ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 6, с. 125–135

УДК 539.3

ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2023 г. В. В. Васильев[a,*], Л. В. Федоров[b]

[a] Центральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, 141371 Россия
[b] НПО Машиностроение, Реутов 143966 Россия
*e-mail: vvvas@dol.ru

Поступила в редакцию 09.06.2023 г.
После доработки 12.06.2023 г.
Принята к публикации 13.06.2023 г.

Статья посвящена обсуждению принципиальных проблем, возникающих в релятивистской механике (общей теории относительности) применительно к определению напряжений, порождаемых гравитацией в деформируемом твердом теле. Рассматриваются три такие проблемы. Первая связана с неполнотой системы уравнений Эйнштейна, которая включает шесть взаимно независимых уравнений при десяти неизвестных коэффициентах метрического тензора. Вторая возникает при определении напряжений в твердом теле, порождаемых гравитацией – для статической задачи три уравнения закона сохранения теории (уравнения равновесия) включают шесть неизвестных напряжений, что в отличие от теории Ньютона не позволяет определить гравитационные напряжения. Третья проблема связана с приведением линеаризованных уравнений Эйнштейна к уравнениям гравитационной теории Ньютона. Такое приведение оказывается возможным только для пустого пространства и несправедливо для твердого тела. Отмеченные противоречия удается устранить, ограничивая область применения теории специальным пространством, которое является евклидовым в отношении пространственных координат и римановым только в отношении времени. Обсуждение иллюстрируется сферически симметричной задачей, которая сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: релятивистская механика, теория упругости, сферически симметричная задача

DOI: 10.31857/S0572329923700083, **EDN:** BRJMFL

1. Введение. В классической механике твердого тела в рамках гравитационной теории Ньютона процессы описываются с помощью симметричного тензора второго ранга, который называется в теории относительности тензором энергии-импульса и имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} - \rho v^{\alpha} v^{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad T^{\alpha 4} = \rho c v^{\alpha}, \quad T^{44} = \rho c^2 \tag{1.1}$$

Здесь $\sigma^{\alpha\beta}$ – тензор напряжений, v^{α} – скорость, ρ – плотность и c – скорость света. Гравитация учитывается компонентой T^{44} тензора. То обстоятельство, что входящая в нее плотность такая же, что и в кинематических составляющих компонентов $T^{\alpha\beta}$, определяется гипотезой об эквивалентности инертной и гравитационной масс, подтвержденной экспериментально. Структура тензора (1.1) следует из уравнений динамики и гравитационной теории Ньютона. Эти уравнения, записанные в эйлеровых координатах, включают три уравнения движения и уравнение неразрывности. Тождественными преобразованиями эти уравнения можно привести к одинаковой форме, выражающейся через компоненты тензора (1.1) [1]. Вводя четырехмерное пространство-время с метрической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta - g_{44}c^2dt^2 \tag{1.2}$$

эти уравнения можно привести к одному уравнению для тензора энергии-импульса, то есть

$$DivT^{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{1.3}$$

То обстоятельство, что гравитация имеет геометрическую интерпретацию, также следует из теории Ньютона. Сравнивая траекторию движения частицы в гравитационном поле Ньютона с уравнением геодезической линии в пространстве с метрической формой (1.2), можно установить, что гравитационный потенциал Ньютона выражается через метрический коэффициент g_{44} в форме (1.2).

Уравнения релятивистской механики, представляющие собой феноменологическую теорию основанную на классической модели среды как однородного изотропного континуума, не обладающего микроструктурой, постулируют пропорциональность между тензором T^{ij} и тензором Эйнштейна

$$E^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R \tag{1.4}$$

так, что

$$\chi T^{ij} = E^{ij} \tag{1.5}$$

В равенстве (1.4) R^{ij} компоненты тензора кривизны Риччи, зависящие от метрического тензора, и $R = g_{ij}R^{ij}$. В символической форме равенства (1.4) и (1.5) могут быть представлены как 10 нелинейных уравнений второго порядка относительно 10 компонент метрического тензора, то есть

$$L^{ij}(g) = \chi T^{ij} \tag{1.6}$$

где компоненты тензора T^{ij} удовлетворяют четырем уравнениям (1.3). Коэффициент пропорциональности

$$\chi = 8\pi G/c^4 \tag{1.7}$$

определяется из условия вырождения рассматриваемой теории в теорию Ньютона при малых уровнях гравитации и выражается через классическую гравитационную постоянную G. Уравнения (1.6) описывают гравитацию в сплошной среде – вакууме, газе, жидкости и твердом теле. Традиционно отмечается, что сложная структура уравнений (1.6) не позволяет получить решение. Однако проблема не только в этом. Как показано далее, существуют причины принципиального характера, затрудняющие решение.

2. Проблема определения метрического тензора. Эта проблема связана с тем что система уравнений (1.6), определяющая метрический тензор, является неполной [2–5]. Действительно, формально для 10 компонентов метрического тензора имеется 10 уравнений. Однако из уравнений (1.3) и (1.5) следует, что тензор Эйнштейна имеет специальную структуру – он тождественно удовлетворяет четырем уравнениям

$$\mathrm{Div}E^{ij} = 0 \tag{2.1}$$

В связи с этим из десяти уравнений (1.6) только шесть уравнений являются взаимно независимыми и система является неполной. Традиционно считается, что независимые переменные в этих уравнениях могут быть подвергнуты некоторому координатному преобразованию и в результате получены четыре координатных условия, обеспечивающие полноту системы. Однако общая форма таких условий неизвестна. Альтернативно, в качестве дополнительных уравнений предложено использовать условия гармоничности, имеющие вид [3, 6]

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Здесь $|g|$ – определитель метрического тензора. Несмотря на наличие доказательства существования решения уравнений (1.6) и (2.2) в вакууме [7] и полученного решения сферически симметричной задачи [6], условие (2.2) не получило широкого признания.

Ситуацию позволяет немного прояснить обращение к линейной теории упругости. Для задач статики $T_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ и уравнения (1.3) совпадают с уравнениями равновесия, которые в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1,2,3) \tag{2.3}$$

Символы $(\cdots)_{,j}$ и (1, 2, 3) обозначают дифференцирование по x_j и круговую перестановку индексов. Максвелл в 1870 году и Морера в 1892 году предложили следующее преобразование для напряжений:

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = \varphi_{22,33} + \varphi_{33,22} - 2\varphi_{23,23}, \quad \sigma_{12} = -\varphi_{33,12} - \varphi_{12,33} + \varphi_{13,23} + \varphi_{23,13}, \\
\sigma_{13} = -\varphi_{23,13} + \varphi_{12,23} - \varphi_{13,22} + \varphi_{23,12}, \quad \sigma_{22} = \varphi_{11,33} + \varphi_{33,11} - 2\varphi_{13,13} \\
\sigma_{23} = -\varphi_{11,23} + \varphi_{12,13} + \varphi_{13,12} - \varphi_{23,11}, \quad \sigma_{33} = \varphi_{11,22} + \varphi_{22,11} - 2\varphi_{12,12}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

в которых φ_{ij} является тензором функций напряжений. Подстановка напряжений (2.4) в уравнения равновесия (2.3) позволяет тождественно удовлетворить эти уравнения. Аналогичная ситуация имеет место для уравнений релятивистской механики – подстановка тензора (1.4) в уравнения (2.1) позволяет тождественно удовлетворить эти уравнения. Продолжая эту аналогию, запишем линеаризованную форму уравнений, следующую из уравнений (1.4) и (1.5). Предположим, что компоненты метрического тензора имеют следующий вид:

$$g_{ij} = 1 + f_{ij}, \quad g_{i4} = 0 \quad (i,j = 1,2,3), \quad g_{44} = -(1 + f_{44}) \tag{2.5}$$

где амплитудные значения функций f много меньше единицы. Осуществляя линеаризацию равенств (1.4) и учитывая уравнения (1.5), получим

$$\chi\sigma_{11} = \frac{1}{2}\left(-f_{22,33} - f_{33,22} + 2f_{23,23} - f_{44,22} - f_{44,33}\right) \tag{2.6}$$

$$\chi\sigma_{12} = \frac{1}{2}\left(f_{33,12} + f_{12,33} - f_{13,23} - f_{23,13} + f_{44,12}\right) \tag{2.7}$$

$$\chi\sigma_{13} = \frac{1}{2}\left(f_{22,13} - f_{12,23} + f_{13,22} - f_{23,12} + f_{44,13}\right) \tag{2.8}$$

$$\chi\sigma_{22} = \frac{1}{2}\left(-f_{11,33} - f_{33,11} + 2f_{13,13} - f_{44,11} - f_{44,33}\right) \tag{2.9}$$

$$\chi\sigma_{23} = \frac{1}{2}\left(f_{11,23} - f_{12,13} - f_{13,12} + f_{23,11} + f_{44,23}\right) \tag{2.10}$$

$$\chi\sigma_{33} = \frac{1}{2}\left(-f_{11,22} - f_{22,11} + 2f_{12,12} - f_{44,11} - f_{44,22}\right) \tag{2.11}$$

$$\chi\mu c^2 = -\frac{1}{2}\big(f_{11,33} + f_{11,22} + f_{22,11} + f_{22,33} + f_{33,11} + f_{33,22} - \\ - 2f_{12,12} - 2f_{13,13} - 2f_{23,23}\big) \tag{2.12}$$

Уравнения (2.6)–(2.11) совпадают с уравнениями (2.4) если принять $\chi = 1$, $f_{44} = 0$ и $f_{ij} = -2\varphi_{ij}$. Таким образом, линеаризованные уравнения Эйнштейна по существу совпадают с уравнениями Максвелла–Мореры теории упругости. В теории упругости известно, что уравнения (2.4) разрешимы только если напряжения удовлетворяют уравнениям совместности деформаций, сформулированных в напряжениях. Как известно [8], уравнения совместности деформаций имеют простую геометрическую интерпретацию, согласно которому деформируемое пространство является евклидовым и его тензор кривизны равен нулю. Такие уравнения не могут существовать в релятивистской механике. Однако отмеченная аналогия с уравнениями теории упругости позволяет предположить, что гравитация порождает не общее, а некоторое специальное риманово пространство и уравнения Эйнштейна должны быть дополнены не формальными математическими координатными условиями, а физическими условиями, специализирующими риманово пространство в релятивистской механике. Такие условия предложены ниже в разделе 6.

3. Проблема определения гравитационных напряжений. Для деформируемого твердого тела уравнения поля (1.6) содержат в правых частях компоненты тензора энергии-импульса T^{ij}, которые включают согласно равенствам (1.1) неизвестные напряжения. Отсюда, в частности, следует, что искривленное пространство порождается не только гравитацией, но и напряженным состоянием тела. Для задачи статики напряжения связаны тремя уравнениями (1.3), которые являются, по существу, уравнениями равновесия. Однако эти три уравнения включают шесть напряжений и система является неполной. В теории упругости напряжения определяются из системы уравнений, включающей уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций. Однако, как отмечено выше, в релятивистской механике уравнения, аналогичные уравнениям совместности деформаций теории упругости не могут существовать и напряжения определить в общем случае невозможно. Создается парадоксальная ситуация – гравитационная теория Ньютона позволяет определить гравитационные напряжения, а более общая теория – релятивистская механика не позволяет этого сделать. Традиционно в общей теории относительности рассматриваются только идеальные жидкости и газы, для которых тензор напряжений имеет только одну компоненту – давление, то есть $\sigma_{ii} = -p$, $\sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Однако равновесное состояния при этом возможно только если тело имеет сферическую форму. В терминах теории упругости напряженное состояние такого тела является статически определимым и для определения давления не требуется привлечения уравнений совместности деформаций. Определение гравитационных напряжений в твердом теле обсуждается далее в разделе 6.

4. Проблема приведения релятивистской механики к гравитационной теории Ньютона. Как уже отмечалось, коэффициент χ в уравнении (1.5) определяется в результате приведения линеаризованных уравнений релятивистской механики к уравнению гравитационной теории Ньютона. Линеаризованные уравнения поля (2.6)–(2.12) необходимо дополнить уравнениями (1.3), которые имеют вид

$$\sigma_{ij,j} - \frac{\mu c^2}{2} f_{44,j} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{4.1}$$

и обобщают уравнения равновесия (2.3), учитывая гравитационное поле. Преобразуем уравнения (2.6)–(2.12). Выразим производные $f_{23,23}$, $f_{13,13}$, $f_{12,12}$ из уравнений (2.6), (2.9) и (2.11) и подставим их в уравнение (2.12). В результате получим

$$\Delta f_{44} = \chi(\mu c^2 - \sigma)$$

Здесь $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ – инвариант тензора напряжений. Пренебрегая σ по сравнению с μc^2, имеем

$$\Delta f_{44} = \chi \mu c^2 \tag{4.2}$$

В теории Ньютона гравитационный потенциал ψ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \psi = 4\pi G \mu \tag{4.3}$$

Сравнивая уравнения (4.2) и (4.3), можно заключить, что $f_{44} = 2\psi/c^2$ и получить выражение $\chi = 8\pi G/c^4$, совпадающее с формулой (1.7).

Однако более детальный анализ показывает, что приведенный выше вывод выражения для χ некорректен для твердого тела. Дело в том, что уравнения (2.6)–(2.11) в общем случае несовместны. Дифференцируя и складывая эти уравнения, можно установить, что система является совместной если левые части уравнений удовлетворяют следующим условиям:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1, 2, 3) \tag{4.4}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями равновесия (4.1) если $f_{44} = 0$, то есть при отсутствии гравитации. Таким образом, линеаризованные уравнения релятивистской механики не описывают гравитацию. Равенство (1.4) для χ можно получить если рассмотреть эти уравнения во втором приближении [9].

В следующем разделе обсуждаемые проблемы иллюстрируются на примере сферически симметричной задачи, которая допускает аналитическое решение.

5. Сферически симметричная статическая задача. Метрическая форма (1.2) в сферических координатах r, θ, φ имеет вид

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}d\Omega^2 - g_{44}c^2dt^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{5.1}$$

Входящие сюда метрические коэффициенты зависят только от радиальной координаты. Как уже отмечалось в разделе 1, теория гравитации Ньютона может быть сформулирована в терминах релятивистской механики и соответствует следующим метрическим коэффициентам в форме (5.1) [2]:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{44} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{5.2}$$

определяющим гравитационное поле в вакууме, создаваемое шаром с радиусом R. В равенствах (5.2)

$$r_g = \frac{2mG}{c^2} \tag{5.3}$$

– так называемый гравитационный радиус, выражающийся через массу однородного шара с плотностью ρ

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{5.4}$$

Выражения (1.4) для тензора Эйнштейна имеют вид

$$E_1^1 = \frac{1}{g_{22}} - \frac{1}{g_{11}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{g_{22}'}{g_{22}}\right)^2 + \frac{g_{22}'g_{44}'}{2g_{22}g_{44}}\right] \tag{5.5}$$

$$E_2^2 = -\frac{1}{2g_{11}}\left[\frac{g''_{44}}{g_{44}} - \frac{1}{2}\left(\frac{g'_{44}}{g_{44}}\right)^2 + \frac{g''_{22}}{g_{22}} - \frac{1}{2}\left(\frac{g'_{22}}{g_{22}}\right)^2 + \frac{g'_{22}}{2g_{22}}\left(\frac{g'_{44}}{g_{44}} - \frac{g'_{11}}{g_{11}}\right) - \frac{g'_{11}g'_{44}}{2g_{11}g_{44}}\right] \tag{5.6}$$

$$E_4^4 = \frac{1}{g_{22}} - \frac{1}{g_{11}}\left[\frac{g''_{22}}{g_{22}} - \frac{1}{4}\left(\frac{g'_{22}}{g_{22}}\right)^2 - \frac{g'_{11}g'_{22}}{2g_{11}g_{22}}\right] \tag{5.7}$$

где $(\cdots)' = d(\cdots)/dr$. Здесь используются смешанные компоненты тензора E_i^j, которые совпадают в сферических координатах с физическими компонентами. В результате из равенств (1.1) и (1.5) следует

$$E_1^1 = \chi T_1^1 = \chi\sigma_r, \quad E_2^2 = \chi T_2^2 = \chi\sigma_\theta, \quad E_4^4 = \chi T_4^4 = \chi\rho c^2 \tag{5.8}$$

где σ_r и σ_θ – радиальные и кольцевые напряжения. Имеется одно уравнение (1.3), принимающее вид

$$(\sigma_r)' + \frac{g'_{22}}{g_{22}}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{g'_{44}}{2g_{44}}(\sigma_r - \rho c^2) = 0 \tag{5.9}$$

Рассмотрим пустое пространство, окружающее шар ($r \ge R$). В этом случае $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ и $\mu = 0$, то есть $E_i^j = 0$, уравнения (5.5)–(5.7) являются однородными и допускают общее решение. Из уравнения (5.7) можно выразить g_{11} через g_{22}, подставить полученный результат в уравнение (5.5) и найти g_{44}. Решение должно удовлетворять асимптотическому условию – при $r \to \infty$ оно должно сводиться к равенствам (5.2), соответствующим теории Ньютона. Окончательно имеем [10]

$$g_{11}^e = \frac{(g'_{22})^2}{4(g_{22} - r_g\sqrt{g_{22}})}, \quad g_{44}^e = 1 - \frac{r_g}{\sqrt{g_{22}}} \tag{5.10}$$

Индекс "e" соответствует внешнему пространству шара. Естественно теперь попытаться подставить соотношения (5.10) в уравнение (5.6) и определить g_{22}. Однако в результате такой подстановки уравнение (5.6) удовлетворяется тождественно. Таким образом, равенства (5.10) являются решением уравнений (5.5)–(5.7) при любой функции $g_{22}(r)$. Этот результат иллюстрирует неполноту системы уравнений Эйнштейна относительно компонентов метрического тензора, которая рассматривается в разделе 2.

Как уже отмечалось, традиционно предлагается дополнить уравнения (5.5)–(5.7) некоторым координатным условием. Наиболее распространенным является условие К. Шварцшильда, согласно которому принимается $g_{22} = r^2$. Заметим, что это современная интерпретация – изначально К. Шварцшильд использовал другое условие [11], которое сводится к записанному выше. Традиционно [5, 12, 13] обсуждаемое условие обосновывается следующим образом. Примем, что $g_{22} = f^2(r)$ и введем новую радиальную координату $r' = f(r)$. Опуская для сокращения записи штрих, получим $g_{22} = r^2$. Такое преобразование справедливо только для бесконечного сферического пространства, для которого $0 \le (r, r') < \infty$ и различие между r и r' не является существенным. Если в пространстве находится шар с радиусом $r = R$, то определить соответствующее значение r' невозможно и преобразование координаты теряет смысл.

Принимая $g_{22} = r^2$ в равенствах (5.10), получим решение Шварцшильда [11]

$$g_{11} = \frac{1}{1 - r_g/r}, \quad g_{44} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{5.11}$$

Это решение является сингулярным при $r = r_g$ и $r = 0$ и определяет объект, называемый черной дырой. Традиционная трактовка решения заключается в следующем. Предположим, что решение (5.11) справедливо для всего пространства, то есть при $0 \le r < \infty$. Тогда при $r = 0$ имеет место сингулярность, окруженная сферой с радиусом r_g, при котором тоже имеется сингулярность и который называется радиусом горизонта событий. Такое название объясняется тем, что при $r < r_g$ метрические коэффициенты изменяют знак. Поскольку они не могут быть отрицательными, изменяются знаки в метрической форме (5.1) – при первом члене появляется знак минус, а при последнем – плюс. В результате радиальная координата оказывается подобна временной, а так как время необратимо, то все объекты, оказавшиеся за горизонтом событий необратимо движутся к центру и информация от них не распространяется наружу. Свет не может выйти из под горизонта событий и черная дыра является невидимой. Из этого, в частности, следует, что черная дыра не может быть идентифицирована экспериментально. Для этого надо проникнуть за горизонт событий и передать информацию о внутреннем пространстве, что в принципе невозможно.

Рассмотрим внутреннюю область шара ($0 \le r \le R$). При координатном условии Шварцшильда $g_{22} = r^2$ уравнение (5.7) с учетом равенств (5.8) принимает вид

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{g_{11}}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{g'_{11}}{r g_{11}}\right) = \chi\rho c^2 \tag{5.12}$$

и в случае постоянной плотности имеет следующее общее решение [10]:

$$g_{11}^{i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\chi\rho c^2 r^2 - \frac{C}{r}} \tag{5.13}$$

Индекс “i” соответствует внутренней области. Постоянная интегрирования $C = 0$ так как в противном случае метрический коэффициент в центре шара оказывается сингулярным для шара любого размера. На поверхности шара $r = R$ полученное решение должно совпадать с решением (5.11), то есть должно выполняться граничное условие

$$g_{11}^{i}(R) = g_{11}^{e}(R) \tag{5.14}$$

Учитывая равенства (1.4) и (5.3) для χ и r_g, в результате получим равенство (5.4) для массы шара. Однако это равенство соответствует евклидову пространству внутри шара, а оно должно быть римановым, в котором масса определяется равенством

$$m_i = 4\pi\rho \int_0^R \sqrt{g_{11}^{i}}\, r^2 dr$$

Подставляя сюда выражение (5.13) (при $C = 0$), получим

$$m_i = \frac{2\pi}{r_g}\rho R^4 \left(\sqrt{\frac{R}{r_g}}\arcsin\sqrt{\frac{r_g}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}}\right) \approx \frac{4}{3}\pi\rho R^3\left(1 + \frac{3r_g}{R} + \cdots\right) \tag{5.15}$$

Это выражение совпадает с равенством (5.4) при $r_g = 0$, то есть при отсутствии гравитации. Поскольку масса шара в релятивистской механике определяется соотношением (5.13), граничное условие (5.14) в решении Шварцшильда не выполняется. Причина связана с тем, что при координатном условии $g_{22} = r^2$ уравнение (5.7), имеющее второй порядок, вырождается в уравнение (5.12), имеющее первый порядок. В результате, решение (5.13) не содержит еще одной постоянной интегрирования необходимой для удовлетворения граничного условия на поверхности шара.

Как отмечено в разделе 3, определить гравитационные напряжения в шаре невозможно, так как напряжения σ_r и σ_θ связаны лишь одним уравнением (5.9).

Решение Шварцшильда не является единственным. Для внешнего поля получено решение, основанное на условии гармоничности (2.2) [6]. Имеются и другие решения этой задачи [10, 14, 15], не обладающие сингулярностью.

Рассмотрим на примере сферически симметричной задачи проблему приведения релятивистской теории к теории Ньютона, обсуждавшуюся в разделе 4. Соотношения аналогичные равенствам (2.5) для этой задачи имеют вид

$$g_{11} = 1 + f_1, \quad g_{22} = r^2(1 + f_2), \quad g_{44} = 1 + f_4$$

а уравнения Эйнштейна аналогичные уравнениям (2.6)–(2.12) принимают следующую форму:

$$\chi\sigma_r = \frac{1}{r^2}(f - rf_4'), \quad \chi\sigma_\theta = \frac{1}{2r}(f - rf_4')', \quad \chi\mu c^2 = \frac{1}{r^2}(rf)' \tag{5.16}$$

где $f = f_1 - (rf_2)'$.

Рассмотрим наружное пространство ($R \le r < \infty$), для которого $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ и $\rho = 0$. Уравнения (5.16) являются в этом случае однородными, то есть

$$f - rf_4' = 0, \quad (f - rf_4')' = 0, \quad (rf)' = 0 \tag{5.17}$$

Отсюда следует, что второе уравнение является следствием первого, что еще раз иллюстрирует неполноту системы уравнений поля для метрического тензора – имеется два независимых уравнения для трех функций $f_1(r)$, $f_2(r)$ и $f_4(r)$. Выразим функцию f из первого уравнения системы (5.17), а ее производную f' из второго уравнения и подставим результате в третье уравнение. Полученное уравнение

$$\Delta f_4 = 0$$

совпадает с уравнением, соответствующим теории Ньютона если считать, что функция f_4 является гравитационным потенциалом. Таким образом, для вакуума линеаризованные уравнения релятивистской механики приводятся к уравнению, следующему из теории Ньютона.

Рассмотрим внутреннее пространство ($0 \le r \le R$). Как следует из уравнений (5.16), правые части первых двух уравнений выражаются через одну и ту же функцию $F = f - rf_4'$. Исключая эту функцию, придем к условию совместности первых двух уравнений системы (5.16), которое имеет вид

$$\sigma_r' + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \tag{5.18}$$

Это уравнение равновесия в сферических координатах при отсутствии объемных сил. Линеаризация соответствующего уравнения релятивистской механики (5.9) дает

$$\sigma_r' + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{\mu c^2}{2}f_4' = 0 \tag{5.19}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5.18) при $f_4 = 0$, то есть при отсутствии гравитации. Причина полученного результата заключается в следующем. Последний член в уравнении (5.19) не следует из линеаризованных уравнений так как он имеет второй порядок малости. Таким образом, ленеаризованные уравнения релятивистской механики не описывают гравитацию. Это оказывается возможным только для второго приближения [9].

6. Специальная форма риманова пространства релятивистской механики. Отмеченные выше проблемы релятивистской механики можно устранить если ввести специальное риманово пространство, которое появляется в результате следующих рассуждений. Как следует из равенств (1.1) для тензора энергии-импульса и уравнений (1.6) искривление пространства вызывается не только гравитацией, но и напряженным состоянием среды. Отсюда следует, что внутреннее пространство любого нагруженного тела является римановым. Однако трехмерное риманово пространство помещается в евклидово пространство шести измерений [12] и не может существовать в трехмерном евклидовом пространстве. Таким образом, представляется естественным предположить, что пространство, порождаемое гравитацией и напряженным состоянием тела, является евклидовым в отношении пространственных координат и римановым только в отношении времени. Для сферически симметричной задачи метрическая форма (1.2) имеет в этом случае вид [16]

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + 2g_{14}cdrdt - g_{44}c^2dt^2 \tag{6.1}$$

Тензор Эйнштейна (1.4) записывается следующим образом:

$$E_1^1 = -\frac{1}{r^2 g}(rg'_{44} - g_{14}^2) \tag{6.2}$$

$$\begin{gathered} E_2^2 = \frac{1}{4rg^2}[4g_{14}g_{44}g'_{14} - 4g_{14}^2 g'_{44} - 2g_{44}g'_{44} - 2rg_{44}g''_{44} + \\ + r(g'_{44})^2 - 2rg_{14}^2 g''_{44} + 2rg_{14}g'_{14}g'_{44}] \end{gathered} \tag{6.3}$$

$$E_4^4 = \frac{g_{14}}{r^2 g^2}(gg_{14} + 2rg_{44}g'_{14} - rg_{14}g'_{44}) \tag{6.4}$$

$$E_1^4 = -\frac{g_{14}g'}{rg^2}, \quad E_4^1 = 0, \quad g = g_{44} + g_{14}^2 \tag{6.5}$$

Для метрической формы (6.1) имеется два уравнения закона сохранения (1.3), то есть

$$(T_1^1)' + \frac{2}{r}(T_1^1 - T_2^2) + \frac{g'_{44}}{2g}T_1^4 = 0, \quad g_{14}(T_1^1 - T_4^4) - g_{44}T_1^4 = 0 \tag{6.6}$$

Как уже отмечалось, тензор E_i^j тождественно удовлетворяет двум уравнениям (6.6) и только два из четырех уравнений (6.2)–(6.5) являются взаимно независимыми. Соответственно имеется два неизвестных метрических коэффициента g_{14} и g_{44}. Система уравнений Эйнштейна является полной и привлечения дополнительных условий не требуется.

Для пустого пространства, окружающего шар радиуса R, уравнения (6.2)–(6.5) являются однородными. Из уравнений для E_1^1 и E_1^4 с учетом решения (5.2) для теории Ньютона получим [16]

$$g_{14} = \sqrt{\frac{r_g}{r}}, \quad g_{44} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{6.7}$$

Подставляя это решение в уравнения (6.3) и (6.4) можно убедиться в том, что они удовлетворяются тождественно. Таким образом, равенства (6.7) являются решением уравнений (6.2)–(6.5) для вакуума. Координатная система, соответствующая метрическим коэффициентам (6.7), известна как система Гуллстанда–Пейнлеве. Она была получена в 20-х годах прошлого века в результате преобразования координат Шварцшильда. В настоящей работе соотношения (6.7) следуют из предлагаемой модели риманова пространства.

Рассмотрим внутреннее поле для упругого шара. Выразим T_1^4 из второго уравнения (6.6) и подставим результат в первое уравнение. Учитывая равенства (5.8), получим уравнение (5.9), являющееся уравнением равновесия при наличии гравитационного поля. Поскольку пространство является евклидовым в отношении пространственных координат, можно ввести радиальное перемещение $u_r(r)$ и соответствующие деформации

$$\varepsilon_r = u'_r, \quad \varepsilon_\theta = u_r/r$$

Отсюда следует уравнение совместности деформаций

$$(r\varepsilon_\theta)' = \varepsilon_r \tag{6.8}$$

Для упругого шара деформации выражаются через напряжения с помощью закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right]$$

где E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона. Подставляя деформации в уравнение (6.8), получим

$$(1-\nu)\sigma'_\theta - \nu\sigma'_r + \frac{1+\nu}{r}(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0$$

Добавляя это уравнение к уравнению равновесия (5.9), получим систему двух уравнений, из которых можно определить напряжения [17].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (гранта № 23-11-00275, выданного Институту прикладной механики РАН)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кильчевский Н.А.* Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: Наукова думка, 1972. 148 с.
2. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
3. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. В 3 т. М.: Мир, 1977.
5. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977. 431 с.
6. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007. 563 с.
7. *Choquet-Bruhat Y.* Theoreme d'existence pour certains systemes d'equations aux derivees partilles nonlinrares // Acta Math. 1952. V. 88. P. 141–225.
8. *Власов В.З.* Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах // Избр. Тр. Т. 1. М.: Изд.-во АН СССР, 1962. 558 с.
9. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* Linearized equations of general relativity and the problem of reduction to the Newton theory // J. Mod. Phys. 2020. V. 11. P. 221–236. https://doi.org/10.4236/jmp.2020.112014
10. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* Задача теории упругости для гравитирующего шара и некоторые геометрические эффекты // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 84–92.
11. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* To the Schwarzschild solution in general relativity // J. Mod. Phys. 2018. V. 9. № 14. P. 2482–2494. https://doi.org/10.4236/jmp.2018.914160
12. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
13. *Алексеев С.О., Памятных Е.А., Урсулов А.В., Третьякова Д.А., Латош Б.Н.* Общая теория относительности. М.: URSS, 2020. 400 с.

14. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* To the complete set of equations for a static problem of general relativity // J. Mod. Phys. 2019. V. 10. № 12. P. 1401–1415.
https://doi.org/10.4236/jmp.2019.1012093
15. *Vasiliev V.V.* Black holes or dark stars – what follows from the general relativity theory // J. Mod. Phys. 2017. V. 8. № 7. P. 1087–1100.
https://doi.org/10.4236/jmp.2017.87070
16. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* To the solution of a spherically symmetric problem of general relativity // J. Mod. Phys. 2023. V. 14. № 2. P. 147–159.
https://doi.org/10.4236/jmp.2023.142010
17. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* Spherically symmetric problem of general relativity for an elastic solid sphere // J. Mod. Phys. 2023. V. 14. № 6. P. 818–832.
https://doi.org/10.4236/jmp.2023.146047