

УДК 517: (53 + 57/59)

## МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ДЕМОНИСТРИРУЮЩАЯ “КАТАСТРОФИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ”

© 2023 г. А. И. Мошинский<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет,  
Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: alex-moshinskij@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.07.2022 г.

После доработки 26.08.2022 г.

Принята к публикации 12.09.2022 г.

Исследуется поведение механической системы при изменении характеризующих ее параметров. Анализ показывает, что в системе возникают скачкообразные изменения (катастрофы) в определенной области управляющих параметров. Рассмотренная задача допускает точный (глобальный) анализ катастрофы, без привлечения различных разложений и допущений. Предложенная механическая конструкция может служить для демонстрации возникновения катастрофы.

*Ключевые слова:* катастрофа, складка, бифуркация, стационарное вращение, скачок, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329923700034, EDN: JMWCCY

**1. Введение.** Особенностью ряда систем, встречающихся в различных разделах физики и техники, является качественная перестройка их поведения, в ряде случаев сопровождаемая скачками тех или иных переменных. Качественная перестройка или метаморфоза различных объектов при изменении определенных параметров, от которых они зависят, называют (в широком смысле) бифуркацией (раздвоением) [1]. Скачкообразные изменения, возникающие как внезапная реакция системы на плавное изменение внешних условий, называют катастрофами [1]. Как правило в книгах по теории катастроф приводят примеры физических устройств, иллюстрирующих теорию. Наиболее известные из них – машина катастроф Зимана и “параболическая качалка” [1–4]. Здесь рассматривается задача механики, где результаты получаются не сложнее, а зачастую более просто, чем в отмеченных и других случаях. Эта задача является естественным обобщением задачи из школьного курса физики [5] (задача 203), где по существу присутствует бифуркация (раздвоение) решения при конкретном значении определенного безразмерного параметра. Кроме того, предлагаемую механическую систему можно использовать в демонстрационных целях ее скачкообразного поведения.

**2. Постановка и анализ задачи [5].** Пусть стержень, к которому прикреплен другой стержень при помощи шарнира (см. рис. 1) вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, совпадающей по направлению с вектором  $\mathbf{g}$  однородного поля силы тяжести. Второй стержень считаем недеформируемым, невесомым и имеющим длину  $l$ . На его конце сосредоточен точечный груз массой  $m$ . Требуется определить угол отклонения  $\alpha$  стержня от вертикали, который в рассматриваемом случае будет являться конфигурационной переменной системы (рис. 1).

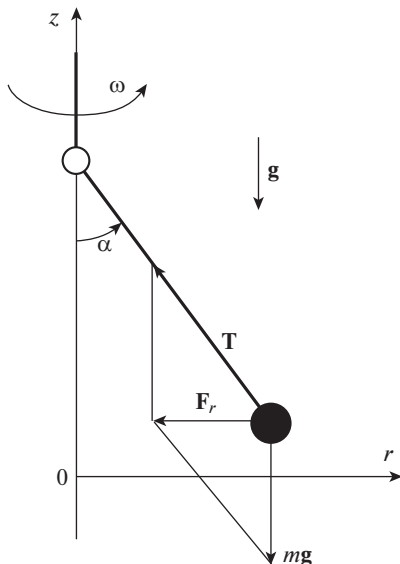


Рис. 1. Физический маятник.

Из баланса сил, действующих на массу  $m$  (сила тяжести, сила реакции стержня  $T$  и центростремительная сила) находится уравнение для определения угла  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ):

$$mgtg\alpha = F_r = mw^2l\sin\alpha \quad (2.1)$$

(Индекс  $r$  – радиальная компонента). Откуда получаем

$$\sin\alpha(\lambda - 1/\cos\alpha) = 0; \quad \lambda = \omega^2l/g \quad (2.2)$$

где  $\lambda$  можно назвать управляющим параметром системы. Уравнение (2.2) имеет два решения, отвечающие равенству нулю каждого из двух множителей:

$$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0; \quad \cos\alpha = 1/\lambda \Rightarrow \alpha = \arccos(1/\lambda) \quad (2.3)$$

Ясно, что физическое значение второе решение (2.3) имеет только при  $\lambda \geq 1$ , тогда как первое подобных ограничений не имеет. Однако, как отмечено в [5], первое решение неустойчиво при  $\lambda > 1$ . Это обстоятельство (как и устойчивость первого (нулевого) решения только при  $\lambda \leq 1$ ) удобно продемонстрировать при помощи энергетических терминов во вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  системе координат. В этой системе координат задача будет статической. Такая возможность связана с инвариантностью задачи (стационарного вращения) относительно угловой координаты  $\varphi$  цилиндрической системы координат с осью  $z$  (рис. 1). Подобную ситуацию обычно называют относительным равновесием.

Приняв за начало отсчета потенциальной энергии гравитационного поля ось  $r$ , выходящую из нижнего положения стержня ( $\alpha = 0$ ) для потенциальной энергии массы  $m$  в этом поле имеем выражение  $U_g = mgl(1 - \cos\alpha)$ . Потенциальную энергию центробежного поля можно найти, вычислив работу по перемещению массы  $m$  в этом поле. Результат будет естественно по модулю совпадать с кинетической энергией этой массы в неподвижной системе координат:  $U_\omega = -0.5m\omega^2l^2 \sin^2\alpha$ , т.е. одну и ту же энергию называем по-разному в зависимости от системы координат. Полная энергия такова

$$U(\alpha) = U_g + U_r = mgl(1 - \cos\alpha) - 0.5m\omega^2l^2 \sin^2\alpha \quad (2.4)$$

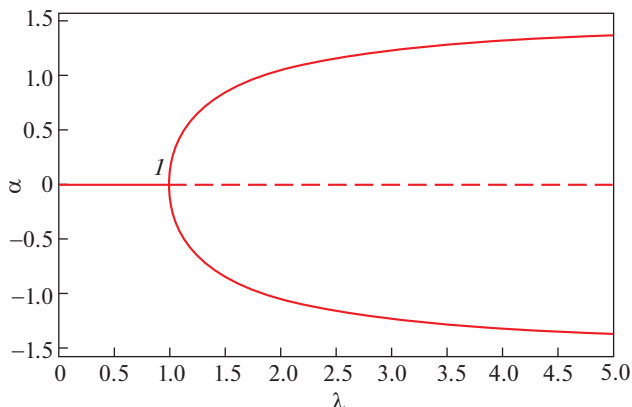


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма физического маятника.

где индекс  $g$  относится к энергии поля силы тяжести, а  $r$  — к энергии вращательного движения.

Отметим, что уравнение (2.1) можно получить из (2.4) как условие минимума потенциальной энергии  $U(\alpha)$  ( $dU/d\alpha = 0$ ). В устойчивом состоянии равновесия потенциальная энергия имеет минимум.

Кроме равновесия  $\alpha = 0$  у системы, согласно (2.3), имеется всегда неустойчивое положение равновесия  $\alpha = \pi$ . Хотя основное значение, вытекающее из физики процесса, имеет интервал изменения  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ , в котором будут лежать точки устойчивого стационарного вращения ниже иногда нас будут, для полноты картины, интересоваться случаи, когда у маятника существуют неустойчивые точки равновесия вне этого отрезка, поэтому в некоторых случаях будем использовать более широкие интервалы, в частности  $\alpha \in [-\pi, \pi]$ .

Формулу (2.4) целесообразно представить в безразмерном виде

$$V(\alpha) = \frac{U}{mgl} = 1 - \cos \alpha - \frac{\lambda \sin^2 \alpha}{2} \quad (2.5)$$

Заметим, что  $V$  четная функция угла  $\alpha$ . В данной задаче угол  $-\alpha$  описывает ту же ситуацию, что и вариант  $\alpha$ . На рис. 2 представлен график, иллюстрирующий решение (2.2). Данная бифуркационная картина, типична для многих проблем естествознания. При этом скачков переменных состояния не наблюдается.

Точка  $I$  — точка бифуркации, когда у задачи появляется второе решение (2.3) при возрастании параметра (критерия подобия)  $\lambda$ . Штриховой линией показано неустойчивое решение. Это поясняет рис. 3, где представлены три кривые при  $\lambda < 1$ ,  $\lambda = 1$  и  $\lambda > 1$ , представляющие энергетическую функцию  $V(\alpha)$  согласно (2.5). Линии при  $\lambda = 0.05$  и  $\lambda = 2.4$  демонстрируют типичное поведение потенциальной функции при  $\lambda < 1$  и  $\lambda > 1$  соответственно. При возрастании параметра  $\lambda$  (переход от линии 1 к линии 2 а затем к 3) сначала имеем только решение  $\alpha = 0$ , поскольку при  $\alpha = 0$  реализуется квадратичный минимум потенциала  $V \cong 0.5(1 - \lambda)\alpha^2$  при  $\alpha \rightarrow 0$  ( $\lambda < 1$ ). В критическом случае (кривая 2,  $\lambda = 1$ ) потенциал  $V$  имеет локальное представление  $V \cong \alpha^4/24$  (росток катастрофы сборки [6]), т.е. также имеем при  $\alpha = 0$  локальный минимум, который сменяется локальным максимумом при  $\lambda > 1$  (кривая 3). При этом происходит качественное изменение потенциальной кривой, появляются два минимума при  $\alpha = \pm \arccos(1/\lambda)$ . Имеем также при  $\lambda \rightarrow 1$  ( $\lambda > 1$ ) координаты точки минимума  $V$ :  $\alpha_{min} \cong \pm [2(\lambda - 1)]^{1/2}$ . Неустойчивость,

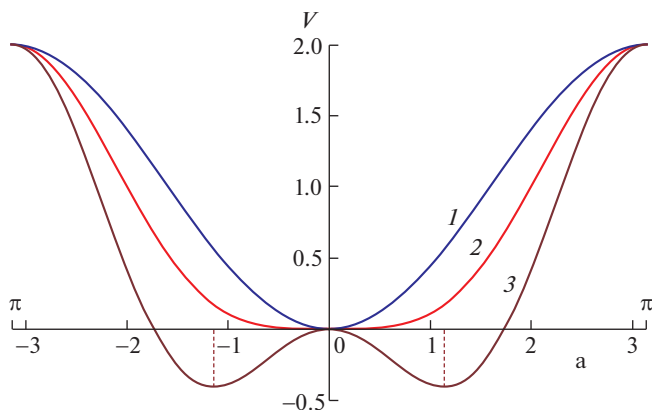


Рис. 3. Потенциальная энергия системы. 1 –  $\lambda = 0.05$ ; 2 –  $\lambda = 1$ ; 3 –  $\lambda = 2.4$ .

а значит практическая не наблюдаемость, решения  $\alpha = 0$  при  $\lambda > 1$ , демонстрирует один из флагов (существенных, характерных признаков) катастрофы – недостижимость. Пунктирные линии на рис. 3 показывают координаты точек минимума потенциальной функции ( $\alpha_{\min} = \pm 1.141$  для  $\lambda = 2.4$ ).

Поведение механической системы наглядно характеризует ее фазовый портрет. Фазовые кривые легко находятся при наличии в аналитической форме закона сохранения механической энергии [7, стр. 22], поскольку на каждой фазовой кривой значение полной энергии постоянно. В нашем случае энергетический баланс системы запишем в безразмерном виде

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = E + \frac{\lambda \sin^2 \alpha}{2} - 1 + \cos \alpha \quad (2.6)$$

где  $E$  – безразмерная полная энергия, а для обезразмеривания времени использован масштаб  $(0.5l/g)^{1/2}$ . На рис. 4 приведены фазовые портреты системы при тех же значениях параметра  $\lambda$ , что и на рис. 3, в интервале  $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ .

В случае малого значения параметра  $\lambda$  ( $\lambda = 0.05$  на рис. 4, 1) фазовый портрет напоминает таковой обычного маятника, переходя в него при  $\lambda = 0$ . Пограничный вариант  $\lambda = 1$  при  $\alpha = 0$  реализует более пологий максимум  $d\alpha/dt$  на фазовой кривой ( $d\alpha/dt \cong \cong E^{1/2}[1 - \alpha^4/(16E)]$ ,  $E > 0$ ), чем случаи при  $\lambda < 1$ . На рис. 4, 2 прямолинейные участки обязаны своим происхождением аппроксимационными возможностями монитора (толщиной пикселя). Вариант рис. 4, 3 при  $\lambda = 2.4$  иллюстрирует появление двух точек равновесия вместо одной в начале координат, которая стала неустойчивой.

В общем случае об устойчивости точки  $\alpha = 0$ ,  $\dot{\alpha} = 0$  можно судить из разложения в окрестности этой точки:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{(1-\lambda)\alpha^2}{2} = E$$

Отсюда видно, что при  $\lambda < 1$  имеем эллиптическую особую точку (центр), т.е. реализуется устойчивость системы. В то же время, при  $\lambda > 1$  имеем гиперболическую особую точку (седло), т.е. система становится неустойчивой.

**3. Смещение шарнирного соединения.** В однопараметрическом семействе функций, в частности (2.5), кривая равновесия типа рис. 2 (точнее наша математическая модель) является структурно неустойчивой. При малом изменении (шевелении) параметров

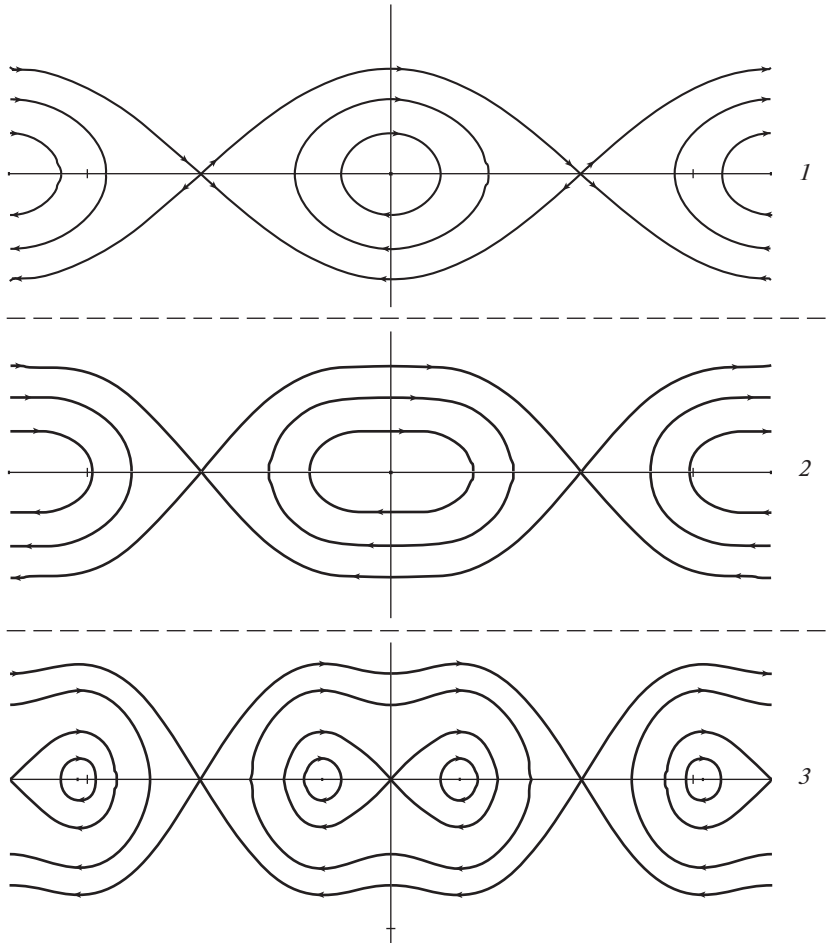


Рис. 4. Фазовые портреты системы. По оси абсцисс отложена координата  $\alpha$ , по оси ординат  $-\dot{\alpha}$ . Цифры справа соответствуют кривым рис. 3.

системы, связанных с какими-либо воздействиями, в типичной ситуации, он меняется таким образом, что точки самопересечения (типа 1 на рис. 2) исчезают. Это можно объяснить так. Локально, вблизи точки бифуркации 1 график приблизительно представляется уравнением  $(\lambda - 1)\alpha = 0$ . При “шевелении” в правой части этого уравнения вместо нуля появится некоторая константа  $(\lambda - 1)\alpha = c$ , т.е. теперь график функции  $\alpha(\lambda)$  локально представляет собой гиперболу. Значения  $c$  принадлежат бесконечному (континуальному) множеству. В типичном случае ( $c \neq 0$ ) точек самопересечения график не имеет и только одно значение  $c = 0$  дает вырождение (см. также [8, стр. 44, 64]).

Здесь рассмотрим, в качестве отмеченного “шевеления” системы, случай определенного смещения шарнирного соединения. Ситуацию иллюстрирует рис. 5.

В этом случае формула (2.4) для потенциала заменится следующей:

$$U(\alpha) = mgl(1 - \cos\alpha) - 0.5m\omega^2 (l\sin\alpha + b)^2$$

Или в безразмерном виде

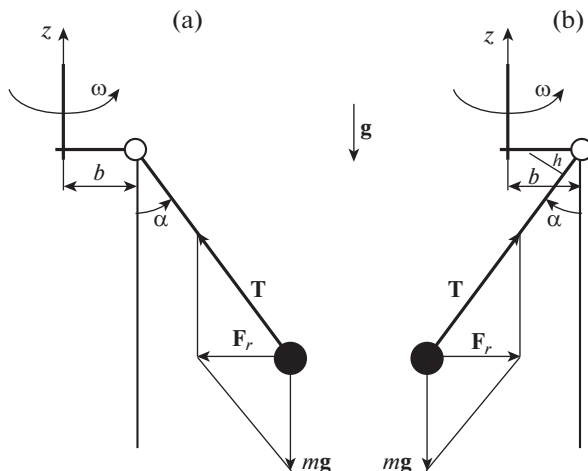


Рис. 5. Смещенный физический маятник.

$$V(\alpha) = 1 - \cos\alpha - l(\sin\alpha + \epsilon)^2/2, \quad V(\alpha) = U(\alpha)/(mgl) \quad (3.1)$$

где  $\epsilon = b/l$  – еще один (в дополнение к  $\lambda$ ) безразмерный управляющий параметр. Теперь потенциал несимметричен  $V(-\alpha) \neq V(\alpha)$  ( $\epsilon \neq 0$ ), поэтому представлены два варианта: рис. 5,а и рис. 5,б.

Из соотношения (3.1), после вычисления производной  $dV/d\alpha$  и приравнивания ее нулю, найдем уравнение для определения координаты  $\alpha$  положения стержня

$$\operatorname{tg}\alpha = l(\sin\alpha + \epsilon) \quad (3.2)$$

которое можно получить также и из баланса сил, как было найдено уравнение (2.1). Ситуацию осложняет то, что теперь нет факторизации уравнения (представление в виде двух сомножителей, как было в случае зависимости (2.2)).

На рис. 6 приведены три кривые при фиксированном значении параметра  $\epsilon = 0.1$ , которые построены на основе выражения (3.1). Уравнение (3.2) определяет точки экстремумов функции  $V(\alpha)$  (поверхность равновесия), которых может быть от одной до трех при  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Наибольший интерес представляет точка, где уравнение (3.2) имеет двукратный корень. Именно она соответствует бифуркации решения задачи. На рис. 6 двукратный корень (3.2) имеет кривая 2 при  $\alpha = -0.483$  (точка перегиба, левая вертикальная пунктирная линия). На рис. 6 также выделена точка минимума кривой 2 при  $\alpha = 0.906$  (отмечена правой вертикальной пунктирной линией) и точка  $\alpha = -\arcsin(\epsilon) \approx -0.1$  (отмечена средней вертикальной пунктирной линией), общая для всех кривых при данном  $\epsilon$ . Общим будет и наклон (производная) всех кривых в этой точке, равный  $-\epsilon$ . При этом слагаемое в (3.1), содержащее  $\lambda$  обращается в нуль. Данный вариант соответствует положению грузика  $m$  на оси вращения, поскольку  $\sin\alpha = -\epsilon$ . Имеем также  $U_r = 0$ . Подобная точка (напоминающая узел) имеется и при  $\alpha = \arcsin(\epsilon) - \pi$ . Линия 2 является разграничительной. При  $\lambda < \lambda_2 = 1.439$  имеется только одна точка минимума функции  $V(\alpha)$ , а при  $\lambda > \lambda_2$  – две. Отметим, что в отличие от кривых рис. 3, в точках  $\alpha = \pm\pi$  нет максимального значения потенциальной энергии. Действительно, в точках  $\alpha = \pm\pi$  значение производной функции  $V(\alpha)$  (3.1) равно  $\lambda\epsilon$  и не равно нулю для кривых рис. 6. Смещение точек максимума на рис. 6 незаметно из-за выбора крупного масштаба для переменных. Это смещение можно заметить (вертикальная черточка) на рис. 7 возле точки неустойчивого равновесия  $\alpha = \pi$ . Наличие

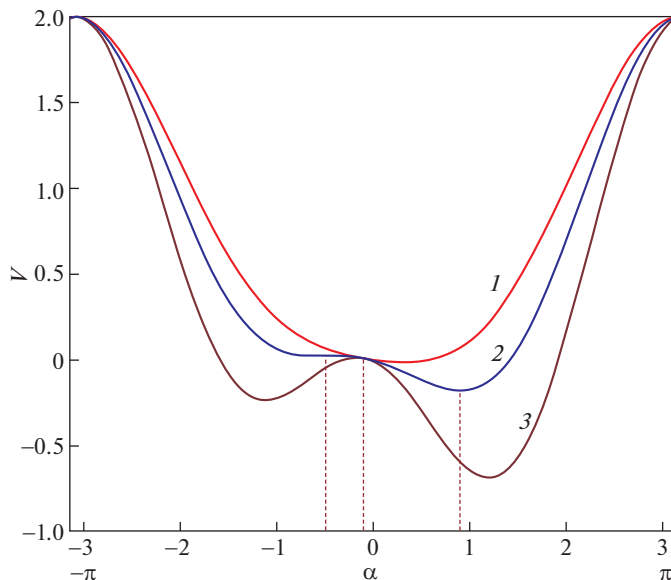


Рис. 6. Потенциальная энергия системы при  $\epsilon = 0.1$ .  $1 - \lambda = 0.8$ ;  $2 - \lambda = 1.439$ ;  $3 - \lambda = 2.5$ .

двух устойчивых положений равновесия “мод” (линия 3, рис. 6) демонстрирует еще один флаг катастрофы – модальность.

Приведем фазовый портрет, позволяющий, в частности, судить об устойчивости точек равновесия системы с потенциалом (3.1). В данном случае уравнение (2.6) замещается следующим:

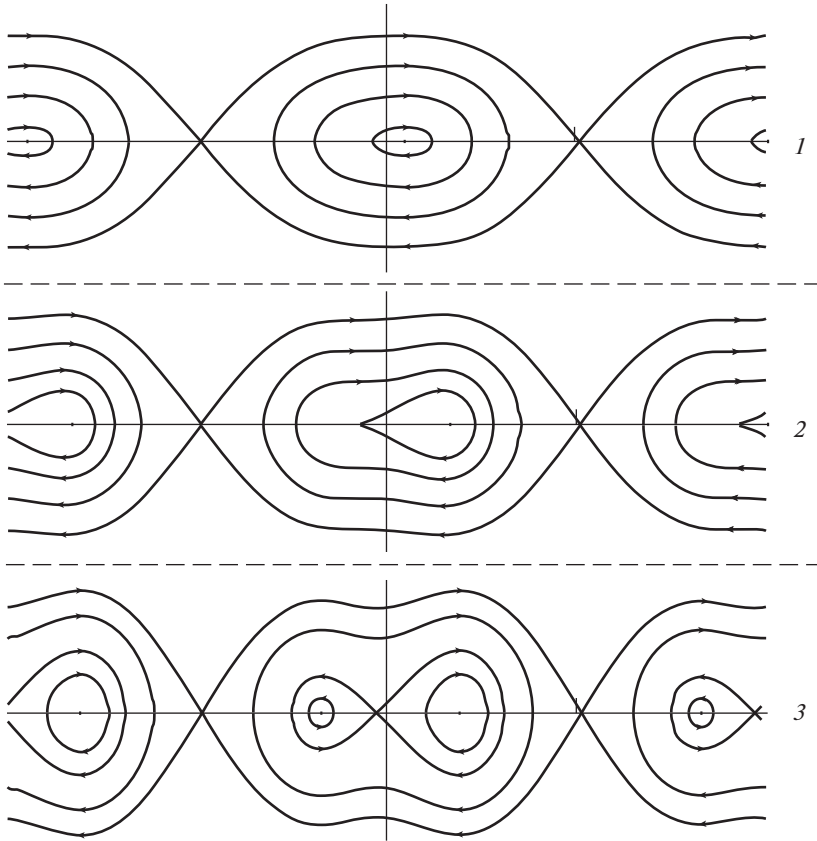
$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = E + \frac{\lambda(\sin \alpha + \epsilon)^2}{2} - 1 + \cos \alpha$$

дополнительно включающим параметр  $\epsilon$ . Отсутствие симметрии по координате  $\alpha$  при  $\epsilon \neq 0$  на портрете рис. 7 приводит к определенным образом “деформации” фазовых портретов рис. 4.

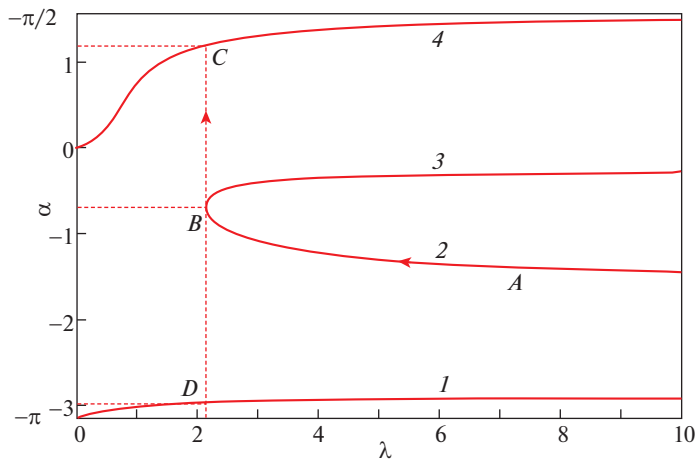
На рис. 7 взяты те же значения параметра  $\lambda$ , что и на рис. 6, и выбраны определенные значения полной энергии  $E$ . Линии  $\lambda = 0.8$  и  $\lambda = 2.5$  представляют типичное поведение потенциальной функции. Они соответственно меньше и больше разграничительного значения параметра  $\lambda = 1.439$ , определенного ниже по зависимости (3.3).

Целесообразно рассматривать значения  $\epsilon$  на отрезке  $\epsilon \in [0, 1]$ . При  $\epsilon > 1$ , т.е. когда смещение  $b$  превышает длину стержня  $l$ , будет, при любых значениях  $\lambda$ , устойчиво реализовываться только одна ветвь кривой, типа линии 4 на рис. 8. Вариант рис. 5,b невозможен, поэтому этот случай малоинтересен. Влияние параметра  $\epsilon$  на вид кривых в плоскости  $\alpha, \lambda$  характеризует рис. 9, где представлены кривые (3.2) при трех значениях этого параметра. Пунктирные линии на этом рисунке показывают атрибуты катастрофы при  $\epsilon = 0.1$ . Вблизи точки  $\lambda = 1, \alpha = 0$  при малом значении параметра  $\epsilon$  (кривая 1 на рис. 9) график, в области выделенной окружностью, напоминает гиперболу, в соответствии со сказанным ранее.

Четыре линии (1 – 4) рис. 8, в случае значения  $\epsilon$  на отрезке  $\epsilon \in [0, 1]$ , имеют соответственно следующие горизонтальные асимптоты:  $\alpha_1 = \arcsin(\epsilon) - \pi, \alpha_2 = -\pi/2, \alpha_3 = -\arcsin(\epsilon), \alpha_4 = \pi/2$ . Этот рисунок построен на основе зависимости (3.2) при кон-



**Рис. 7.** Фазовые портреты системы. По оси абсцисс отложена координата  $\alpha$ , по оси ординат  $-d\alpha/dt$ . Цифры справа соответствуют кривым рис. 6.



**Рис. 8.** Линии равновесия системы при  $\varepsilon = 0.25$  ( $\lambda_B = \lambda_C = \lambda_D = 2.135$ ).



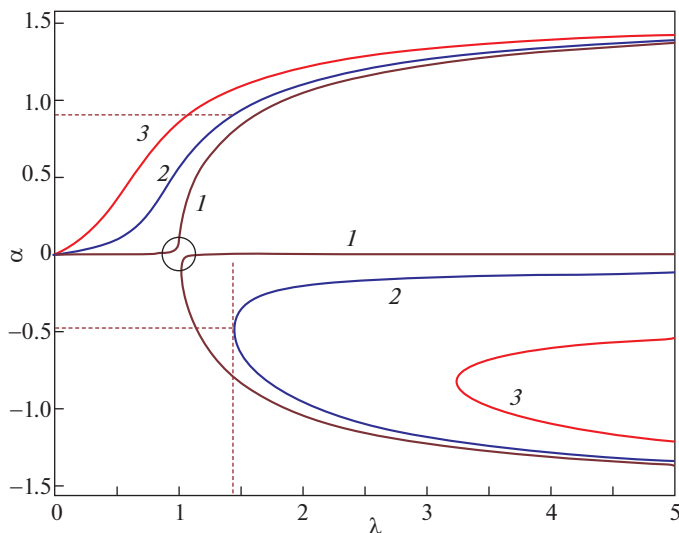


Рис. 9. Линии равновесия системы при: 1 –  $\varepsilon = 0.001$ ; 2 –  $\varepsilon = 0.1$ ; 3 –  $\varepsilon = 0.4$ .

кретном значении параметра  $\varepsilon = 0.25$ . Топология графиков рис. 8 и рис. 9 отличается от таковой для графика рис. 2. В частности множество, состоящее из линий графиков не связно (является объединением непересекающихся множеств) и линии графиков не имеют точек самопересечения при  $\varepsilon > 0$ .

Скачкообразное (катастрофическое) поведение системы прокомментируем на рис. 8. Пусть положение стержня определяет точка  $A$  на рис. 8. Если теперь медленно уменьшать угловую скорость  $\omega$  (точнее уменьшать параметр  $\lambda$ ), то, считая, что система быстро адаптируется (в частности за счет трения в шарнире) к условиям равновесия (3.2) (принцип максимального промедления [3, 6]), то придем в точку  $B$  (рис. 8). При дальнейшем уменьшении параметра  $\lambda$ , поведение системы определяется скачкообразным переходом на верхнюю ветвь функции (3.2) (линия 4) в точку  $C$  (рис. 8) и впоследствии будет находиться только на этой ветви. Направление перемещения показаны на кривых рис. 8 стрелками. Если после перехода на верхнюю ветвь начать увеличивать значение параметра  $\lambda$ , то точки, характеризующие состояние системы, будут отслеживать верхнюю ветвь, т.е. наблюдается гистерезис (один из признаков флагов катастрофы [6]). Здесь гистерезис понимается в узком смысле: при движении параметров в обратном направлении система выбирает другой путь.

Принцип максимального промедления, есть хорошо зарекомендовавшее себя на практике соглашение, когда не анализируют временную эволюцию системы. Он формулируется так [6]. Состояние системы определяется устойчивым (стабильным) или метастабильным минимумом до тех пор, пока он существует. При этом медленность изменения управляющего параметра  $d\lambda/dt$  подразумевает, что выполняется неравенство  $t_*(d\lambda/dt) \ll \Delta\lambda$ , где  $\Delta\lambda$  – характерное изменение (масштаб) параметра  $\lambda$ , а индекс \* помечает время релаксации:  $t_*$  – время релаксации, т.е. порядок времени по прошествии которого система приходит в равновесие, если прекратить внешнее воздействие. Это неравенство выражает тот факт, что за время релаксации величина  $\lambda$  мало изменится по сравнению с  $\Delta\lambda$ . При этом роль инерции незначительна. При нарушении неравенства  $t_*(d\lambda/dt) \ll \Delta\lambda$  колебания угла  $\alpha$  возле отвечающего текущему значению параметра  $\lambda$  положению равновесия могут привести к “преждевременной ката-

строфе” (например при  $\lambda > \lambda_B$  на рис. 8). Подобное неравенство в термодинамике является фундаментальным условием квазистатичности процесса.

Параметры критической точки  $B$  определим из условия (см. рис. 8), что  $\partial\lambda/\partial\alpha = 0$ ,  $\Rightarrow \lambda \cos^3\alpha = 1$ . Здесь  $\lambda$  рассматривается как функция параметров  $\alpha$  и  $\varepsilon$ , при этом  $\varepsilon$  считается постоянной величиной, т.е. приравнена нулю частная производная. Подставляя это выражение в (3.2) находим  $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = \sin\alpha + \varepsilon$ . Отсюда получаем значения переменных  $\alpha$  и  $\lambda$  в критической точке  $B$  (рис. 8)

$$\alpha_B = -\arcsin(\varepsilon^{1/3}), \quad \lambda_B = (1 - \varepsilon^{2/3})^{-3/2} \quad (3.3)$$

При  $\varepsilon = 0.1$  имеем  $\lambda_B = 1.439$ . Это значение  $\lambda_B = \lambda_2$  отвечает разграничительной кривой 2 на рис. 6.

Интерес представляют также координаты точки  $C$ , связанные со скачком угла  $\alpha$ . Заметим, что рассматривая (3.2) как уравнение для определения  $\alpha$  при заданных  $\lambda$  и  $\varepsilon$ , это уравнение можно свести к алгебраическому уравнению четвертой степени относительно переменной  $X = \sin\alpha$  [есть также вариант выразить значения функций  $\sin(\alpha)$  и  $\text{tg}(\alpha)$  через  $p = \text{tg}(\alpha/2)$ :  $\lambda \varepsilon p^4 + 2(1 + \lambda)p^3 + 2(1 - \lambda)p - \lambda \varepsilon = 0$ ]. Как известно (см. напр. [9]) такое уравнение допускает решение в радикалах, выраженное через коэффициенты уравнения. В нашей задаче при изменении параметров  $\lambda$  и  $\varepsilon$  в широких пределах, физическое значение (вещественность  $\alpha$ ) имеют только корни  $|X| \leq 1$ .

Выражая  $\lambda$  и  $\varepsilon$  в (3.2) через угол  $\alpha_B$  в (3.3) и введя обозначение  $Y = \sin\alpha_B$ , приведем данное уравнение к виду

$$(X^2 - 1)(X - Y^3)^2 + X^2(1 - Y^2)^3 = 0$$

При этом, чтобы избавиться от квадратного корня, уравнение (3.2) возводили в квадрат, поэтому у выписанного уравнения могут появиться посторонние корни. Учитывая, что при  $X = Y$  имеем корень этого уравнения, причем двукратный, легко свести его к виду

$$(X - Y)^2[X^2 - 2Y(Y^2 - 1)X - Y^4] = 0$$

Приравняв выражение в квадратных скобках нулю, находим два корня

$$X_{\pm} = Y(Y^2 - 1) \pm Y[(1 - Y^2 + Y^4)^{1/2}] = \varepsilon^{1/3}[1 - \varepsilon^{2/3} \mp (1 - \varepsilon^{2/3} + \varepsilon^{4/3})^{1/2}]$$

где использовано равенство  $Y = -\varepsilon^{1/3}$  ( $Y = \sin\alpha_B$ ). Координату точки  $C$  определяет выражение  $\alpha_C = \arcsin(X_-)$ . Второй вариант  $\alpha = \arcsin(X_+)$  будет посторонним для (3.2) [удовлетворяет уравнению  $\text{tg}\alpha + \lambda(\sin\alpha + \varepsilon) = 0$ ]. Значение  $X_+$  следует использовать так:  $\alpha_D = -\pi - \arcsin(X_+)$ . Корень  $\alpha_D$  соответствует неустойчивой ветви (см. рис. 8) при наличии кратного корня  $\alpha_B$ . При этом реализуется максимум функции  $V(\alpha)$ . Нижняя ветвь представляет линию, в которую переходит при  $\varepsilon > 0$  неустойчивая ветвь  $\alpha = -\pi$  для случая  $\varepsilon = 0$ . Рис. 8 показывает, что у маятника с круговой траекторией груза массы  $m$  (рис. 5) могут быть либо два положения равновесия при  $\lambda < \lambda_B$  либо четыре при  $\lambda > \lambda_B$  (в вырожденной точке  $B$  — три). Причем линии 1, 3 соответствуют неустойчивому равновесию, а 2, 4 — устойчивому.

Величина скачка угла  $\alpha$  при катастрофе определяется выражением

$$\Delta\alpha = \alpha_C - \alpha_B = \arcsin\{\varepsilon^{1/3}[1 - \varepsilon^{2/3} + (1 - \varepsilon^{2/3} + \varepsilon^{4/3})^{1/2}]\} + \arcsin(\varepsilon^{1/3}) \quad (3.4)$$

Вблизи начала координат функция  $\Delta\alpha$  имеет асимптотику  $\Delta\alpha_0 \cong 3\varepsilon^{1/3}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; а в окрестности точки  $\varepsilon = 1$  ( $\varepsilon < 1$ ) разложение  $\Delta\alpha_1 \cong \pi - [2(1 - \varepsilon^{1/3})]^{1/2}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Функция  $\Delta\alpha(\varepsilon)$  имеет точку перегиба при  $\varepsilon = 0.741$ . Легко проверить, что формула  $\Delta\alpha_0 = 3\varepsilon^{1/3}$  хорошо представляет (с высокой точностью) функцию  $\Delta\alpha$  на интервале  $\varepsilon \in [0, 0.99]$ . Относительная погрешность на этом интервале не превышает 2.21%, а на всем интервале

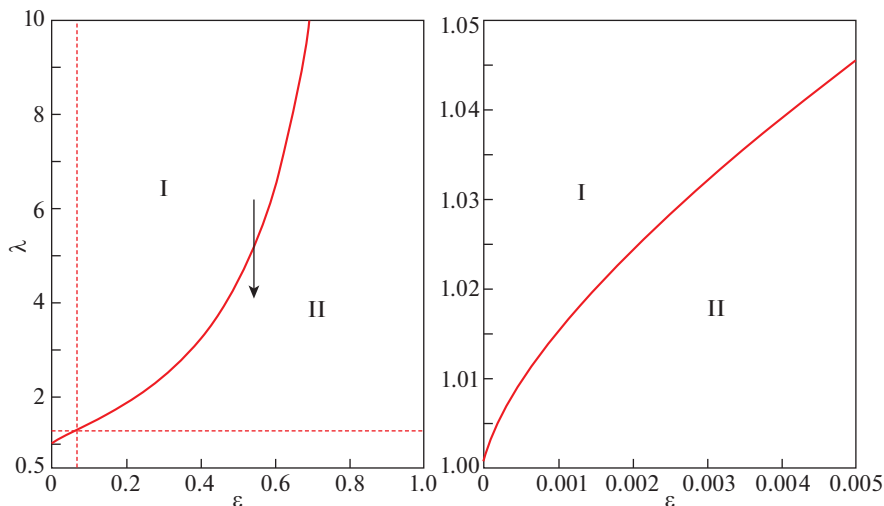


Рис. 10. График сепаратрисы катастрофы сборки (3.5).

$\epsilon \in [0, 1]$  эта погрешность не больше 4.507%, что следует считать удачей для приближенной (асимптотической) формулы.

При  $\epsilon = 0.25$  для рис. 8 значения координат отмеченных точек таковы:  $\lambda_B = 2.135$ ,  $\alpha_D = -2.971$ ,  $\alpha_B = -0.682$ ,  $\alpha_C = 1.193$ ; величина скачка:  $\Delta\alpha = 1.874$ . При  $\epsilon = 0.1$  для рис. 6 (кривая 2) с помощью полученных соотношений также находятся характерные значения  $\alpha$ , представленные ранее.

На рис. 10 приведен график функции (3.3)

$$\lambda = (1 - \epsilon^{2/3})^{-3/2} \tag{3.5}$$

Он возникает как видимый контур при проектировании двумерной поверхности состояний (3.2) вдоль оси конфигурационной переменной  $\alpha$  на плоскость управляющих параметров  $\lambda, \epsilon$ . Эта разделяющая данную плоскость линия (сепаратриса) состоит из особых точек проектирования (линия складок). В области I имеется три действительных корня уравнения (3.2):  $\alpha = \alpha(\lambda, \epsilon)$   $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ , тогда как в области II – только один. На разграничительной линии (бифуркационного множества при принятии принципа максимального промедления) присутствуют кратные корни. Поверхность (3.2) в этих точках имеет касательную плоскость перпендикулярную плоскости  $\lambda, \epsilon$ . Особенность отображения проектирования понимается в том смысле, что окрестность выбранной точки в касательной плоскости (двумерная область) отображается в линию (одномерную область). Особенность, возникающую на линии (3.5) при  $\epsilon > 0$  называют складкой. Особенность отображения в окрестности точки  $\lambda = 1, \epsilon = 0$  более сложная. Ее называют сборкой Уитни. В этой точке сливаются три положения равновесия. На графике рис. 10,а окрестность этой точки плохо представлена из-за слишком крупных масштабов переменных по осям  $\lambda$  и  $\epsilon$ . Поэтому на рис. 10,б дополнительно приведена часть того же графика в окрестности точки  $\lambda = 1, \epsilon = 0$ . В этой окрестности точки функцию (3.5) можно представить локальной формулой

$$8(\lambda - 1)^3 = 27\epsilon^2 \tag{3.6}$$

с точностью до масштабов переменных и выбора начала отсчета их совпадающей с обычно приводимой в литературе по теории катастроф зависимостью для бифуркаци-

онного множества катастрофы сборки в плоскости управляющих параметров. Характерное острое полукубической параболы (3.6) для функции (3.5) можно наблюдать на рис. 10,b, где выбран более мелкий масштаб чем на рис. 10,a. Причина “невъязительности” кривой рис. 10,a заключается в том, что эта кривая имеет точку перегиба при достаточно малом значении параметра  $\epsilon_* = 6^{-3/2} = 0.068$ , которую можно найти приравняв вторую производную функции (3.5) нулю. На рис. 10,a штриховыми линиями выделены координаты этой точки. Видим, что значение функции тоже достаточно мало  $\lambda(\epsilon_*) = (1.2)^{3/2} = 1.315$ . При этом наклон касательной в этой точке достаточно велик  $\lambda'(\epsilon_*) = (1.2)^3(5)^{1/2} = 3.864$ .

Стрелка на рис. 10,a, идущая из области I в область II соответствует пути, содержащему скачок угла  $\alpha$  при катастрофе. Она, в точке пересечения с линией (3.5), определяет отрезок типа BC на рис. 8, который на рис. 10,a представлен одной точкой, поскольку этот отрезок перпендикулярен плоскости  $\lambda, \epsilon$ .

Если пройти по стрелке на рис. 10,a в обратном направлении, то скачок  $\alpha$  наблюдаться не будет (при тех же  $\lambda$  и  $\epsilon$  получим другое значение  $\alpha$ ). При ограничении условиями  $\lambda \geq 0, \epsilon \geq 0$ , из области II ни по какому пути нельзя вернуться к старому значению  $\alpha$  (ср. обсуждение рис. 8). Это означает, что переход от картинке рис. 5,a к картинке рис. 5,b при плавном изменении параметра  $\lambda$  невозможен.

Рис. 8 и рис. 9 изображают сечение поверхности, заданной соотношением (3.2) плоскостями  $\epsilon = \text{const}$  (фиксированном значении одного из параметров) спроектированной на плоскость  $\alpha, \lambda$ . На рис. 11 показаны некоторые кривые, когда зафиксирован другой управляющий параметр —  $\lambda$ . Для кривой 2 на этом рисунке выделены координаты точек, определяющих скачок  $\Delta\alpha$ , который описывается той же формулой (3.4).

**Заключение.** Рассмотренное устройство (рис. 5) можно использовать для иллюстрации скачкообразного поведения системы в свете теории катастроф. По-видимому, экспериментально его проще реализовать и регулировать управляющие параметры (по крайней мере  $\lambda$ ), чем традиционные. Например, параболическая качалка, когда для демонстрации скачка катастрофы следует обеспечить ее контакт с плоскостью без проскальзывания и уметь плавно регулировать положение центра тяжести качалки.

Точно такое же математическое описание, как и в системе, показанной на рис. 5 будет и при вращении сдвинутого обруча радиуса  $l$  по которому может перемещаться грузик (в виде бусинки, см. рис. 12). При отсутствии смещения ( $b = 0$ ) получим модель рис. 1. Взяв вместо окружности другие линии можно получить ряд познавательных примеров в духе теории катастроф. Например, вместо кругового обруча (рис. 12) можно взять эллиптический. При условии, что оси симметрии эллипса будут параллельны осям  $z$  и  $r$  (см. рис. 1) соответственно, можно описание данной системы свести к модели рис. 5.

Отметим, что в известном смысле аналогичное математическое описание имеет модель консольного шарнира с круговой пружиной, проанализированную в работе [10 стр. 54]. Однако там упругая энергия пружины пропорциональна квадрату координаты (а не синуса угловой координаты как у нас), что позволяет аналитически проводить только локальный анализ, выполняя разложения тригонометрических функций в ряды Тейлора. Иначе приходится иметь дело с трансцендентными уравнениями, а не алгебраическими как у нас.

При запуске вращающегося маятника в положение рис. 5,b могут возникнуть технические трудности. Можно предложить, например, такой способ. На штанге  $b$  имеется крючок, на который одета металлическая пластинка с небольшой прорезью ( $h$  рис. 5,b). При отсутствии зацепления с крючком пластинка (при определенном ее начальном положении, учитывающем воздействие на нее центробежной силы и силы тяжести) стремится упасть на стержень  $l$  на котором в нужном месте целесообразно расположить небольшой магнит. При пренебрежимой массе пластинки по сравнению

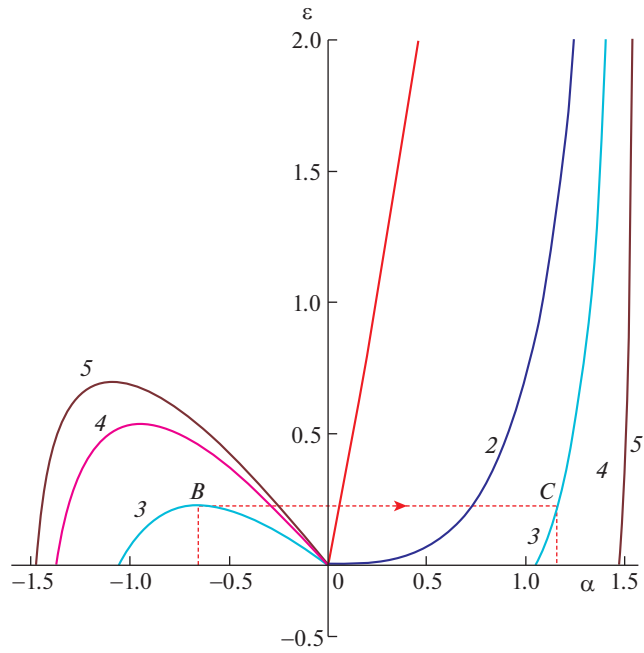


Рис. 11. Линии равновесия системы при:  $1 - \lambda = 0.2$ ;  $2 - \lambda = 1$ ;  $3 - \lambda = 2$ ;  $4 - \lambda = 5$ ;  $5 - \lambda = 10$ .

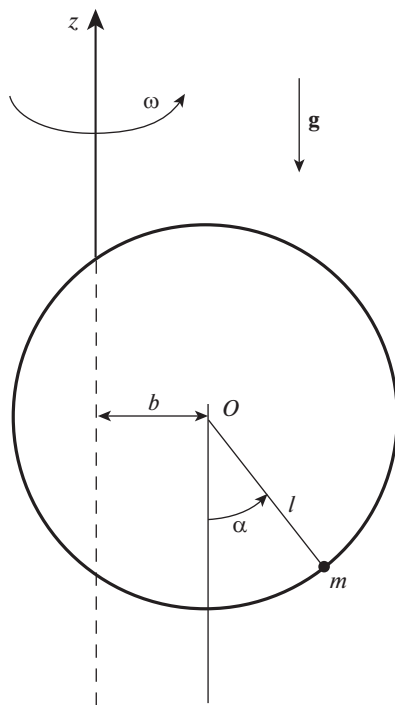


Рис. 12. Вращающийся смещенный обруч.

с массой груза  $m$ , она практически не влияет на динамику системы. После запуска маятника пластинка не дает сместиться стержню против часовой стрелки. При достижении определенного числа оборотов (значения параметра  $\lambda$ ) стержень отклонится влево (рис. 5,b), пластинка освободится и “прилипнет” к стержню. Теперь система готова для наблюдения скачка угловой координаты стержня. При желании можно обеспечить и регулирование параметра  $\varepsilon$ , в том числе и реализовать во время движения вариант с  $\varepsilon < 0$ . В таком случае получим “полноценную” катастрофу сборки, когда можно обойти снизу острие рис. 10,b) в области управляющих параметров.

Запустить установку для демонстрации катастрофы можно по-другому. Поместим горизонтальную гладкую площадку, например в форме круга необходимого диаметра, перпендикулярно оси вращения. На нее поместим грузик как показано на рис. 5,b. Далее, включив двигатель установки и постепенно увеличивая число оборотов двигателя, добьемся отрыва грузика от площадки. Теперь площадку можно удалить. Уменьшая число оборотов двигателя, в соответствующий момент будем наблюдать переход системы в состояние, показанное на рис. 5,a. Достаточное трение в шарнире позволит стабилизировать систему в положении, представленном на рис. 5,a. Не сложно перед запуском системы устанавливать различные длины штанги  $b$ . В принципе, можно предложить и устройство, регулирующее величину  $b$  в процессе вращения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. Изд. 3-е, доп. М.: Наука, 1990. 128 с.
2. Алексеев Ю.К., Сухоруков А.П. Введение в теорию катастроф: учебное пособие. Изд. 2-е, доп. М.: Книжный дом “Либроком”, 2009. 184 с.
3. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
4. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд. 5-е. М.: Книжный дом “Либроком”, 2007. 312 с.
5. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. М.: Наука, 1974. 416 с.
6. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 472 с.
8. Арнольд В.И. Вещественная алгебраическая геометрия. М.: МЦНМО, 2009. 88 с.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 9-е изд. М.: Наука, 1968. 431 с.
10. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.