

УДК 531.38

ДВА СПОСОБА УПРАВЛЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИМ РОБОТОМ МАЯТНИКОВОГО ТИПА НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

© 2024 г. Е. А. Микишанина^{а,*}

^аЧувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, Чебоксары, Россия

*e-mail: evaeva_84@mail.ru

Поступила в редакцию 17.05.2023 г.

После доработки 14.07.2023 г.

Принята к публикации 16.07.2023 г.

Рассматривается проблема управления сферическим роботом с маятниковым приводом, катающимся по платформе, которая способна двигаться поступательно в горизонтальной плоскости абсолютного пространства. На сферический робот наложены голономные и неголономные ограничения. Некоторая точечная цель движется на уровне геометрического центра сферического робота и не касается самой подвижной платформы. Программа движения, позволяющая сферическому роботу преследовать цель, задается посредством двух сервосвязей. Движение за целью робот может осуществлять из любого положения и с любыми начальными условиями. Предлагаются два способа управления данной системой в абсолютном пространстве: посредством управления вынужденным движением платформы (колебания маятника свободные) и посредством управления крутящим моментом маятника (платформа неподвижна или колеблется несогласованно со сферическим роботом). Построены уравнения движения системы. В случае свободных колебаний маятника система уравнений движения обладает первыми интегралами и при необходимости может быть редуцирована на фиксированный уровень этих интегралов. При движении сферического робота по прямой для редуцированной на уровень интегралов системы построены фазовые кривые, графики расстояния от геометрического центра сферического робота до цели, траектории движения выбранной точки платформы при управлении платформой, квадрат управляющего крутящего момента при управлении маятниковым приводом. При движении робота по криволинейной траектории интегрирование ведется в исходных переменных. Строятся графики квадратов угловой скорости маятника и самого сферического робота, а также траектории движения робота в абсолютном пространстве и на подвижной платформе. Численные эксперименты выполнялись в программном пакете Maple.

Ключевые слова: управление, неголономная система, сферический робот, маятниковый привод, подвижная платформа, сервосвязь, преследование

DOI: 10.31857/S1026351924010133, EDN: VZKAHW

1. Введение. Развитие робототехники стимулировало исследования в области динамики и управления неголономными системами. Простой и хорошо изученной неголономной моделью является шар Чаплыгина [1–5]. Немало исследований проведено в области управления шаром Чаплыгина с помощью роторов и гиростатов [6, 7]. Результаты этих и других исследований легли в основу управления сферическим роботом – удобной в использовании роботизированной системой [8–13]. Среди указанных исследований имеются работы не только по динамике робота-шара [8, 10], но и по использованию его как smart-системы [13].

Настоящее исследование посвящено управлению посредством сервосвязей сферическим роботом с маятниковым приводом. Укажем только некоторые работы, посвященные исследованию систем с сервосвязями [14–20]. Первое упоминание о системах с сервосвязями появляется в [18]. Среди современных работ наиболее фундаментальным исследованием по динамике систем с сервосвязями в классическом смысле Бегена, реализуемых посредством управляющих сил, можно считать исследование В.В. Козлова [20], а в [19] предлагается неклассический подход к пониманию сервосвязей, который, в конечном итоге, эквивалентен классическому в смысле Бегена.

Недостатком некоторых работ по исследованию динамики систем с сервосвязями является отсутствие механизмов реализации сервосвязей. В отличие от неголономных связей, которые возникают естественным путем, сервосвязи нельзя рассматривать обособленно от механизмов их реализации. Именно это и отличает сервосвязи от неголономных связей, и именно на этом акцентировал внимание в [21] П. Аппель, который попытался впервые систематизировать некоторые введенные в [18] понятия, касающиеся систем с сервосвязями.

Автором уже были рассмотрены математические модели сферического робота на неподвижной плоскости, управляемого сервосвязью Билимовича [22] и сервосвязью метода погони [12]. В последней работе сферический робот выходил на связь метода погони из состояния покоя.

В данной работе рассматривается система, состоящая из сферического робота с маятниковым приводом, который катится по подвижной горизонтальной платформе за подвижным объектом (целью). Программа движения задается с помощью сервосвязей модифицированного метода погони. Согласно классическому методу погони, скорость робота всегда должна быть направлена на преследуемую цель [15]. Здесь возникает проблема выхода на связь из любого положения и состояния. Поэтому в данной работе предлагается модифицированное условие погони, позволяющее выходить на сервосвязь с любыми начальными условиями. В работе рассматриваются два способа реализации сервосвязей: за счет соответствующего движения платформы при свободных колебаниях маятника и за счет управления крутящим моментом маятника, который генерирует маятниковый привод, при качении сферического робота по неподвижной или движущейся несогласованно с роботом платформе. Уравнения движения системы строятся на основе совместного решения общих уравнений движения с неопределенными множителями и производных по времени от уравнений кинематических связей и сервосвязей. Используется подход, предложенный в [8, 23]. При управлении платформой аналитически находятся траектории точек платформы. По результатам

численного интегрирования строятся графики искомых механических параметров, фазовые кривые и траектории движения робота. Рассматривается движение сферического робота из состояния покоя, а также движение сферического робота, который в начальный момент времени уже движется в некотором направлении, и должен выйти на заданную программу движения.

2. Математическая модель сферического робота маятникового типа на подвижной платформе. Сферический робот, состоящий из сферической оболочки с маятниковым приводом, катится без проскальзывания по подвижной платформе Π (рис. 1), которая в свою очередь может поступательно скользить в горизонтальной плоскости абсолютного пространства. Маятниковый привод представляет собой комбинацию закрепленных в геометрическом центре сферической оболочки осесимметричного маятника по типу волчка Лагранжа и устройства, которое может вынужденно приводить маятник в движение, создавая управляющий крутящий момент.

Введем неподвижную систему координат $OXYZ$ с осью OZ , перпендикулярной плоскости качения робота, и ортом оси $\gamma = (0, 0, 1)^T$.

Обозначим геометрический центр шара C , а центр масс маятника C_i . Введем следующие обозначения в неподвижной системе координат:

- R – радиус сферической оболочки;
- R_i – расстояние от центра C сферической оболочки до центра масс C_i маятника;
- m – масса сферической оболочки;
- m_i – масса маятника;
- $\mathbf{I} = I\mathbf{E}$ – центральный тензор инерции сферической оболочки;
- $\mathbf{i} = \text{diag}(i, i, i + j)$ – центральный тензор инерции маятника;
- $\mathbf{V} = (\dot{X}, \dot{Y}, 0)^T$ – вектор скорости центра C сферической оболочки;
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ – вектор скорости центра масс C_i маятника;
- $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)^T$ – параметрическая траектория точки B платформы с нулевыми в неподвижной системе координат начальными координатами;
- $\dot{\mathbf{b}} = (\dot{b}_1, \dot{b}_2, 0)^T$ – вектор скорости платформы;
- $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$ – вектор угловой скорости сферической оболочки;
- $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости маятника;
- $\mathbf{n}$ – вектор, направленный из точки C вдоль оси симметрии маятника.

2.1. Кинематические связи, уравнения движения. Условия непроскальзывания сферической оболочки в точке контакта с платформой Π имеют вид

$$\mathbf{V} = R\boldsymbol{\Omega} \times \gamma + \dot{\mathbf{b}}. \quad (2.1)$$

Условия, являющиеся следствием равенства скоростей сферической оболочки и маятника в точке C крепления маятника к оболочке, имеют вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + R_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}. \quad (2.2)$$

Эволюция вектора $\mathbf{n}$ задается в виде

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}. \quad (2.3)$$

Система связей (2.1)–(2.2), вообще говоря, не является неголономной, а представляет собой комбинацию голономных и неголономных кинематических связей.

Уравнения движения для сферической оболочки с закрепленным в геометрическом центре волчком Лагранжа, катающейся по неподвижной горизонтальной плоскости, получены в [23]. Запишем уравнения движения сферического робота с маятниковым приводом, на движение которого наложены кинематические связи (2.1)–(2.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + a\boldsymbol{\gamma} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}) + a\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) &= -M\mathbf{R}\boldsymbol{\gamma} \times \ddot{\mathbf{b}} - \mathbf{Q} \\ i_0\dot{\boldsymbol{\omega}} + j_0(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n})\mathbf{n} + a\mathbf{n} \times (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{\gamma}) &= -j_0(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})\dot{\mathbf{n}} - m_l R_l \mathbf{n} \times (g\boldsymbol{\gamma} + \ddot{\mathbf{b}}) + \mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}(J, J, I)$, $M = m + m_l$, $J = I + MR^2$, $i_0 = i + m_l R_l^2$, $j_0 = j - m_l R_l^2$, $a = m_l R_l R$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$ – управляющий крутящий момент, приложенный в точке C , g – ускорение свободного падения. Из уравнений (2.4) следует, что

$$I\dot{\Omega}_3 = -Q_3.$$

Положим для простоты

$$\Omega_3 = Q_3 = 0.$$

2.2. Способы управления. Считаем, что движение системы управляемое. Будем рассматривать два способа управления.

- Управление посредством вынужденного движения платформы при свободных колебаниях маятника. В этом случае вектор управляющего крутящего момента $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{0}$. Требуется определить вектор скорости $\dot{\mathbf{b}}$ платформы П (или траекторию некоторой точки платформы, например, точки B), который позволит сферическому роботу реализовать заданную программу движения.

- Управление крутящим моментом маятника с помощью маятникового привода. В этом случае платформа П либо неподвижна ($\dot{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{0}$), либо совершает несогласованные с движением робота колебания (вектор скорости $\dot{\mathbf{b}}$ задан). Требуется определить вектор управляющего крутящего момента $\mathbf{Q}$, который позволит сферическому роботу реализовать заданную программу движения.

Каждый из искомых векторов, $\dot{\mathbf{b}}$ в первом случае и $\mathbf{Q}$ во втором случае, содержит по две неопределенные компоненты, поэтому требуется наличие двух сервосвязей. Иначе программа движения не задана.

2.3. Программа движения. Сферический робот преследует некоторую точечную цель, которая движется на уровне его геометрического центра и не касается платформы (рис. 1). Введем вектор $\mathbf{P} = (\xi - X, \eta - Y, 0)$, где (X, Y, R) – координаты геометрического центра C робота, (ξ, η, R) – координаты цели в неподвижной системе координат, причем

$$\rho = |\mathbf{P}| = \sqrt{(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2}$$

– расстояние от геометрического центра C робота до цели.

Для удобства выберем начало системы координат O так, чтобы в момент времени $t = 0$ проекция геометрического центра сферической оболочки C

на плоскость OXY совпадала с точкой O и точкой платформы B , то есть $X_0 = Y_0 = b_{1,0} = b_{2,0} = 0$. Ось OX сонаправим с вектором $P_0 = (\xi_0 - X_0, \eta_0 - Y_0, 0)$, если в начальный момент времени сферический робот покоится, или сонаправим с начальным вектором скорости V_0 , если в начальный момент времени сферический робот уже находится в движении. Таким образом,

$$\dot{Y}_0 = 0.$$

Замечание 1. Здесь и далее нижним индексом "0" будем обозначать значение функции (или вектора) в момент времени $t = 0$: $f_0 = f(0)$.

Вектор скорости цели $V_\xi = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, 0)$, а также первоначальные местоположения цели и робота в неподвижной системе координат $OXYZ$ заданы.

Движение за целью будем осуществлять модифицированным методом погони. Классическое условие прямой погони имеет вид

$$\phi = \psi, \quad (2.5)$$

где ϕ — угол, который образует вектор V с положительным направлением оси OX , ψ — угол, который образует вектор P с положительным направлением оси OX . Это условие гарантирует, что вектор скорости V всегда направлен на цель. Так как условие (2.5) должно иметь место $\forall t \in [0, +\infty)$, то реализовать такое условие можно лишь в двух случаях:

- робот начинает двигаться из состояния покоя, то есть $V_0 = 0$;
- вектор скорости в момент времени $t = 0$ уже направлен на цель, то есть $V_0 \uparrow\uparrow P_0$.

Поэтому введем вместо условия (2.5) модифицированное условие погони, позволяющее выходить на условие метода погони из любого положения с любыми начальными условиями

$$\phi = \psi - \psi_0 e^{-t}, \quad \phi_0 = 0, \quad (2.6)$$

причем, если $\psi_0 = 0$, то $\phi = \psi \quad \forall t \in [0, +\infty)$. Условие (2.6) определяет направление движения сферического робота.

Потребуем, чтобы в рамках выполнения программы движения, робот во избежание столкновения держался от цели на приемлемом расстоянии. Для этого зададим две сервосвязи в виде

$$\dot{X} = \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \cos \phi, \quad \dot{Y} = \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \sin \phi, \quad (2.7)$$

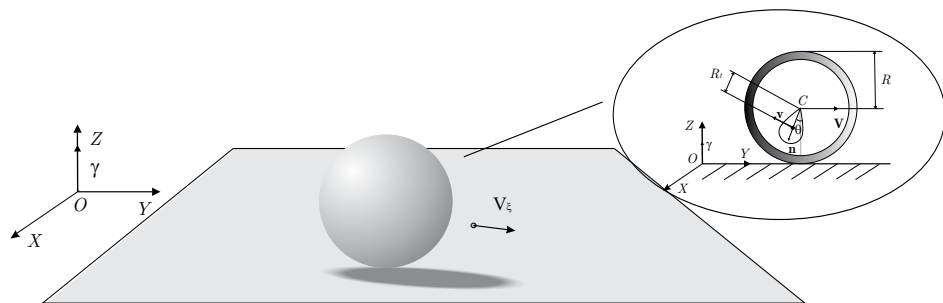


Рис. 1. Конструкция системы.

где $\tilde{\rho}$ — некоторое критическое расстояние, достигнув которого робот должен поменять направление движения на противоположное, α — заданный числовой коэффициент пропорциональности “расстояние-скорость”, угол ϕ задается формулой (2.6).

Если движение робота начинается из состояния покоя, примем

$$\tilde{\rho} = \rho_0 > R, \quad \alpha > \frac{v_{\max}}{\rho_0 - R},$$

где $v_{\max}$ — максимально возможное абсолютное значение скорости цели [12], иначе

$$R < \tilde{\rho} < \rho_0,$$

а значение α определяется из начальных условий, так как сервосвязи (2.7) имеют место $\forall t \in [0, +\infty)$:

$$\alpha = \frac{\dot{X}_0}{\rho_0 - \tilde{\rho}}.$$

Так как координаты робота и цели связаны равенствами

$$X = \xi - \rho \cos \psi, \quad Y = \eta - \rho \sin \psi, \quad (2.8)$$

то функции ψ и ρ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \dot{\xi} \cos \psi + \dot{\eta} \sin \psi - \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \cos(\psi - \phi) \\ \dot{\psi} &= \frac{\dot{\eta} \cos \psi - \dot{\xi} \sin \psi + \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \sin(\psi - \phi)}{\rho} \end{aligned} \quad (2.9)$$

с заданными начальными условиями ρ_0, ψ_0 .

Замечание 2. Так как система (2.9) может быть решена независимо от уравнений движения, то движение сферического робота за некоторой целью при заданном управлении (2.7) может быть сведено к движению сферического робота по заданной траектории.

Аналогично доказанному в [12], справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Функция расстояния $\rho(t)$, являющаяся решением системы (2.9), ограничена, если ограничена скорость преследуемого объекта, причем при

$$\alpha > \frac{v_{\max}}{\tilde{\rho} - R}$$

расстояние $\rho(t) > R \quad \forall t \in [0, +\infty)$.

3. Управление посредством вынужденного движения платформы. Считаем, что платформа управляема, маятник совершает свободные колебания. Тогда

$$Q \equiv 0.$$

Система (2.4) в этом случае обладает первыми интегралами

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1, (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \text{const}$$

и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + a\boldsymbol{\gamma} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{n}) + a\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) &= -MR\boldsymbol{\gamma} \times \ddot{\mathbf{b}} \\ i_0\dot{\boldsymbol{\omega}} + a\mathbf{n} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\lambda}) &= -j_0(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})\dot{\mathbf{n}} - m_t R_t \mathbf{n} \times (g\boldsymbol{\gamma} \times \ddot{\mathbf{b}}) \\ \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Динамика свободных колебаний маятника при движении сферического робота на управляемой платформе описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\frac{m_t R_t}{i_0} \mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{V}} + g\boldsymbol{\gamma}) - \frac{j_0}{i_0} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где компоненты вектора $\dot{\mathbf{V}} = (\ddot{X}, \ddot{Y}, 0)$ задаются следующим образом

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \alpha \left[\dot{\xi} \cos(\psi - \phi) + \dot{\eta} \sin(\psi - \phi) - \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \cos(\psi - 2\phi) \right] + \\ &\quad + \alpha \sin \phi \left[\tilde{\rho} \dot{\psi} - \psi_0 (\rho - \tilde{\rho}) e^{-t} \right] \\ \ddot{Y} &= \alpha \left[-\dot{\xi} \sin(\psi - \phi) + \dot{\eta} \cos(\psi - \phi) + \alpha(\rho - \tilde{\rho}) \sin(\psi - 2\phi) \right] - \\ &\quad - \alpha \cos \phi \left[\tilde{\rho} \dot{\psi} - \psi_0 (\rho - \tilde{\rho}) e^{-t} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вектор скорости платформы равен

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}}_0 + \frac{J}{I} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_0) + \frac{aR}{I} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \times (\dot{\mathbf{n}}_0 \times \boldsymbol{\gamma})), \quad (3.3)$$

откуда закон движения точки B платформы Π задается в виде

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{J}{I} X + \frac{aR}{I} n_1 + \left(\dot{b}_{1,0} - \frac{J}{I} \dot{X}_0 - \frac{aR}{I} \dot{n}_{1,0} \right) t - \frac{aR}{I} n_{1,0} \\ b_2 &= \frac{J}{I} Y + \frac{aR}{I} n_2 + \left(\dot{b}_{2,0} - \frac{aR}{I} \dot{n}_{2,0} \right) t - \frac{aR}{I} n_{2,0}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Движение механической системы однозначно задается уравнениями (2.9), (3.1) и (3.3).

Очевидно, что если платформа и сферический робот приходят в движение из состояния покоя, а проекция траектории цели на плоскость OXY ограничена (расположена на участке плоскости OXY конечной площади), то

траектории точек платформы также будут ограничены. В противном случае, почти всегда наблюдается вековой уход траекторий точек платформы.

3.1. Редукция и параметризация системы. Исследуем динамику системы (3.1) более подробно на нулевом уровне первого интеграла $(\omega, \mathbf{n}) = 0$. Аналогичные рассуждение имеют место и для произвольного уровня этого интеграла.

Параметризуем вектор $\mathbf{n}$ углами θ, φ :

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta)^T,$$

где угол θ задает угол отклонения маятника от вектора $-\gamma$, угол φ задает угол между осью OX и проекцией вектора $\mathbf{n}$ на плоскость OXY .

На указанных уровнях первых интегралов компоненты вектора угловой скорости маятника параметризуем переменными $\omega_\theta, \omega_\varphi$:

$$\omega = (\omega_\theta \sin \varphi + \omega_\varphi \sin \theta \cos \theta \cos \varphi, -\omega_\theta \cos \varphi + \omega_\varphi \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \omega_\varphi \sin^2 \theta)^T$$

где $\dot{\theta} = \omega_\theta$, $\dot{\varphi} = \omega_\varphi$.

Запишем редуцированную систему (3.1) в новых переменных:

$$\dot{\theta} = \omega_\theta$$

$$\dot{\varphi} = \omega_\varphi$$

$$\dot{\omega}_\theta = -\frac{a}{Ri_0} \cos \theta (\ddot{X} \cos \varphi + \ddot{Y} \sin \varphi) - \frac{ag}{Ri_0} \sin \theta + \omega_\varphi^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.5)$$

$$\dot{\omega}_\varphi = \frac{a}{Ri_0 \sin \theta} (\ddot{X} \sin \varphi - \ddot{Y} \cos \varphi) - \frac{2\omega_\theta \omega_\varphi \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Замечание 3. Отметим, что система (3.5) имеет особенность в точках $\theta = \pi k, k \in Z$, что является исключительно следствием выбора переменных. Особенность пропадает при движении робота по прямой. Также при свободных колебания маятника проблему можно решить соответствующим выбором начального условия $\theta_0 \neq \pi k, k \in Z$, так как $\theta = \pi k, k \in Z$ характеризует неустойчивое положение маятника. Однако, при управлении сферическим роботом посредством маятникового привода выбор соответствующего начального значения θ_0 не решит проблему. Поэтому при движении робота по криволинейной траектории имеет смысл интегрировать в исходных переменных.

3.2. Движение сферического робота по прямой. Цель и робот движутся по прямой, тогда

$$\psi = \phi = \varphi = 0.$$

Пусть в начальный момент времени платформа покоится, то есть $\dot{\mathbf{b}}_0 \equiv \mathbf{0}$. Система (3.5) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_\theta \\ \dot{\omega}_\theta &= -\frac{a\alpha}{Ri_0} \dot{\rho} \cos \theta - \frac{ag}{Ri_0} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

и задает двумерный поток в фазовом пространстве

$$M^2 = \{(\theta, \omega_\theta) \mid \theta \in (-\pi, \pi], \omega_\theta \in \mathbb{R}\}.$$

Функция расстояния ρ находится из предварительного интегрирования уравнения

$$\dot{\rho} = \dot{\xi} - \alpha(\rho - \tilde{\rho}). \quad (3.7)$$

Построим ряд численных экспериментов.

3.3. Численный эксперимент 1. Цель движется со скоростью $\dot{\xi} = 0.6$ м/с и в начальный момент времени находится на расстоянии $\rho_0 = 2$ м. Расстояние находится аналитически из (3.7)

$$\rho(t) = \tilde{\rho} + \alpha^{-1} \dot{\xi} + e^{-\alpha t} (\rho_0 - \tilde{\rho} - \alpha^{-1} \dot{\xi}). \quad (3.8)$$

Параметры математической модели приведены в табл. 1.

На рис. 2,а построена типовая фазовая кривая и графики функций $b_1(t)$, $\rho(t)$ при движении сферического робота с ненулевыми начальными условиями $\dot{X}_0 = 0.5$ м/с, $\omega_{\theta,0} = 1$ рад/с, $\theta_0 = 0$ рад и $\tilde{\rho} = 1.5$ м.

На рис. 2,б построена типовая фазовая кривая и графики функций $b_1(t)$, $\rho(t)$ при движении сферического робота из состояния покоя, то есть $\dot{X}_0 = 0$ м/с, $\omega_{\theta,0} = 0$ рад/с, $\theta_0 = 0$ рад. Примем $\tilde{\rho} = \rho_0 = 2$ м, $\alpha = 1$ с⁻¹.

Согласно численным экспериментам при движении цели с постоянной скоростью, система (3.6) при $t \rightarrow +\infty$ приобретает периодическую динамику. Имеет место вековой уход траекторий точек платформы вдоль оси OX .

3.4. Численный эксперимент 2. Цель движется с периодической скоростью $\dot{\xi} = \sin 0.5t$ и в начальный момент времени находится на расстоянии $\rho_0 = 2$ м. Расстояние находится из (3.7) аналитически

$$\rho(t) = \tilde{\rho} + \frac{4\alpha \sin 0.5t - 2 \cos 0.5t}{4\alpha^2 + 1} + e^{-\alpha t} \left(\rho_0 - \tilde{\rho} + \frac{2}{4\alpha^2 + 1} \right). \quad (3.9)$$

На рис. 3,а построены типовая фазовые кривая и графики функций $b_1(t)$, $\rho(t)$ при движении сферического робота с ненулевыми начальными условиями $\dot{X}_0 = 0.5$ м/с, $\omega_{\theta,0} = 1$ рад/с, $\theta_0 = 0$ рад, а также $\tilde{\rho} = 1.5$ м.

Таблица 1. Параметры математической модели

R	0.2 м	m	2 кг	I	0.032 кг м ²
R_t	0.15 м	m_t	2 кг	i_0	0.09 кг м ²
J	0.192 кг м ²	a	0.06 кг м ²	j_0	0 кг м ²

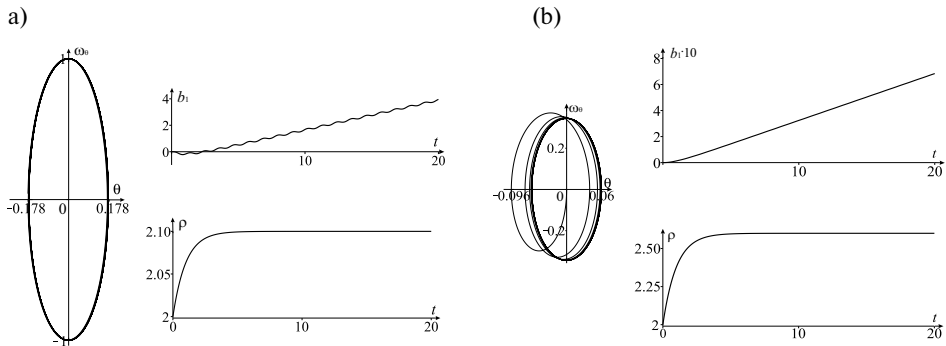


Рис. 2. Типовая фазовая кривая на плоскости (θ, ω_θ) , графики функций $b_1(t)$ и $\rho(t)$ при управлении преследованием цели, двигающейся по прямой с постоянной скоростью. (а) Движение сферического робота с ненулевой начальной скоростью. (б) Движение сферического робота из состояния покоя.

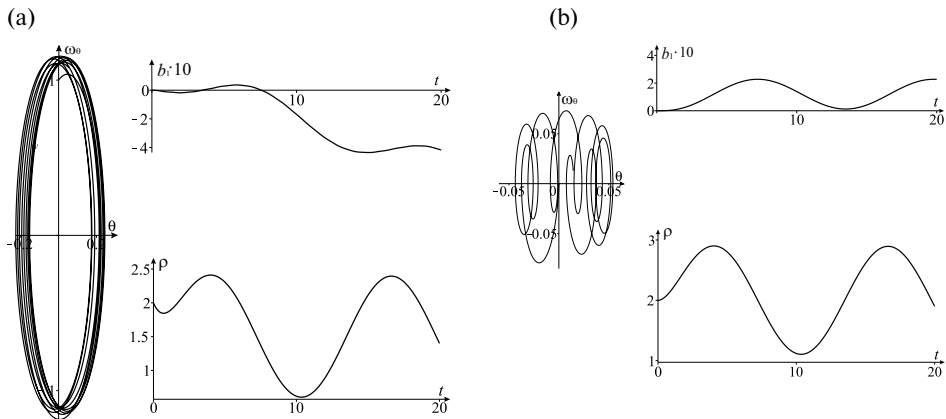


Рис. 3. Типовая фазовая кривая на плоскости (θ, ω_θ) , графики функций $b_1(t)$ и $\rho(t)$ при управлении преследованием цели, двигающейся по прямой с периодической скоростью. (а) Движение сферического робота с ненулевой начальной скоростью. (б) Движение сферического робота из состояния покоя.

На рис. 3,б построены типовая фазовая кривая и графики функций $b_1(t)$, $\rho(t)$ при движении сферического робота из состояния покоя, считая $\tilde{\rho} = \rho_0 = 2$ м, $\alpha = 1$ с⁻¹. Параметры математической модели приведены в табл. 1.

Согласно численным экспериментам при движении цели с периодической скоростью, система (3.6) характеризуется квазипериодической динамикой. Если начальная скорость робота отлична от нуля, то и как в предыдущем случае для траекторий точек платформы имеет место вековой уход. Если робот начинает двигаться из состояния покоя, то платформа совершает квазипериодические колебания вдоль оси OX , функция $b_1(t)$ ограничена $\forall t \in [0, +\infty)$, что очевидно из (3.4).

4. Управление крутящим моментом маятника. Для реализации программы движения сферического робота привод создает управляющий крутящий момент $\mathbf{Q}$, приложенный в точке C крепления маятника. В этом случае система (2.4) с учетом кинематических связей и сервосвязей преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{i}}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \frac{1}{R}[(\mathbf{J}\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{I}\ddot{\mathbf{b}}) \times \boldsymbol{\gamma} - a\mathbf{n} \times (\dot{\mathbf{V}} + g\boldsymbol{\gamma}) - j_0 R(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})\dot{\mathbf{n}} - aR\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}})] = \mathbf{P} \\ \dot{\mathbf{n}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n},\end{aligned}\quad (4.1)$$

где $\hat{\mathbf{i}} = (i_0 + a(\mathbf{n}, \boldsymbol{\gamma}))\mathbf{E} + j_0 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - a\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\gamma}$, а компоненты вектора $\dot{\mathbf{V}}$ задаются выражениями (3.2). Движение механической системы однозначно задается уравнениями (2.9) и (4.1).

Система (4.1) разрешима при условии

$$i_0 > a,$$

выполнение которого можно гарантировать соответствующим выбором масс и геометрических характеристик [8].

Вектор управляющего крутящего момента соответственно равен

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{R} \left[(\mathbf{J}\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{I}\ddot{\mathbf{b}}) \times \boldsymbol{\gamma} - \frac{aR}{i_0 + a(\mathbf{n}, \boldsymbol{\gamma})} \boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{n}) - aR\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{n}}) \right].$$

4.1. Движение по прямой. Исследуем динамику системы при движении цели и робота по прямой:

$$\psi = \varphi = \phi = 0.$$

Пусть платформа совершает периодические колебания вдоль оси OX с заданным вектором скорости.

Параметризуя систему (4.1) аналогично предыдущему пункту переменными θ, ω_θ , получим систему

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega_\theta \\ \dot{\omega}_\theta &= \frac{1}{R(i_0 - a \cos \theta)} \left((J - a \cos \theta) \alpha \dot{\rho} - a \sin \theta (g + R\omega_\theta^2) - I\ddot{b}_1 \right),\end{aligned}\quad (4.2)$$

задающую двумерный поток в фазовом пространстве

$$M^2 = \{(\theta, \omega_\theta) \mid \theta \in (-\pi, \pi], \omega_\theta \in \mathbb{R}\}$$

Функция расстояния ρ находится из предварительного интегрирования уравнения (3.7). Квадрат управляющего крутящего момента равен

$$Q^2 = \frac{((Ji_0 - a^2 \cos^2 \theta) \alpha \dot{\rho} - a \sin \theta (ag \cos \theta + i_0 R \omega_\theta^2) - Ii_0 \ddot{b}_1)^2}{R^2 (i_0 - a \cos \theta)^2}$$

4.2. Численный эксперимент 3. При движении цели с постоянной и периодической скоростью система характеризуется квазипериодической динамикой.

Проиллюстрируем ее на примере движения цели со постоянной $\xi = 0.6$ м/с. Считаем, что $\rho_0 = 2$ м. Вектор скорости платформы $\mathbf{b} = (\sin 0.4t, 0, 0)$.

На рис. 4 представлены примеры типовых фазовых кривых системы (4.2), графики квадрата управляющего крутящего момента и функции расстояния при движении робота с ненулевыми начальными условиями $\dot{X}_0 = 0.5$ м/с, $\omega_{0,0} = 1$ рад/с, $\theta_0 = 0.5$ рад и $\tilde{\rho} = 1.5$ м (рис. 4,а) и при движении из состояния покоя, $\alpha = 1$ с⁻¹ (рис. 4,б). Параметры математической модели приведены в табл. 1.

5. Численные эксперименты при движении сферического робота по криволинейной траектории. Ниже приведены результаты численных экспериментов в задаче управления сферическим роботом, который преследует цель, двигающуюся с заданным вектором скорости (движение по окружности)

$$\dot{\mathbf{V}} = (-0.4 \cos 0.1t, -0.4 \sin 0.1t, 0).$$

Параметры математической модели даны в табл. 1. Численные решения находились интегрированием в исходных переменных. Рис. 5,а–с соответствуют движению сферического робота из состояния покоя при $\alpha = 0.6$ с⁻¹. Начальным местоположением сфероробота и цели на плоскости OXY соответствуют точки (0, 0) и (2, 0) соответственно, $\tilde{\rho} = \rho_0 = 2$ м. Начальные условия:

$$\mathbf{V}_0 = (0, 0, 0), \quad \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{n}_0 = (0, 0, -1).$$

На рис. 5,а представлены траектории цели (точечная) и робота (сплошная) на плоскости $OXYZ$, графики квадратов угловых скоростей маятника $\boldsymbol{\omega}^2$ и

(а)

(б)

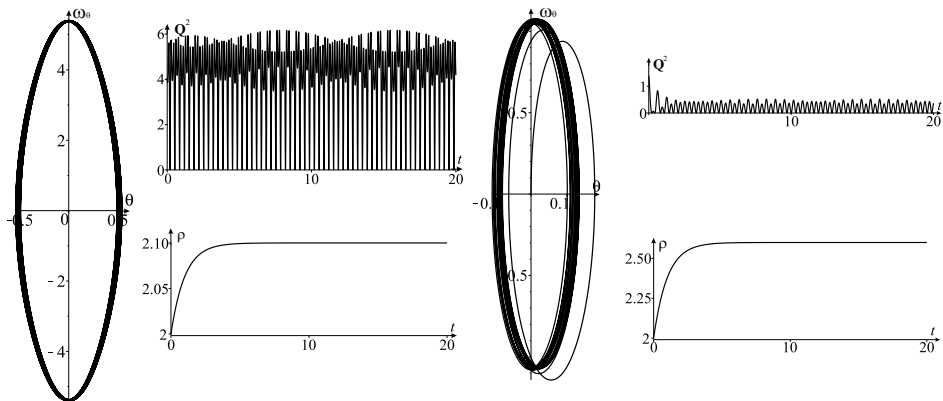


Рис. 4. Типовая фазовая кривая на плоскости (θ, ω_θ) , графики функций $Q^2(t)$ и $\rho(t)$ при управлении преследованием цели, двигающейся по прямой с постоянной скоростью. (а) Движение сферического робота с ненулевой начальной скоростью. (б) Движение сферического робота из состояния покоя.

сфероробота Ω^2 при управлении крутящим моментом маятника. Платформа неподвижна, $\dot{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{0}$.

На рис. 5, b представлены траектории сфероробота непосредственно на самой подвижной платформе, графики ω^2 и Ω^2 при управлении крутящим моментом маятника. Платформа колеблется с заданным вектором скорости $\dot{\mathbf{b}} = (\sin 0.4t, 0, 0)$.

На рис. 5, c представлены траектории сфероробота непосредственно на самой платформе, графики ω^2 и Ω^2 при управлении движением платформы.

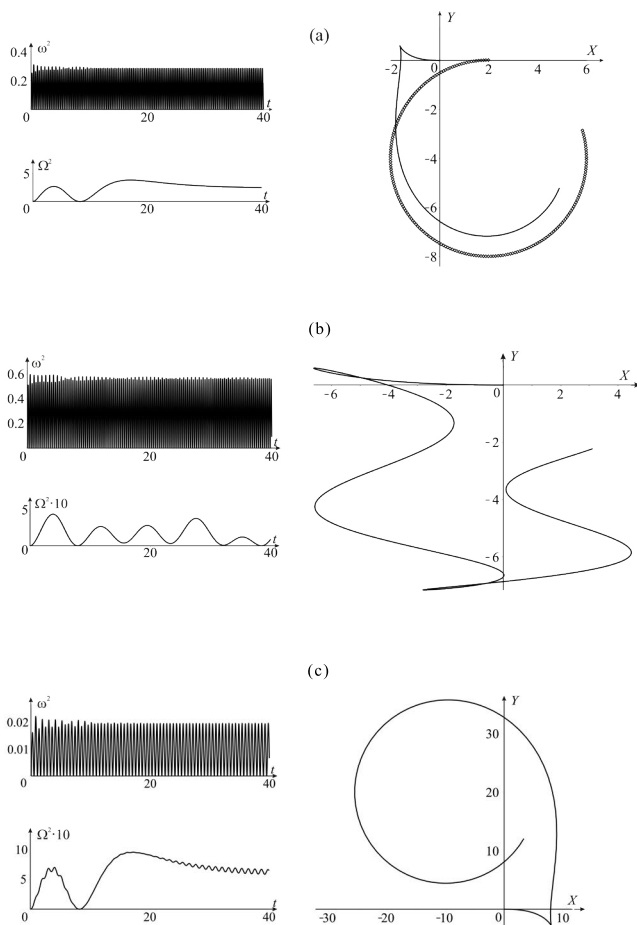


Рис. 5. Движение сферического робота из состояния покоя за целью: (а) по неподвижной платформе при управлении крутящим моментом маятника; (б) по колеблющейся платформе при управлении крутящим моментом маятника; (с) при управлении движением платформы.

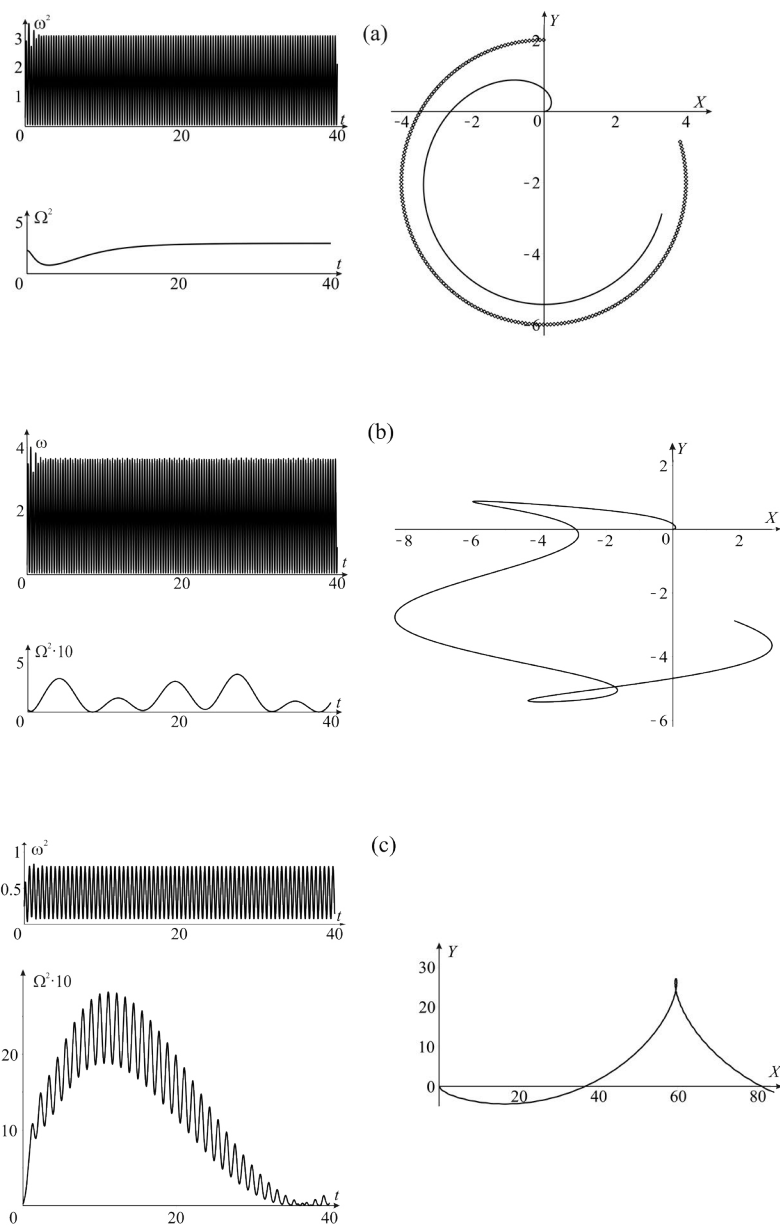


Рис. 6. Движение сферического робота с ненулевыми начальными условиями за целью: (а) по неподвижной платформе при управлении крутящим моментом маятника; (б) по колеблющейся платформе при управлении крутящим моментом маятника; (с) при управлении движением платформы.

Аналогично, рис. 6,а–с соответствуют движению сфероробота с ненулевыми начальными условиями:

$$\mathbf{V}_0 = (0.3, 0, 0), \quad \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0.5, 0), \quad \mathbf{n}_0 = (\sin 0.1, 0, -\cos 0.1).$$

Начальным местоположениям сфероробота и цели на плоскости OXY соответствуют точки $(0, 0)$ и $(0, 2)$ соответственно, $\rho_0 = 2$ м, $\tilde{\rho} = 1.5$ м, $\alpha = 0.6$ с⁻¹.

Заключение. В работе исследованы два способа управления сферическим роботом маятникового типа на подвижной платформе. Управление осуществляется посредством сервосвязей, задающих программу преследования некоторой подвижной точечной цели. Заданные сервосвязи позволяют роботу начинать преследование из любого положения и с любой начальной скоростью.

Реализация сервосвязей осуществляется либо за счет соответствующего движения платформы (колебания маятника свободные), либо за счет управления крутящим моментом маятника, генерируемого маятниковым приводом. Аналитически найдены траектории движения точек платформы, которые могут иметь вековой уход или быть ограниченными. Последнее, например, имеет место, если траектория цели также ограничена, а платформа и сферический робот начинают свое движение из состояния покоя. При ненулевых начальных условиях для точек платформы, как правило, имеет место вековой уход траектории.

Численные эксперименты показали, что в случае управления соответствующим движением платформы при свободных колебаниях маятника квадрат угловой скорости маятника принимает меньшие в несколько раз значения по сравнению с управлением за счет маятникового привода, а вот квадрат угловой скорости сферического робота может достигать довольно высоких значений, особенно при ненулевой начальной скорости робота.

Интересным представляется исследование комбинации управлений и нахождение оптимальных режимов при комбинированном управлении.

Конфликт интересов. Автор заявляет, что не имеет конфликта интересов.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского Научного Фонда № 23-21-10019 и Чувашской республики, <https://rscf.ru/project/23-21-10019/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб. 1903. Т. 24. С. 139–168.
2. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn. 2013. V. 18. № 6. P. 832–859.
3. Borisov A.V., Mikishanina E.A. Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 3. P. 453–465. <https://doi.org/10.20537/nd200304>
4. Kilin A.A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn. 2002. V. 6. № 3. P. 291–306. <https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>

5. *Schneider D.A.* Nonholonomic Euler–Poincaré equations and stability in Chaplygin’s sphere // *Dyn. Syst.* 2002. V. 17. № 2. P. 87–130.
6. *Bolotin S.* The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17. № 6. P. 559–570. <https://doi.org/10.1134/S156035471206007X>
7. *Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S.* How to control Chaplygin’s sphere using rotors // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17. № 3. P. 258–272. <https://doi.org/10.1134/S1560354712030045>
8. *Ivanova T.B., Pivovarova E.N.* Dynamics and control of a spherical robot with an axisymmetric pendulum actuator // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2013. V. 9. № 3. P. 507–520. <https://doi.org/10.20537/nd1303008>
9. *Gajbhiye S., Banavar R.N.* Geometric modeling and local controllability of a spherical mobile robot actuated by an internal pendulum // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2015. V. 26. P. 2436–2454. <https://doi.org/10.1002/rnc.3457>
10. *Ivanova T.B., Kilin A.A., Pivovarova E.N.* Controlled motion of a spherical robot with feedback. I // *J. Dyn. Control Syst.* 2018. V. 24. № 3. P. 497–510. <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9387-2>
11. *Joshi V.A., Banavar R.N., Hippalgaonkar R.* Design and analysis of a spherical mobile robot // *Mech. Mach. Theory.* 2010. V. 45. № 2. P. 130–136. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.04.003>
12. *Mikishanina E.A.* Motion control of a spherical robot with a pendulum actuator for pursuing a target // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2022. V. 18. № 5. P. 899–913. <https://doi.org/10.20537/nd221223>
13. *Ylikorpi T., Suomela J.* Ball-shaped robots // *Climbing and walking robots: towards new applications.* Vienna: InTech. 2007. P. 235–256. <https://doi.org/10.5772/5083>
14. *Азизов А.Г.* Движение управляемых механических систем с сервосвязями // *ПММ.* 1990. Т. 54. № 3. С. 366–372.
15. *Кургетов В.И.* О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // *ПММ.* 1967. Т. 31. № 3. С. 433–446.
16. *Altmann R., Heiland J.* Simulation of multibody systems with servo constraints through optimal control // *Multibody Syst. Dyn.* 2017. V. 40. P. 75–98. <https://doi.org/10.1007/s11044-016-9558-z>
17. *Bajodah A.H., Hodges D.H., Chen Y.H.* Inverse dynamics of servo-constraints based on the generalized inverse // *Nonlinear Dyn.* 2005. V. 39. № 1. P. 179–196. <https://doi.org/10.1007/s11071-005-1925-x>
18. *Bèghin M.H.* Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry. Paris: Impr. nationale, 1931.
19. *Татаринов Я.В.* Уравнения классической механики в лаконичных формах. М.: Изд-во ЦПИ при Механико-математическом факультете МГУ. 2005. 88 с.
20. *Kozlov V.V.* The dynamics of systems with servoconstraints. I // *Regul. Chaotic Dyn.* 2015. V. 20. № 3. P. 205–224. <https://doi.org/10.1134/S1560354715030016>
21. *Аппель П.* Динамика системы. Аналитическая механика. Т. 2. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит, 1960. 488 с.
22. *Микишанина Е.А.* Динамика качения сферического робота с маятниковым приводом, управляемого сервосвязью Билимовича // *Теоретическая и математическая физика.* 2022. Т. 211. № 2. С. 281–294. <https://doi.org/10.4213/tmf10227>
23. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Two nonholonomic integrable problems traicing back to Chaplygin // *Regul. Chaotic Dyn.* 2012. V. 17. № 2. P. 191–198. <https://doi.org/10.1134/S1560354712020074>

TWO WAYS TO CONTROL A PENDULUM-TYPE SPHERICAL ROBOT ON A MOVING PLATFORM IN A PURSUIT PROBLEM

E. A. Mikishanina^{a,*}

^a*I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, 428015 Russia*

**e-mail: evaeva_84@mail.ru*

Received 17.05.2023

Revised 14.07.2023

Accepted 16.07.2023

Abstract – We consider the problem of controlling a spherical robot with a pendulum actuator rolling on a platform that is capable of moving translationally in the horizontal plane of absolute space. The spherical robot is subject to holonomic and nonholonomic constraints. Some point target moves at the level of the geometric center of the spherical robot and does not touch the moving platform itself. The motion program that allows the spherical robot to pursue a target is specified through two servo-constraints. The robot can follow a target from any position and with any initial conditions. Two ways to control this system in absolute space are proposed: by controlling the forced motion of the platform (the pendulum oscillates freely) and by controlling the torque of the pendulum (the platform is stationary or oscillates inconsistently with the spherical robot). The equations of motion of the system are constructed. In the case of free oscillations of the pendulum, the system of equations of motion has first integrals and, if necessary, can be reduced to a fixed level of these integrals. When a spherical robot moves in a straight line, for a system reduced to the level of integrals, phase curves, graphs of the distance from the geometric center of the spherical robot to the target, the trajectory of the selected platform point when controlling the platform, and the square of the control torque when controlling the pendulum drive are constructed. When the robot moves along a curved path, integration is carried out in the original variables. Graphs of the squares of the angular velocity of the pendulum and the spherical robot itself are constructed, as well as the trajectory of the robot's motion in absolute space and on a moving platform. Numerical experiments were performed in the Maple software package.

Keywords: control, nonholonomic system, spherical robot, pendulum actuator, moving platform, servo-constraints, pursuit

REFERENCES

1. S. A. Chaplygin, "On a ball's rolling on a horizontal plane," *Mat. Sborn.* **24** 139–168 (1903); *Reg. Chaotic Dyn.* **7** (2), 131–148 (2002).
<https://doi.org/10.1070/RD2002v007n02ABEH000200>
2. A. V. Borisov, A. A. Kilin, and I. S. Mamaev, "The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball," *Regul. Chaotic Dyn.* **18** (6), 832–859 (2013).
<https://doi.org/10.1134/S1560354713060166>
3. A. V. Borisov and E. A. Mikishanina, "Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters," *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **16** (3), 453–465 (2020). <https://doi.org/10.20537/nd200304>
4. A. A. Kilin, "The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis," *Regul. Chaotic Dyn.* **6** (3), 291–306 (2002).
<https://doi.org/10.1070/RD2001v006n03ABEH000178>

5. D. A. Schneider, "Nonholonomic Euler–Poincarè equations and stability in Chaplygin's sphere," *Dyn. Syst.* **17** (2), 87–130 (2002). <https://doi.org/10.1080/0268110110112852>
6. S. Bolotin, "The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors," *Regul. Chaotic Dyn.* **17** (6), 559–570 (2012). <https://doi.org/10.1134/S156035471206007X>
7. A. V. Borisov, A. A. Kilin, and I. S. Mamaev, "How to control Chaplygin's sphere using rotors," *Regul. Chaotic Dyn.* **17** (3), 258–272 (2012). <https://doi.org/10.1134/S1560354712030045>
8. T. B. Ivanova and E. N. Pivovarova, "Dynamics and control of a spherical robot with an axisymmetric pendulum actuator," *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **9** (3), 507–520 (2013). <https://doi.org/10.20537/nd1303008>
9. S. Gajbhiye and R. N. Banavar, "Geometric modeling and local controllability of a spherical mobile robot actuated by an internal pendulum," *Int. J. Robust Nonlin. Control* **26**, 2436–2454 (2015). <https://doi.org/10.1002/rnc.3457>
10. T. B. Ivanova, A. A. Kilin, and E. N. Pivovarova, "Controlled motion of a spherical robot with feedback. I," *J. Dyn. Control Syst.* **24** (3), 497–510 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10883-017-9387-2>
11. V. A. Joshi, R. N. Banavar, and R. Hippalgaonkar, "Design and analysis of a spherical mobile robot," *Mech. Mach. Theory.* **45** (2), 130–136 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.04.003>
12. E. A. Mikishanina, "Motion control of a spherical robot with a pendulum actuator for pursuing a target," *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **18** (5), 899–913 (2022). <https://doi.org/10.20537/nd221223>
13. T. Ylikorpi and J. Suomela, "Ball-shaped robots," in *Climbing and Walking Robots: Towards New Applications*, Ed. by H. Zhang (InTechOpen, Vienna, 2007), pp. 235–256. <https://doi.org/10.5772/5083>
14. A. G. Azizov, "Motion of controllable mechanical systems with servo-constraints," *J. Appl. Math. Mech.* **54** (3), 302–308 (1990). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(90\)90129-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(90)90129-X)
15. V. I. Kirgetov, "The motion of controlled mechanical systems with prescribed constraints (servoconstraints)," *J. Appl. Math. Mech.* **31** (3), 465–477 (1967). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90029-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90029-9)
16. R. Altmann and Heiland J. Simulation of multibody systems with servo constraints through optimal control," *Multibody Syst. Dyn.* **40**, 75–98 (2017). <https://doi.org/10.1007/s11044-016-9558-z>
17. A. H. Bajodah, D. H. Hodges, and Y. H. Chen, "Inverse dynamics of servo-constraints based on the generalized inverse," *Nonlin. Dyn.* **39** (1), 179–196 (2005). <https://doi.org/10.1007/s11071-005-1925-x>
18. M. H. Bèghin, *Étude Théorique des Compas Gyrostatiques Anschütz et Sperry* (Impr. Nationale, Paris, 1931).
19. Ya. V. Tatarinov, *Equations of Classical Mechanics in Concise Forms* (MGU, Moscow, 2005) [in Russian].
20. V. V. Kozlov, "The dynamics of systems with servoconstraints. I," *Regul. Chaotic Dyn.* **20** (3), 205–224 (2015). <https://doi.org/10.1134/S1560354715030016>
21. P. Appell, *Traité de Mécanique Rationnelle*, Vol. 2: *Dynamique des Systèmes. Mécanique Analytique* (Gauthier-Villars, Paris, 1932; Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1960).
22. E. A. Mikishanina, "Rolling motion dynamics of a spherical robot with a pendulum actuator controlled by the Bilimovich servo-constraint," *Theor. Math. Phys.* **211**, 679–691 (2022). <https://doi.org/10.1134/S0040577922050087>
23. A. V. Borisov and I. S. Mamaev, "Two nonholonomic integrable problems traicing back to Chaplygin," *Regul. Chaotic Dyn.* **17** (2), 191–198 (2012). <https://doi.org/10.1134/S1560354712020074>