

УДК 539.3

О ВЗАИМОСВЯЗИ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ОПТИМИЗАЦИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

© 2024 г. А. Ю. Федоров^{а,*}, В. П. Матвеев^{а,**}

^аИнститут механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

^{*}e-mail: fedorov@icmm.ru, ^{**}e-mail: mvp@icmm.ru

Поступила в редакцию 02.08.2024 г.

После доработки 10.08.2024 г.

Принята к публикации 12.08.2024 г.

В работе приводятся результаты двух направлений исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек упругих тел, а именно: смены типа граничных условий; края поверхности контакта различных материалов. Результатом первого направления являются решения задач теории упругости в окрестности особых точек, из которых следует возможность бесконечных напряжений в этих точках. Второе направление связано с анализом численными и экспериментальными методами напряженного состояния в окрестности особых точек, которые, как правило, имеют место при моделировании реальных объектов и являются потенциальными зонами концентрации напряжений. Основным содержанием работы является установление на основе сопоставления результатов двух направлений взаимосвязи вариантов с минимальным уровнем напряжений в окрестности особых точек с результатами о характере сингулярности напряжений в этих точках.

Ключевые слова: упругость, сингулярность напряжений, концентрация напряжений, оптимизация геометрии, распределение напряжений на границе раздела

DOI: 10.31857/S1026351924050013, EDN: UBYNIB

1. Введение. Одним из результатов классической теории упругости является возможность существования сингулярных решений, связанных с появлением бесконечных значений напряжений в особых точках поверхности, где имеет место нарушение ее гладкости, происходит смена типа краевых условий, контактируют различные материалы, а также внутри тела, в точках нарушения условия гладкости поверхности контакта различных материалов. Примером теоретических обоснований появления сингулярных решений является работа [1], где было показано, что для уравнений линейной теории упругости в окрестности угловых точек имеет место решение вида

$$\sigma \sim \sum_{n=1} K_n f_n r^{\lambda_n - 1}, \text{ при } r \rightarrow 0, \quad c < \operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_n < \dots \quad (1.1)$$

или более сложное, с логарифмическими составляющими в случае кратных точек спектра λ_n . Здесь r — расстояние до угловой точки, K_n — коэффициенты интенсивности напряжений; f_n — функции углового распределения поля напряжения σ в окрестности угловой точки, в плоском случае зависящие от одной полярной угловой переменной φ при этом $c = 0$, в пространственном — от двух сферических координат φ, θ при $c = -0.5$. Из представления решения (1.1) следует, что если среди λ_n имеется хотя бы одно, удовлетворяющее условию $\operatorname{Re} \lambda_n < 1$, то напряжения стремятся к бесконечности при r , стремящимся к нулю.

Изучением поведения напряжений в окрестностях особых точек занимаются многие исследователи. Для двумерных и трехмерных задач линейной теории упругости рассмотрены различные варианты особых точек. Достаточно полно результаты, достигнутые в этой области, представлены в обзорных работах [2–6].

Особые точки и связанные с ними сингулярные решения с одной стороны представляют теоретический интерес, а с другой стороны, они достаточно часто встречаются в расчетных схемах прикладных задач и их окрестности, как правило, являются зонами ярко выраженной концентрации напряжений. В настоящей работе представлен обзор результатов решения оптимизационных задач, связанных с поиском вариантов, обеспечивающих минимальный уровень концентрации напряжений в окрестности особых точек. Основным содержанием работы является установление взаимосвязи оптимальных решений в окрестности особых точек с характером сингулярности напряжений в этих точках.

2. Точка поверхности со сменой типа граничных условий. Примером задачи, в которой есть особые точки, где имеет место смена типа граничных условий, является представленный на рис. 1, а цилиндр, находящийся под действием массовых сил с неподвижной внешней поверхностью и свободной от нагрузок внутренней и торцевых поверхностями. Для данного цилиндра была решена задача поиска геометрии торцевых поверхностей, обеспечивающих минимальные напряжения в окрестности особой точки — пересечение торцевой и внешней поверхности [7]. Оптимизационные задачи решались при ограничениях, обеспечивающих поиск геометрии в пределах заданных размеров h, l . Результатом решения оптимизационных задач являются геометрии для соответствующих ограничений h, l . Общим свойством этих геометрий является угол сопряжения свободной торцевой и внешней неподвижной поверхностей — α .

Аналогичная по постановке задача была рассмотрена в работах [8, 9], где для цилиндра, представленного на рис. 1, б, необходимо было найти геометрию боковой поверхности в окрестности точек, где имеет место смена типа граничных условий, при ограничениях h, l , за пределы которых не может выходить искомая геометрия. Были рассмотрены два варианта оптимизационной задачи. В первом — геометрия должна обеспечивать минимальную

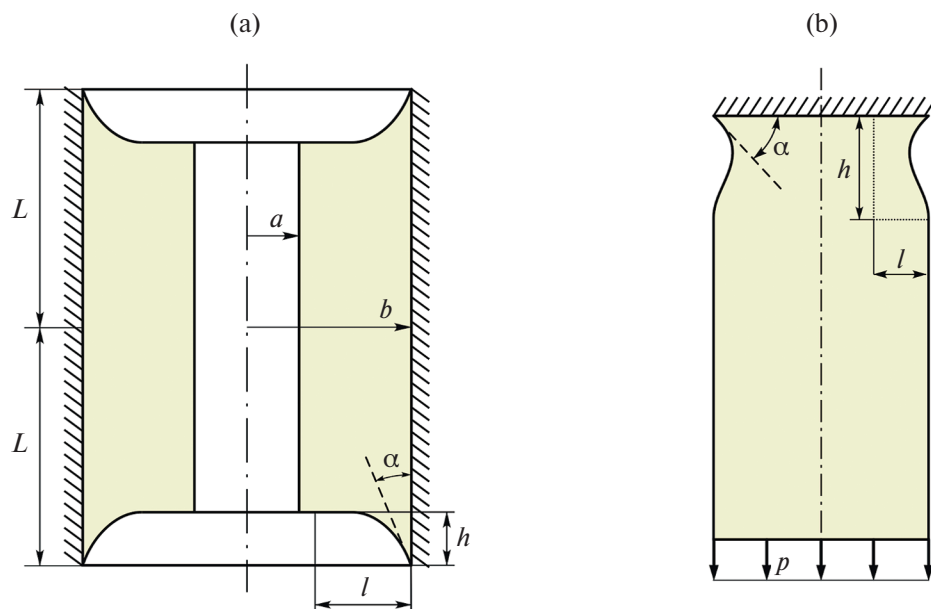


Рис. 1. Расчетные схемы для цилиндров, находящихся под действием массовых сил (а) и растягивающих усилий (б).

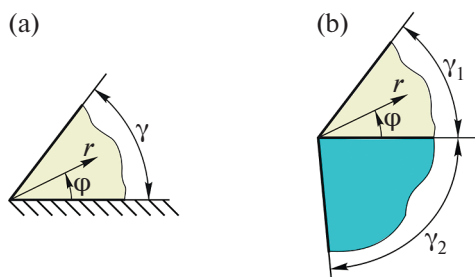


Рис. 2. Однородный (а) и составной (б) плоские клинья в полярных координатах.

интенсивность касательных напряжений, во втором варианте — наименьшее отклонение отрывных напряжений на закрепленном торце от их среднего значения. Основным результатом решения оптимизационных задач является то, что все найденные геометрии для соответствующего значения коэффициента Пуассона материала имеют одинаковый угол сопряжения свободной от нагрузок и неподвижной поверхностей — α .

Для рассматриваемого типа особой точки вывод о наличии сингулярных решений может быть сделан на основе анализа собственных решений для клина (рис. 2, а), одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений [10]:

$$u_r^i = r^{\lambda_i} \xi_r^i(\varphi), \quad u_\varphi^i = r^{\lambda_i} \xi_\varphi^i(\varphi).$$

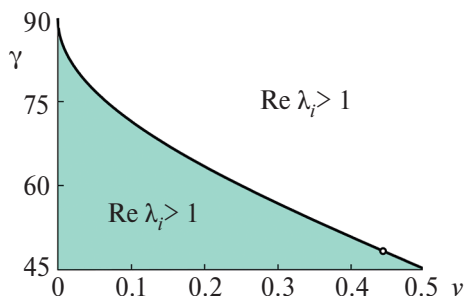


Рис. 3. Области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений (угол γ в градусах).

Здесь u_r^i, u_ϕ^i — компоненты вектора перемещений в полярной системе координат; ξ_r^i, ξ_ϕ^i — собственные функции; λ_i — собственные значения.

При наличии среди собственных значений хотя бы одного, удовлетворяющего условию $\text{Re } \lambda_i < 1$, напряжения в вершине клина принимают бесконечные значения. Для данного типа особой точки собственные значения λ_i определяются значением угла раствора клина γ и значением коэффициента Пуассона материала ν . На рис. 3 в области параметров γ, ν приведена кривая, которая для первого собственного значения разделяет области решений с сингулярностью напряжений ($\text{Re } \lambda_i < 1$) и решений без сингулярности напряжений ($\text{Re } \lambda_i \geq 1$).

Для рассматриваемого типа особой точки взаимосвязь сингулярных решений с геометриями, обеспечивающими минимальный уровень концентрации напряжений в окрестности особых точек, определяется следующим условием. Для оптимальных геометрий угол сопряжения свободной и неподвижной поверхностей вместе с коэффициентом Пуассона материала являются одной из точек на кривой (рис. 3), разделяющей решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

Результат о взаимосвязи сингулярных решений и концентрации напряжений в окрестности особой точки в работе [11] получил экспериментальное подтверждение. Цилиндрические образцы из полиметилметакрилата марки СТ-1 (рис. 4, а) были испытаны при растяжении и консольном изгибе. Образцы имели выточки на боковой поверхности с разными углами сопряжения свободной боковой поверхности и стальной поверхностью, к которой приклеены образцы. Необходимо отметить, что модуль упругости стали почти на два порядка больше модуля упругости полиметилметакрилата, то есть в данном случае верхнюю поверхность цилиндрического образца можно рассматривать как неподвижную. На рис. 4, б представлены зависимости усилия отрыва от величины угла α . Результаты эксперимента демонстрируют, что максимальные усилия отрыва, которые можно полагать реализуются при минимальной концентрации напряжений, имеют место при угле $\alpha \approx 48^\circ$, который вместе со значением коэффициента Пуассона полиметилметакрилата ($\nu \approx 0.45$) дает точку на кривой, разделяющей решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

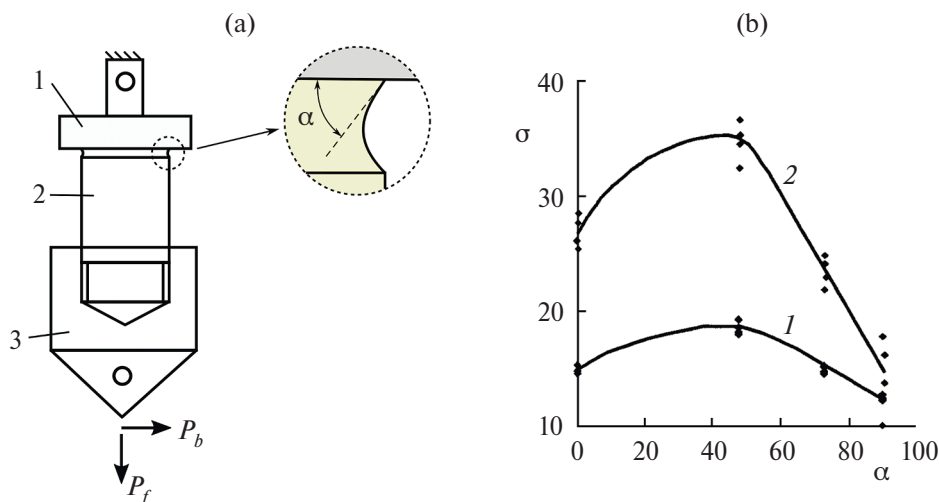


Рис. 4. Схема испытаний: 1 — стальной грибок, 2 — образец, 3 — нижний захват (а); зависимость прочности соединения σ (в МПа) от угла стыка α (в градусах) при нормальном отрыве (1) и при консольном изгибе (2) (б).

3. Край поверхности соединения различных материалов. В расчетных схемах прикладных задач теории упругости достаточно часто имеет место тип особой точки, представляющий край поверхности соединения различных материалов. Поведение напряжений в окрестности данной особой точки может быть проанализировано на основе анализа собственных решений для составного клина (рис. 2, б), боковые грани которого свободны от напряжений, а на поверхности соединения различных материалов выполняются условия идеального контакта [12]. Собственные значения, определяющие характер сингулярности напряжений в окрестности особой точки, зависят в данном случае от углов раствора γ_1, γ_2 частей составного клина, коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 и отношения модулей упругости E_2/E_1 .

В работе [8] была рассмотрена задача для двухслойного цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления (рис. 5). Решалась задача оптимизации, связанная с поиском геометрии торцевых поверхностей в окрестности особой точки — края поверхности соединения различных материалов — обеспечивающей минимальное значение интенсивности касательных напряжений в окрестности особой точки. Ограничения h, l_1, l_2 определяют допустимую область изменения геометрии. Результатом решения оптимизационных задач являются геометрии торцевых поверхностей для разных комбинаций механических характеристик материалов и ограничений h, l_1, l_2 . Для каждой из комбинаций механических характеристик материалов найденные оптимальные геометрии имеют одинаковые углы сопряжения α_1, α_2 в особой точке свободных от нагрузок поверхностей и поверхности соединения материалов.

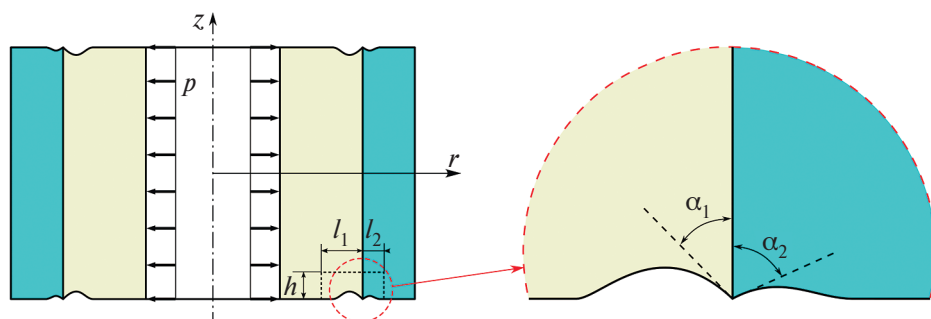


Рис. 5. Расчетная схема двухслойного полого цилиндра.

Взаимосвязь полученных результатов с сингулярными решениями определяется следующим образом. Для составного клина для каждой из комбинаций значений ν_1 , ν_2 , E_2/E_1 в области параметров γ_1 , γ_2 может быть построена кривая, разграничивающая области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Углы оптимальных поверхностей α_1 , α_2 соответствуют точке на этой кривой.

На основе анализа решений для составного клина в работе [13] было экспериментально продемонстрировано, что комбинации значений углов и механических характеристик материалов, соответствующие несингулярному решению задачи о собственных значениях в вершине составного клина обеспечивают «малонапряженное состояние в окрестности края поверхности контакта составного тела». Аналогичные результаты устранения концентрации напряжений в окрестности края поверхности контакта соединения различных материалов на основе выбора геометрий, при которых отсутствуют сингулярные решения, приведены в работах [14–18]. Здесь следует выделить работу [14], где показано, что среди геометрий с углами из области решений без сингулярности напряжений наименьший уровень напряжений вдоль поверхности контакта разных материалов наблюдается для геометрии с углом, близким к критическому (разделяющим решения с сингулярностью напряжений и без нее).

В работе [19] на примере соединения двух трапециевидных пластин из различных материалов (рис. 6) в результате решения оптимизационной задачи также было показано, что минимальный уровень напряжений на поверхности соединения материалов соответствует границе между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

В работе [20] проанализирована неединственность значений углов, обеспечивающих оптимальный вариант. Был рассмотрен составной цилиндр, представленный на рис. 7, а. Рассматривалась задача поиска оптимальной формы боковой поверхности при использовании в качестве изменяемой части боковой поверхности дуг окружности. В качестве критериев оптимизации использовались значения интенсивности напряжений в одной из составных частей цилиндрического тела, либо условие, обеспечивающее наименьшее отклонение напряжений по поверхности соединения от их среднего значения на этой поверхности. В одном из рассмотренных вариантов были следующие

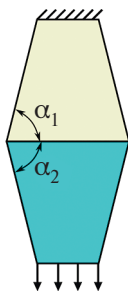
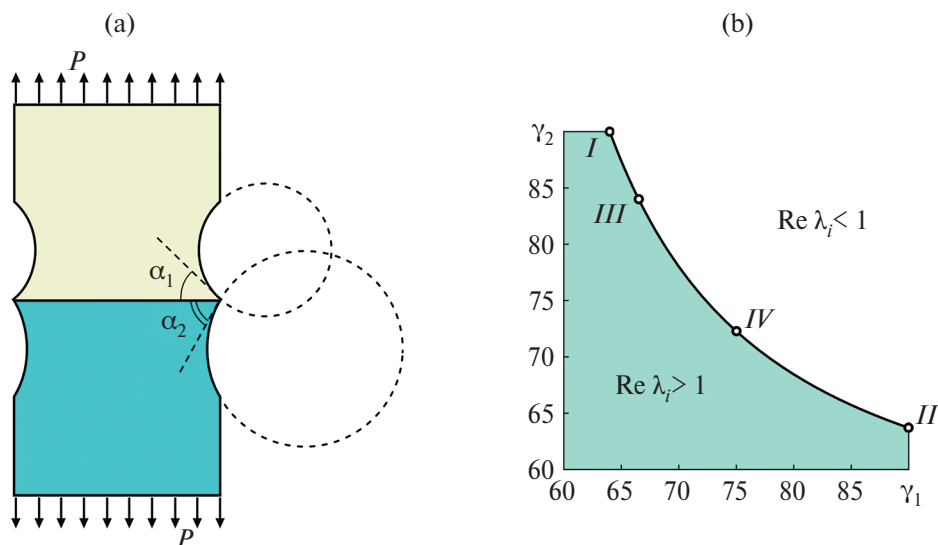


Рис. 6. Соединение двух трапециевидных пластин.

Рис. 7. Расчетная схема для составного цилиндра (а); кривая, разделяющие решения с сингулярностью и без сингулярности в плоскости параметров γ_1 и γ_2 (для $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $E_2/E_1 = 10$) (б).

значения упругих постоянных: $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $E_2/E_1 = 10$. На рис. 7, б для этого варианта представлена кривая, разделяющая в области значений γ_1 , γ_2 решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

Рассмотрены различные варианты оптимизационных задач. Сначала оптимизацию геометрии провели только для верхней, менее жесткой, части составного цилиндра. Для рассмотренных критериев оптимизации была получена одна оптимальная геометрия с углом $\gamma_1 = 64.05^\circ$ (точка I на рис. 7, б). Другая серия расчетов была выполнена, когда оптимизировалась геометрия нижней, более жесткой, части составного цилиндра. В этом случае параметры оптимальных решений определяют точку II на рис. 7, б. В следующей серии расчетов оптимизируется геометрия боковых поверхностей верхней и нижней частей составного цилиндра. В этой серии использовались три варианта критериев оптимизации. В первом варианте рассмотрено

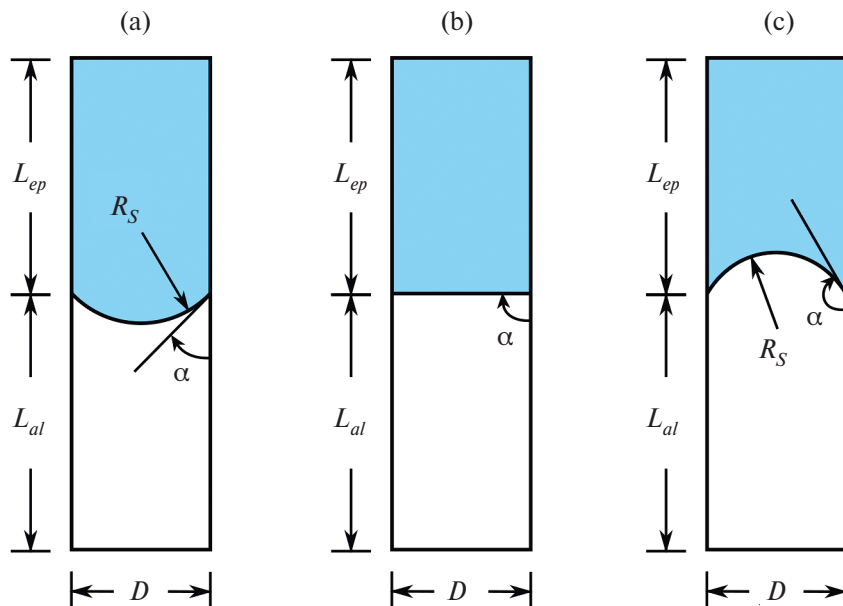


Рис. 8. Геометрии образцов.

использование максимального значения интенсивности напряжений в верхней (менее жесткой) части составного цилиндра. В этом случае значения углов γ_1 и γ_2 у оптимальной поверхности определяют точку III на рис. 7, b. При использовании максимального значения интенсивности напряжений в нижней (более жесткой) части составного цилиндра значения углов γ_1 и γ_2 оптимальной поверхности соответствуют точке I на рис. 7, b. В третьем варианте использовалось условие, обеспечивающее наименьшее отклонение напряжений по поверхности идеального соединения от их среднего значения на этой поверхности. В этом случае значения углов γ_1 и γ_2 у оптимальной поверхности определяют точку IV на рис. 7, b.

При анализе взаимосвязи сингулярных решений и концентрации напряжений в окрестности особых точек представляет интерес работа [21], где приведены экспериментальные результаты различных вариантов соединения двух материалов (рис. 8). Сравнивались усилия разрушения соединения цилиндрических образцов из алюминия 6061T6 и эпоксидного клея Epox 815 при разных углах сферической поверхности контакта. Ключевым параметром для этой поверхности контакта является угол α , определяющий геометрию в окрестности особой точки. В работе показано существование угла, при котором обеспечивается наибольшая прочность соединения. Данный угол, в совокупности с механическими характеристиками алюминия и эпоксидного клея, определяет границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений, но такое обобщение в работе отсутствует.

4. Сети поверхностных трещин. На поверхности материалов могут возникать не только одиночные трещины, но и сети трещин, которые встречаются

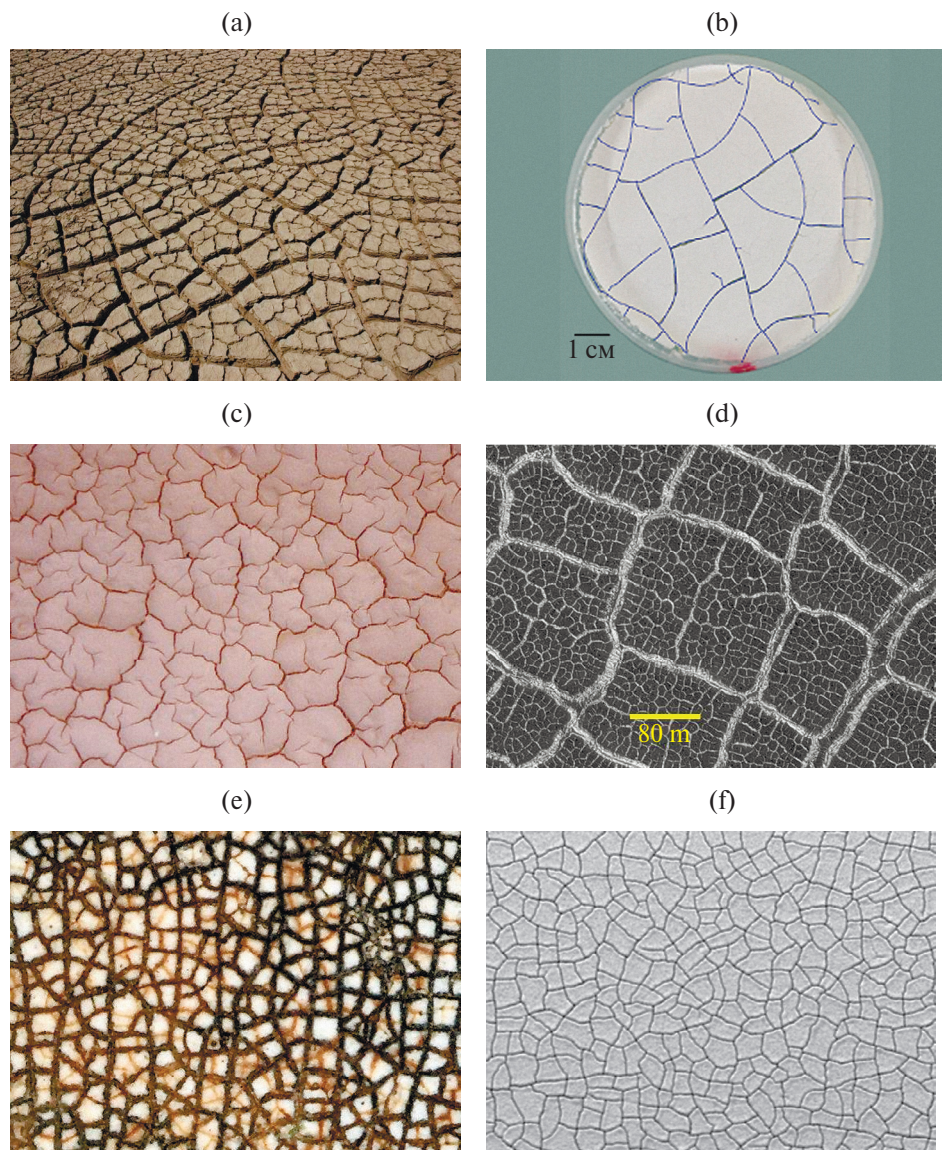


Рис. 9. Фотографии поверхностных трещин: треснувшая земля в Rann of Kutch (Индия) (a); высушенный водный раствор кукурузного крахмала [29] (b); поверхность высохшего солончака (Сицилия) (c); трещины на дне ударного кратера на Марсе [30] (d); старая керамическая поверхность (e); поверхность образца из жаропрочной стали после испытания на термическую усталость [26] (f).

как на природных, так и на техногенных объектах. На рис. 9 показаны типичные картины поверхностных трещин. Структура трещин имеет повторяющиеся систематические рисунки вне зависимости от материала, что привлекает

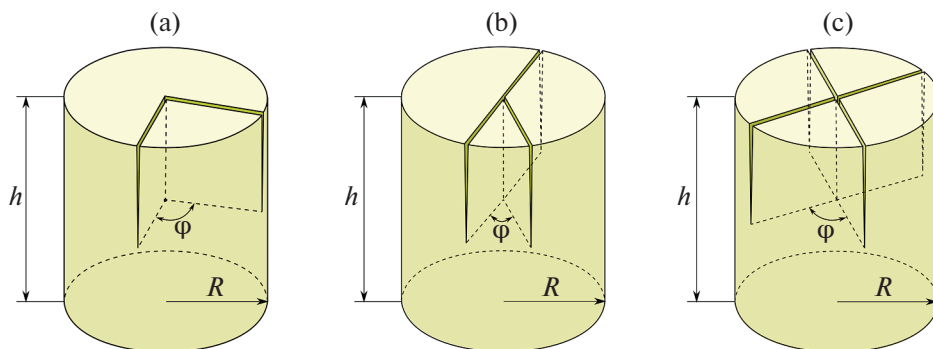


Рис. 10. Расчетная схема пересечения двух (а), трех (б) и четырех (с) клиновидных трещин.

внимание многих исследователей. Опубликовано большое количество работ, связанных с изучением механизмов распространения трещин на поверхности различных материалов, однако до сих пор нет объяснений, почему получается тот или иной узор.

В работах [22–24] отмечается, что сети трещин в основном состоят из четырех типов многоугольных фрагментов: треугольников, четырехугольников, пятиугольников и шестиугольников, при этом наиболее распространены варианты пересечений трех или четырех трещин. Некоторые исследователи отметили следующую закономерность в точках пересечения трех и четырех трещин на поверхности, а именно: три трещины чаще сходятся под углом $\sim 120^\circ$ [24–27], а четыре трещины сходятся под углом $\sim 90^\circ$ [24–26, 28].

В работе [31] рассмотрен вариант взаимосвязи сингулярных решений с картиной поверхностных трещин на основе пространственной модели клиновидных трещин, представляющей пересечение двух, трех, четырех клиновидных трещин, вершина пересечения которых является особой точкой (рис. 10). Получено сопоставление результатов численного моделирования пересечения двух, трех, четырех клиновидных трещин с реальными картинами сеток поверхностных трещин. Для двух трещин, пересекающихся под углом φ (рис. 10, а), обнаружена корреляция между значением угла φ , при котором достигается максимум средней плотности энергии деформаций в малой сфере, центр которой расположен в особой точке и величиной угла излома линии сетки трещин на поверхности бетона. При этом минимум средней плотности энергии деформаций имеет место при минимальном значении показателя, определяющего характер сингулярности напряжений.

Аналогично для трех трещин рассмотрены две наиболее распространенные конфигурации: Y и T. Установлено, что для T-конфигурации максимуму средней плотности энергии деформаций и наименьшему значению показателя сингулярности напряжений отвечает угол $\varphi = 90^\circ$, что полностью соответствует симметричной T-конфигурации, встречающейся в реальных картинах поверхностных трещин. Для X-конфигурации из четырех трещин выявлено, что максимум средней плотности энергии деформаций и наименьшее значение

показателя сингулярности имеют место, когда все углы между четырьмя трещинам равны. Это также совпадает с закономерностью, наблюдаемой в реальных картинах трещин.

5. Заключение. В работе представлены результаты классической теории упругости, связанные с построением решений в окрестности особых точек, где имеет место смена типа граничных условий, край поверхности контакта различных материалов, и результаты решения прикладных задач поиска оптимальных вариантов с минимальным уровнем концентрации напряжений в окрестности особых точек. Основным результатом работы является констатация взаимосвязи оптимальных решений в окрестности особых точек с характером сингулярности напряжений в этих точках, которая заключается в следующем: углы, определяющие в окрестности особых точек геометрию оптимального варианта, и упругие постоянные материалов в соответствующей задаче теории упругости для окрестности особых точек определяют границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Кроме этого, приводятся результаты, позволяющие рассматривать для поверхностных трещин вариант взаимосвязи результатов с сингулярным поведением напряжений со структурой поверхностных трещин.

Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
2. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57. № 4. P. 251–297.
<https://doi.org/10.1115/1.1762503>
3. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57. № 5. P. 385–439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>
4. *Paggi M., Carpinteri A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Appl. Mech. Rev. 2008. V. 61. № 2. 020801. <https://doi.org/10.1115/1.2885134>
5. *Carpinteri A., Paggi M.* Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today // Eng. Fract. Mech. 2009. V. 76. № 12. P. 1771–1784. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.03.012>
6. *Pook L.P.* A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2013. V. 36. № 8. P. 699–723. <https://doi.org/10.1111/ffe.12074>
7. *Колтунов М.А., Кузнецов Г.Б., Матвеев В.П., Трояновский И.Е., Шардаков И.Н.* Оптимизация геометрии осесимметричного тела при наличии смены типа граничных условий в угловой точке // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький. 1978. Вып. 9. С. 55–60.
8. *Борзенков С.М., Матвеев В.П.* Оптимизация упругих тел в окрестности особых точек // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 93–100.
9. *Matveyenko V.P., Borzenkov S.M.* Semianalytical singular element and its application to stress calculation and optimization // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1996. V. 39. № 10. P. 1659–1680.

- [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960530\)39:10%3C1659::AID-NME919%3E3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960530)39:10%3C1659::AID-NME919%3E3.0.CO;2-W)
10. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
 11. Ковров В.Н., Золотухин В.Г. Экспериментальное исследование зависимости адгезионной прочности металлополимерного соединения от геометрии контактной зоны // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 4. С. 493–498.
 12. Dempsey J.P., Sinclair G.B. On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // J. Elasticity. 1981. V. 11. P. 317–327. <https://doi.org/10.1007/BF00041942>
 13. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
 14. Wu Z. Design free of stress singularities for bi-material components // Compos. Struct. 2004. V. 65. № 3–4. P. 339–345. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.11.009>
 15. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design // Exp. Mech. 2004. V. 44. P. 608–615. <https://doi.org/10.1007/BF02428250>
 16. Xu L.R., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // Exp. Mech. 2004. V. 44. P. 616–621. <https://doi.org/10.1007/BF02428251>
 17. Wang P., Xu L.R. Convex interfacial joints with least stress singularities in dissimilar materials // Mech. Mater. 2006. V. 38. № 11. P. 1001–1011. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.10.002>
 18. Baladi A., Arezoodar A.F. Dissimilar materials joint and effect of angle junction on stress distribution at interface // Int. J. Mech. Aero. Indust. Mechatron. Manufacturing Eng. 2011. V. 5. № 7. P. 1184–1187.
 19. Park J., Anderson W.J. Geometric optimization of two bonded wedges involving stress singularities // Compos. Eng. 1994. V. 4. № 9. P. 901–912. [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(94\)90034-5](https://doi.org/10.1016/0961-9526(94)90034-5)
 20. Fedorov A.Y., Matveenko V.P. Optimization of geometry and mechanical characteristics of elastic bodies in the vicinity of singular points // Acta Mechanica. 2018. V. 229. P. 645–658. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1990-5>
 21. Wetherhold R.C., Dargush G.F. Improvement of adhesive strength at a bi-material interface by adjusting the interface angles at the free edge // Theor. Appl. Fract. Mech. 2015. V. 77. P. 69–73. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.02.002>
 22. Velde B. Structure of surface cracks in soil and muds // Geoderma. 1999. V. 93. № 1–2. P. 101–124. [https://doi.org/10.1016/S0016-7061\(99\)00047-6](https://doi.org/10.1016/S0016-7061(99)00047-6)
 23. Tang C., Shi B., Liu C., Zhao L., Wang B. Influencing factors of geometrical structure of surface shrinkage cracks in clayey soils // Eng. Geol. 2008. V. 101. № 3–4. P. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2008.05.005>
 24. Shorlin K.A., de Bruyn J.R., Graham M., Morris S.W. Development and geometry of isotropic and directional shrinkage-crack patterns // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. № 6. P. 6950–6957. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.6950>
 25. Vogel H.-J., Hoffmann H., Roth K. Studies of crack dynamics in clay soil: I. Experimental methods, results, and morphological quantification // Geoderma. 2005. V. 125. № 3–4, P. 203–211. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2004.07.009>
 26. Le Roux S., Medjedoub F., Dour G., Rézaï-Aria F. Image analysis of microscopic crack patterns applied to thermal fatigue heat-checking of high temperature tool steels // Micron. 2013. V. 44. P. 347–358. <https://doi.org/10.1016/j.micron.2012.08.007>

27. Korneta W., Mendiratta S.K., Menteiro J. Topological and geometrical properties of crack patterns produced by the thermal shock in ceramics // *Phys. Rev. E*. 1998. V. 57. № 3. P. 3142–3152.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.3142>
28. Scott G.J.T., Webster R., Nortcliff S. An analysis of crack pattern in clay soil: its density and orientation // *J. Soil Sci.* 1986. V. 37. № 4. P. 653–668.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1986.tb00394.x>
29. Montigny A., Walwer D., Michaut C. The origin of hierarchical cracks in floor-fractured craters on Mars and the Moon // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2022. V. 600. 117887.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2022.117887>
30. <https://www.europlanet-society.org/patterns-in-mars-crater-floors-give-picture-of-drying-lakes-eps0905/> (Дата обращения 18.07.2024)
31. Федоров А.Ю., Галкина Е.Б. Сравнение общих закономерностей, характерных для структур поверхностных трещин и для напряжений в окрестности вершин пространственных трещин // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16. № 3. С. 375–386.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.32>

RELATIONSHIP BETWEEN THE RESULTS OF ANALYTICAL SOLUTIONS OF ELASTICITY THEORY PROBLEMS AND OF STRESS STATE OPTIMIZATION IN THE VICINITY OF SINGULAR POINTS

A. Yu. Fedorov^{a, *}, V. P. Matveenko^{a, **}

^a*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

^{*}*e-mail: fedorov@icmm.ru, **e-mail: mvp@icmm.ru*

Abstract. The paper presents the results of two directions of the study of the stress-strain state in the vicinity of singular points of elastic bodies, namely: change of the type of boundary conditions; edges of the contact surface of different materials. The result of the first direction is the solution of elasticity theory problems in the vicinity of singular points, from which the possibility of infinite stresses at these points follows. The second direction is associated with the analysis by numerical and experimental methods of the stress state in the vicinity of singular points, which, as a rule, occur when modeling real objects and are potential stress concentration zones. The main content of the article is to establish, based on a comparison of the results of the two directions, the relationship between variants with a minimum stress level in the vicinity of singular points with the results on the nature of the stress singularity at these points.

Keywords: elasticity, stress singularity, stress concentration, geometry optimization, stress distribution at the interfaces

REFERENCES

1. Kondrat'ev V. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 1967. Vol. 16. P. 227–313.
<http://mi.mathnet.ru/eng/mmo186>

2. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis // *Appl. Mech. Rev.* 2004. V. 57. № 4. P. 251–297.
<https://doi.org/10.1115/1.1762503>
3. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *Appl. Mech. Rev.* 2004. V. 57. № 5. P. 385–439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>
4. *Paggi M., Carpinteri A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* 2008. V. 61. № 2. 020801.
<https://doi.org/10.1115/1.2885134>
5. *Carpinteri A., Paggi M.* Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Wiegardt and Irwin until today // *Eng. Fract. Mech.* 2009. V. 76. № 12. P. 1771–1784.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.03.012>
6. *Pook L.P.* A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2013. V. 36. № 8. P. 699–723.
<https://doi.org/10.1111/ffe.12074>
7. *Koltunov M.A., Kuznetsov G.B., Matveenko V.P., Troianovskii I.E., Shardakov I.N.* Optimization of axisymmetric body geometry in the presence of change of type of boundary conditions at the corner point // *Priladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Gor'kii*, 1978. № 9. P. 55–60.
8. *Borzenkov S., Matveenko V.* Optimization of elastic bodies in the vicinity of singular points // *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1996. № 2. P. 93–100.
9. *Matveyenko V.P., Borzenkov S.M.* Semianalytical singular element and its application to stress calculation and optimization // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1996. V. 39. № 10. P. 1659–1680.
[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960530\)39:10%3C1659::AID-NME919%3E3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960530)39:10%3C1659::AID-NME919%3E3.0.CO;2-W)
10. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* *Theory of Elasticity*. 3rd edition, N.Y.: McGraw-Hill, 1970. 608 p.
11. *Kovrov V.N., Zolotukhin V.G.* Experimental studies on the adhesion strength of a polymer-metal bond depending on the contact zone geometry // *Mechanics of Composite Materials*. 1999. V. 35. № 4. P. 335–338.
<https://doi.org/10.1007/BF02259722>
12. *Dempsey J.P., Sinclair G.B.* On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // *J. Elasticity*. 1981. V. 11. P. 317–327.
<https://doi.org/10.1007/BF00041942>
13. *Chobanyan K.* *Stress State in Compound Elastic Bodies*. Yerevan: Armenian Academy of Sciences Press, 1987. 338 p.
14. *Wu Z.* Design free of stress singularities for bi-material components // *Compos. Struct.* 2004. V. 65. № 3–4. P. 339–345. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.11.009>
15. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design // *Exp. Mech.* 2004. V. 44. P. 608–615.
<https://doi.org/10.1007/BF02428250>
16. *Xu L.R., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // *Exp. Mech.* 2004. V. 44. P. 616–621.
<https://doi.org/10.1007/BF02428251>
17. *Wang P., Xu L.R.* Convex interfacial joints with least stress singularities in dissimilar materials // *Mech. Mater.* 2006. V. 38. № 11. P. 1001–1011.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.10.002>

18. *Baladi A., Arezoodar A.F.* Dissimilar materials joint and effect of angle junction on stress distribution at interface // *Int. J. Mech. Aero. Indust. Mechatron. Manufacturing Eng.* 2011. V. 5. № 7. P. 1184–1187.
19. *Park J., Anderson W.J.* Geometric optimization of two bonded wedges involving stress singularities // *Compos. Eng.* 1994. V. 4. № 9. P. 901–912.
[https://doi.org/10.1016/0961-9526\(94\)90034-5](https://doi.org/10.1016/0961-9526(94)90034-5)
20. *Fedorov A.Y., Matveenko V.P.* Optimization of geometry and mechanical characteristics of elastic bodies in the vicinity of singular points // *Acta Mechanica.* 2018. V. 229. P. 645–658.
<https://doi.org/10.1007/s00707-017-1990-5>
21. *Wetherhold R.C., Dargush G.F.* Improvement of adhesive strength at a bi-material interface by adjusting the interface angles at the free edge // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2015. V. 77. P. 69–73. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.02.002>
22. *Velde B.* Structure of surface cracks in soil and muds // *Geoderma.* 1999. V. 93. № 1–2. P. 101–124. [https://doi.org/10.1016/S0016-7061\(99\)00047-6](https://doi.org/10.1016/S0016-7061(99)00047-6)
23. *Tang C., Shi B., Liu C., Zhao L., Wang B.* Influencing factors of geometrical structure of surface shrinkage cracks in clayey soils // *Eng. Geol.* 2008. V. 101. № 3–4. P. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2008.05.005>
24. *Shorlin K.A., de Bruyn J.R., Graham M., Morris S.W.* Development and geometry of isotropic and directional shrinkage-crack patterns // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 61. № 6. P. 6950–6957.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.6950>
25. *Vogel H.-J., Hoffmann H., Roth K.* Studies of crack dynamics in clay soil: I. Experimental methods, results, and morphological quantification // *Geoderma.* 2005. V. 125. № 3–4, P. 203–211.
<https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2004.07.009>
26. *Le Roux S., Medjedoub F., Dour G., Rézaï-Aria F.* Image analysis of microscopic crack patterns applied to thermal fatigue heat-checking of high temperature tool steels // *Micron.* 2013. V. 44. P. 347–358.
<https://doi.org/10.1016/j.micron.2012.08.007>
27. *Korneta W., Mendiratta S.K., Menteiro J.* Topological and geometrical properties of crack patterns produced by the thermal shock in ceramics // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57. № 3. P. 3142–3152.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.3142>
28. *Scott G.J.T., Webster R., Nortcliff S.* An analysis of crack pattern in clay soil: its density and orientation // *J. Soil Sci.* 1986. V. 37. № 4. P. 653–668.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1986.tb00394.x>
29. *Montigny A., Walwer D., Michaut C.* The origin of hierarchical cracks in floor-fractured craters on Mars and the Moon // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2022. V. 600. 117887.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2022.117887>
30. <https://www.europlanet-society.org/patterns-in-mars-crater-floors-give-picture-of-drying-lakes-eps0905/> (Дата обращения 18.07.2024)
31. *Fedorov A.Yu., Galkina E.B.* Comparison of general regularities inherent to structures of surface cracks and stresses near the tips of spatial cracks // *Computational Continuum Mechanics.* 2023. V. 16. № 3. P. 375–386.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.32>