2)}$$

Неизвестные константы D'_{ink} , $i = 1, 2$ в общем решении (2.8а) и D''_{ink} , $i = 1, 2, 3$ в решении (2.8б) в принципе могут быть найдены из начальных условий (2.7). После этого выражения (2.8) и (2.9) дадут окончательное решение исходной начально-краевой задачи (2.2)–(2.4). Интереснее другое, определение условий резонанса – условий, при которых амплитуды частных $\Psi'_{nk} = \Psi^{\text{vis}}_{nk}$ и $\Psi''_{nk} = \Psi^{\text{cond}}_{nk}$ решений (2.9) достигают максимума.

В случае вязкой, но нетеплопроводной жидкости частоту резонанса удастся получить аналитически. Дифференцированием функции $\Psi^{\text{vis}}_{nk}(\omega^2)$ можно показать, что наибольшая амплитуда частного решения (2.9а) достигается при

$$\omega^{\text{vis}}_{res} = \frac{3a_0^2}{4v_0} \sqrt{1 + \frac{32v_0^2}{9a_0^2} \left(\left(\frac{\pi l}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi k}{L} \right)^2 \right)} - 1 \quad (2.10)$$

В случае невязкой, но теплопроводной жидкости дифференцированием функции $\Psi^{\text{cond}}_{nk}(\omega^2)$ можно показать, что квадрат частоты резонанса $(\omega^{\text{cond}}_{res})^2$ удовлетворяет алгебраическому уравнению четвертой степени (вследствие громоздкости, уравнение не приводится). Поиск корней этого уравнения осуществлялся численно.

В случае отсутствия вязкости и теплопроводности (идеальная жидкость) выражение для частоты резонанса заметно упрощается

$$\omega^{\text{ideal}}_{res} = \omega^0_{nk} = a_0 \sqrt{\left(\frac{\pi l}{l} \right)^2 + \left(\frac{\pi k}{L} \right)^2} \quad (2.11)$$

Однако поведение частного решения при этом существенно меняется – оно начинает неограниченно расти со временем:

$$T^{\text{part}}_{nk,\text{ideal}}(t) = -\frac{A'_{nk}}{2\omega_{0nk}} t \cdot \cos(\omega_{0nk} t) + \frac{C'_{nk}}{\omega^2_{0nk}}$$

Анализ полученных решений проведем для воздуха. Длину секции возьмем равной длине канала. Наиболее важным представляется вывод, что величины “вязкой” (2.10) и “теплопроводной” частот резонанса отличаются от соответствующей частоты (2.11) для идеальной жидкости менее, чем на сотую долю процента. Однако, несмотря на практическое совпадение всех трех частот, в поведении соответствующих решений есть существенное отличие: наибольшая амплитуда в случае идеальной жидкости стремится к бесконечности. Наличие же диссипативных эффектов (вязкости или теплопроводности) приводит к тому, что наибольшая амплитуда сразу становится конечной. Анализ показывает, что наиболее опасной (ведущей) частотой является частота $(\omega^{\text{lead}}_{res})_{11}$, соответствующая первой гармонике $n = k = 1$. Для более высоких гармоник усиление

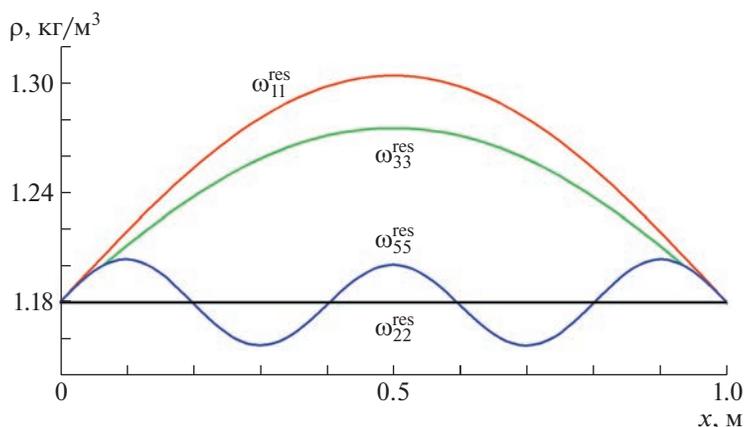


Рис. 2. Зависимость плотности от координаты x в вязком нетеплопроводном случае при $y = 0.05$ м в момент $t = 0.2$ с для различных частот из резонансного спектра.

амплитуды падает экспоненциально. Таким образом, резонанс возможен только на нескольких первых частотах.

Зависимость общего решения (плотности) от продольной координаты x при $y = 0.05$ м в момент $t = 0.2$ с в вязком нетеплопроводном случае при различных частотах из резонансного спектра показано на рис. 2. Видно, что наибольшей амплитуды плотность достигает на ведущей частоте ω_{11}^{res} . С другой стороны, решение для четной частоты ω_{22}^{res} испытывает минимальные осцилляции, незаметные в выбранном масштабе.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Перейдем к численному решению исходной нелинейной системы уравнений (1.1)–(1.8) движения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в полной геометрии канала с *пятью* осциллирующими секциями (рис. 1а). Основным методом интегрирования будет метод *разделения по физическим процессам* [10]. Интегрирование по времени разбивается на два этапа: на первом (невязком) этапе уравнения (1.1)–(1.6) решаются при отсутствии вязкости и теплопроводности, на втором – учитывается действие этих диссипативных слагаемых на параметры, рассчитанные на первом этапе.

При отсутствии вязкости и теплопроводности система (1.1)–(1.6) сводится к уравнениям газовой динамики. Для их решения применялся другой вид метода расщепления – разделение по направлениям – первый этап интегрирования также разбивался на два промежуточных подшага. На первом подшаге в уравнениях газовой динамики остаются слагаемые, содержащие производные только по координате x , а на втором – только по координате y . Получившиеся уравнения решались по явным схемам первого порядка точности, основанным на представлении уравнений в характеристической форме и исключающим возможные численные осцилляции.

На втором этапе рассматривается действие вязкости и теплопроводности на параметры, рассчитанные на первом этапе. Разностные аналоги получившихся уравнений записываются с помощью обычных неявных схем второго порядка точности, к которым применяется метод прогонки для трехдиагональных матриц вдоль оси y . Отличия для различных уравнений заключаются только в граничных условиях на стенках.

Расчетная область (прямоугольный канал) $\Omega = [0; \Lambda] \times [0; l]$ разбивается на прямоугольные ячейки: четыреста ячеек в направлении x ($N_x = 400$) и двести в направлении y ($N_y = 200$). Изначально канал заполнен покоящейся жидкостью, давление и температура постоянны. В начальный момент $t = 0$ давление на входе поднимается, одновременно начинаются осцилляции стенок.

Важно отметить, что стенки во всех расчетах покоятся, а их влияние на течение идет через граничные условия (1.7а) и (1.7б). В качестве обоснования подобного подхода можно сказать, что реальное движение стенок (осцилляции) покрывает меньшее расстояние, чем ширина одной ячейки.

В качестве тестовых задач рассматривались стационарное течение Куэтта вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости и нестационарное течения Пуазейля несжимаемой и нетеплопроводной жидкости. В обычных предположениях обе задачи допускают аналитические решения. Для всех задач получено хорошее соответствие численных и аналитических результатов — ошибка составляла менее одного процента. Также проводилось исследование на сходимость по сетке. Обе тестовые задачи рассчитывались на грубой ($N_x = 300, N_y = 175$) и сгущенной сетках ($N_x = 500, N_y = 225$). Распределения основных параметров (скорости, температуры) отличались менее чем на один процент. Условие резонанса (2.11) оказывалось нечувствительно к конкретному виду сетки.

Перейдем к результатам расчетов течения в канале с осциллирующими секциями. Все пять секций имеют одинаковую длину $L = 0.1$ м, длина канала $\Lambda = 1$ м, ширина $l = 0.1$ м. В качестве рабочей жидкости (газа) используем газ в пять раз более вязкий, чем воздух. Установление течения в рассматриваемых условиях происходит примерно за 60 с. Важность выхода на стационарный режим заключается в следующем: мы должны четко показать, что кумулятивный резонансный эффект (рост) расхода в установившемся режиме при наличии осциллирующих секций существенно превосходит установившийся расход в канале с покоящимися стенками.

Ключевыми безразмерными параметрами расчетов будут вибрационное число Рейнольдса и число Маха. Числа Маха будут крайне малы $M \sim 0.1$, однако вибрационные числа Рейнольдса, соответствующие резонансным режимам, оказываются достаточно большими $\alpha \sim 1.5 \times 10^5$. Основным размерным параметром, описывающим течение, будет массовый расход рабочего газа Q . В качестве контрольного сечения выбиралось выходное сечение канала. Давление на выходе канала всегда остается атмосферным.

Отметим, что упрощенная аналитическая постановка разд. 2, в которой граничные условия (2.3) первого рода (типа Дирихле) только для плотности однородны, приводит к тому, что наступление резонанса возможно на ведущей частоте $n = 1, k = 1$. Однако полная нелинейная постановка включает неоднородные граничные условия первого и второго рода (типа Неймана) по разным параметрам (давлению, продольной скорости и температуре). В результате наступление резонанса в расчетах становится возможным и на более низких частотах: $n = 1, k = 0$ и $n = 0, k = 1$.

Во всех проведенных расчетах резонанс наступал при частоте, соответствующей $n = 0, k = 1$, потому что она оказывалась самой низкой — $\omega_{01}^{res} = 1089$ Гц. Заметим, что это значение представляется достаточно реалистичным для технических приложений. Усиление амплитуды на этой частоте (назовем ее ведущей) оказывалось наиболее интенсивным. Кроме того, кумулятивный резонанс (по истечении некоторого времени) наблюдался только на ведущей частоте ω_{01}^{res} .

При наличии осциллирующих секций все параметры течения начинают периодически меняться вместе с осцилляциями. Однако, чем больше разница между частотой осцилляций стенок и частотой резонанса, тем меньше амплитуда этих колебаний параметров. На рис. 3 и рис. 4 показано поведение давления и температуры в обычном и резонансном режимах в момент $t = 40$ с. Верхние и нижние секции осциллируют на одной частоте в синфазном режиме. Максимальная амплитуда осцилляций поперечной скорости составила $V_0 = 0.05$ м/с или примерно $10^{-2} \cdot U_0$.

На рис. 3а и рис. 4а осцилляции стенок происходят на частоте из резонансного спектра ω_{11}^{res} , не приводящей к кумулятивному эффекту. Хорошо заметен периодический характер решения. На рис. 3б и рис. 4б стенки осциллируют на ведущей частоте ω_{01}^{res} . Виден резкий рост давления по центру канала, соответствующий результатам линейной теории (рис. 2). Жидкость разогревается к середине канала, однако изменения температуры составляют не более градуса.

Главный результат, демонстрирующий многократное возрастание массового расхода, показан на рис. 5. Только на ведущей резонансной частоте ω_{01}^{res} после некоторых “установившихся” периодических изменений давления, плотности и температуры возникает кумулятивный резонанс — резкое увеличение суммарного массового расхода (черная кривая). Видно, что кумуля-

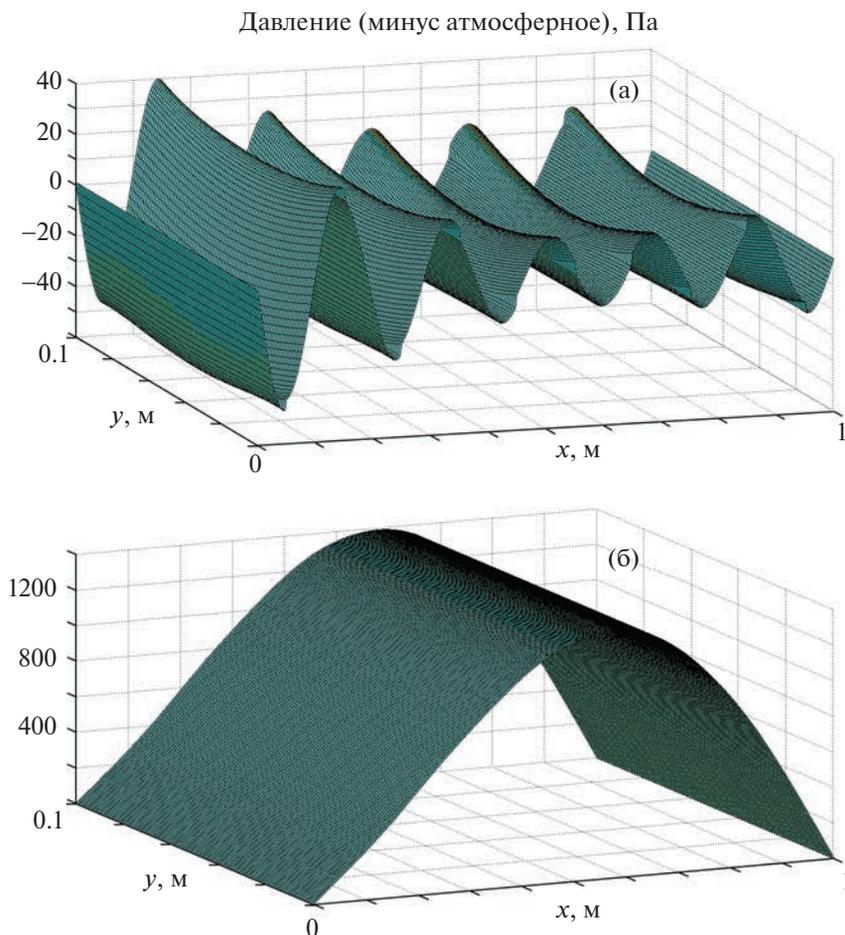


Рис. 3. Распределение давления в канале с пятью осциллирующими секциями при $t = 40$ с: (а) осцилляции стенок не приводят к кумулятивному резонансу, частота ω_{11}^{res} ; (б) осцилляции стенок дают кумулятивный резонанс на ведущей частоте ω_{01}^{res} .

тивный резонанс происходит только на ведущей частоте примерно через минуту после начала осцилляций. Расход для канала с покоящимися стенками к этому моменту уже вышел на установившийся режим. В околорезонансном случае $\omega = 1.1\omega_{01}^{res}$ эффект уже значительно меньше или вовсе отсутствует $\omega = 0.9\omega_{01}^{res}$. Для более высоких частот резонансного спектра ω_{10}^{res} и ω_{11}^{res} расчеты показывают, что разница по сравнению с отсутствием осцилляций практически не наблюдается.

На основе результатов по изменению массового расхода весь процесс можно разбить на три стадии: периодические изменения основных параметров в соответствии с колебаниями стенок, кумулятивный нелинейный резонанс — резкое увеличение суммарного массового расхода и последняя стадия — демпфирования осцилляций вязкостью и теплопроводностью, так что массовый постепенно расход выходит на стационарное значение.

Отметим, что изменения температуры даже в резонансном режиме являются ничтожными (полградуса), что не приводит к существенному изменению вязкости и теплопроводности, которые остаются практически постоянными. Таким образом, кумулятивный эффект нарастания расхода является следствием именно резонансного эффекта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом работы является обнаруженный на основе линеаризованных решений и численного моделирования *кумулятивный резонанс* — значительное увеличение массового рас-

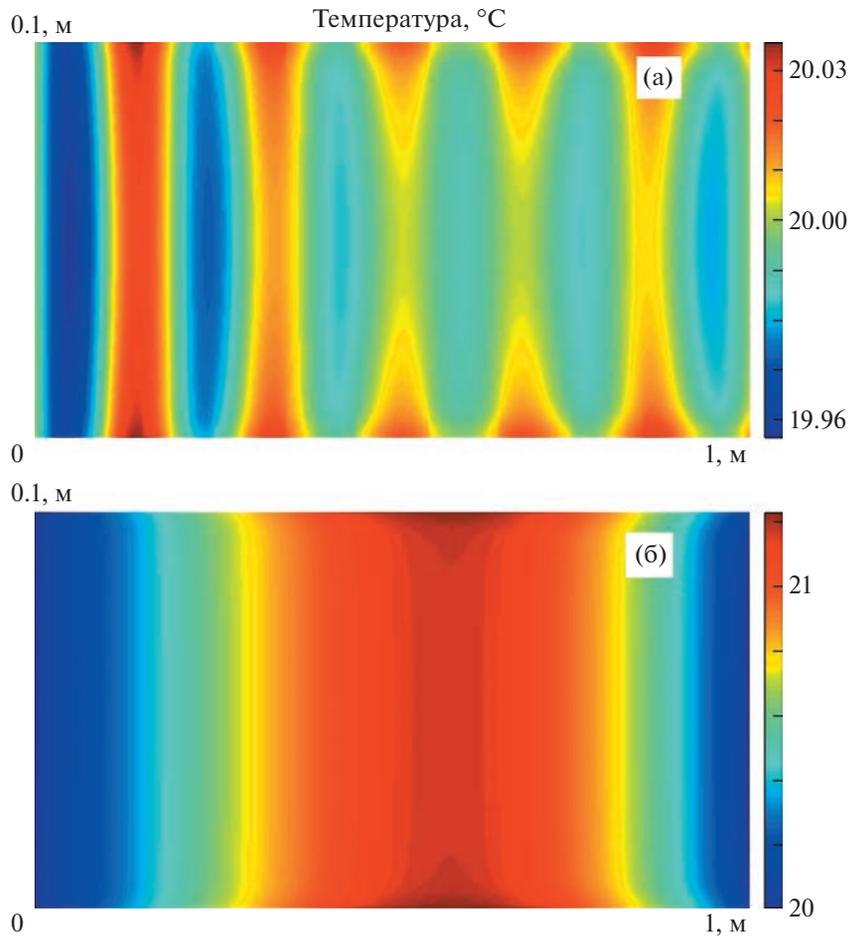


Рис. 4. Распределение температуры в канале с пятью осциллирующими секциями при $t = 40$ с: (а) осцилляции стенок не приводят к кумулятивному резонансу, частота ω_{01}^{res} ; (б) осцилляции стенок дают кумулятивный резонанс на ведущей частоте ω_{01}^{res} .

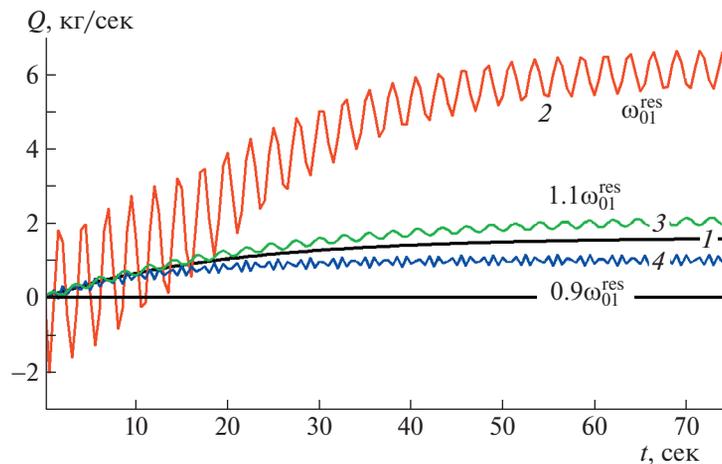


Рис. 5. Зависимость среднего массового расхода на выходе канала от времени: 1 – покоящиеся стенки; 2 – осцилляции секций на ведущей резонансной частоте; 3, 4 – осцилляции на “околорезонансных” частотах.

хода жидкости при заданном постоянном перепаде давления. Получено точное аналитическое выражение для частоты резонанса в канале с осциллирующими стенками в случае идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости. Учет вязкости и теплопроводности приводит к ее не-

значительному (менее чем на сотые доли процента) изменению. Однако амплитуда решения сразу становится конечной.

Показано, что резонансная частота определяется *геометрией канала* (а именно, его шириной и длиной), а также *скоростью звука* (зависящей только от температуры). Скорость звука определяется степенью сжимаемости жидкости. Резонанс приводит к периодическим изменениям параметров течения с максимально возможной амплитудой. Численные расчеты показали, что всего пяти осциллирующих секций достаточно для возникновения кумулятивного эффекта.

Основное, но далеко не единственное приложение полученных результатов – течение газа и нефти в трубопроводах или воды в помповых насосах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев О.Р., Ганиев Р.Ф., Звягин А.В., Украинский Л.Е., Устенко И.Г. Повышение нефтеотдачи пластов на основе волноводных эффектов. Немонотонность затухания двумерных волн в волноводе // Спр. инж. журн. 2016. 228. № 3. С. 42–48.
2. Ганиев О.Р., Ганиев Р.Ф., Звягин А.В., Украинский Л.Е., Устенко И.Г. Повышение нефтеотдачи пластов на основе волноводных эффектов. Распределение в волноводе силы, действующей на частицы в гармоническом волновом поле // Спр. инж. журн. 2016. 229. № 4. С. 49–56.
3. Secomb T.W. Flow in a channel with pulsating walls // J. Fluid. Mech. 1978. V. 88. P. 273–288.
4. Hall P., Papageorgiou D.T. The onset of chaos in a class of Navier – Stokes solutions // J. Fluid. Mech. 1999. V. 393. P. 59–87.
5. Mingalev S.V., Filippov L.O., Lyubimova T.P. Flow rate in a channel with small-amplitude pulsating walls // Euro. J. Mech. B/Fl. 2015. V. 51. P. 1–7.
6. Тукмаков А.Л. Течение газа в плоском канале с вибрирующими стенками // Инж.-физ. журн. 2002. Т. 75. № 6. С. 109–115.
7. Smirnov N.N., Shugan I.V., Legros J.C. Streaming flows in a channel with elastic walls // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 10. P. 1–10.
8. Bagchi S., Gupta K., Kushari A., Iyengar N.G.R. Experimental study of pressure fluctuations and flow perturbations in air flow through vibrating pipes // J. Sound. Vibr. 2009. V. 328. P. 441–455.
9. Logvinov O.A., Malashin A.A. Resonance phenomena in a channel with oscillating walls // Euro. J. Mech. B/Fl. 2020. 83. 205–211.
10. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.

УДК 532.516

КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ СДВИГА ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

© 2023 г. К. Наврузов^а, Ш. Б. Шарипова^{а,*}

^аУргенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

*E-mail: shohistasharipova0@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2022 г.

После доработки 08.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Решены задачи о колебательном течении вязкоупругой несжимаемой жидкости в плоском канале при заданном гармоническом колебании расхода жидкости. Определена передаточная функция (амплитудно-фазовой частотной характеристики). С помощью этой функции определено влияние частоты колебаний ускорения и релаксационных свойств жидкости на отношение касательного напряжения сдвига на стенке канала к средней скорости по сечению канала. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квазистационарного подхода. Найденные формулы для определения передаточной функции при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке позволяют определить диссипации механической энергии в нестационарном потоке среды, имеющие важные значения при расчете регулирования гидро-и пневмосистем.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, нестационарный поток, передаточная функция, колебательное течение, амплитуда, фаза

DOI: 10.31857/S1024708422600610, **EDN:** VJZRHK

ВВЕДЕНИЕ

Исследование колебательного течения вязкой и вязкоупругой жидкости в плоском и прямоугольном канале под действием гармонических колебаний расхода жидкости могут проводиться в биологической механике, в частности для работы системы микроципов [1]. Эти системы предназначены для диагностики работы различных органов человека, а также адресной доставки к ним лекарственных препаратов. Кроме этого, с целью обеспечения постоянного расхода жидкости в медико-биологических установках часто используются пневматические микронасосы с периодическим вытеснением жидкости из свободных объемов [2]. В таких системах экономически выгодной может быть установка с пульсирующим расходом. При транспортировке высоковязкой и тяжелой нефти и нефтепродуктов на большие расстояния и циркуляции буровых растворов в скважине, одной из важных задач является разработка эффективного метода снижения гидравлического сопротивления потоков [3–5]. Используемые во всех перечисленных выше отраслях жидкости, как лекарственных препаратов, так и нефтепродуктов или буровых растворов, обработанные высокомолекулярными полимерами могут быть отнесены к вязкоупругим жидкостям [3–5]. Как известно авторам, в настоящее время практически нет работ о влиянии пульсаций расхода на колебания коэффициентов гидравлического сопротивления и сопротивления трения. Однако эти исследования имеют весьма важное значение для расчета градиента давления и других гидродинамических характеристик, занимающих особое место в проведении некоторых медико-биологических и других технологических исследований [1, 2]. Таким образом, необходимо отметить важную роль исследований касательного напряжения сдвига на стенке при колебательном течении вязкой и вязкоупругой жидкости, вместе с другими параметрами потока.

Наиболее упрощенный подход к теоретическому изучению колебательного потока вязкой жидкости опирается на предположение, что вязкая жидкость – несжимаемая, движется ламинарно в бесконечно длинной цилиндрической трубе круглого сечения под действием, гармонически изменяющимся во времени градиента давления. Пульсирующие течения вязких несжимае-

мых жидкостей в жесткой и упругой трубах исследованы в работах В.С. Громека [6, 7], в них он определил скорости распространения пульсовой волны давления и их затухания. Затем вопросы колебательного течения вязкой жидкости в трубе были исследованы в работе И.Б. Крендала [8], который, решая задачи колебательного течения вязкой жидкости в круглой бесконечной трубе, вывел формулы для профиля скорости, расхода жидкости и импеданса при распространении синусоидальной волны давления. Спустя несколько лет П. Ламбосии [9] опубликовал свои выводы того же профиля скорости и, помимо этого, вычислил вязкое сопротивление. Дж.Р. Уомерсли [10] заново вывел решение П. Ламбосии. Его отличительные качественные результаты заключались в том, что были обнаружены: во-первых, сдвиг фаз между колебаниями давления и средней по сечению скорости и, во-вторых, образование немонотонного распределения профилей скорости.

Впервые влияние наложенных колебаний средней по сечению скорости при ламинарном течении в трубе было изучено в экспериментальной работе [11]. Был получен так называемый “анулярный эффект” Ричардсона при относительно высоких частотах колебаний, возникающий максимум на профиле колеблющейся составляющей продольной скорости в узком пристеночном слое, толщина которого уменьшается с увеличением частоты колебаний. В остальной части трубы жидкость колеблется как целое в соответствии с колебанием средней по сечению скорости. Также проведены эксперименты на трубы внутренним диаметром 40 мм, в которой поршнем создаются гармонические изменения расхода жидкости около нулевого значения [12]. На график нанесены точки, полученные с осциллограмм, на которых с помощью электротермоманометра записывались местные скорости в различных точках сечения трубы. Из графиков видно, что максимальные значения местных скоростей наблюдаются вблизи стенки. Эти экспериментальные результаты хорошо согласуются с результатами указанного выше исследования. Теоретически задача о ламинарном пульсирующем течении жидкости в трубе была решена в [12]. В работе [13] решение указанной задачи выполнялось аналогично [12], но при условии, что задавалось не гармоническое колебание средней по сечению скорости, а колебание градиента давления. Из аналитического решения уравнения движения для пульсирующего течения следует, что при определенных числах Рейнольдса среднего во времени течения и относительно высоких частотах и амплитудах колебаний существует зона возвратных (реверсивных) течений вблизи стенки, когда местная скорость направлена против среднего потока. Наличие этих зон подтверждено в работе [14] экспериментально с очень хорошим совпадением теории и эксперимента. В работе [15] проведено аналогичное решение задачи о пульсирующем течении в плоском канале и в цилиндрической трубе. Отмечено, что закономерности колебаний гидродинамических величин для течения в плоском канале и в круглой цилиндрической трубе качественно совпадают.

Нестационарные пульсирующие течения вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе бесконечной длины под действием гармонического изменяющего градиента давления исследованы в работе [16]. При помощи решения задачи получены расчетные формулы для распределения скорости и расхода жидкости. Численные расчеты показали, что в пульсирующем потоке при меньших значениях безразмерной частоты колебаний скорость, расход и др. гидродинамические параметры из нулевого начального состояния устанавливаются медленно, сравнительно при больших частотах колебаний и близки к параметрам неппульсирующего потока. В осциллирующем потоке при больших значениях частоты колебаний эти параметры устанавливаются практически мгновенно.

Пульсирующие течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном канале исследованы в работах [17, 18]. Задача решена методом конечных разностей. Определены оптимальные параметры разностной схемы и получены данные по амплитуде и по фазе колебаний продольной скорости, коэффициента гидравлического сопротивления и других параметров течения. При низких частотах колебаний показано, что все гидродинамические параметры колеблются согласно законам средней по сечению скорости. Для прямоугольных каналов с разной формой поперечного сечения (плоской, прямоугольной и круглой цилиндрической) в высокочастотном колебании зависимости гидродинамические величины от безразмерной частоты колебаний имеют одинаковый характер. Также проанализировано влияние соотношения сторон прямоугольного канала на гидродинамику пульсирующего потока. В работе [19] рассматривалось колебательное течение в прямоугольном канале, где две противоположные стенки проницаемые. Как указывается, решение этой задачи может быть полезно при описании течения крови в фибровых мембранах, используемых для искусственных почек. Также авторами было получено аналитическое решение для развитого колеблющегося течения в треугольном [20] и в тороидальном [21] каналах. В работе [21a] исследуется эволюция картины возмущений, наложенных на плоскопа-

раллельное периодическое по времени ньютоновской вязкой жидкости в слое, одна из границ которого совершает продольные гармонические колебания вдоль самой себя, а на другой границе возможно проскальзывание материала с нулевым трением. На основе метода интегральных соотношений, основанного на вариационных неравенствах для квадратичных функционалов и развитого применительно к нестационарным течениям, выводятся достаточные интегральные оценки экспоненциального затухания начальных возмущений.

Практический интерес предоставляет изучение пульсирующего течения вязкоупругой жидкости в плоском канале и в цилиндрической трубе под воздействием гармонических колебаний градиента давления или при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. Исследовано движение вязкоупругой жидкости по длинной трубе под действием колебательного градиента давления [22]. Показаны отличительные особенности этого движения по сравнению с соответствующим движением ньютоновской жидкости. Безынерционный колебательный поток вязкоупругой жидкости в круглой бесконечной трубе под действием колебательного градиента давления исследован в работе [23], в которой показано, что в осциллирующем потоке профили продольной скорости симметричны и существует значительный фазовый сдвиг между градиентом давления и скоростью. В пульсирующих потоках фазовый сдвиг фактически отсутствовал, и осевая скорость изменялась несимметрично относительно своего среднего за период колебания. Ламинарные колебательные течения вязкоупругих жидкостей Максвелла и Олдройда-Б были исследованы в работе [24], где демонстрируется много интересных особенностей отсутствующих в потоках ньютоновских жидкостей. Результаты исследования [24] показывают, что в безынерционном режиме, $Re \ll 1$ свойства течения зависят от трех характерных длин, в частности длины

волны λ_0 и длины затухающих вязкоупругих сдвиговых волн $x_0 = \left(\frac{2\nu}{\omega_0}\right)^{1/2}$, где ν – кинематическая

вязкость; ω_0 – частота колебания, а также характерный поперечный размер системы a . В этой связи они соответственно длине разделены на три шкалы и три независимые безразмерные груп-

пы: $\frac{t_0}{\lambda}$ (вязкость до времени релаксации), De (время релаксации до периода колебаний) и X (ко-

эффициент вязкости). Вместе с тем колебательные области течения разделены на две системы, соответствующие “широкой” $\left(\frac{a}{x_0} > 1\right)$ и “узкой” $\left(\frac{a}{x_0} < 1\right)$ системы. В широких системах колебания ограничиваются околостеночными течениями, а в центральном ядре невязкой. В узких системах поперечные волны тоже пересекают всю систему и пересекают ее центр, что в конечном итоге приводит к конструктивным резонансам, которые ведут к резкому увеличению амплитуды профиля скорости. Проанализированы нестационарные течения вязкоупругой жидкости на модели Олдройда-Б в круглой бесконечной цилиндрической трубе под действием зависящего от времени градиента давления в следующих случаях: а) градиент давления изменяется со временем в соответствии с экспоненциальными законами; б) градиент давления изменяется по гармоническим законам; в) градиент давления постоянный [25]. Во всех случаях получены формулы для распределения скорости, расхода жидкости и других гидродинамических величин в пульсирующем потоке.

На основе модели Максвелла рассмотрена задача нестационарного колебательного течения вязкоупругой жидкости в круглой цилиндрической трубе [26]. Получены формулы для определения динамических и частотных характеристик. С помощью численных экспериментов изучено влияние частоты колебания и релаксационных свойств жидкости на касательное напряжение сдвига на стенке. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающим факторами для использования квазистационарного подхода.

В последние десятилетия проблема электрокинетических явлений, в том числе электроосмос, потенциал течений, электрофорез и седиментационный потенциал привлекли к себе большое внимание и предоставили множество приложений в микро и наноканалах. В связи с этим в работе [27] исследовано электрокинетическое течение вязкоупругих жидкостей в плоском канале под воздействием колебательного градиента давления. Предполагается, что движение жидкости происходит ламинарно и однонаправленно, в этой связи движение жидкости находится в линейном режиме. Поверхностные потенциалы считаются малыми, поэтому уравнение Пуассона-Больцмана линеаризуется. В течении появляется резонансное поведение, где преобладает упругое свойство жидкости Максвелла. Резонансное явление усиливает электрокинетический эффект, и вместе с тем возрастает эффективность преобразования электрокинетической энергии.

В перечисленных выше работах в основном исследуется поле скоростей жидкости при различных режимах изменения градиента давления. Изменение касательного и нормального напряжения, возникающее при движении колебательного потока, исследовано относительно мало. В большинстве случаев в гидродинамических моделях нестационарных течений жидкости заменялись последовательностью течений с квазистационарным распределением гидродинамических величин. Однако структуры нестационарных течений отличаются от структуры стационарных течений, и в таких случаях такая замена должна быть обоснованной в каждом конкретном случае. В настоящее время вопрос правомерности исследования квазистационарных характеристик для определения поля касательных напряжений в нестационарных течениях вязкой и вязкоупругой жидкостей практически не решен. Естественно, что в таких условиях возникает необходимость использования гидродинамических моделей нестационарных процессов, учитывающих изменение гидродинамических характеристик потока в зависимости от времени.

Следует отметить, что в общем случае гидродинамическая характеристика в трубопроводном транспорте не может быть определена из характеристик, которые соответствуют условиям стационарного потока.

В данной работе исследуется колебательное течение вязкоупругой жидкости на модели Максвелла в плоском канале при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. Определяется передаточная функция амплитудно-фазовых частотных характеристик (АФЧХ). С помощью этой функции изучается зависимость нестационарного касательного напряжения сдвига на стенке от безразмерной частоты колебаний, ускорения и релаксационных свойств жидкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачи медленного колебательного течения вязкоупругой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями, простирающимися в обе стороны до бесконечности. Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Ось $0x$ проходит горизонтально в середине канала вдоль потока. Ось $0y$ направлена перпендикулярно к оси $0x$. Течение вязкоупругой жидкости происходит симметрично по оси канала. Дифференциальное уравнение движения вязкоупругой несжимаемой жидкости в напряжении имеет следующий вид [28, 30–32]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1.1)$$

где u – продольная скорость; p – давление; ρ – плотность; μ – динамическая вязкость; τ – касательная напряжения; t – время.

Реологическое уравнение состояния жидкости принимается в виде уравнения Максвелла [29]

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau(y, t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

Здесь λ – время релаксации. В (1.2) при $\lambda = 0$ получаем закон вязкого трения Ньютона. Подставляя (1.2) в уравнение движения (1.1) для скорости жидкости, получаем

$$\rho \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = -\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

Считаем, что колебательное течение вязкоупругой жидкости происходит за счет заданного гармонического колебания расхода жидкости или продольной скорости осредненной по сечению канала.

$$Q = a_Q \cos \omega t = \operatorname{Re} a_Q e^{i\omega t}, \quad \langle u \rangle = a_u \cos \omega t = \operatorname{Re} a_u e^{i\omega t},$$

где a_Q и a_u – амплитуды расхода жидкости и амплитуды продольной скорости осредненной по сечению канала. В данном случае предполагается, что на стенках канала удовлетворяются условия прилипания, т.е. продольная скорость на стенках канала равна нулю. Тогда граничными условиями будут:

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{при} & \quad y = h \\ u &= 0 & \text{при} & \quad y = -h \end{aligned} \quad (1.4)$$

В силу линейности уравнение (1.1) продольной скорости, давление, касательное напряжение на стенке можно записывать следующим образом

$$u(y, t) = \operatorname{Re} u_1(y) e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = \operatorname{Re} p_1(x) e^{i\omega t}, \quad \tau(t) = \operatorname{Re} \tau_1 e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

Подставляя выражения (1.5) в уравнение (1.3), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(y)}{\partial y^2} - \frac{\rho i \omega \eta^2(i\omega)}{\mu} u_1(y) = \frac{\eta^2(i\omega)}{\mu} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \quad (1.6)$$

Здесь $\eta^2(i\omega) = (1 + i\omega\lambda)$.

Фундаментальными решениями уравнения (1.6) без правой части будут функции

$$\cos\left(\frac{i^{3/2}\alpha_0}{h}\eta(i\omega)y\right) \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{i^{3/2}\alpha_0}{h}\eta(i\omega)y\right)$$

а решение неоднородной части имеет постоянные

$$\frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right)$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$u_1(y) = C_1 \cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\frac{y}{h}\right) + C_2 \sin\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\frac{y}{h}\right) + \frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \quad (1.7)$$

Для определения постоянных коэффициентов C_1 и C_2 в (1.7) используем граничные условия (1.4)

$$\begin{aligned} u_1(h) &= C_1 \cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) + C_2 \sin(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) + \frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \\ u_1(-h) &= C_1 \cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) - C_2 \sin(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) + \frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.8) легко найти

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= -\frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \frac{1}{\cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))} \end{aligned}$$

В результате этого для определения скорости будем иметь

$$u_1(y) = \frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\frac{y}{h}\right)}{\cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))} \right) \quad (1.9)$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} h$ – колебательное число Уомерсли (безразмерная частота колебаний).

С помощью уравнения

$$\tau_1 = -\frac{\mu}{\eta^2(i\omega)} \frac{\partial u_1(y)}{\partial y} \Big|_{y=h} \quad (1.10)$$

(1.10) находим касательное напряжение сдвига на стенке

$$\tau_1 = -h \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{i\alpha_0^2} \left(\frac{i^{3/2}\alpha_0 \sin(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))}{\eta(i\omega) \cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))} \right) \quad (1.11)$$

Теперь проинтегрирую обе части формулы (1.9) по переменной y в пределах от $-h$ до h , найдем формулы для расхода жидкости

$$Q_1 = 2h \left[\frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\sin(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))}{(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) \cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))} \right) \right] \quad (1.12)$$

Учитывая формулу (1.12) $Q_1 = 2h\langle u_1 \rangle$, находим продольную скорость осредненной по сечению канала

$$\langle u_1 \rangle = \frac{h^2}{\mu i \alpha_0^2} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\sin(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega))}{(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega)) \cos(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega))} \right) \quad (1.13)$$

Здесь $\rho i \omega$ можно записать в виде

$$\rho i \omega = i \frac{\omega}{v} h^2 \cdot \frac{\mu}{h^2} = i \alpha_0^2 \frac{\mu}{h^2}$$

Тогда формула (1.13) с учетом (1.11) приобретает вид

$$\langle u_1 \rangle = -\frac{h}{3\mu} \tau_1 \cdot \frac{3 \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \cos \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) - \sin \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) \right)}{\left(i^{3/2} \alpha_0 \right)^2 \sin \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)} \quad (1.14)$$

Используя формулу (1.14) определяем передаточную функцию $W_{\tau_1, u_1}(i\omega)$ для касательного напряжения на стенки, как

$$W_{\tau_1, u_1}(i\omega) = \frac{h \tau_1(i\omega)}{3\mu u_1(i\omega)} \quad (1.15)$$

Из уравнения (1.14), учитывая (1.15), получаем

$$W_{\tau_1, u_1}(i\omega) = \frac{h \tau_1(i\omega)}{3\mu \langle u_1(i\omega) \rangle} = -\frac{\left(i^{3/2} \alpha_0 \right)^2 \sin \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}{3 \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \cos \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) - \sin \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) \right)} \quad (1.16)$$

Передаточная функция (1.16) иногда называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ). Эта функция позволяет определить зависимость касательного напряжения на стенке канала от времени при заданном законе изменения продольной скорости осредненной по сечению канала. Как известно, в большинстве случаев при решениях нестационарных задач используется касательное напряжение на стенке, полученное при квазистационарном режиме течения жидкости. В реальных случаях такие допущения правомерны, когда распределение местных скоростей по сечению потока имеет параболический закон распределения. В этом случае касательное напряжение сдвига на стенке канала колеблется в одной фазе с колебанием осредненной продольной скорости по сечению канала.

В этом случае величину $\tau_{o, kc}$ можно вычислить по формуле $\tau_{o, kc} = \frac{3\mu}{h} \langle u_1 \rangle$ и вместо квазистационарного течения касательного напряжения сдвига на стенке $\tau_{o, kc}$, можно принять

$$\tau_{o, kc} = \tau_{nc} \quad (1.17)$$

Таким образом, соотношение (1.17) дает возможность поменять величину τ_{nc} на значение $\tau_{o, kc}$, только при условии, что действительное распределение местных скоростей по сечению потока мало отличается от квазистационарного. Однако во многих случаях в нестационарном потоке закон распределения местных скоростей существенно отличается от квазистационарного. В большинстве работ [9–12, 17, 18, 23, 24] было показано, что при колебательном ламинарном течении в цилиндрической трубе изменение местных скоростей в пристаных слоях опережает во времени изменение местных скоростей в центральных слоях. Колебательный поток из-за изменения закона распределения местных скоростей по сечению канала значения τ_{nc} в действительности существенно отличается от $\tau_{o, kc}$. В линейной модели нестационарного потока наиболее полное представление о зависимости τ_{nc} от $\langle u_1 \rangle$ можно получить с помощью передаточной функции (1.16).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И АНАЛИЗОВ

Для определения зависимости касательного напряжения на стенке канала с продольной скорости осредненной по сечению канала в нестационарном потоке используем передаточную функцию (1.16). В связи с этим учитываем закон изменения продольной скорости осредненной по сечению канала

$$\langle u_1 \rangle = a_{u_1} \cos \omega t \quad (2.1)$$

где a_{u_1} – амплитуда продольной скорости осредненной по сечению канала. Используя формулы (2.1), можно определить зависимость касательного напряжения на стенке между продольной скоростью осредненной по сечению канала. Вследствие использованных для нахождения касательного напряжения на стенке канала линейности уравнений (2.1) его значение также будет гармоническим, но в общем случае содвинутым по фазе по отношению $\langle u_1 \rangle$.

Таким образом, изменение касательного напряжения на стенке определяется следующим образом:

$$\tau_1 = a_{\tau_1} \cos(\omega t + \varphi_{\tau_1}) \quad (2.2)$$

где a_{τ_1} – амплитуда касательного напряжения на стенке канала φ_{τ_1} – сдвиг фазы между величиной τ_1 и $\langle u_1 \rangle$

Используя соотношение

$$\cos(\omega t + \varphi_{\tau_1}) = \cos \omega t \cos \varphi_{\tau_1} - \sin \omega t \sin \varphi_{\tau_1}$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial t} = -a_{u_1} \omega \sin \omega t$$

приведем уравнение (2.2) к виду

$$\tau_1 = \left(\frac{a_{\tau_1} \cos \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}} \right) \langle u_1 \rangle + \left(\frac{a_{\tau_1} \sin \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}} \right) \frac{1}{\omega} \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial t} \quad (2.3)$$

Величины $\left(\frac{a_{\tau_1} \cos \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}} \right)$ и $\frac{a_{\tau_1} \sin \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}}$ соответствуют действительной и мнимой частями передаточной функции (1.16), поэтому из (1.16) получаем

$$W_{\tau_1, u_1} = -\frac{1}{3} \left(\frac{-i \alpha_0^2 \sin(i^{3/2} \alpha_0 (1 + i De \alpha_0^2)^{1/2})}{i^{3/2} \alpha_0 (1 + i De \alpha_0^2)^{1/2} \cos(i^{3/2} \alpha_0 (1 + i De \alpha_0^2)^{1/2}) - \sin(i^{3/2} \alpha_0 (1 + i De \alpha_0^2)^{1/2})} \right) = \chi + \beta i \quad (2.4)$$

Здесь $De = \frac{\nu \lambda}{h^2}$ – упругое число Деборы характеризует упругие свойства жидкости; $\chi = \left(\frac{a_{\tau_1} \cos \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}} \right)$, $\beta = \frac{a_{\tau_1} \sin \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}}$.

Тогда (2.3) формула принимает вид

$$\frac{h}{3\mu} \frac{\tau_1}{\langle u_1 \rangle} = W_{\tau_1, u_1} = \chi + \beta \frac{1}{\omega} K_n \quad (2.5)$$

Здесь $K_n = \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\langle u_1 \rangle \partial t}$ – параметр характеризует ускорения жидкости; χ и β – безразмерные величины, t размерные величины, поэтому ее нужно преобразовать к безразмерному виду, с помощью преобразования

$$t = \frac{h^2 \rho}{3\mu} t^* \quad (2.6)$$

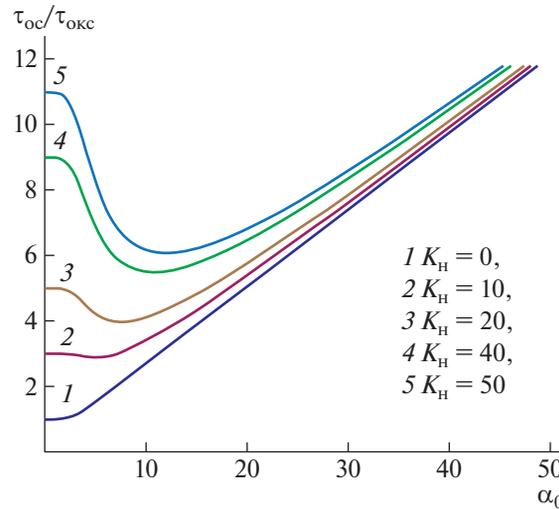


Рис. 1. Изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний при различных значениях параметра ускорения жидкости K_H .

Учитывая (1.17), (2.4) и (2.6) на (2.5), получим расчетные формулы

$$\frac{\tau_{нс}}{\tau_{окс}} = \chi + \frac{3\beta}{\alpha_0^2} K_H \quad (2.7)$$

Здесь $\tau_{окс} = \frac{3\mu}{h} \langle u_1 \rangle$ и $\tau_1 = \tau_{нс}$.

С помощью формулы (2.7) построены графики на рис. 1, показывающие изменение относительного касательного напряжения на стенке в нестационарном потоке в зависимости от безразмерной частоты колебаний, когда число Дебры равняется нулю. Построенные графики на рис. 1 показывают, что $K_H = 0$ отношение $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{окс}}$ близко к единице, пока α_0 меньше чем единица. Если α_0

принимает большие значения, чем единица, то даже $K_H = 0$ отношение $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{окс}}$ становится больше единицы и возрастает с увеличением безразмерной частоты колебаний. Это говорит о том, что касательные напряжения на стенке канала при неустановившемся течении жидкости могут превосходить свои квазистационарные значения даже в те моменты времени, когда ускорение жидкости равно нулю. Отношение $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{окс}}$ увеличивается с увеличением параметра K_H , что объясняется изменением касательного напряжения на стенке, происходит с опережением по фазе по сравнению средней по сечению скорости.

При течении вязкоупругой жидкости в плоском канале наблюдается существенное изменение касательного напряжения на стенке в низких частотах колебаний в зависимости от упругого числа Дебры. В работе [24] было исследовано колебательное течение вязкоупругой жидкости в плоском канале и в цилиндрической трубе, где область течения разделена на два класса, из которых $\alpha_0 > 1$ относится к “широкому” классу, а другая $\alpha_0 < 1$ к “узкому”. В “широких” классах колебательное течение жидкости ограничивается околостеночным течением, а в центральной части невязкой. В “узких” системах поперечные волны пересекают всю область потока, что в конечном итоге приводит к резкому увеличению амплитуды профиля скорости и других гидродинамических параметров, таких как касательное напряжение сдвига на стенке, расход жидкости в зависимости от упругого числа Дебры. На основе формулы (2.7) построены графики в рис. 2, 3 и 4; показывающие изменение касательного напряжения при колебательном потоке вязкоупругой жидкости в плоском канале в зависимости от частоты колебаний и числа Дебры соответственно $De = 0.01; 0.05; 0.1$.

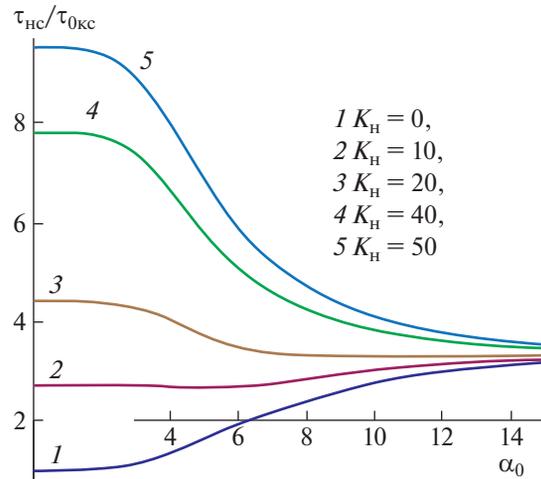


Рис. 2. Изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний при различных значениях параметра ускорения жидкости K_H и упругое число Деборы $De = 0.01$.

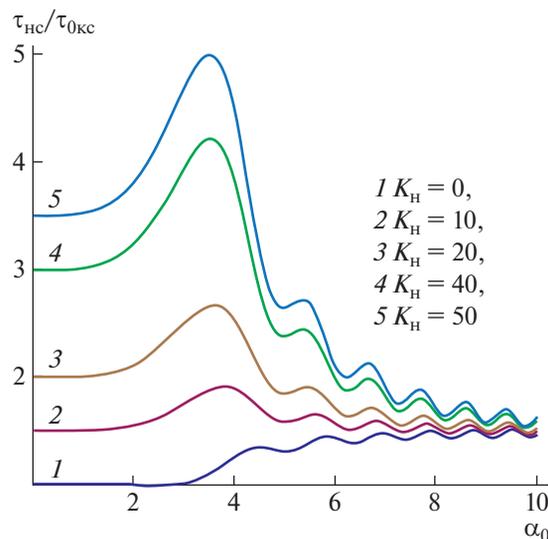


Рис. 3. Изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний при различных значениях параметра ускорения жидкости K_H и упругое число Деборы $De = 0.05$.

Следует отметить, что все графики при течении вязкоупругой жидкости в плоском канале носят колебательный характер. В рис. 2 представлено изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке канала к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний для случая $De = 0.01$. Следует отметить, что в этом случае, в отличие от ньютоновского течения, наблюдается увеличение касательного напряжения в области околонулевого значения частоты колебания в зависимости от ускорения жидкости. Затем происходит постепенное уменьшение для $K_H = 20; 40; 50$, а для $K_H = 0; 10$ увеличение до значения $\frac{\tau_{nc}}{\tau_{0kc}} = 3$ при больших значениях частоты колебания. Для случая $De = 0.05$ изменения отношения нестационарного касательного напряжения на стенке канала к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний приведены в рис. 3. В случае околонулевого значения частоты колебаний наблюдается уменьшение касатель-

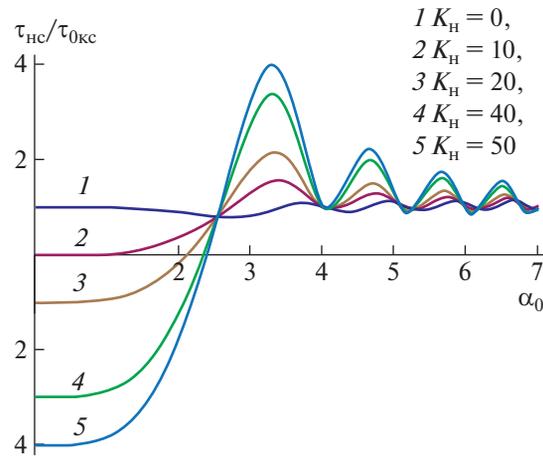


Рис. 4. Изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний при различных значениях параметра ускорения жидкости K_n и упругое число Деборы $De = 0.1$.

ного напряжения в зависимости от ускорения жидкости, а затем происходит увеличение до максимума в области $2 < \alpha_0 < 4$, потом постепенно асимптотически уменьшение до значения $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{0кс}} = 1.5$. Необходимо отметить, что в случае $De = 0.1$ при низких значениях частоты колебаний наблюдается резкое уменьшение касательного напряжения, кроме $K_n = 0$ случая. Это говорит о том, что при больших значениях времени релаксации могут возникать обратные течения жидкости при низких частотах колебаний. Затем с увеличением частоты колебания все кривые, показывающие изменения отношения нестационарного касательного напряжения на стенке канала, с колебанием асимптотически приближается к значению $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{0кс}} = 1$ в зависимости от ускорения жидкости (рис. 4).

Таким образом, рассмотренные особенности в изменениях касательного напряжения на стенке при заданном гармоническом колебании расхода вызваны нарушением параболического закона распределения местных скоростей по сечению канала. Расчеты показывают, что в пристанном слое скорости изменяются синфазно с изменением касательного напряжения на стенке вдоль канала, а в центральной части потока они остаются по фазе, с фазой касательного напряжения сдвига на стенке. С этой связи вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квазистационарного подхода. Кроме того, найденные формулы для определения передаточной функции при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке позволяют определить диссипации механической энергии в нестационарном потоке среды, имеющие важные значения при регулировании гидро- и пневмосистем.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решены задачи о колебательном течении вязкоупругой несжимаемой жидкости в плоском канале при заданном гармоническом колебании расхода жидкости. Определена передаточная функция (амплитудно-фазовой частотной характеристики). С помощью этой функции определено влияние частоты колебаний ускорения и релаксационных свойств жидкости на отношение касательного напряжения сдвига на стенке канала к средней по сечению канала скорости. Расчеты показывают, что нестационарное касательное напряжение на стенке канала при течении вязкоупругой жидкости увеличивается немонотонно с ускорением жидкой частицы при низких частотах колебаний. Достигая максимального значения, затем уменьшаясь с ростом безразмерной частоты колебаний, асимптотически приближается к значениям без ускоренного течения с колебанием. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квазистационарного подхода. Найден-

ные формулы для определения передаточной функции при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке позволяют определить диссипации механической энергии в нестационарном потоке среды, имеющие немаловажные значения при расчете регулирования гидро- и пневмосистем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marx U., Wallis H., Hoffmann S., Linder G., Harland R., Sonntag F., Klotzbach U., Sakharov D., Tonevitskiy A., Lonster R. “Homan-on-a-Chip” developments: a translational cutting-edge alternative to systemic safety assessment and effecting evacuation in laboratory animals and man? // *ATLA* 2012. V. 40. P. 235–257.
2. Inman W., Domanskiy K., Serdy J., Ovens B., Trimper D., Griffith L.G. Dishing modeling and fabrication of a constant flow pneumatic micropump // *J. Micromech. Microeng.* 2007. V. 17. P. 891–899.
3. Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. Ташкент: Фан. 1982. 104 с.
4. Хужаеров Б.Х. Реологические свойства смесей. Самарканд: Согдиана. 2000.
5. Мирзаджанзаде А.Х., Караев А.К., Ширинзаде С.А. Гидравлика в бурении и цементировании нефтяных и газовых скважин. М.: Недра, 1977. 232 с.
6. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. Собр. соч. М.: 1952. С. 149–171.
7. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкости в упругих трубках // Собр. соч. М.: 1952. С. 172–183.
8. Crandall I.B. Theory of vibrating systems and sounds. D. Van. Nostrand Co., New York. 1926.
9. Lambossy P. Oscillations foreeses dun liquids incompressible et visqulex dans un tube rigide et horizontal calculi de IA force de frottement // *Helv. Physiol. Acta.* 25. 1952. P. 371–386.
10. Womersly J.R. Method for the calculation of velocity rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known // *J. Physiol.* 1955. N 3. P. 553–563.
11. Richardson E.G., Tyler E. The transverse Velocity gradient neat the mothe of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established // *Pros. Phys. Soc. London:* 1929. V. 42.
12. Попов Д.Н., Мохов И.Г. Экспериментальное исследование профилей местных скоростей в трубе при колебаниях расхода вязкой жидкости // *Изв. Вузов. Машиностроение.* 1971. № 7. С. 91–95.
13. Uchida S. The pulsating viscous flow superposed on the stead laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe // *ZAMP* 1956. vol. 7. № 5. P. 403–422.
14. Ünsal B., Ray S., Durst F., Ertunç Ö. Pulsating laminar pipe flows with sinusoidal mass flux variations // *Fluid Dynamics Research.* 2005. vol. 37. P. 317–333.
15. Зигель Р., Перлмуттер М. Теплоотдача при пульсирующем течении в канале // *Теплопередача. М.:* 1962. № 2. С. 18–32.
16. Файзуллаев Д.Ф., Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих потоков. Ташкент: Фан, 1986. 192 с.
17. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Гидродинамика и теплообмен пульсирующего ламинарного потока в каналах // *Теплоэнергетика.* 2015. № 9. С. 24–33.
18. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Пульсирующее ламинарное течение в прямоугольном канале // *Теплофизика и аэродинамика.* 2015. Т. 22. № 6. С. 761–773.
19. Tsangaris S., Vlachakis N.W. Exact solution of the Navier–Stokes equations for the fully developed, pulsing flow in a rectangular duct with a constant cross-sectional velocity // *J. Fluids Eng.* 2003. V. 125. P. 382–385.
20. Tsangaris S., Vlachakis N.W. Exact solution of the Navier–Stokes equations for the oscillating flow in a duct of a cross-section of right-angled isosceles triangle // *ZAMP.* 2003. V. 54. P. 1094–1100.
21. Tsangaris S., Vlachakis N.W. Exact solution for the pulsating finite gap Dean flow // *Appl. Math. Modelling.* 2007. V. 31. P. 1899–1906.
- 21a. Георгиевский Д.В. Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя // *Дифференциальные уравнения.* 2020. Т. 56. № 10. С. 1366–1375.
22. Jons J.R., Walters T.S. Flow of elastic-viscous liquids in channels under the influence of a periodic pressure gradient // *Part 1. Rheol. Acta.* 1967. V. 6 P. 240–245.
23. Khabakhpasheva E., Popov V., Kekalov A., and Mikhailova E. Pulsating flow of viscoelastic fluids in tubes // *J. Non-Newtonian Fluid. Mech.* 1989. V. 33(3). P. 289–304.
24. Casanellas L., Ortin J. Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids // *J. Non-Newtonian Fluid. Mechanics.* 2011. 166. P. 1315–1326.
25. Hassan A.Abu-El and El-Maghawru E.M. Unsteady axial viscoelastic pipe flows of an Oldroyd-B fluid in // *Rheology-New concepic . Applications and Methods / Ed by Durairaj R. Published // Tech.* 2013. Ch. 6. P. 91–106.

26. *Akilov Zh.A., Dzhabbarov M.S. and Khuzhayorov B.Kh.* Tangential Shear Stress under the Periodic Flow of a Viscoelastic Fluid in a Cylindrical Tube // SSN 0015-4628. *Fluid Dynamics*. 2021. V. 56. № 2. P. 189–199.
27. *Ding Z., Jian Y.* Electrokinetic oscillatory flow and energy microchannelis: a linear analysis // *J. Fluid. Mech.* 2021. V. 919. A20. P. 1–31.
28. *Попов Д.Н.* Нестационарные гидромеханические процессы. М.: Машиностроение, 1982. 424 с.
29. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
30. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
31. *Колесниченко В.И., Шарифулин А.Н.* Введение в механику несжимаемой жидкости. Перим: Изд. Пермского нац. иссл. полит. ун-та, 2019. 127 с.
32. *Наврузов К.* Гидродинамика пульсирующих течений в трубопроводах. Ташкент: Фан, 1986. 112 с.

УДК 532.526

ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ УГЛОВ АТАКИ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ НА СТРЕЛОВИДНЫХ КРЫЛЬЯХ

© 2023 г. А. Д. Косинов^{a,*}, В. Л. Кочарин^{a,*}, А. В. Ливерко^{b,**}, А. Н. Семенов^{a,*},
Н. В. Семенов^{a,*}, Б. В. Смородский^{a,*}, С. Н. Толкачев^{b,**}, А. А. Яцких^{a,*}

^aИнститут теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск, Россия

^bЦентральный аэрогидродинамический институт, Жуковский, Московская область, Россия

*E-mail: semion@itam.nsc.ru

**E-mail: info@tsagi.ru

Поступила в редакцию 18.11.2022 г.

После доработки 19.12.2022 г.

Принята к публикации 25.12.2022 г.

Представлены новые (при числах Маха $M = 3$ и 3.5) и обобщающие (для чисел Маха от 2 до 4) результаты экспериментальных исследований по влиянию малых углов атаки на ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковом пограничном слое стреловидного крыла с углом скольжения передней кромки 72° . Изменение угла атаки имело сильное влияние на числа Рейнольдса перехода. Получено уменьшение числа Рейнольдса перехода с ростом числа Маха. Измерения проводились термоанемометром постоянного сопротивления по отработанной процедуре для определения положения перехода. Впервые использован метод e^N для численной оценки чисел Рейнольдса перехода в сверхзвуковом пограничном слое стреловидного крыла с углом скольжения передней кромки 72° . Расчеты нарастания амплитуд стационарных и нестационарных мод поперечного течения в пограничном слое проводились по линейной теории устойчивости в рамках полной системы уравнений Лиза-Линя. Численные результаты говорят о том, что, по условиям экспериментов, ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на модели стреловидного крыла определяется нарастанием стационарных мод неустойчивости поперечного течения.

Ключевые слова: эксперимент, сверхзвуковой пограничный слой, стреловидное крыло, угол атаки, угол скольжения, ламинарно-турбулентный переход, число Рейнольдса перехода, линейная теория устойчивости

DOI: 10.31857/S1024708422600919, EDN: TMSYIS

Исследования возникновения турбулентности и разработка на основе полученных данных новых инженерных методов предсказания положения и управления ламинарно-турбулентным переходом в пространственных пограничных слоях находятся в центре внимания специалистов многих стран. Такие исследования имеют практический интерес, так как подобные течения реализуются при обтекании стреловидного крыла самолета. Сценарии ламинарно-турбулентного перехода на стреловидных крыльях приведены в работах [1–4]. Отметим, что процесс возникновения турбулентности в пограничном слое на стреловидных крыльях качественно отличается от двумерного случая плоской пластины, где переход вызывает неустойчивость волн Толлмина-Шлихтинга (ТШ). В трехмерном пограничном слое на стреловидном крыле кроме волн ТШ, не существует нарастающих из-за благоприятного градиента давления, также может возникнуть неустойчивость поперечного течения, выражающаяся в виде роста вниз по потоку стационарных и бегущих возмущений. Развитие всех этих возмущений и их относительная роль в процессе перехода сильно зависят от условий обтекания модели [4, 5].

В связи с этим малое изменение угла атаки стреловидных крыльев может приводить к изменению чисел Рейнольдса перехода. Рассмотрим результаты экспериментов [6], выполненных на модели треугольного крыла с углом скольжения 77.1° при $M = 3.5$, что соответствовало режиму обтекания с дозвуковой передней кромкой. С помощью визуализации на верхней поверхности

модели получено, что при увеличении угла атаки от -2 до 3° ламинарно-турбулентный переход смещается вверх по потоку. Заметим, что в следе за носиком треугольных крыльев существует область неоднородного течения [7, 8], поэтому лучше рассматривать данные по переходу у боковых кромок дельта крыла. В [6] показано, что в этом случае переход происходит параллельно боковой кромке модели. В работе [9] с помощью визуализации получены данные по переходу на моделях крыла NASA64A008 с углами стреловидности 45 и 65° при $M = 2$ при изменении угла атаки в диапазоне -4 – 4° . Реализованы случаи сверхзвуковой и дозвуковой передней кромки соответственно. Получено, что увеличение угла атаки приводит к стабилизации течения, т.е. к увеличению числа Рейнольдса перехода.

В [10] использована модель тонкого крыла с двумя углами стреловидности при числе Маха 2. Угол стреловидности крыла около фюзеляжа составлял 66 и 61.2° в его окончании. Угол атаки изменялся от -1.5 до $+5.5^\circ$. Для положения поверхностных датчиков термоанемометра в 70% вдоль размаха крыла получено монотонное увеличение числа Рейнольдса перехода от $Re_{cr} \approx 0.6 \times 10^6$ до $Re_{cr} \approx 1.3 \times 10^6$ с ростом угла атаки. Однако для положения датчиков в 30% вдоль размаха крыла зафиксирован максимум в распределении $Re_{cr}(\alpha)$ при угле атаки $\alpha = 1.73^\circ$. Незначительное изменение угла атаки от этого значения приводило к существенному изменению положения перехода вверх по потоку.

В работах [11, 12] впервые выполнено исследование влияния малых углов атаки на развитие естественных возмущений в пограничном слое на стреловидном крыле со сверхзвуковой передней кромкой и проведено сравнение с результатами расчетов по линейной теории устойчивости. В силу природы естественных пульсаций (случайной и не контролируемой по волновым характеристикам) получено только качественное соответствие результатов расчета с данными экспериментов. Выполнено сравнение полученных в эксперименте чисел Рейнольдса перехода для различных углов атаки модели и расчетных зависимостей по продольной координате или по числу Рейнольдса значений N -фактора, полученных для наиболее сильно растущих волн. Показано, что оценка положения ламинарно-турбулентного перехода на основании расчетов по методу e^N может проводиться и для пограничных слоев на моделях стреловидных крыльев, имеющих сверхзвуковую переднюю кромку.

Экспериментальные результаты, рассмотренные в [11, 12], получены в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325. Применялась модель крыла с углом скольжения передней кромки $\chi = 45^\circ$ при числе Маха $M = 2$. Это соответствует случаю сверхзвуковой передней кромки, а в [13] на стреловидном крыле с $\chi = 72^\circ$ при $M = 2, 2.5$ (дозвуковая передняя кромка) и $M = 4$ (сверхзвуковая передняя кромка). Получено, что на обеих моделях крыла изменение угла атаки оказывает достаточно сильное влияние на число Рейнольдса перехода. Нам не удалось выполнить измерения, рассмотренные в [13] при $M = 4$ в полном объеме. Были получены только две точки перехода по углу атаки из-за методических проблем. Поэтому потребовались дополнительные данные при $M = 3$ и 3.5 , что обеспечивало переход режима обтекания передней кромки с дозвукового на сверхзвуковой, что необходимо было для выполнения численного анализа результатов экспериментов.

С одной стороны, состояние пограничного слоя лучше интерпретировать из измерений пульсаций в пограничном слое термоанемометром. С другой стороны, измерения перехода трубкой полного напора на полированной поверхности модели практически нельзя проводить, перемещая ее вниз по потоку. Геометрия модели не плоская. Поэтому вопрос об отработке методики определения ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковом пограничном слое модели крыла большой стреловидности термоанемометром при фиксированном положении датчика. Это позволит отработать и другие методы измерения перехода в этом течении.

Очевиден интерес к экспериментальным данным о положении ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях на стреловидных крыльях, полученных в малозумных условиях. В сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН малозумные режимы реализуются при числах Маха $M = 2$ и 2.5 [14]. При больших числах Маха шум существенно снижен и реализуется стабилизация уровня фоновых возмущений при увеличении единичного числа Рейнольдса. Поэтому экспериментальные результаты могут использоваться при разработке инженерных методов предсказания положения ламинарно-турбулентного перехода.

Данная работа является продолжением исследований по влиянию малых углов атаки на положение ламинарно-турбулентного слоя на стреловидных крыльях при сверхзвуковых скоростях потока [11–13] и посвящена отработке методики определения ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковом пограничном слое термоанемометром на модели стреловидного крыла с

$\chi = 72^\circ$ при малых углах атаки. Новые данные позволили обобщить результаты по переходу, полученные в Т-325 на модели стреловидного крыла с $\chi = 72^\circ$ при малых углах атаки и впервые выполнить их сопоставление с расчетами по методу e^N .

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Эксперименты выполнены в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 Института теоретической и прикладной механики СО РАН при числе Маха $M = 3$ и 3.5 . Измерения проводились на модели скользящего крыла с 3% профилем у основания с изменяемой длиной хорды по размаху (хорда у основания – 498 и 200 мм в конце крыла). Угол скольжения передней кромки составляет 72 градуса, что при $M = 3$ соответствует случаю дозвуковой передней кромки, а при $M = 3.5$ – случаю сверхзвуковой передней кромки. Измерения проводились на верхней поверхности модели. Схема модели и область измерений приведены в работе [13].

Возмущения в потоке регистрировались термоанемометром постоянного сопротивления. Датчик термоанемометра изготавливался из вольфрамовой нити диаметром 10 мкм и длиной около 1.5–1.7 мм. Величина перегрева нити датчика устанавливалась 0.8. В этом случае измеренные возмущения соответствовали пульсациям массового расхода [15]. Измерения пульсационных и средних характеристик потока проводились автоматизированной системой сбора данных. Обработка экспериментальных данных проводилась при помощи быстрого преобразования Фурье, определялись спектры мощности по полным осциллограммам. Более подробно постановка эксперимента, автоматизированная система сбора данных, процедура обработки данных и методика определения среднеквадратичных значений пульсаций массового расхода (m') описаны в [15]. В результате измерений определялась зависимость амплитуды возмущений от числа Рейнольдса $Re_x = Re_1 \times x$. Принято связывать максимум в распределении пульсаций массового расхода с положением ламинарно-турбулентного перехода.

Для условий экспериментов на крыле с углом стреловидности передней кромки 72 градуса проведены расчеты среднего течения в сверхзвуковом пограничном слое и расчеты по линейной теории гидродинамической устойчивости (ЛТУ). Численные результаты получены для всех чисел Маха. Была реализована стандартная процедура: сначала расчет среднего течения в пакете *Ansys Fluent*, а затем расчет диаграмм по линейной теории устойчивости в рамках полной системы Лиза-Линя [16] для условий экспериментов, выполненных в аэродинамической трубе Т-325. Для расчетов среднего течения в пограничном слое на крыле построена его геометрия (по измерениям размеров реальной модели) и выполнено численное моделирование сжимаемого течения путем интегрирования полных трехмерных (3D) уравнений движения вязкого теплопроводного газа. Реализуемый подход и некоторые результаты расчетов среднего течения приведены в [17]. В рамках линейной задачи устойчивости поле потока в сжимаемом пограничном слое было представлено в виде суммы среднего движения и малого возмущения. В настоящей работе рассматривается пространственная задача устойчивости, в которой частота считается вещественной величиной, а продольное волновое число – комплексным. При проведении анализа устойчивости течения в пограничном слое скользящего крыла в локально-параллельном приближении обычно используется предположение о том, что локализованные возмущения растут по амплитуде в направлении внешнего течения x , а периодические по трансверсальному направлению возмущения нарастают по хорде s [18]. Подробно процедура расчетов описана в работе [19].

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Выполнено экспериментальное исследование влияния угла атаки на положение ламинарно-турбулентного перехода в трехмерном сверхзвуковом пограничном слое на модели стреловидного крыла с углом скольжения 72° при $M = 3$ и 3.5 . Предварительно были проведены методические испытания для отработки процедуры измерения. Получены кривые нарастания (зависимости интегральных среднеквадратичных пульсаций массового расхода от числа Рейнольдса $Re_x = Re_1 \times x$, где x – продольная координата). Измерены профили пульсаций и определены положения ламинарно-турбулентного перехода для нескольких значений угла атаки. В анализе результатов экспериментов использовались амплитудно-частотные спектры и статистические распределения пульсаций в сверхзвуковом пограничном слое на модели стреловидного крыла. Измерения положения перехода выполнялись при фиксированном положении датчика, а значение единичного числа Рейнольдса Re_1 монотонно увеличивалось до значений, при которых положение перехода можно было зафиксировать по максимуму уровня пульсаций на диаграмме, отоб-

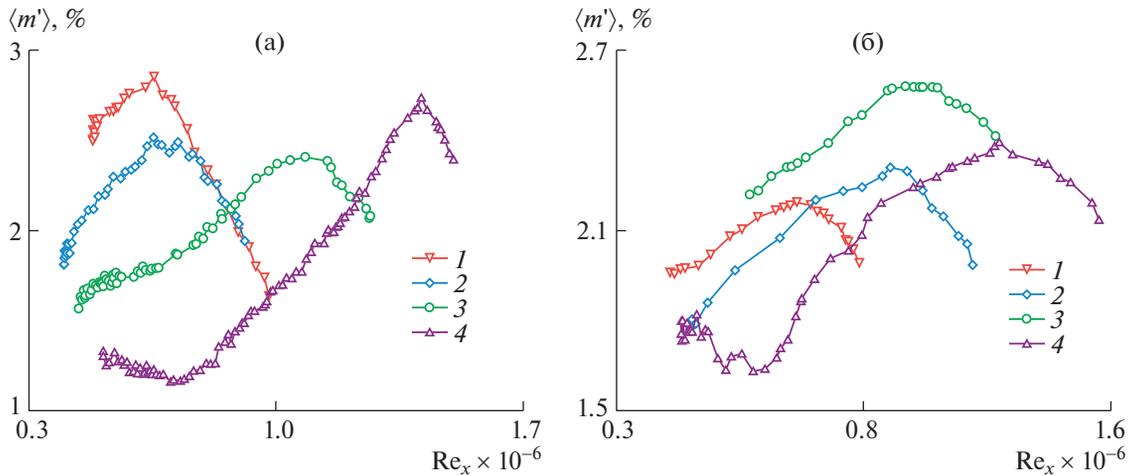


Рис. 1. Зависимости величины среднеквадратичных пульсаций массового расхода от числа Рейнольдса при $x = \text{const}$, $z = 60$ мм: (а) – $M = 3$; $\alpha = -0.75^\circ$, $x = 80$ мм – 1; $\alpha = -0.75^\circ$, $x = 70$ мм – 2; $\alpha = 0^\circ$, $x = 80$ мм – 3; $\alpha = 0.45^\circ$, $x = 80$ мм – 4, (б) – $M = 3.5$; $\alpha = -0.8^\circ$, $x = 50$ мм – 1; $\alpha = 0^\circ$, $x = 55$ мм – 2; $\alpha = 0.45^\circ$, $x = 80$ мм – 3; $\alpha = 0.45^\circ$, $x = 70$ мм – 4.

ражаемой в темпе эксперимента на экране персонального компьютера. Диаграммы нарастания возмущений получены при $z = 60$ мм для следующих значений угла атаки α и расстояний от передней кромки модели x : $M = 3$ $\alpha = -0.75^\circ$, $x = 80$ мм; $\alpha = -0.75^\circ$, $x = 70$ мм; $\alpha = 0^\circ$, $x = 80$ мм; $\alpha = 0.45^\circ$, $x = 80$ мм; $M = 3.5$ $\alpha = -0.8^\circ$, $x = 50$ мм; $\alpha = 0^\circ$, $x = 55$ мм; $\alpha = 0.45^\circ$, $x = 70$ мм; $\alpha = 0.45^\circ$, $x = 80$ мм. Результаты измерений представлены на рис. 1 для чисел Маха $M = 3$ (а) и 3.5 (б).

По данным, представленным на рис. 1, были получены числа Рейнольдса перехода Re_{tr} , соответствующие максимумам в зависимостях среднеквадратичных пульсаций от числа Рейнольдса $\langle m' \rangle (Re_x)$. На рис. 2 показаны зависимости числа Рейнольдса перехода Re_{tr} от угла атаки α на модели крыла с $\chi = 72^\circ$ при $M = 3$ и 3.5 . Кривые нарастания и зависимости $Re_{tr}(\alpha)$ для $M = 2, 2.5$ и 4 были получены в [13] и так же представлены на рис. 2. Для сравнения на этом же графике представлены результаты измерений, выполненных на модели с углом скольжения передней кромки $\chi = 45^\circ$ при $M = 2$, взятые из [12].

Результаты для модели крыла с $\chi = 45^\circ$ взяты из [12], а данные для $\chi = 72^\circ$ при $M = 2, 2.5$ и 4 из [13].

Из сравнения данных, полученных при $M = 2$ на разных моделях, видно, что ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковом пограничном слое стреловидного крыла с дозвуковой передней кромкой наступает при меньших числах Рейнольдса, чем на модели со сверхзвуковой передней кромкой. Этот результат получен при одних и тех же параметрах внешнего потока. Изменение угла атаки более интенсивно влияет на ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое скользящего крыла с дозвуковой передней кромкой, в отличие от модели крыла со сверхзвуковой передней кромкой. Например, на модели крыла с углом скольжения $\chi = 72^\circ$ при изменении угла атаки приблизительно от -1° до 0.3° происходит увеличение числа Рейнольдса перехода Re_{tr} от 0.9×10^6 до 1.8×10^6 с ростом угла атаки, а на модели с $\chi = 45^\circ$ при изменении угла атаки приблизительно от -2° до 2.5° происходит увеличение Re_{tr} от 1.4×10^6 до 2.4×10^6 с ростом угла атаки. При числах Маха $M = 2.5$ и 3 изменение угла атаки приблизительно от -1° до 0.5° приводит к увеличению числа Рейнольдса перехода от 0.7×10^6 до 1.4×10^6 с ростом угла атаки. Получена незначительная дестабилизация течения при $M = 2.5$ и ламинарно-турбулентный переход наступает раньше (приблизительно на 10–20%) по сравнению с $M = 2$. При числе $M = 3.5$ изменение угла атаки α от -0.8 до 0.45° приводит к увеличению числа Рейнольдса перехода от 0.7×10^6 до 1.0×10^6 , а при $M = 4$ изменение α от 0 до приблизительно 0.5° приводит к росту числа Re_{tr} от 0.7×10^6 до 0.8×10^6 . Уменьшение числа Рейнольдса перехода с ростом числа Маха, зафиксированное для модели крыла с углом стреловидности $\chi = 72^\circ$, хорошо согласуется с данными для модели крыла с $\chi = 45^\circ$ без угла атаки [20]. Для разных аэродинамических установок зависимости числа Рейнольдса перехода от числа Маха могут иметь различный вид, что обусловлено их

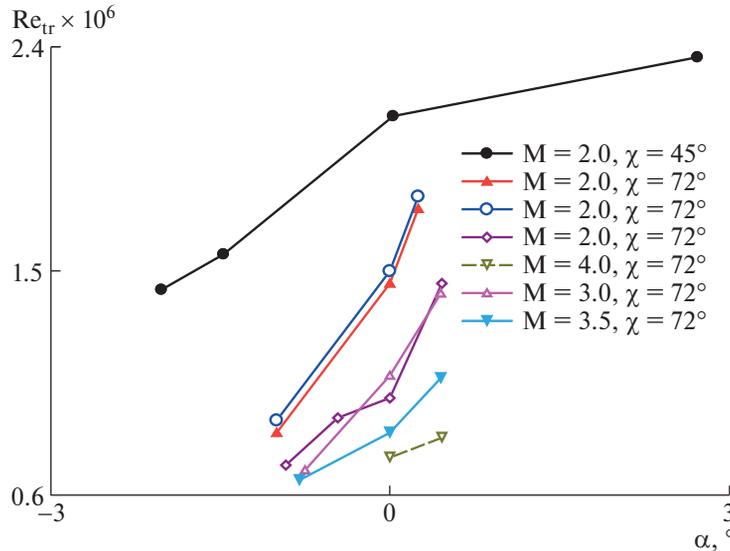


Рис. 2. Зависимости числа Рейнольдса перехода от угла атаки для различных чисел Маха.

конструктивными особенностями, к которым, как минимум, можно отнести однородность течения и уровень шума в рабочей части, а также ее размеры [21].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для условий экспериментов проводились расчеты среднего течения в сверхзвуковом пограничном слое на модели крыла, а также анализ его устойчивости в рамках линейной теории. Расчеты устойчивости пограничного слоя на модели скользящего крыла выполнялись для различных значений числа Маха $2 \leq M \leq 4$ и единичного числа Рейнольдса Re_1 при величине температуры торможения потока $T_0 = 293$ К. Учитывались углы атаки α установки модели. Параметры всех рассчитанных вариантов сведены ниже в табл. 1. В столбцах приводятся число Маха набегающего потока M , статическая температура потока, угол атаки модели α , статическое давление P , значение единичного числа Рейнольдса Re_1 , экспериментально определенное значение числа Рейнольдса перехода $Re_{tr} = Re_1 \times x_{tr}$. Максимальная скорость пространственного нарастания моды неустойчивости поперечного течения $-\alpha_{i,max} = \max_{f,\beta^*}(-\alpha_i)$ рассчитывалась для $x = 50$ мм.

Профили среднего течения в пограничном слое, полученные в результате 3D численного моделирования в *Ansys Fluent* вдоль линии симметрии расчетной области, аппроксимировались при помощи сглаживающего сплайна. Затем проводился анализ устойчивости рассматриваемого течения на основе линейной теории устойчивости (ЛТУ). Отметим, что расчетная сетка дает достаточно хорошее разрешение: на толщину пограничного слоя приходилось от 30 ($x = 10$ мм) до 140 ($x = 140$ мм) узлов сетки. В [17] приведена постановка задачи и рассчитаны профили продольной $U = U(y)$ и трансверсальной $W = W(y)$ компонент скорости среднего течения, а также профили температуры $T = T(y)$ для чисел Маха $M = 2$ и 2.5 при нулевом угле атаки. В данной работе проведены расчеты для чисел Маха $M = 2, 2.5, 3, 3.5$ и 4 и всех углов атаки, которые приведены в табл. 1. При этом использовалась модифицированная постановка процедуры расчетов в плане выбора сеток, верифицированная на известных данных и оптимизированная для сокращения расчетного времени.

В качестве примера на рис. 3 приведены кривые нарастания амплитуд возмущений наиболее быстро растущих стационарных ($f = 0$) вихрей неустойчивости поперечного течения в зависимости от $Re_x = Re_1 \times x$, рассчитанные для случая $M = 2, \chi = 72^\circ$. Аналогичные расчеты выполнены для всех вариантов из табл. 1, т.е. чисел Маха, углов атаки.

Видно, что в выбранных координатах быстрее всего нарастает амплитуда вихрей при отрицательном угле атаки (кривая *Д*), где в эксперименте именно для отрицательного угла атаки полу-

Таблица 1

№	M	T_∞ , К	ϕ°	P_∞ , Па	$Re_{l_\infty} \times 10^{-6}$ M^{-1}	$Re_{x,tr} \times 10^{-6}$	$-\alpha_{i,max}$, M^{-1}
1			-1	9240	9	0.90	104
2	2	164	0	15600	15.3	1.53	107
3			0.3	18024	17.6	1.76	121
4			-0.46	6000	10	0.91	77
5	2.5	131	0	6600	11	0.99	81
6			0.46	6600	11	1.45	82
7			-0.75			0.81	71
8	3	103	0	5400	13	1.12	76
9			0.45			1.42	80
10	3.5	86	0	2500	11	0.7	73
11			0	1420	10	0.75	62
12	4	70	0.46	1280	9	0.83	56

чено наименьшее значение числа Рейнольдса перехода Re_{tr} . В целом поведение расчетных кривых 1, 2, 3 на рис. 3 качественно согласуется с увеличением Re_{tr} при увеличении угла атаки.

На рис. 4, как пример выполненных расчетов, приведены диаграммы устойчивости пограничного слоя в виде изолиний размерных скоростей пространственного роста $-\alpha_i$ [M^{-1}], рассчитанных для значения продольной координаты (расстояния от передней кромки модели) $x = 50$ мм. Данные представлены для тех же параметров потока и углов атаки, как и на рис. 3. Указанные изолинии приведены на плоскости: безразмерное трансверсальное волновое число β – размерная частота f [кГц]: $-\alpha_i = -\alpha_i(\beta, f)$. На диаграммах приводится только область $\beta > 0$, соответствующая наиболее неустойчивым возмущениям моды поперечного течения, распространяющимся против направления вторичного течения. Видно, что при различных углах атаки α (рис. 4 а,б,в) область неустойчивости занимает диапазон частот $0 \leq f < 140$ кГц и находится в диапазоне трансверсальных волновых чисел $0 < \beta < 2$. Расчеты диаграмм устойчивости были проведены для всех вариантов в табл. 1. Все диаграммы выглядят аналогично приведенным на рис. 4. Наблюдается

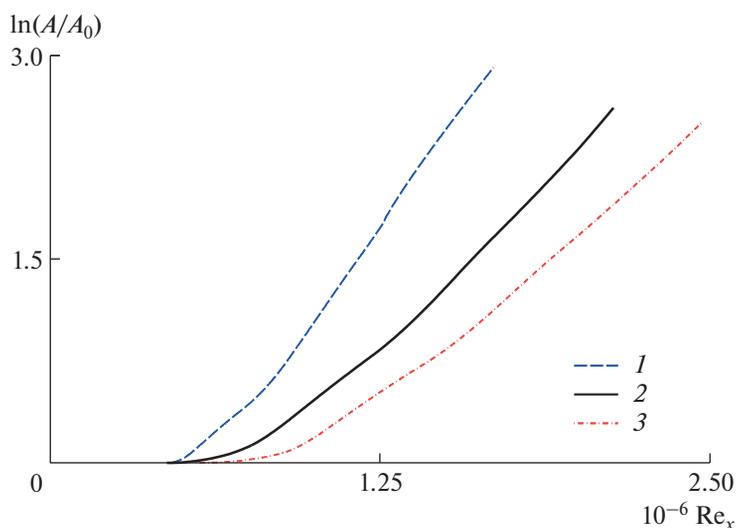


Рис. 3. Кривые нарастания амплитуд возмущений стационарных ($f = 0$) вихрей неустойчивости поперечного течения, рассчитанные по методу e^N для $M = 2$, $\chi = 72^\circ$, где: 1 – $\alpha = -1^\circ$, 2 – $\alpha = 0^\circ$, 3 – $\alpha = 0.3^\circ$.

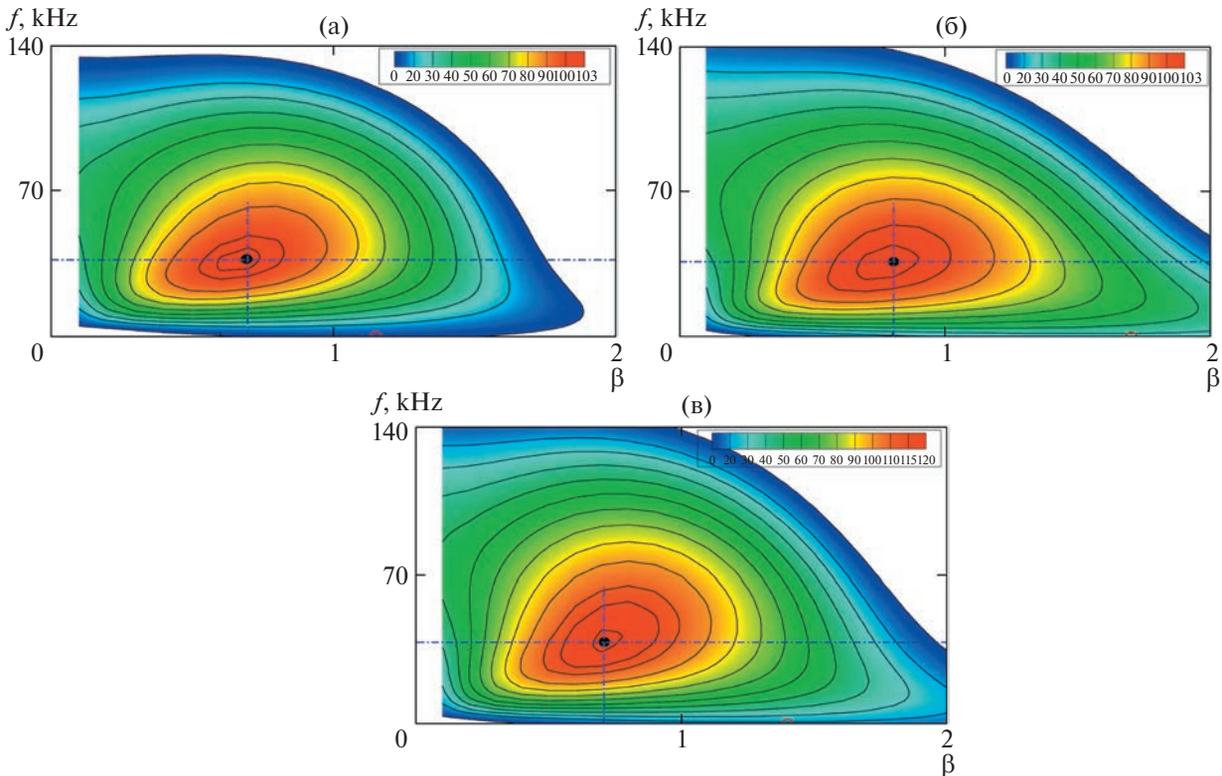


Рис. 4. Диаграммы устойчивости пограничного слоя на модели стреловидного крыла: $-\alpha_i$ [м^{-1}], рассчитанных для значения продольной координаты (расстояния от передней кромки модели) $x = 50$ мм для $M = 2$, $\chi = 72^\circ$, где: (а) $-\alpha = -1^\circ$, (б) $-\alpha = 0^\circ$, (в) $-\alpha = 0.3^\circ$.

количественное уменьшение максимальных скоростей пространственного роста возмущений при увеличении числа Маха. Их величины приводятся в табл. 1.

Положение максимума инкремента моды неустойчивости поперечного течения выделено на диаграммах рис. 4, и для случая $M = 2$, $\alpha = 0$ (рис. 4б) имеет величину $-\alpha_{i,\max} \approx 10^7 \text{ м}^{-1}$. Оно находится на частоте $f_{\max} \approx 36$ кГц и $\beta_{\max} \approx 0.8$ рад/мм. Рассмотрим увеличение угла атаки установки модели крыла от отрицательных значений к положительным (рис. 4а \rightarrow рис. 4в). Видно, что это увеличение приводит к некоторому увеличению максимальных локальных скоростей роста возмущений $-\alpha_{i,\max}$. Отметим также, что стационарные ($f = 0$) вихри неустойчивости поперечного течения, расположенные на оси абсцисс рис. 3а,б,в, имеют максимальные инкременты $-i\alpha_{i,0,\max} < 30 \text{ м}^{-1}$. Это значительно меньше, чем скорости роста $-\alpha_{i,\max}$ нестационарных ($f > 0$) мод. В таком случае можно было бы ожидать, что переход на стреловидном крыле, вызываемый неустойчивостью поперечного течения, будет определяться усилением нестационарных высокочастотных пульсаций. Сопоставим полученные в эксперименте при $M = 2$ на стреловидном крыле с углом скольжения $\chi = 72^\circ$ зависимости числа Рейнольдса перехода от угла атаки модели (рис. 2) с результатами расчетов по линейной теории устойчивости нарастания стационарных ($f = 0$) вихрей (рис. 3) и нестационарных высокочастотных пульсаций поперечного течения. Это позволяет сделать вывод, что в данном случае переход определяется усилением стационарной моды. Такое несоответствие выводов теории и эксперимента объясняется нелинейностью процессов, наблюдаемых в эксперименте. Так, в [19] теоретически изучена линейная стадия неустойчивости поперечного течения и проведено сравнение теории с экспериментами [22], выполненными при $M = 2$ на крыле с 7.8% чечевицеобразным профилем и углом скольжения передней кромки 40° . Показано, что хорошо согласуются теоретические данные с результатами экспериментов, полученными для поперечных масштабов неустойчивых вихрей вторичного течения. Однако рассчитанные инкременты нарастания возмущений приблизительно в 2 раза выше полученных в результате обработки экспериментальных данных. Это различие объясняется нелинейностью процессов, наблюдаемых в эксперименте. В работе [11] также приводятся результаты сравнения эксперимен-

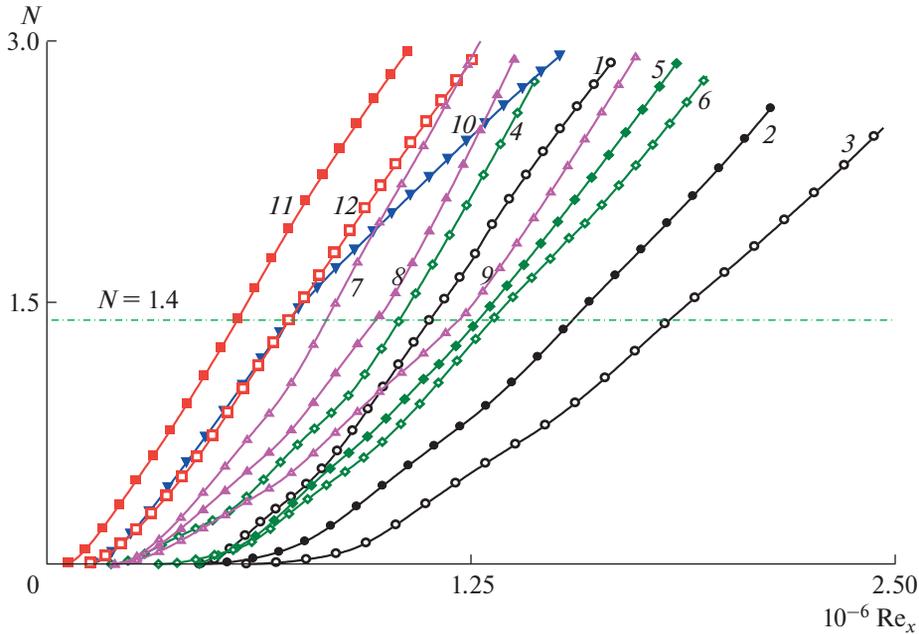


Рис. 5. Степени нарастания амплитуд возмущений стационарных ($f = 0$) вихрей неустойчивости поперечного течения, рассчитанные по методу e^N , где номер кривой соответствует номеру варианта из табл. 1.

тальных степеней нарастания с результатами расчетов для различных углов атаки. Получено хорошее согласование экспериментальных и теоретических данных для нулевого угла атаки. В то же время такого согласования для углов атаки $\pm 1^\circ$ достигнуто не было. Теоретические значения степеней нарастания приблизительно более чем в 2 раза выше экспериментальных. Отметим, что в работе [23] показано, что на модели стреловидного крыла с $\chi = 45^\circ$ при $M = 2$ и $Re_1 = 5 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$ нелинейные процессы наблюдаются при $Re_x \geq 0.6 \times 10^6$ в случае естественных возмущений. Экспериментальные данные для нулевого угла атаки получены для Re_x в диапазоне $0.3 \times 10^6 - 0.6 \times 10^6$, следовательно, для линейной области развития возмущений. А экспериментальные данные для углов атаки $\pm 1^\circ$ в области нелинейного развития ($0.6 \times 10^6 < Re_x < 1.1 \times 10^6$). Нелинейные процессы в трехмерном пограничном слое на скользящем крыле вызывают механизм вторичной неустойчивости, что и приводит к раннему переходу.

На рис. 5 приводятся рассчитанные в соответствии с методом e^N кривые нарастания амплитуд возмущений наиболее быстро растущих стационарных ($f = 0$) вихрей неустойчивости поперечного течения в зависимости от Re_x на стреловидном крыле с $\chi = 72^\circ$ для различных чисел Маха и углов атаки. Здесь кривая 1 – $M = 2$, $\alpha = -1^\circ$, 2 – $M = 2$, $\alpha = 0$, 3 – $M = 2$, $\alpha = 0.3^\circ$, 4 – $M = 2.5$, $\alpha = -0.46^\circ$, 5 – $M = 2.5$, $\alpha = 0$, 6 – $M = 2.5$, $\alpha = 0.46^\circ$, 7 – $M = 3$, $\alpha = -0.75^\circ$, 8 – $M = 3$, $\alpha = 0$, 9 – $M = 3$, $\alpha = 0.45^\circ$, 10 – $M = 3.5$, $\alpha = 0$, 11 – $M = 4$, $\alpha = 0$, 12 – $M = 4$, $\alpha = 0.46^\circ$.

Сравнение приведенных зависимостей показывает, что увеличение угла атаки от значений отрицательных к значениям положительным приводит к тому, что стационарные вихри начинают свой рост ниже по течению и растут медленнее. Увеличение числа Маха набегающего потока приводит к противоположному результату – более ранней потере устойчивости и более быстрому росту амплитуды вихрей (результаты 2, 5, 8, 10, 11 на рис. 5). Таким образом, данные, представленные на рис. 5, обобщают заключение, сделанное на основании данных, приведенных на рис. 2, 3, 4 для всех значений числа Маха, рассмотренных в рамках настоящей работы. Можно сделать вывод об определяющей роли стационарных возмущений в процессе ламинарно-турбулентного перехода на модели стреловидного крыла с углом скольжения передней кромки 72° в условиях выполненных экспериментов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены экспериментальные исследования о влиянии малых углов атаки на ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковом пограничном слое стреловидного крыла с углом скольжения передней кромки 72° . При числах Маха $M = 3$ и 3.5 представлены новые, а для чисел Маха от 2 до 4 – обобщающие результаты. Измерения проводились термоанемометром постоянного сопротивления. Разработана процедура для определения положения перехода. Изменение угла атаки оказывает сильное влияние на число Рейнольдса перехода для всех чисел Маха. Увеличение числа Маха приводило к уменьшению числа Рейнольдса перехода. Показано, что ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на крыле с дозвуковой передней кромкой более чувствителен к изменению угла атаки по сравнению со случаем обтекания модели крыла со сверхзвуковой передней кромкой. В последнем случае наблюдается корреляция результатов для моделей с $\chi = 45^\circ$ ($M = 2$) и с $\chi = 72^\circ$ ($M = 3.5, 4$). Данные по влиянию малых углов атаки на числа Рейнольдса перехода для каждого числа Маха получены при одних и тех же условиях по уровню шума в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы Т-325.

Для условий экспериментов на крыле с углом стреловидности передней кромки 72 градуса проведены расчеты среднего течения в сверхзвуковом пограничном слое и расчеты по линейной теории гидродинамической устойчивости. Впервые использован метод e^N для численной оценки чисел Рейнольдса перехода в сверхзвуковом пограничном слое стреловидного крыла с углом скольжения передней кромки 72° . Расчеты нарастания амплитуд стационарных и нестационарных мод поперечного течения в пограничном слое проводились по линейной теории устойчивости в рамках полной системы уравнений Лиза-Линя. Показано, что быстрее всего нарастает амплитуда вихрей при отрицательном угле атаки. С увеличением угла атаки степень нарастания стационарных возмущений падает. Для нулевого угла в зависимости от числа Маха получено, что стационарные моды возмущений более устойчивы при числе Маха 2, а с увеличением числа Маха степень нарастания увеличивается. Анализ этих данных и полученных в экспериментах чисел Рейнольдса перехода позволяет сделать вывод об определяющей роли стационарных возмущений в процессе ламинарно-турбулентного перехода на модели стреловидного крыла с углом скольжения передней кромки 72° в условиях выполненных экспериментов.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН и в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение от 17 мая 2022 г. № 075-15-2022-1023).

Эксперименты выполнены на базе ЦКП “Механика”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устинов М.В. Ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое (обзор) часть 1. Основные виды ламинарно-турбулентного перехода на стреловидном крыле // Уч. зап. ЦАГИ. 2013. Т. 44. № 1. С. 1–42.
2. Reed H.L., Saric W.S. Stability of three-dimensional boundary layers // Ann. Rev. FluidMech. 1989. V. 21. P. 235–284.
3. Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В. Возникновение турбулентности в пристенных течениях. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1999. 328 с.
4. Deyhle H., Bippes H. Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions // J. Fluid Mech. 1996. V. 316. P. 73–113.
5. Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Кочарин В.Л., Семенов А.Н., Семенов Н.В., Шипуль С.А., Яцких А.А. Экспериментальное исследование влияния внешних возмущений на положение ламинарно-турбулентного перехода на стреловидных крыльях при $M = 2$ // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28. № 3. С. 343–350.
6. Cattafesta L.N. III, Iyer V., Masad J.A., King R.A., Dagenhart J.R. Three-dimensional boundary-layer transition on a swept wing at Mach 3.5 // AIAA J. 1995. V. 33. № 11. P. 2032–2037.
7. Бражко В.Н., Ваганов А.В., Дудин Г.Н., Ковалева Н.А., Лунатов И.И., Скуратов А.С. Экспериментальное исследование особенностей аэродинамического нагревания треугольного крыла при больших числах Маха // Труды МФТИ. 2009. Т. 1. № 3. С. 57–66.
8. Ваганов А.В., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.В., Шалаев В.И. Экспериментальное исследование структуры течения и перехода в пограничном слое треугольного крыла с затупленными передними кромками при числах Маха 2, 2,5 и 4 // Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 3. С. 164–173.

9. *Yoshida S., Nakano K., Shiozava N.* An Experimental and Numerical Study on the Compressible laminar flow control // Special publication of national aerospace laboratory SP-31. 1996. P. 81–90.
10. *Sugiura H., Yoshida K., Tokugawa N., Takagi S., Nishizawa A.* Transition Measurements on the Natural Laminar Flow Wing at Mach 2 // *J. Aircraft.* 2002. V. 39. № 6. P. 996–1002.
11. *Semionov N.V., Yermolaev Yu.G., Kocharin V.L., Kosinov A.D., Semenov A.N., Smorodsky B.V., Yatskikh A.A.* An effect of small angle of attack on disturbances evolution in swept wing boundary layer at Mach number $M = 2$ // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 2027. № 1. P. 030156.
<https://doi.org/10.1063/1.5065250>
12. *Kosinov A.D., Semionov N.V., Yermolaev Y.G., Smorodsky B.V., Kolosov G.L., Yatskikh A.A., Semenov A.N.* The influence of moderate angle-of-attack variation on disturbances evolution and transition to turbulence in supersonic boundary layer on swept wing // *Journal of Aerospace Engineering: Part G. Proc. of the Inst. of Mech. Engineers.* 2020. V. 234. № 1. P. 96–101.
<https://doi.org/10.1177/0954410019852804>
13. *Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Кочарин В.Л., Семенов А.Н., Семенов Н.В., Шипуль С.А., Яцких А.А.* Влияние малых углов атаки на ламинарно-турбулентный переход сверхзвукового пограничного слоя на стреловидном крыле $C\chi = 72^\circ$ // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* 2022. № 1. С. 32–38.
<https://doi.org/10.31857/S0568528122010030>
14. *Kosinov A.D., Semionov N.V.* The laminar-turbulent transition experiments in supersonic boundary layers // *AIP Conf. Proc.* 2019. V. 2125. P. 030105.
<https://doi.org/10.1063/1.5117487>
15. *Kosinov A.D., Semionov N.V., Yermolaev Yu.G.* Disturbances in test section of T-325 supersonic wind tunnel. Novosibirsk, 1999. (Preprint Institute of Theoretical and Applied Mechanics; № 6–99). P. 24.
16. *Жигулев В.Н., Тумин А.М.* Возникновение турбулентности. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.
17. *Semenov A.N., Kocharin V.L., Semionov N.V.* Numerical simulation of stationary flow around a wing with a subsonic leading edge at $M = 2$ and 2.5 // *J. Physics: Conf. Ser.* 2019. V. 1404. № 1. P. 012121.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1404/1/012121>
18. *Asai M., Saitoh N., Itoh N.* Instability of compressible three-dimensional boundary layer to stationary disturbances // *Trans. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci.* 2001. V. 43. № 142. P. 190–195.
19. *Гапонов С.А., Смородский Б.В.* Линейная устойчивость трехмерных пограничных слоев // *Прикладная механика и техническая физика.* 2008. Т. 49. № 2. С. 3–14.
20. *Semionov N.V., Kosinov A.D., Yermolaev Yu.G.* Experimental study of turbulence beginning of supersonic boundary layer on swept wing at Mach numbers 2–4. // *Journal of Physics: Conf. Ser.* 2011. V. 318. № 032018. P. 1–9.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/318/3/032018>
21. *Швалев Ю.Г.* Исследования перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на моделях в аэродинамической трубе Т-116 ЦАГИ // *Труды ЦАГИ.* 2011. № 2693.
22. *Семенов Н.В., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Левченко В.Я.* Экспериментальное исследование развития возмущений в сверхзвуковом пограничном слое на модели скользящего крыла // *Теплофизика и аэромеханика.* 2003. Т. 10. № 3. С. 357–368.
23. *Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.В.* Экспериментальное исследование нелинейных процессов в пограничном слое на скользящем крыле при числе Маха = 2 // *Прикладная механика и техническая физика.* 2014. Т. 55. № 5. С. 45–54.

УДК 532.526.3

ВЛИЯНИЕ ВЫДУВА И ОТСОСА ГАЗА НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

© 2023 г. А. В. Новиков^{a,b,*}, А. О. Образ^{a,b,**}, Д. А. Тимохин^{b,***}

^aЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Московская обл., Россия

^bМосковский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: novikov.av@mipt.ru

**E-mail: obraz.ao@mipt.ru

***E-mail: timokhin.da@phystech.edu

Поступила в редакцию 21.09.2022 г.

После доработки 29.09.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Представлены результаты исследования устойчивости пограничного слоя на плоской пластине с участком выдува/отсоса газа через стенку по нормали к поверхности при большом сверхзвуковом числе Маха набегающего потока. Численное моделирование ламинарного обтекания пластины с участком распределенного выдува/отсоса фиксированной интенсивности производится с помощью интегрирования уравнений Навье–Стокса. Неустойчивые возмущения в искаженном выдувом/отсосом пограничном слое анализируются в рамках линейной теории устойчивости и метода e^N для течений сжимаемого газа. Рассмотрены высокочастотные возмущения, относящиеся к плоской второй моде пограничного слоя, наиболее неустойчивые при высоких скоростях. Показано, что выдув/отсос газа приводит к немонотонному изменению инкрементов роста возмущений с появлением областей стабилизации/дестабилизации по сравнению со случаем без выдува/отсоса.

Ключевые слова: сверхзвуковые течения, выдув, отсос, линейная теория устойчивости

DOI: 10.31857/S0568528122600588, **EDN:** NTERQJ

Одним из способов управления устойчивостью пограничного слоя является организация участков выдува/отсоса газа через проницаемую поверхность [1]. В естественных условиях (низкий фон турбулентности в набегающем потоке, отсутствие значительной шероховатости) в плоском дозвуковом пограничном слое доминирующим типом неустойчивостей являются волны Толлмина–Шлихтинга. Известно, что нарастание возмущений данного типа неустойчивостей в пограничном слое эффективно подавляется при помощи отсоса пограничного слоя [2]. Оказывается, что при достаточной интенсивности отсоса можно полностью подавить развитие возмущений типа волн Толлмина–Шлихтинга. При сверхзвуковых скоростях набегающего потока возможно появление новых неустойчивых мод пограничного слоя. Например, для течений с $M > 4$ появляется так называемая вторая мода возмущений (волны Мэка) [3]. С увеличением числа Маха набегающего потока возмущения второй моды могут становиться доминирующим типом неустойчивости пограничного слоя и вызывать ламинарно-турбулентный переход. Возмущения второй моды имеют акустическую природу (иногда такие возмущения называют “запертой акустической волной”). В отличие от возмущений первой моды, которые являются аналогом волн Толлмина–Шлихтинга при сверхзвуковых скоростях течения и связаны с обобщенной точкой перегиба внутри пограничного слоя, волны Мэка не зависят от обобщенной точки перегиба. Кроме того, акустическая природа возмущений второй моды приводит к значительно большей чувствительности инкрементов роста к изменению толщины пограничного слоя.

В настоящее время достаточно подробно изучено влияние таких факторов, как температура стенки, продольный градиент давления, выдув/отсос пограничного слоя на локальные характеристики волн неустойчивостей в сверхзвуковых пограничных слоях. Обзор данных эффектов представлен в работе [4]. Так, охлаждение стенки приводит к стабилизации возмущений первой

моды и дестабилизации возмущений второй моды. Благоприятный ($dp/dx < 0$) градиент давления оказывает стабилизирующее влияние для всех типов возмущения. Отсос пограничного слоя также приводит к уменьшению инкрементов роста.

В работах [5, 6] исследовалось влияние отсоса пограничного слоя на характеристики неустойчивых волн в сверхзвуковых пограничных слоях. Расчеты производились в фиксированной точке (при заданном числе Рейнольдса) и исследовалось влияние отсоса на широкий диапазон частот неустойчивостей. Однако физическое усиление возмущений в пограничном слое имеет интегральный характер, и необходимо оценивать влияние указанных факторов на всем протяжении области неустойчивости для рассматриваемых возмущений. При этом сама область интегрального усиления (кривая нейтральной устойчивости) также может изменяться. В работе [7] при числе Маха $M = 1.8$ численно исследовалась устойчивость пограничного слоя на пластине с небольшим притуплением передней кромки при помощи линейной теории устойчивости и прямого численного моделирования. Производились расчеты при помощи e^N метода. Полученные распределения огибающих N -факторов свидетельствовали о возможном немономонном влиянии распределенного отсоса на огибающие кривых усиления.

В данной работе проводятся исследования устойчивости для сверхзвукового обтекания плоской пластины при числе Маха $M_\infty = 6.0$ с участком выдува/отсоса различных интенсивностей. В рамках линейной теории устойчивости и метода e^N произведены расчеты инкрементов роста неустойчивых волн второй моды (волн Мэка), а также интегральное усиление возмущений в зависимости от интенсивности отсоса. Показано, что наличие участка выдува/отсоса газа приводит к немономонному изменению огибающих кривых усиления неустойчивых мод. В частности, существуют режимы выдува газа, приводящие к стабилизации пограничного слоя, что может использоваться для ламинаризации обтекания.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Моделирование ламинарного течения около пластины выполняется путем решения уравнений Навье–Стокса для идеального сжимаемого газа. В настоящей работе рассматривается плоская пластина под нулевыми углами атаки и скольжения. Применяется двумерная формулировка уравнений в консервативной безразмерной форме. Координаты нормируются на характерную длину L^* ; зависимые переменные $\{u, v, T\}$ – на соответствующие значения в набегающем потоке $\{U_\infty^*, T_\infty^*\}$, а давление p – на удвоенный скоростной напор $\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$. Здесь и далее верхний индекс * означает размерные величины.

Уравнения Навье–Стокса интегрируются с помощью авторского пакета расчетных программ [8], который реализует неявный метод конечного объема сквозного счета с аппроксимацией второго порядка по пространству и времени. Используется TVD-схема с приближенным решателем задачи распада разрыва методом Роу. Реконструкция зависимых переменных на границах ячеек сетки выполняется с использованием подхода WENO3, который эффективно дает аппроксимацию по пространству конвективных слагаемых третьего порядка.

Характеристики устойчивости пограничного слоя исследуются в рамках линейной теории устойчивости и e^N метода с использованием авторского кода [9]. Рассматривается усиление неустойчивых волн второй моды (моды Мэка), распространяющихся в пограничном слое, полученном при решении уравнений Навье–Стокса. В рамках локально-параллельного приближения рассматриваются возмущения газодинамических величин вида $q(y) \exp(i\alpha x + i\beta z - i\omega t)$. Здесь $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ – комплексное волновое число, получающееся в результате численного интегрирования однородной краевой задачи на собственные значения; $\alpha(\omega, x)$ зависит от круговой частоты волны ω и продольной координаты x как от параметра. В настоящей работе изучаются только плоские волны второй моды Мэка с поперечным волновым числом $\beta = 0$, которые доминируют (имеют наибольшее интегральное усиление) над другими типами неустойчивых мод на рассматриваемом режиме течения [10]. Если $\alpha_i < 0$, то амплитуда волны растет вниз по потоку с инкрементом $\sigma(\omega, x) = -\alpha_i$, а ее интегральное усиление характеризуется N -фактором $N(\omega; x) =$

$= \int_{x_0(\omega)}^x \sigma(\omega, x) dx$, где x_0 – точка потери устойчивости, лежащая на нижней ветви нейтральной кривой.

Выдув/отсос пограничного слоя через стенку моделируется на конечном участке, а интенсивность задается коэффициентом отсоса $c_q(x) = \rho_w v_w \sqrt{2\text{Re}_{\infty,x}}$, где $\text{Re}_{\infty,x} = x\text{Re}_{\infty,L}$. В данной работе в качестве масштаба длины используется величина $L = 1$ м (в этом случае размерная длина пластины и длина расчетной области также равны 1 м). Положительные значения коэффициента c_q соответствуют выдуву газа по нормали от стенки внутрь пограничного слоя, отрицательные значения соответствуют отсосу газа из пограничного слоя внутрь стенки. Выдув/отсос газа задается в области $x_{s1} \leq x \leq x_{s2}$, $x_{s1} = 0.26$, $x_{s2} = 0.8$, что соответствует положению профилированного участка на модели волнообразной пластины в экспериментах [10] (параметры течения в данной работе согласуются с условиями в аэродинамической трубе [10], так как в будущем планируется произвести эксперименты, подтверждающие результаты расчетов настоящей работы). Выход на постоянное значение коэффициента c_q происходит плавно в достаточно узких областях $0.26 \leq x \leq 0.3$ и $0.76 \leq x \leq 0.8$ по формуле $c_q = c_q^{\max} \cos(\pi|x - x_0|/D)$, где $D = 0.04$ – протяженность переходных областей, $x_0 = \{0.26; 0.76\}$. Расчеты производятся для случаев постоянного коэффициента отсоса $c_q = \text{const} = \{0.0, \pm 0.4, \pm 0.8\}$. Отметим, что фиксированное значение c_q сохраняет автоточность профилей среднего течения [10]. В данной работе производились расчеты для чисел Рейнольдса по длине пластины $\text{Re} = 2.1 \times 10^7$. Для выбранного режима течения реализуются характерные N -факторы $N \approx 10$, что соответствует критическим значениям для начала ламинарно-турбулентного перехода в естественных условиях полета в атмосфере [4].

Рассматривается сверхзвуковое обтекание острой плоской пластины под нулевыми углами атаки и скольжения при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 6$, показателе адиабаты $\gamma = 1.4$, постоянном числе Прандтля $\text{Pr} = 0.72$ и статической температуре набегающего потока $T_\infty^* = 43.14$ К. Поверхность пластины изотермическая с температурой $T_w^* = 293$ К ($T_w = 6.79$). Эти параметры потока относятся к экспериментам по исследованию устойчивости пограничного слоя над волнообразной пластиной [10] в аэродинамической трубе Транзит-М ИТПМ СО РАН.

Расчетная область представляет собой прямоугольник размерами $[0, 1] \times [0, 0.21]$ с ортогональной структурированной многоблочной сеткой из 3001×401 узлов в направлении вдоль пластины и по нормали к стенке. При этом в срединном сечении пластины на пограничный слой приходится около 240 узлов, по вертикали в пограничном слое шаг сетки является равномерным. Данная сетка является достаточно подробной и будет использоваться в дальнейшем для расчетов развития возмущений методом прямого численного моделирования. Отметим, что сходимость по сетке ламинарного поля течения достигается при значительно меньших сеточных разрешениях (максимальная разность в профиле скорости на сетках 400×300 и 800×400 узлов не превосходит 0.1%). Граничные условия задаются следующие: условие прилипания – на обтекаемой поверхности вне области выдува/отсоса; условие набегающего потока – на входной и верхней границах; линейная экстраполяция изнутри области для зависимых переменных – на выходной границе; в области выдува/отсоса на стенке граничное условие для вертикальной компоненты скорости модифицируется при помощи задания массового потока газа $[\rho v]_w(x) = c_q / \sqrt{2\text{Re}_{\infty,x}}$.

Исследование проводится в два этапа. Сначала с помощью метода установления вычисляется поле стационарного ламинарного обтекания пластины для различных интенсивностей выдува/отсоса. Затем из полученного двумерного стационарного поля извлекаются профили пограничного слоя в различных сечениях по x и решается задача линейной теории устойчивости. В результате для наиболее неустойчивых волн рассчитываются распределения инкрементов роста $\sigma(x)$ и коэффициенты интегрального усиления (N -факторы).

РАСЧЕТ ЛАМИНАРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕЧЕНИЯ

Результаты моделирования стационарного обтекания пластины в рамках уравнений Навье–Стокса при различных интенсивностях отсоса показаны на рис. 1. Представлены поля продольной скорости u в пристенной области, причем для наглядности вертикальная координата y растянута в 10 раз, а начало и конец участка отсоса отмечены пунктирными линиями. Также показаны профили скорости u и статической температуры T в среднем сечении при $x = 0.5$. Видно, что выдув/отсос газа достаточно сильно изменяет толщину пограничного слоя, но при этом форма профилей остается подобной случаю без отсоса.

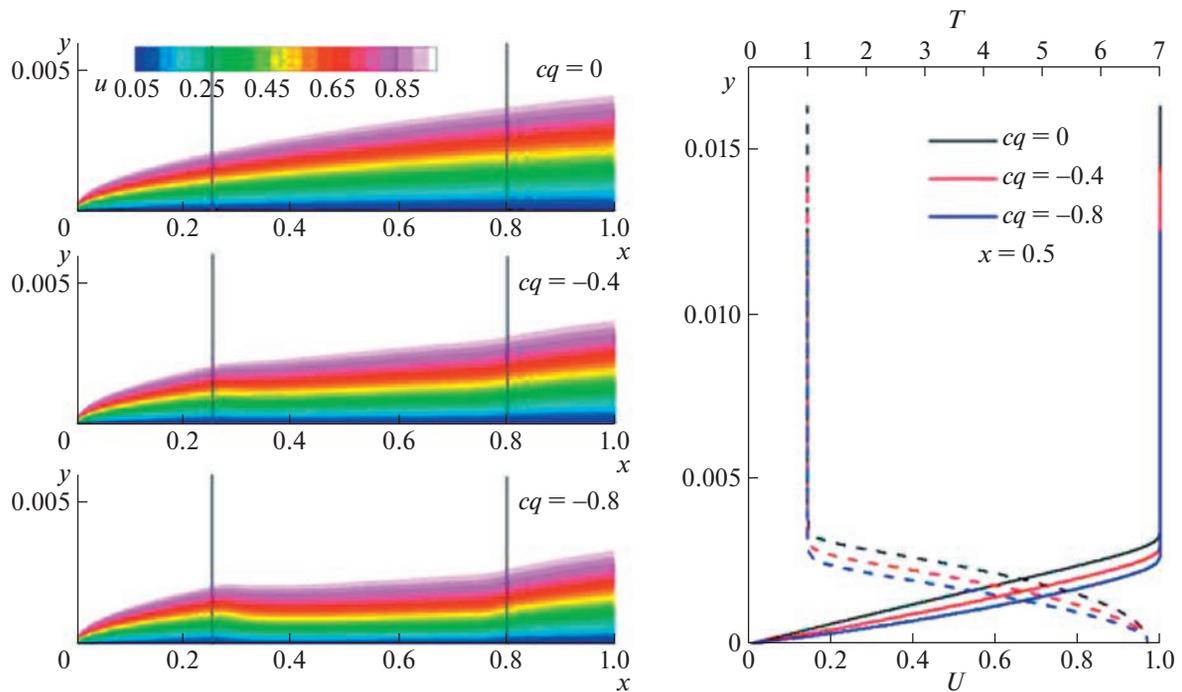


Рис. 1. Поля продольной скорости u (слева) и профили пограничного слоя в сечении $x = 0.5$ (справа) при различных интенсивностях отсоса.

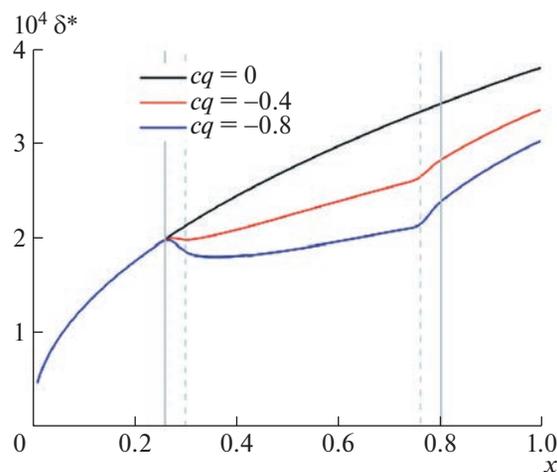


Рис. 2. Толщина вытеснения для случаев $c_q = \{0.0, -0.4, -0.8\}$.

РАСЧЕТЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОТСОСА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Производились расчеты ламинарного обтекания пластины с участком отсоса пограничного слоя интенсивностью $c_q = \{0.0; -0.4; -0.8\}$. На рис. 2 представлено влияние отсоса газа на толщину вытеснения пограничного слоя.

На основе профилей пограничного слоя вычисляется нейтральная кривая устойчивости — в каждом сечении по x определяется диапазон частот наиболее неустойчивых волн. Для различных фиксированных частот ω из этого диапазона при каждом x вычисляются инкременты роста волн $\sigma(\omega, x)$, а затем интегральные усиления $N(\omega, x)$. Пример получаемых кривых для волны с частотой $\nu^* = \frac{\omega^*}{2\pi} = 110$ кГц показан на рис. 3. Видно, что вблизи начала участка отсоса инкре-

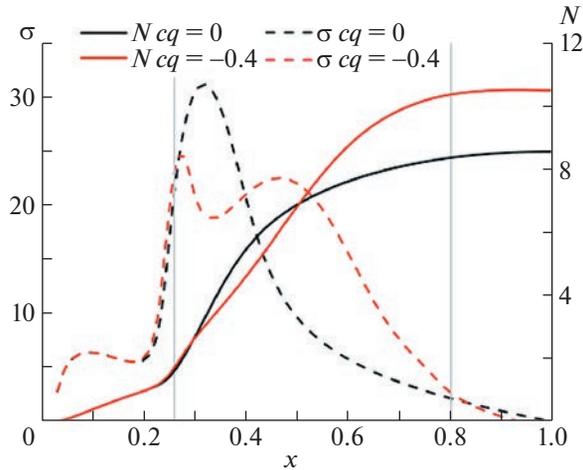


Рис. 3. Распределение инкрементов роста σ и интегрального усиления (N-фактора) неустойчивой волны второй моды с частотой $\omega = 296.8$ при распространении над пластиной без отсоса ($c_q = 0.0$) и над участком с коэффициентом отсоса $c_q = -0.4$. Вертикальные линии отмечают начало и конец участка с отсосом.

мент $\sigma(\omega_1; x)$ резко падает по сравнению со случаем без отсоса (рис. 3, пунктирные линии), т.е. локально проявляется известный эффект стабилизации пограничного слоя. Однако инкремент остается положительным $\sigma_{c_q} > 0$, и над участком отсоса рост волны продолжается, причем по сравнению с пластиной без отсоса область нарастания оказывается более протяженной.

Такое поведение инкремента роста $\sigma_{c_q}(\omega_1; x)$ волны фиксированной частоты объясняется изменением толщины $\delta(x)$ пограничного слоя над участком отсоса. Известно, что наиболее неустойчивая волна второй моды имеет длину волны $\lambda_*(x) \approx 2\delta(x)$. Ее частота — $\omega_* = 2\pi u_c / \lambda_* \approx \pi u_e / \delta$, где $u_c \approx 0.9u_e$ — типичная фазовая скорость возмущений второй моды. Она связана со скоростью на границе пограничного слоя u_e . Тогда, если зафиксировать частоту волны ω_1 , то при некоторой толщине пограничного слоя δ_* будет наблюдаться максимальный инкремент σ_* , а при отстройке толщины $\delta \neq \delta_*$ инкремент будет падать. В случае отсоса пограничного слоя через стенку скорость u_e практически не меняется. При этом происходит существенное изменение толщины $\delta_{c_q} < \delta_{c_q=0}$ (см. профили на рис. 1), поэтому у волны фиксированной частоты ω_1 отстраивается инкремент роста $\sigma_{c_q}(\omega_1; x) \neq \sigma_{c_q=0}(\omega_1; x)$. Из рис. 3 видно, что в положениях по x в окрестности верхней ветви кривой нейтральной устойчивости возможно $\sigma_{c_q}(\omega_1) > \sigma_{c_q=0}(\omega_1; x)$ в зависимости от соотношения λ_1 и $2\delta_{c_q}(x)$.

Таким образом, для волны фиксированной частоты имеются два разнонаправленных влияния отсоса газа из пограничного слоя на интегральное усиление: с одной стороны, уменьшение инкрементов роста в окрестности максимума, с другой стороны, расширение области неустойчивости за счет подстройки частоты возмущения под изменившуюся толщину пограничного слоя.

Семейство кривых интегрального усиления для всех рассмотренных частот неустойчивых волн второй моды показано на рис. 4 (для случая максимальной интенсивности отсоса представлены также кривые усиления для волн фиксированной частоты). Видно, что в области действия отсоса происходит смещение огибающей N-факторов в сторону больших значений, а эффект стабилизации наблюдается в области $x > 1$. При этом, если выбрать в качестве критерия начала ламинарно-турбулентного перехода $N_{cr} = 10$, можно ожидать смещение положения перехода от $x_{tr} = 0.9$ для случая без отсоса до $x_{tr} = 0.52$ для отсоса максимальной интенсивности. Данный результат можно назвать аномальным с той точки зрения, что до настоящего времени принято было считать, опираясь в основном на данные для дозвуковых пограничных слоев, что отсос пограничного газа приводит к равномерной стабилизации.

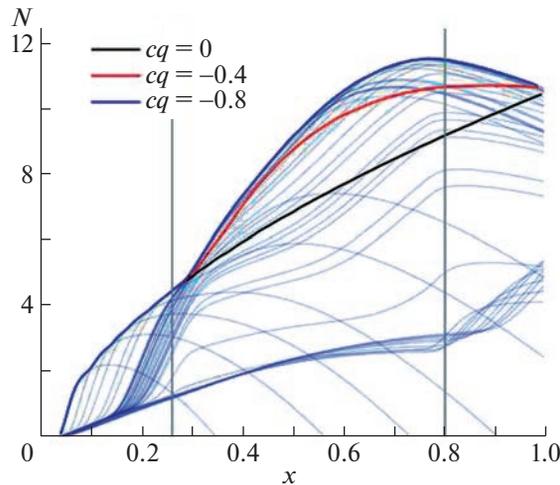


Рис. 4. Кривые интегрального усиления (N -факторы) для всех рассмотренных неустойчивых волн над пластиной с отсосом различных интенсивностей $c_q = 0.0, 0.4, 0.8$. Вертикальные линии отмечают начало и конец участка отсоса.

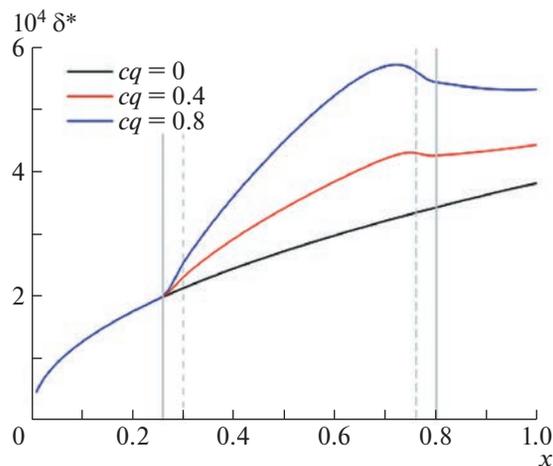


Рис. 5. Толщина вытеснения для случаев $c_q = \{0.0, 0.4, 0.8\}$.

РАСЧЕТЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЫДУВА ГАЗА В ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Производились расчеты ламинарного обтекания пластины с участком отсоса пограничного слоя интенсивностью $c_q = \{0.0; 0.4; 0.8\}$. На рис. 5 представлено влияние выдува газа на толщину вытеснения пограничного слоя.

Основной физической механизм изменения инкрементов роста волн неустойчивостей пограничного слоя при наличии выдува в пограничный слой аналогичен рассмотренному выше механизму подстройки неустойчивых возмущений под изменяющуюся толщину пограничного слоя. Данный факт более подробно иллюстрирует рис. 6, на котором представлено сравнение инкрементов роста возмущения фиксированной частоты $\nu^* = 115$ кГц для случая без выдува и с выдувом интенсивностью $c_q = 0.4$. Видно, что для относительно высокочастотных возмущений из-за увеличения толщины пограничного слоя происходит сужение области усиления, хотя и наблюдается некоторое увеличение максимума инкрементов роста. В итоге для высокочастотной части спектра неустойчивых возмущений наблюдается стабилизация пограничного слоя, тогда как для низкочастотной части спектра происходит дестабилизация пограничного слоя в области вниз по потоку от точки окончания действия выдува газа в пограничный слой.

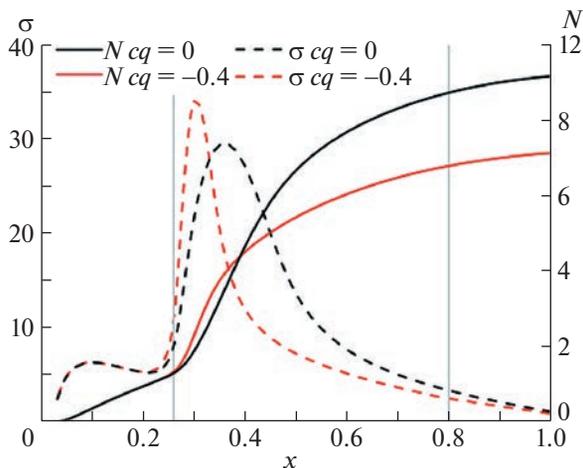


Рис. 6. Распределение инкрементов роста σ и интегрального усиления (N -фактора) неустойчивой волны второй моды с частотой $\nu^* = 115$ кГц при распространении над пластиной без отсоса ($c_q = 0.0$) и над участком с коэффициентом выдува $c_q = 0.4$. Вертикальные линии отмечают начало и конец участка с выдувом.

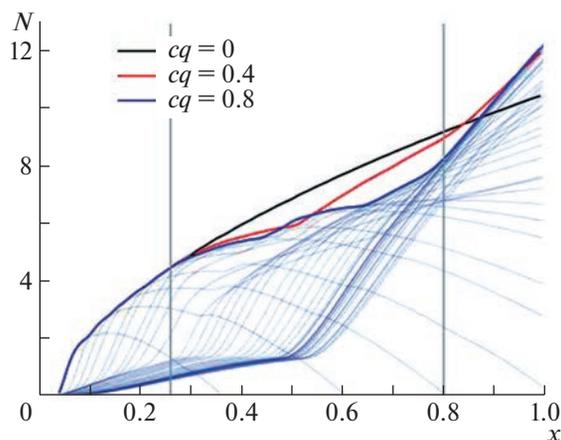


Рис. 7. Кривые интегрального усиления (N -факторы) для всех рассмотренных неустойчивых волн над пластиной с выдувом различных интенсивностей $c_q = 0.0, 0.4, 0.8$. Вертикальные линии отмечают начало и конец участка выдува.

Данный эффект иллюстрирует рис. 7, где представлены огибающие N -факторов для всех рассмотренных случаев выдува (для случая максимальной интенсивности выдува также представлены кривые усиления для фиксированных частот возмущений). Видно, что в области действия выдува огибающие N -факторов уменьшаются по сравнению со случаем без выдува, но вниз по потоку от точки окончания действия выдува наблюдается достаточно интенсивная дестабилизация пограничного слоя. Интересно отметить, что при выборе критического значения N -фактора $N_{cr} = 10$, точка начала ламинарно-турбулентного перехода практически не изменяется по мере увеличения интенсивности выдува. Для меньших значений N -фактора наблюдается затягивание ламинарно-турбулентного перехода по мере увеличения интенсивности выдува, что может быть использовано для практических приложений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнены исследования устойчивости пограничного слоя над плоской пластиной с участком выдува/отсоса газа через стенку при обтекании сверхзвуковым потоком $M_\infty = 6$. В рамках локально-параллельного приближения линейной теории устойчивости и e^N метода рассчитаны

инкременты нарастания и интегральные усиления плоских волн различных частот, относящихся ко второй моде Мэка пограничного слоя, которая является доминирующим типом неустойчивости на рассматриваемом режиме.

Показано, что неустойчивости над участком отсоса в широком диапазоне частот усиливаются слабее, чем в случае без отсоса, что распространяет известный эффект стабилизации пограничного слоя с помощью системы отсоса на случай высоких скоростей. Однако для высокочастотной части спектра неустойчивых возмущений отсос пограничного слоя приводит к увеличению области усиления и интегральных факторов роста. Этот аномальный эффект необходимо учитывать при разработке активных систем управления ламинарно-турбулентным переходом для достаточно больших сверхзвуковых скоростей. Для выдува газа в пограничный слой наблюдается обратный эффект – в области действия выдува реализуется стабилизация пограничного слоя, однако вниз по потоку от точки окончания действия выдува наблюдается дестабилизация. В частности, оказывается возможным при помощи выдува газа затягивать положение ламинарно-турбулентного перехода при правильном подборе распределенного выдува. Данный факт может быть полезен при разработке высокоскоростных летательных аппаратов, где выдув газа в пограничный слой реализовать проще, чем отсос горячего газа из пограничного слоя. В данной работе выдуваемый газ имел ту же температуру, что и локальная температура газа. С практической точки зрения представляет интерес расчеты влияния выдува относительно холодного газа в пограничный слой на характеристики устойчивости. Это составляет предмет дальнейших исследований в данной области.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00470).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Joslin R.D.* Overview of Laminar Flow Control // NASA Technical Paper NASA/TP-1998-208705. 1998.
2. *Mack L.M.* On the Inviscid Acoustic-Mode Instability of Supersonic Shear Flows. Part I: Two-Dimensional Waves // AIAA J. V. 27. № 11. November 1989. P. 1487–1493.
3. *Mack L.M.* Boundary-Layer Stability Theory // Special Course on Stability and Transition of laminar Flow/ Ed by R. Michel, AGARD Report. 1984. № 709. P. 3-1 to 3-81.
4. *Kimmel R.L.* Aspects of Hypersonic Boundary-Layer Transition Control // 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 6-9 January 2003, Reno, Nevada, AIAA Paper № 2003-772.
5. *Malik M.R.* Prediction and Control of Transition in Supersonic and Hypersonic Boundary layers // AIAA J. V. 27. № 11. November 1989. P. 1487–1493.
6. *Al-Maaitah A.A., Nayfeh A.H., Masad J.A.* Effect of Suction on the Stability of Supersonic Boundary Layers. Part I – Second-Mode Waves // Journal of Fluids Engineering Dec. 1991. V. 113(4). P. 591–597. <https://doi.org/10.1115/1.2926520>
7. *Balakumar P.* Control of Supersonic Boundary Layers Using Steady Suction // 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Conference Paper 20060022120.
8. *Егоров И.В., Новиков А.В., Фёдоров А.В.* Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях потока на супер-ЭВМ // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 8. С. 1347–1373. <https://doi.org/10.7868/S0044466917080063>
9. *Образ А.О., Фёдоров А.В.* Пакет программ HSFS для анализа устойчивости сжимаемых пограничных слоев. // Уч. зап. ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII. № 3. С. 11–28. <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2017022797>
10. *Bountin D., Chimitov T., Maslov A., Novikov A., Egorov I., Fedorov A., Utyuzhnikov S.* Stabilization of a hypersonic boundary layer using a wavy surface // AIAA J. 2013. V. 51. № 5. P. 1203–1210. <https://doi.org/10.2514/1.J052044>
11. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 703 с.

УДК 532.529

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ФОРСУНКИ С ГАЗОЖИДКОСТНЫМ ДВУХФАЗНЫМ ПОТОКОМ

© 2023 г. П. В. Зотикова^{а,*}, Н. А. Кучеров^{а,**}, И. А. Лепешинский^{а,***},
В. А. Решетников^{а,****}

^аМосковский авиационный институт Национальный исследовательский университет (МАИ),
Москва, Россия

*E-mail: chekmenevapolina024@gmail.com

**E-mail: n.kutcherov@bk.ru

***E-mail: igorlepeh@yandex.ru

****E-mail: vresh0352@mail.ru

Поступила в редакцию 31.10.2022 г.

После доработки 16.12.2022 г.

Принята к публикации 16.12.2022 г.

Рассматривается возможность решения обратной задачи расчета газожидкостной струйной форсунки с пузырьковой структурой двухфазного потока. Находятся параметры, определяющие работу форсунки (перепад давления, диаметр отверстия и концентрация воздуха), для заданного значения среднего диаметра Заутера. Для этого было проведено экспериментальное исследование работы смесителя с двухфазным рабочим телом с форсунками различного диаметра на пузырьковом режиме работы с водо-воздушным рабочим телом. В процессе эксперимента измерялись параметры подводимых к смесителю фаз (расходы, давления и температуры), а также давление перед форсунками. Дисперсные и скоростные характеристики в факеле распыла измерялись лазерным теневым методом. На основе собранной статистики была получена искомая корреляционная зависимость, позволившая решать данную задачу.

Ключевые слова: двухфазный газожидкостный поток, пузырьковая структура, форсунка, капли, дисперсность, диспергирование

DOI: 10.31857/S1024708422600877, EDN: TMQHO0

Существует множество устройств, работающих на двухфазном рабочем теле, таких как, например, распыляющие устройства форсажных и основных камер сгорания реактивных двигателей, сопла реактивного и ракетного двигателя, эжекторные устройства, установки для полива и орошения в сельском хозяйстве, установки для тушения пожара. Поэтому для повышения эффективности данных устройств и упрощения проектирования проведение исследований в этой области является актуальным. Следует отметить, что решение обратной задачи для рассматриваемых систем диспергирования в такой постановке не рассматривалось. В данной работе рассматриваются форсунки с газок капельной структурой потока, в котором объемная концентрация газа существенно ниже 0.5. Если ввести критерии подобия двухфазного потока $\Pi_1 = G_f/G_g$, $\Pi_2 = w_f/w_g$, $\Pi_5 = \rho_f/\rho_g$, тогда выражение, определяющее структуру двухфазного потока, примет вид $\alpha_g = \Pi_5 \Pi_2 / (\Pi_1 + \Pi_5 \Pi_2)$, где α_g – объемная концентрация газа. Добавляем уравнение плотности газа $\rho_g = p/RT$, при $p = 10$ атм. Наибольшее значение α_g в экспериментах не превышает значения 0.4, т.е. является пузырьковым режимом.

В настоящий момент процесс проектирования таких устройств (решение прямой задачи) требует проведения дополнительных экспериментальных исследований. Это обусловлено сложной физикой протекающих при данном режиме диспергирования двухфазного потока процессах. Несмотря на то что в последние годы увеличилось количество научных публикаций на эту тему, до сих пор нет работ, которые позволили бы обобщить достижения в этой области [1]. В данной работе рассматривается смеситель, формирующий двухфазный газожидкостный поток необходимой пузырьковой структуры, имеющий конструкцию, представленную на рис. 1.

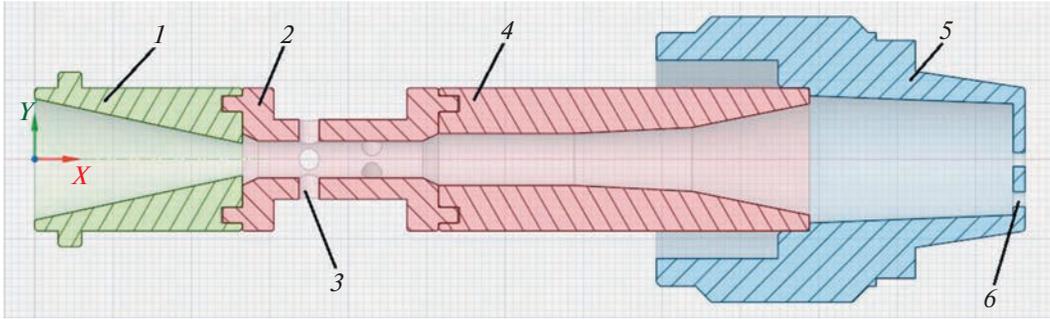


Рис. 1. Смеситель.

Смеситель состоит из следующих элементов: входного конфузора 1, аэратора 2, диффузора 4, соединенного с испытываемой форсункой 5, снабженной необходимыми отверстиями 6 для диспергирования двухфазного потока.

Диффузор обеспечивает снижение давления воды до необходимого значения, а в случае, если давление в аэраторе меньше атмосферного, смеситель работает на режиме эжекции. Аэратор производит аэрацию воды воздухом, подаваемым или эжектируемым через отверстия 3. Диффузор увеличивает давление газожидкостной смеси до значения, необходимого на входе в форсунку, производящую распыл смеси через отверстия 6.

Исследование проводилось на установке, содержащей все необходимые устройства для формирования исходного двухфазного рабочего тела с подходящими структурой и параметрами, позволяющей их регулировать на стадиях формирования и диспергирования. Ранее на данной установке проводились аналогичные исследования [2–4].

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Исследование факела распыла проводилось теневым методом, входящим в программный комплекс LaVision [5]. Принцип работы данного метода следующий: поток частиц просвечивается мощным лазером. Его свет проходит через рассеиватель, приобретает равномерную структуру, и освещает частицы. Тень от частиц попадает на кросскорреляционную камеру через дистанционный микроскоп. С камеры изображение попадает в ПК, где в программном пакете DaVis происходит его анализ, идентификация капель и вычисление их размера.

Экспериментальное исследование проводилось в заданных диапазонах для определяющих параметров. Диапазоны следующие: перепад давления перед форсунками ΔP – 1–12 атм, массовая концентрация воздуха $G_g/G_f = 1/\Pi_1 - 0 - 0.004$ (G_g – расход воздуха, G_f – расход воды). Использовались форсунки, имеющие выходные отверстия постоянного диаметра: 2, 2.5, 3 мм, но разное число отверстий, от 6 до 9, на одну форсунку.

Исследование потока теневым методом производилось в области перехода от первичного распада к вторичному. Дробление жидкой фазы имеет две зоны формирования капельной структуры: первая зона, примыкающая к выходному сечению форсунки, формирует капли, соответствующие распылу однофазной жидкости при параметрах перед форсункой, вторая зона расположена на расстоянии от 20 до 100 калибров диаметра отверстий. Поскольку скорость газа, вытекающего из форсунки, существенно больше скорости жидкости (при одинаковом давлении перед форсункой), то реализуется вторичное дробление капель. Пример получаемого распределения приведен на рис. 2, в виде зависимости от числа капель, относящихся к данному диапазону размеров (фракции капель).

@форсунки с диаметром отверстий 2 мм, при $G_f = 0.414$ кг/с, $G_g = 0.7$ г/с, $\Delta P = 2$ атм.

Далее для каждого распределения был найден средний диаметр Заутера и построены его зависимости от основных параметров форсунки, показанные на рис. 3, 4. Для качественной оценки и сравнения результатов работы форсунок на графиках использовалась линейная аппроксимация.

Используя полученную статистику, представим корреляционное уравнение в виде

$$d_{32} = f\left(\Delta P, d, \frac{G_g}{G_f}\right) \quad (1)$$

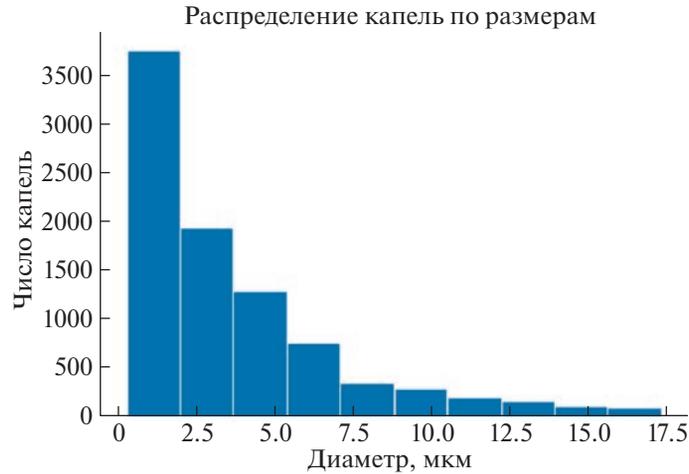


Рис. 2. Дифференциальное распределение диаметров капель по размерам.

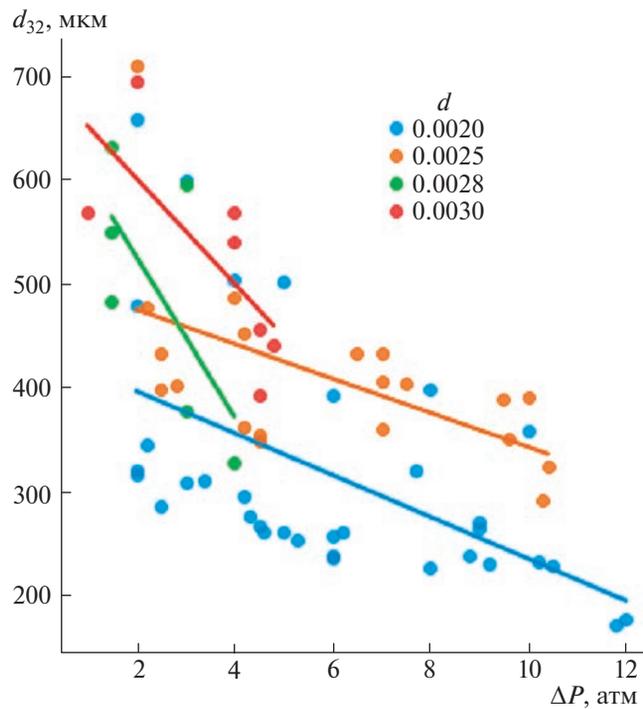


Рис. 3. Зависимость диаметра Заутера от давления перед форсунками, диаметры отверстий которых указаны в легенде d , м.

В качестве основы корреляционного уравнения воспользуемся уравнением, полученным в работе [6], в результате 3-х мерного численного моделирования распыла двухфазного потока пузырьковой структуры

$$d_{32(y \rightarrow 0)} = 0.000505 \left(\frac{1}{0.12} \cdot \frac{Gg}{G_f} \right)^{-0.4686} \left(\frac{\Delta P}{5 \times 10^6} \right)^{-0.1805} \left(\frac{d}{0.2} \right)^{0.6675} \left(\frac{\mu}{0.2} \right)^{0.1714} \left(\frac{\sigma}{46} \right)^{0.1382} \quad (2)$$

где μ – коэффициент вязкости жидкости, σ – сила поверхностного натяжения. В качестве критерия качества будем использовать среднюю абсолютную процентную ошибку (МАРЕ)

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{A_i - F_i}{A_i} \right| \quad (3)$$

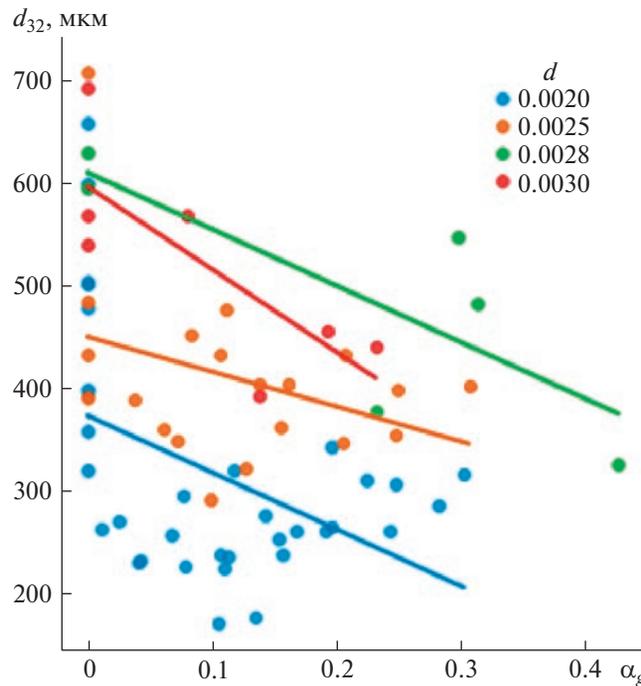


Рис. 4. Зависимость диаметра Заутера от объемной доли воздуха перед форсунками, диаметры отверстий которых указаны в легенде d , м.

где A_i – фактическое значение, а F_i – прогнозное. Величина MAPE составила 44.3%. Как видно из гистограммы на рис. 5, подавляющее число предсказаний имеют примерно такую же погрешность. Однако присутствуют и прогнозы с погрешностью менее 10%. Также следует отметить, что все прогнозные значения отклоняются от реальных в меньшую сторону. Это может быть связано с тем, что уравнение (2) было получено на результатах численного моделирования, которое не смогло учесть каких-либо явлений. Например, неравномерность распределения пузырьков воздуха. А это приводит к образованию крупных фрагментов, не распадающихся даже на значительном удалении от форсунок, которые, в свою очередь, увеличивают значение среднего диаметра.

Ввиду неудовлетворительного значения MAPE “переобучим” модель на полученных экспериментальных данных. На рис. 6 представлена зависимость абсолютной погрешности модели от метода обучения. Nelder-Mead – метод деформируемого многогранника [7], Powell – метод Пауэлла или метод сопряженных направлений [8], CG – метод сопряженных градиентов (метод Флетчера–Ривса) [9], BFGS – алгоритм Бroyдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно [10], L-BFGS-B – модификация с ограниченным использованием памяти в многомерном кубе [11], TNC – усеченные методы Ньютона (Truncated Newton methods) [12], COBYLA – ограниченная оптимизация с линейной аппроксимацией [12], SLSQP – последовательное квадратичное программирование [13].

Как видно из рис. 6, большинство методов дало примерно одинаковый результат. Для практического использования возьмем модель, обученную методом L-BFGS-B с MAPE = 7.6%. Скорректированное уравнение имеет вид:

$$d_{32} = 505 \cdot \left(\frac{1}{0.17} \cdot \frac{G_g}{G_f} \right)^{-0.082} \left(\frac{\Delta P}{5 \times 10^5} \right)^{-0.189} \left(\frac{d}{0.92} \right)^{1.32} \left(\frac{\mu}{2} \right)^{-0.09} \left(\frac{\sigma}{46 \times 10^3} \right)^{-0.314} \quad (4)$$

Благодаря наличию данного уравнения можно решить обратную задачу, т.е. найти значения параметров форсунки, обеспечивающих нужное значение d_{32} при заданных ограничениях. Таковую задачу можно свести к задаче минимизации некоторой функции потерь, в качестве которой может выступить, например, абсолютная ошибка (разность по модулю целевого и прогнозируе-

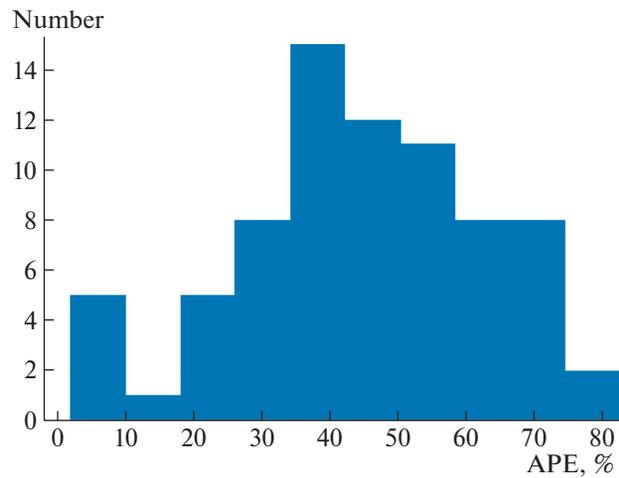


Рис. 5. Дифференциальное распределение абсолютной процентной ошибки уравнения (2).

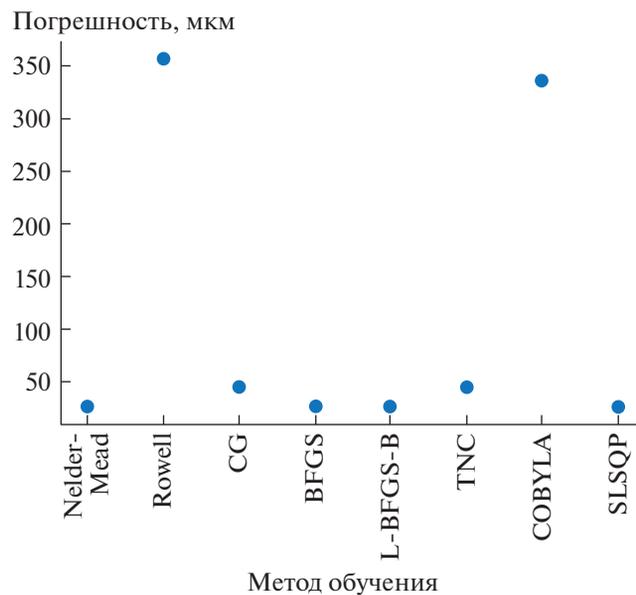


Рис. 6. Зависимость абсолютной погрешности от метода обучения.

мого значений). Назовем такую функцию *error* и сформулируем задачу ее минимизации следующим образом:

$$error(\hat{d}_{32}, d_{32}) \rightarrow \min_{x \in X} \quad (5)$$

где \hat{d}_{32} и d_{32} – целевое и прогнозное значение диаметра Заутера.

Вектор входных параметров

$$x = (\Delta P, d, G_g, G_f)^T$$

Дополнительно задается множество допустимых решений $X \subset R^N$, где N – число входных параметров, т.е. длина вектора x .

Ниже в таблице рассмотрены несколько сравнительных примеров.

Из табл. 1 видно, что предложенная корреляционная модель дает прогнозы, согласующиеся с экспериментальными данными.

Таблица 1. Сравнение результатов решения обратной задачи с экспериментом

D_{32} , мкм	ΔP , атм			d , м			G_g/G_f		
	Теор.	Эксп.	Погр. %	Теор.	Эксп.	Погр. %	Теор.	Эксп.	Погр. %
354	5	4.5	10	0.00255	0.0025	2	0.002	0.0017	18
342	2.00	2.00	0	0.00214	0.002	5.6	0.0014	0.0017	18
238	9	8.8	2.3	0.00206	0.002	2.4	0.002	0.0014	35

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получен экспериментально статистический материал, связывающий режимные параметры на входе с дисперсными характеристиками на выходе. Это было использовано вместе с математическими методами обучения и оптимизации, что позволило разработать методику решения обратной задачи определения заданных режимных и структурных параметров пузырькового двухфазного потока распыляющего струйного устройства на входе при задании параметров на выходе из него. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании различных распыляющих устройств в камерах сгорания и в других устройствах, использующих двухфазные потоки, соплах и эжекторах, различных смесительных устройствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Czernek Krystian, Hyrycz Michał, Krupińska Andżelika, Matuszak Magdalena, Ochowiak Marek, Witczak Stanisław, Włodarczak Sylwia.* State-of-the-Art Review of Effervescent-Swirl Atomizers // *Energies*. 2021. V. 14. P. 2876.
<https://doi.org/10.3390/en14102876>
2. *Марчуков Е.Ю., Мухин А.Н., Лепешинский И.А., Решетников В.А., Кучеров Н.А.* Экспериментальное исследование смесительного устройства форсажной камеры газотурбинного двигателя // *Изв. РАН. МЖГ*. 2022. № 4. С. 3–10.
3. *Лепешинский И.А., Решетников В.А., Заранкевич И.А.* Численное моделирование и экспериментальное исследование жидкостно-газового двухфазного эжектора со сверхзвуковым профилированным соплом // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. 2017. Т. 16. № 2. С. 164–171.
4. *Лепешинский И.А., Решетников В.А., Заранкевич И.А., Истомин Е.А., Антоновский И.В., Гузенко А.А.* Экспериментальное исследование газодинамического смесителя закрытого типа // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. 2016. Т. 15. № 3. С. 70–80.
5. Сайт фирмы Lavision [Электронный источник] URL: <http://lavision.de/en/>
6. *Lin Jianzhong & Qian, Lijuan & Xiong, Hongbin.* Relationship between deposition properties and operating parameters for droplet onto surface in the atomization impinging spray // *Powder Technology*. 2009. 191. P. 340–348.
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2008.11.009>
7. *Nelder J.A. and Mead R.* // *Computer Journal*. 1965. V. 7. P. 308–313.
8. *Powell M.J.D.* An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives // *The Computer Journal*. 1964. V. 7. P. 155–162.
9. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация / Пер. с англ. М.: Мир, 1985, 503 с.
10. *Nocedal, Jorge; Wright, Stephen J.* Numerical Optimization / 2nd ed. N.Y.: Springer, 2006, 634 с.
11. *Liu D.C., Nocedal J.* On the Limited Memory Method for Large Scale Optimization // *Mathematical Programming B*. 1989. V.45. № 3. P. 503–528.
12. *Powell M.J.D.* A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation / *Advances in Optimization and Numerical Analysis* / Eds. S. Gomez and J-P Hennart. Dordrecht.: Kluwer Academic, 1994. P. 51–67.
13. *Bonnans J.F., Gilbert J.Ch., Lemaréchal C., Sagastizabal C.* Numerical Optimization // *Theoretical and Practical Aspects*, 2006. P. 490.

УДК 532.529.6

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПУЗЫРЬКА НА ДИНАМИКУ ВСПЛЫТИЯ В НЕПОДВИЖНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. И. В. Моренко

*Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН,
Казань, Россия*

E-mail: morenko@imm.knc.ru

Поступила в редакцию 28.11.2022 г.

После доработки 19.12.2022 г.

Принята к публикации 19.12.2022 г.

Исследовано влияние формы одиночного пузырька в начальный момент времени на динамику всплытия в вязкой покоящейся жидкости. Рассматриваются пузырьки эллиптической формы с разным коэффициентом сжатия. Математическое моделирование процесса базируется на методе объема жидкости, который позволяет отслеживать эволюцию межфазной границы. Результаты расчета тестовых задач согласуются с данными других авторов, описанными в литературе. Получены формы межфазной поверхности, поля скорости, завихренности в процессе всплытия пузырьков в поле силы тяжести при числе Рейнольдса $Re = 35$, числах Бонда $Bo = 10, 125$. Основное внимание уделено режиму нестационарного движения. Показано, что скорость всплытия пузырька имеет один или два локальных максимума в зависимости от свойств сред. Установлено, что пузырьки, в начальный момент времени вытянутые вертикально, всплывают быстрее, чем вытянутые горизонтально.

Ключевые слова: всплытие пузырька, деформация формы, скорость всплытия, математическое моделирование

DOI: 10.31857/S1024708422600920, **EDN:** TMUTLW

Двухфазные пузырьковые течения широко представлены в химической промышленности, теплоэнергетике, металлургии, медицине, фармацевтике. Содержание в жидкости газовых пузырьков оказывает заметное влияние на характер и интенсивность технологических процессов. Задача о всплытии одиночного пузырька в неподвижной жидкости является классической проблемой механики жидкости и газа, имеет фундаментальное значение в теории газожидкостного потока и прикладное значение во многих приложениях.

На газовый пузырек, всплывающий в покоящейся жидкости, действуют несколько сил [1, 2]: сила Архимеда, тяжести, гидродинамического сопротивления, поверхностного натяжения, инерции, сила, связанная с присоединенной массой, “наследственная” сила Бассе. В работе [3] отмечается, что основные трудности при математическом моделировании всплывающего пузырька и теоретического анализа возникают из-за сильного нелинейного взаимного влияния действующих на пузырек сил и деформации его формы. Кроме того, трехмерность процесса приносит дополнительные сложности.

В зависимости от объема газовые пузырьки в процессе всплытия в жидкости могут иметь различные формы [4]: сферу, сплюснутого сфероида, сферического сегмента, а при определенных условиях пузырьки претерпевают нерегулярные пульсационные изменения формы, которые сопровождаются колебаниями поверхности раздела фаз. Карты режимов деформации пузырьков можно найти в [2, 5–8].

Ряд экспериментальных и численных работ [9–11] посвящен изучению траекторий всплытия одиночного пузырька и переходу от одного режима всплытия к другому. Установлено, что пузырек может всплывать прямолинейно вверх, по зигзагообразной и по спиральной траектории. Отмечено, что проблема связи динамики всплывающего пузырька и его следом мало изучена, а имеющиеся данные во многом противоречат друг другу.

Зависимость скорости подъема одиночного пузырька в жидкости от свойств сред найдена экспериментально еще в середине прошлого века [12]. Обобщенные данные о скорости всплы-

тия одиночных пузырьков разных диаметров приводятся в [5, 13, 14]. На динамику подъема пузырька влияют наличие загрязнений, метод нагнетания газа в жидкость, взаимодействие пузырька со стенкой [15], наличие поверхностно-активных веществ [16, 17].

В промышленных установках в зависимости от конкретных условий технологического процесса генерирование пузырьков осуществляется с помощью отверстий в стенках или при диспергировании газа через пористые мембраны. Для достижения требуемых границ насыщения воды кислородом при равномерном его распределении по рабочему объему могут использоваться вихревые, ротационные воздуходувки, пластинчато-роторные сухие компрессоры.

Безусловно, экспериментальные данные являются надежным источником информации, представляют базу данных для получения эмпирических корреляций. Тем не менее не всегда на практике можно реализовать подачу пузырьков правильной сферической формы, не имеющих начальных деформаций, полностью исключить присутствие поверхностно-активных веществ. В связи с этим методы вычислительной гидродинамики являются альтернативным инструментом для получения новых данных, в том числе, информации о распределении мгновенных характеристик течения.

Анализ литературных данных показывает, что к настоящему времени опубликовано много работ, посвященных динамике пузырьков, однако не все аспекты изучены в полной мере. В данной работе проводится численное исследование влияния формы пузырька в начальный момент времени на процесс его подъема в неподвижной вязкой жидкости. Особое внимание уделяется динамике пузырька на начальном этапе его всплытия, когда его движение осуществляется в нестационарном режиме.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При моделировании процесса всплытия пузырька необходимо учитывать нестационарность движения обеих сред, иметь возможность проанализировать поля скорости, давления, завихренности как внутри пузырька, так и в окружающей его жидкости. Для этого требуется решение полных уравнений гидродинамики. В настоящей работе математическое моделирование всплытия одиночного пузырька в неподвижной вязкой жидкости осуществляется с помощью метода объема жидкости (VoF) [18], который позволяет отслеживать положение межфазной границы, а также естественным образом учесть все силы, действующие на пузырек.

Исследование проводится в двумерной постановке, предполагается, что обе фазы являются вязкими несжимаемыми жидкостями, поверхностно-активные вещества отсутствуют. Начальное состояние системы показано на рис. 1. Прямоугольный резервуар $[1 \times 2]$ заполнен жидкостью. Начало декартовой системы координат расположено на дне резервуара по центру, а ось ординат направлена вверх. В начальный момент времени центр масс круглого пузырька Ω_g диаметром $d = 0.5$ находится в точке $(0; 0.5)$. Вектор силы тяжести \mathbf{g} направлен вертикально вниз противоположно оси x_2 .

Рассматривается двухфазная среда, которая состоит из жидкой и газовой фаз. Обозначим через γ объемную долю жидкой фазы в ячейке расчетной области. В каждой ячейке расчетной области маркерная функция γ определяется следующим образом

$$\gamma = \begin{cases} 1 - \text{ячейка занята жидкостью} \\ 0 < \gamma < 1 - \text{через ячейку проходит межфазная граница} \\ 0 - \text{ячейка занята газом} \end{cases}$$

Физические свойства среды рассчитываются по соответствующим значениям жидкости (индекс l) и газа (индекс g) с использованием маркерной функции γ : плотность $\rho = \rho_l \gamma + \rho_g (1 - \gamma)$, динамический коэффициент вязкости $\mu = \mu_l \gamma + \mu_g (1 - \gamma)$.

Математическая модель для описания нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости включает следующие уравнения. Уравнение сохранения массы

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

уравнение сохранения количества движения

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} + \sigma \kappa \nabla \gamma \quad (1.2)$$

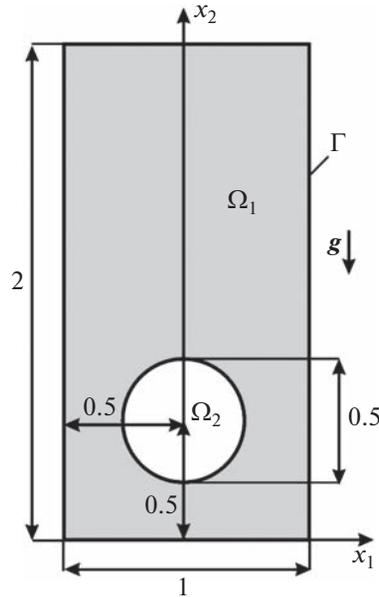


Рис. 1. Схема расчетной области.

уравнение конвективного переноса для определения положения свободной поверхности

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma \mathbf{u}) + \nabla \cdot [(1 - \gamma) \gamma \mathbf{u}_r] = 0 \quad (1.3)$$

здесь \mathbf{u} — вектор скорости среды, t — время, p — давление, $\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n}$ — кривизна свободной поверхности, $\mathbf{n} = \nabla \gamma / |\nabla \gamma|$ — единичная нормаль к поверхности раздела фаз, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g$ — искусственный член сжатия. При использовании метода VoF возникает известная проблема диффузии границ раздела фаз, обусловленная погрешностями численного решения уравнения переноса и требующая использования дополнительных приемов. Добавление в уравнение (3) слагаемого $\nabla \cdot [(1 - \gamma) \gamma \mathbf{u}_r]$ позволяет предотвратить размытие границы раздела фаз, и тем самым повысить четкость интерфейса.

В начальный момент времени $t = 0$ среда находится в состоянии покоя

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 : \mathbf{u} = 0, \quad p = \rho g(2 - x_2); \quad \Omega_1 : \gamma = 1, \quad \Omega_2 : \gamma = 0 \quad (1.4)$$

На поверхности стенок резервуара записываются граничные условия согласно [8]

$$\Gamma : u_n = 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial n} = 0 \quad (1.5)$$

Решение поставленной задачи (1.1)–(1.5) осуществляется методом конечных объемов в свободно распространяемом программном комплексе OpenFOAM. Используется решатель interFoam. Нестационарное слагаемое дискретизируется с помощью схемы Кранка–Николсона, градиент — методом наименьших квадратов, конвективное слагаемое — схемой минимизации полной вариации с ограничителем Ван-Лира, диффузионное слагаемое — линейной схемой Гаусса с коррекцией. Используется подход с раздельным решением уравнений для скорости и давления. Решение уравнений для давления осуществляется методом сопряженных градиентов с предобусловливанием. Уравнения для скоростей и маркер-функции решаются методом Гаусса–Зейделя. Для согласования поля скорости с полем давления используется алгоритм PIMPLE, который приводит к удовлетворению уравнений неразрывности и сохранения импульса. Временной шаг в процессе счета выбирается таким образом, чтобы число Куранта Co во всех ячейках сетки не превосходило 0.05 для скорости и 0.01 для маркер-функции γ .

Таблица 1. Значения входных параметров для проведения тестовых расчетов

Параметр	Тест № 1	Тест № 2
ρ_l , кг/м ³	1000	1000
ρ_g , кг/м ³	100	1
ρ_l/ρ_g	10	1000
μ_l , кг/(м · с)	10	10
μ_g , кг/(м · с)	1	0.1
μ_l/μ_g	10	100
g , м/с ²	0.98	0.98
σ , Н/м	24.5	1.96
Re	35	35
Bo	10	125

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для валидации математических моделей, позволяющих отслеживать подвижную границу раздела фаз, наиболее часто используется классическая тестовая задача об обрушении столба жидкости, приведенная в [19]. Результаты тестирования применяемого алгоритма и численных методов опубликованы в [20]. Для верификации математической модели проведены также и другие методические расчеты [21, 22].

Типичный тест для двумерной задачи о всплытии одиночного пузырька приводится в работах [8, 23–26]. Задача решается в безразмерном виде, при этом характерный масштаб длины составляет d , скорости $u_g = \sqrt{gd}$, времени $t = d/u_g$. В соответствии с [23] расчеты проводятся для двух наборов входных параметров – табл. 1.

Безразмерный анализ задачи о всплытии одиночного пузырька в вязкой жидкости показал, что данная задача описывается четырьмя безразмерными параметрами, а именно отношениями плотности ρ_l/ρ_g и вязкости μ_l/μ_g двух сред, числом Рейнольдса и числом Бонда [2]

$$\text{Re} = \frac{\rho_l g^{1/2} d^{3/2}}{\mu_l}, \quad \text{Bo} = \frac{\rho_l g d^2}{\sigma}$$

Кроме того, в [10, 13] для анализа динамики пузырька используются числа Вебера We, Мортонна Mo, Галилея Ga

$$\text{We} = \frac{\rho_l d u^2}{\sigma}, \quad \text{Mo} = \frac{g \mu_l^4}{\rho_l \sigma^3}, \quad \text{Ga} = \frac{\rho_l \sqrt{g d d}}{\mu_l}$$

и другие безразмерные параметры.

Для оценки сходимости по пространству осуществляется моделирование на трех последовательно сгущающихся сетках M_1 [100 × 200], M_2 [200 × 400], M_3 [300 × 600]. В табл. 2 приводятся положения лобовой P_1 и кормовой P_2 точек полости на оси x_2 в момент времени $t = 3.0$, рассчитанные на сетках M_1 , M_2 и M_3 . При этом межфазная граница определяется изолинией $\gamma = 0.5$. Установлено, что для тестовой задачи № 1 расчетные данные различаются не более, чем на 1%. Тогда как для задачи № 2 положение точки P_2 , полученное на сетке M_1 , отличается на 2.29% от значения, полученного на сетке M_3 . Для проведения дальнейших расчетов выбрана сетка M_2 .

Результаты расчета тестовой задачи № 1 показаны на рис. 2. К моменту безразмерного времени $t = 3.0$ пузырек под влиянием действующих на него сил принимает форму, показанную на рис. 2. Установлено, что при дальнейшем всплытии форма пузырька не деформируется, а всплытие происходит в стационарном режиме по прямолинейной траектории. Рисунки 2а и 2б демонстрируют неравномерное распределение скорости внутри пузырька. Частицы жидкости, расположенные непосредственно за пузырьком, увлекаются вверх. Максимальные значения скорости жидкости наблюдаются между пузырьком и стенками резервуара, где жидкость перетекает вниз.

Таблица 2. Проверка сходимости по сетке

	Тест № 1				Тест № 2			
	P_1	Δ	P_2	Δ	P_1	Δ	P_2	Δ
M_1	1.2660	0.34%	0.9041	0.47%	1.3553	0.82%	1.0224	2.29%
M_2	1.2646	0.23%	0.9028	0.32%	1.3477	0.26%	1.0065	0.70%
M_3	1.2617	—	0.8999	—	1.3442	—	0.9995	—

Максимальные значения завихренности формируются по бокам полости, за которыми формируется пара симметричных вихревых областей (рис. 2в). Наличие циркуляции в полости демонстрирует рис. 2г.

Дополнительно был проведен расчет задачи № 1 с условиями прилипания $\mathbf{u} = 0$ на стенках резервуара (а не проскальзывания). Несмотря на то что взаимодействия поверхности раздела фаз со стенками резервуара не происходит, тип граничного условия на стенках влияет на результаты расчета подъема пузырька. Установлено, что при реализации условия прилипания на стенке нулевые значения вектора скорости на поверхности резервуара и силы вязкого трения способствуют более медленному всплытию пузырька в отличие от режима скольжения. Кроме того, при выполнении условия прилипания на стенке, пузырек при подъеме приобретает более узкую форму. Условия проскальзывания позволяют не учитывать влияние образующегося пограничного слоя у поверхности, снизить эффект вязких сил в пристеночной области.

Результаты расчета тестовой задачи № 2 в момент времени $t = 3.0$ показаны на рис. 3. Первоначально круглый пузырек в процессе всплытия приобретает полукруглую форму. Отметим, что коэффициент поверхностного натяжения в данном случае меньше, чем для задачи № 1. Это приводит к появлению вытянутых по бокам симметричных структур с утолщениями на концах. При этом увеличивается межфазная поверхность. В результате дальнейшей эволюции тонкие связывающие перемычки разрываются и образуются более мелкие включения, так называемые пузырьки-спутники. В области оторвавшихся мелких включений компонента скорости u_2 меняет свое направление с отрицательного около стенки до положительного за пузырьком (рис. 3б), а завихренность (рис. 3в) имеет более высокие значения по сравнению с задачей № 1 (рис. 2в), траектории трейсеров вытягиваются (рис. 3г). В пузырьке непрерывная циркуляция среды направлена вдоль его боковой поверхности вниз к кормовой части.

В работе [24] представлены результаты расчета тестовой задачи № 2 с помощью таких программных комплексов, как CFX, Comsol, Fluent, TP2D, FreeLIFE, MoonMD. Как правило, фор-

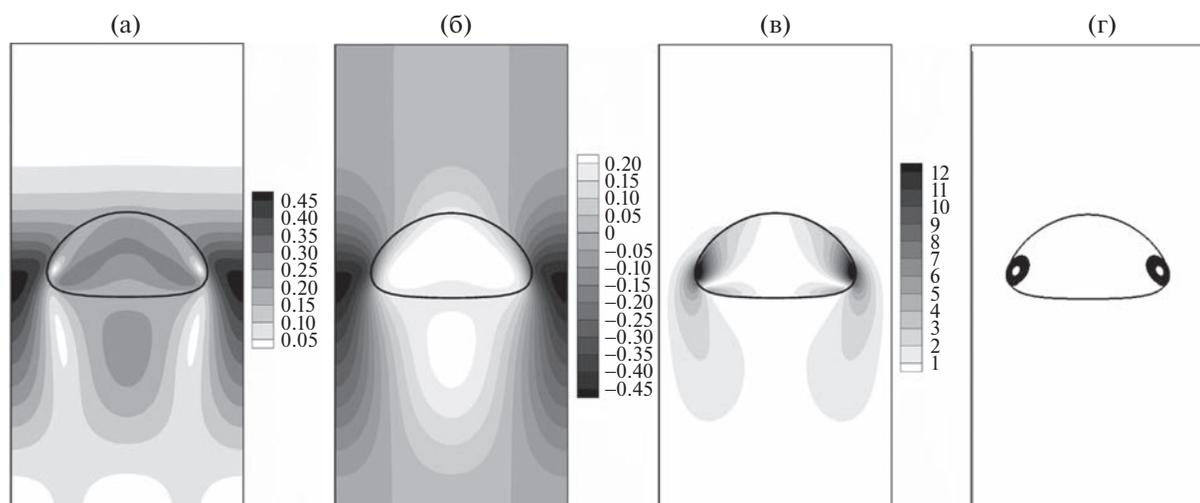


Рис. 2. Результаты расчета тестовой задачи № 1. Поля модуля скорости $|u|$ (а), компоненты скорости u_2 (б), завихренности ω (в), трейсеры (г) в момент времени $t = 3.0$.

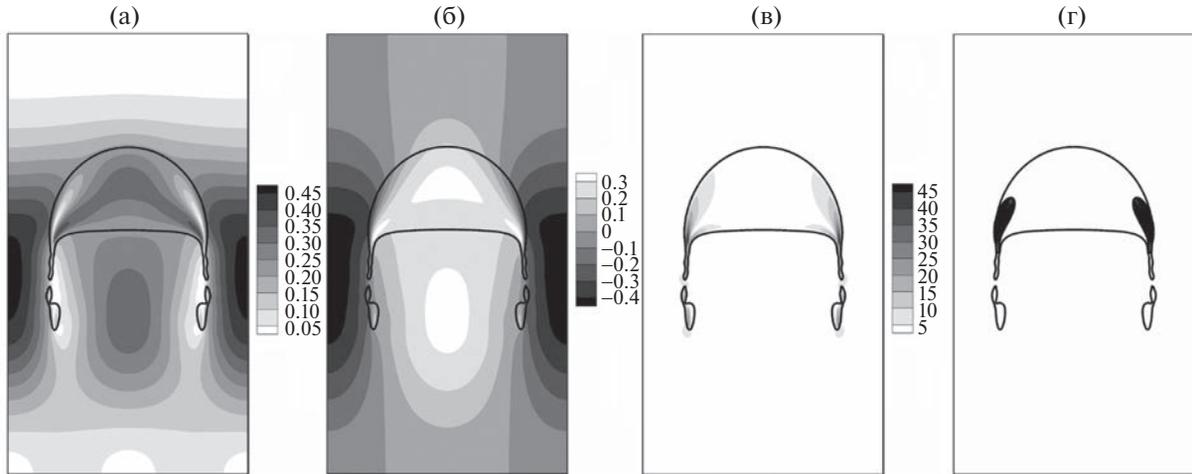


Рис. 3. Результаты расчета тестовой задачи № 2. Поля модуля скорости $|\mathbf{u}|$ (а), компоненты скорости u_2 (б), завихренности ω (в), трейсеры (г) в момент времени $t = 3.0$.

ма основной части пузырька хорошо согласуется для всех случаев. Однако полученные в результате расчета с использованием разных программных комплексов формы тонких вытянутых структур по бокам пузырька и оторвавшихся пузырьков-спутников отличаются. Отметим, что положение межфазной границы в момент времени $t = 3.0$ для тестовой задачи № 2 лучше согласуется с данными расчета по программе FreeLIFE [24].

В ходе проведения численных экспериментов скорость всплытия пузырька рассчитывается по формуле

$$u_{rise} = \frac{\int_{\Omega_l \cup \Omega_g} (1 - \gamma) u_2 ds}{\int_{\Omega_l \cup \Omega_g} (1 - \gamma) ds}$$

На этапе нестационарного режима сравнение значений максимальной скорости всплытия пузырька u_{rise}^{\max} , и момента времени t^{\max} , когда эта скорость достигается, представлено в табл. 3. Видно количественное согласие полученных расчетных данных с результатами других авторов для обеих тестовых задач.

Для анализа влияния формы пузырька в начальный момент времени на динамику его подъема в неподвижной вязкой жидкости фиксируется площадь пузырька из тестовой задачи $S = \pi d^2/4$, а также положение центра масс в начальный момент времени $(0; 0.5)$. Каноническое уравнение эллипса записывается в форме $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, здесь a, b – горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса, которые подбираются таким образом, чтобы выполнялось равенство $S = \pi ab$. Обозначим через $\eta = a/b$ коэффициент сжатия эллипса, характеризующий отклонение формы пузырька от круга. При проведении численных экспериментов коэффициент сжатия варьировался в диапазоне $0.309 \leq \eta \leq 3.24$. Кроме того, обозначим через ТС1 набор входных параметров

Таблица 3. Максимальная скорость всплытия пузырька и момент времени ее достижения

	Тест № 1		Тест № 2	
	u_{rise}^{\max}	t^{\max}	u_{rise}^{\max}	t^{\max}
Расчет	0.2377	0.9229	0.2488	0.7383
Данные [23]	0.2348	0.9516	0.2474	0.7156
Данные [24]	0.2419	0.9270	0.2514	0.7281
Данные [25]	0.2457	0.9235	–	–

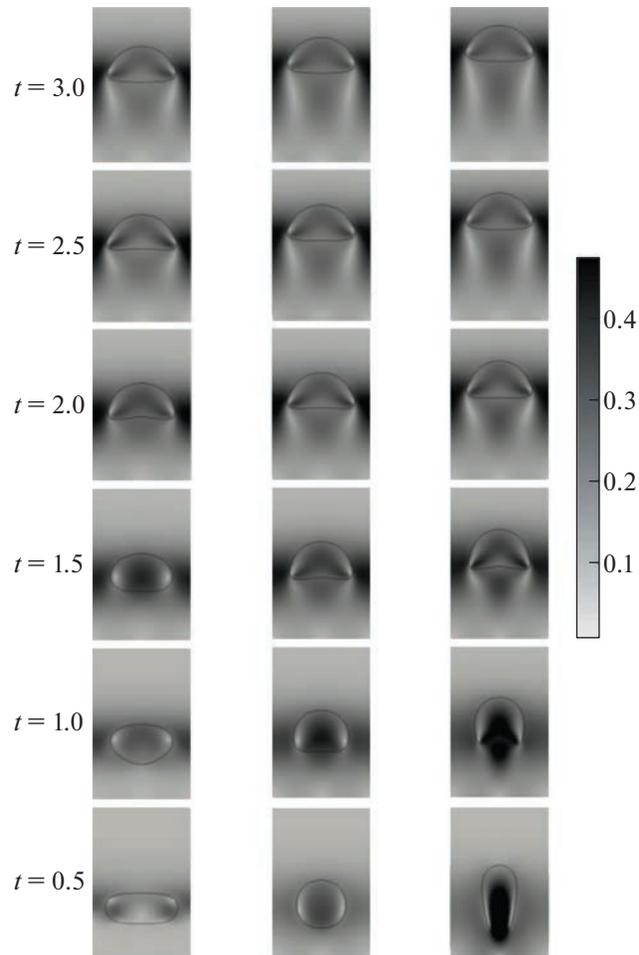


Рис. 4. Эволюция формы пузырька и поля модуля скорости в процессе его всплытия для набора входных параметров ТС1 при разных коэффициентах сжатия: слева – пузырек, растянутый по горизонтали ($\eta = 3.24$), по центру – круглый ($\eta = 1.00$), справа – растянутый по вертикали ($\eta = 0.309$).

($\rho_l/\rho_g = 10$, $\mu_l/\mu_g = 10$, $Re = 35$, $Bo = 10$) для тестовой задачи № 1, и ТС2 ($\rho_l/\rho_g = 1000$, $\mu_l/\mu_g = 100$, $Re = 35$, $Bo = 125$) – для тестовой задачи № 2.

На рис. 4 показано, что в зависимости от начальной формы динамика пузырька имеет свои особенности. Пузырек, имеющий в начальный момент времени форму эллипса с коэффициентом сжатия $\eta = 3.24$, расположенный горизонтально, под действием силы поверхностного натяжения на начальном этапе стремится уменьшить длину межфазной поверхности и принять форму, близкую к круглой.

Пузырек, имеющий изначально круглую форму, при всплытии под действием массовых и поверхностных сил трансформируется. Изменение формы происходит в период нестационарного движения. Когда пузырек принимает форму полукруга, действующие на него силы Архимеда, тяжести, гидродинамического сопротивления, поверхностного натяжения уравниваются и дальнейшее всплытие происходит в стационарном режиме. Пузырек принимает устойчивую энергетически выгодную форму.

В случае, когда вертикальная полуось больше горизонтальной, сильно вытянутый эллипсоидальный пузырек ($\eta = 0.309$), под действием силы поверхностного натяжения, стремится к круглой форме за счет относительно высоких скоростей в нижней его части, в то время как верхняя его часть остается малоподвижной. Соответственно, наиболее активная деформация межфазной поверхности наблюдается в кормовой части пузырька. Стационарную форму такой пузырек принимает позже, чем изначально круглый.

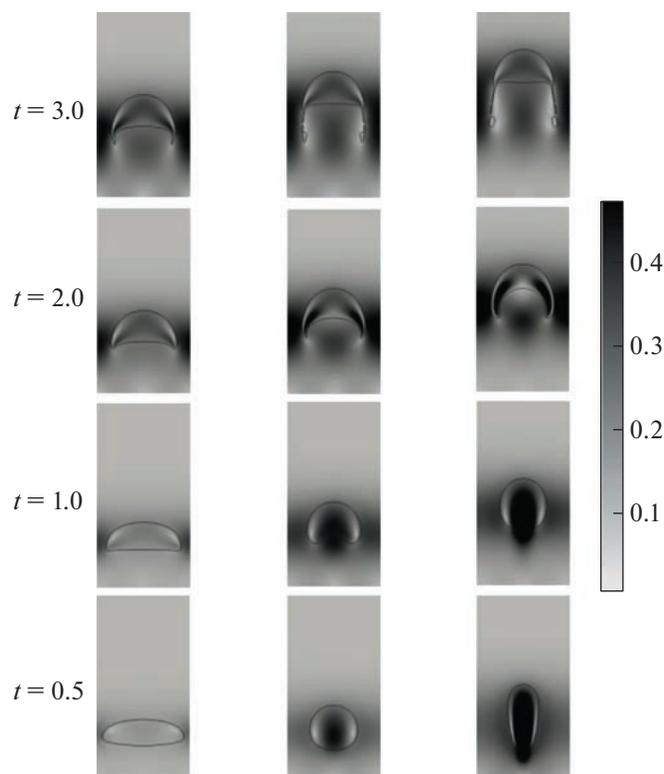


Рис. 5. Эволюция формы пузырька и поля модуля скорости в процессе его всплытия для набора входных параметров ТС2 при разных коэффициентах сжатия: слева – пузырек, растянутый по горизонтали ($\eta = 3.24$), по центру – круглый ($\eta = 1.00$), справа – растянутый по вертикали ($\eta = 0.309$).

Следует отметить, что подвижность межфазной поверхности выражается еще и в движении частиц вблизи этой поверхности в направлении от передней лобовой точки в сторону кормовой точки пузырька. При этом коэффициент сопротивления неравномерно распределяется вдоль поверхности раздела фаз. Сила сопротивления направлена против вектора скорости движения пузырька, ее величина пропорциональна поперечному сечению его формы. Следовательно, сила сопротивления частицы, ориентированной вертикально, меньше, чем ориентированной горизонтально. Это способствует более быстрому всплытию пузырька, расположенного изначально вертикально, чем вытянутого горизонтально.

Ниже представлены результаты численных экспериментов с набором входных параметров ТС2. Рисунок 5 иллюстрирует деформацию поверхности и изменение поля скорости при всплытии пузырьков, имеющих разные формы в начальный момент времени. Пузырек, изначально вытянутый горизонтально ($\eta = 3.24$), в процессе всплытия постепенно деформируется в полукруг. Скорости относительно не велики. В случае, когда пузырек в начальный момент времени имеет форму вертикально вытянутого эллипса ($\eta = 0.309$), на первом этапе всплытия его кормовая часть быстро втягивается под влиянием силы поверхностного натяжения. На поверхности раздела двух сред с большой разницей плотностей ($\rho_l/\rho_g = 10^3$) при наличии ускорения создаются условия для развития неустойчивости Релея–Тейлора. Образуется струя жидкости, направленная внутрь пузырька. Деформация его границ увеличивает межфазную поверхность. Пузырек принимает подковообразную форму. В ходе дальнейшего подъема наблюдается трансформация к полукруглой форме с отрывом по бокам маленьких пузырьков-спутников, которые затем всплывают с меньшей скоростью, чем центральный крупный пузырек. Вертикально расположенный пузырек всплывает быстрее, его скорость больше. Нестабильность формы проявляется до некоторого момента времени, затем пузырек приобретает стабильную форму и дальнейший подъем происходит с постоянной скоростью.

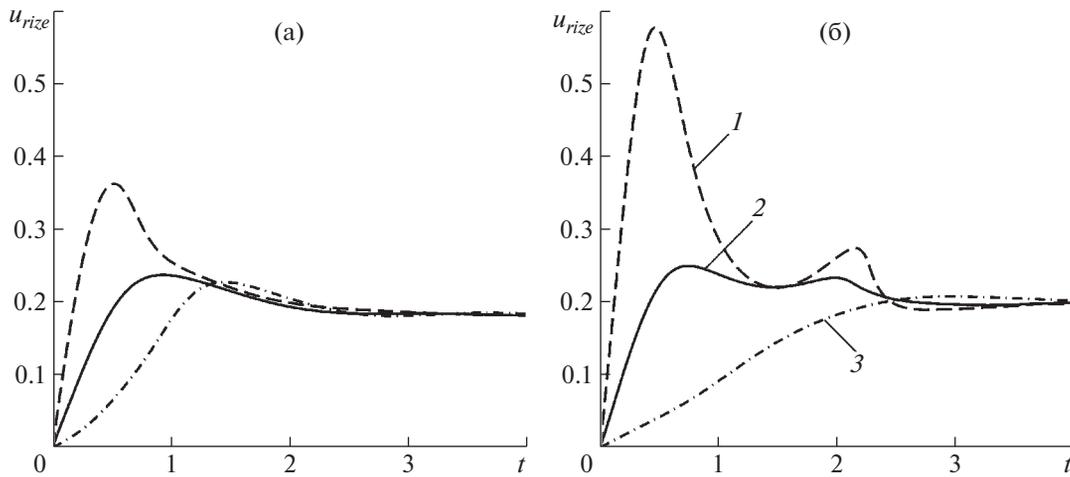


Рис. 6. Изменение скорости всплытия пузырька с течением времени по результатам расчета задачи с условиями ТС1 (а) и ТС2 (б) при разных коэффициентах сжатия: 1–3 – $\eta = 0.309, 1.00, 3.24$.

Результаты расчетов скорости всплытия для условий ТС1 представлены на рис. 6а. В начальный момент времени пузырек из состояния покоя начинает движение. До некоторого момента времени t^{\max} пузырек движется вверх с ускорением. Как отмечалось ранее, изменение скорости пузырька обусловлено деформацией его формы под влиянием действующих на него массовых и поверхностных сил. Показано, что при всплытии пузырька с параметрами ТС1 скорость всплытия имеет один максимум u_{rise}^{\max} . Он достигается в момент времени t^{\max} , когда нижняя часть межфазной поверхности деформируется с максимальной скоростью, а полость стремится принять форму полукруга. Установлено, что, чем меньше η , тем больше ускорение, тем выше максимальная скорость всплытия u_{rise}^{\max} и раньше наступает момент t^{\max} , когда скорость максимальна. Так, максимальная скорость всплытия достигает $u_{rise}^{\max} = 0.3621$ при коэффициенте сжатия $\eta = 0.309$, $u_{rise}^{\max} = 0.2377$ при $\eta = 1.00$, $u_{rise}^{\max} = 0.2271$ при $\eta = 3.24$. Затем скорость пузырька монотонно снижается до постоянного значения $u_{rise}^{const} \approx 0.18$. Причем величина u_{rise}^{const} не зависит от начальной формы пузырька, а только от его диаметра, физических свойств обеих фаз и ускорения свободного падения.

Анализ численных результатов показал (рис. 6б), что в случае условий задачи ТС2 при $\eta = 0.309$ и $\eta = 1.00$, скорость всплытия пузырька u_{rise} имеет два локальных максимума, причем второй имеет меньшую величину. Первый максимум скорости всплытия достигается в момент времени t^{\max} , когда струя окружающей жидкости направлена по вертикали вверх на кормовую часть поверхности пузырька. В результате деформации пузырек приобретает подковообразную форму. Далее, боковые части утончаются, максимальные значения вертикальная компонента скорости принимает на боковых участках пузырька, а не в центральной ее части, как при достижении первого максимума. Затем наблюдается разрыв межфазной поверхности с образованием маленьких пузырьков-спутников. Стационарная скорость всплытия пузырька при условиях ТС2 составляет $u_{rise}^{const} \approx 0.20$.

Кроме того, в ходе проведения численного эксперимента дополнительно замерялось время достижения кормовой точки полости P_2 контрольной точки $K(0.00; 1.69)$. Установлено, что время всплытия полости t^* монотонно увеличивается с ростом соотношения полуосей эллипса η . На рис. 7 показано, что при фиксированном числе Рейнольдса $Re = 35$ полость всплывает быстрее в случае условий задачи ТС2, когда больше отношение плотностей сред ρ_l/ρ_g и число Бонда. Так, при условиях ТС1 безразмерное время всплытия до контрольной точки K увеличивается на 17.6% с 6.8 при $\eta = 0.309$ до 8.0 при $\eta = 3.24$, тогда как при ТС2 – увеличивается на 42.8% с 4.9 при $\eta = 0.309$ до 7.0 при $\eta = 3.24$.

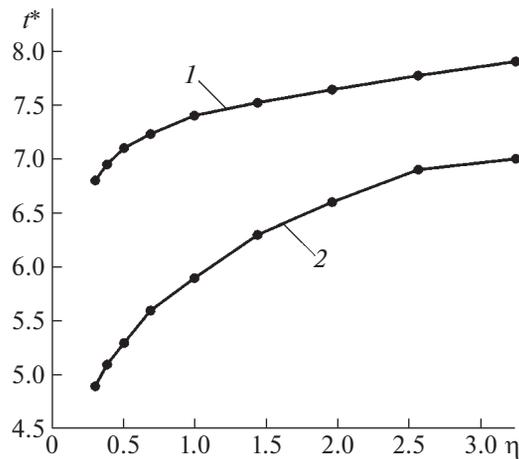


Рис. 7. Зависимость времени всплытия t^* пузырька до контрольной точки K от коэффициента сжатия эллипса для η : результаты расчета задачи с условиями 1 – ТС1; 2 – ТС2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследован начальный этап всплытия пузырьков в вязкой жидкости, который происходит в нестационарном режиме. Показано, что на скорость подъема влияет исходная форма пузырьков. Пузырьки, которые в начальный момент времени имеют форму эллипса с вертикальной большой полуосью, всплывают быстрее круглых, и тем более, расположенных горизонтально. Увеличение скорости всплытия обусловлено двумя факторами: уменьшением силы сопротивления за счет сокращения поперечного сечения и формированием струи жидкости, направленной снизу на кормовую часть межфазной поверхности в результате развития неустойчивости Рэлея–Тейлора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов В.А., Васенин И.М., Ткаченко А.С., Усанина А.С. О нестационарном всплытии пузырька в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 1. С. 88–94.
2. Hua J. CFD simulations of the effects of small dispersed bubbles on the rising of a single large bubble in 2D vertical channels // Chem. Eng. Sci. 2015. № 123. P. 99–115.
3. Козелков А.С., Куркин А.А., Курулин В.В., Лашкин С.В., Тарасова Н.В., Тятюшкина Е.С. Численное моделирование свободного всплытия пузырька воздуха // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 3–14.
4. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем: Учебное пособие для вузов. М.: Издательство МЭИ, 2000. 374 с.
5. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. Bubbles, drops and particles. New York: Acad. Press, 1978. 398 p.
6. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С. Анализ механизма потери устойчивости одиночного пузырька при малых значениях числа Рейнольдса // ПМТФ. 2011. Т. 52. № 3. С. 51–59.
7. Zahedi P., Saleh R., Moreno-Atanasio R., Yousefi K. Influence of fluid properties on bubble formation, detachment, rising and collapse. Investigation using volume of fluid method // Korean J. Chem. Eng. 2014. V. 31. № 8. P. 1349–1361.
8. Siriano S., Balcázar N., Tassone A., Rigola J., Caruso G. Numerical Simulation of High-Density Ratio Bubble Motion with interIsoFoam // Fluids. 2022. V. 7. № 152. P. 1–22.
9. Прибатурин Н.А., Меледин В.Г. Многоинформационная методика для экспериментального изучения двухфазных пузырьковых течений // Eurasian Phys. Tech. J. 2013. V. 10. № 2 (20). С. 288–292.
10. Cano-Lozano J.C., Martinez-Bazan C. Paths and wakes of deformable nearly spheroidal rising bubbles close to the transition to path instability // Physical review fluids. 2016. V. 1, 053604 P. 1–30.
11. Vries A.W.G., Biesheuvel A., Wijngaarden L. Notes on the path and wake of a gas bubble rising in pure water // Int. J. Multiph. Flow. 2002. № 28. P. 1823–1835.
12. Davies R.M., Taylor G.I. The mechanics of large bubbles rising through liquids in tubes // Proc. of Roy. Soc. London. 1950. V. 200. Ser. A. P. 375–390.

13. Козелков А.С., Ефремов В.Р., Дмитриев С.М., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Тарасова Н.В., Стрелец Д.Ю. Исследование особенностей всплытия пузырьков воздуха и твердых сфер // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2018. Т. 11. № 4. С. 73–80.
14. Baz-Rodríguez S., Aguilar-Corona A., Soria A. Rising velocity for single bubbles in pure liquids // *Rev Mex Ing Quim*. 2012. V. 11. № 2. P. 269–278.
15. Heydari N., Larachi F., Taghavi S.M., Bertrand F. Three-dimensional analysis of the rising dynamics of individual ellipsoidal bubbles in an inclined column // *Chem. Eng. Sci.* 2022. V. 258. 117759.
16. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С. Динамика всплытия пузырька в присутствии поверхностно-активных веществ // *Изв. РАН. МЖГ*. 2016. № 2. С. 142–151.
17. Архипов В.А., Усанина А.С., Басалаев С.А., Каличкина Л.Е., Мальков В.С. Динамика всплытия кластера пузырьков в присутствии поверхностно-активного вещества // *Изв. РАН. МЖГ*. 2020. № 1. С. 104–112.
18. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Computational Physics*. 1981. V. 39. № 1. P. 201–225.
19. Martin J.C., Moyce W.J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. 1952. V. 244. № 882. P. 312–324.
20. Моренко И.В. Численное моделирование обрушения столба жидкости в резервуарах разной формы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 60. С. 119–131.
21. Morenko I.V. Numerical simulation of the propagation of pressure waves in water during the collapse of a spherical air cavity // *Ocean Eng.* 2020. V. 215. 107905. P. 1–9.
22. Моренко И.В. Численное моделирование имплозионного процесса в цилиндрическом резервуаре // *ТВТ*. 2019. Т. 57. № 5. С. 755–763.
23. Klostermann J., Schaake K., Schwarze R. Numerical simulation of a single rising bubble by VOF with surface compression // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2013. V. 71. P. 960–982.
24. Hysing S., Turek S., Kuzmin D., Parolini N., Burman E., Ganesan S., Tobiska L. Quantitative benchmark computations of two-dimensional bubble dynamics // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2009. № 60. P. 1259–1288.
25. Štrubelj L., Tiselj I., Mavko B. Simulations of free surface flows with implementation of surface tension and interface sharpening in the two-fluid model // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2009. № 30. P. 741–750.
26. Чжан И., Лян Б., Ну Ц. Численное исследование подъема пузырька в вертикальном клинообразном канале модифицированным методом функции уровня // *Изв. РАН. МЖГ*. 2020. № 2. С. 99–110.

УДК 532.546: 533.69: 533.6.011.5

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОРИСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КРЫЛА НА СВОЙСТВА СВЕРХЗВУКОВЫХ КОНЦЕВЫХ ВИХРЕЙ

© 2023 г. А. Е. Луцкий^{а,*}, А. В. Северин^{а,**}

^аИнститут прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail: allutsky@yandex.ru

**E-mail: alsewerin@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.10.2022 г.

После доработки 27.01.2023 г.

Принята к публикации 28.01.2023 г.

Исследовано влияние пористой законцовки крыла на формирование концевой вихря и его свойства при сверхзвуковом обтекании. Установлено, что пористая законцовка существенно влияет на структуру и параметры вихря, уменьшает его интенсивность.

Ключевые слова: концевой вихрь, вихревой след, сверхзвуковой поток, пористые материалы

DOI: 10.31857/S1024708422600804, EDN: TMOJWC

Изучение формирования и структуры концевых вихрей является важной задачей аэродинамики. Концевые вихри образуются на внешних кромках крыльев и органов управления летательного аппарата (ЛА) благодаря перепаду давлений. Концевые вихри влияют на аэродинамические характеристики крыла, уровень шума, безопасность полета [1, 2]. Попадание ЛА или его элемента конструкции в концевой вихрь может привести к потере управления или разрушению. Для ослабления концевых вихрей используются различные конструктивные элементы типа винглетов, шарклетов и других вариантов законцовок крыла [3]. У дозвуковых ЛА законцовки существенно повышают подъемную силу и уменьшают сопротивление. В работе [4] исследуется возможность применения законцовок типа винглетов на сверхзвуковых скоростях при $M = 1.62$. Авторы приходят к выводу, что при данном режиме течения винглеты неэффективны с точки зрения уменьшения сопротивления крыла.

Одним из направлений совершенствования аэродинамики летательных аппаратов, интенсивно развивающихся в последнее время, является использование элементов конструкции из пористых материалов. Основой для создания пористых материалов, применяемых в летательных аппаратах, являются как различные металлы (никель, бронза и т.д.), так и материалы на основе термостойких пористых углеродных материалов, которые обладают высокой термостойкостью (2500 К) и малым удельным весом.

Существует много работ, посвященных использованию пористых материалов для стабилизации пограничного слоя [5–8], в каналах для забора перепускаемого воздуха [9], диффузорах [10], носовых обтекателях [11–13] и других элементах конструкции летательных аппаратов.

Поэтому представляет интерес и воздействие пористых элементов конструкции и на концевые вихри. Работ на эту тему довольно мало – можно отметить, например, описание патента НАСА [14]. В этой области возможно открытие новых и полезных эффектов. Настоящая работа представляет собой исследование формирования концевых вихрей в условиях, когда все крыло или его часть изготовлены из пористого материала. В качестве примера используется прямое крыло простой геометрической формы, обтекаемое сверхзвуковым потоком.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для проведения расчетов в данной работе использован пакет программ S3D [15], разработанный и программно реализованный в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Данный комплекс программ предназначен для решения 3-мерных задач аэродинамики. Используется неявная разностная

схема, в которой для решения системы линейных уравнений применяется метод LU SGS. Поток на гранях ячеек вычисляются с помощью интерполяционной схемы С.К. Годунова.

Для описания течений совершенного вязкого сжимаемого газа используется система нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (URANS) с однопараметрической моделью турбулентности Спаларта–Алмараса (SA) для сжимаемых течений. Для дискретизации уравнений используется метод конечных объемов, который, в отличие от метода конечных разностей, применим к любой геометрии, оперирует различными сетками и позволяет избежать проблем с метрическими сингулярностями обобщенных координат.

Модель течения газа в пористом материале основана на сужении модели Баера-Нунзиато [16], которая первоначально была разработана для описания процесса горения и детонации гранулированных взрывчатых веществ. Среда в этой модели рассматривается как двухфазный континуум, состоящий из твердого скелетона непрореагировавшего взрывчатого вещества (ВВ) и газовой фазы продуктов горения. Модель, которую мы используем, является редукцией модели Баера-Нунзиато, состоящей в предположении, что твердый скелетон неподвижен.

Мгновенное состояние газа определяется плотностью ρ , вектором скорости u и давлением p . Газ считается сжимаемой, вязкой и теплопроводной средой. Скелетон считается обладающим теплоемкостью и теплопроводностью, температура газа и скелетона считается одинаковой.

Предполагается, что микроструктура скелетона является изотропной и характеризуется распределением объемной доли скелетона $\phi = \phi(x)$. Величина $\alpha = \alpha(x) = 1 - \phi(x)$ представляет собой локальное распределение пустот (пористость).

Геометрическую форму сплошного твердого тела можно задавать двумя способами: положив $\alpha = 0$ и при помощи граничных условий прилипания. В данной работе поверхности сплошных тел определяются граничными условиями. Отличные от 1 значения α используются только для расчета течения в пористых частях крыла.

В результате мы приходим к следующей системе уравнений, которые в континуальном приближении описывают течение сжимаемой жидкости в стесненных условиях пористого проницаемого скелетона

$$\frac{\partial \alpha \rho}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \rho u_k}{\partial x_k} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \alpha \rho u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \alpha (\rho u_i u_k + p \delta_{ik})}{\partial x_k} = p \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \alpha \tau_{ik}}{\partial x_k} - g_i \tag{2}$$

$$\frac{\partial \alpha \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \alpha) E_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \alpha \rho H u_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \alpha \tau_{ik} u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \theta_k}{\partial x_k} \right) \tag{3}$$

Здесь используются общепринятые обозначения: $i, k = 1, 2, 3$ – индексы; ρ – плотность, u_k – компоненты вектора скорости, p – давление, $\tau_{ik} = 2\mu_{ef}e_{ik} - 2/3\mu_{ef}e_{jj}\delta_{ik}$ – тензор вязких напряжений, $e_{ik} = 0.5(\nabla_i u_k + \nabla_k u_i)$ – тензор скоростей деформаций, $\mu_{ef} = \mu_{mol} + \mu_{turb}$ – эффективная вязкость, $H = E + p/\rho$ – полная энтальпия, $E = E_t + W$ – полная энергия газовой фазы, $E_t = p/[\rho(\gamma - 1)]$ – внутренняя энергия единицы массы (определяется уравнением состояния идеального калорически совершенного газа), $W = 0.5\sum_{k=1}^3 u_k^2$ – кинетическая энергия единицы массы, $E_s = C_s T$ – тепловая энергия скелетона, C_s – теплоемкость единицы объема твердой фазы, $\theta_k = -\lambda \nabla_k T$ – молекулярный тепловой поток, λ – коэффициент теплопроводности двухфазной среды, T – температура; δ_{ik} – тензор Кронекера.

Коэффициент молекулярной вязкости предполагается функцией локальной температуры воздуха T и задается полуэмпирической формулой Сазерленда. Коэффициент теплопроводности газа λ_g связан с коэффициентом динамической вязкости μ числом Прандтля, которое предполагается постоянным и равным $Pr = 0.733$. Коэффициент теплопроводности твердой фазы λ_s считается постоянным и определяется свойствами материала. Коэффициент теплопроводности двухфазной среды $\lambda = \alpha \lambda_g + (1 - \alpha) \lambda_s$.

Объемная сила g_i в уравнении (2) представляет собой вязкую силу трения, действующую со стороны скелетона на газ. Она зависит от локальной скорости и плотности газа и микрострукту-

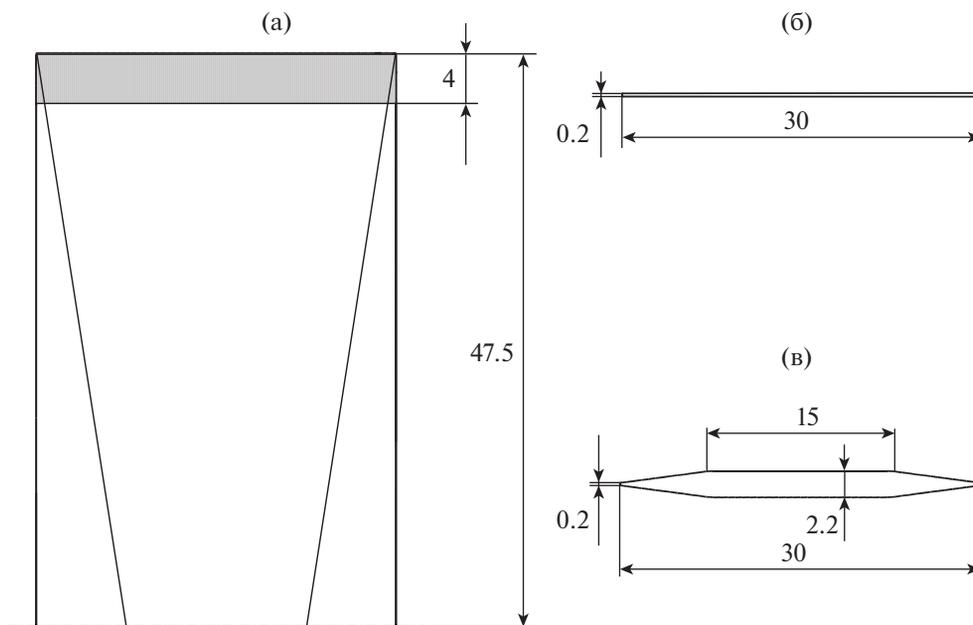


Рис. 1. Схема крыла: общий вид (а), профиль у кромки (б) и у основания (в).

ры скелетона (или микроструктуры пор). В общем случае вязкая сила трения может быть записана через коэффициент вязкого сопротивления в форме Эргана [17]

$$g_i = \frac{(1 - \alpha) s_p C_d \rho |\mathbf{u}|}{8}$$

где $s_p = S_{elem}/V_{elem}$ — дисперсность скелетона, равная отношению площади межфазной поверхности к объему скелетона в единице физического объема, C_d — коэффициент сопротивления, определяемый по эмпирическим формулам Эргана в зависимости от числа Рейнольдса и пористости.

Более полное описание используемых численных алгоритмов и математической модели можно найти в [18].

Параллельные алгоритмы численного решения были реализованы на многопроцессорной системе К-100 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [19].

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Для исследования вихревого следа в сверхзвуковом течении использовалось прямое крыло с передней и задней кромками толщиной 0.2 мм. Хорда крыла 30 мм, полуразмах 47.5 мм. Профили крыла у основания и на внешней кромке показаны на рис. 1. Форма крыла между заданными профилями такая, что все поверхности плоские — плоский четырехугольник в средней части, треугольники у передней и задней кромки. На рис. 1 показана схема крыла в плане.

Конец крыла (на рис. 1 заштрихован клетчатой штриховкой) выполнен из пористого материала с разными значениями пористости, т.е. объемной доли газовой фазы.

Пористый материал в применяемой модели считается непрерывной двухфазной средой, определяемой двумя параметрами: пористостью α , т.е. отношением объема газовой фазы к общему объему, и характерным размером пор, интерпретируемым как средний диаметр каналов в пористом материале.

Выполнены контрольный расчет для сплошного крыла и расчеты для 5 значений пористости $\alpha = 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

Характерный размер пор считался равным 0.1 мм.

Все расчеты производились для одинакового набегающего потока с числом Маха $M = 3$, числом Рейнольдса относительно 1 м $Re = 8803209$, углом атаки $\alpha = 10^\circ$.

С целью проверки сеточной сходимости расчеты выполнялись на двух сетках.

Сетка 1: блочно-регулярная, состоящая из 5951600 ячеек, со сгущением к поверхности крыла, передней и задней кромке, а также к боковой кромке. Толщина ячеек у поверхности крыла 0.04 мм. Размер области за крылом – 9 хорд, с внешней стороны крыла – равно полуразмаху. На поверхности сплошной части крыла и на границе между сплошной и пористой частями установлено условие прилипания. На плоскости $z = 0$, на которой расположено основание крыла, установлено условие зеркальной симметрии, на передней границе области – условие сверхзвукового входа, на остальных внешних границах – условие экстраполяции.

Сетка 2: блочно-регулярная, число ячеек 7312800, вблизи передней и задней кромок размер ячеек в направлении x (продольном) по сравнению с сеткой 1 уменьшен в 10 раз, в направлении z (горизонтальном поперечном) вблизи боковой кромки – в 1.5 раза. В направлении y размер ячеек такой же.

Начало координат находится на плоскости симметрии у передней кромки крыла. Ось x направлена по течению газа, ось z – от плоскости симметрии к краю крыла, ось y – перпендикулярно течению вниз. Геометрические координаты выражены в метрах.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Анализ результатов численного моделирования показал, что при всех рассмотренных значениях пористости формируется концевой вихрь, аналогичный вихрю на сплошном крыле, но не вблизи края пористой законцовки крыла, а вблизи окончания сплошного участка. Над пористой частью крыла возникает зона циркуляции, но центр вихря во всех случаях оказывается над сплошной частью.

Поскольку воздух, перетекающий с нижней стороны крыла, проходит теперь сквозь пористый материал, скорость его уменьшается, вихрь приобретает сложную несимметричную структуру и в большинстве случаев становится менее интенсивным. При больших значениях пористости интенсивность вихря может увеличиваться (рис. 7).

На рис. 2 можно видеть структуру вихрей в поперечной плоскости, проходящей через заднюю кромку крыла для различных значений пористости и контрольного расчета со сплошным крылом. Изображены векторные линии поля скоростей поперечного движения (u_z, u_y). Пористая часть крыла обведена пунктиром.

Интересно, что при $\alpha = 0.8$ структура вихря качественно похожа на вихрь при сплошном крыле, вихрь только смещен на ширину пористой законцовки. Это означает, что материал с такой пористостью оказывает уже небольшое влияние на структуру течения, крыло почти эквивалентно сплошному крылу меньшего размаха. Однако наблюдаются некоторые количественные отличия.

Изменение вихревой структуры приводит к изменению распределения давления. На рис. 3 показаны коэффициенты давления на поверхности крыла в сечении $z = 0.042$ для контрольного сплошного крыла и для $\alpha = 0.6$. Видно, что уменьшается давление на нижней поверхности крыла и увеличивается на верхней.

На рис. 4 показаны результаты расчетов для 2 сеток. Здесь коэффициенты давления для $\alpha = 0.6$, вычисленные с использованием сетки 2, такие же, как на рис. 3 сравниваются с расчетом на сетке 1. Видно, что есть отличие вблизи передней кромки крыла, где формируется ударная волна, но на большей части поверхности крыла расхождения невелики.

Перераспределение давления приводит к изменению лобового сопротивления крыла, подъемной силы и аэродинамического качества. В табл. 1 показаны аэродинамические коэффициенты для средней части крыла (C_{xs}, C_{ys}) и для края крыла, который при $\alpha \neq 0$ является пористым. Сопротивление средней (сплошной) части крыла состоит из двух составляющих: сопротивления давления и сопротивления трения на поверхности материала. При обтекании пористого материала к ним добавляется третья: трение внутри материала. При малых значениях α воздух обтекает материал, течение внутри материала незначительно, и поэтому третья составляющая мала. При больших α значительная часть воздуха проходит сквозь материал, но сопротивление внутреннего трения мало из-за большого количества пустот в материале. Наибольшее сопротивление должно наблюдаться при средних значениях α , и мы видим, что при $\alpha = 0.6$ оно действительно выше, чем при других значениях.

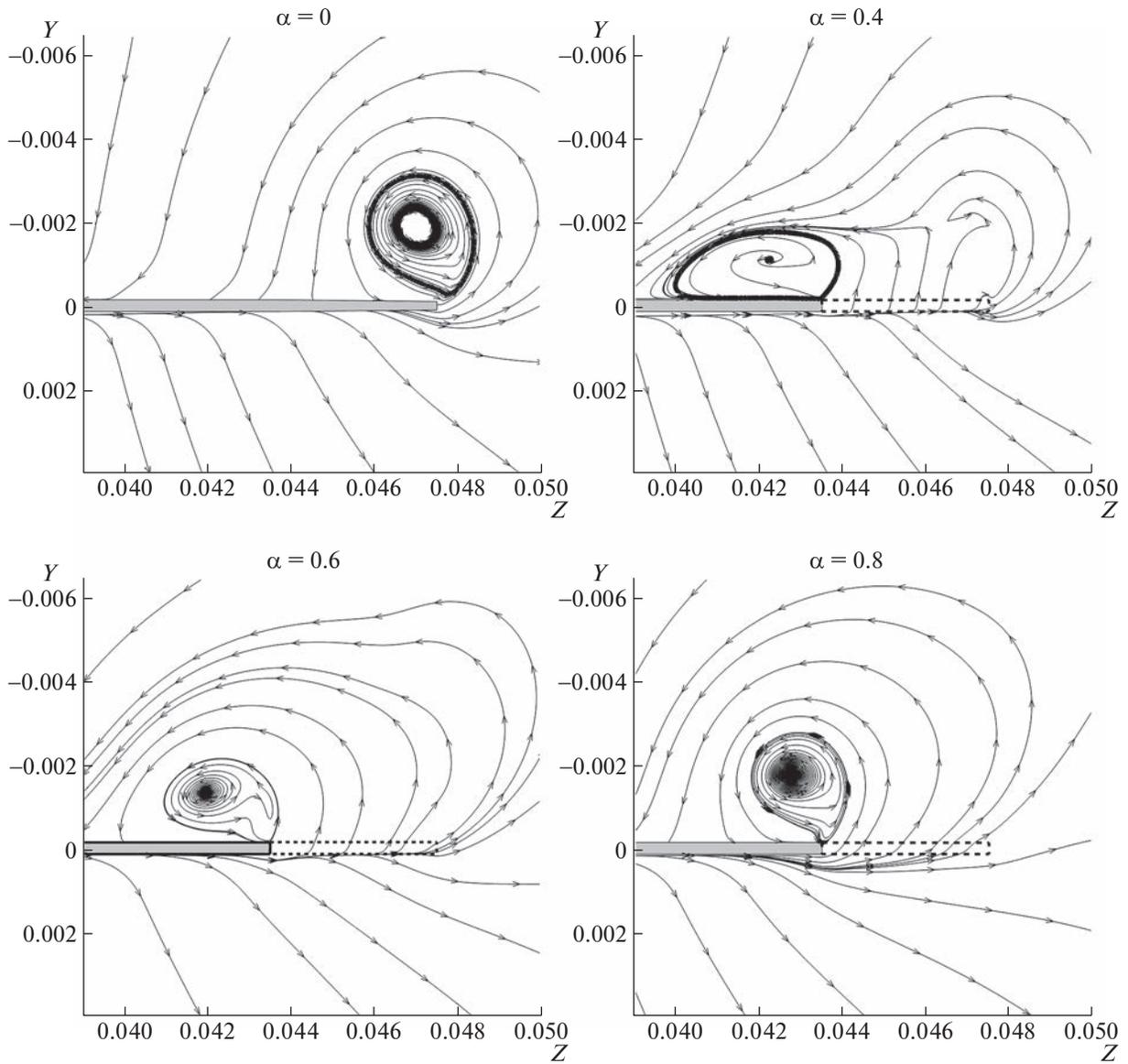


Рис. 2. Векторные линии поля скоростей поперечного движения (u_z, u_y) в плоскости сечения $x = 0.0293$ (задняя кромка крыла) при разных значениях пористости α .

Различия в структуре и интенсивности вихря сохраняются в процессе его эволюции вниз по потоку. На рис. 5 изображены продольная завихренность $\Omega_x = \partial u_z / \partial y - \partial u_y / \partial z$ и число Маха в центре вихря для сплошного крыла и для $\alpha = 0.6$.

Таблица 1

пористость	0	0.6	0.8	0.9
C_{xs}	0.3	0.292	0.294	0.295
C_{xp}	0.019	0.068	0.025	0.009
C_x	0.319	0.360	0.319	0.304
C_{ys}	1.263	1.22	1.228	1.229
C_{yp}	0.084	0.028	0.008	0.002
C_y	1.347	1.248	1.236	1.231
K	4.22	3.47	3.87	4.05

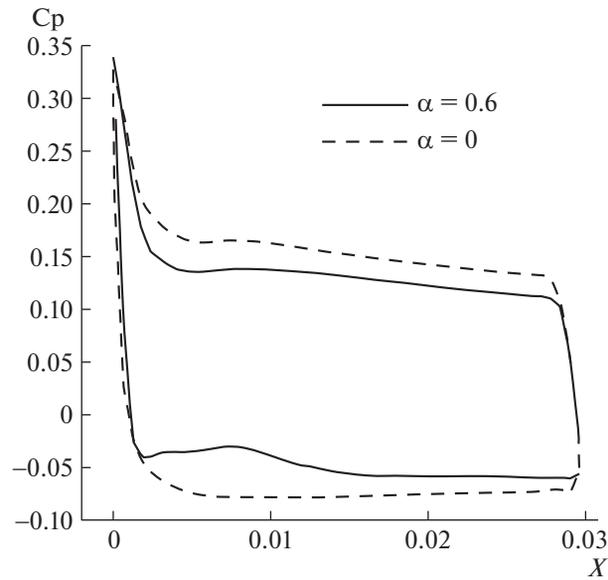


Рис. 3. Коэффициент давления на поверхности крыла $z = 0.042$.

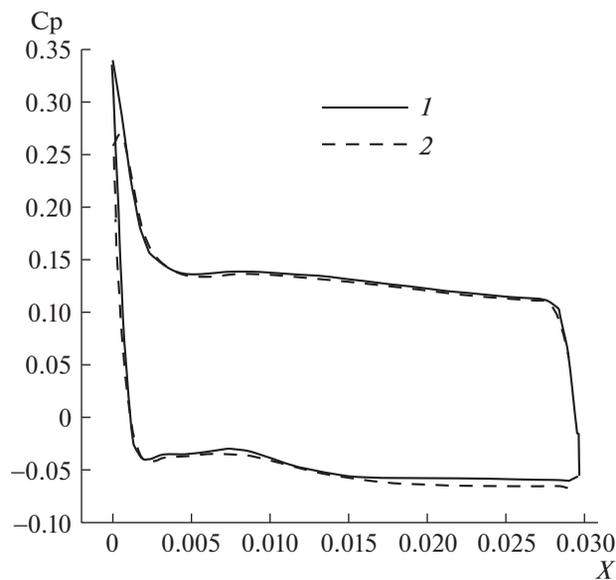


Рис. 4. Коэффициент давления в расчетах на двух сетках: сетка мелкая 1 и грубая 2.

Число Маха на оси вихря в случае пористой законцовки существенно меньше. При этом скорость газа отличается незначительно, более высокими оказываются скорость звука и давление.

На рис. 6 изображены изолинии продольной завихренности для сечения $x = 0.2348$ (6.85 хорд от задней кромки) за сплошным крылом (сплошные линии) и крылом, оснащенным пористой законцовкой с пористостью $\alpha = 0.6$ (пунктир). Для наглядности здесь же изображены контуры крыла и его задней кромки. Пористая законцовка закрашена серым. Видно, что завихренность существенно уменьшилась (максимум 23.9 вместо 29.7), а центр вихря сместился от края к границе между сплошной и пористой частями крыла.

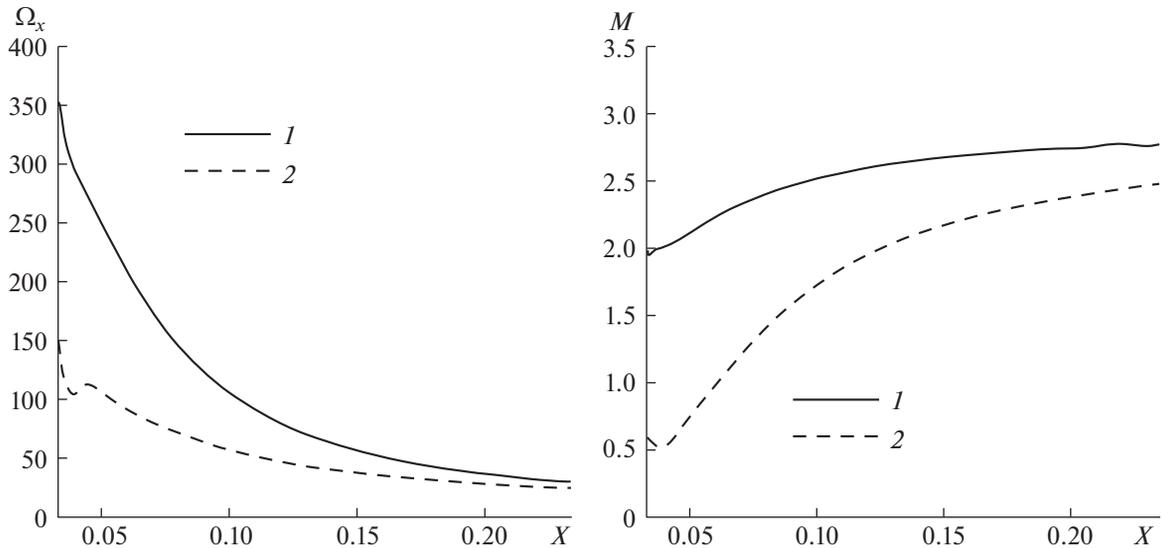


Рис. 5. Продольная завихренность ($\Omega_x, 10^3 \text{ c}^{-1}$) и число Маха (M) в центре вихря: крыло пористое 1 и сплошное 2.

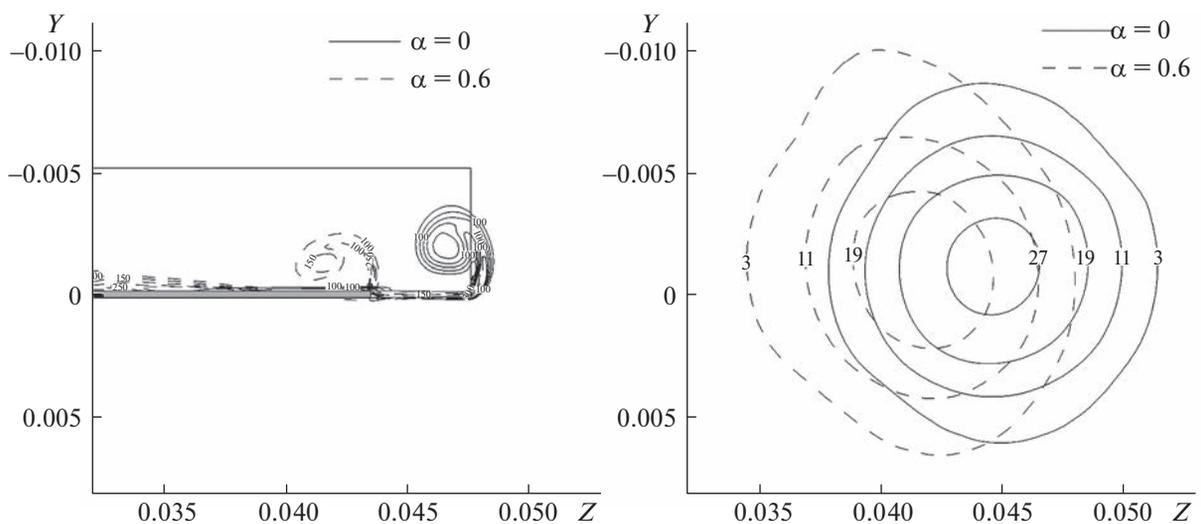


Рис. 6. Изолинии продольной завихренности (10^3 c^{-1}) в сечениях $x = 0.0293$ (слева) и $x = 0.2348$ (справа).

На рис. 7 показаны параметры течения – продольная завихренность (Ω_x) и тангенциальное число Маха (M_{yz}) вдоль линии, проходящей через центр вихря перпендикулярно его оси. Представлены сечения $x = 0.1348$ (на расстоянии 3.5 хорд за кромкой) и $x = 0.2348$ (6.85 хорд). Показаны графики для гладкого крыла ($\alpha = 0$) и трех значений пористости $\alpha = 0.4, 0.6, 0.8$.

Несмотря на то что на сплошном крыле ($\alpha = 0$) и крыле с пористой законцовкой центры вихря находятся в разных местах по координате z , на рис. 7 видно, что положение центра вихря по координате y во всех случаях близко. Интересно, что структуры вихря на сплошном крыле и на крыле с $\alpha = 0.8$ очень похожи, отличаются значительно меньше, чем на крыльях с другими значениями пористости. Это говорит о том, что законцовка с высокой пористостью оказывает небольшое влияние на вихрь, такое крыло почти эквивалентно гладкому крылу меньшего размаха.

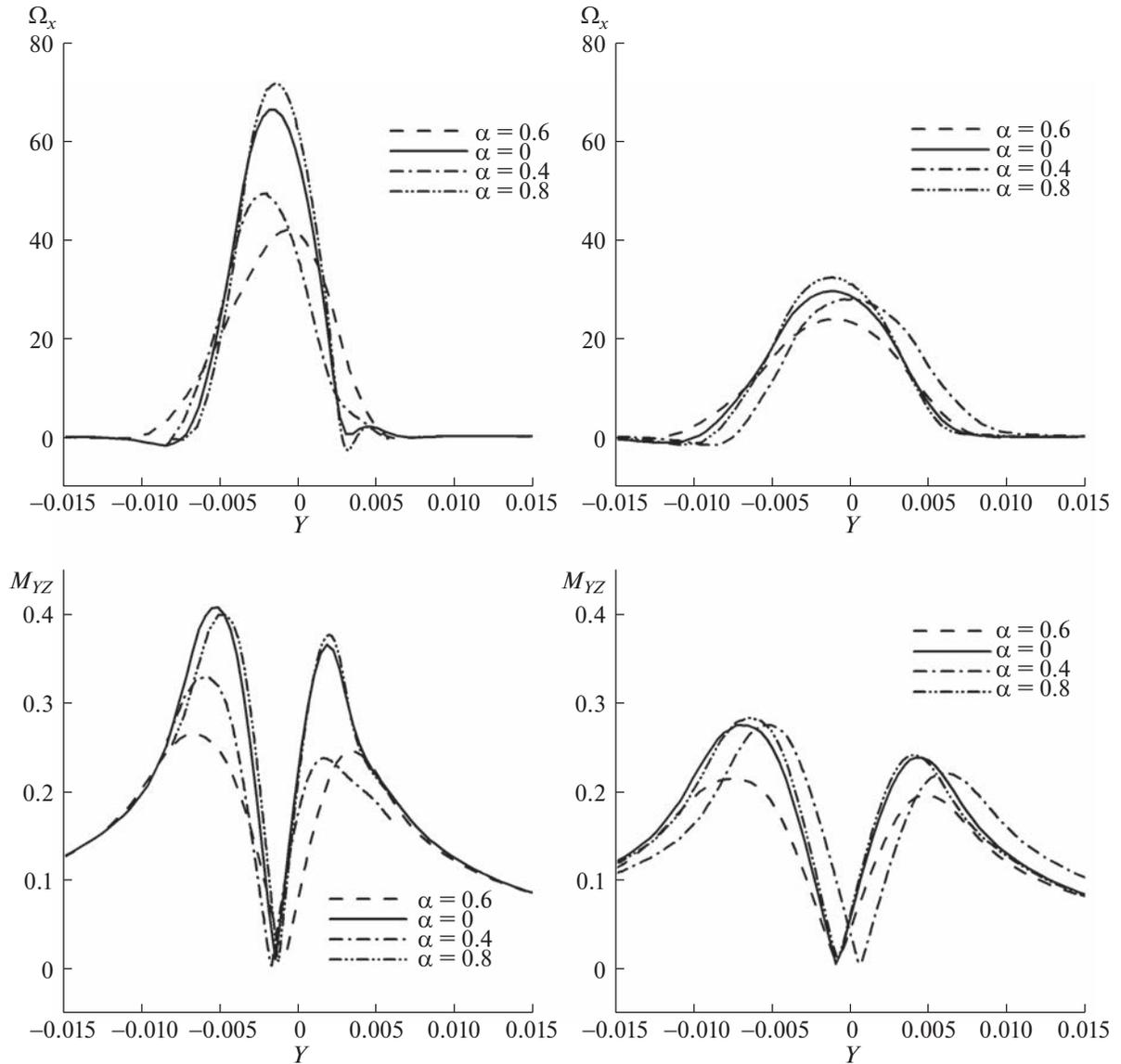


Рис. 7. Продольная завихренность (Ω_x) и тангенциальное число Маха (M_{yz}). в сечениях $x = 0.1348$ и $x = 0.2348$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты численного исследования концевой вихря в сверхзвуковом потоке при числе Маха $M = 3$ для крыла, имеющего законцовку из пористого материала с различными значениями пористости. Для расчетов использовались математическая модель течения газа сквозь пористую среду, алгоритмы моделирования турбулентных течений и их параллельная реализация на многопроцессорных вычислительных системах.

Из полученных численных результатов видно, что у крыла с пористой законцовкой образуется концевой вихрь, аналогичный тому, что образуется на сплошном крыле. Однако параметры, структура и положение вихря существенно отличаются. Во всех рассмотренных случаях вихрь образуется у края сплошной части крыла, а не у края пористого материала.

При значениях пористости меньше 0.8 вихрь становится менее интенсивным, при пористости 0.8 и 0.9 интенсивность вихря немного увеличивается. Лобовое сопротивление и подъемная сила уменьшаются. Таким образом, появляется возможность управлять процессом генерации вихря.

Расчеты выполнены для модельного крыла простой геометрии. Это показывает принципиальную возможность управления параметрами концевой вихря при помощи пористых законцо-

вок. При другой геометрии крыла эффекты могут быть другими. Представляет интерес и может быть предметом дальнейших исследований аналогичная задача с треугольным крылом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00470.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гиневский А.С., Желанников А.И.* Вихревые следы самолетов. М.: Физматлит, 2008. 172 с.
2. *Вышинский В.В., Судаков Г.Г.* Вихревой след самолета и вопросы безопасности полетов // Труды МФТИ. 2009. № 1 (3). С. 73–93.
3. *Whitcomb R.T.* A Design Approach and Selected Wind-Tunnel Results at High Subsonic Speeds for Wing-Tip Mounted Winglets // NASA-TN-D-8260, 1976.
4. *Keenan J.A., Kuhlman J.M.* The Effects of Winglets on Low Aspect Ratio Wings at Supersonic Mach Numbers // NASA Contractor Report 4407.
5. *Корнилов В.И., Бойко А.В.* Экспериментальное моделирование вдува воздуха в турбулентный пограничный слой при помощи внешнего напорного потока // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. Вып. 10. С. 8–46.
6. *Лысенко В.И., Смородский Б.В., Ермолаев Ю.Г., Гапонов С.А., Косинов А.Д., Семенов Н.В., Яцких А.А.* Влияние инъекции тяжелого газа в пристеночный слой сверхзвукового пограничного слоя на его переход // Сибирский физический журнал. 2017. Т. 12. № 1. С. 50–56.
7. *Циберкин К.Б.* О структуре поля скорости стационарного течения вблизи границы раздела однородной жидкости и пористой среды Бринкмана // Журнал технической физики. 2016. Т. 8. Вып. 8.
8. *Шиплюк А.Н., Буров Е.В., Маслов А.А., Фомин В.М.* Влияние пористых покрытий на устойчивость гиперзвуковых пограничных слоев // Прикладная механика и техническая физика (ПМТФ). 2004. Т. 45. № 2. С. 169–176.
9. *Фомин В.М., Запругаев В.И., Локотко А.В., Волков В.Ф., Луцкий А.Е., Меньшов И.С., Максимов Ю.М., Кирдяшкин А.И.* Аэродинамические характеристики тела вращения с газопроницаемыми участками поверхности // Прикладная механика и техническая физика (ПМТФ). 2010. Т. 51. № 1. С. 79–88.
10. *Willis B.P., Davis D.O., Hingst W.R.* Flowfield Measurements in a Normal-Hole-Bled Oblique Shock-Wave and Turbulent Boundary-Layer Interaction // AIAA Paper 1995–2885 (July 1995).
11. *Poplavskaya T.V., Kirilovskiy S.V., Mironov S.G.* Supersonic flow around a cylinder with front gas-permeable insert which modeled by skeleton of porous material // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1770. 030067.
12. *Schuelein E.* Shock-wave control by permeable wake generators // 5th Flow Control Conference, Fluid Dynamics and Co-located Conferences, Chicago, Illinois, 28 June – 1 July 2010.
13. *Фомин В.М., Миронов С.Г., Сердюк К.М.* Снижение волнового сопротивления тел в сверхзвуковом потоке с помощью пористых материалов // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 3.
14. Winglet with injected flow. <https://technology.nasa.gov/contact-us/TOP2-289>
15. *Меньшов И.С., Северин А.В.* Программный комплекс S3D. https://cfd.imamod.ru/FILES/2015/2015_CF-DWeekend_Abstracts.pdf
16. *Baer M.R., Nunziato J.W.* A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. Multiphase Flow. 1986. 12. P. 861–889.
17. *Ergun S.* Fluid flow through packed columns // Chem. Eng. Prog. 48 1952.
18. *Северин А.В., Луцкий А.Е., Меньшов И.С.* Управление высокоскоростным течением в канале при помощи пористых вставок // Матем. моделирование. 2022. V. 34. № 4. С. 100–112.
19. Вычислительные комплексы МВС-Экспресс, К-100 и К-60 ИПМ РАН. <http://www.kiam.ru>

УДК 532.546.2

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫТЕСНЕНИЯ МАСЛА МИЦЕЛЛЯРНЫМ РАСТВОРОМ С ДОБАВЛЕНИЕМ НАНОЧАСТИЦ ИЗ НАСЫПНОЙ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

© 2023 г. А. И. Муллаянов^{a,b,*}, Ю. А. Питюк^{a,b,**}

^aУфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

^bООО РН-БашНИПИнефть, Уфа, Россия

*E-mail: mullayanovalmir@mail.ru

**E-mail: pityukyulia@gmail.ru

Поступила в редакцию 05.12.2022 г.

После доработки 16.12.2022 г.

Принята к публикации 16.12.2022 г.

Представлены результаты лабораторных исследований особенностей фильтрационных процессов в физической модели пористой среды, полученной спеканием стеклянных шариков. Описана программа изготовления физических моделей, представлены результаты эффективности вытеснения вазелинового масла различными составами. В качестве агентов вытеснения рассматривались вода, минерализованная вода, мицеллярные растворы, наножидкости и мицеллярные растворы с добавлением наночастиц. На основе анализа изображений получены кривые изменения насыщенности модельной пористой среды вазелиновым маслом при вытеснении различными составами. Показано, что мицеллярные растворы с добавлением наночастиц являются наиболее эффективными агентами вытеснения масла по сравнению с другими представленными составами.

Ключевые слова: пористая среда, вытеснение, поверхностно-активные вещества, мицеллярный раствор, микроэмульсия, наночастицы, лабораторное исследование

DOI: 10.31857/S1024708422600956, EDN: ТМУНУЕ

С ростом спроса на энергоресурсы перед нефтяной отраслью стоят неотложные задачи по увеличению производительности скважин. Рост трудноизвлекаемых запасов ведет к ориентированию внимания к новым методам увеличения нефтеотдачи. Одним из широко используемых методов увеличения нефтеотдачи является использование различных химических реагентов, которые могут уменьшить негативное влияние капиллярных сил и изменить направление фильтрационных потоков пластовых флюидов, что в свою очередь может привести к интенсификации притока нефти и росту коэффициента извлечения нефти.

Поверхностно-активные вещества (ПАВ) совместно с водой впервые были использованы для повышения нефтеотдачи еще в 1927 г. При достаточных концентрациях молекулы ПАВ в воде ориентируются в виде агрегатов, называемых мицеллами [1]. Начиная с 1968 г., последовало множество исследований с использованием мицеллярных растворов воды, углеводородов и ПАВ [2]. Мицеллярные агрегаты могут захватывать жидкости в своих центрах, вследствие чего они набухают. Эти набухшие мицеллы также называют микроэмульсиями. Есть три типа микроэмульсий [3]: прямая, обратная и с непрерывной структурой. Использование микроэмульсии для повышения нефтеотдачи представляет значительный интерес [4]. Микроэмульсии, как метод увеличения нефтеотдачи, считается важным предметом недавних исследований [5]. Оценка применимости микроэмульсий для повышения нефтеотдачи проводится с помощью исследований фазового поведения (пробирочный тест) [6]. Наиболее важными факторами, влияющими на фазовое поведение микроэмульсии, являются свойства поверхностно-активных веществ [7], сорбитора [8], нефти [9], солёность [10], соотношения воды к нефти [11], водородный показатель pH [12]. ПАВ разделяются на четыре группы: анионные (отрицательный заряд молекул), катионные (положительный заряд молекул), неионогенные (незаряженные молекулы) и амфотерные (как положительно, так и отрицательно заряженные молекулы) [13]. В коллекторах из песчаника применяются анионные ПАВ за счет низкой адсорбции [14]. Катионные ПАВ адсор-

бируются в обломочных коллекторах, и поэтому их более выгодно использовать в карбонатных породах [15]. Содержание соли влияет на средний гидродинамический диаметр капель микроэмульсии и их дисперсию, увеличение концентрации соли приводит к увеличению диаметра капель [16]. Кроме того, содержание соли влияет на коэффициент поверхностного натяжения между несмешивающимися фазами, который является важным показателем для повышения нефтеотдачи [17]. Поверхностное натяжение микроэмульсий значительно ниже по сравнению с системами, в которых присутствует только ПАВ [16]. Размеры частиц в микроэмульсиях меньше 100 нм, что обеспечивает высокую гравитационную стабильность [18], прозрачность [19] и подвижность в пористой среде [20]. На стабильность и оптические свойства может повлиять уменьшение диаметра дисперсной фазы, но ее термодинамические и физико-химические свойства могут не измениться [21]. Более того, микроэмульсия является неньютоновской жидкостью. Увеличение скорости сдвига приводит к снижению ее эффективной вязкости. Низкая эффективная вязкость и высокая скорость сдвига облегчают закачку в пласт. Увеличение отношения соразтворителя к ПАВ снижает вязкость в два раза. Обычно соразтворителем или дополнительным ПАВ для приготовления мицеллярных растворов с целью снижения вязкости является спирт [22].

Микроэмульсии, стабилизированные ПАВ с наночастицами, часто используются в нефтедобыче для уменьшения капиллярных сил [23]. Кроме того, увеличивается устойчивость к седиментации в растворах за счет наличия наночастиц, которые могут уравнивать поверхностные силы и силу тяжести [24]. Также в работах сообщается об увеличении стабильности микроэмульсий в условиях высокой температуры пласта при добавлении наночастиц [25]. Наночастицы обладают способностью изменять смачиваемость твердых поверхностей за счет их самоструктурирования [26], что способствует движению границы раздела флюидов и отделению нефти от поверхности [27]. Одним из примеров наночастиц является диоксид кремния. Его легко производить, обладает хорошо известными физико-химическими свойствами и может быть изготовлен с различными характеристиками, такими как гидрофобность или гидрофильность. Он является одним из самых распространенных нетоксичных неорганических материалов и имеет более низкую стоимость производства, чем другие наночастицы. Современные исследования показали, что присутствие наночастиц в микроэмульсиях может увеличить нефтеотдачу, однако особенности межфазных взаимодействий и влияние характеристик породы все еще недостаточно изучены [28].

Анализ текущего состояния исследований подтверждает эффективность использования мицеллярных растворов для мобилизации остаточной нефти в пористой среде. В рамках данной работы предлагается исследовать влияние включения наночастиц в состав микроэмульсии на эффективность вытеснения остаточной нефти в насыпной пористой среде с фиксируемой геометрией. Новизной работы являются как методика создания насыпной модели с постоянной геометрией порового пространства, так и результаты лабораторных исследований по вытеснению масла различными составами в модельной пористой среде.

1. ЭКСПЕРИМЕНТ

1.1. Материалы

Для создания пористой среды использовались цельные стеклянные шарики (Weissker) размером 106–600 мкм. В работе использовались наночастицы оксида кремния площадью поверхности 200 м²/г Aerosil R200 (Evonik Industries AG). Для водных растворов применялась очищенная системой Milli-Q (Millipore) деионизированная вода с динамической вязкостью 1 мПа·с и плотностью 1000 кг/м³. Гидрофильные наночастицы оксида кремния весовой концентрации 0.5% были диспергированы в воде с помощью ультразвукового диспергатора. Свойства наночастиц приведены в табл. 1.

Мицеллярные растворы изготавливались добавлением в воду хлорида натрия и ПАВ додецилсульфат натрия (СДС) совместно с бутанолом в соотношении 90: 5: 5 соответственно. Соотношение СДС и бутанола варьировалось в разных пропорциях. Мицеллярные растворы с наночастицами были изготовлены аналогично, только вместо воды использовалась наножидкость. В качестве аналога нефти использовалось вазелиновое масло с динамической вязкостью 60 мПа·с и плотностью 800 кг/м³ при температуре 25°C. Для контрастирования изображений масло подкрашено жирорастворимым красителем (Судан). Физико-химические свойства масла не изменялись в процессе проведения исследования. Все составы, используемые в лабораторных исследованиях, представлены в табл. 2. Коэффициент поверхностного натяжения на границе с

Таблица 1. Физико-химические свойства Aerosil R200

Свойства	Единица измерения	Значение
Удельная площадь поверхности	м ² /г	200 ± 25
Средний размер первичных частиц	нм	12
Насыпная плотность	г/л	50
pH	—	3.7–4.7
Содержание SiO ₂	%	99.8

Таблица 2. Составы для лабораторных исследований

№ состава	Наименование	Коэффициент поверхностного натяжения, мН/м	
1	Вода	72.5	
2	Вода+NaCl в соотношении 95: 5	71.6	
3	Вода+ 0.5% Aerosil R200	58.5	
4	Вода+СДС в соотношении 90: 10	35.0	
5	Мицеллярный раствор	Вода+NaCl+СДС+Бутанол в соотношении (90: 5: 2.5: 2.5)	27.2
6		Вода+NaCl+СДС+Бутанол в соотношении (90: 5: 1.66: 3.33)	26.8
7		Вода+NaCl+СДС+Бутанол в соотношении (90: 5: 1.25: 3.75)	26.3
8	Мицеллярный раствор + + наночастицы	Состав 5+0.5% Aerosil R200	26.2
9		Состав 6+0.5% Aerosil R200	26.3
10		Состав 7+0.5% Aerosil R200	25.3

воздухом определен методом пластины Вильгельми [29]. Из табл. 2 видно, что состав 10 имеет наименьший коэффициент поверхностного натяжения.

1.2. Физическая модель пористой среды

Модель пористой среды изготовлена путем спекания стеклянных шариков. Из минерального стекла была собрана ячейка с размерами внутренней полости 162 мм × 25 мм × 1 мм. Алмазной коронкой в ячейке были просверлены отверстия диаметром 5 мм для входа и выхода жидкости. Внутренняя полость ячейки была заполнена шариками, после чего ячейка помещалась в печь. На основе серии экспериментов была разработана программа спекания, которая представлена в табл. 3. Спекание шариков позволило создать неизменяемую структуру пустотного пространства, которая использовалась для проведения фильтрационных исследований. Фотография модели пористой среды представлена на рис. 1. Оценка пористости проведена весовым методом с учетом паразитных полостей, которая составила 25%, поровый объем составил 1 см³, проницаемость по воде составила 62 мкм².

1.3. Лабораторная установка

Исследования вытеснения вязкой жидкости из пористой среды проводились на лабораторной установке, представленной на рис. 2, которая состояла из насоса объемного расхода, датчиков давления, фотоаппарата, системы освещения. Модель пористой среды насыщалась маслом под действием вакуумной инфузии, что обеспечивало 100% заполнение.

Закачка вытесняющих агентов производилась при постоянном расходе 0.2 мл/мин с помощью шприцевого насоса Cole Parmer 78-0358. Перепад давления в модели фиксировался датчиками давления MPX5700 (Motorola). Процесс вытеснения снимался на фотокамеру с частотой

Таблица 3. Программа спекания

Шаг программы	Тип	Температура, °С	Длительность, ч
1	нагрев	150	1
2		300	1
3		450	1
4		550	1
5		600	1
6		680	1
7	остывание	понижение температуры до 20	12
8	выдержка		20

1 кадр в 10 с и разрешением 12 Мп. Насыщенность фаз определялась по результатам цифровой обработки изображений с помощью программы с открытым исходным кодом ImageJ по представленной методике [30].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 3 представлены картины вытеснения вазелинового масла различными составами, представленными в табл. 2. Левая колонка соответствует началу процесса вытеснения после одной минуты закачки 0.2 мл вытесняющего агента, правая колонка соответствует картинам вытеснения после 50 минут закачки, что соответствует прокачке 10 поровых объемов. На изображениях вытеснение происходит справа – налево. Оранжевые участки на изображениях соответствуют областям пористой среды, которые заполнены маслом, светлые участки – областям, заполненным вытесняющим агентом.

Для всех составов обнаружено образование вязких пальцев, поскольку отношение вязкости вытесняемой жидкости к вытесняющей равно 60. При вытеснении водой фильтрация происходит преимущественно по крупным порам с небольшим охватом пористой среды вытесняющим агентом (составом № 1). При добавлении соли в воду (состав № 2) характер вытеснения не изменяется, но доля пористой среды, занятая вытесняющим агентом, увеличивается. При вытеснении наножидкостью (состав № 3) картины вытеснения похожи на предыдущие эксперименты. Характер вытеснения существенно изменяется при добавлении в воду ПАВ (состав № 4). В данном случае вытесняющая жидкость преимущественно движется по мелким порам, тем самым охватывая большую площадь пористой среды. Добавление в воду с ПАВ соли и спирта приводит к формированию мицеллярного раствора [3], что увеличивает долю вытесненного масла по сравнению с раствором воды с ПАВ. На рис. 3 представлены картины вытеснения составами № 5, 6 и 7, которые соответствуют различным соотношениям СДС к бутанолу (1: 1, 1: 2, 1: 3). Доля вытесненного масла увеличивается за счет формирования микроэмульсии на межфазной поверхности, что приводит к уменьшению коэффициента поверхностного натяжения и существенно изменяет характер вытеснения. Добавление наночастиц в составы № 5, 6 и 7 с разным соотношением СДС к бутанолу, что соответствует составам № 8, 9 и 10, дополнительно увеличивает охват пористой среды. Данный факт объясняется влиянием наночастиц на изменение смачиваемости поверхности и требует более детального исследования на микроуровне, которое выполняется в рамках других работ.

**Рис. 1.** Модель пористой среды.

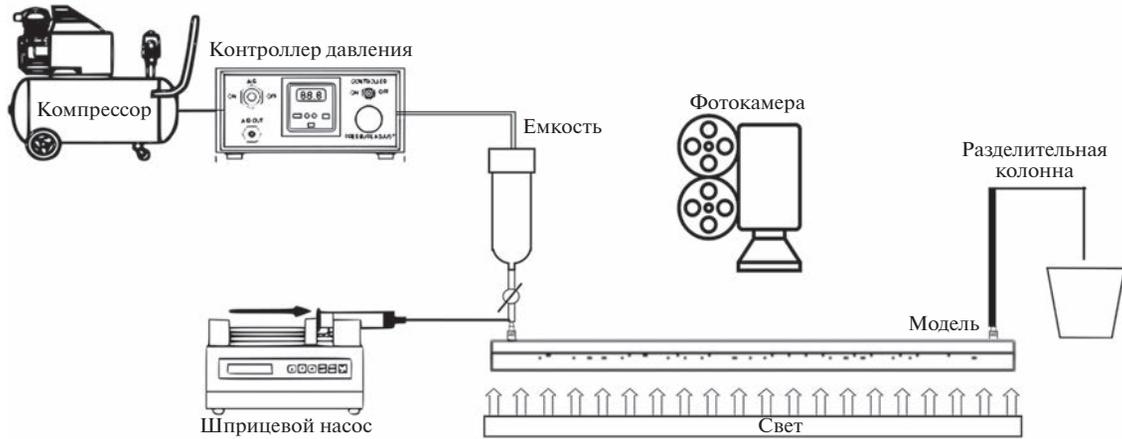


Рис. 2. Схема лабораторной установки.

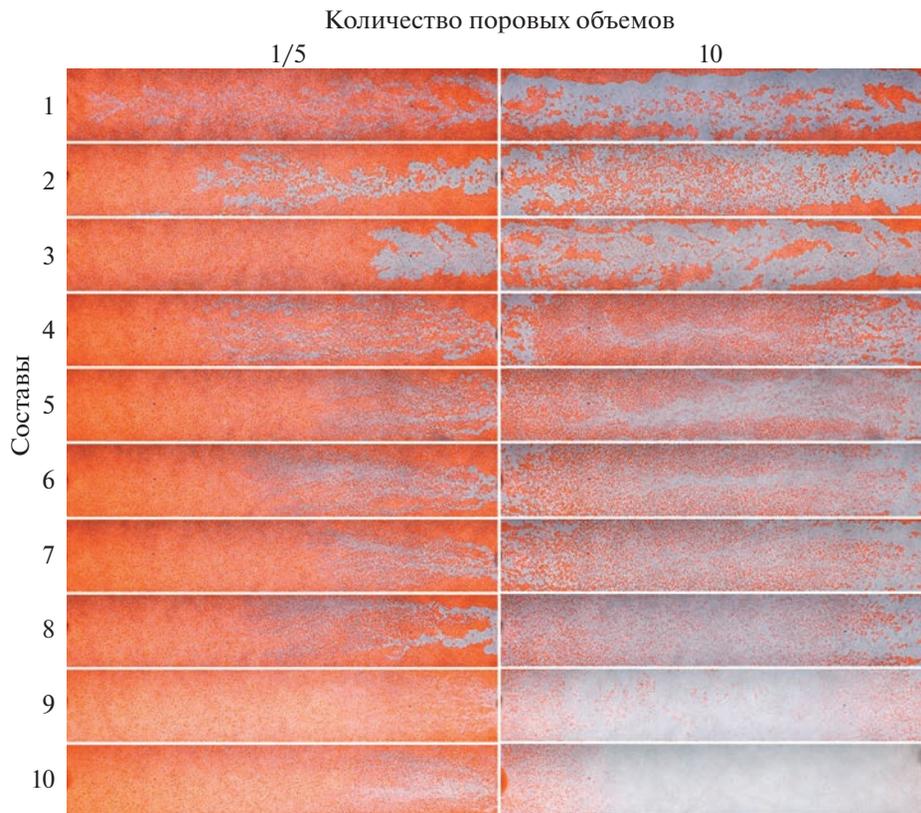


Рис. 3. Динамика вытеснения масла различными составами.

Количественный анализ доли вытесненного масла из насыпной модели для различных составов, представленных в табл. 2, в зависимости от прокачанных поровых объемов представлен на рис. 4. Из рисунка видно, что после прокачки 5 поровых объемов основной объем вытесненного масла из модели для воды не изменяется, однако для других агентов постепенно уменьшается. На рис. 5 представлена доля остаточного масла после прокачки 10 поровых объемов различных составов. Из рис. 5 следует, что при вытеснении водой (состав № 1) из модели вытесняется 53% масла, в случае 5% соленого водного раствора (состав № 2) – 55%, наножидкости (состав № 3) – 63%, воды с ПАВ (состав № 4) – 59%. При вытеснении мицеллярным раствором для состава № 5 остаточная насыщенность масла составляет 64%, для состава № 6 – 66%, для состава № 7 – 68%,

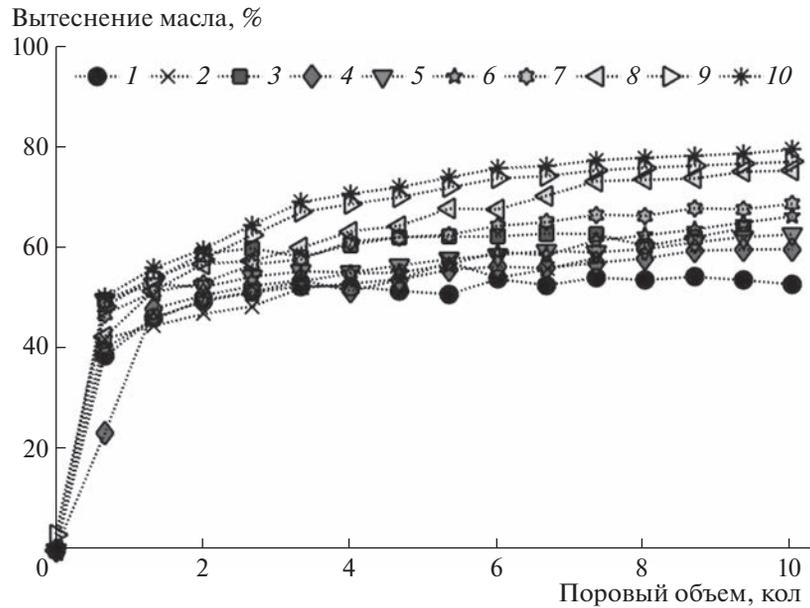


Рис. 4. Изменение насыщенности модельной пористой среды вазелиновым маслом при вытеснении различными составами.

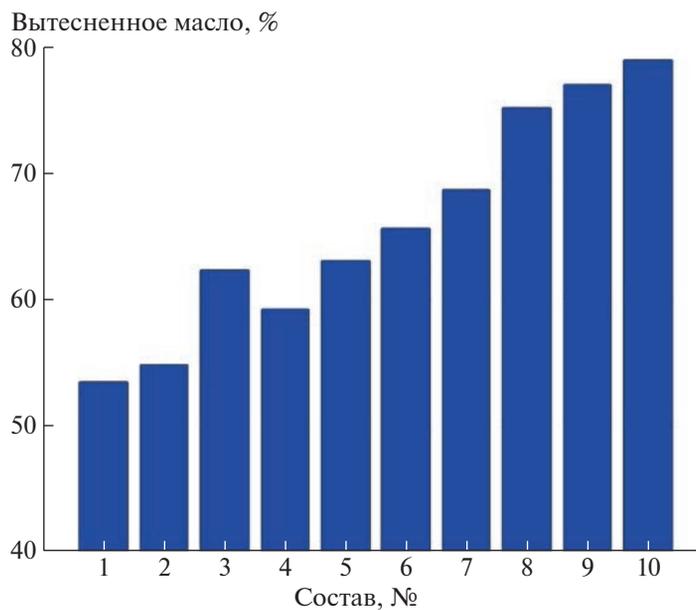


Рис. 5. Эффективность вытеснения масла различными составами.

для состава № 8 – 75%, для состава № 9 – 77%, для состава № 10 – 79%. Отметим, что при прокачке больших объемов растворов микроэмульсии с наночастицами выход масляной фазы из модели увеличивается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках исследования освоена методика изготовления насыпной модели с постоянной геометрией порового пространства, проведены исследования вытесняющей способности различных составов, в том числе растворов для микроэмульсий и микроэмульсий с наночастицами.

На основе анализа лабораторных данных получена зависимость остаточной насыщенности масла от различных агентов вытеснения. Показано, что применение мицеллярного раствора может сократить долю остаточной нефти на 15% по сравнению с водой, а мицеллярного раствора с наночастицами – на 26%. Таким образом, раствор для микроэмульсий с наночастицами диоксида кремния является наиболее эффективным агентом вытеснения масла для представленного образца насыпной модели пористой среды. Далее планируется создание модели с фиксированной геометрией из кернавого материала с различными физико-химическими свойствами, а также проведение лабораторных исследований для анализа эффективности вытеснения нефти различными агентами на созданных моделях пористой среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 21-79-10212.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Honig J.M. Van.* Nostrand chemist's dictionary, 1953.
2. *Ma K.* Adsorption of cationic and anionic surfactants on natural and synthetic carbonate materials // *J. Coll. Int. Sci.* 2013. V. 408. P. 164–172.
3. *Winsor P.A.* Solvent properties of amphiphilic compounds. Butterworths Sci. Pub. 1954.
4. *Bera A., Mandal A.* Microemulsions: a novel approach to enhanced oil recovery: a review // *J. Pet. Explor. Prod. Technol.* 2015. V. 5. № 3. P. 255–268.
5. *Southwick J.G.* Effect of live crude on alkaline/surfactant polymer formulations: implications for final formulation design // *SPE Journal.* 2012. V. 17. № 02. P. 352–361.
6. *Veiskarami S., Jafari A., Soleymanzadeh A.* Phase behavior, wettability alteration, and oil recovery of low-salinity surfactant solutions in carbonate reservoirs // *SPE J.* 2020. V. 25. № 04. P. 1784–1802.
7. *Kahlweit M., Lessner E., Strey R.* Influence of the properties of the oil and the surfactant on the phase behavior of systems of the type water–oil–nonionic surfactant // *J. Phys. Chem.* 1983. V. 87. № 24. P. 5032–5040.
8. *Kahlweit M., Strey R., Busse G.* Effect of alcohols on the phase behavior of microemulsions // *J. Phys. Chem.* 1991. V. 95. № 13. P. 5344–5352.
9. *Kumar P., Mittal K.L. (ed.).* Handbook of microemulsion science and technology. New York: Marcel Dekker, 1999. C. 1–846.
10. *Thalberg K., Lindman B., Karlstroem G.* Phase behavior of a system of cationic surfactant and anionic polyelectrolyte: the effect of salt // *J. Phys. Chem.* 1991. V. 95. № 15. P. 6004–6011.
11. *Pizzino A.* Relationship between phase behavior and emulsion inversion for a well-defined surfactant (C10E4)/n-octane/water ternary system at different temperatures and water/oil ratios // *Ind. Eng. Chem. Res.* 2013. V. 52. № 12. P. 4527–4538.
12. *Kahlweit M., Busse G., Faulhaber B.* On the Effect of Acids and Bases on Water – Amphiphile Interactions // *Langmuir.* 2000. V. 16. № 3. P. 1020–1024.
13. *Ottewill R.H., Tadros T.F.* Introduction to surfactants // *Surfactants.* 1984. P. 1–18.
14. *Muherei M.A., Junin R., Merdhah A.B.B.* Adsorption of sodium dodecyl sulfate, Triton X100 and their mixtures to shale and sandstone: a comparative study // *J. Pet. Sci. Eng.* 2009. V. 67. № 3–4. P. 149–154.
15. *Samanta A.* Surfactant and surfactant-polymer flooding for enhanced oil recovery // *Adv. Pet. Exp. Dev.* 2011. V. 2. № 1. P. 13–18.
16. *Bera A.* Screening of microemulsion properties for application in enhanced oil recovery // *Fuel.* 2014. V. 121. P. 198–207.
17. *Yekeen N.* Foaming properties, wettability alteration and interfacial tension reduction by saponin extracted from soapnut (*Sapindus Mukorossi*) at room and reservoir conditions // *J. Pet. Sci. Eng.* 2020. V. 195. P. 107591.
18. *Park S., Lee E.S., Sulaiman W.R.W.* Adsorption behaviors of surfactants for chemical flooding in enhanced oil recovery // *J. Ind. Eng. Chem.* 2015. V. 21. P. 1239–1245.
19. *Izquierdo P.* Formation and stability of nano-emulsions prepared using the phase inversion temperature method. *Langmuir.* 2002. V. 18. № 1. P. 26–30.
20. *Destefanis M.F., Savioli G.B.* Influence of relative permeabilities on chemical enhanced oil recovery // *J. Phys. Conf. Ser.* 2011. V. 296. № 1. P. 012014.
21. *Mason T.G.* Nanoemulsions: formation, structure, and physical properties // *J. Phys. Condens. Matter.* 2006. V. 18. № 41. P. R635.
22. *Karambeigi M.S.* Emulsion flooding for enhanced oil recovery: interactive optimization of phase behavior, microvisual and core-flood experiments // *J. Ind. Eng. Chem.* 2015. V. 29. P. 382–391.

23. *Qin T.* Nanoparticle-stabilized microemulsions for enhanced oil recovery from heterogeneous rocks // *Fuel*. 2020. V. 274. P. 117830.
24. *Suleimanov B.A., Ismailov F.S., Veliyev E.F.* Nanofluid for enhanced oil recovery // *J. Pet. Sci. Eng.* 2011. V. 78. № 2. P. 431–437.
25. *Karimi A.* Wettability alteration in carbonates using zirconium oxide nanofluids: EOR implications // *E. & F.* 2012. V. 26. № 2. P. 1028–1036.
26. *Zargartalebi M., Kharrat R., Barati N.* Enhancement of surfactant flooding performance by the use of silica nanoparticles // *Fuel*. 2015. V. 143. P. 21–27.
27. *Hendraningrat L., Zhang J.* Polymeric nanospheres as a displacement fluid in enhanced oil recovery // *Appl. Nanosci.* 2015. V. 5. № 8. P. 1009–1016.
28. *Pei H.H.* Investigation of nanoparticle and surfactant stabilized emulsion to enhance oil recovery in waterflooded heavy oil reservoirs // *OnePetro*. 2015.
29. *Комаров Б.Н.* О методах измерения поверхностного натяжения жидкостей // *Труды Ин-та механики Уфимского научного центра РАН*. 2007. Т. 5. С. 227–234.
30. *Fan Y., Gao K., Chen J., Li W., Zhang Y.* Low-cost PMMA-based microfluidics for the visualization of enhanced oil recovery // *Oil & Gas Sci. and Tech.* 2018. V. 73. P. 26.

УДК 532.593.2

ГЕНЕРАЦИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ НА МОРСКОМ ШЕЛЬФЕ

© 2023 г. А. А. Слепышев

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

E-mail: slep55@mail.ru

Поступила в редакцию 12.10.2022 г.

После доработки 29.11.2022 г.

Принята к публикации 30.11.2022 г.

В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны при учете горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии на двумерном течении в море постоянной глубины. В линейном приближении краевая задача для амплитуды вертикальной скорости имеет комплексные коэффициенты и решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Во втором порядке по амплитуде волны находятся вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа и вертикальные волновые потоки массы и соли. Указанные потоки приводят к генерации вертикальной тонкой структуры, которая имеет необратимый характер.

Ключевые слова: внутренние волны, волновые потоки массы, тонкая структура

DOI: 10.31857/S1024708422600749, EDN: TMNYOX

Вертикальная тонкая термохалинная структура была открыта во второй половине прошлого века с созданием высокоразрешающей зондирующей аппаратуры. Оказалось, что вертикальные профили температуры и солёности сильно изрезаны, слои с низкими градиентами температуры и солёности чередуются с высокоградиентными прослойками. Вертикальные масштабы таких неоднородностей меняются в широких пределах: от нескольких сантиметров до десятков метров. К тонкой структуре принято относить неоднородности масштабом более одного метра, неоднородности меньшего масштаба относят к микроструктуре. При распространении внутренних волн за счет кинематического эффекта создаются вертикальные деформации профилей плотности и солёности – тонкая структура, порождаемая внутренними волнами, которая имеет обратимый характер. Однако при обрушении внутренних волн создаются необратимые деформации полей температуры и солёности и тонкая структура имеет необратимый характер [1, 2]. Но не только внутренние волны ответственны за генерацию вертикальной тонкой структуры: механизм двойной диффузии, когда температура и солёность убывают с глубиной, может приводить к конвекции типа “солевых пальцев” с формированием ступенчатых структур [3–6]. Развитие этого подхода привело к созданию нелинейных математических моделей формирования микроструктуры в океане, основанных на амплитудных уравнениях термохалинной конвекции [7]. Вблизи фронтов возможно интрузионное расслоение благодаря взаимному проникновению вод с различными T , S характеристиками [8].

Если температура и солёность растут с глубиной при устойчивой стратификации, возможно развитие колебательной неустойчивости благодаря двойной диффузии с образованием ступенчатых структур [3, 9].

Мелкомасштабная турбулентность является источником тонкой структуры и микроструктуры [10]. Механизмы генерации мелкомасштабной турбулентности в стратифицированной среде – гидродинамическая неустойчивость течений и внутренних волн, обрушение внутренних волн [11, 12]. В стратифицированной среде мелкомасштабная турбулентность имеет перемежаемый характер и для ее поддержания порой достаточно незначительного сдвига скорости во внутренней волне [13]. Коэффициент вертикального турбулентного обмена M_z обычно связывают с числом Ричардсона

$Ri = \frac{N^2}{(dU/dz)^2}$, здесь N – частота плавучести, U – скорость течения, распространённая зависи-

мость $M_z \sim Ri^{-n}$. При $n > 1$ поток плавучести $M_z \cdot N^2$ растет с уменьшением градиента плотности, что приводит к формированию ступенчатых структур [14]. Это подтверждено и лабораторными экспериментами [14].

Внутренние волны повсеместно присутствуют в океане и являются источником вертикальной тонкой структуры [2]. За счет обрушений внутренних волн формируются пятна турбулентной жидкости, которые, растекаясь, могут приводить к формированию слоистой структуры, когда слои с низкими градиентами плотности, где была турбулентность, чередуются со слоями с высокими градиентами плотности стратифицированной жидкости вне турбулентных пятен. Внутренние волны нередко наблюдаются в виде цугов – локализованных в пространстве волновых пакетов [15–18]. Нелинейные эффекты при распространении пакетов внутренних волн проявляются в генерации средних на временном масштабе волны поправок к плотности и скорости течения, пропорциональных квадрату текущей амплитуды волны и которые можно трактовать как тонкую структуру, генерируемую волной [19, 20]. Однако она имеет обратимый характер, после прохождения волнового пакета невозмущенный профиль стратификации восстанавливается. Необратимая вертикальная тонкая структура генерируется внутренними волнами не только при обрушениях. Даже без обрушений внутренних волн возможна генерация необратимой вертикальной тонкой структуры. Внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают [21–23]. Вертикальные волновые потоки тепла, соли, массы отличны от нуля [24] и приводят к генерации вертикальной тонкой структуры, которая имеет необратимый характер [25]. Однако в [24, 25] уравнение для амплитуды вертикальной скорости с комплексными коэффициентами решается методом возмущений, когда решение и частота волны раскладываются в ряд по малому параметру, пропорциональному горизонтальной турбулентной вязкости. Представляет интерес решить это уравнение численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности и сравнить волновые потоки и генерируемую внутренней волной тонкую структуру с потоками и тонкой структурой, полученной методом возмущений. Поскольку коэффициенты горизонтального турбулентного обмена на три-пять порядков превышают коэффициенты вертикального турбулентного обмена [26–28], то последними пренебрегается.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются свободные внутренние волны в безграничном бассейне постоянной глубины при наличии среднего стратифицированного течения. Коэффициенты горизонтального турбулентного обмена предполагаются постоянными. В линейном приближении находятся дисперсионное соотношение и декремент затухания волны. Во втором порядке по амплитуде волны – вертикальные волновые потоки массы и соли, которые приводят к генерации вертикальной тонкой структуры.

Система уравнений гидродинамики для волновых возмущений в приближении Буссинеска имеет вид [24]

$$\frac{Du}{Dt} + w \frac{dU_0}{dz} = -\frac{\partial P}{\rho_0(0)\partial x} + K\Delta_h u \quad (1.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + w \frac{dV_0}{dz} = -\frac{\partial P}{\rho_0(0)\partial y} + K\Delta_h v \quad (1.2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\rho_0(0)\partial z} + K\Delta_h w - \frac{g\rho}{\rho_0(0)} \quad (1.3)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + w \frac{d\rho_0}{dz} = M\Delta_h \rho \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

где x, y, z – координаты прямоугольной декартовой системы координат, ось z направлена противоположно ускорению свободного падения g ; u, v, w – компоненты волновой скорости течения в указанной системе координат, ρ и P – волновые возмущения плотности и давления, ρ_0 – невозмущенная средняя плотность воды; K, M – коэффициенты горизонтальной турбулентной

вязкости и диффузии, $U_0(z), V_0(z)$ – компоненты скорости среднего течения, Δ_h – горизонтальный оператор Лапласа, $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, действие оператора D/Dt раскрывается по формуле

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + U_0) \frac{\partial}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Граничные условия на поверхности моря ($z = 0$) – условие “твердой крышки”, которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных волн [29] и отсутствие тангенциальных напряжений [22]

$$w = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = 0 \tag{1.6}$$

Граничные условия на дне – условие непротекания и отсутствие тангенциальных напряжений (условие “гладкого скольжения” [22])

$$w = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad K \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = -H \tag{1.7}$$

Здесь H – глубина моря. Тангенциальные напряжения у дна нулевые, так как коэффициентами вертикального обмена пренебрегается.

Уравнение диффузии для волновых возмущений солёности S аналогично уравнению (1.4) [30]

$$\frac{DS}{Dt} + w \frac{dS_0}{dz} = M \Delta_h S \tag{1.8}$$

где $\frac{dS_0}{dz}$ – вертикальный градиент средней солёности.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Решения линейного приближения системы (1.1)–(1.5) и уравнения (1.8), ищутся в виде [24, 25]

$$\begin{aligned} u &= u_{10}(z)A \exp(i(kx - \omega t)) + \text{с.с.}, & v &= v_{10}(z)A \exp(i(kx - \omega t)) + \text{с.с.} \\ w &= w_{10}(z)A \exp(i(kx - \omega t)) + \text{с.с.} \\ P &= P_{10}(z)A \exp(i(kx - \omega t)) + \text{с.с.}, & \rho &= \rho_{10}(z)A \exp(i(kx - \omega t)) + \text{с.с.} \\ S &= S_{10}(z)A \exp(i(kx - \omega t)) + \text{с.с.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

где с.с. – комплексно сопряженные слагаемые, A – амплитудный множитель, k – горизонтальное волновое число, ω – частота волны. Предполагается, что волна распространяется вдоль оси x .

После подстановки (2.1) в систему (1.1)–(1.5) следует связать амплитудных функций $u_{10}, v_{10}, \rho_{10}, P_{10}, S_{10}$ с w_{10} [24]

$$u_{10} = \frac{i}{k} \frac{dw_{10}}{dz}, \quad \Omega = \omega - k \cdot U_0 \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} P_{10} &= (i\Omega - Kk^2) \frac{1}{k^2} \frac{\partial w_{10}}{\partial z} + \frac{i}{k} \frac{dU_0}{dz} w_{10} \\ \rho_{10} &= \frac{w_{10}}{i\Omega - k^2 M} \frac{d\rho_0}{dz}, \quad v_{10} = \frac{w_{10}}{(i\Omega - k^2 K)} \frac{dV_0}{dz} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$S_{10} = \frac{w_{10}}{i\Omega - k^2 M} \frac{dS_0}{dz} \tag{2.4}$$

Функция w_{10} удовлетворяет уравнению [24]

$$(i\Omega - M \cdot k^2) \left\{ i\Omega w_{10} - \frac{d}{dz} \left[(i\Omega - K \cdot k^2) \frac{1}{k^2} \frac{dw_{10}}{dz} + \frac{i}{k} \frac{dU_0}{dz} w_{10} \right] - K \cdot k^2 w_{10} \right\} + N^2 w_{10} = 0 \tag{2.5}$$

где $N^2 = -\frac{g}{\rho_0(0)} \frac{d\rho_0}{dz}$ – квадрат частоты Брента–Вяйсяля.

Уравнение (2.5) эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + a(z) \cdot w_{10}(z) = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{где } a(z) = \frac{k \left(\frac{d^2 U_0}{dz^2} - \Omega \cdot k - ik^3 K + k \frac{N^2}{\Omega + ik^2 M} \right)}{\Omega + ik^2 K}$$

Граничные условия для w_{10}

$$z = 0, -H: w_{10} = 0 \quad (2.7)$$

Граничные условия (1.6), (1.7) выполняются автоматически. Краевая задача (2.6), (2.7) с комплексными коэффициентами в [24, 25] решалась методом возмущений, когда решение и частота волны искались в виде ряда по малому параметру $\varepsilon = K/\omega_* H^2$, пропорциональному горизонтальной турбулентной вязкости, ω_* – характерная частота волны. В настоящей работе данная краевая задача решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Сопоставление дисперсионных кривых, полученных двумя методами, делается ниже.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Скорости течения в представлении Эйлера \mathbf{u} и Лагранжа \mathbf{u}_L с точностью до членов второго порядка по амплитуде волны связаны следующим соотношением [31]

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u} + \left(\int_0^\tau \mathbf{u}_L d\tau \nabla \right) \mathbf{u} \quad (3.1)$$

Интегральное уравнение (3.1) решается методом итераций и с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны, после осреднения по периоду волны получается выражение для средней лагранжевой скорости [31]

$$\overline{\mathbf{u}_L} = \mathbf{U} + \left(\int_0^t \mathbf{u} d\tau \nabla \right) \mathbf{u} \quad (3.2)$$

где вектор $\mathbf{U}(U_0, V_0)$ – скорость среднего течения, \mathbf{u} – поле волновых эйлеровых скоростей, черта сверху означает осреднение по периоду волны. Скорость стокова дрейфа частиц жидкости представлена вторым слагаемым в (3.2) и определяется по формуле [31]

$$\mathbf{u}_s = \left(\int_0^t \mathbf{u} d\tau \nabla \right) \mathbf{u} \quad (3.3)$$

Вертикальная компонента скорости стокова дрейфа определяется по формуле [32]

$$w_s = iA_1 A_1^* \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right) \frac{d}{dz} (w_{10} w_{10}^*) \quad (3.4)$$

где $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$, $A = A_1$ в начальный момент времени при $t = 0$.

Вертикальный волновой поток массы определяется из (2.1), (2.3) по формуле [25]

$$\overline{\rho w} = \frac{w_{10} w_{10}^* |A_1|^2}{i\Omega - k^2 M} \frac{d\rho_0}{dz} + \text{c.c.} \quad (3.5)$$

где $A_1 = A \exp(\delta\omega \cdot t)$, $\delta\omega = \text{Im}(\omega)$ – декремент затухания волны, черта сверху означает осреднение по периоду волны.

Наличие вертикального волнового потока массы приводит к необратимой деформации поля плотности, которая может рассматриваться как вертикальная тонкая структура, генерируемая волной. Уравнение для неосциллирующей на временном масштабе волны поправки к средней плотности с точностью до членов, квадратичных по амплитуде волны имеет вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} + w_s \frac{d\rho_0}{dz} = 0$$

Отсюда в горизонтально-однородном случае

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} + w_s \frac{d \bar{\rho}_0}{dz} = 0 \quad (3.6)$$

Проинтегрируем уравнение (3.6) по времени

$$\Delta \bar{\rho} = - \int_0^t \left(\frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} + w_s \frac{d \bar{\rho}_0}{dz} \right) dt' \quad (3.7)$$

Подставляя $\bar{\rho} w$ (3.5) и вертикальную компоненту скорости стокова дрейфа w_s (3.4) в (3.7), получим после интегрирования

$$\bar{\Delta \rho} = \left[\frac{\partial \bar{\rho} w^0}{\partial z} + w_s^0 \frac{d \bar{\rho}_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2\delta\omega} (1 - e^{2\delta\omega t}) \quad (3.8)$$

где $\bar{\rho} w^0 = \frac{w_{10} w_{10}^* |A_1|^2}{i\Omega - k^2 M} \frac{d \bar{\rho}_0}{dz} + \text{с.с.}$, $w_s^0 = i|A_1|^2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^*} \right) \frac{d}{dz} (w_{10} w_{10}^*)$

Переходя в (3.8) к пределу при $t \rightarrow \infty$ с учетом того, что $\delta\omega < 0$, находим $\bar{\Delta \rho}$

$$\bar{\Delta \rho} = \left[\frac{\partial \bar{\rho} w^0}{\partial z} + w_s^0 \frac{d \bar{\rho}_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2\delta\omega} \quad (3.9)$$

Величина $\bar{\Delta \rho}$, зависящая от вертикальной координаты, представляет собой неосциллирующую на временном масштабе волны поправку к средней плотности – вертикальную тонкую структуру, генерируемую волной. В [19, 20] определялась неосциллирующая поправка к плотности, пропорциональная квадрату текущей амплитуде волны, после прохождения волнового пакета невозмущенный профиль стратификации восстанавливается и тонкая структура имеет обратимый характер. Поправка (3.9) пропорциональна квадрату максимальной амплитуды волны и представляет собой необратимую тонкую структуру, генерируемую волной.

Волновой вертикальный поток соли определяется из (2.1), (2.4) по формуле, аналогичной (3.5) с заменой вертикального градиента плотности на градиент солености

$$\bar{S}w = \frac{w_{10} w_{10}^* |A_1|^2}{i\Omega - k^2 M} \frac{d S_0}{dz} + \text{с.с.} \quad (3.10)$$

где dS_0/dz – вертикальный градиент средней солености.

Вертикальная тонкая структура поля солености, генерируемая внутренней волной, определяется по формуле, аналогичной (3.7) путем замены градиента плотности на градиент солености

$$\bar{\Delta S} = \left[\frac{\partial \bar{S}w^0}{\partial z} + w_s^0 \frac{d S_0}{dz} \right] \cdot \frac{1}{2\delta\omega} \quad (3.11)$$

где $\bar{S}w^0 = \frac{w_{10} w_{10}^* |A_1|^2}{i\Omega - k^2 M} \frac{d S_0}{dz} + \text{с.с.}$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На северо-западном шельфе Черного моря в третьем этапе 44-го рейса НИС “Михаил Ломоносов” были обнаружены внутренние волны, которые отчетливо просматриваются на временной реализации возвышений изолиний температуры на рис. 1, полученных с помощью приборов ГРАД (градиентно-распределенные датчики температуры) [33].

В ходе натурного эксперимента с борта судна первый прибор располагался в слое 5–15 м, второй – в слое 15–25 м, третий – в слое 25–35 м, четвертый – в слое 35–60 м. Легко видеть, что мощные колебания с периодом 15 мин в слое 25–60 м находятся в противофазе с колебаниями в слое 15–25 м, что говорит о колебаниях второй моды с максимальной амплитудой ~ 0.5 м.

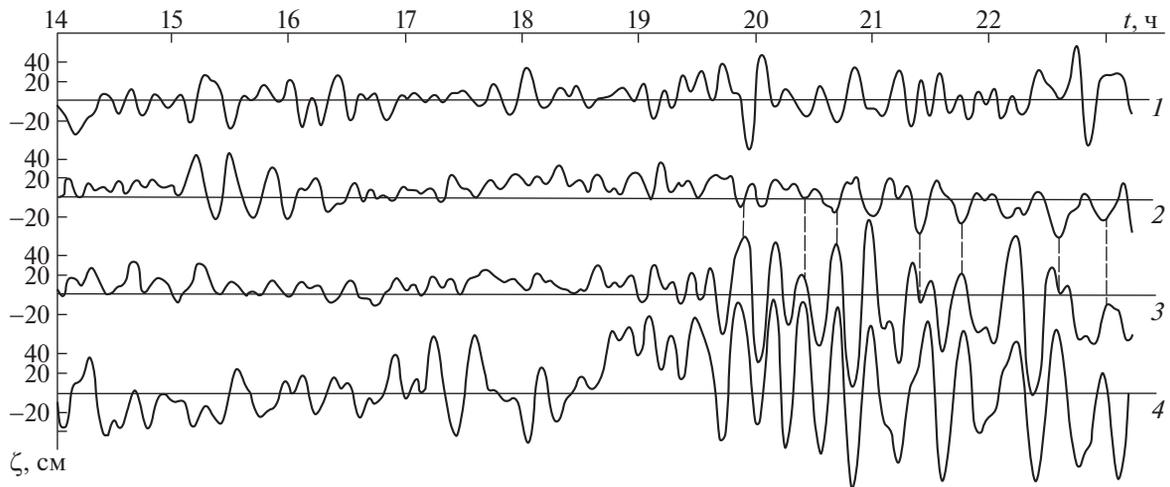


Рис. 1. Временной ход вертикальных смещений изолиний температуры.

Вертикальные профили двух компонент скорости течения показаны на рис. 2а, частоты Брента–Вайсяля – на рис. 2б. Типичное значение коэффициента турбулентного обмена на рассматриваемых масштабах составляет $K = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ [34], далее полагаем $M = 0.5 \text{ К}$. Краевая задача (2.6), (2.7) для внутренних волн решается численно по неявной схеме Адамса третьего порядка точности. Волновое число и мнимая поправка к частоте при фиксированной действительной части частоты находятся методом пристрелки из необходимости выполнения граничных условий (2.7). Волновое число у 15-минутных внутренних волн второй моды равно 0.032 рад/м , декремент затухания равен $-7.26 \times 10^{-4} \text{ рад/с}$. Вертикальный профиль модуля собственной функции 15-минутных внутренних волн второй моды показан на рис. 2в.

Нормирующий множитель A_1 находится по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений, которая оценивалась как $\sim 0.5 \text{ м}$ [16]. Для этого выразим вертикальное смещение ζ , используя соотношение $d\zeta/dt = w$

$$\zeta = \frac{iw_{10}}{\Omega} A_1 \exp(ikx - i\omega_0 t) + \text{c.c.}$$

Отсюда следует

$$A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |w_{10}/\Omega|}.$$

Таким образом, амплитуда вертикальных смещений пропорциональна $|w_0/\Omega|$. Экстремумы функции $|w_0/\Omega|$ соответствуют максимальным вертикальным смещениям по данным эксперимента (рис. 1, 2 в). Длина волны пятнадцатиминутных внутренних волн второй моды равна 196 м. Дисперсионные кривые первых трех мод показаны на рис. 3 как при численном решении краевой задачи (2.6), (2.7) (сплошные кривые), так и при ее решении методом возмущений (штриховые и штрихпунктирные кривые). Здесь $\omega_0 = \text{Re}(\omega)$ – действительная часть частоты. Из рис. 3 видно, что дисперсионные кривые, полученные путем численного решения краевой задачи (2.6), (2.7) и методом возмущений, практически совпадают. Значение малого параметра ε , по которому ведется разложение решения краевой задачи (2.6), (2.7) и частоты волны в методе возмущений, составляет 0.02.

На рис. 4. показана зависимость декремента затухания волны от частоты для первых трех мод как при численном решении краевой задачи (2.6), (2.7) (сплошные кривые), так и методом возмущений (штриховые и штрихпунктирные кривые). Численный метод и метод возмущений дают практически идентичные результаты.

У второй моды декремент по абсолютной величине больше, чем у первой моды, а у третьей моды больше, чем у второй при фиксированной действительной части частоты. На рис. 5 представлен профиль вертикальной составляющей скорости стоковского дрейфа (3.4) для 15-минутных

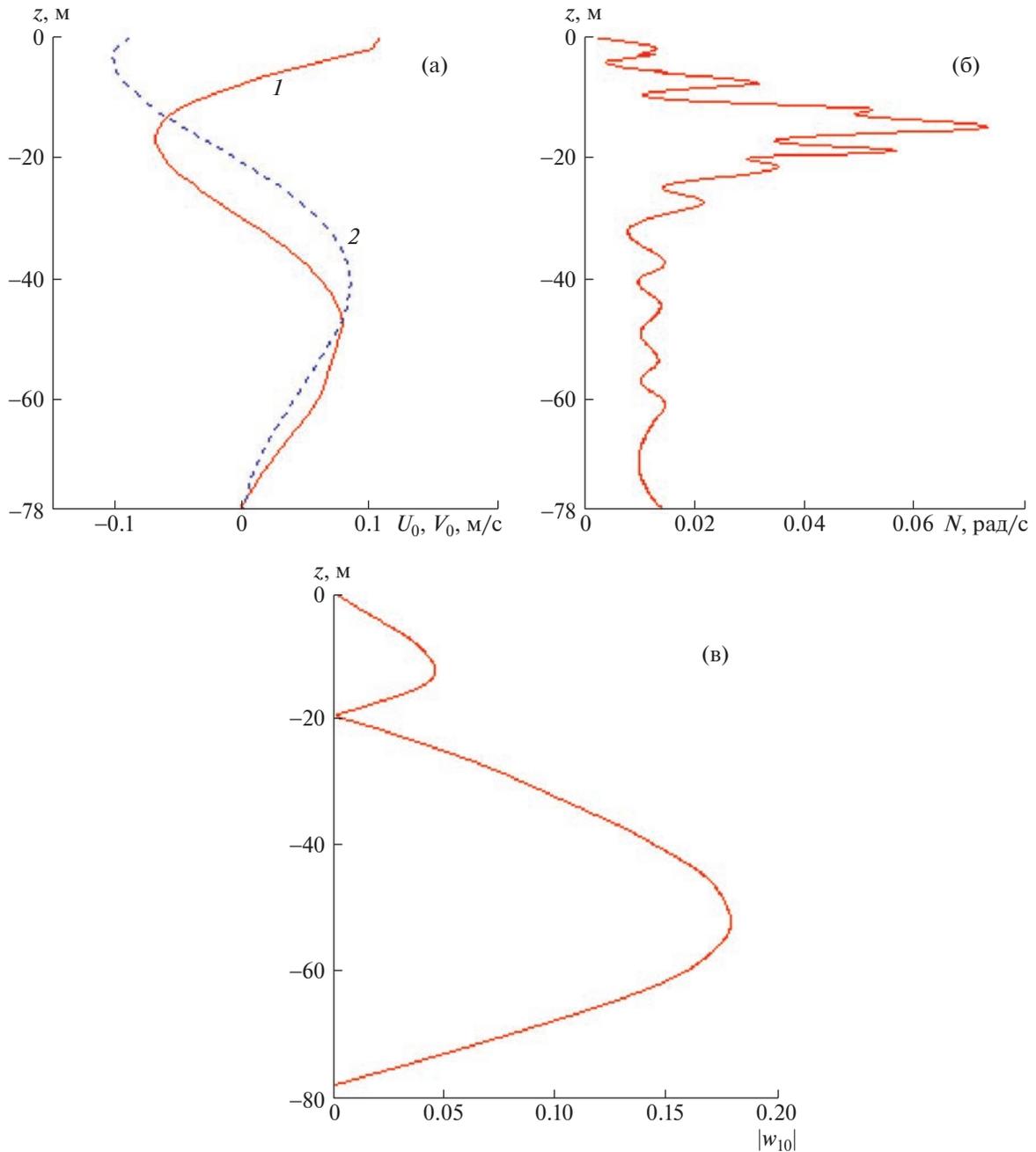


Рис. 2. Вертикальные профили: (а) – компонент скорости течения U_0 (1), V_0 (2); (б) – частоты Брента–Вяйсяля; (в) – модуля собственной функции 15-минутных внутренних волн второй моды.

внутренних волн второй моды с максимальной амплитудой 0.5 м, полученный как при численном решении краевой задачи (2.6), (2.7) (кривая (1)), так и методом возмущений (кривая (2)).

Метод возмущений и численный метод дают близкие значения вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа, только в областях экстремумов метод возмущений дает несколько заниженные значения.

На рис. 6 показан вертикальный профиль средней плотности.

Представляет интерес сравнить волновые потоки массы $\overline{\rho w}$ (3.5), полученные по данным численного решения краевой задачи (2.6), (2.7) и решения этой задачи методом возмущений. На рис. 7 представлен волновой поток массы $\overline{\rho w}$, полученный путем численного решения крае-

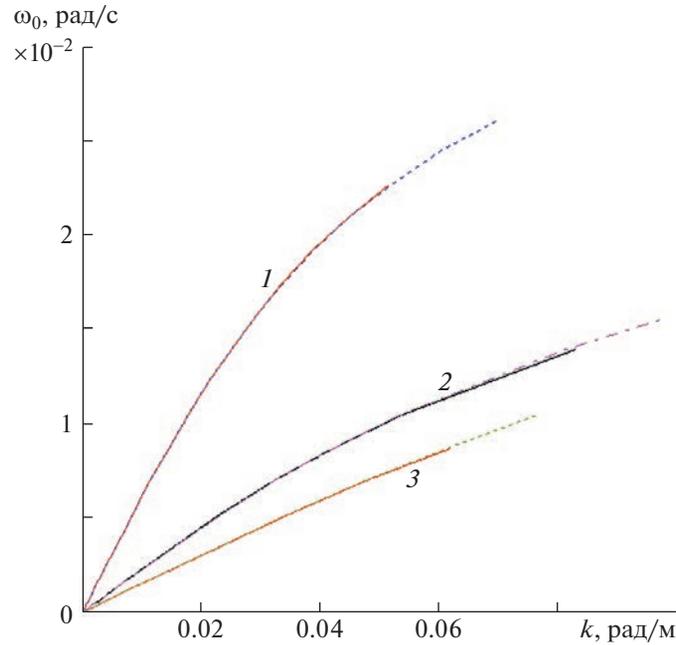


Рис. 3. Дисперсионные кривые первой 1, второй 2 и третьей 3 мод.

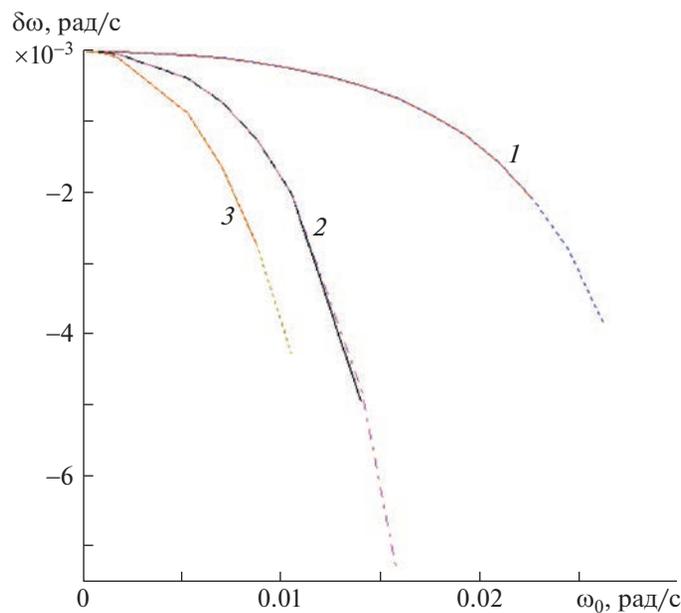


Рис. 4. Зависимость декремента затухания волны от частоты для первой 1, второй 2 и третьей 3 мод.

вой задачи (2.6), (2.7) (кривая 1, красная) и поток, полученный методом возмущений (кривая 2, синяя) для второй моды 15-минутных внутренних волн.

Волновые вертикальные потоки массы, полученные методом возмущений и численным методом, очень близки, только в окрестности экстремумов метод возмущений дает заниженные по модулю значения потоков массы.

Профиль вертикальной тонкой структуры поля плотности (3.9), генерируемой 15-минутной внутренней волной второй моды, представлен на рис. 8 как при численном решении краевой задачи (2.6), (2.7) (красная кривая), так и при ее решении методом возмущений (синяя кривая).

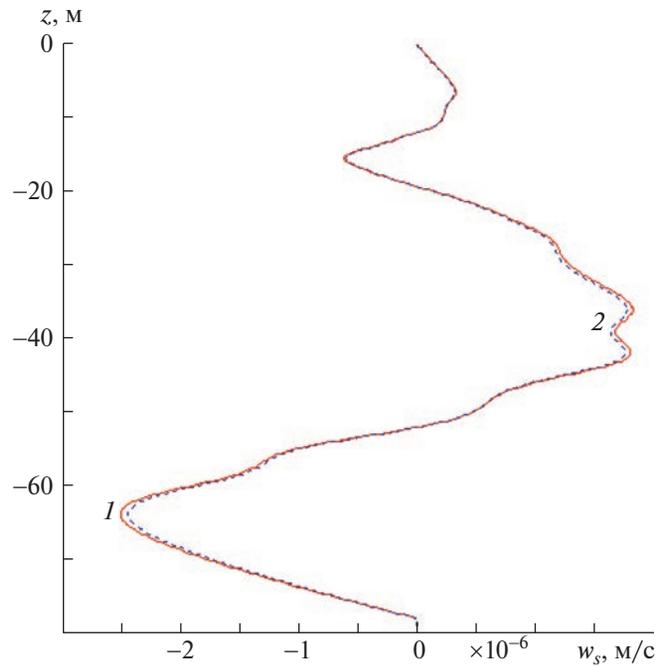


Рис. 5. Профили вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа: 1 – численный метод; 2 – метод возмущений.

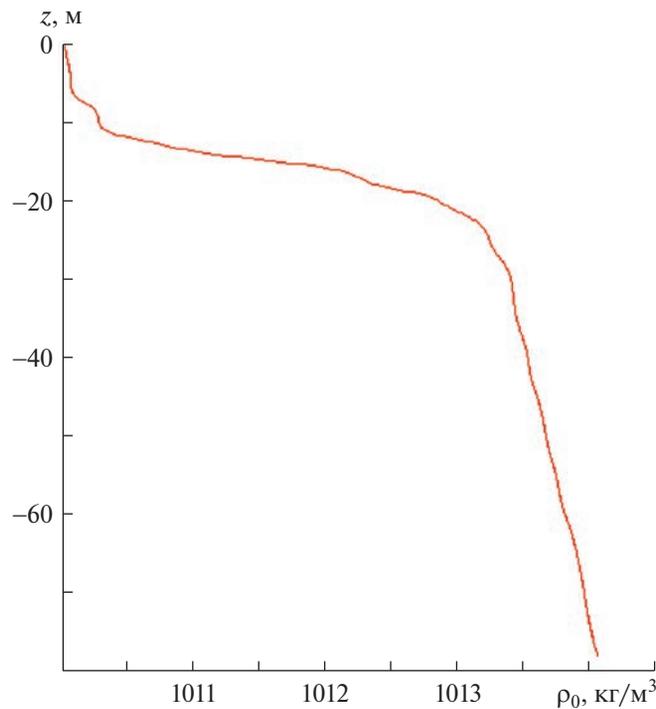


Рис. 6. Вертикальный профиль средней плотности.

Метод возмущений и численный метод дают практически идентичные значения тонкой структуры, генерируемой внутренней волной. Только в окрестности глубины 15 м в пикноклине метод возмущений дает чуть заниженное значение. Генерируемая внутренней волной тонкая структура поля плотности инверсий в вертикальное распределение плотности не вносит. Пред-

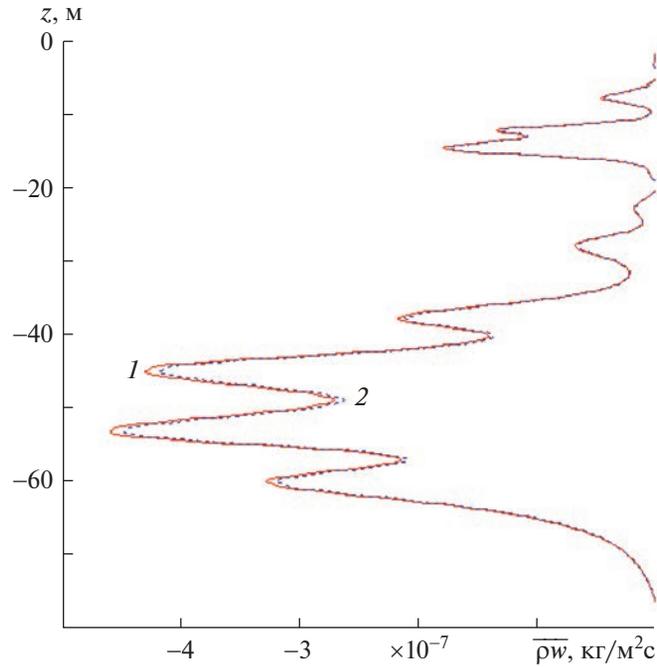


Рис. 7. Профили волновых вертикальных потоков массы, полученных по данным численного решения 1 и по методу возмущений 2.

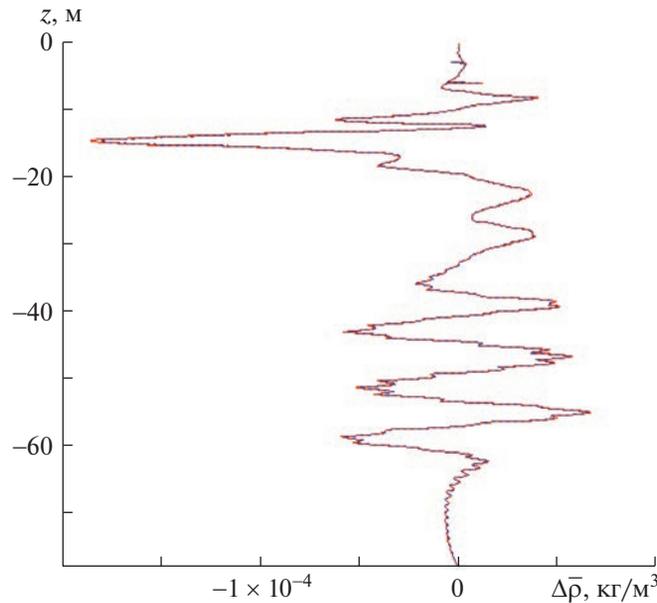


Рис. 8. Вертикальная тонкая структура плотности, генерируемая внутренней волной.

ставляет интерес рассмотреть вклад вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа в формирование вертикальной тонкой структуры. На рис. 9 представлен профиль тонкой структуры поля плотности, численно рассчитанный при учете вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа (кривая 1) и без ее учета (кривая 2). Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа оказывает заметное влияние на генерируемую внутренней волной вертикальную тонкую структуру, особенно в пикноклине.

На рис. 10 показан вертикальный профиль средней солёности. Представляет интерес сравнить волновые потоки соли $\overline{\delta w}$ (3.10), полученным по данным численного решения краевой за-

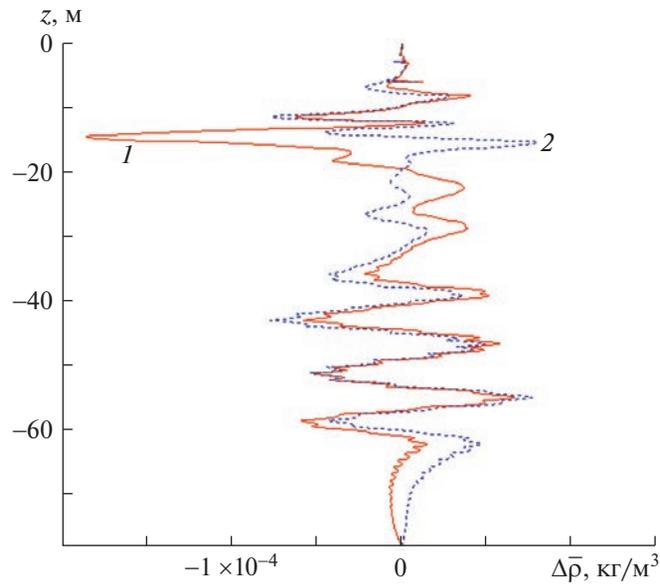


Рис. 9. Профили вертикальной тонкой структуры поля плотности: 1 – при учете вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа, 2 – без ее учета.

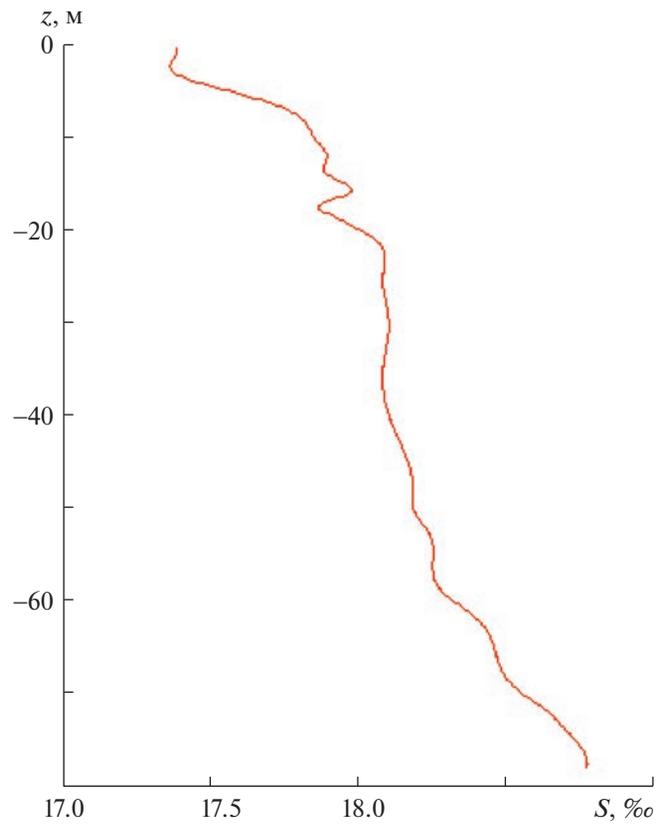


Рис. 10. Вертикальный профиль средней солености.

дачи (2.6), (2.7) и решения этой задачи методом возмущений. На рис. 11а представлены профили волнового потока соли $\overline{S_w}$, полученного путем численного решения краевой задачи (2.6), (2.7) (красная кривая) и потока, полученного методом возмущений (синяя линия). Эти потоки прак-

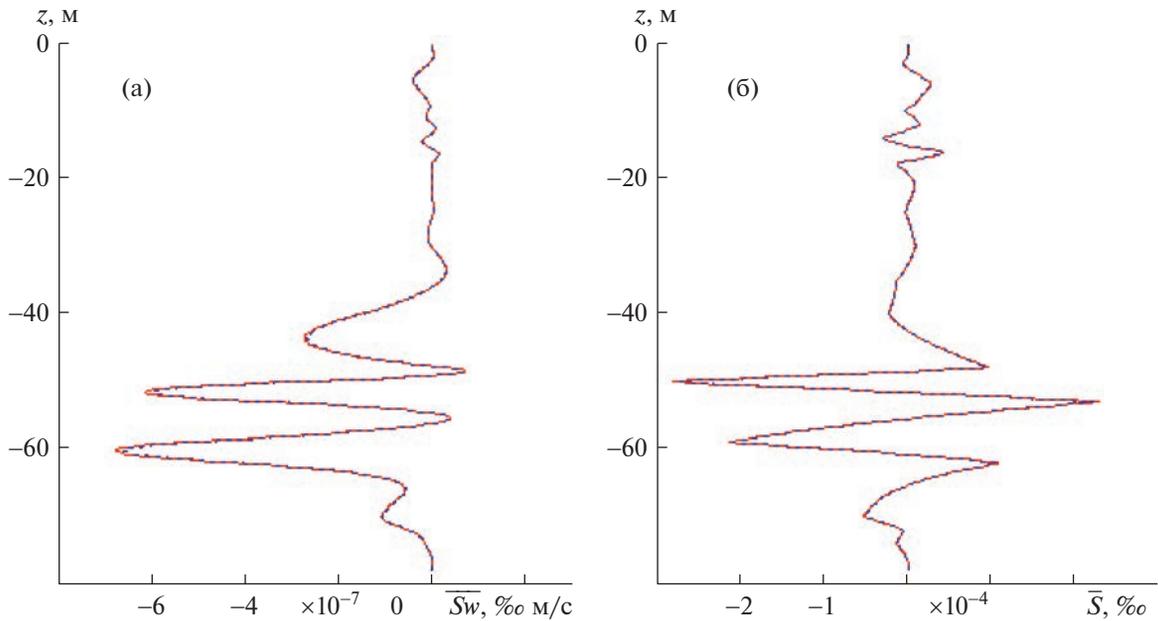


Рис. 11. Профили волновых вертикальных потоков соли, полученные по данным численного решения (красная) и по методу возмущений (синяя) – а; профили тонкой структуры – б.

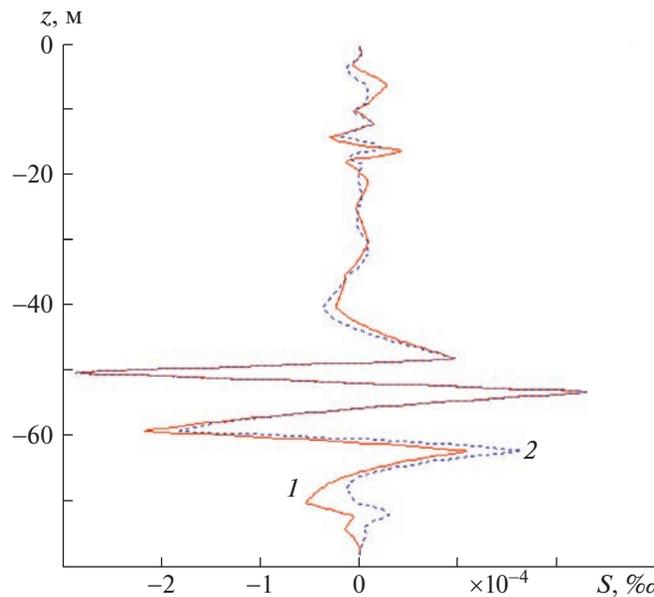


Рис. 12. Вертикальная тонкая структура солёности, генерируемая внутренней волной: 1 – при учете вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа; 2 – без ее учета.

тически совпадают, только в окрестности экстремумов на глубине 60 и 52 м метод возмущений дает чуть заниженные значения. На рис. 11б представлен профиль вертикальной тонкой структуры солёности, генерируемой 15-минутной внутренней волной второй моды, рассчитанной как численным методом (красная кривая), так и методом возмущений (синяя линия). Оба метода дают практически идентичные результаты.

Представляет интерес рассмотреть влияние вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа на тонкую структуру солёности, генерируемую внутренней волной. На рис. 12 представлены профили тонкой структуры солёности, генерируемой 15-минутной внутренней волной

второй моды, рассчитанной численным методом как при учете вертикальной составляющей скорости стокового дрейфа (красная кривая 1), так и без ее учета (синяя линия 2). Учет вертикальной составляющей скорости стокового дрейфа сказывается на профиле генерируемой волной вертикальной тонкой структуры, правда в меньшей степени, чем на тонкой структуре поля плотности (рис. 9). Наиболее заметное влияние присутствует в придонном 20-метровом слое.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисперсионные кривые, полученные при численном решении краевой задачи для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн, практически совпадают с дисперсионными кривыми, полученными при ее решении методом возмущений.

Аналогично для зависимости декремента затухания от частоты волны численный метод и метод возмущений дают практически идентичные результаты.

Вертикальные волновые потоки массы и соли, полученные при численном решении краевой задачи для внутренних волн, близки к потокам, полученным при ее решении методом возмущений. Вблизи экстремумов этих потоков метод возмущений дает заниженные значения.

Вертикальная составляющая скорости стокового дрейфа, рассчитанная по методу возмущений, близка к рассчитанной при численном решении краевой задачи для внутренних волн, однако вблизи экстремумов метод возмущений дает заниженные значения. Учет вертикальной составляющей скорости стокового дрейфа заметным образом сказывается на генерируемой тонкой структуре поля плотности, особенно в пикноклине. На тонкой структуре поля солёности ее вклад менее заметен, кроме придонного 20-метрового слоя.

Вертикальная тонкая структура полей плотности и солёности, генерируемая внутренней волной, рассчитанная по методу возмущений, практически совпадает с тонкой структурой, полученной при численном решении краевой задачи для внутренних волн.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме: № 0555-2021-0004 “Фундаментальные исследования океанологических процессов, определяющих состояние и эволюцию морской среды под влиянием естественных и антропогенных факторов, на основе методов наблюдения и моделирования” (шифр “Океанологические процессы”). Автор благодарен Е.И. Гриневич за численное решение краевых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самодуров А.С., Любичский А.А., Пантелеев Н.А. Вклад опрокидывающихся внутренних волн в структурообразование, диссипацию энергии и вертикальную диффузию в океане // Морской гидрофиз. журн. 1994. № 3. С. 14–27.
2. Павлова Е.П. Взаимосвязь внутренних волн и тонкой структуры в шельфовой зоне дальневосточных морей // Сборник статей по материалам конференции молодых ученых ТОИ ДВО РАН (27–30 ноября 2001 г.). Владивосток.: Дальнаука. 2003. С. 37–44.
3. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
4. Журбас В.М., Озмидов Р.В. О внутреннем строении тонкой ступенчатой структуры термоклина океана // Океанология. 1983. Т. 23. Вып. 6. С. 938–946.
5. Molcard R., Williams A.J. Deep stepped structure in the Tyrrhenian sea. // Mem. Soc. Roy. Sci. Liege, ser. 6. 1975. V. VII. P. 191–210.
6. Williams A.J. Salt fingers in the Mediaterranean outflow // Science. 1974. V. 185. № 4155. P. 941–943.
7. Козицкий С.Б. Амплитудные уравнения для системы с термохалинной конвекцией // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 3. С. 56–66.
8. Журбас В.М., Лунс У.К. О выделении основных типов тонкой термохалинной структуры океана // Океанология. 1987. Вып. 4. С. 562–567.
9. Фалина А.С., Волков И.И. Влияние процесса двойной диффузии на общую гидрологическую структуру глубинных вод Черного моря // Океанология. 2005. Т. 45. Вып. 1. С. 21–31.
10. Keller K.H., Van Atta C.W. An experimental investigation of the vertical temperature structure of homogeneous stratified shear turbulence // J. Fluid Mech. 2000. V. 425. P. 1–29.
11. Wunsch C., Ferrari R. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the ocean // Ann. Rev. Fluid. Mech. 2004. V. 36. P. 281–314.
12. Зацепин А.Г., Голенко Н.Н., Корж А.О., Кременецкий В.В., Пака В.Т., Поярков С.Г., Стунжас П.А. Влияние динамики течений на гидрофизическую структуру вод и вертикальный обмен в деятельном слое Черного моря // Океанология. 2007. Т. 47. № 3. С. 327–339.

13. *Ivanov A.V., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Thimring L.Sh.* Interaction of internal waves and turbulent in the upper layer of the ocean // *Dyn. of Atmos. and Ocean.* 1984. V. 3. № 7. P. 221–232.
14. *Зацепин А.Г., Герасимов В.В., Островский А.Г.* Турбулентный массообмен в стратифицированной жидкости и условия ее тонкоструктурного расслоения // *Моря России: вызовы отечественной науки. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции.* Севастополь, 26–30 сентября 2022 г. Севастополь.: ФГБУН ФИЦ МГИ, 2022. 392 с.
15. *Зимин А.В., Романенков Д.А., Козлов И.Е., Шапрон Б., Родионов А.А., Атаджанова О.А., Мясоедов А.Г., Коллар Ф.* Короткопериодные внутренние волны в Белом море: оперативный подспутниковый эксперимент летом 2012 года // *Исслед. Земли из космоса.* 2014. № 3. С. 1–14.
16. *Бондур В.Г., Серебряный А.Н., Замшин В.В., Тарасов Л.Л., Химченко Е.Е.* Интенсивные внутренние волны аномальных высот на шельфе Черного моря // *Изв. РАН. ФАО.* 2019. Т. 55. № 1. С. 114–127.
17. *Иванов В.А., Шульга Т.Я., Базаев А.В., Медведева А.В., Пластун Т.В., Вржевская Л.В., Свищева И.А.* Внутренние волны в р-не Гераклеяского полуострова: моделирование и наблюдение // *Мор. Гидрофиз. Журн.* 2019. Т. 35. № 4. С. 322–340.
<https://doi.org/10.22449/0233-7584-2019-4-322-340>
18. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
19. *Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И., Миропольский Ю.З.* К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1976. Т. 12. № 3. С. 293–301.
20. *Воронович А.Г., Леонов А.И., Миропольский Ю.З.* К теории образования тонкой структуры гидрофизических полей в океане // *Океанология.* 1976. Т. 11. Вып.5. С. 490–497.
21. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. Ч. 2. 363 с.
22. *LeBlond P.H.* On damping of internal gravity waves in a continuously stratified ocean // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 25. Pt. 1. P. 121–142.
<https://doi.org/10.1017/S0022112066000089>
23. *Островский Л.А., Соустова И.А.* Верхний перемешанный слой как сток энергии внутренних волн // *Океанология.* 1979. Т. 19. Вып. 6. С. 973–981.
24. *Носова А.В., Слепышев А.А.* Вертикальные потоки, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 1. С. 15–25.
<https://doi.org/10.1134/S0015462815010020>
25. *Слепышев А.А., Носова А.В.* Генерация вертикальной тонкой структуры внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // *Морской гидрофиз. журн.* 2020. Т. 36. № 1. С. 5–19.
<https://doi.org/10.22449/0233-7584-2020-1-5-19>
26. *Погребной А.Е.* Оценка коэффициентов горизонтального турбулентного обмена в Черном море по данным дрейферного эксперимента // *Морской гидрофиз. журн.* 2011. № 5. С. 40–49.
27. *Самодуров А.С.* Взаимодополняемость различных подходов для оценки интенсивности вертикального турбулентного обмена в естественных стратифицированных бассейнах // *Морской гидрофиз. журн.* 2016. № 6. С. 37–48.
<https://doi.org/10.22449/0233-7584-2016-6-37-48>
28. *Подымов О.И., Зацепин А.Г., Островский А.Г.* Вертикальный турбулентный обмен в черноморском пикноклине и его связь с динамикой вод // *Океанология.* 2017. Т. 57. № 4. С. 546–559.
<https://doi.org/10.7868/S0030157417040049>
29. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л: Гидрометеоздат, 1981. С. 30.
30. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. 1986. М.: Мир, 1986. Т. 1. 397 с.
31. *Longuet-Higgins M.S.* On the transport of mass by time varying ocean current // *Deep-Sea Res.* 1969. V. 16. № 5. P. 431–447.
[https://doi.org/10.1016/0011-7471\(69\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0011-7471(69)90031-X)
32. *Слепышев А.А., Воротников Д.И.* Вертикальные потоки тепла и соли, обусловленные внутренними волнами на морском шельфе // *Изв. РАН. ФАО.* 2017. Т. 53. № 4. С. 532–541.
<https://doi.org/10.7868/S000335151704011>
33. *Пантелеев Н.А.* Отчет о работах в 44-м рейсе (3-й этап) НИС “Михаил Ломоносов” 7 августа – 15 сентября 1985 г. Севастополь.: МГИ АН УССР, 1985. Т. 1. 135 с.
34. *Озмидов Р.В.* О зависимости коэффициента горизонтального турбулентного обмена в океане от масштаба явления // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1968. Т. 1. № 11. С. 1224–1225.

УДК 533.6

СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В КИСЛОРОДЕ

© 2023 г. А. И. Ерофеев^{a,*}, С. В. Русаков^{a,**}

^aЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
Московская обл., Жуковский, Россия

*E-mail: alex.ivan.erofeev@gmail.com

**E-mail: dsmc1@mail.ru

Поступила в редакцию 12.09.2022 г.

После доработки 17.01.2023 г.

Принята к публикации 17.01.2023 г.

Представлены результаты численного изучения процессов релаксации в кислороде при высоких температурах. Столкновения частиц (атомов и молекул) описывается методами молекулярной динамики на основе траекторных расчетов в рамках классической механики. Дается описание комплекса программ для расчета релаксационных процессов в смесях высокотемпературных газов с участием внутренних мод, описывающих вращательное и колебательное движение в молекулах, диссоциацию молекул и рекомбинацию атомов в присутствии третьего тела. Процесс релаксации описан на примере изменения параметров в смеси атомарного и молекулярного кислорода с различными начальными температурами поступательных и внутренних мод. Приведены результаты расчетов структуры ударной волны в кислороде с максимальной поступательной температурой на фронте выше 5000–11 000 К. Дано сопоставление с экспериментальными данными.

Ключевые слова: релаксация, диссоциация молекул, рекомбинация атомов, ударная волна

DOI: 10.31857/S1024708422600646, **EDN:** VKBVPY

В последние 10–15 лет изучение явлений в высокотемпературных газах с помощью точного решения динамической задачи взаимодействия молекул в газах на основе классических траекторных расчетов (метод молекулярной динамики) вышло на новый уровень благодаря успешному развитию квантово-механических методов расчета поверхностей потенциальной энергии (ППЭ) [1–5]. Несколько вариантов ППЭ построены для взаимодействия атомов азота ($N + N_2$, $N_2 + N_2$) [6] и кислорода [5]. С помощью этих ППЭ проведено исследование элементарных процессов релаксации в азоте и кислороде при высоких температурах. Исследования релаксационных и физико-химических процессов в высокотемпературных газах, проводимые с помощью классических траекторных расчетов, используются для верификации приближенных моделей этих процессов [7].

Вместе с тем проведенное в работе [6] сравнение данных по скоростям диссоциации азота в реакции $N + N_2 \rightarrow N + N + N$ для различных ППЭ, показывает, что данные, полученные с полуэмпирической ППЭ [8] – построенной с помощью потенциала LEPS – дают хорошие результаты до температур 10000° К (т.е. в диапазоне температур, при которых проводились расчеты в [8]). Это говорит о том, что потенциал применения ППЭ, основанных на полуэмпирических моделях, не исчерпан и возможно рассмотрение на их основе сложных физических процессов в высокотемпературных газах, в том числе в смесях газов.

Расчеты структуры ударной волны в молекулярных газах с применением траекторных расчетов в методе прямого статистического моделирования (DSMC) проводятся с 1971 г. В работе [9] молекулы газа рассматривались как жесткие ротаторы, т.е. учитывался только обмен энергией между поступательными и вращательными степенями свободы. Следствием малого количества частиц в расчетной области (800) явилась большая величина статистической погрешности. С той же моделью и много большим числом молекул в расчетной области (100 частиц на ячейку) задача о структуре ударной волны рассматривалась в работе [10] в 1997 г. Кроме большого числа работ по структуре ударной волны, исследуемых методом DSMC с феноменологическими моделями взаимодействия молекул, конечно же продолжается поиск динамических моделей столкнове-

ния. Так, в работе [11] для изучения сильной ударной волны в кислороде использована модель импульсного удара молекул, позволяющей адекватно описывать процессы диссоциации молекул при высоких температурах и получить хорошее согласование с экспериментальными данными.

Для изучения возможности применения метода классических траекторий (МКТ) в высокотемпературных течениях разреженного газа в данной работе для описания взаимодействия атомов и молекул применяется подход, в котором используется простой вариант аддитивного потенциала, описывающего парные взаимодействия всех частиц, участвующих в столкновении. Потенциалы парного взаимодействия атомов описываются функцией Морзе с параметрами, определенными по работам [12–14]. Основным вариантом метода молекулярной динамики является прямое моделирование движения частиц в ансамбле, в котором все частицы одновременно взаимодействуют друг с другом. При исследовании течений разреженного газа более эффективными являются траекторные вычисления парных столкновений молекул (или тройных столкновений в случае рекомбинации атомов), поскольку в таком газе большую часть времени молекулы находятся в свободном полете. Преимущество использования МКТ в исследовании течений разреженного газа понятно, поскольку позволяет проводить расчеты без использования многочисленных феноменологических или конкретных динамических моделей столкновения, применимых в ограниченном диапазоне изменения параметров. Трудности также очевидны – нужны ППЭ, адекватно описывающие процессы взаимодействия, и большие вычислительные мощности. Но дело, на наш взгляд, идет в этом направлении и поэтому было решено начать работу, используя для начала простые, но уже опробованные ППЭ. Одной из наиболее простых в вычислительном плане задач является одномерная задача о структуре ударной волны, для которой имеются хорошие экспериментальные данные. Ниже эта задача решается в предположении, что молекулы кислорода находятся в основном электронном состоянии.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Рассматриваются процессы релаксации в смеси атомов и молекул, в котором происходят столкновения различных типов:

- столкновение двух молекул с обменом поступательной, вращательной и колебательной энергиями; это столкновение может привести к диссоциации одной или обеих молекул;
- столкновение атома с молекулой, которое также может закончиться диссоциацией молекулы;
- столкновение двух атомов;
- упругое;
- столкновение в присутствии третьего тела, в котором может произойти рекомбинация атомов. Третьим телом может быть как атом, так и молекула.

2. Столкновения частиц рассчитываются методом молекулярной динамики – решаются системы дифференциальных уравнений, описывающих траектории частиц в классическом приближении. Уравнения движения (уравнения Гамильтона) записываются в системе координат, связанной с центром масс. Подробный вывод уравнений движения, описание различных алгоритмов даны в [15–18].

3. Используется модель парного взаимодействия всех атомов (единичных или в составе молекул), участвующих в столкновении. Каждое взаимодействие описывается потенциалом Морзе

$$U(R) = D[\exp(-2\alpha(R - R_e)) - 2\exp(-\alpha(R - R_e))] \quad (1.1)$$

параметры которого (D , α , R_e) определяются для каждой пары, а R – расстояние между частицами.

Применение потенциала Морзе обусловлено тем, что он и его модификации довольно часто использовались при изучении процессов релаксации; параметры потенциала определены [12–14] и прошли проверку временем; он входит, как составная часть, в более сложный потенциал LEPS; для ангармонического осциллятора Морзе имеется точное решение уравнения Шредингера и определены колебательные квантовые уровни; прост в реализации.

4. Программы расчета уравнений движения сталкивающихся частиц разработаны для общего случая – все атомы могут быть различными, т.е. пригодны для описания смеси газов.

Пример столкновения молекул приведен на рис. 1. Взаимодействие между атомами в молекуле обозначено пружинками. Расстояния между частицами R_{14} и R_{23} не показаны, чтобы не перегружать изображение.

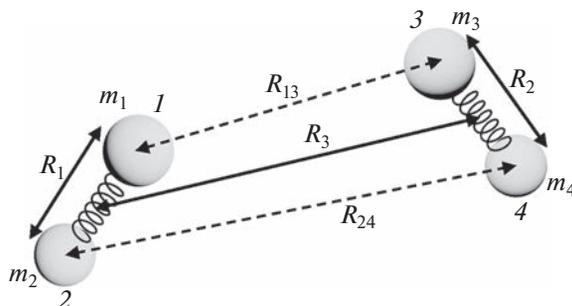


Рис. 1. Схема взаимодействия молекул.

5. Разработаны программы, которые независимо решают описанные выше типы столкновений, они объединены также в единый комплекс. Это объединение дает возможность изучать и чисто релаксационные процессы, и может быть включено в программу расчета течений разреженного газа методом Монте-Карло (метод DSMC) как “блок столкновений”.

6. Начальные данные определяются так: поступательные скорости атомов и молекул определяются из максвелловского распределения при заданной температуре газа $T_{г0}$, внутренняя энергия молекулы (вращательная и колебательная) определяются бoльцмановскими распределениями с температурами $T_{г0}$ и T_{vib0} ; начальное расстояние R между центрами масс сталкивающихся частиц определяется из условия $|U(R_{AB0})| \ll E_{tr}$ (E_{tr} – начальная поступательная энергия относительного движения частиц).

7. Решение уравнений движения проводится методом Рунге–Кутты (первые три шага) и четырехточечным методом Адамса с постоянным шагом по времени h_t вдоль всей траектории. Оба метода являются методами 4-го порядка. Начальный шаг определялся равным $h_t = 0.0025t_{хар}$. От величины h_t зависит точность расчета, которая контролировалась выполнением закона сохранения энергии с относительной погрешностью $|\delta H/H| < \epsilon$ в конце траектории (как правило, величина $\epsilon \leq 0.001$, H – гамильтониан системы). В случае невыполнения этого условия расчет повторялся с теми же начальными данными и величиной шага по времени $h_t/2$ и т.д. Допускалось 6-кратное повторение расчета. Из-за сильного увеличения времени расчета траектории дальнейшее уменьшение шага по времени не проводилось и выбирались новые начальные условия.

8. Для приведения системы уравнений движения к безразмерному виду вводятся характеристические величины, удобные при решении задач молекулярной физики:

$$L_{хар} = 10^{-8} \text{ см} = 1, \quad t_{хар} = 10^{-14} \text{ с}, \quad E_{хар} = 1.66 \times 10^{-12} \text{ эрг} \quad (1.2)$$

Они приняты для удобства согласования с начальными данными: массы атомов и молекул задаются в атомных единицах массы (1.66×10^{-24} г), линейные параметры потенциалов – в ангстремах. Характерное время $t_{хар} = 10^{-14}$ с имеет порядок периода колебаний атомов в молекуле.

9. В качестве состава исходной смеси в программе принята укороченная версия атмосферы Земли, а именно:

- атомы азота N и кислорода O;
- молекулы азота N₂, кислорода O₂, окиси азота NO;

и задается процентное содержание компонентов. Молекулы окиси азота NO, если не заданы в начальной смеси, могут образовываться только в результате рекомбинации атомов N и O, т.е. прямое, непосредственное из свободных элементов соединение азота с кислородом в результате обменных реакций:



в текущей версии пакета программ не предусмотрено.

Предполагается, что все задаваемые и образующиеся компоненты находятся в основном электронном состоянии.

10. Принятые в работе значения параметров потенциалов Морзе (1.1) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Система	D , эВ	α , Å ⁻¹	Re, Å
N–N	9.904	2.6895	1.094
O–O	5.21	2.78	1.207
N–O	6.623	2.83	1.15
N–N ₂ , O ₂ , NO	0.007892	2.045	4.0
O–N ₂ , O ₂ , NO	0.007892	2.045	4.0

В первых трех строках даются параметры потенциалов, описывающих взаимодействие атомов в молекулах. В двух последних строках даны параметры потенциалов, описывающие взаимодействие атомов, находящихся в разных молекулах, или взаимодействие свободных атомов с молекулярными атомами.

Атом-атомное взаимодействие в случае, если тройное столкновение не происходит, описывается просто как упругое столкновение. Если тройное столкновение состоялось, то взаимодействие атомов, образующих диатом, описывается потенциалом по первым трем строкам табл. 1, а их взаимодействие с третьим телом (атомом или молекулой) по двум нижним строкам табл. 1.

11. Одним из наиболее трудных вопросов в методе классических траекторий является формулирование начальных условий для внутренних степеней свободы молекул. Дело в том, что в классической механике Гамильтониан свободно движущейся двухатомной молекулы имеет вид:

$$H = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r) = E_{int} = E_{rot} + E_{vib} \quad (1.3)$$

Здесь $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса атомов в молекуле, r – расстояние между атомами, $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ – угловой момент, \mathbf{p} – обобщенный импульс, $U(r)$ – потенциальная энергия взаимодействия атомов; E_{rot} , E_{vib} , E_{int} – вращательная, колебательная и полная внутренняя энергия молекулы.

Угловой момент является интегралом движения и поэтому в уравнении (1.3): $M^2 = \text{const}$

Запишем гамильтониан в виде:

$$H = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{eff}(r), \quad U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r), \quad (1.4)$$

Рассматриваемая задача сводится к движению частицы массы μ в сферически симметричном поле с эффективным (центробежным) потенциалом $U_{eff}(r)$. Записывая угловой момент как

$$M^2 = \hbar^2 j(j+1) \quad (1.5)$$

где \hbar – постоянная Планка, j – вращательное квантовое число, можно построить зависимость $U_{eff}(r, j)$, приведенную на рис. 2. В данном случае эта формула используется как удобное определение квадрата момента при построении зависимости $U_{eff}(r, M)$ в виде функции от $j - U_{eff}(r, j)$.

Из рис. 2 видно, что диссоциация молекулы имеет место тогда, когда ее внутренняя энергия $E_{int} > U_{eff}(R_{j_{max}})$, а $R_{j_{max}}$ есть положение максимума $U_{eff}(r, j)$ при заданной величине углового момента (1.5). Для параметров потенциала взаимодействия атомов в молекуле O₂, приведенных в таблице, максимальное число j , при котором еще существует связанное состояние молекулы $j_{max} = 226.5$. Величина j_{max} используется в качестве одного из маркеров при анализе состояния молекулы в конце траектории: если $j > j_{max}$, то молекула считается диссоциированной.

Из уравнения (1.3) видно, что разделение внутренней энергии молекулы на вращательную и колебательную в общем случае невозможно, так как величина r является переменной. Для модели жесткого ротатора расстояние между атомами

$$r_e = \text{const}, \quad E_{rot} = \frac{M^2}{2\mu r_e^2}, \quad E_{vib} = 0 \quad (1.6)$$

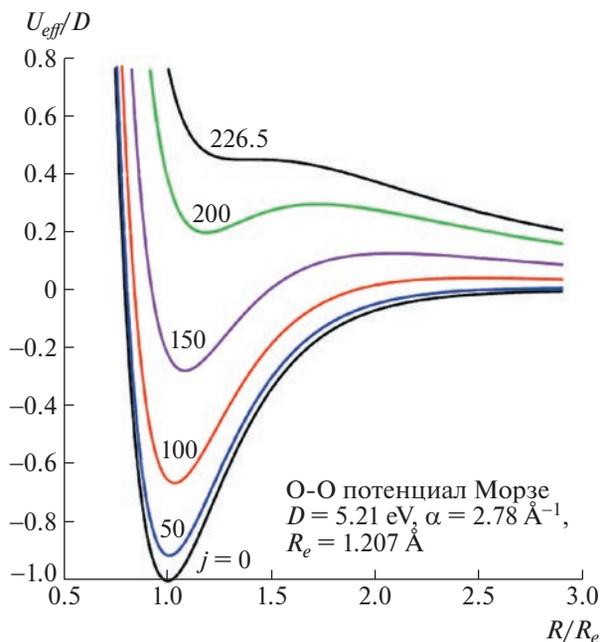


Рис. 2. Эффективные потенциальные кривые для кислорода: потенциал Морзе + центробежный потенциал.

По аналогии с моделью жесткого ротатора за величину мгновенной вращательной энергии E_{rot} можно принять значение, даваемое в каждый момент времени соотношением $E_{rot} = M^2/2\mu r^2$, в качестве характеристики энергии вращательного движения молекулы взять среднее значение $\langle E_{rot} \rangle_\tau$ за период колебания τ . Поскольку величина E_{int} также является интегралом движения, то характеристическим значением колебательной энергии будет

$$\langle E_{vib} \rangle_\tau = E_{int} - \langle E_{rot} \rangle_\tau. \quad (1.7)$$

Однако не ясно, будут ли вычисленные таким образом энергии внутренних мод определять равновесные значения соответствующих температур T_{rot} и T_{vib} . Сложности определения внутренних энергий молекулы имеются и при квантовомеханическом рассмотрении [19–22]. В [23, 24] при определении конечного состояния молекул для вращательного квантового числа используют соотношение типа (1.5), а колебательное квантовое число n определяют из квазиклассического правила квантования [25]

$$\oint pdq = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

где интеграл берется по полному периоду классического движения частицы, а q и p — обобщенные координаты и импульс.

В данной работе принят последовательный классический подход, в котором нет необходимости в разделении внутренней энергии на вращательную и колебательную. Начальные условия при столкновениях определяются знанием полной внутренней энергии и ее углового момента. Эти же величины определяются в конце траекторного расчета (если, конечно, молекула не диссоциировала). Далее используется 2-х температурное приближение [26, 27]. Полагая, что время вращательной релаксации мало, вращательная температура ансамбля молекул принимается равной поступательной температуре, а колебательная температура определится из соотношения (1.7).

При формировании начальных условий для траекторного расчета применялись два метода:

1) — если выбранная молекула еще не участвовала в столкновении, то ее вращательная E_{rot} и колебательная E_{vib} энергии определялись из максвелловского распределения при начальной температуре ансамбля. Вращательное число j вычислялось из соотношения $E_{rot} = B_e j(j+1)$.

Далее по величинам $E_{int} = E_{rot} + E_{vib}$ и j определялись точки поворота для центробежного потенциала и величины начальных значений обобщенного импульса.

2) – в случае, когда молекула сталкивалась ранее с другими частицами, ее обобщенные координаты и импульсы в точках поворота определялись в конце расчета траектории и использовались как начальные данные в последующем столкновении.

Детальное изложение определения начальных данных приведено в работах [15–18].

12. В данной работе полное сечение столкновения молекул определяется с помощью данных по зависимости коэффициента вязкости от температуры. Исходным является выражение для коэффициента вязкости [28]:

$$\eta_l \times 10^7 = 266.93 \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega^{(2,2)\bullet}(T^*)}, \quad \frac{\text{г}}{\text{см} \times \text{с}} \quad (1.8)$$

Здесь M – молекулярный вес, T – температура [К]. $T^* = kT/\epsilon$ – приведенная температура; σ – диаметр столкновений, Å; ϵ/k – параметр потенциальной функции межмолекулярного взаимодействия, К; $\Omega^{(2,2)\bullet}(T^*)$ – приведенный интеграл столкновений. Для потенциала Леннарда-Джонса величины $\Omega^{(2,2)\bullet}(T^*)$ затабулированы в диапазоне температур $0.3 \leq T/T^* \leq 400$ [28]. Для азота $\sigma = 3.681 \text{ Å}$ и $\epsilon/k = 91.5 \text{ К}$, для кислорода $\sigma = 3.433 \text{ Å}$ и $\epsilon/k = 113 \text{ К}$. Сечения столкновений в траекторных расчетах определялись как:

$$S_{cr} = \pi R_{cr}^2, \quad R_{cr} = A_r R_{coll} = A_r \times \sigma \times [\Omega^{(2,2)\bullet}]^{1/2} \quad (1.9)$$

где A_r – варьируемый параметр порядка единицы.

Расчетные данные для R_{coll} аппроксимировались приближенными зависимостями от температуры T .

Для кислорода применялись следующие аппроксимации для разных диапазонов температур

$$R_{coll}(\text{Å}) = \begin{cases} 13T^{-0.23}, & T < 283 \text{ К} \\ 5.42414T^{-0.077554}, & 283 \leq T \leq 45000 \text{ К} \end{cases} \quad (1.10)$$

Для азота

$$R_{coll}(\text{Å}) = \begin{cases} 13.02T^{-0.2258}, & T < 230 \text{ К} \\ 6.1652T^{-0.08643}, & 230 \leq T \leq 35000 \text{ К} \end{cases} \quad (1.11)$$

2. РЕЛАКСАЦИЯ ПРИ ВЫСОКОЙ НАЧАЛЬНОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ МОЛЕКУЛ

В этом разделе рассматриваются релаксационные явления в газах, связанные с поступательным – вращательным – колебательным обменом энергии молекул и атомов при их столкновениях с возможными процессами диссоциации молекул и рекомбинации атомов. Это рассмотрение проводится с ансамблем молекул и атомов размерности D0, т.е. без учета пространственного смещения частиц, что позволяет рассматривать процессы на достаточно больших временных интервалах, добиваясь (если возможно) прихода системы в равновесное состояние. Вероятность столкновения пары частиц принималась равной $p_{coll} \approx g\sigma(g) \approx g^{0.6}$. Сечение столкновений определялось по формулам (1.10) и (1.11). Предполагается, что начальный состав газа молекулы, число которых N_{M0} . Начальные температуры: поступательная T_{tr0} , вращательная T_{rot0} , колебательная T_{vib0} определялись так, что $T_{tr0} = T_{rot0} \gg T_{vib0}$. Временной параметр процесса K_{step} определен так, что один шаг соответствует примерно $\Delta t = 0.5\tau$, где τ – среднее время свободного пробега частиц.

Основной задачей при проведении расчетов являлось выяснение роли рекомбинации атомов в установлении равновесного состояния системы. Вероятность тройного столкновения, т.е. столкновения двух атомов в присутствии третьего тела, которым может быть атом или молекула, определяется как [29]:

$$P_3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \times n_3$$

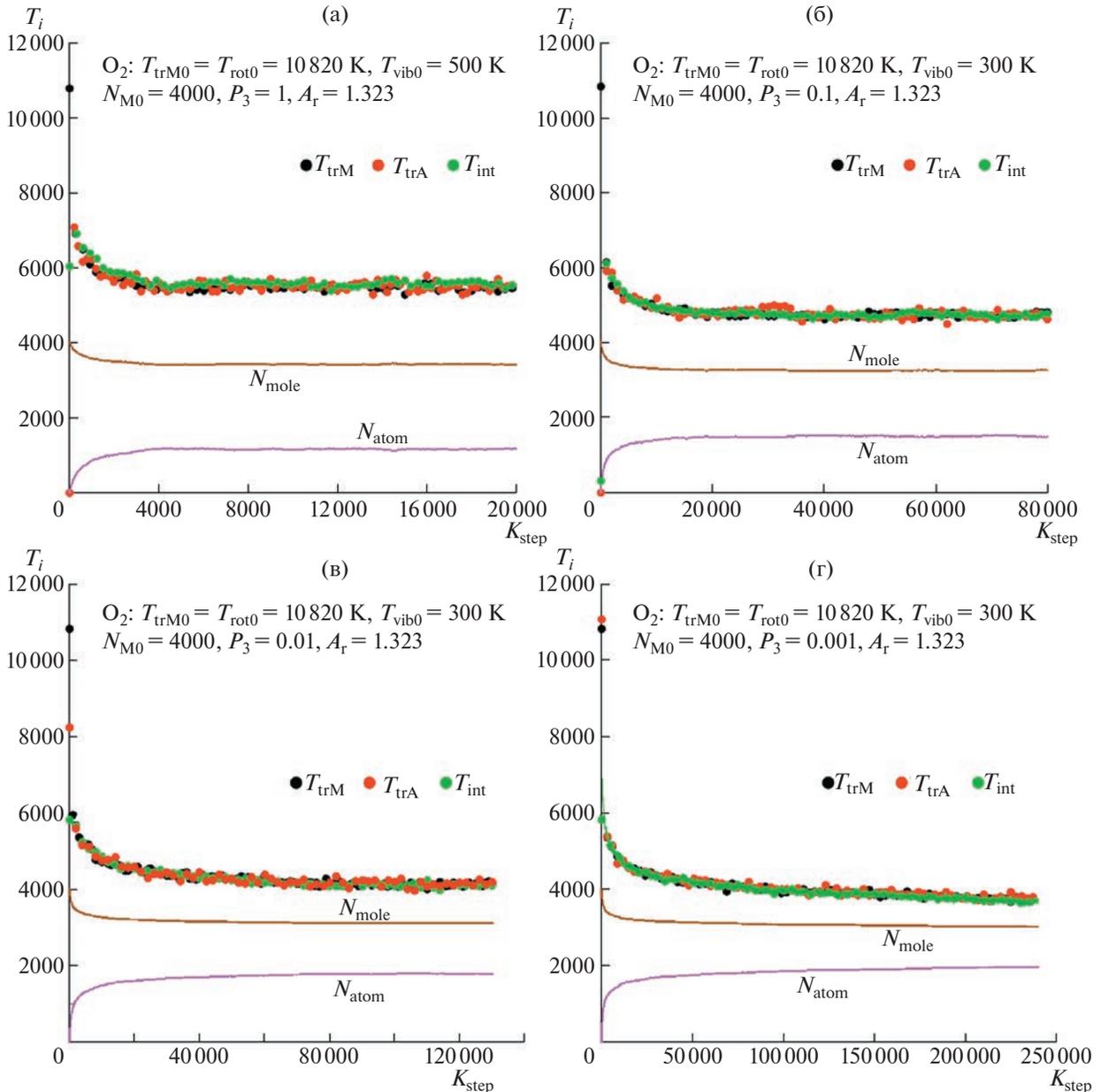


Рис. 3. Процесс релаксации в кислороде при $T_{trM0} = T_{rot0} = 10820 \text{ K}$ и $T_{vib0} = 500 \text{ K}$ (а), $T_{vib0} = 300 \text{ K}$ (б–г): (а) $P_3 = 1$, (б) $P_3 = 0.1$, (в) $P_3 = 0.01$, (г) $P_3 = 0.001$.

где R_0 – размер зоны взаимодействия двух атомов, возможность рекомбинации которых изучается, n_3 – числовая плотность третьих частиц. Величина R_0 в общем случае может зависеть от относительной скорости атомов, а значит, от температуры газа. Как будет показано ниже, в процессе релаксации при указанных выше начальных температурах вначале происходит сильное падение поступательной температуры ансамбля, обусловленное диссоциацией молекул. На этом этапе атомов еще немного и их рекомбинация слабо влияет на релаксационный процесс. В дальнейшем падение температуры замедляется, и релаксация происходит при не очень больших изменениях температуры. Это позволяет предположить, что вероятность тройного столкновения можно рассматривать как постоянный параметр задачи и изучать процесс релаксации при его различных значениях. Можно отметить, что такая же картина имеет место за фронтом сильной ударной волны.

На рис. 3 показаны результаты расчета процесса релаксации при начальных температурах, моделирующих условия эксперимента [30–33] сразу за фронтом ударной волны. Расчеты прово-

дильсь для различных значений вероятности тройного столкновения P_3 . При $P_3 = 1$, когда каждое столкновение атомов сопровождается наличием в зоне их взаимодействия третьего тела (атома или молекулы), вероятность рекомбинации атомов велика. Тогда равновесие в системе достигается достаточно быстро – примерно за 4000 шагов по времени или за $t = 2000\tau$, равновесная температура (осреднение проводилось на интервале $K_{step} = 6001\text{--}20000$ шагов):

$$\langle T_{irM}^{eq} \rangle = 5465 \pm 63 \text{ K}, \quad \langle T_{irA}^{eq} \rangle = 5491 \pm 125 \text{ K}, \quad \langle T_{int}^{eq} \rangle = 5582 \pm 57 \text{ K}$$

Как видно, с учетом статистической погрешности, равновесная температура различных мод очень хорошо совпадает, хотя $\langle T_{int}^{eq} \rangle$ превышает $\langle T_{irM}^{eq} \rangle$ примерно на 2%. Следует отметить, что большая погрешность при вычислении $\langle T_{irA}^{eq} \rangle$ определяется меньшим числом атомов $\langle N_A \rangle = 1153 \pm 13$ по сравнению с числом молекул $\langle N_M \rangle = 3423 \pm 6.5$ на том же интервале числа шагов.

С уменьшением вероятности тройного столкновения P_3 до 0.01, количество рекомбинаций атомов уменьшается, равновесные температуры также становятся меньше, величина релаксационной зоны увеличивается до $t \approx 10000\tau$ ($K_{step} \approx 20000$) при $P_3 = 0.1$ и до $t \approx 50000\tau$ ($K_{step} \approx 100000$) при $P_3 = 0.01$. Наконец, при $P_3 = 0.001$ количество рекомбинаций атомов уменьшилось настолько, что при продолжающейся диссоциации молекул равновесное состояние системы не достигается и при $K_{step} = 250000$. Температуры различных мод стали меньше 4000 K, а диссоциировало примерно 25% молекул.

3. СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В КИСЛОРОДЕ

В этом разделе приводятся результаты расчета структуры ударной волны в кислороде для условий, соответствующих серии экспериментов, описанных в работах [30–33]. “В экспериментах на ударной трубе получены профили поглощения света в кислороде в интервале длин волн 200–260 нм в диапазоне температур 4000–10800 K. С помощью этих данных измерены профили колебательной температуры молекул кислорода за фронтом ударной волны. Метод определения колебательной температуры кислорода основан на сравнении результатов измерений поглощения и детального расчета спектров поглощения кислорода в системе Шумана-Рунге” [30]. Погрешности измерения температур различны на разных участках фронта ударной волны. Погрешность определения колебательной температуры составляет ± 20 и $\pm 10\%$ на восходящей и нисходящей ветви ее изменения соответственно. На приводимых ниже рисунках экспериментальные погрешности отмечены вертикальными отрезками прямых линий.

Расчеты проводились для задачи движения поршня в покоящемся молекулярном газе (плотность n_∞ , температуры всех мод $T_\infty = 300 \text{ K}$) со скоростью V_∞ в системе координат, связанной с поршнем. По этой причине выбиралось такое число Маха, при котором максимальные поступательные температуры газа на фронте ударной волны $T_{ir,max}$ соответствовали значениям, полученным в эксперименте и обозначенным как T_0 . Параметры газа до ударной волны указаны в подписях к рисункам, а температуры отнесены к температуре газа перед ударной волной. Шаг расчетной сетки (размер ячейки) до ударной волны принимался равным $\Delta x_1 = \lambda_\infty/4$, где λ_∞ – средняя длина свободного пробега молекул в покоящемся газе. За фронтом ударной волны шаг – $\Delta x_2 = \lambda_\infty/10$. При уменьшении шага сетки Δx_2 в два раза результаты расчетов практически не изменялись. Количество молекул в ячейке до ударной волны принималось равным $N_\infty = 20\text{--}40$ (это изменение N_∞ не влияло на результаты расчета). Общее число частиц в расчетной области, как правило, не превышало 500000. Расчет проводится методом установления. Поэтому шаг по времени $\Delta t = \Delta x_1/V_\infty$. Поскольку расстояние между фронтом ударной волны и поршнем увеличивается с течением времени, то построение профилей плотности и температур проводилось с привязкой к некоторому значению плотности молекул n_c на фронте ударной волны – обычно $n_c = 3n_\infty$ (т.е. близкому к значению срединной плотности на фронте волны) – и усреднением по 100–200 шагам. Поэтому приводимые на графиках данные не представляются гладкими линиями, а имеют статистический разброс. На приведенных ниже рисунках представлены: поступательные температуры молекул T_{irM} и атомов T_{irA} ; величина $T_{int} = E_{int}/2k$, характеризующая энергию внутренних степеней свободы молекул (1.3); колебательная температура $T_{vib} = 2T_{int} - T_{irM}$, определенная в двухтемпературном приближении, когда вращательная температура $T_{rot} = T_{irM}$;

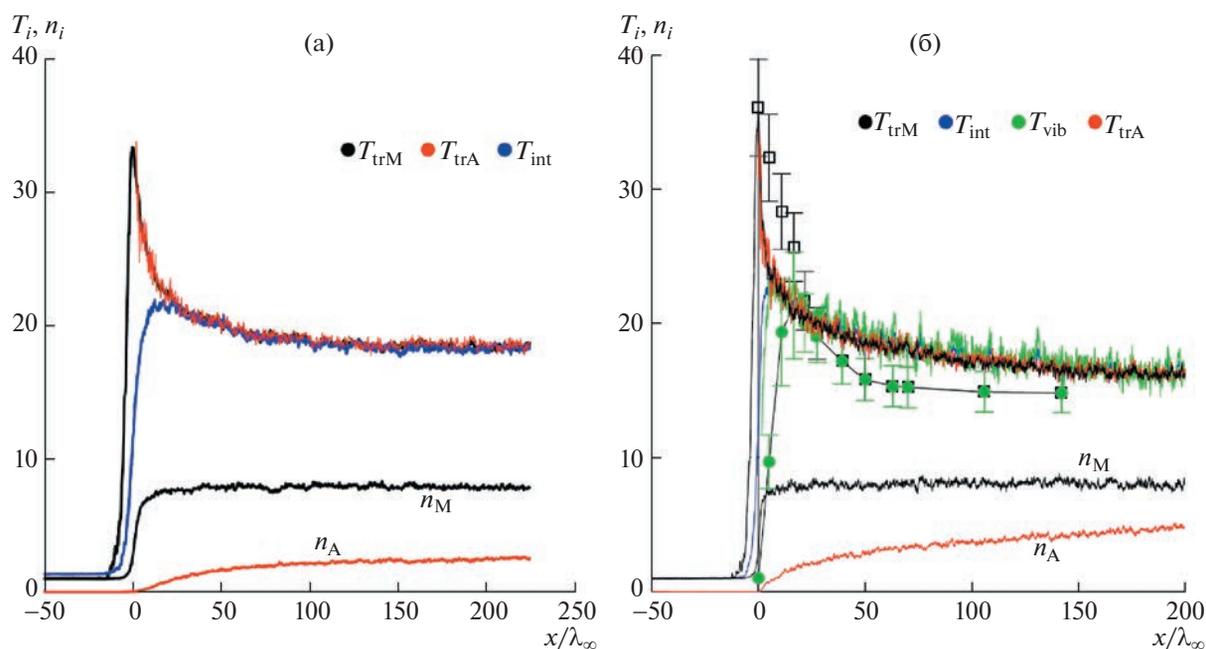


Рис. 4. Структура ударной волны в кислороде. Расчет: (а) $M_\infty = 11$, $N_\infty = 40$, $P_3 = 1$; (б) $M_\infty = 11.5$, $N_\infty = 20$, $P_3 = 0.01$, $T_{tr,max} = 10740$ К. Эксперимент: \square \bullet — $T_0 = 10820$ К, $P_\infty = 0.8$ тор.

плотности молекул n_M и атомов n_A . Температуры и плотности отнесены к T_∞ и n_∞ соответственно.

На рис. 4а приведены результаты расчетов, полученные для случая, когда вероятность тройного столкновения $P_3 = 1$ (т.е. когда при каждом столкновении двух атомов в их окрестности имеется третья частица). Видно, что процесс установления квазиравновесной температуры происходит достаточно быстро за фронтом ударной волны — уже на расстоянии $x/\lambda_\infty \cong 25$ все температуры сравнялись и далее от фронта они согласованно изменяются (уменьшаются). Это уменьшение вызвано тем, что за фронтом волны начинается процесс диссоциации молекул (см. изменение плотности атомов n_A), для которого характерное время релаксации велико. Как видно, даже на расстояниях $x/\lambda_\infty \cong 225$ равновесное состояние еще не наступило.

На рис. 4б расчет структуры ударной волны проведен при тех же значениях параметров газа, но вероятности тройных столкновений $P_3 = 0.01$ — на два порядка меньше, чем в предыдущем расчете. Уменьшение количества рекомбинаций атомов привело к уменьшению всех температур за фронтом волны, т.е. равновесная температура за фронтом стала меньше, чем в предыдущем случае с более высоким уровнем рекомбинации атомов. Как видно из приведенных данных, диссоциация молекул начинается практически сразу на фронте ударной волны, о чем свидетельствует образование атомов n_A , причем поступательная температура атомов $T_{trA} \cong T_{trM}$. На этом же рисунке приведены результаты экспериментов, полученных в [31]. Они показывают, что расчетные профили температур не только качественно, но достаточно хорошо и количественно (с учетом погрешности), согласуются с экспериментальными данными, показанными маркерами. Из этого сравнения следует, что вероятность тройных столкновений $P_3 \leq 0.01$.

Далее на рис. 5 дано сопоставление расчетных данных с экспериментальными, полученными при меньших числах Маха и при меньших поступательных температурах на фронте волны. Из этих данных следует, что при уменьшении температуры релаксационная зона за фронтом ударной волны увеличивается, степень диссоциации молекул уменьшается и при $T_0 = 5300$ К атомарный газ присутствует в очень малом количестве. И в этих случаях можно отметить хорошее количественное согласие расчетных и экспериментальных данных.

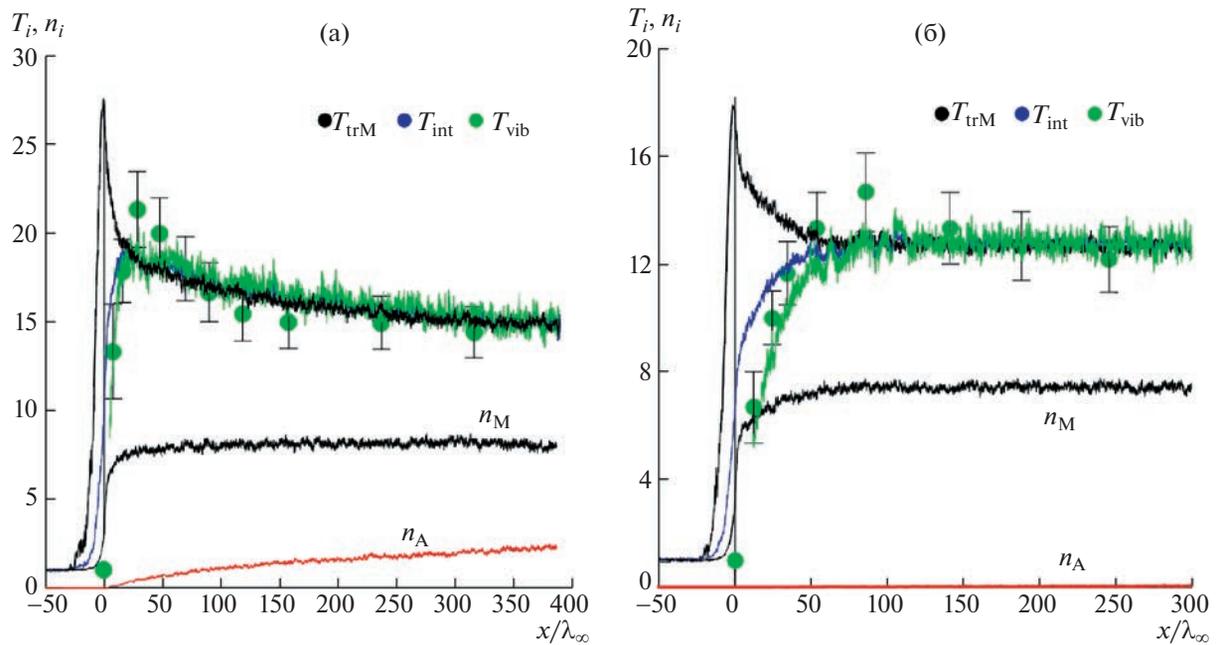


Рис. 5. Расчет: (а) $M_\infty = 9.9$, $N_\infty = 30$, $P_3 = 0.01$, $T_{tr,max} = 8290$ К, (б) $M_\infty = 7.62$, $N_\infty = 40$, $P_3 = 0.01$, $T_{tr,max} = 5370$ К. Эксперимент: $T_0 = 8620$ К (а), $P_\infty = 1$ Торр; $T_0 = 5300$ К (б), $P_\infty = 2$ Торр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты работы по созданию комплекса программ для исследования процессов, протекающих в высокотемпературных газах, в которых происходят столкновения атомов и молекул, сопровождающиеся обменом поступательной, вращательной, колебательной энергиями, а также диссоциацией молекул и рекомбинацией атомов. Пять каналов возможных процессов объединены в программный комплекс, который может быть использован для расчета какого-либо элементарного процесса либо встроен в программу расчета течений разреженного газа как “блок столкновений” при решении уравнения Больцмана методом DSMC (метод прямого статистического моделирования).

Столкновение частиц описывается как парное взаимодействие всех атомов друг с другом на основе классических уравнений движения, в качестве потенциалов парного взаимодействия используется потенциал Морзе. В общем случае все атомы могут быть различными, но в реализованном варианте рассматриваются варианты, в которых участвуют атомы азота N, кислорода O, молекулы N_2 , O_2 и NO. Образование молекулы NO в результате обменных реакций не предусмотрено, но молекула NO может быть образована при рекомбинации атомов N и O.

Рассмотрен процесс колебательной релаксации в кислороде для случая, когда начальная колебательная температура существенно меньше поступательной и вращательной температур. Изучено влияние вероятности рекомбинации атомов кислорода на равновесную температуру газовой смеси и показано, что вероятность тройного столкновения может быть принята как постоянный параметр в релаксационном процессе.

При больших числах Маха (и высоких температурах на фронте) исследована структура ударной волны в кислороде. Полученные данные хорошо согласуются с данными экспериментов в кислороде при температурах газа на фронте волны от 5600 до 10800 К.

На основании полученных данных можно заключить, что примененные в работе потенциалы взаимодействия частиц и их параметры, а также методика использования парных столкновений, позволяют получать результаты, которые адекватно описывают релаксационные явления в высокотемпературных газах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jaffe R., Schwenke D.W., Chaban G.* Vibrational and Rotational Excitation and Relaxation of Nitrogen from Accurate Theoretical Calculations // AIAA 2008-1208. P. 14.
2. *Jaffe R., Schwenke D.W., Chaban G.* Vibrational and Rotational Excitation and Dissociation in N_2-N_2 Collisions from Accurate Theoretical Calculations // AIAA 2010-4517. P. 13.
3. *Varga Z., Paukku Y., Truhlar D.G.* Potential energy surfaces for $O + O_2$ collision // J. Chem. Phys. 2017. V. 147. 154312.
4. *Paukku Y., Varga Z., Truhlar D.G.* Potential energy surface of triplet O_4 // J. Chem. Phys. 2018. V. 148, 124314.
5. *Grover M.S., Torres E., Schwartzentruber T.E.* Direct molecular simulation of internal energy relaxation and dissociation in oxygen // Phys. Fluids. 2019. V. 31. 076107.
6. *Jaffe R.L., Schwenke D.W., Grover M., Valentini P., Schwartzentruber T.E., Venturi S., Panesi M.* Comparison of quantum mechanical and empirical potential energy surfaces and computed rate coefficients for N_2 dissociation // AIAA 2016-0503. P. 25.
7. *Погосбекян М.Ю., Сергиевская А.Л.* Моделирование реакции диссоциации кислорода в термически неравновесных условиях: модели, траекторные расчеты, эксперимент // Химическая физика. 2018. Т. 37. № 4. С. 20–31.
8. *Esposito F., Armenise I., Capitelli M.* $N-N_2$ state to state vibrational relaxation and dissociation rates based on quasiclassical calculations // Chem. Phys. 2006. V. 331. № 1. P. 1–8.
9. *Macpherson A.K.* Rotational temperature profiles of shock waves in diatomic gases // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. № 2. P. 337–351.
10. *Koura K.* Monte Carlo direct simulation of rotational relaxation of diatomic molecules using classical trajectory calculations: Nitrogen shock wave // Physics of Fluids. 1997. V. 9. № 11. P. 3543–3549. <https://doi.org/10.1063/1.869462>
11. *Luo H., Alexeenko A.A., Macheret S.O.* Development of an impulsive model of dissociation in direct simulation Monte Carlo // Phys. Fluids. 2019. Vol. 31. 087105. <https://doi.org/10.1063/1.5110162>
12. *Konowalow D.D., Hirschfelder J.O.* Intermolecular potential functions for nonpolar molecules // Phys. Fluids. 1961. V. 4. № 5. P. 629–636.
13. *Konowalow D.D., Hirschfelder J.O.* Morse potential parameters for $O-O$, $N-N$, and $N-O$ interaction // Phys. Fluids. 1961. V. 4. № 5. P. 637–642.
14. *Гордеев О.А., Калинин А.П., Комов А.Л., Люстерник В.Е., Самуйлов Е.В., Соколова И.А., Фокин Л.Р.* Потенциалы взаимодействия, упругие сечения, интегралы столкновений компонентов воздуха для температур до 20000 К. Обзоры по теплофизическим свойствам веществ. ТФЦ. — М.: ИВТАН. № 5 (55). 1985. 100 с.
15. *Ерофеев А.И., Русаков С.В.* Применение классических траекторных расчетов столкновения молекул для вычисления коэффициентов переноса и изучения истечения разреженного газа в вакуум // Ученые записки ЦАГИ. 2020. Т. LI. № 5. С. 13–28.
16. *Karplus M., Porter R.N., Sharma R.D.* Exchange reactions with activation energy. I. Simple barrier potential for (H, H_2) // J. Chem. Phys. 1965. V.43. № 9. P. 3259–3287.
17. *Lordi J.A., Mates R.E.* Rotational relaxation in nonpolar diatomic gases // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 2. P. 291–308. <https://doi.org/10.1063/1.1692920>
18. *Полак Л.С., Гольденберг М.Я., Левицкий А.А.* Вычислительные методы в химической кинетике. М.: Наука, 1984. 280 с.
19. *Ступоченко Е.В., Лосев С.А., Осипов А.И.* Релаксационные процессы в ударных вонках. М.: Наука, 1965. 484 с.
20. *Никитин Е.У.* Теория элементарных атомно-молекулярных процессов в газах. М.: Химия, 1970. 456 с.
21. *Jaffe R.L.* The Calculation of High-Temperature Equilibrium and Nonequilibrium Specific Heat Data for N_2 , O_2 and NO // AIAA-87-1633.
22. *Capitelli M., Colonna G., Giordano D., Maraffa L., Casavola F., Minelli P., Pagano D., Pietanza L.D., Tacogna F.* Tables of Internal Partition Functions and Thermodynamic Properties of High-Temperature Mars-Atmosphere Species from 50 K to 50000 K. ESA STR-246, ESA Publications Division. ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 2005, 267 p.
23. *Jaffe R.L., Schwenker D.W., Panesi M.* First principles calculation of heavy particle rate coefficients. Hypersonic nonequilibrium flows: Fundamentals and recent advances / Ed. E. Josynla// AIAA. 2015.
24. *Bender J.D., Valentini P., Nompelis I. et al.* An improved potential energy surface and multi-temperature quasiclassical trajectory calculations of $N_2 + N_2$ dissociation reactions // J. Chem. Phys. V. 143, 054304 (2015). <https://doi.org/10.1063/1.4927571>
25. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963, 704 с.

26. *Park C.*, Assessment of a two-temperature model for dissociating and weakly ionizing nitrogen // *J. Thermophysics and Heat Transfer*. 1988. V. 2. № 1. P. 8–16.
27. *Losev S.A., Makarov V.N., Pogosbekyan M.J., Shatalov O.P., Nikol'sky V.S.* Thermochemical nonequilibrium kinetic models in strong shock waves on air. AIAA-94-1990.
28. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ, 1961. 930 с.
29. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных физических явлений. М.: Наука, 1966, 688 с.
30. *Забелинский И.Е., Ибрагимова Л.Б., Шаталов О.П.* Измерение колебательной температуры кислорода за фронтом ударной волны в условиях термической и химической неравновесности // *Изв. РАН. МЖГ*. 2010. № 3. С. 159–167.
31. *Ibragimova L.B., Sergievskaya A.L., Shatalov O.P.* Dissociation Rate Constants for Oxygen at Temperatures up to 11000 K // *Fluid Dynamics*. 2013. V. 48. № 4. P. 550–555.
32. *Ibragimova L.B., Sergievskaya A.L., Levashov V.Yu., Shatalov O.P., Tunik Yu.V., Zabelinskii I. E.* Investigation of oxygen dissociation and vibrational relaxation at temperatures 4000–10800 K // *J. Chem. Phys.* 2013. V. 139. 034317.
<https://doi.org/10.1063/1.4813070>
33. *Ибрагимова Л.Б., Левашов В.Ю., Сергиевская А.Л., Шаталов О.П.* Моделирование колебательно-диссоциационной кинетики кислорода при температурах 4000–11000 К // *Изв. РАН. МЖГ*. 2014. № 1. С. 131–139.