

УДК 531

ТЕОРЕМА О ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЗАКРИТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТОНКИХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

© 2024 г. С. В. Селюгин^а, *

^аМосковский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский
Университет), Москва, Россия

*e-mail: selyuginSV@mai.ru

Поступила в редакцию 20.12.2023 г.

После доработки 9.01.2024 г.

Принята к публикации 16.01.2024 г.

Рассматриваются композитные закритически деформируемые тонкие пластины в приближении фон Кармана. На основе использования первого тензора напряжений Пиола и тензора градиентов перемещений доказана вариационная теорема о дополнительной энергии. Доказательство проведено в рамках гипотез Кирхгоффа. Укладка слоев пластины считается симметричной, углы укладки слоев могут меняться от точки к точке пластины. В соответствии с теоремой для действительно реализующегося напряженного состояния пластины ее дополнительная энергия (как функционал от внутренних сил и моментов) достигает стационарного значения, в сравнении с другими статически возможными состояниями. Доказанная теорема составляет содержание статического вариационного принципа возможных напряжений, приводящего к линейным соотношениям для погонных сил/моментов, создаваемых соответствующими компонентами первого тензора напряжений Пиола, и 2D-деформациями/кривизнами. Представлен пример, иллюстрирующий использование полученных теоретических результатов.

Ключевые слова: композитные пластины, закритическое деформирование, дополнительная энергия, первый тензор напряжений Пиола

DOI: 10.31857/S1026351924030108, EDN: UHUDGU

1. Введение. Поведение анизотропных слоистых и композитных пластин широко исследовалось начиная с 30-х гг. XX в. (начиная от фанерных конструкций и переходя затем к угле- и стеклопластиковым конструкциям). В последней трети XX в. значительное внимание уделялось изучению закритического деформирования (т.е. деформирования после потери устойчивости) этих пластин. Так, например, в авиационных конструкциях учет такого деформирования при нагрузках от так называемых эксплуатационных (потеря устойчивости при них не допускается) до в 1.5 раза более

высоких расчетных позволяет существенно увеличить несущую способность конструкции и улучшить ее весовое совершенство.

Обзорные статьи [1–3] описывают состояние зарубежных исследований в области композитных конструкций, нагруженных нагрузками выше нагрузок потери устойчивости. Из последних отечественных работ по этой тематике укажем [4–6].

Большинство работ в обсуждаемой области посвящены разного рода численным подходам. Все такие подходы основываются или на прямом интегрировании (в том или ином приближении) уравнений равновесия, или на кинематическом описании поведения конструкции в форме кинематического (или смешанного) вариационного принципа. В частности, работа [7] посвящена специальному смешанному вариационному подходу для закритически деформируемых композитных пластин со слоями меняющейся ориентации (так называемых Variable Angle Tow-VAT пластин). При этом использован подход, описанный в работе [8], § 8.5, применительно к композитным пластинам. Варьируемыми величинами в работе [8] являются как перемещения, так и силовые факторы. Чисто статический принцип (для дополнительной энергии конструкции) при закритическом деформировании композитных пластин до настоящего времени не использовался.

В общей нелинейной теории упругости дополнительный вариационный принцип (названный, например, в [9] принципом стационарности дополнительной работы деформации второго рода) известен. Варьируемыми величинами при этом являются как перемещения, так и напряжения.

Известно, что подход с дополнительной энергией является плодотворным для нелинейных задач, если удастся вывести функционал дополнительной энергии в зависимости только от внутренних силовых факторов. Для того чтобы сделать это, необходимо (см. [8], § 14.4) обратить связь напряжение–деформация и выразить градиенты перемещений в конструкции как функции компонент первого тензора напряжений Пиола. Как сказано в работе [8], “к сожалению, в общем случае такое обращение весьма затруднительно”. Но в нескольких частных случаях такое обращение все же возможно. Например, в работе [10], посвященной вариационным принципам для изотропных пластин фон Кармана, такое обращение было выполнено и доказана стационарность общей дополнительной энергии изгибаемой пластины. Также следует упомянуть работу [11], в которой рассмотрены изотропные пластины и оболочки (в том числе с центральным сотовым слоем внутри) при конечных умеренных прогибах и доказан дополнительный вариационный принцип при варьировании внутренних усилий и перемещений.

В настоящей работе рассмотрен и доказан чисто статический вариационный принцип для тонких композитных пластин фон Кармана при закритическом деформировании. Рассмотрение ведется на основе использования первого тензора напряжений Пиола и тензора градиентов перемещений. Так как целью является изучение поведения пластин за пределами устойчивости, то рассматривается представляющая наибольший интерес симметричная укладка слоев (предел устойчивости в случае несимметричной укладки будет, как известно, существенно ниже). Углы ориентации слоев могут меняться от точки к точке.

Работа состоит из следующих разделов. В разделе 2 описаны принятые определения и допущения. Раздел 3 посвящен кинематике деформирования пластины и обсуждению кинематического вариационного принципа. В разделе 4 представлены вывод и доказательство теоремы о дополнительной энергии и статического вариационного принципа для тонких композитных пластин. В разделе 5 представлен пример, иллюстрирующий использование полученных теоретических результатов. В разделе 6 приведены заключение и выводы работы.

2. Основные допущения. В данной работе приняты следующие основные предположения.

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина толщиной h , составленная из $2K$ симметрично уложенных локально ортотропных слоев одинаковой толщины (обобщение на нечетное число слоев может быть легко выполнено при необходимости). Также возможно использование расположенного в срединной плоскости слоя из сотового материала, толщина которого достаточна для восприятия перерезывающей силы.

Пластина после потери устойчивости под нагрузкой в ее плоскости при дальнейшем повышении нагрузки деформируется в соответствии с приближением фон Кармана.

Толщина всей пластины много меньше любого ее линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ , срединную плоскость Γ пластины, ограниченную гладким контуром C (состоящим из частей C_1 и C_2), нормаль и касательный вектор к этому контуру. На C_1 заданы силы, действующие в плоскости, а на C_2 — перемещения по x , y , z .

Волокна слоев композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Приняты гипотезы Кирхгоффа о прямой нормали к поверхности Γ , означающие равенство нулю xz , yz , zz компонент тензора деформаций Грина.

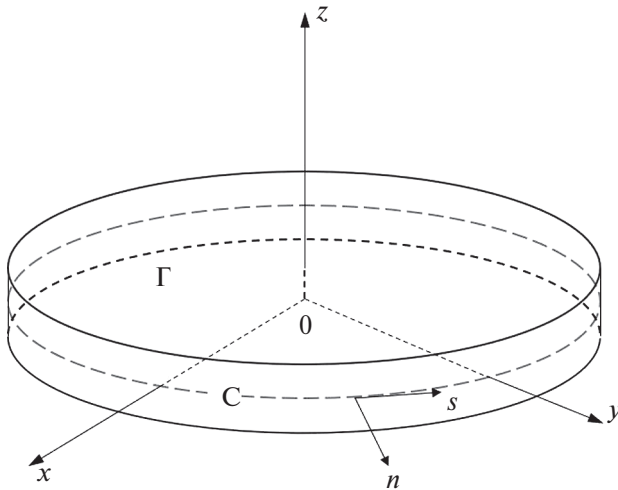


Рис. 1. Тонкая пластина.

Возможные краевые условия для пластины – защемление или простое опирание.

Первое (наименьшее) собственное значение потери устойчивости считается некрратным (изолированным). При закритическом деформировании не происходит перескока с одной моды потери устойчивости на другую.

Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам у тензоров и векторов.

Индекс после запятой означает дифференцирование по переменной, соответствующей этому индексу.

3. Закритическое деформирование пластины. Как известно (см. [9]), широко используемые в теории изгиба пластин гипотезы Кирхгоффа о прямой нормали и приближение фон Кармана описывают так называемые умеренные прогибы пластины, сравнимые с ее толщиной, но малые по сравнению с линейным размером пластины. В книге [12] также указывается, что наклон поверхности пластины при этом находится в пределах 15° .

В соответствии с приближением фон Кармана (см. [8]) перемещения u , v , w внутри пластины описываются формулами:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - zw_{0,x}, \\ v &= v_0 - zw_{0,y}, \\ w &= w_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где индексом 0 обозначены перемещения в срединной плоскости.

Компоненты тензора Грина деформаций внутри пластины будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{0,x} + \frac{1}{2}(w_{0,x})^2 - zw_{0,xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2, \\ \varepsilon_{yy} &= v_{0,y} + \frac{1}{2}(w_{0,y})^2 - zw_{0,yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2, \\ 2\varepsilon_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y} - 2zw_{0,xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где деформации в срединной плоскости соответствуют $z=0$.

Вариационный принцип для общей энергии пластины U рассмотренной конфигурации записывается в виде равенства нулю вариации этой энергии [8, 12]:

$$U = \int_{\Gamma} \pi(x, y) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{xv}u + \bar{N}_{yv}v) dC_1, \tag{3.3}$$

где \bar{N}_{xv} , \bar{N}_{yv} – заданные силы на единицу длины контура границы C_1 до деформации (заданные величины перемещений на части C_2 граничного контура будут помечены далее верхней чертой также), $\pi(x, y)$ – потенциальная энергия деформации пластины на единицу площади срединной поверхности до деформации. Эта энергия выводится из потенциальной энергии деформации слоя интегрированием по толщине пластины.

Компоненты тензора деформаций Грина слоя – это ε_x , ε_y , ε_{xy} (эти деформации описываются соответственно также (3.2)). Удельная потенциальная

энергия деформации слоя π_{ply}^V в объеме до деформации записывается в виде [14, 15]:

$$\pi_{ply}^V = \frac{1}{2} \bar{Q}_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} \bar{Q}_{22} \varepsilon_y^2 + 2\bar{Q}_{66} \varepsilon_{xy}^2 + \bar{Q}_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y + 2\bar{Q}_{16} \varepsilon_x \varepsilon_{xy} + 2\bar{Q}_{26} \varepsilon_y \varepsilon_{xy}, \quad (3.4)$$

где напряжения в слое $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ и деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ связаны соотношением:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}.$$

где $\bar{Q}_{ij}, i, j = 1, 2, 6$, – элементы матрицы упругих констант слоя.

Компоненты первого тензора напряжений Пиола σ_{ij}^p и второго тензора напряжений Кирхгоффа σ_{ij} (называемого далее просто тензором напряжений Кирхгоффа) даются соотношениями (u, v, w эквивалентно записи $v_i, i = 1, 2, 3$ соответственно):

$$\sigma_{ij}^p = \frac{\partial \pi_{ply}^V(v_{i,j})}{\partial v_{j,i}}, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \pi_{ply}^V(e_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (3.6)$$

где $\pi_{ply}^V(\dots)$ – плотность потенциальной энергии деформации в единице недеформированного объема в соответствии с (3.4). Вообще говоря, тензор σ_{ij}^p является несимметричным. Вычисляя компоненты этого тензора для слоя по (3.5), получаем:

$$\sigma_{xx}^p = \bar{Q}_{11} \left(v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{12} \left(v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \bar{Q}_{16} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}), \quad (3.7)$$

$$\sigma_{yy}^p = \bar{Q}_{12} \left(v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{22} \left(v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \bar{Q}_{26} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^p = \sigma_{yx}^p = & \bar{Q}_{16} \left(v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{26} \left(v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \\ & + \bar{Q}_{66} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Непосредственное дифференцирование (3.3) в соответствии с (3.6) дает xx, uu, xy, ux компоненты тензора напряжений Кирхгоффа, равными правым частям (3.7)–(3.9) соответственно.

Используя известные соотношения (см. [8] и упомянутое выше равенство компонент в плоскости для двух тензоров напряжений)

$$\sigma_{xz}^p = \sigma_{xx}^p v_{z,x} + \sigma_{xy}^p v_{z,y}, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{yz}^p = \sigma_{yx}^p v_{z,x} + \sigma_{yy}^p v_{z,y}, \quad (3.11)$$

получаем остающиеся ненулевые компоненты тензора σ_{ij}^p . Компоненты тензора σ_{ij} , отличающиеся от xx , yy , xy , yx , равны нулю.

Интегрируя по z через всю толщину пластины, введем следующие результирующие силы и моменты N_{ij} , M_{ij} :

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}^p) dz, \quad (3.12)$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{yy}^p) dz, \quad (3.13)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xy}^p) dz, \quad (3.14)$$

$$N_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xz}^p) dz, \quad (3.15)$$

$$N_{yz} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{yz}^p) dz, \quad (3.16)$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{xx}^p) dz, \quad (3.17)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{yy}^p) dz, \quad (3.18)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{xy}^p) dz. \quad (3.19)$$

Подставляя (3.7)–(3.11) в (3.12)–(3.19) и используя определение матриц жесткости \mathbf{A} , \mathbf{D} для пластины через \bar{Q}_{ij} , $i, j = 1, 2, 6$ (см. [14, 15]), получаем эти силы и моменты.

Перепишем формулу для общей энергии пластины в виде:

$$U = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D} \mathbf{k} \right) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{xv} u + \bar{N}_{yv} v) dC_1, \quad (3.20)$$

где вектор-столбцы $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, \mathbf{k} есть, соответственно, 2D-деформации и кривизны срединной поверхности пластины.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left. \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \right|_{z=0},$$

$$\mathbf{k} = \left. \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \end{pmatrix} \right|_{z=0}.$$

Первый интеграл в (3.20) получается из (3.3) (с учетом (3.1) и (3.2)) после интегрирования по толщине.

Вариация энергии (3.20) будет

$$\delta U = \int_{\Gamma} \delta \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D} \mathbf{k} \right) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{xv} \delta u + \bar{N}_{yv} \delta v) dC_1. \quad (3.21)$$

Используя известное соотношение [8]

$$\delta \pi_{ply}^V = \frac{\partial \pi_{ply}^V}{\partial v_{j,i}} \delta v_{j,i} = \sigma_{ij}^p \delta v_{j,i}$$

и подставляя в него (3.1) для вычисления производных перемещений, после интегрирования по толщине пластины получаем вариацию потенциальной энергии деформации на единицу недеформированной площади срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \delta \pi = & N_{xx} \delta u_{,x} + N_{yy} \delta u_{,y} + N_{xy} (\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) + N_{xz} \delta w_{,x} + \\ & + N_{yz} \delta w_{,y} - M_{xx} \delta w_{,xx} - M_{yy} \delta w_{,yy} - 2M_{xy} \delta w_{,xy}. \end{aligned}$$

Далее обозначим n_x, n_y компоненты нормального вектора к граничному контуру для Γ . Используя их, введем x, y, z компоненты погонных сил N_{xv}, N_{yv}, N_{zv} , погонных моментов, и некоторые другие величины:

$$\begin{aligned} N_{xv} &= n_x N_{xx} + n_y N_{yx}, & M_{xv} &= n_x M_{xx} + n_y M_{yx}, \\ N_{yv} &= n_x N_{xy} + n_y N_{yy}, & M_{yv} &= n_x M_{xy} + n_y M_{yy}, \\ N_{zv} &= n_x N_{xz} + n_y N_{yz}, & M_{zv} &= n_x M_{xz} + n_y M_{yz}, \end{aligned}$$

$$V_z = (M_{xx,x} + M_{xy,y})n_x + (M_{xy,x} + M_{yy,y})n_y + N_{zv},$$

$$M_{vs} = -M_{xv}n_x + M_{yv}n_y.$$

Здесь и далее мы используем x и y компоненты нормали n_x, n_y к недеформированному граничному контуру, а также соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} = n_x \frac{\partial}{\partial n} - n_y \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = n_y \frac{\partial}{\partial n} + n_x \frac{\partial}{\partial s},$$

где n, s – нормальное и тангенциальное направления к граничному контуру. Интегрируя (3.21) по частям и используя теорему Остроградского–Гаусса, получаем вариацию общей энергии пластины:

$$\begin{aligned} \delta U = & - \int_{\Gamma} \left[\begin{aligned} & (N_{xx,x} + N_{xy,y})\delta u + (N_{xy,x} + N_{yy,y})\delta v + \\ & (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y})\delta w \end{aligned} \right] d\Gamma + \\ & + \int_{C_1} \left[\begin{aligned} & (N_{xv} - \bar{N}_{xv})\delta u + (N_{yv} - \bar{N}_{yv})\delta v + (V_z - \bar{F}_z)\delta w - \\ & - (M_v - \bar{M}_v)\delta w_{,n} - (M_{vs} - \bar{M}_{vs})\delta w_{,s} \end{aligned} \right] dC_1 + \\ & + \int_{C_2} [N_{xv}\delta u + N_{yv}\delta v + V_z\delta w - M_v\delta w_{,n} - M_{vs}\delta w_{,s}] dC_2, \end{aligned}$$

где для общности (см. [8]) записаны возможные значения моментов \bar{M}_v, \bar{M}_{vs} на C_1 (вычисляемые через возможные заданные на границе моменты $\bar{M}_{xv}, \bar{M}_{yv}$), а \bar{F}_z – возможная заданная z -сила на границе:

$$\bar{M}_v = n_x \bar{M}_{xv} + n_y \bar{M}_{yv}, \quad \bar{M}_{vs} = -\bar{M}_{xv}n_x + \bar{M}_{yv}n_y.$$

Это приводит (см. [8], § 8.2) к принципу виртуальных работ вида:

$$\begin{aligned} \delta U = & - \int_{\Gamma} \left[\begin{aligned} & (N_{xx,x} + N_{xy,y})\delta u + (N_{xy,x} + N_{yy,y})\delta v + \\ & (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y})\delta w \end{aligned} \right] d\Gamma + \\ & + \int_{C_1} \left[\begin{aligned} & (N_{xv} - \bar{N}_{xv})\delta u + (N_{yv} - \bar{N}_{yv})\delta v + \\ & + ((V_z + M_{vs,s}) - (\bar{F}_z + \bar{M}_{vs,s}))\delta w - (M_v - \bar{M}_v)\delta w_{,n} \end{aligned} \right] dC_1 - \\ & - (M_{vs} - \bar{M}_{vs})\delta w|_{C_1} + \int_{C_2} [N_{xv}\delta u + N_{yv}\delta v + V_z\delta w - M_v\delta w_{,n}] dC_2 - \\ & - M_{vs}\delta w|_{C_2} = 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

где запись $(...)|_{C_1}$ означает разность на концах интервала. При выполнении условия защемления на части C_2 граничного контура

$$\delta u = \delta v = \delta w = \delta w_{,n} = 0$$

интеграл по C_2 и следующий за ним член исчезают. Везде далее это условие считается выполненным.

Тогда стационарность U по перемещениям ведет к уравнениям равновесия пластины в Γ :

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0, \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0, \\ M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где в соответствии с (3.10), (3.11), (3.15), (3.16):

$$\begin{aligned} N_{xz} &= N_{xx} w_{,x} + N_{xy} w_{,y}, \\ N_{yz} &= N_{yx} w_{,x} + N_{yy} w_{,y}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Третье уравнение в (3.23) после подстановки (3.24) ведет к известному уравнению z -равновесия пластины фон Кармана:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0.$$

При отсутствии \bar{F}_z , \bar{M}_v , \bar{M}_{vs} линейные силовые краевые условия на контуре C_1 по силам в направлениях x , y и условия закрепления на нем следуют из (3.22):

$$\begin{aligned} N_{xv} - \bar{N}_{xv} &= 0, \\ N_{yv} - \bar{N}_{yv} &= 0, \\ \delta w &= \delta w_{,n} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

В случае отсутствия закрепления по $w, w_{,n}$ на C_1 третья строка в (3.25) заменяется на

$$\begin{aligned} (V_z + M_{vs,s}) - (\bar{F}_z + \bar{M}_{vs,s}) &= 0, \\ M_v - \bar{M}_v &= 0. \end{aligned}$$

4. Статический вариационный принцип (теорема о дополнительной энергии).

Рассмотрим статический вариационный принцип, описывающий равновесие пластины при закритических прогибах после потери устойчивости.

Плотность дополнительной энергии слоя $\pi_{c_ply}^V$ и плотность потенциальной энергии деформации слоя π_{ply}^V удовлетворяют преобразованию Лежандра (в случае, если градиент перемещений может быть выражен через первый тензор напряжений Пиола):

$$\pi_{c_ply}^V(\sigma_{mp}^p) = \sigma_{kl}^p v_{l,k} - \pi_{ply}^V(v_{i,j}). \quad (4.1)$$

Используя (3.1), получаем:

$$\sigma_{kl}^p v_{l,k} = \sigma_{xx}^p (u_{,x} - z w_{,xx}) + \sigma_{yy}^p (v_{,y} - z w_{,yy}) + \sigma_{xy}^p (u_{,y} + v_{,x} - 2z w_{,xy}) + \sigma_{xz}^p w_{,x} + \sigma_{yz}^p w_{,y}.$$

Последний член из соотношения (4.1) может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \pi_{c_{ply}}^V = & \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^p) \left(u_{,x} - z w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + \frac{1}{2}(\sigma_{yy}^p) \left(v_{,y} - z w_{,yy} + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^p) (u_{,y} + v_{,x} - 2z w_{,xy} + w_{,x} w_{,y}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Вычитая (4.2) из (4.1), получаем плотность дополнительной энергии слоя:

$$\begin{aligned} \pi_{c_{ply}}^V = & \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^p) \left(u_{,x} - z w_{,xx} - \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + \frac{1}{2}(\sigma_{yy}^p) \left(v_{,y} - z w_{,yy} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^p) (u_{,y} + v_{,x} - 2z w_{,xy} - w_{,x} w_{,y}) + (\sigma_{xz}^p) w_{,x} + (\sigma_{yz}^p) w_{,y}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Интегрируя (4.3) по z по толщине пластины, получаем дополнительную энергию на единицу недеформированной площади срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \pi_c = & \frac{1}{2} N_{xx} \left(u_{,x} - \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) + \frac{1}{2} N_{yy} \left(v_{,y} - \frac{1}{2} w_{,y}^2 \right) + \frac{1}{2} N_{xy} (u_{,y} + v_{,x} - w_{,x} w_{,y}) + \\ & + N_{xz} w_{,x} + N_{yz} w_{,y} + \frac{1}{2} M_{xx} (-w_{,xx}) + \frac{1}{2} M_{yy} (-w_{,yy}) + \frac{1}{2} M_{xy} (-2w_{,xy}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Интегрируя (3.10), (3.11) по толщине пластины, имеем:

$$w_{,x} = \frac{N_{yy} N_{xz} - N_{xy} N_{yz}}{N_{xx} N_{yy} - N_{xy}^2} = \gamma_1(N_{ij}), \quad (4.5)$$

$$w_{,y} = \frac{N_{xx} N_{yz} - N_{xy} N_{xz}}{N_{xx} N_{yy} - N_{xy}^2} = \gamma_2(N_{ij}). \quad (4.6)$$

Теперь определим вектор-столбцы:

$$\mathbf{N} = (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy})^T, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M} = (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})^T. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.5)–(4.8) в (4.4), получаем окончательное выражение для плотности дополнительной энергии на единицу недеформированной срединной поверхности:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} + \frac{1}{2} N_{xz} \gamma_1(N_{ij}) + \frac{1}{2} N_{yz} \gamma_2(N_{ij}).$$

Функции γ_1, γ_2 в (4.5), (4.6) несовместны в случае произвольного напряженного состояния. Они становятся соответствующими производными прогибов для реального напряженного состояния.

Для формирования дополнительного вариационного функционала U_c и в целях большей общности учтем возможные заданные на S_1 z -силу \bar{F}_z и x, y моменты $\bar{M}_{vx}, \bar{M}_{vy}$. После этого перепишем функционал потенциальной энергии конструкции (3.3) в виде:

$$U = \int_{\Gamma} \pi(x, y) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{xv} u + \bar{N}_{yv} v + \bar{F}_z w - \bar{M}_{vs} w_{,x} - \bar{M}_{vy} w_{,y}) dC_1 \quad (4.9)$$

и подставим в этот функционал соотношение (4.1), проинтегрированное по толщине пластины.

Затем, интегрируя (4.9) по частям и используя теорему Остроградского–Гаусса, получаем функционал общей энергии U в виде:

$$\begin{aligned} U = & - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \int_{C_2} \left[N_{xv} \bar{u} + N_{yv} \bar{v} + (V_z + M_{vs,s}) \bar{w} - M_v \bar{w}_{,n} \right] dC_2 - \\ & - M_{vs} \bar{w} |_{C_2} - \int_{\Gamma} \left[(N_{xx,x} + N_{xy,y}) u + (N_{xy,x} + N_{yy,y}) v + \right. \\ & \left. + (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y}) w \right] d\Gamma + \\ & + \int_{C_1} \left[(N_{xv} - \bar{N}_{xv}) u + (N_{yv} - \bar{N}_{yv}) v + \right. \\ & \left. + (V_z + M_{vs,s} - \bar{F}_z - \bar{M}_{vs,s}) w - (M_v - \bar{M}_v) w_{,n} \right] dC_1 - \\ & - (M_{vs} - \bar{M}_{vs}) w |_{C_1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь и ниже используются геометрические краевые условия на C_2 , а именно то, что значения перемещений и их производных (помеченные чертой сверху) заданы и

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n}.$$

Если уравнения равновесия (3.23), (3.24) и краевые условия на контуре C_1 вида

$$\begin{aligned} N_{xv} - \bar{N}_{xv} = 0, \quad N_{yv} - \bar{N}_{yv} = 0, \\ V_z + M_{vs,s} - \bar{F}_z - \bar{M}_{vs,s} = 0, \quad M_v - \bar{M}_v = 0 \end{aligned}$$

справедливы для вариаций напряженного состояния, тогда дополнительный вариационный функционал U_c , зависящий только от силовых факторов и следующий из (4.10), будет

$$U_c = - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \int_{C_2} \left[N_{xv} \bar{u} + N_{yv} \bar{v} + (V_z + M_{vs,s}) \bar{w} - M_v \bar{w}_{,n} \right] dC_2 - M_{vs} \bar{w} |_{C_2}. \quad (4.11)$$

Вариация π_c будет

$$\begin{aligned} \delta \pi_c = & \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{xx}} \delta N_{xx} + \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{yy}} \delta N_{yy} + \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{xy}} \delta N_{xy} + \\ & + \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{xz}} \delta N_{xz} + \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{yz}} \delta N_{yz} + \\ & + \frac{\partial \pi_c}{\partial M_{xx}} \delta M_{xx} + \frac{\partial \pi_c}{\partial M_{yy}} \delta M_{yy} + \frac{\partial \pi_c}{\partial M_{xy}} \delta M_{xy}. \end{aligned}$$

Необходимо доказать, что для напряженных состояний, удовлетворяющих условиям статического равновесия (3.23), (3.24) и указанным выше статическим краевым условиям на C_1 , действительное напряженное состояние соответствует стационарной точке дополнительного вариационного функционала U_c . Рассматривая (4.10), можно сказать, что перемещения в этом соотношении могут трактоваться как множители Лагранжа при поиске указанной точки стационарности (4.11).

Дополним (4.11) членами, соответствующими уравнениям равновесия с множителями Лагранжа $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$. Тогда, учитывая статические краевые условия, используя теорему Остроградского–Гаусса и интегрируя по частям, получаем:

$$\delta U_c = - \int_{\Gamma} \left[\begin{aligned} & (\delta N^T) A^{-1} N + (\delta M^T) D^{-1} M - \left(\frac{1}{2} \gamma_1^2 + \alpha_{x,x} \right) \delta N_{xx} - \\ & - \left(\frac{1}{2} \gamma_2^2 + \alpha_{y,y} \right) \delta N_{yy} - (\gamma_1 \gamma_2 + \alpha_{x,y} + \alpha_{y,x}) \delta N_{xy} + \\ & + (\gamma_1 - \alpha_{z,x}) \delta N_{xz} + (\gamma_2 - \alpha_{z,y}) \delta N_{yz} + \\ & + \alpha_{z,xx} \delta M_{xx} + \alpha_{z,yy} \delta M_{yy} + 2\alpha_{z,xy} \delta M_{xy} \end{aligned} \right] d\Gamma - \\ - \int_{C_2} \left[\begin{aligned} & (\alpha_x - \bar{u}) \delta N_{xv} + (\alpha_y - \bar{v}) \delta N_{yv} + \\ & + (\alpha_z - \bar{w}) \delta (V_z + M_{vs,s}) - (\alpha_{z,n} - \bar{w}_{,n}) \delta M_v \end{aligned} \right] dC_2 - (\alpha_z - \bar{w}) \delta M_{vs} |_{C_2} = 0. \quad (4.12)$$

Если мы рассмотрим множители Лагранжа как некоторые перемещения, то получим геометрические краевые условия на C_2 :

$$\alpha_x = \bar{u}; \quad \alpha_y = \bar{v}; \quad \alpha_z = \bar{w}; \quad \alpha_{z,n} = \bar{w}_{,n}.$$

Также внутри Γ мы имеем из (4.12) условия совместности для γ_1, γ_2 как функций $N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{xz}, N_{yx}$:

$$\gamma_1 = \alpha_{z,x}, \quad \gamma_2 = \alpha_{z,y} \quad (4.13)$$

и соотношения сила (момент) – перемещение (кривизна):

$$\begin{aligned} A_{11}^{-1} N_{xx} + A_{12}^{-1} N_{yy} + A_{16}^{-1} N_{xy} &= \alpha_{x,x} + \frac{1}{2} \gamma_1^2, \\ A_{12}^{-1} N_{xx} + A_{22}^{-1} N_{yy} + A_{26}^{-1} N_{xy} &= \alpha_{y,y} + \frac{1}{2} \gamma_2^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} A_{16}^{-1} N_{xx} + A_{26}^{-1} N_{yy} + A_{66}^{-1} N_{xy} &= \alpha_{x,y} + \alpha_{y,x} + \gamma_1 \gamma_2, \\ D_{11}^{-1} M_{xx} + D_{12}^{-1} M_{yy} + D_{16}^{-1} M_{xy} &= -\alpha_{z,xx}, \\ D_{12}^{-1} M_{xx} + D_{22}^{-1} M_{yy} + D_{26}^{-1} M_{xy} &= -\alpha_{z,yy}, \\ D_{16}^{-1} M_{xx} + D_{26}^{-1} M_{yy} + D_{66}^{-1} M_{xy} &= -2\alpha_{z,xy}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где A_{jj}^{-1} , D_{jj}^{-1} означают элементы обратных матриц к матрицам жесткости пластины \mathbf{A} , \mathbf{D} . Правая часть (4.14) выглядит подобно правой части (3.2) для $z=0$. Величины $\alpha_{z,xx}$, $\alpha_{z,yy}$, $\alpha_{z,xy}$ могут трактоваться как кривизны пластины. Тогда соотношения (4.13)–(4.15) приводят к условию совместности деформаций в срединной плоскости пластины фон Кармана:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy0}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy0}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (4.16)$$

где ε_{xx0} , ε_{yy0} , ε_{xy0} – компоненты тензора деформации Грина при $z=0$. Непосредственно проверяется, что соотношение (4.16) выполнено при подстановке

$$u = \alpha_x,$$

$$v = \alpha_y,$$

$$w = \alpha_z.$$

Таким образом, мы доказали, что стационарное значение дополнительно вариационного функционала по допускаемым силовым факторам соответствует реализующемуся равновесному решению для композитной пластины при закритическом деформировании.

Заметим, что плотность дополнительной энергии π_c может быть переписана в явном виде как функция только от силовых факторов N_{xx} , N_{xy} , N_{yy} , N_{xz} , N_{yz} , M_{xx} , M_{xy} , M_{yy} :

$$\begin{aligned} \pi_c = & \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} + \frac{1}{2} N_{xz}^2 \frac{N_{yy}}{N_{xx} N_{yy} - N_{xy}^2} + \\ & + \frac{1}{2} N_{yz}^2 \frac{N_{xx}}{N_{xx} N_{yy} - N_{xy}^2} - \frac{N_{xz} N_{yz} N_{xy}}{N_{xx} N_{yy} - N_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Легко проверить, что три последних члена в (4.17) при двустороннем сжатии в главных направлениях потоков 2D-напряжений дают в сумме отрицательную величину.

Отметим в заключение, что учет возможных точек излома на контуре пластины может быть осуществлен так, как указано в работе [8], что не изменит рассмотренный вариационный принцип, но добавит дополнительные условия в этих точках.

5. Пример. В качестве иллюстрации использования полученных теоретических результатов приведем пример длинной тонкой закритически деформируемой композитной пластины с симметричной укладкой, нагруженной сжимающими погонными усилиями постоянной величины N_0 , приложенными вдоль длинных сторон. Пластина расположена в плоскости X – Y с началом координат в центре пластины. Координатная ось Y направлена параллельно длинным сторонам, вдоль которых пластина закреплена по z . Короткие стороны свободны. Напряженно-деформированное состояние пластины приближенно предполагается независимым от координаты y . Удельная дополнительная энергия пластины запишется в виде:

$$\pi_c = \frac{1}{2} A_{11}^{-1} N_{xx}^2 + \frac{1}{2} D_{11}^{-1} M_{xx}^2 + \frac{1}{2} \frac{N_{xz}^2}{N_{xx}},$$

а уравнения равновесия по x и по z в виде:

$$N_{xx,x} = 0,$$

$$M_{xx,xx} + N_{xz,x} = 0.$$

Тогда, учитывая

$$N_{xx} = N_0,$$

$$\alpha_{z,x} = \gamma_1 = \frac{N_{xz}}{N_0},$$

$$u = \alpha_x,$$

$$w = \alpha_z,$$

в результате применения выведенного вариационного принципа получаем из (4.14), (4.15):

$$A_{11}^{-1} N_0 = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2,$$

$$D_{11}^{-1} M_{xx} = -w_{,xx}.$$

Приведенные соотношения, с учетом краевых условий и условий симметрии относительно оси Y , позволяют полностью определить силовые факторы и деформированное состояние пластины.

6. Заключение. Доказана теорема о дополнительной энергии для тонкой композитной пластины при закритическом деформировании. Доказанная теорема составляет содержание статического вариационного принципа возможных напряжений, ведущего к линейным соотношениям для погонных сил/моментов, создаваемым соответствующими компонентами первого тензора напряжений Пиола, и 2D-деформациями/кривизнами. Полученные результаты проиллюстрированы на примере удлиненной композитной пластины.

Результаты работы могут использоваться при построении вычислительных методов анализа закритически деформируемых тонких композитных пластин.

Благодарности. Автор признателен коллегам за плодотворные обсуждения. Автор также признателен рецензенту статьи за ценные замечания и рекомендации, способствовавшие значительному улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Turvey G.J., Marshall I.H., eds.* Buckling and postbuckling of composite plates. Chapman and Hall. 1995.
<https://doi.org/10.1007/978-94-011-1228-4>

2. *Falzon B.G., Aliabadi M.H., eds.* Buckling and postbuckling structures: volume 1. Imperial College Press. 2008. 528 p.
<https://doi.org/10.1142/p506>
3. *Xu J., Zhao Q., Qiao P.* A critical review on buckling and post-buckling analysis of composite structures // *Frontiers in Aerospace Engineering*. 2013. № 2. P. 157–168.
4. *Гришин В.И.* (ред.). Проектирование, расчеты и статические испытания металло-композитных конструкций. М.: Техносфера, 2022. 407 с.
5. *Азиков Н.С., Зинин А.В., Гайдаржи Ю.В., Сайфуллин И.Ш.* Прочность при закритическом деформировании косоугольных композиционных панелей // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2021. № 5. С. 62–71.
6. *Митрофанов О., Осман М.* Проектирование гладких композитных панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом поведении // *Механика композитных материалов*. 2022. Т. 58. № 1. С. 21–42.
<https://doi.org/10.22364/mkm.58.1.02>
7. *Wu Z., Raju G., Weaver P.M.* Postbuckling analysis of variable angle tow composite plates // *Int. J. Solids Struct.* 2013. V. 50. № 10. P. 1770–1780.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.02.001>
8. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
9. *Новожиллов В. В.* Теория упругости. Ленинград.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
10. *Stumpf H.* Die Extremalprinzipie der nichtlinearen Plattentheorie // *ZAMM*. 1975. № 55. P. 110–112.
11. *Wang C.-T.* Principle and application of complementary energy method for thin homogenous and sandwich plates and shells with finite deflections. NACA TN 2620, 1952.
12. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. 2nd edition. Taylor and Francis, Inc., 2003. 858 p.
<https://doi.org/10.1201/b12409>
13. *Ashton J.E., Whitney J.M.* Theory of laminated plates. Technomic Publ., 1970.
14. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
15. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics. 4th edition. Taylor and Francis, Inc., 2016. 700 p.
<https://doi.org/10.1201/b19626>

COMPLEMENTARY ENERGY THEOREM FOR THIN COMPOSITE PLATES IN POSTBUCKLING

S. V. Selyugin^{a, *}

^a *Department of Airplane Design and Certification, Moscow Aviation Institute
(National Research University), Moscow, Russia*

* *e-mail: selyuginSV@mai.ru*

Abstract – The thin composite von Kármán plates in postbuckling are considered. Using the first Piola stress tensor and the displacement gradient tensor, the complementary energy variational theorem is proven. The Kirchhoff assumptions

are adopted. The plate lay-up is symmetric and pointwise. According to the theorem, at the actual stress state of the plate the complementary energy (as a functional of the internal forces and of the moments) reaches its stationary value. The stationary feature of the actual state is valid as compared to other feasible states satisfying the static equilibrium and the static boundary conditions. The theorem is a consent of the static variational principle. The principle leads to the linear relations between forces/moments, created by the corresponding first Piola stress tensor components, and the 2D-strains/curvatures. An illustrative plate example is given.

Keywords: composite plates, postbuckling, complementary energy, first Piola stress tensor

REFERENCES

1. *Turvey G.J., Marshall I.H., eds.* Buckling and Postbuckling of Composite Plates. Chapman and Hall, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1228-4>
2. *Falzon BG, Aliabadi MH, eds.* Buckling and postbuckling structures, volume 1. Imperial College Press, 2008. <https://doi.org/10.1142/p506>
3. *Xu J., Zhao Q., Qiao P.* A critical review on buckling and post-buckling analysis of composite structures // *Frontiers in Aerospace Engineering*. 2013. № 2. P. 157–168.
4. *Grishin V.I., ed.* Design, analysis and static tests of metallic-composite structures (in Russian). Moscow: Technosfera, 2022.
5. *Azikov N.S., Zinin A.V., Gaidarzhi U.V., Saifullin I.S.* Strength of skewed composite panels in postbuckling // *Machine-building and machine-reliability problems*. 2021. № 5. P. 62–71.
6. *Mitrofanov O., Osman M.* Designing of smooth composite panels providing stability and strength at postbuckling behavior // *Mech Compos Mater*. 2022. V. 58. P. 15–30. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10008-3>
7. *Wu Z., Raju G., Weaver P.M.* Postbuckling analysis of variable angle tow composite plates // *Int. J. Solids Struct*. 2013. V. 50. P. 1770–1780. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.02.00>
8. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, 1982.
9. *Novozhilov V.V.* *Theory of elasticity* (in Russian). Leningrad: Sudpromgiz, 1958.
10. *Stumpf H.* Die Extremalprinzipie der nichtlinearen Plattentheorie // *ZAMM*. 1975. № 55. P. 110–112.
11. *Wang C.-T.* Principle and application of complementary energy method for thin homogeneous and sandwich plates and shells with finite deflections. NACA TN 2620, 1952.
12. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. 2nd edition. Taylor and Francis, Inc., 2003. 831 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
13. *Ashton J.E., Whitney J.M.* Theory of laminated plates. Technomic Publ. 1970.
14. *Vasilyev VV.* Mechanics of structures made of composite materials (in Russian). Mashinostroenie. 1988.
15. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics. 4th edition. Taylor and Francis, Inc., 2016. 425 p. <https://doi.org/10.1201/b19626>