

Известия

ISSN 0572-3299

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



2023

6

СО Д Е Р Ж А Н И Е

О равновесии твердого тела, опирающегося одной точкой на шероховатую плоскость <i>Г. М. Розенблат</i>	3
Учет смещения как твердого тела в алгоритме МКЭ при расчете оболочек вращения <i>А. Ш. Джабраилов, А. П. Николаев, Ю. В. Клочков, Н. А. Гуреева</i>	23
Предельные состояния адгезионных слоев при комбинированном нагружении <i>В. В. Глаголев, А. А. Маркин</i>	39
Плоская задача теории упругости об идентификации узловых точек квадратурного включения <i>А. В. Капцов, Е. И. Шифрин</i>	47
Об устойчивости стационарных решений уравнений движения гиростата Горячева–Сретенского <i>А. А. Косов</i>	69
О кручении стержней из упрочняющегося материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, при линеаризованном законе пластического течения <i>Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов</i>	83
О подавлении колебаний балочных мостов поездом как инерционным демпфером <i>В. Ю. Поляков, В. В. Саурин</i>	89
Нелинейная динамика микромеханического неконтактного индукционного подвеса <i>Д. Ю. Скубов, Д. А. Индейцев, П. П. Удалов, И. А. Попов, А. В. Лукин, К. В. Полеткин</i>	98
Об изменениях в остаточных напряжениях в окрестности дефекта сплошности упруговязкопластического материала при повторном нагружении <i>А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко</i>	113
Принципиальные проблемы релятивистской механики деформируемого твердого тела <i>В. В. Васильев, Л. В. Федоров</i>	125
Анизотропия энергии остаточных напряжений в двухкомпонентных пластинчатых кристаллических структурах <i>Д. С. Лисовенко, А. И. Епишин</i>	136
Влияние среднего давления на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки <i>А. Г. Хакимов</i>	155
Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой <i>В. Н. Тхай</i>	165
К 70-летию со дня рождения А.О. Ватульяна	180

УДК 531.44

О РАВНОВЕСИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ ОДНОЙ ТОЧКОЙ НА ШЕРОХОВАТУЮ ПЛОСКОСТЬ

© 2023 г. Г. М. Розенблат^{а,*}

^аМосковский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
Москва, Россия

* e-mail: gr51@mail.ru

Поступила в редакцию 19.09.2022 г.

После доработки 19.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

Рассматривается задача о возможном и обязательном (в смысле Джеллетта) равновесиях твердого тела, которое контактирует одной своей точкой с шероховатой плоскостью и находится под действием произвольной системы сил. Распределения масс в теле (т.е. центральный тензор инерции и положение центра масс тела относительно точки опоры) предполагаются произвольными. В точке контакта тела с опорой реализуется односторонняя связь и действует сила сухого трения, подчиняющаяся классическому закону Кулона–Эйлера. Получены необходимые и достаточные условия обязательного равновесия. Эти условия выражаются простыми аналитическими формулами. Приводится сравнение с соответствующими результатами, полученными ранее для аналогичной задачи. Рассмотрена задача о возможном и обязательном равновесиях тяжелого эллипсоида на шероховатой наклонной плоскости. Найдены все возможные положения равновесия эллипсоида, а также условия на угол наклона плоскости, при которых такие равновесия возможны и являются обязательными.

Ключевые слова: сухое трение, статическое равновесие, точечный контакт, обязательное равновесие, односторонняя связь, эллипсоид

DOI: 10.31857/S0572329922600748, EDN: VEEUEU

1. Введение. Задачи о возможных и обязательных условиях равновесия твердого тела при наличии сухого трения восходят к Дж.Х. Джеллетту [1]. Возможное равновесие означает существование таких сил трения покоя и нормальных реакций связей, подчиняющихся закону Кулона–Эйлера, которые могут статически уравновесить приложенную к телу систему сил, т.е. удовлетворить стандартным уравнениям статики для равновесия твердого тела, в предположениях действия закона Кулона для возникающих сил сухого трения покоя.

Обязательное равновесие (при наличии условий, обеспечивающих возможное равновесие) означает, во-первых, отсутствие возможности начала безотрывного скольжения тела из рассматриваемого состояния покоя (т.е. при нулевых начальных скоростях) с конечными ускорениями. Кроме того, во-вторых, необходимо добавить условия, обеспечивающие отсутствие начала качения и (или) отрыва тела от опоры.

В данной работе изучается равновесие твердого тела, к которому приложена произвольная система сил и которое контактирует одной своей точкой с шероховатой плоскостью, т.е. имеет место односторонний точечный контакт тела с плоскостью при наличии сил сухого трения.

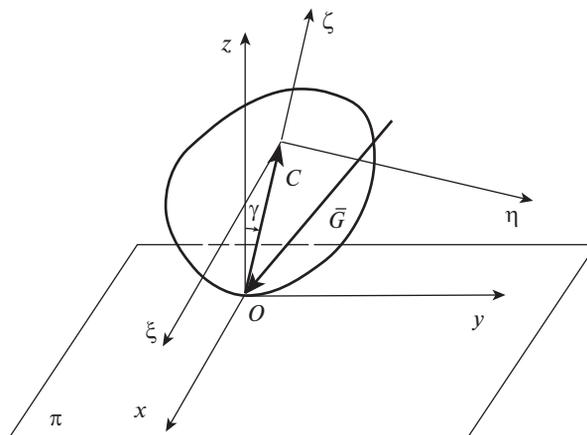


Рис. 1. Твердое тело, опирающееся одной точкой на шероховатую плоскость.

Для рассматриваемой модели задача об обязательном равновесии решается следующим образом. Пусть O – точка контакта тела с опорой (см. рис. 1). На рис. 1 введены следующие обозначения: π – опорная плоскость; O – точка опоры; C – центр масс тела; G – вектор равнодействующей всех активных внешних сил; $Oxyz$ – система координат с началом в опорной точке O , для которой ось Oz направлена по нормали к плоскости π , плоскость Oxy совпадает с плоскостью π , а вектор OC лежит в плоскости Oyz ; $C\xi\eta\zeta$ – система координат с началом в центре масс C , для которой ось $C\zeta$ направлена по вектору OC , а ось $C\xi$ параллельна оси Ox ; γ – угол, образуемый вектором OC с положительным направлением оси Oz .

Тогда 1-я часть условий обязательного равновесия, соответствующая отсутствию безотрывного скольжения, получается так. Пусть точка O тела начинает двигаться с некоторым вектором ускорения $w_O = (w_{Ox}, w_{Oy}, 0)^T$, лежащим в опорной плоскости Oxy , так, что тело совершает безотрывное ускоренное движение из состояния с нулевыми начальными скоростями. Кроме того, само тело еще и начинает вращаться с некоторым угловым ускорением $\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)^T$.

В результате такого движения со скольжением в точке опоры O возникает сила сухого трения скольжения F_{fr} , которая подчиняется следующему классическому закону Кулона (в модификации Пэнлве [2] при начале движения из состояния покоя):

$$F_{fr} = -fNw_O/|w_O|, \quad (w_O \neq 0), \quad |F_{fr}| < fN, \quad (w_O = 0) \quad (1.1)$$

где f – коэффициент трения, w_O – вектор ускорения точки O , $N > 0$ – нормальная реакция в точке O . Вторая часть условий в (1.1) характеризует силу трения покоя, направление которой может быть произвольным. Отметим, что при наличии вращения тела вокруг нормали к опорной плоскости закон (1.1) является весьма приближенным, а для более точного анализа должны использоваться более совершенные модели (см., например, модель трения Контенсу–Журавлёва [3, 4]).

Вводим неподвижную систему координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена в сторону тела по нормали к опорной плоскости, а плоскость Oxy совпадает с опорной плоскостью (см. рис. 1). Далее, при нулевых начальных скоростях точек тела, составляем шесть уравнений динамики для введенных ускорений, которые суть три уравнения для движения центра масс и три уравнения для кинетического момента относительно

центра масс тела. В этих уравнениях будут присутствовать ровно шесть неизвестных величин $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, w_{Ox}, w_{Oy}, N$. При решении полученной системы необходимо учесть, что должны соблюдаться строгие неравенства $N > 0, |w_O| > 0$. Тогда условия, при которых полученная система уравнений, вместе с указанными двумя последними неравенствами, несовместна (при выполнении условий возможного равновесия) и будет представлять собой 1-ю часть условий обязательного равновесия.

2-я часть условий обязательного равновесия соответствует невозможности качения и (или) отрыва тела от опорной плоскости. Отметим, что для рассматриваемого тела с одной точкой контакта, при выполнении условий возможного равновесия, качение заведомо не реализуется. Действительно, из уравнений кинетического момента, составленных для тела относительно (неподвижной при качении) точки контакта O , следует, что $J_O \varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$ (J_O – положительно определенная матрица тензора инерции тела относительно точки O), т.е. движение качения не реализуется.

Условия отсутствия отрыва получаются следующим образом. Добавляем к введенному выше (для 1-й части условий обязательного равновесия) ускорению w_O точки контакта O положительную составляющую $w_{Oz} > 0$, необходимо возникающую при отрыве тела, вдоль нормали Oz к опорной плоскости. Затем для шести неизвестных величин $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, w_{Ox}, w_{Oy}, w_{Oz}$ составляем (аналогично тому, как это было сделано выше в 1-й части) шесть уравнений динамики, в которых, при ослабленной односторонней связи, полагаем $N = 0, F_{fr} = 0$. Тогда условия, при которых полученная система уравнений, вместе со строгим неравенством $w_{Oz} > 0$, является несовместной, и будут представлять собой 2-ю часть условий обязательного равновесия.

В настоящей работе такие условия при произвольных параметрах системы получены в рамках классической модели Кулона (1.1). Некоторые результаты решения рассматриваемой задачи для частных случаев распределения масс в твердом теле были получены ранее в работах [5, 6]. Отметим, что вопросы неоднозначности и парадоксальности для задач равновесия и движения в механике твердых тел с сухим трением рассматриваются также, например, в работах [7–11]. Настоящая статья является расширенным и дополненным вариантом ранее опубликованной работы автора [12].

2. Описание модели, основные предположения и постановка задачи. Рассматривается твердое тело в состоянии покоя (см. рис. 1), опирающееся одной своей точкой O на шероховатую плоскость, которая создает силу сухого трения (скольжения или покоя) в соответствии с моделью Кулона (1.1). Пусть к телу приложена произвольная система сил, которая обеспечивает возможное (статическое) его равновесие. Известно, что для этого необходимо и достаточно, чтобы эта система сил приводилась в точке O к равнодействующей $G = (G_x, G_y, G_z)^T$, линия действия которой проходит через точку контакта O (см. рис. 1) и лежит внутри кругового конуса трения для точки O (O – вершина конуса). Половина угла раствора этого конуса равна углу трения $\varphi_0 = \arctg(f)$, а ось конуса направлена по нормали Oz к опорной плоскости. Причем, так как связь в точке O является односторонней, должно быть выполнено условие $G_z < 0$. Таким образом, сила G удовлетворяет неравенствам

$$G_x^2 + G_y^2 \leq f^2 G_z^2, \quad G_z < 0 \quad (2.1)$$

Далее, для сокращения записи, будем считать, что система единиц выбрана так, что модуль вектора G равен единице.

Пусть C – центр масс тела. Без ограничения общности будем считать, что вектор OC лежит в плоскости Oyz (системы координат $Oxyz$, описанной во Введении).

Обозначим через γ – угол, образуемый вектором OC с положительным направлением оси Oz (см. рис. 1). Будем считать, что $\gamma \in (0, \pi/2)$ (это также не умаляет общно-

сти). Введем систему координат $C\xi\eta\zeta$, для которой ось $C\zeta$ направлена по вектору OC , плоскость $C\eta\zeta$ совпадает с плоскостью Oyz , а ось $C\xi$ параллельна оси Ox . Таким образом, система координат $C\xi\eta\zeta$ получена из системы $Oxyz$ двумя преобразованиями: (1) поворотом на угол γ вокруг оси Ox по часовой стрелке и (2) параллельным переносом на вектор OC (см. рис. 1).

Пусть ψ – угол отклонения вектора G от плоскости $C\eta\zeta$, отсчитываемый по часовой стрелке, если смотреть с положительного направления оси $C\eta$. Без ограничения общности будем считать, что $\psi \in [0, \pi/2)$. Поясним более подробно: ψ – угол, образуемый вектором G с его ортогональной проекцией на плоскость $C\eta\zeta$. На рис. 1 этот угол не изображен, отметим лишь, что в общем случае (см. рис. 1) угол ψ не совпадает, вообще говоря, с углом между векторами G и CO . Для проекции на ось $C\xi$ вектора G , с учетом его направления (против оси Oz) и условия $\psi \in [0, \pi/2)$ (см. рис. 1), получим

$$G_\xi = \sin \psi \geq 0 \quad (2.2)$$

Для модуля проекции вектора G на плоскость $C\eta\zeta$ имеем $G_{\zeta\eta} = \cos \psi$.

Пусть ϕ – угол, образуемый направлением проекции $G_{\zeta\eta}$ с отрицательным направлением оси $C\zeta$ (если $\phi = 0$, то угол ψ совпадает в точности с углом между направлениями векторов G и CO или же векторов $(-G)$ и OC , при этом проекция $G_{\zeta\eta}$ направлена вдоль отрицательного направления оси $C\zeta$). Угол ϕ считаем положительным при отсчете его от отрицательного направления оси $C\zeta$ для вектора G по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси $C\xi$ (или же при отсчете его от положительного направления оси $C\zeta$, но для вектора $(-G)$). При отсчете этого угла против часовой стрелки, в аналогичных условиях, угол ϕ считаем отрицательным. Тогда получим, с учетом допустимого направления вектора G (должно быть $G_z < 0$), для интервала изменения угла ϕ и проекций вектора G на оси $C\eta$, $C\zeta$ следующие соотношения

$$|\phi + \gamma| < \pi/2, \quad G_\eta = -\cos \psi \sin \phi, \quad G_\zeta = -\cos \psi \cos \phi \quad (2.3)$$

Запишем условия того, что вектор G принадлежит конусу трения. Для этого в системе координат $C\xi\eta\zeta$ подсчитаем угол δ между единичным вектором e_z оси Oz и единичным вектором e_G оси вектора $(-G)$. Используя (2.2) и (2.3), имеем

$$e_G = (-\sin \psi, \cos \psi \sin \phi, \cos \psi \cos \phi)^T, \quad e_z = (0, -\sin \gamma, \cos \gamma)^T \quad (2.4)$$

Перемножая скалярно векторы из (2.4), получаем для косинуса угла δ между векторами e_z , e_G соотношение

$$\cos \delta = \cos \psi \cos(\gamma + \phi)$$

Из последнего соотношения вытекает, что условие $|\operatorname{tg} \delta| < f$ эквивалентно соблюдению следующих друг из друга неравенств

$$\cos \psi \cos(\gamma + \phi) > \cos \phi_0 = 1/\sqrt{1 + f^2} \Leftrightarrow |\gamma + \phi| < \sigma_0 = \arccos(\cos \phi_0 / \cos \psi), \quad (2.5)$$

где $\phi_0 = \operatorname{arctg}(f)$, $\psi \in [0, \phi_0)$, $\sigma_0 \in [0, \phi_0)$, $\gamma \in [0, \pi/2]$

Отметим, что при $\psi = 0$ (случай расположения равнодействующей G в плоскости Oyz , см. ниже п. 5) из (2.5) следует неравенство $|\gamma + \phi| < \phi_0$.

Таким образом, постановка задачи такова. Пусть сила G , приложенная к твердому телу, удовлетворяет условиям (2.1) и проходит через точку контакта O . Тогда углы ϕ , ψ , γ , которыми задаются, указанным выше образом, линия действия силы G и положение вектора OC центра масс тела, удовлетворяют соотношениям (2.5). В этом случае заведомо реализуется возможное (статическое) равновесие тела. Требуется определить

дополнительные условия, которые обеспечивают также и обязательное равновесие тела (т.е. отсутствие возможных скольжения, качения или отрыва тела от опоры), как это было описано выше во Введении.

3. Динамические уравнения в начале скольжения и при отрыве тела. Пусть J – симметричная положительно определенная матрица инерции тела для точки C в системе $C\xi\eta\zeta$, а $B = J^{-1}$ – обратная ей матрица, которая, как известно, также является симметричной и положительно определенной. Элементы матрицы B будем далее обозначать b_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$.

1. Пусть возникает начальное скольжение точки O с вектором ускорения w_O в плоскости Oxy . Обозначим: $w = |w_O| > 0$ – модуль этого ускорения, α – угол, который образует вектор ускорения w_O с положительным направлением оси Ox . Пусть при таком движении $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta$ – проекции вектора углового ускорения ε тела на оси системы $C\xi\eta\zeta$.

К телу, в процессе возникающего безотрывного движения, будут приложены следующие три силы: (1) – сила нормальной реакции $N > 0$, направленная по оси Oz ; (2) сила трения скольжения F_{fr} , направленная против вектора w_O , расположенная в плоскости Oxy и равная по модулю fN ; (3) сила G – равнодействующая всех внешних сил, приложенных к телу, которая, при реализации возможного равновесия, проходит через точку контакта O и удовлетворяет условиям (2.1). Тогда уравнения движения центра масс C тела в проекциях на оси системы $C\xi\eta\zeta$ имеют вид (массу тела m , расстояние OC и модуль равнодействующей всех внешних сил G считаем единичными):

$$\begin{aligned} w \cos \alpha + \varepsilon_\eta &= \sin \psi - fN \cos \alpha \\ w \sin \alpha \cos \gamma - \varepsilon_\xi &= -\cos \psi \sin \varphi - fN \sin \alpha \cos \gamma - N \sin \gamma \\ w \sin \alpha \sin \gamma &= -\cos \psi \cos \varphi - fN \sin \alpha \sin \gamma + N \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения теоремы об изменении кинетического момента тела относительно центра масс в системе $C\xi\eta\zeta$ дают следующие выражения для проекций вектора углового ускорения ε тела на оси системы $C\xi\eta\zeta$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= b_{11}M_1 + b_{12}M_2, \varepsilon_\eta = b_{12}M_1 + b_{22}M_2, \varepsilon_\zeta = b_{31}M_1 + b_{32}M_2 \\ M_1 &= -N(\sin \gamma + f \sin \alpha \cos \gamma) - \cos \psi \sin \varphi, M_2 = fN \cos \alpha - \sin \psi \end{aligned} \quad (3.2)$$

В (3.2) параметры b_{ij} суть элементы положительно определенной симметричной матрицы $B = J^{-1}$. Подставляя (3.2) в (3.1) и обозначая

$$g = 1/N, \quad u = f + w/N \quad (3.3)$$

получим систему трех уравнений

$$\begin{aligned} u \cos \alpha - b_{12}(\sin \gamma + f \sin \alpha \cos \gamma + g \cos \psi \sin \varphi) + b_{22}(f \cos \alpha - g \sin \psi) &= g \sin \psi, \\ u \sin \alpha \cos \gamma - b_{12}(f \cos \alpha - g \sin \psi) + b_{11}(\sin \gamma + f \sin \alpha \cos \gamma + g \cos \psi \sin \varphi) &= \\ &= -g \cos \psi \sin \varphi - \sin \gamma, \\ u \sin \alpha \sin \gamma &= \cos \gamma - g \cos \psi \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как должны быть выполнены неравенства $w > 0$, $N > 0$, то из (3.3) следует, что выполняются неравенства

$$g > 0, \quad u > f \quad (3.5)$$

Из последнего уравнения системы (3.4) находим g

$$g = \cos \gamma \frac{1 - u \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\cos \psi \cos \varphi} > 0 \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6), в силу обозначений (3.3), определяет нормальную реакцию N . Таким образом, задача сводится к решению двух нелинейных уравнений относительно двух неизвестных u, α

$$\begin{aligned} (u + b_{22}f) \cos \alpha + (-b_{12}f \cos \gamma) \sin \alpha - g [b_{12} \cos \psi \sin \varphi + (1 + b_{22}) \sin \psi] &= b_{12} \sin \gamma \\ (u + b_{11}f) \sin \alpha \cos \gamma + (-b_{12}f) \cos \alpha + g [b_{12} \sin \psi + (1 + b_{11}) \cos \psi \sin \varphi] &= -(1 + b_{11}) \sin \gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

В системе (3.7) переменная g дается формулой (3.6), и должны быть выполнены неравенства (3.5). Кроме того, необходимо учитывать, что, в силу положительной определенности матрицы B , еще выполняются следующие неравенства Сильвестра

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0 \quad (3.8)$$

Задача об обязательном равновесии тела тогда сводится к поиску условий, при которых система (3.7), вместе с неравенствами (3.5), (3.6) и (3.8), не имеет решений относительно неизвестных α, u . Преобразуем систему (3.7), вводя (для краткости записи формул) обозначения

$$x = \sin \alpha, \quad y = \cos \alpha, \quad v = u/f, \quad a = \operatorname{tg} \gamma, \quad b = \operatorname{tg} \varphi, \quad \varepsilon = \operatorname{tg} \psi / \cos \varphi \quad (3.9)$$

Отметим, что для обозначений (3.9), в силу исходных предположений, должны соблюдаться следующие условия

$$x^2 + y^2 = 1, \quad v > 1, \quad a > 0$$

Подставляя величину g из (3.6) в уравнения (3.7), с учетом обозначений (3.9), получим линейную, относительно x, y , систему уравнений второго порядка

$$xc_{11} + yc_{12} = h_1, \quad xc_{21} + yc_{22} = h_2 \quad (3.10)$$

В (3.10) для краткости записи введены обозначения

$$\begin{aligned} c_{11} &= v [b_{12}ab + (1 + b_{22})\varepsilon a] - b_{12}, \quad c_{12} = (v + b_{22}) / \cos \gamma \\ c_{21} &= v [1 - (1 + b_{11})ab - b_{12}\varepsilon a] + b_{11}, \quad c_{22} = -b_{12} / \cos \gamma \\ h_1 &= [b_{12}(a + b) + (1 + b_{22})\varepsilon] / f, \quad h_2 = -[(1 + b_{11})(a + b) + b_{12}\varepsilon] / f \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решение (по формулам Крамера) линейной системы второго порядка (3.10) имеет вид

$$x = \Delta_x(v) / \Delta(v), \quad y = \Delta_y(v) / \Delta(v) \quad (3.12)$$

В (3.12) определитель и миноры для системы (3.10) даются следующими формулами

$$\begin{aligned} \Delta(v) &= (k_2v^2 + k_1v + k_0) / \cos \gamma \\ k_2 &= (1 + b_{11})ab + b_{12}\varepsilon a - 1, \quad k_0 = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$k_1 = (b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)ab - b_{12}\varepsilon a - b_{11} - b_{22}$$

$$\Delta_x(v) = (l_1v + l_0) / \cos \gamma, \quad \Delta_y(v) = (m_1v + m_0)$$

$$\begin{aligned} l_1 &= [(1 + b_{11})(a + b) + b_{12}\varepsilon] / f, \quad l_0 = [(b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(a + b) - b_{12}\varepsilon] / f \\ m_1 &= -[b_{12}(a + b) + (1 + b_{22})\varepsilon + a^2\varepsilon(1 + b_{11})(1 + b_{22}) - b_{12}^2] / f \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$m_0 = [b_{12}(a + b) + \varepsilon(b_{12}^2 - b_{11} - b_{11}b_{22})] / f$$

2. Пусть возникает отрыв тела от опоры. В этом случае, как это было описано во Введении, вводим дополнительное (вертикальное) ускорение $w_{Oz} = w_1 > 0$ и составляем шесть уравнений динамики аналогично тому, как это было сделано в п. 1. В полученных уравнениях, в силу ослабления связи, полагаем $N = 0, F_{fr} = 0$. В результате, после исключения угловых ускорений $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, имеем следующую систему трех уравнений

$$\begin{aligned} w \cos \alpha &= b_{12} \cos \psi \sin \varphi + b_{22} \sin \psi + \sin \psi \\ w \sin \alpha \cos \gamma &= w_1 \sin \gamma - b_{11} \cos \psi \sin \varphi - b_{12} \sin \psi - \cos \psi \sin \varphi \\ w \sin \alpha \sin \gamma &= -w_1 \cos \gamma - \cos \psi \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.15)$$

для трех неизвестных w , w_1 , α , для которых, кроме того, должны соблюдаться строгие неравенства

$$w > 0, \quad w_1 > 0 \quad (3.16)$$

Исключая $w \sin \alpha$ из второго и третьего уравнений системы (3.15), получим

$$w_1 = \sin \gamma (b_{11} \cos \psi \sin \varphi + b_{12} \sin \psi) - \cos \psi \cos(\gamma + \varphi) \quad (3.17)$$

Поделив второе уравнение системы (3.15) на первое и используя (3.17), получим

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{(b_{11} \cos \psi \sin \varphi + b_{12} \sin \psi) \cos \gamma + \cos \psi \sin(\gamma + \varphi)}{b_{12} \cos \psi \sin \varphi + b_{22} \sin \psi + \sin \psi} \quad (3.18)$$

Из первого уравнения системы (3.15) находим w :

$$w = (b_{12} \cos \psi \sin \varphi + b_{22} \sin \psi + \sin \psi) / \cos \alpha$$

Из последнего соотношения следует, что, выбирая нужный знак для $\cos \alpha$, в соответствие с (3.18), мы всегда сможем добиться того, чтобы выполнялось неравенство $w > 0$. Таким образом, отрыв невозможен лишь в том и только в том случае, если для w_1 из (3.17) выполнено неравенство $w_1 < 0$. Следовательно, условие отсутствия отрыва, получаемое после деления соотношения (3.17) на $\cos \gamma \cos \psi > 0$ и приведения подобных членов, дается неравенством

$$(b_{11} + 1) \operatorname{tg} \gamma \sin \varphi + b_{12} \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \psi < \cos \varphi \quad (3.19)$$

Неравенство (3.19) и представляет собой 2-ю часть условий обязательности возможного равновесия. Далее рассмотрим некоторые частные случаи расположения равнодействующей G относительно твердого тела.

4. Равнодействующая G проходит через центр масс тела и точку контакта. В этом случае вектор G направлен по вектору CO . Тогда имеем, с учетом обозначений из (3.9),

$$\varphi = \psi = 0 \rightarrow b = \varepsilon = 0$$

Уравнения (3.10) и неравенство (3.6) упрощаются и принимают следующий вид

$$\begin{aligned} xc_{11} + yc_{12} &= b_{12}a/f, & xc_{21} + yc_{22} &= -(1 + b_{11})a/f \\ g &= 1 - vfxa > 0, & v &> 1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где, согласно (3.9) и (3.11), введены обозначения

$$\begin{aligned} x &= \sin \alpha, & y &= \cos \alpha, & c_{11} &= -b_{12}, & c_{12} &= (v + b_{22}) / \cos \gamma \\ c_{21} &= v + b_{11}, & c_{22} &= -b_{12} / \cos \gamma \end{aligned} \quad (4.2)$$

Решение системы (4.1) относительно неизвестных x , y дается формулами Крамера

$$x = -\mu_1 [(1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2] / \Delta, \quad y = \mu_2 b_{12} (v - 1) / \Delta \quad (4.3)$$

где обозначено

$$\mu_1 = (\operatorname{tg} \gamma) / f, \quad \mu_2 = \sin \gamma, \quad v = u / f, \quad \Delta = (v + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2 \quad (4.4)$$

В силу неравенств (2.5), (3.5) и (3.8), для введенных в (4.4) параметров имеют место неравенства

$$0 < \mu_1 \leq 1, \quad 0 < \mu_2 \leq 1, \quad v > 1, \quad \Delta > 0 \quad (4.5)$$

Утверждение 1. Решение (4.3) системы (4.1) при $v > 1$ и выполнении условий статического (возможного) равновесия удовлетворяет строгому неравенству

$$x^2 + y^2 < 1 \quad (4.6)$$

В силу обозначений (4.2) решение системы (4.1) должно удовлетворять равенству $x^2 + y^2 = 1$. Тогда из неравенства (4.6) следует, что система (4.1), в данном случае, не имеет требуемых решений, т.е. реализуется 1-я часть условий обязательного равновесия. Неравенство же (3.19), представляющее собой 2-ю часть условий обязательности равновесия (отсутствие отрыва), выполнено автоматически при $\varphi = \psi = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае возможное равновесие одновременно является и обязательным.

Доказательство утверждения 1 сводится к непосредственной проверке неравенства (4.6) для величин x, y , даваемых выражениями (4.3). Приведем кратко основные моменты. Неравенство (4.6) эквивалентно следующему неравенству

$$[(v + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2 > \mu_1^2[(1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2 + \mu_2^2 b_{12}^2 (v - 1)^2, \quad v \in (1, \infty) \quad (4.7)$$

В силу неравенств (4.5), неравенство (4.7) следует из неравенства

$$[(v + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2 > [(1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2 + b_{12}^2 (v - 1)^2, \quad v \in (1, \infty) \quad (4.8)$$

Представляя левую часть неравенства в виде

$$[(v - 1)(v + b_{22}) + (1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2]^2$$

получим, что (4.8) эквивалентно неравенству

$$(v - 1)(v + b_{22})^2 + 2(v + b_{22})[(1 + b_{11})(v + b_{22}) - b_{12}^2] > (v - 1)b_{12}^2, \quad v \in (1, \infty) \quad (4.9)$$

Неравенство (4.9), с использованием неравенств (3.8), проверяется непосредственным вычислением. Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. Утверждение 1 кажется достаточно очевидным. Однако ниже будет показано, что для сколь угодно малого отклонения равнодействующей G от направления вектора OC существуют такие распределения масс в теле, при которых может начаться проскальзывание, и, следовательно, равновесие не будет обязательным.

Следствие 1. Пусть произвольное твердое тело опирается одной своей точкой на шероховатую плоскость, коэффициент сухого трения которой равен f , а система внешних сил, приложенных к этому твердому телу, удовлетворяет следующим условиям.

1. Система внешних сил приводится в точке опоры к равнодействующей G .

2. Вектор G образует с нормалью к опорной плоскости (a , следовательно, и с нормалью к поверхности границы тела) угол γ , для которого $|\operatorname{tg} \gamma| < f$, а проекция вектора G на эту нормаль является отрицательной.

3. Линия действия вектора G проходит через центр масс тела.

Тогда, из утверждения 1 следует, что тело находится в состоянии статического равновесия (возможного равновесия), которое к тому же является и обязательным.

Подчеркнем, что нарушение одного из условий 1 или 2 приводит к нарушению статического равновесия, а нарушение условия 3 может привести к нарушению обязательного равновесия (даже при сохранении возможного равновесия).

Следствие 2. Из утверждения 1 следует также, что положение статического (возможного) равновесия тяжелого твердого тела, опирающегося одной своей точкой на шероховатую наклонную плоскость с углом наклона α , является всегда (т.е. при любом распределении масс в теле) обязательным, если угол наклона плоскости не превосходит угла трения, т.е. выполнено неравенство $\alpha < \varphi_0 = \operatorname{arctg}(f)$. В этом случае заведомо, при возможном равновесии, равнодействующая (т.е. сила тяжести) проходит через центр масс тела и его точку опоры. Однако, для выполнения последнего усло-

вия, необходимо еще наложить определенное ограничение на угол наклона α , которое зависит от всей формы поверхности рассматриваемого тела.

Покажем, как получить эти ограничения. Пусть в некоторой (произвольной) декартовой системе координат $Sxyz$ (где C – центр масс тела) уравнение поверхности тела имеет вид $F(x, y, z) = 0$. Тогда ясно, что для реализации указанного условия (сила тяжести проходит через центр масс C и точку опоры O тела, опирающегося на плоскость с углом наклона α) должна существовать такая точка O на поверхности тела с координатами (x, y, z) , в которой нормаль к поверхности тела (являющаяся также и нормалью к наклонной плоскости) образует с радиус-вектором CO (в положении равновесия это будет также и вертикаль) угол α .

В аналитическом виде это условие эквивалентно следующим двум равенствам

$$F(x, y, z) = 0, \quad \cos \alpha = \frac{x(\partial F/\partial x) + y(\partial F/\partial y) + z(\partial F/\partial z)}{n\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.10)$$

$$\text{где } n = n(x, y, z) = \sqrt{(\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2 + (\partial F/\partial z)^2}$$

Если поверхность тела является выпуклой замкнутой и гладкой, то для существования решений уравнений (4.10) необходимо и достаточно выполнения следующего неравенства

$$\alpha < \alpha^*, \quad \cos \alpha^* = \min_{(x,y,z)} \left[\frac{x(\partial F/\partial x) + y(\partial F/\partial y) + z(\partial F/\partial z)}{n(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (4.11)$$

В (4.11) операция \min берется по всем тройкам (x, y, z) , удовлетворяющим уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Таким образом, условием возможного и обязательного равновесия тяжелого твердого тела, ограниченного гладкой, замкнутой и выпуклой поверхностью и опирающегося одной своей точкой на шероховатую (с коэффициентом трения f) наклонную плоскость с углом наклона α , является неравенство

$$\alpha < \min \{\varphi_0, \alpha^*\}, \quad \varphi_0 = \arctg(f), \quad (4.12)$$

где α^* определяется из (4.11).

Задача о равновесии эллипсоида на шероховатой наклонной плоскости. В качестве примера, в котором будет явно определено значение α^* , необходимое для записи условия (4.12), рассмотрим задачу о возможном и обязательном равновесиях произвольного, тяжелого и уравновешенного (центр тяжести совпадает с центром симметрии) эллипсоида на шероховатой наклонной плоскости. Уточним постановку задачи.

Пусть дано уравновешенное твердое тело, поверхность которого представляет собой эллипсоид с полуосями $a \geq b \geq c$. Помещаем это тело на шероховатую наклонную плоскость с углом наклона α и коэффициентом трения f . Требуется определить, во-первых, все положения возможного равновесия тела, и, во-вторых, ограничения на угол наклона α , при которых равновесие возможно и является обязательным.

Решение поставленной задачи осуществляется следующим образом. Пусть C – центр масс тела и одновременно геометрический центр эллипсоида. Выберем систему координат $Sxyz$ так, что уравнение поверхности эллипсоида имеет канонический вид

$$F(x, y, z) = k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 - 1 = 0, \quad \text{где } k_1 = 1/a^2, \quad k_2 = 1/b^2, \quad k_3 = 1/c^2 \quad (4.13)$$

По предположению $a \geq b \geq c$. Поэтому для новых обозначений соблюдаются неравенства

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \quad (4.14)$$

Для функции $F(x, y, z)$ из (4.13) и $n(x, y, z)$ из (4.10) имеем соотношения

$$x\partial F/\partial x + y\partial F/\partial y + z\partial F/\partial z = 2, \quad n = n(x, y, z) = 2\sqrt{k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2} \quad (4.15)$$

Из (4.10), используя (4.15), получим для определения положений равновесия эллипсоида два уравнения

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 = 1, \quad (x^2 + y^2 + z^2)(k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2) = 1/\cos^2 \alpha \quad (4.16)$$

Второе уравнение системы (4.16), с использованием первого уравнения той же системы, может быть преобразовано к виду

$$[xy(k_1 - k_2)]^2 + [yz(k_2 - k_3)]^2 + [xz(k_1 - k_3)]^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (4.17)$$

Вводя обозначения

$$x_1 = x^2, \quad x_2 = y^2, \quad x_3 = z^2, \quad (x_1 \in [0, a^2], x_2 \in [0, b^2], x_3 \in [0, c^2]) \quad (4.18)$$

получим из (4.16), (4.17) следующие два уравнения для определения положений возможного равновесия эллипсоида на наклонной плоскости

$$\begin{aligned} k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1, \quad l_{12} x_1 x_2 + l_{23} x_2 x_3 + l_{13} x_1 x_3 = \operatorname{tg}^2 \alpha \\ l_{12} = (k_1 - k_2)^2, \quad l_{23} = (k_2 - k_3)^2, \quad l_{13} = (k_1 - k_3)^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Определим все положения возможного равновесия в вырожденных случаях.

1) Пусть $\alpha = 0$ (опорная плоскость горизонтальна). Тогда система из (4.19) имеет только лишь решения вида: $x_k = x_l = 0$, $x_m = a^2$, или b^2 , или c^2 ($k, l, m = 1, 2, 3$) (две координаты равны нулю, а третья – квадрату одной из полуосей эллипсоида). Эти решения соответствуют опоре эллипсоида на одну из главных его полуосей, которые, очевидно, являются состояниями его возможных равновесий.

2) Пусть $k_1 = k_2 = k_3$. Тогда $a = b = c$, т.е. эллипсоид вырождается в шар. В этом случае, согласно обозначениям из (4.19), имеем $l_{12} = l_{13} = l_{23} = 0$, и уравнения равновесия из (4.19) имеют решения лишь при $\alpha = 0$, т.е. только на горизонтальной плоскости. Таким образом, уравновешенный шар может находиться в возможном равновесии только на горизонтальной плоскости, что, впрочем, очевидно и без вычислений.

3) Пусть $k_1 < k_2 = k_3$, т.е. $a > b = c$ (неравенство $k_1 < k_2$, ($a > b$) строгое). В этом случае тело является эллипсоидом вращения с осью x (соответствующей большей полуоси a) в качестве оси симметрии (т.е. это – вытянутый эллипсоид типа “веретена”). Согласно (4.19), тогда имеем

$$l_{23} = 0, \quad l_{12} = l_{13} = l = (k_1 - k_2)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 b^4}$$

Уравнения из (4.19) для определения положений возможных равновесий приобретают более простой вид

$$k_1 x_1 + k_2(x_2 + x_3) = 1, \quad lx_1(x_2 + x_3) = \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad (x_1 \in [0, a^2]) \quad (4.20)$$

Решение уравнений (4.20) сводится к решению квадратного уравнения $x_1 - k_1 x_1^2 = k_2(\operatorname{tg}^2 \alpha / l)$ и имеет в исходных переменных x, y, z , согласно обозначениям (4.18), следующий вид

$$x^2 = a^2 \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{D} \right), \quad y^2 + z^2 = b^2 \left(\frac{1}{2} \mp \sqrt{D} \right), \quad \text{где } D = \frac{1}{4} - k_1 k_2 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{l} \geq 0 \quad (4.21)$$

Таким образом, в исходных переменных x, y, z , одномерные многообразия (4.21) возможных равновесий эллипсоида вращения на наклонной плоскости с углом наклона

α представляют собой четыре параллельные окружности радиусов $r_{\pm} = b\sqrt{\frac{1}{2} \mp \sqrt{D}}$, которые лежат на эллипсоиде в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, т.е. оси x в системе $Sxyz$ (соответствующей большей полуоси a). Одна пара симметричных, относительно точки C , окружностей радиуса $r_+ = b\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{D}}$ соответствует значениям $x_+ = \pm a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{D}}$, а другая пара окружностей радиуса $r_- = b\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{D}}$ — для значений $x_- = \pm a\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{D}}$.

Ясно, что многообразия (4.21) не пусты только при соблюдении неравенства $D \geq 0$. Отсюда, в соответствие с обозначением из (4.21), следует, что возможные положения равновесия на наклонной плоскости с углом наклона α для эллипсоида вращения существуют лишь при выполнении неравенства

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \sqrt{\frac{l}{4k_1 k_2}} = (a^2 - b^2)/(2ab) \rightarrow \alpha \leq \alpha^* = \operatorname{arctg} \frac{a^2 - b^2}{2ab} = \operatorname{arccos} \frac{2ab}{a^2 + b^2} \quad (4.22)$$

Предельные положения равновесия даются уравнениями (4.21), в которых следует положить $D = 0$.

Итак, в предельном случае угла наклона опорной плоскости, при $\alpha = \alpha^*$, имеем $D = 0$. Тогда две пары окружностей из (4.21) сливаются в одну пару симметричных (относительно точки C) окружностей радиуса $r = b/\sqrt{2}$, уравнение которых, в переменных x, y, z , имеет вид

$$x^2 = a^2/2, \quad y^2 + z^2 = b^2/2 \quad (4.23)$$

Несложно подсчитать, используя (4.23), что в этом случае ось симметрии эллипсоида (т.е. ось x , соответствующая большей полуоси a эллипсоида) образует с вертикалью (при возможном равновесии вертикаль — это радиус-вектор точки опоры с координатами x, y, z в системе $Sxyz$) угол δ такой, что

$$\cos \delta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$$

Для дополнительного угла $\gamma = \pi/2 - \delta$, который образует в этой ситуации ось симметрии x с горизонтом будем иметь формулу

$$\cos \gamma = b/\sqrt{a^2 + b^2} \quad (4.24)$$

Замечание 2. Можно аналитически показать, что в состояниях возможных равновесий эллипсоида (для любого допустимого угла $\alpha \in [0, \alpha^*]$ наклонной плоскости), описываемых многообразиями из формул (4.21), соблюдается следующее свойство. Ось симметрии x эллипсоида вращения и соответствующая экваториальная плоскость, содержащая ось x и радиус-вектор точки контакта, располагаются в вертикальной плоскости, параллельной линии наибольшего ската наклонной опорной плоскости и, соответственно, перпендикулярной линии откоса, т.е. прямой, являющейся пересечением наклонной и горизонтальной плоскостей. В учебнике [13, стр. 115], при рассмотрении аналогичной задачи о равновесии эллипсоида вращения на шероховатой наклонной плоскости, этот факт предполагался самоочевидным в момент предельного наклона плоскости при $\alpha = \alpha^*$. На наш взгляд, этот факт необходимо доказывать, так как в случае невырожденного эллипсоида (при $a > b > c$ и $\alpha < \alpha^*$) приведенное утверждение, вообще говоря, неверно (см. ниже доказательство в п. 5 и замечание 4 к этому пункту).

Замечание 3. Отметим, что в учебнике [13, стр. 115], где рассматривалась аналогичная задача о предельном угле наклона для равновесия эллипсоида вращения на шероховатой наклонной плоскости, было ошибочно указано, что угол между осью симметрии и горизонтом, при предельном наклоне $\alpha = \alpha^*$ опорной плоскости, равен $\gamma = \pi/4$. Это, очевидно, не совпадает с полученной нами формулой (4.24), так как $a > b$ (строго) и, следовательно, из (4.24) вытекает, что $\gamma > \pi/4$ (строго).

Источник этой ошибки заключается в том, что угол φ , фигурирующий в использованных авторами учебника [13] параметрических уравнениях эллипса (т.е. вертикального сечения эллипсоида вращения, например, при $z = 0$)

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \quad (4.25)$$

принимался за упомянутый угол γ (или ему дополнительный). На самом деле, ясно, что φ является только параметром для описания контура упомянутого вертикального сечения и поэтому, вообще говоря, имеем $\varphi \neq \gamma$. Однако, для рассматриваемого предельного положения равновесия (когда $\alpha = \alpha^*$ и поэтому $x = \pm a/\sqrt{2}$, $y = \pm b/\sqrt{2}$, $z = 0$), имеем $\varphi = \pi/4$ или же $\varphi = 5\pi/4$. Именно это значение и было ошибочно принято авторами [13] за величину упомянутого выше угла γ . Кроме того, авторы учебника [13] почему-то параметрические уравнения эллипса (4.25) трактуют, как "...уравнение эллипса в центральной полярной системе координат..." (см. стр. 115 учебника [13]). На самом деле, как известно (см., например, [14], стр. 145), уравнениями эллипса в центральной полярной системе координат $\{\rho, \psi\}$ принято называть уравнения

$$x = \rho(\psi) \cos \psi, \quad y = \rho(\psi) \sin \psi, \quad \text{где} \quad \rho(\psi) = \left(\frac{\cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2} \right)^{-1/2}$$

Тогда угол ψ , фигурирующий в последних равенствах, действительно является углом между осью симметрии x эллипсоида и радиусом-вектором текущей точки опоры (т.е. вертикалью), а в положении предельного возможного равновесия, когда $x^2 = a^2/2$, $y^2 = b^2/2$, имеем $\rho^2 = x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)/2$, и, следовательно, получаем

$$\psi = \delta = \arccos(a/\sqrt{a^2 + b^2}) \rightarrow \gamma = \pi/2 - \delta = \arccos(b/\sqrt{a^2 + b^2})$$

Этот результат уже в точности совпадает с формулой (4.24).

4) Пусть $k_1 = k_2 < k_3$, тогда $a = b > c$. В этом случае тело является эллипсоидом вращения с осью z (соответствующей малой полуоси c) в качестве оси симметрии (т.е. это – сплюснутый эллипсоид типа “блина” или “патиссона”). Согласно (4.19), тогда имеем

$$l_{12} = 0, \quad l_{23} = l_{13} = l = (k_1 - k_3)^2 = [(a^2 - c^2)/(a^2 c^2)]^2$$

Уравнения из (4.19) для определения положений возможных равновесий приобретают вид

$$k_1(x_1 + x_2) + k_3 x_3 = 1, \quad l x_3(x_1 + x_2) = \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad (x_3 \in [0, c^2])$$

Таким образом, дело опять же сводится к решению квадратного уравнения. Дальнейшие рассуждения и выводы получаются аналогичными предыдущему п. 3).

5) Рассмотрим общий невырожденный случай, когда

$$0 < k_1 < k_2 < k_3 \quad (a > b > c > 0) \quad (4.26)$$

Неравенства в (4.26) являются строгими. В соответствии с (4.16), для определения максимального угла α^* наклона опорной плоскости будем решать следующую задачу Лагранжа на условный экстремум

$$\sigma = 1/\cos^2 \alpha = (x^2 + y^2 + z^2)(k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2) = H(x, y, z) \rightarrow \max \quad (4.27)$$

при условии $F(x, y, z) = k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 - 1 = 0$

Для введенного в (4.27) параметра σ имеем следующие границы изменения $\sigma \in [1, +\infty)$ (причем $\alpha \in [0, \pi/2]$).

Используя метод Лагранжа, будем искать стационарные точки функции Лагранжа

$$L(x, y, z) = H(x, y, z) - \lambda F(x, y, z)$$

где $\lambda \neq 0$ – неопределенный множитель Лагранжа. В результате получаем следующую систему трех уравнений

$$\begin{aligned} 2x[k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2 + k_1^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_1] &= 0 \\ 2y[k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2 + k_2^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_2] &= 0 \\ 2z[k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2 + k_3^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_3] &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для решения системы (4.28) рассмотрим следующие случаи.

5.1. $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Тогда из (4.28) получаем систему

$$\begin{aligned} k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2 + k_1^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_1 &= 0 \\ k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2 + k_2^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_2 &= 0 \\ k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2 + k_3^2(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda k_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Вычитая в системе (4.29) поочередно из первого уравнения второе, затем третье уравнение, а затем из второго уравнения вычитая третье уравнение, получаем, что решения (при выполнении условий (4.26)) могут существовать лишь при $k_1 + k_2 = k_1 + k_3 = k_2 + k_3 \rightarrow k_1 = k_2 = k_3$ ($a = b = c$), что противоречит условию (4.26). Таким образом, в этом случае стационарных точек нет.

5.2. $x = 0, y \neq 0, z \neq 0$. Решая при этих условиях систему (4.28), совместно с равенством $F(x, y, z) = k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 - 1 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= (k_2 + k_3)^2 / (2k_2 k_3), \quad y^2 = 1 / (2k_2), \\ z^2 &= 1 / (2k_3), \quad H = H_{23} = (k_2 + k_3)^2 / (4k_2 k_3) \end{aligned}$$

5.3. $x \neq 0, y = 0, z \neq 0$. Аналогично случаю 5.2 получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= (k_1 + k_3)^2 / (2k_1 k_3), \quad x^2 = 1 / (2k_1) \\ z^2 &= 1 / (2k_3), \quad H = H_{13} = (k_1 + k_3)^2 / (4k_1 k_3) \end{aligned}$$

5.4. $x \neq 0, y \neq 0, z = 0$. Аналогично случаям 5.2 и 5.3 получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= (k_1 + k_2)^2 / (2k_1 k_2), \quad x^2 = 1 / (2k_1), \quad y^2 = 1 / (2k_2) \\ H &= H_{12} = (k_1 + k_2)^2 / (4k_1 k_2) \end{aligned}$$

5.5. $x = 0, y = 0, z \neq 0$. В этом случае из системы (4.28) получим $z^2 = \lambda / (2k_3)$. Используя условие $F = 0$, имеем $\lambda = 2, z^2 = 1/k_3$. Тогда функция H принимает в полученной точке значение $H = 1$, что соответствует очевидному минимуму (при этом, согласно (4.27), имеем $\sigma = 1 \rightarrow \alpha = 0$). Аналогичный результат мы получаем и в двух других возможных случаях $x \neq 0, y = 0, z = 0$ и $x = 0, y \neq 0, z = 0$.

Подводя итоги, получаем, что случаи 5.2–5.4 соответствуют локальным условным максимумам, а случаи из 5.5 дают локальные условные минимумы для функции $H(x, y, z)$. Далее, непосредственной проверкой нетрудно установить, что при выпол-

нении неравенств (4.26), соблюдаются также неравенства $H_{13} > H_{12}$, $H_{13} > H_{23}$ (эти величины определены выше в пп. 5.2–5.4).

Таким образом, абсолютный условный максимум функции $H(x, y, z)$ в общем невырожденном случае (4.26) реализуется лишь в рассмотренном случае 5.3, когда $x = \pm a/\sqrt{2}$, $y = 0$, $z = \pm c/\sqrt{2}$. В этом случае, используя (4.27), имеем

$$H_{\max} = (a^2 + c^2)^2 / (4a^2 c^2) = \sigma^* = 1 / \cos^2 \alpha^* \Rightarrow \alpha^* = \arccos[2ac / (a^2 + c^2)] \quad (4.30)$$

Замечание 4. Пусть угол наклона α опорной плоскости удовлетворяет условию $\alpha \in [0, \alpha^*]$, где α^* определяется из (4.30). Обозначим через x , y , z координаты точки поверхности эллипсоида, в которой реализуется возможное равновесие тела. В этом случае соблюдаются уравнения (4.16). Тогда косинусы углов ε_1 , ε_2 , ε_3 , которые образуют, соответственно, оси Sx , Sy , Sz эллипсоида с прямой откоса, являющейся прямой пересечения наклонной и горизонтальной плоскостей, даются следующими формулами (доказательство см. ниже)

$$\cos \varepsilon_1 = (k_3 - k_2)yz / \operatorname{tg} \alpha, \quad \cos \varepsilon_2 = (k_1 - k_3)xz / \operatorname{tg} \alpha, \quad \cos \varepsilon_3 = (k_2 - k_1)xy / \operatorname{tg} \alpha \quad (4.31)$$

Из первой формулы (4.31), в частности, следует, что при $k_1 < k_2 = k_3$ (см. случай 3 и замечание 2) получим $\cos \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \pi/2$, и утверждение из замечания 2 обосновано. Кроме того, в общем случае, в положении предельного равновесия при $\alpha = \alpha^*$, согласно п. 5.3 и (4.30), имеем

$$x = a/\sqrt{2}, \quad y = 0, \quad z = c/\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha^* = (a^2 - c^2) / (2ac)$$

Тогда из (4.31) получим

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \pi/2, \quad |\cos \varepsilon_2| = 1 \Rightarrow \varepsilon_2 = 0 \\ \text{или} \quad \varepsilon_2 = \pi, \quad \cos \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_3 = \pi/2 \end{aligned}$$

Таким образом, в момент предельного положения равновесия, при $\alpha = \alpha^*$, эллипсоид располагается так, что ось Sx направлена вдоль прямой наибольшего ската, ось Sz перпендикулярна наклонной плоскости, а ось Sy направлена параллельно прямой откоса.

Соотношения (4.31) доказываются следующим образом. В положении равновесия вектор нормали наклонной плоскости параллелен вектору $N = (k_1x, k_2y, k_3z)^T$, а вектор нормали к горизонтальной плоскости параллелен радиус-вектору точки опоры $r = (x, y, z)^T$. Следовательно, прямая откоса, которая является пересечением этих плоскостей, перпендикулярна одновременно обоим векторам N и r , т.е. параллельна их векторному произведению

$$l = [N \cdot r] = (yz(k_3 - k_2), xz(k_1 - k_3), xy(k_2 - k_1))^T$$

Учитывая, что модуль последнего вектора, согласно равенству (4.17), равен $\operatorname{tg} \alpha$, получаем формулы (4.31).

5. Плоский случай расположения равнодействующей G . В этом случае считаем, что нормаль Oz к опорной плоскости, вектор OC и равнодействующая G , линия действия которой проходит через точку O , лежат в одной плоскости (т.е. в плоскости $S\eta\zeta$ или, что равнозначно, в плоскости Oyz). Подчеркнем, что в этих предположениях задача все равно остается пространственной, так как возможные движения тела, при исследовании обязательности равновесия, могут происходить и не параллельно плоскости Oyz .

В рассматриваемом случае имеем $\psi = 0$ и $\varepsilon = \operatorname{tg} \psi / \cos \varphi = 0$. Уравнения (3.10) и неравенства (2.5), (3.6), с учетом обозначений (3.11), приобретают вид

$$\begin{aligned} x[v(abb_{12}) - b_{12}] + y\left(\frac{v + b_{22}}{\cos \gamma}\right) &= b_{12}d \\ x\{v[1 - ab(1 + b_{11})] + b_{11}\} + y\left(-\frac{b_{12}}{\cos \gamma}\right) &= -(1 + b_{11})d \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (2.5) в этом случае получаем

$$|\gamma + \varphi| < \varphi_0 = \arctg(f), \quad g = \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi}(1 - v_x f a) > 0 \quad (5.2)$$

В (5.1), (5.2), как и ранее, введены обозначения

$$x = \sin \alpha, \quad y = \cos \alpha, \quad v = u/f, \quad a = \tg \gamma, \quad b = \tg \varphi, \quad d = (a + b)/f \quad (5.3)$$

Решая линейную систему (5.1) относительно x, y , получим в данном случае из (3.12)–(3.14) следующие выражения

$$\begin{aligned} x &= \frac{l_1 v + l_0}{k_2 v^2 + k_1 v + k_0}, \quad y = \frac{m_1 v + m_0}{k_2 v^2 + k_1 v + k_0} \\ k_2 &= (1 + b_{11})ab - 1, \quad k_1 = (b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)ab - b_{11} - b_{22}, \quad k_0 = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} \\ l_1 &= (1 + b_{11})d, \quad l_0 = (b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)d, \quad m_1 = -b_{12}d \cos \gamma, \quad m_0 = b_{12}d \cos \gamma \end{aligned} \quad (5.4)$$

Решение (5.4) является корректным для тех $v \in (1, +\infty)$, при которых выполнено тригонометрическое равенство $x^2 + y^2 = 1$ и соблюдаются неравенства (5.2). Из (5.4) получим

$$F(v) = x^2 + y^2 = \frac{(l_1 v + l_0)^2 + (m_1 v + m_0)^2}{(k_2 v^2 + k_1 v + k_0)^2} \quad (5.5)$$

Таким образом, дело сводится к возможности решения уравнения

$$F(v) = 1, \quad v \in (1, +\infty) \quad (5.6)$$

где $F(v)$ определяется формулой (5.5), при обозначениях (5.4). При этом должны выполняться еще и неравенства (5.2).

Утверждение 2. Уравнение (5.6), где $F(v)$ определяется формулами (5.5), (5.4), при условиях возможного равновесия из (5.2), имеет решения на интервале $v \in (1, +\infty)$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$1/(1 + b_{11}) < ab < 1, \quad (a = \tg \gamma, b = \tg \varphi) \quad (5.7)$$

Замечание 5. Из утверждения 1 следует, что 1-я часть условий обязательности равновесия (отсутствие решений уравнения (5.6), эквивалентное отсутствию скольжений в условиях возможного равновесия) в рассматриваемом плоском случае равносильна отрицанию неравенств (5.7), т.е. одному из следующих двух неравенств

$$ab < 1/(1 + b_{11}), \quad \text{либо} \quad ab > 1, \quad \text{где} \quad a = \tg \gamma > 0, \quad b = \tg \varphi \quad (5.8)$$

Кроме того, должно соблюдаться первое неравенство из (5.2) – условие возможного равновесия.

2-я часть условий обязательности равновесия (условие отсутствия отрыва тела от опоры) следует из неравенства (3.19) при $\psi = 0$ и имеет вид

$$(1 + b_{11})\tg \gamma \sin \varphi < \cos \varphi \quad (5.9)$$

Отметим, что для случая из пункта 4 (равнодействующая G проходит через центр масс тела) имеем $b = \tg \varphi = 0$, и первое из неравенств (5.8) и неравенство (5.9) обязательно возможного равновесия выполнено заведомо. Таким образом, подтвержден результат из пункта 4.

Замечание 6. Из (5.2), (5.8), (5.9), путем несложного перебора возможных ситуаций, получаем следующие условия обязательности возможного равновесия в рассматриваемом плоском случае:

1. $\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{ctg} \gamma / (1 + b_{11})$,
при $\max\{-\pi/2, -(\varphi_0 + \gamma)\} < \varphi < \varphi_0 - \gamma$, $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(f)$
2. $\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{ctg} \gamma$, при $\pi/2 < \varphi_0 + \gamma < \pi$, и $-(\varphi_0 + \gamma) < \varphi < -\pi/2$

то возможное равновесие является обязательным.

Переформулируем полученные условия обязательного равновесия в проекциях векторов G и OC на оси системы координат $Oxyz$.

Пусть $X = 0$, $Y = -\sin(\gamma + \varphi)$, $Z = -\cos(\gamma + \varphi) < 0$, ($\gamma \in [0, \pi/2]$) суть проекции равнодействующей G (напомним, что модуль этого вектора был принят за единицу) на оси Ox , Oy , Oz системы координат $Oxyz$, $x_C = 0$, $y_C = \sin \gamma > 0$, $z_C = \cos \gamma > 0$ суть проекции вектора OC на те же оси (модуль этого вектора был также принят за единицу). Используя приведенные обозначения, получаем следующие соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma = \varepsilon = y_C / z_C, \quad \operatorname{tg} \varphi = (\xi - \varepsilon) / (1 + \xi \varepsilon), \quad \text{где} \quad \xi = Y / Z$$

Несложный анализ позволяет тогда установить следующие условия обязательности равновесия в проекциях, которые следуют, соответственно, из неравенств вышеприведенных пунктов 1 и 2. Напомним, что $y_C > 0$, $z_C > 0$, $Z < 0$.

1. Если $\max\{-f, -z_C / y_C\} < \frac{Y}{Z} < \min\{f, \xi_1\}$, где $\xi_1 = \frac{k^2 + y_C^2}{y_C z_C}$, $k^2 = \frac{1}{b_{11}}$, то возможное равновесие является обязательным.

2. Если $-f < \frac{Y}{Z} < -\frac{z_C}{y_C}$, при $0 < \frac{z_C}{y_C} < f$, то возможное равновесие также является обязательным.

Объединение полученных в 1 и 2 неравенств приводит к следующему окончательному условию обязательного возможного равновесия в плоском случае:

$$-f < \frac{Y}{Z} < \min\{f, \xi_1\}, \quad \text{где} \quad \xi_1 = \frac{k^2 + y_C^2}{y_C z_C}, \quad k^2 = \frac{1}{b_{11}}$$

Отметим, что полученное условие по виду совпадает с соответствующим условием, полученным другим способом в [6], где рассматривалась аналогичная задача для плоского твердого тела. Однако, в [6] величина k^2 представляла собой радиус инерции тела относительно центра масс, т.е. относительно оси, проходящей через центр масс C тела и перпендикулярной плоскости тела. В полученном же нами неравенстве эта величина, вообще говоря, не является таковой, т.е. радиусом инерции тела относительно оси $C\xi$ (исключение составляет случай, когда ось $C\xi$ является главной осью инерции тела). Более подробное обсуждение представлено в Замечании 7 ниже (после доказательства утверждения 2).

Доказательство утверждения 2. Основная идея доказательства состоит в следующем. Уравнение (5.6), где функция $F(v)$ определяется соотношениями (5.5) и (5.4), имеет решения тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$, стоящий в знаменателе выражения (5.5), имеет хотя бы один вещественный корень на интервале $1 < v < +\infty$. Действительно, пусть $v_1 > 1$ — вещественный корень функции $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$. Несложная проверка, с учетом 1-го неравенства из (5.2) (т.е. $|\operatorname{tg}(\gamma + \varphi)| < f$), позволяет установить следующие свойства функции $F(v)$:

$$F(1) = \frac{(a+b)^2}{f^2(1-ab)^2} < 1, \quad F(v_1 - 0) = +\infty, \quad F(v_1 + 0) = +\infty, \quad F(+\infty) = 0 \quad (5.10)$$

Из (5.10) и свойств решений, даваемых формулами (5.4), следует, что уравнение (5.6) имеет, как минимум, два решения на интервалах $(1, v_1 - 0)$ и $(v_1 + 0, +\infty)$. Причем, на этих решениях величина x из формул (5.4) принимает значения разных знаков. Таким образом, на одном из этих значений будет заведомо выполнено второе неравенство из (5.2). Отметим, что трехчлен $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$ не может иметь два корня на указанном интервале изменения v , так как меньший корень всегда меньше единицы. Функция $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$ обладает следующими свойствами:

$$Q(0) = k_0 = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} < 0, \text{ в силу неравенств Сильвестра (3.8),}$$

$$Q(1) = k_2 + k_1 + k_0 = (ab - 1)c, \quad c = 1 + b_{11} + b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0,$$

$$Q(+\infty) = +\infty, \text{ при } k_2 = (1 + b_{11})ab - 1 > 0, \quad Q(+\infty) = -\infty, \text{ при } k_2 = (1 + b_{11})ab - 1 < 0$$

Далее, несложный анализ графика (который здесь опускается) квадратного трехчлена $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$, где коэффициенты задаются формулами из (5.4), и с использованием приведенных свойств функции $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$, показывает, что при выполнении неравенств (5.7), рассматриваемое квадратное уравнение $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0 = 0$ заведомо имеет в точности один корень на интервале $1 < v < +\infty$, и обязательное равновесие не реализуется.

Если же неравенства (5.7) нарушены, то несложно показать, используя приведенные выше свойства функции $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$, что корней квадратного уравнения $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0 = 0$ на рассматриваемом интервале $1 < v < +\infty$ нет. Действительно, точка экстремума параболы $Q(v)$ дается уравнением

$$v_* = \frac{ab(b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2) - b_{11} - b_{22}}{2[1 - (1 + b_{11})ab]}$$

Непосредственная проверка показывает, что при нарушении неравенств (5.7) соблюдается неравенство $v_* < 1$. Таким образом, при нарушении неравенств (5.7) функция $Q(v) = k_2v^2 + k_1v + k_0$ является при $v > 1$ монотонной. Это и означает, с учетом приведенных выше свойств, что в этом случае функция $Q(v)$ при $v > 1$ корней не имеет.

Нам осталось показать, что в этих случаях уравнение (5.6) также не имеет решений. Неравенства (5.7) нарушаются в следующих двух случаях:

$$(1 + b_{11})ab < 1 \quad \text{или} \quad ab > 1$$

Пусть выполнено первое неравенство $(1 + b_{11})ab < 1$. Покажем, что в этом случае производная функции $F(v)$ в указанном интервале является строго отрицательной. Это будет означать монотонное убывание функции $F(v)$ от положительного значения $F(1) < 1$ до значения $F(+\infty) = 0$. Таким образом, уравнение (5.6) заведомо не будет иметь решений и реализуется обязательное равновесие. Вычисляем производную от функции $F(v)$ из (5.5).

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{dv} = \frac{g_3 v^3 + g_2 v^2 + g_1 v + g_0}{(k_2 v^2 + k_1 v + k_0)^3} \quad (5.11)$$

$$g_3 = -k_2(l_1^2 + m_1^2), \quad g_2 = -3k_2(l_1 l_0 + m_1 m_0)$$

$$g_1 = k_0(l_1^2 + m_1^2) - 2k_2(l_0^2 + m_0^2) - k_1(l_1 l_0 + m_1 m_0)$$

$$g_0 = k_0(l_1 l_0 + m_1 m_0) - k_1(l_0^2 + m_0^2)$$

Используя формулы (5.4) и неравенство (5.8), можно показать (подробности здесь опускаем, в силу громоздкости выкладок), что все коэффициенты g_k , ($k = 0, 1, 2, 3$) кубического полинома из (5.11) являются строго положительными. Заметим, что справедливость неравенств $g_3 > 0$, $g_2 > 0$ следует из неравенств $k_2 < 0$, $l_1 l_0 + m_1 m_0 > 0$, справедливых для величин из (5.4) в рассматриваемом случае $(1 + b_{11})ab < 1$ и неравенств Сильвестра (3.8). Неравенства же $g_1 > 0$, $g_0 > 0$ получаются непосредственной проверкой, с учетом неравенства $(1 + b_{11})ab < 1$ и неравенств Сильвестра (3.8).

Далее, в рассматриваемом случае $(1 + b_{11})ab < 1$ функция $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$, в силу отсутствия корней и неравенства

$$Q(1) = k_2 + k_1 + k_0 = (ab - 1)c < 0, \quad (c = 1 + b_{11} + b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0)$$

является строго отрицательной на всем интервале $v \in (1, +\infty)$. Таким образом, производная из (5.11) является в итоге отрицательной, а функция $F(v)$ монотонно убывает от значения $F(1) < 1$ до значения $F(+\infty) = 0$. Следовательно, уравнение (5.6) решений не имеет и в этом случае реализуется обязательное равновесие.

Случай $ab > 1$ рассматривается аналогично. В этом случае функция $Q(v) = k_2 v^2 + k_1 v + k_0$, в силу отсутствия корней и неравенства

$$Q(1) = k_2 + k_1 + k_0 = (ab - 1)c > 0, \quad (c = 1 + b_{11} + b_{22} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0)$$

является строго положительной на всем интервале $v \in (1, +\infty)$. Знаменатель же дроби для выражения производной функции $F(v)$ из (5.11) является отрицательным на всем интервале $v \in (1, +\infty)$. Это следует из неравенства, справедливого в данном случае:

$$\begin{aligned} & -k_2(l_1^2 + m_1^2)v^3 - 3k_2(l_1 l_0 + m_1 m_0)v^2 + k_0(l_1^2 + m_1^2)v - 2k_2(l_0^2 + m_0^2)v - \\ & - k_1(l_1 l_0 + m_1 m_0)v + k_0(l_1 l_0 + m_1 m_0) - k_1(l_0^2 + m_0^2) < \\ & < -(l_0^2 + m_0^2)(2k_2 v + k_1) - v(l_1 l_0 + m_1 m_0)(3k_2 v + k_1) < 0 \end{aligned}$$

Положительность скобок в последнем неравенстве доказывается непосредственным вычислением. Утверждение 2 доказано.

Замечание 7. Условия обязательного равновесия, представленные в заключительной части Замечания 6, формально эквивалентны аналогичным условиям, полученным в работе [6] для плоского случая твердого тела (расположенного вместе с внешними силами в плоскости Oyz), где проскальзывание точки опоры допускалось лишь вдоль оси Oy . В данной пространственной задаче это соответствует случаю возможных скольжений при условии $\alpha = \pm\pi/2$ (тогда $x = \pm 1$, $y = 0$). Несложно показать, используя уравнения (5.1), что при $b_{12} \neq 0$ и $v > 1$ таких решений быть не может. В рассматриваемой пространственной задаче (для такого специального “плоского” расположения равнодействующей G) при нарушении условий обязательности равновесия может возникнуть лишь такое проскальзывание точки опоры, которое не совпадает с осью Oy (т.е. вектор w_O не принадлежит плоскости Oyz). Причина этого несоответствия такова. В работе [6], на самом деле, рассмотрена задача об обязательности возможного равновесия цилиндрического тела, которое опирается на шероховатую плоскость не

одной точкой, а целой прямой (т.е. образующей цилиндра, которым на самом деле в данном случае является рассматриваемое в [6] твердое тело). Однако, при $b_2 = 0$ и условиях (5.7) система (5.1) имеет лишь решение $x = -1$, $y = 0$ ($\alpha = -\pi/2$). Таким образом, только в этом специальном случае (когда $b_2 = 0$) имеется согласованность и аналогия между пространственной задачей настоящей статьи и плоской задачей, рассмотренной в [6].

6. Произвольное расположение равнодействующей G . Пусть равнодействующая G проходит через точку опоры O , но, вообще говоря, не принадлежит плоскости Oyz . Тогда угол $\psi \neq 0$. В этом случае результат аналогичен утверждению 2 из пункта 5, но является более громоздким. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Обязательное равновесие может быть нарушено в том и только в том случае, когда квадратный трехчлен $\Delta(v)$ из (3.13) имеет хотя бы один вещественный корень на интервале $v \in (1, +\infty)$. Это эквивалентно следующим двум вариантам совокупностей неравенств.

$$1. 1 - b_2 \varepsilon a < (1 + b_1)ab < 1 + b_1 \quad (6.1)$$

$$2. (2 + b_1 + b_{22} - b_2 \varepsilon a) / s_2 < ab < \min \left\{ 1, \frac{1 - b_2 \varepsilon a}{1 + b_1} \right\} \quad (6.2)$$

$$(abs_2 - 2 - b_1 - b_{22} + b_2 \varepsilon a)^2 - 4[(1 + b_1)ab + b_2 \varepsilon a - 1]s_1(ab - 1) > 0 \quad (6.3)$$

$$s_1 = (1 + b_1)(1 + b_{22}) - b_2^2 > 0, \quad s_2 = (1 + b_1)(2 + b_{22}) - b_2^2 > 0$$

Напомним, что в (6.1)–(6.3) приняты обозначения $a = \operatorname{tg} \gamma > 0$, $b = \operatorname{tg} \varphi$, $\varepsilon = \operatorname{tg} \psi / \cos \varphi$.

Таким образом, 1-я часть условий обязательного равновесия (отсутствие скольжения) состоит в том, что нарушены, во-первых, неравенства (6.1) и, во-вторых, нарушается хотя бы одно из неравенств (6.2) или (6.3). Кроме того, должно быть выполнено неравенство (2.5) – условие возможного равновесия.

2-я часть условий обязательного равновесия получается из неравенства (3.19), гарантирующего отсутствие отрыва тела от опоры. В результате получаем следующие неравенства

$$(1 + b_1)ab < 1 - b_2 \varepsilon a, \quad \text{при } \varepsilon > 0, \quad (1 + b_1)ab > 1 - b_2 \varepsilon a, \quad \text{при } \varepsilon < 0$$

Отметим, что области параметров, удовлетворяющих либо неравенствам (6.1), либо неравенствам (6.2) и (6.3), являются непустыми.

Доказательство утверждения 3 аналогично доказательству утверждения 2. Как и выше, при доказательстве утверждения 2, покажем сначала, что при наличии вещественного корня квадратного уравнения $\Delta(v) = 0$ из (3.13) при $v > 1$, уравнение $x^2 + y^2 = 1$, где x , y определяются формулами (3.12)–(3.14), заведомо имеет решения при $v > 1$. Далее, определим условия, при которых уравнение $\Delta(v) = 0$ имеет решения при $v > 1$. Для этого введем переменную $z = v - 1$ и воспользуемся тождеством

$$\Delta(v) = (q_2 z^2 + q_1 z + q_0) / \cos \gamma \quad (6.4)$$

$$q_0 = s_1(ab - 1), \quad q_1 = s_2 ab - 2 - b_1 - b_{22} + b_2 \varepsilon a, \quad q_2 = (1 + b_1)ab + b_2 \varepsilon a - 1$$

В (6.4) параметры s_1 , s_2 введены в формулах (6.3).

Тогда несложно получаются условия (6.1)–(6.3), представляющие собой условия наличия при $z > 0$ вещественных корней квадратного уравнения $q_2 z^2 + q_1 z + q_0 = 0$ (при введенных в (6.4) обозначениях для q_0 , q_1 , q_2).

Если же условия (6.1)–(6.3) нарушаются, как это было указано в формулировке утверждения 3, то мы вычисляем производную по v от выражения $x^2 + y^2$, согласно формуле (5.11), где параметры k, l, m определяются формулами (3.13), (3.14). Затем показываем, что все коэффициенты полинома 3-го порядка $g_3v^3 + g_2v^2 + g_1v + g_0$ имеют знак противоположный знаку трехчлена $\Delta(v)$ при нарушении неравенств (6.1)–(6.3). Подробности здесь опускаются ввиду громоздкости выкладок.

Замечание 8. Области параметров задачи, в которых нарушаются неравенства (6.1) или (6.2) (т.е. области обязательного равновесия) могут быть определены численно с использованием стандартных компьютерных приложений. В общем случае для любых конкретных значений параметров задачи с помощью формул (6.1) или (6.2) можно определить является рассматриваемое положение возможным равновесия обязательным или нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джеллетт Д.Х.* Трактат по теории трения. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2009. 264 с.
2. *Пенлеве П.* Лекции о трении. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1954. 316 с.
3. *Журавлёв В.Ф.* Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–88.
4. *Андронов В.В., Журавлёв В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2010. 184 с.
5. *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 205 с.
6. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2011. 304 с.
7. *Матаев I.S., Иванова Т.В.* The dynamics of a rigid body with a sharp edge in contact with an inclined surface in the presence of dry friction // Regul. Chaot. Dyn. 2014. V. 19. B. 1. P. 116–139. <https://doi.org/10.1134/S1560354714010080>
8. *Vaganian A.* On generalized Coulomb-Amontons’s law in the context of rigid body dynamics // Nonlinear Dyn. 2020. V. 101. P. 2145–2155. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05948-1>
9. *Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М.* Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. М.: URSS, 2017. 235 с.
10. *Иванов А.П.* О равновесии систем с сухим трением // ПММ. 2015. Т. 79. В. 3. С. 317–333.
11. *Розенблат Г.М.* О равновесии скамейки Жуковского // Докл. РАН. 2017. Т. 472. № 6. С. 659–665. <https://doi.org/10.7868/S0869565217060111>
12. *Розенблат Г.М.* О равновесии твердого тела, опирающегося одной точкой на шероховатую плоскость // Докл. РАН. Физика, техн. науки. 2021. Т. 500. № 1. С. 57–64. <https://doi.org/10.31857/S2686740021050096>
13. *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. М.: Академия, 2010. 432 с.
14. *Lowrence J.D.* A catalog of special plane curves. N.-Y.: Dover Publications, 1972. 382 p.

УДК 539.3

УЧЕТ СМЕЩЕНИЯ КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА В АЛГОРИТМЕ МКЭ ПРИ РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

© 2023 г. А. Ш. Джабраилов^{а,*}, А. П. Николаев^а, Ю. В. Клочков^а, Н. А. Гуреева^б

^аФГБОУ ВО Волгоградский государственный аграрный университет,
Волгоград, Россия

^бФГБОУ ВО Финансовый университет при правительстве РФ,
Москва, Россия

* e-mail: arsen82@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.

После доработки 13.12.2022 г.

Принята к публикации 27.12.2022 г.

В криволинейной системе координат разработан алгоритм получения матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента оболочки вращения в виде криволинейного фрагмента ее срединной поверхности. В качестве узловых неизвестных приняты компоненты векторов перемещений узловых точек и компоненты производных векторов перемещений узлов конечного элемента. При получении аппроксимирующих функций для искомых величин использованы функции формы класса $C^{(1)}$ для векторной величины внутренней точки конечного элемента через векторные величины узловых точек. После координатных преобразований функций формы класса $C^{(1)}$ на основе параметров используемой криволинейной системы координат, получены необходимые аппроксимирующие выражения искомых величин, использование которых приводит к учету смещения конечного элемента как твердого тела. Представлен алгоритм назначения граничных условий для принятых узловых неизвестных. Показана возможность реализации условий сопряжения оболочек вращения при использовании разработанного конечного элемента.

На конкретных тестовых примерах показана высокая эффективность предложенного способа аппроксимации при наличии смещения оболочки как жесткого целого под действием заданной нагрузки.

Ключевые слова: оболочка вращения, вектор перемещения, деформация, конечный элемент, сопряжение оболочек, матрица жесткости

DOI: 10.31857/S0572329922600797, EDN: PSLZTK

1. Введение. В последние десятилетия тонкостенные оболочки относят к наиболее перспективным типам инженерных конструкций. Сегодня теория оболочек имеет достаточно сформированные очертания [1–4]. Вместе с тем имеется ряд проблем практического применения разрешающих уравнений, которые обусловлены их сложностью. Поэтому использование численных методов значительно упрощает решение прикладных задач по расчету оболочек [5]. Наиболее популярным из них является метод конечных элементов (МКЭ), развитию которого посвящены труды российских и иностранных авторов [6–13]. Высокий уровень развития технологий требует применения все более сложных оболочечных элементов, включающих различные ветвления и имеющих нестандартные значения градиентов кривизны меридиана. В местах сочленения оболочек действия внешних нагрузок приобретают ярко выраженный характер,

приводящий к резким изменениям в значениях напряжений. Поэтому тут необходимо тщательное исследование напряженно-деформированного состояния конструкции. Актуальной является и проблема учета смещения как жесткого целого. Наличие проблемы учета смещения конечного элемента отмечено во многих литературных источниках [14–16]. При использовании теории оболочек на основе гипотезы Кирхгофа–Лява неизвестной функцией является вектор перемещения \mathbf{v} . Если вектор перемещения представляется компонентами базисных векторов, касательных к срединной поверхности оболочки, и ее нормали, то такой конечный элемент относится к типу А. Если вектор перемещения \mathbf{v} представляется в ортах глобальной декартовой системы координат, то элемент определяется типом В. В [15] отмечается, что в случае одинаковых аппроксимаций для вектора перемещения \mathbf{v} и радиус-вектора срединной поверхности \mathbf{R} (изопараметрический подход) условие представления учета смещения как твердого тела выполняется. Так как радиус-вектор следует определять в каждой точке интегрирования аналитически, то можно утверждать, что условие учета смещения как твердого тела элемента типа В всегда выполняется. При использовании в расчетах оболочек конечных элементов типа А общего решения проблемы учета смещения как твердого тела не существует.

При вычислениях в криволинейных системах координат деформации в произвольной точке оболочки, определяемые как разности метрических тензоров точки в деформированном и исходном состояниях, являются функциями компонент вектора перемещения и компонент частных производных вектора перемещения. Поэтому более адекватным будет использование конечного элемента, в котором эти величины являются искомыми неизвестными.

В настоящей работе получена матрица жесткости четырехугольного конечного элемента, являющегося фрагментом срединной поверхности оболочки вращения. В качестве узловых неизвестных приняты перемещения узловых точек и компоненты производных векторов перемещений узлов конечного элемента. Для получения аппроксимирующих выражений искоемых величин использованы функции формы класса $C^{(1)}$ для аппроксимации вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через векторы перемещения его узлов и производные векторов перемещений в узлах. После координатных преобразований указанных векторных соотношений на основе параметров используемой криволинейной системы координат получены аппроксимирующие выражения искоемых величин конечного элемента, позволяющие учитывать смещения элемента как твердого тела. Определены условия учета граничных условий для компонент производных векторов узловых смещений и разработаны условия сопряжения сочлененных оболочек вращения.

2. Материалы и методы. *2.1. Основные положения.* Для точки M^0 срединной поверхности оболочки вращения может быть задан радиус-вектор

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} + r\cos\theta\mathbf{k}$$

где r – радиус вращения оболочки; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – орты декартовой системы координат; x и θ – глобальные криволинейные координаты.

Выполняя стандартные для механики оболочек процедуры можно получить векторы, касательные к срединной линии

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^0 &= \mathbf{R}_{,x}^0 = \mathbf{i} + r_{,x}\sin\theta\mathbf{j} + r_{,x}\cos\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{a}_2^0 &= \mathbf{R}_{,\theta}^0 = r\cos\theta\mathbf{j} - r\sin\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{a}_3^0 &= \frac{\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0}{|\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0|} = -r_{,x}\mathbf{ri} + r(\sin\theta\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где запятая обозначает операцию дифференцирования.

Производные полученных в (2.1) векторов локального базиса можно записать в матричном виде компонентами этого же базиса

$$\left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} = [\mathbf{m}] \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \mathbf{a}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1} = [\mathbf{n}] \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} \quad (2.2)$$

где $\left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \mathbf{a}_{1,x}^0 \mathbf{a}_{2,x}^0 \mathbf{a}_{3,x}^0 \right\}$; $\left\{ \mathbf{a}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \mathbf{a}_{1,\theta}^0 \mathbf{a}_{2,\theta}^0 \mathbf{a}_{3,\theta}^0 \right\}$, а принцип формирования матриц $[\mathbf{m}]$ и $[\mathbf{n}]$ описан в [17].

В результате деформирования оболочки точка срединной поверхности \mathbf{M}^0 примет новое положение \mathbf{M} , определяемое радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{v} \quad (2.3)$$

Входящий в (2.3) вектор перемещения \mathbf{v} определяется компонентами локального базиса точки \mathbf{M}^0

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha^0 + v \mathbf{a}_3^0 \quad (2.4)$$

где v^α , v – меридиональные и тангенциальные компоненты вектора перемещения.

Производные вектора \mathbf{v} определяются дифференцированием (2.4) по соответствующим глобальным криволинейным координатам с учетом (2.2)

$$\mathbf{v}_{,\alpha} = f_{\alpha\rho}^0 \mathbf{a}_\rho^0 + f_{\alpha 3}^0 \mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{v}_{,\alpha\beta} = f_{\alpha\beta\rho}^0 \mathbf{a}_\rho^0 + f_{\alpha\beta 3}^0 \mathbf{a}_3^0 \quad (2.5)$$

где компоненты $f_{\alpha\rho}^0$, $f_{\alpha\beta}^0$, $f_{\alpha 3}^0$ первых и вторых производных векторов перемещений являются функциями компонент вектора перемещения и их производных

$$\begin{aligned} f_1^1 &= v_{,x}^1 - m_{13} v, \dots, f_1^1 = v^1 m_{13} + v_x, \quad f_{11}^1 = v_{,xx}^1 - m_{13,x} v - m_{13} (v_{,x} + f_1^1); \\ \dots f_{22}^1 &= v_{,\theta\theta} + n_{23} (v_{,\theta}^2 + f_2^2), \quad f_{12}^1 = v_{,x\theta}^1 - m_{13} v_{,\theta} + n_{21} f_1^2, \dots, f_{12}^1 = v_{,\theta}^1 m_{13} + v_{,x\theta} + n_{23} f_1^2 \end{aligned}$$

Для точек $\mathbf{M}^{0\zeta}$ и \mathbf{M}^ζ , отстоящих на расстоянии ζ от срединной поверхности оболочки, радиус-векторы определяются соотношения (рис. 1)

$$\mathbf{R}^{0\zeta} = \mathbf{R}^0 + \zeta \mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{R}^\zeta = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{v}^\zeta = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{v} + \zeta (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_3^0) \quad (2.6)$$

где \mathbf{v}^ζ – вектор перемещения точки $\mathbf{M}^{0\zeta}$ в точку \mathbf{M}^ζ .

Входящий в (2.6) орт нормали к срединной поверхности \mathbf{a}_3 в деформированном состоянии определяется матричным соотношением

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\sqrt{a}}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,x}$; $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,\theta}$; $a \approx a^0 = a_{12}^0 a_{22}^0 - a_{12}^0 a_{21}^0$ – детерминант метрического тензора в точке \mathbf{M}^0 .

Дифференцированием (2.6) с учетом (2.7) и (2.2) можно получить выражения для базисных векторов в точках $\mathbf{M}^{0\zeta}$ и \mathbf{M}^ζ

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha^0 &= \mathbf{R}_{,\alpha}^{0\zeta} = \mathbf{a}_\alpha^0 + \zeta \mathbf{a}_{3,\alpha}^0 \\ \mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{g}_\alpha^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^\zeta = \mathbf{g}_\alpha^0 + \mathbf{v}_{,\alpha} + \zeta (\mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{a}_{3,\alpha}^0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\mathbf{a}_{3,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a^0}} (\mathbf{a}_{1,\alpha} \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{2,\alpha})$.

Деформации в произвольной точке оболочки определяются соотношениями [18]

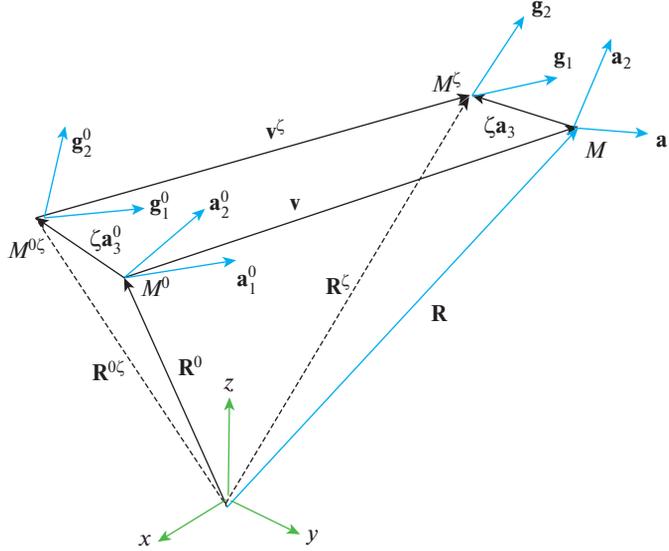


Рис. 1. Положения рассматриваемых точек оболочки.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{\alpha}^0 \mathbf{v}_{,\beta}^{\zeta} - \mathbf{g}_{\beta}^0 \mathbf{v}_{,\alpha}^{\zeta}) \quad (2.9)$$

При использовании (2.8) выражения (2.9) можно представить в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \cdot \chi_{\alpha\beta} \quad (2.10)$$

где деформации и искривления в соответствующей точке срединной поверхности в геометрически линейной постановке определяются соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{\alpha}^0 \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{a}_{\beta}^0 \mathbf{v}_{,\alpha}) \quad (2.11)$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathbf{a}_{\alpha}^0(\mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\beta}^0) + \mathbf{a}_{\beta}^0(\mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{a}_{3,\alpha}^0) + \mathbf{a}_{3,\alpha}^0 \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{a}_{3,\alpha}^0 \mathbf{v}_{,\alpha}]$$

Выполнив скалярные произведения в соотношениях (2.11), выражения (2.10) можно представить в матричной форме

$$\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}_{3 \times 1} = \left[\mathbf{L}^{\zeta} \right]_{3 \times 18} \left\{ \mathbf{f} \right\}_{18 \times 1} \quad (2.12)$$

$$\text{где } \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_{11}^{\zeta}, \varepsilon_{22}^{\zeta}, 2\varepsilon_{12}^{\zeta} \right\}$$

$$\left\{ \mathbf{f} \right\}_{18 \times 1}^T = \left\{ v^1, v^2, v, f_1^1, f_1^2, f_1, f_2^1, f_2^2, f_2, f_{11}^1, f_{11}^2, f_{11}, f_{12}^1, f_{12}^2, f_{12}, f_{12}^1, f_{12}^2 \right\}$$

$\left[\mathbf{L}^{\zeta} \right]_{3 \times 18}$ – матрица алгебраических операторов.

Соотношения (2.11) и (2.12) показывают, что деформации в произвольном слое оболочки являются алгебраическими функциями компонент вектора перемещения соответствующей точки срединной поверхности и его частных производных по криволинейным координатам.

Контравариантные компоненты $\sigma^{\alpha\beta}$ тензора напряжений в произвольном слое оболочки определяются с помощью соотношений [19]

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda I_1(\varepsilon^\xi) g^{\alpha\beta} + 2\nu g^{\alpha\rho} g^{\beta\gamma} \varepsilon_{\rho\gamma}^\xi \quad (2.13)$$

где λ, ν – параметры Ляме; $g^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты метрического тензора; $I_1(\varepsilon^\xi) = g^{\rho\gamma} \varepsilon_{\rho\gamma}^\xi$ – первый инвариант тензора деформаций.

Выражение (2.13) можно представить в матричном виде

$$\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} = [C]_{3 \times 3} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\xi \right\}_{3 \times 1} \quad (2.14)$$

где $\{\sigma^{\alpha\beta}\}^T = \{\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{12}\}$.

2.2. Конечный элемент и аппроксимация узловых неизвестных. В качестве узловых неизвестных четырехугольного конечного элемента, являющегося фрагментом срединной поверхности оболочки вращения, приняты компоненты векторов перемещений узловых точек и компоненты производных этих векторов. Для выполнения численного интегрирования этот фрагмент срединной поверхности отображается на квадрат с локальными координатами ξ и η , которые изменяются в пределах $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$. Функция перехода имеет вид

$$\rho = \{f(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T \{\rho_y\}_{4 \times 1} \quad (2.15)$$

где $\{\rho_y\}^T = \{\rho^i, \rho^j, \rho^k, \rho^l\}$; $\{f(\xi, \eta)\}^T = \left\{ \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2}, \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2}, \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2}, \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} \right\}$, а под символом ρ понимаются узловые значения криволинейных координат x и θ .

Дифференцированием (2.15) определяются производные координат x и θ в системе ξ, η и производные локальных координат ξ, η по глобальным переменным x и θ .

Для получения интерполяционных соотношений искомых величин $v^\alpha, v, f_{\alpha}^{\rho}, f_{\alpha}, f_{\alpha\beta}^{\rho}, f_{\alpha\beta}$ использованы общеизвестные аппроксимирующие зависимости класса $C^{(1)}$ для вектора перемещения внутренней точки конечного элемента \mathbf{v} через векторы перемещений узловых точек и производные этих векторов в локальной и глобальной системах координат

$$\{\mathbf{v}^1\}_{1 \times 12}^T = \{\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^l, \mathbf{v}_{,\xi}^i, \mathbf{v}_{,\xi}^j, \mathbf{v}_{,\xi}^k, \mathbf{v}_{,\xi}^l, \mathbf{v}_{,\eta}^i, \mathbf{v}_{,\eta}^j, \mathbf{v}_{,\eta}^k, \mathbf{v}_{,\eta}^l\} \quad (2.16)$$

$$\{\mathbf{v}^g\}_{1 \times 12}^T = \{\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^l, \mathbf{v}_{,x}^i, \mathbf{v}_{,x}^j, \mathbf{v}_{,x}^k, \mathbf{v}_{,x}^l, \mathbf{v}_{,\theta}^i, \mathbf{v}_{,\theta}^j, \mathbf{v}_{,\theta}^k, \mathbf{v}_{,\theta}^l\}$$

Столбцы неизвестных $\{\mathbf{v}^1\}$ и $\{\mathbf{v}^g\}$, входящие в (2.16) связаны матричным равенством

$$\{\mathbf{v}^1\}_{12 \times 1} = [H]_{12 \times 12} \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1}, \quad (2.17)$$

где компоненты матрицы $[H]$ формируются на основании зависимостей

$$\mathbf{v}_{,\xi} = \mathbf{v}_{,x} X_{,\xi} + \mathbf{v}_{,\theta} \theta_{,\xi}; \quad \mathbf{v}_{,\eta} = \mathbf{v}_{,x} X_{,\eta} + \mathbf{v}_{,\theta} \theta_{,\eta}$$

Аппроксимирующие соотношения класса $C^{(1)}$ использованы для векторных величин

$$\mathbf{v} = \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^1\}_{12 \times 1} = \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T [H]_{12 \times 12} \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} = \{\gamma\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \{\varphi(\xi, \eta)\}^T &= \{h_1(\xi)h_1(\eta), h_2(\xi)h_1(\eta), h_2(\xi)h_2(\eta), h_1(\xi)h_2(\eta) \\ &h_3(\xi)h_1(\eta), h_4(\xi)h_1(\eta), h_4(\xi)h_2(\eta), h_3(\xi)h_2(\eta), h_1(\xi)h_3(\eta) \\ &h_2(\xi)h_3(\eta), h_2(\xi)h_4(\eta), h_1(\xi)h_4(\eta)\} \end{aligned}$$

$h_i(\xi)$ и $h_i(\eta)$ – полиномы Эрмита третьей степени в локальных координатах.

Дифференцированием (2.18) определяются частные производные вектора перемещения \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{,\alpha} &= \{\varphi_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^1\}_{12 \times 1} = \{\varphi_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T [\mathbf{H}]_{12 \times 12} \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} = \{\gamma_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha\beta} &= \{\varphi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^1\}_{12 \times 1} = \{\varphi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T [\mathbf{H}]_{12 \times 12} \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} = \{\gamma_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Входящие в (2.19) производные аппроксимирующих полиномов $\{\varphi(\xi, \eta)\}$ в глобальной системе координат определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\varphi\}^T}{\partial \rho^\alpha} &= [\{\varphi_{,\xi}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} + \{\varphi_{,\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha}] = \{\varphi_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T \\ \frac{\partial^2 \{\varphi\}^T}{\partial \rho^\alpha \partial \rho^\beta} &= [\{\varphi_{,\xi\xi}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} \xi_{,\beta} + \{\varphi_{,\xi\eta}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha\beta} + \{\varphi_{,\xi\eta}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \{\varphi_{,\eta\xi}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \xi_{,\beta} \\ &+ \{\varphi_{,\eta\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \{\varphi_{,\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha\beta}] = \{\varphi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T \end{aligned} \quad (2.20)$$

где координаты x и θ обозначены как ρ^1 и ρ^2 соответственно.

Чтобы получить аппроксимирующие выражения для компонент векторных величин (2.4) и (2.5) из матричных соотношений (2.18) и (2.19), следует выполнить в них координатные преобразования. С этой целью входящий в (2.19) вектор-столбец $\{\mathbf{v}^g\}$ записывается выражением

$$\{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} = [\mathbf{S}]_{12 \times 36} \cdot \{\mathbf{f}_y^g\}_{36 \times 1} \quad (2.21)$$

где $\{\mathbf{f}_y^g\}_{1 \times 36}^T = \{u^i, v^i, w^i, \dots, u^1, v^1, w^1, f_1^i, f_1^{2i}, f_1^{3i}, \dots, f_2^i, f_2^{2i}, f_2^{3i}, \dots, f_2^{11}, f_2^{21}, f_2^{31}\}$, $[\mathbf{S}]_{12 \times 36}$ – матрица, ненулевыми элементами которой являются базисные векторы узловых точек $\{\alpha^{0w}\} = \{\mathbf{a}_1^{0w}, \mathbf{a}_2^{0w}, \mathbf{a}_3^{0w}\}$, ($w = i, j, k, l$).

При учете (2.21) выражения (2.18) и (2.19) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left\{ \gamma_1 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_4 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \gamma_5 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_8 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \gamma_9 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \right\} \{\mathbf{f}_y^g\}_{36 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha} &= \left\{ \gamma_{1,\alpha} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \right\} \{\mathbf{f}_y^g\}_{36 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha\beta} &= \left\{ \gamma_{1,\alpha\beta} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha\beta} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \right\} \{\mathbf{f}_y^g\}_{36 \times 1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Узловые векторы локального базиса $\{\mathbf{a}^{0w}\}$, входящие в (2.22), выражаются через локальные базисные векторы внутренней точки конечного элемента

$$\{\mathbf{a}^{0w}\}_{3 \times 1} = [\boldsymbol{\tau}^w]_{3 \times 3} \{\mathbf{i}\}_{3 \times 1} = [\boldsymbol{\tau}^w]_{3 \times 3} [\boldsymbol{\tau}]_{3 \times 3}^{-1} \{\mathbf{a}^0\}_{3 \times 1} = [\mathbf{z}^w]_{3 \times 3} \{\mathbf{a}^0\}_{3 \times 1}, \quad (w = i, j, k, l) \quad (2.23)$$

Векторные величины (2.22) с учетом (2.23) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}_{1 \times 3}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}^0 \end{Bmatrix}_{1 \times 3}^T \begin{bmatrix} \gamma_1 [\mathbf{z}^i]^{-T} & \dots & \gamma_{12} [\mathbf{z}^1]^{-T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{36 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{f}_\alpha \end{Bmatrix}_{1 \times 3}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_\alpha^1 \\ \mathbf{f}_\alpha^2 \\ \mathbf{f}_\alpha \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}^0 \end{Bmatrix}_{1 \times 3}^T \begin{bmatrix} \gamma_{1,\alpha} [\mathbf{z}^i]^{-T} & \dots & \gamma_{12,\alpha} [\mathbf{z}^1]^{-T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{36 \times 1} \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{f}_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}_{1 \times 3}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\alpha\beta}^1 \\ \mathbf{f}_{\alpha\beta}^2 \\ \mathbf{f}_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}^0 \end{Bmatrix}_{1 \times 3}^T \begin{bmatrix} \gamma_{1,\alpha\beta} [\mathbf{z}^i]^{-T} & \dots & \gamma_{12,\alpha\beta} [\mathbf{z}^1]^{-T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{36 \times 1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из равенств (2.24) определяются аппроксимирующие функции искомым компонент векторных величин \mathbf{v} , \mathbf{v}_α , $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{f}_\alpha^1 \\ \mathbf{f}_\alpha^2 \\ \mathbf{f}_\alpha \end{Bmatrix}_{3 \times 1} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 [\mathbf{z}^i]^{-T} & \gamma_2 [\mathbf{z}^j]^{-T} & \gamma_3 [\mathbf{z}^k]^{-T} & \gamma_4 [\mathbf{z}^l]^{-T} & \gamma_5 [\mathbf{z}^i]^{-T} & \dots & \gamma_8 [\mathbf{z}^k]^{-T} & \gamma_9 [\mathbf{z}^i]^{-T} & \dots & \gamma_{12} [\mathbf{z}^1]^{-T} \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_\alpha^1 \\ \mathbf{f}_\alpha^2 \\ \mathbf{f}_\alpha \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma_{1,\alpha} [\mathbf{z}^i]^{-T} & \gamma_{2,\alpha} [\mathbf{z}^j]^{-T} & \gamma_{3,\alpha} [\mathbf{z}^k]^{-T} & \gamma_{4,\alpha} [\mathbf{z}^l]^{-T} & \gamma_{5,\alpha} [\mathbf{z}^i]^{-T} & \dots & \gamma_{12,\alpha} [\mathbf{z}^1]^{-T} \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\alpha\beta}^1 \\ \mathbf{f}_{\alpha\beta}^2 \\ \mathbf{f}_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma_{1,\alpha\beta} [\mathbf{z}^i]^{-T} & \gamma_{2,\alpha\beta} [\mathbf{z}^j]^{-T} & \gamma_{3,\alpha\beta} [\mathbf{z}^k]^{-T} & \gamma_{4,\alpha\beta} [\mathbf{z}^l]^{-T} & \gamma_{5,\alpha\beta} [\mathbf{z}^i]^{-T} & \dots & \gamma_{12,\alpha\beta} [\mathbf{z}^1]^{-T} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Как видно, в аппроксимирующих выражениях (2.25) через матрицы $[\mathbf{z}^w]_{3 \times 3}^{-T}$ ($w = i, j, k, l$), отражающие преобразования базисных векторов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента, фигурируют параметры используемой в расчете криволинейной системы координат.

Входящий в (2.12) столбец $\{\mathbf{f}\}$ с учетом (2.25) можно переписать следующим образом

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f} \end{Bmatrix}_{18 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{18 \times 36} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{36 \times 1} \quad (2.26)$$

Принимая во внимание зависимости (2.26) столбец деформаций произвольного слоя оболочки (2.12) окончательно примет вид

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^\zeta \end{bmatrix}_{3 \times 18} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \end{Bmatrix}_{18 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^\zeta \end{bmatrix}_{3 \times 18} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{18 \times 36} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{36 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix}_{3 \times 36} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{36 \times 1} \quad (2.27)$$

При классическом способе интерполяции компонент вектора перемещения [19, 20], представляемого по (2.4) в базисных векторах точки срединной поверхности, в качестве узловых неизвестных принимаются величины

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \lambda_{xy}^1 \end{Bmatrix}_{1 \times 12} &= \left\{ \lambda^i, \lambda^j, \lambda^k, \lambda^l, \lambda_{\xi}^i, \lambda_{\xi}^j, \lambda_{\xi}^k, \lambda_{\xi}^l, \lambda_{\eta}^i, \lambda_{\eta}^j, \lambda_{\eta}^k, \lambda_{\eta}^l \right\} \\ \begin{Bmatrix} \lambda_y^g \end{Bmatrix}_{1 \times 12} &= \left\{ \lambda^i, \lambda^j, \lambda^k, \lambda^l, \lambda_x^i, \lambda_x^j, \lambda_x^k, \lambda_x^l, \lambda_\theta^i, \lambda_\theta^j, \lambda_\theta^k, \lambda_\theta^l \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

где под символом λ понимаются компоненты векторов перемещений v^1, v^2 и v .

Аппроксимирующие выражения принимаются для каждой компоненты в виде

$$\lambda = \left\{ \varphi(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^1 \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T [\mathbf{H}]_{12 \times 12} \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} \quad (2.29)$$

Производные компонент v^1, v^2 и v определяются дифференцированием (2.29)

$$\lambda_{,\alpha} = \left\{ \varphi_{,\alpha}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^1 \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi_{,\alpha}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T [\mathbf{H}]_{12 \times 12} \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma_{,\alpha} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} \quad (2.30)$$

$$\lambda_{,\alpha\beta} = \left\{ \varphi_{,\alpha\beta}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^1 \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi_{,\alpha\beta}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T [\mathbf{H}]_{12 \times 12} \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1}$$

Аппроксимирующие выражения (2.29) и (2.30) оказываются независимыми от параметров используемой криволинейной системы координат.

Деформации произвольной точки (2.12) записываются выражениями

$$\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}_{3 \times 1} = \left[\mathbf{L}_0^{\xi} \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{u} \right\}_{3 \times 1} \quad (2.31)$$

где $\left\{ \mathbf{u} \right\}^T = \{v^1, v^2, v\}$, $[\mathbf{L}_0^{\xi}]$ – матрица дифференциальных и алгебраических операторов.

На основе (2.29) компонуется матричное соотношение

$$\left\{ \mathbf{u} \right\}_{3 \times 1} = \left[\mathbf{K}_0 \right]_{3 \times 36} \left\{ \mathbf{u}_y \right\}_{36 \times 1} \quad (2.32)$$

$$\text{где } \left\{ \mathbf{u}_y \right\}^T = \left\{ v_y^1 \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ v_y^2 \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y \right\}_{1 \times 12}^T.$$

Деформации (2.27) с использованием традиционной аппроксимации записываются выражением

$$\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}_{3 \times 1} = \left[\mathbf{L}_0^{\xi} \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{u} \right\}_{3 \times 1} = \left[\mathbf{L}_0^{\xi} \right]_{3 \times 3} \left[\mathbf{K}_0 \right]_{3 \times 36} \left\{ \mathbf{u}_y \right\}_{36 \times 1} = \left[\mathbf{B}_0 \right]_{3 \times 36} \left\{ \mathbf{u}_y \right\}_{36 \times 1} \quad (2.33)$$

2.3. Матрица жесткости конечного элемента. Матрица жесткости и столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента формируются на основе функционала Лагранжа, отражающего равенство действительных работ внешних и внутренних сил

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_F \left\{ v \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \mathbf{P} \right\}_{3 \times 1} dF \quad (2.34)$$

где $\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}^T = \{ \sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{12} \}$ – матрица-строка контравариантных компонент тензора напряжений в произвольном слое оболочки, отстоящем на расстоянии ζ от срединной поверхности; $\left\{ \mathbf{P} \right\}^T = \{ p_1 p_2 p_3 \}$ – столбец внешней нагрузки.

Принимая во внимание (2.14), (2.25) и (2.27) равенство (2.34) можно представить в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \left\{ f_y^g \right\}_{1 \times 36}^T \int_V \left[\mathbf{B} \right]^T \left[\mathbf{C} \right] \left[\mathbf{B} \right] dV \left\{ f_y^g \right\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ f_y^g \right\}_{1 \times 36}^T \int_F \left[\mathbf{K} \right]^T \left\{ \mathbf{P} \right\}_{3 \times 1} dF \quad (2.35)$$

Минимизация функционала (2.35) по $\left\{ f_y^g \right\}_{1 \times 36}^T$ позволяет получить матричное соотношение

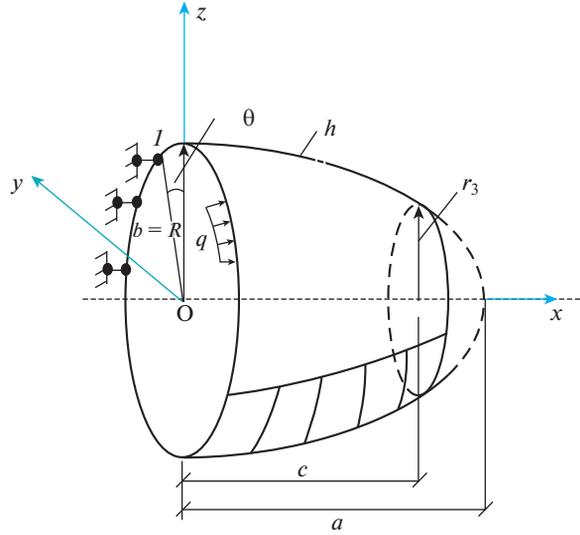


Рис. 2. Усеченный эллипсоид вращения.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^g \\ \mathbf{f}_y^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^g \end{bmatrix}$$

где $\begin{bmatrix} \mathbf{M}^g \\ \mathbf{f}_y^g \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} dV$ – матрица жесткости; $\begin{bmatrix} \mathbf{R}^g \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} = \int_F \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} dF$ – столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента в глобальной системе координат.

При использовании в функционале (2.35) матричных выражений $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{K}_0 \end{bmatrix}$ по (2.33), (2.32) получается традиционная матрица жесткости [20, 21] для определения узловых неизвестных $\begin{bmatrix} \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix}$.

2.4. Формулировка граничных условий в опорном сечении оболочки. Рассмотрим условия защемления для оболочки вращения, имеющей на левом краю шарнирно-подвижную опору (рис. 2) при выбранном столбце узловых неизвестных

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}^T = \{v^1, f_1^1, f_2^1, v^2, f_1^2, f_2^2, v, f_1, f_2\} \quad (2.36)$$

В шарнирно-подвижной опоре для меридиональных и тангенциальных компонент вектора перемещения справедливы равенства

$$v^1 = 0, \quad v^2 = 0$$

В плоскости симметрии xOz для проекций вектора перемещения на соответствующие касательные векторы локального базиса должны выполняться следующие условия

$$\mathbf{v}_{,\theta} \cdot \mathbf{a}^1 = 0, \quad \mathbf{v}_{,\theta} \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \quad (2.37)$$

Согласно (2.5) при учете (2.2) равенства (2.37) можно записать в виде

$$f_2^1 = v_{,\theta}^1 + n_{21}v^2 = 0, \quad f_2 = v_{,\theta} + vn_{23} = 0$$

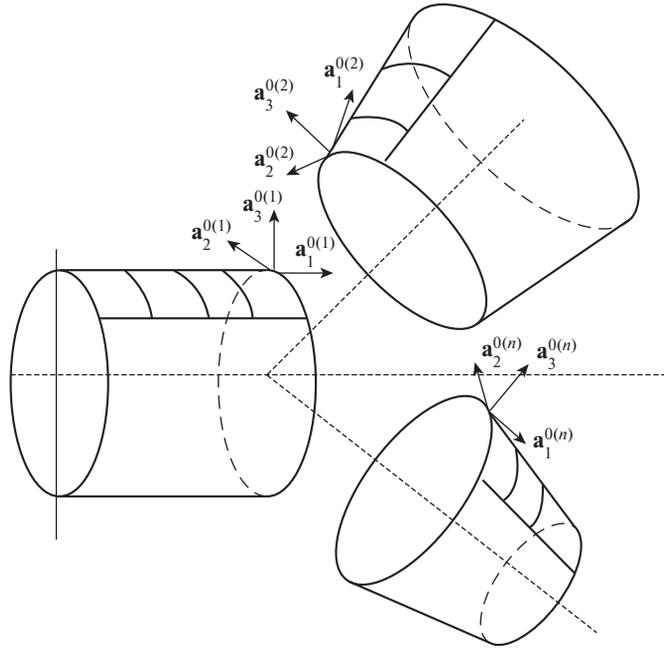


Рис. 3. Соединение трех оболочек вращения.

В плоскости симметрии uOz условия опирания можно найти из следующих соотношений

$$\mathbf{v}_{,x} \cdot \mathbf{a}_3 = 0, \quad \mathbf{v}_{,x} \cdot \mathbf{a}^2 = 0$$

или

$$f_1 = v_{,x} + v^1 m_{13} = 0, \quad f_1^2 = v_{,x}^2 + m_{22} v^2 = 0$$

2.5. Зависимости между узловыми неизвестными в узле сопряжения нескольких оболочек. При сочленении n оболочек вращения необходимо соблюдение корректных условий сопряжения. Для вывода этих условий предлагается принять набор узловых варьируемых параметров одной из сочленяемых оболочек в качестве основного (рис. 3). Компоненты узловых наборов остальных $(n - 1)$ сопрягаемых оболочек выражаются через основной при использовании кинематических условий сопряжения.

Первым условием сопряжения принималась инвариантность векторов перемещения n сопрягаемых оболочек в узлах ветвления меридиана

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)} = \dots = \mathbf{v}^{(n)} \quad (2.38)$$

где n – номер сопрягаемой оболочки.

Базисные векторы основной оболочки ($\mathbf{v}^{(1)}$) можно представить в базисе векторов любой из $(n - 1)$ примыкающих оболочек

$$\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^1 = \left[z^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1}, \quad \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^k = \left[z^k \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1}, \quad (k = \overline{2, n})$$

$$\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^1 = \left[z^0 \right]_{3 \times 3} \left[z^k \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^k, \quad \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^k = \left[z \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^1$$

где элементы матриц $\begin{bmatrix} z^0 \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} z^k \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}$ определяются согласно (2.1).

На основании (2.38) компоненты вектора перемещения любой из примыкающих оболочек можно найти из матричного соотношения

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v} \end{Bmatrix}_{3 \times 1}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \end{bmatrix}_{3 \times 3}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \end{Bmatrix}_{3 \times 1}^1 \quad (2.39)$$

Второе условие сопряжения определяется тем, что кривой пересечения n сочленяемых оболочек является окружность. Опираясь на это утверждение можно записать равенства

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(k)}}{\partial \theta}, \quad (k = \overline{2, n}) \quad (2.40)$$

На основании (2.40) с учетом (2.5) можно определить значения узловых агрегатных компонент любой из k примыкающих оболочек через столбец узловых агрегатных наборов основной оболочки

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \end{Bmatrix}_{3 \times 1}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \end{bmatrix}_{3 \times 3}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \end{Bmatrix}_{3 \times 1}^1 \quad (2.41)$$

где $\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \end{Bmatrix}_{1 \times 3}^T = \{f_2^1, f_2^2, f_2\}$.

Следующие условия сопряжения определяются из равенств углов поворотов нормалей к срединным поверхностям для каждой из n сочленяемых оболочек

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial x} \cdot \mathbf{a}^{0(1)} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(k)}}{\partial x} \cdot \mathbf{a}^{0(k)} \quad (2.42)$$

Выполнив операцию скалярного произведения векторов в (2.42) можно определить узловые компоненты f_1 для любой из примыкающих к основной k оболочек вращения

$$f_1^{(k)} = f_1^{(1)} \quad (2.43)$$

Также в узле сопряжения должны быть равными компоненты векторов $\mathbf{v}_{,x}$ на базисный вектор \mathbf{a}_2^0 всех сопрягаемых оболочек

$$\mathbf{v}_{,x}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_2^{0(1)} = \mathbf{v}_{,x}^{(2)} \cdot \mathbf{a}_2^{0(2)} = \dots = \mathbf{v}_{,x}^{(n)} \cdot \mathbf{a}_2^{0(n)} \quad (2.44)$$

Из равенств (2.44) определяются компоненты f_1^2 узлового набора любой из примыкающих к основной k оболочек

$$f_1^{2(k)} = f_1^{2(1)} \quad (2.45)$$

Узловые неизвестные f_1^1 всех примыкающих к основной k оболочек остаются свободно варьируемыми. В результате столбцы неизвестных в узлах ветвления меридиана представляются в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{1 \times (9+k)}^T = \left\{ \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{1 \times (9+k)}^{g(1)T}, f_1^{1(2)}, f_1^{1(3)} \dots f_1^{1(k)} \right\}, \quad (k = n - 1)$$

При использовании (2.39), (2.41), (2.43) и (2.45) формируется матричное соотношение для столбца узловых неизвестных любой из k примыкающих к основной оболочки

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{9 \times 1}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix}_{9 \times (9+k)} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_y^g \end{Bmatrix}_{(9+k) \times 1}^{(k)}$$

Таблица 1. Расчет эллипсоида

Номер узловой точки	Напряжение, МПа	Вариант столбца узловых неизвестных								Решение по формуле
		первый				второй				
		величина жесткого смещения оболочки, см								
		0.0	0.085	0.16	0.26	0.0	0.085	0.16	0.26	
1	σ_k^s	174.3	189.7	203.2	221.1	177.4	177.3	177.5	177.6	179.05
	σ_k^v	175.0	191.7	206.2	225.5	179.7	179.3	179.3	179.4	
	σ_k^n	173.5	187.8	200.3	216.8	175.2	175.1	175.2	175.3	

3. Результаты. *Пример 1.* Была решена тестовая задача по определению напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции в виде усеченного эллипсоида. Оболочка загружалась внутренним давлением интенсивности q и имела на левом краю пружинную опору, позволяющую ей смещаться в горизонтальном направлении, и нормаль, сохраняющую вертикальное положение. При абсолютной жесткости пружины она становится опорным стержнем, препятствующим горизонтальному смещению оболочки (рис. 2).

Исходные данные были приняты следующие: $q = 5$ МПа; большая полуось эллипса $a = 1.3$ м; малая полуось эллипса $b = 0.9$ м; $E = 2 \times 10^5$ МПа; $\mu = 0.3$; толщина оболочки $h = 0.02$ м; $c = 1.2$ м.

Расчет выполнялся в двух вариантах. В первом варианте в качестве узловых неизвестных выступали компоненты вектора перемещения и их производные по глобальным координатам x и θ

$$\{f^*\}_{1 \times 9}^T = \{v^1, v^2, v, v_x^1, v_x^2, v_x, v_\theta^1, v_\theta^2, v_\theta\} \quad (3.1)$$

Во втором варианте расчета узловыми неизвестными принимались компоненты вектора перемещения и компоненты его первых производных (2.36).

В табл. 1 приведены результаты расчета эллипсоида при различных величинах смещения конструкции в горизонтальном направлении как жесткого целого. В ней отражены значения кольцевых напряжений на срединной поверхности σ_k^s , а также во внутренних σ_k^v и внешних σ_k^n волокнах оболочки на ее левом краю (точка 1). Для наглядности по данным табл. 1 была построена эпюра напряжений (рис. 4).

Как видно из таблицы, при отсутствии жесткого смещения оба варианта узловых варьируемых параметров дают приемлемые показатели напряжений, которые совпадают со значениями, вычисленными по формуле Лапласа. При наличии жесткого смещения первый вариант узловых неизвестных приводит к неудовлетворительным результатам вычислений.

Число элементов дискретизации оболочки, исходя из анализа результатов сходимости вычислительного процесса, было принято равным 8.

Пример 2. Была решена задача по определению напряженно-деформированного состояния составной оболочечной конструкции, состоящей из цилиндра и примыкающего к нему эллипса (рис. 5). Оболочка загружалась внутренним давлением интенсивности q и имела на левом краю (точка 1) стержневую опору.

Исходные данные были приняты следующие: $q = 5$ МПа; большая полуось эллипса $a = 1.3$ м; малая полуось эллипса $b = R = 0.9$ м; $E = 2 \times 10^5$ МПа; $\mu = 0.3$; толщина оболочки $h = 0.02$ м; радиус цилиндрической оболочки $R = 0.9$ м; $c = 1.2$ м; $l = 1$ м.

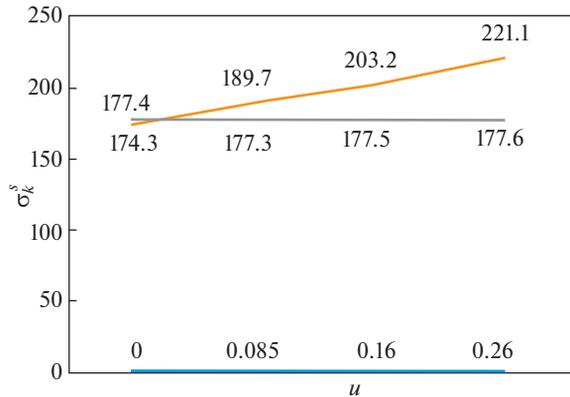


Рис. 4. Диаграммы кольцевых напряжений в зависимости от смещения оболочки как жесткого целого: σ_k^s — кольцевое напряжение на срединной поверхности оболочки вращения, МПа; u — величина жесткого смещения, см.

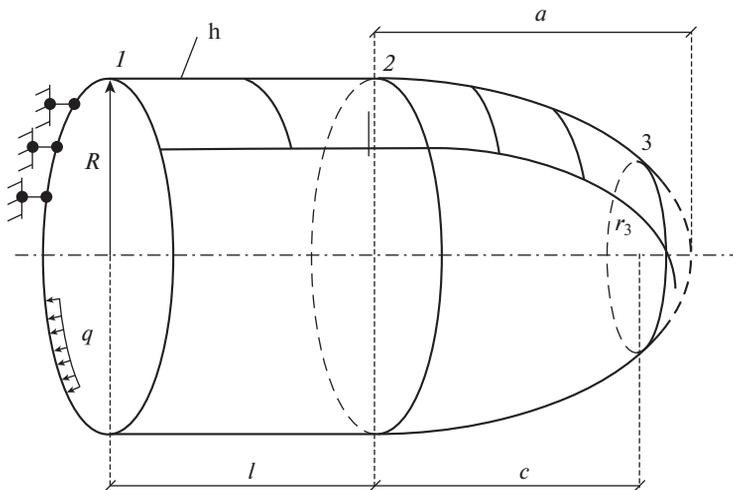


Рис. 5. Составная оболочечная конструкция.

Расчет выполнялся в двух вариантах. В первом варианте формирование матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента осуществлялось на основании традиционной интерполяции перемещений (2.29), (2.30). Во втором варианте использовалась предложенная авторами векторная аппроксимация полей перемещений (2.25).

Если стержневую опору заменить пружиной, то оболочечная конструкция получит возможность смещаться в осевом направлении как абсолютно твердое тело. Величина жесткого смещения может варьироваться в зависимости от жесткости пружины.

В табл. 2 приведены результаты расчета конструкции при различных значениях величины жесткого смещения и повариантном применении традиционной и векторной аппроксимации перемещений. В таблице представлены величины меридиональных и кольцевых напряжений на срединной поверхности оболочки в характерных точках

Таблица 2. Расчет составной оболочечной конструкции

Номер узловой точки	Напряжение, МПа	Вариант интерполяции перемещений								Решение по формуле
		традиционная				векторная				
		величина жесткого смещения оболочки, м								
		0.0	0.027	0.263	2.09	0.0	0.027	0.271	2.71	
1	σ_m	95.83	95.55	93.1	74.1	96.08	96.08	96.08	96.08	98.85
	σ_k	224.9	224.9	224.8	224.2	225.2	225.2	225.2	225.2	225.0
2	σ_m	95.58	95.0	89.82	50.3	94.8	94.8	94.8	94.8	98.85
	σ_k	183.6	175.6	105.3	-438.8	174.2	183.1	183.1	183.0	179.0
3	σ_m	1.1	-5.6	63.83	207.8	3.5	3.4	3.4	3.38	0.0
	σ_k	169.1	93.7	-56.53	-2328.2	171.9	171.9	171.9	171.9	169.6

конструкции: левом краю оболочки (точка 1), в узле ветвления (точка 2) и на свободном крае оболочки (точка 3).

Число элементов дискретизации оболочечной конструкции, обеспечивающее удовлетворительную сходимость вычислительного процесса в обоих вариантах расчета было принято равным 24.

Как видно из табл. 2 в отсутствии жесткого смещения и традиционная и векторная интерполяция компонент вектора перемещения приводят к удовлетворительным показателям параметров напряженно-деформированного состояния. При наличии же жестких смещений приемлемые показатели напряжений наблюдаются только в варианте векторной аппроксимации (2.25), предложенной авторами.

4. Обсуждения. В представленной работе достоверность результатов тестовых расчетов определялась несколькими критериями. Первым критерием выступала сходимость вычислительного процесса. Анализ сетки дискретизации показал, что удовлетворительная сходимость обеспечивается при числе конечных элементов равном 8 в первом примере расчета и 24 во втором.

В характерных точках конструкции можно вычислить значение контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния исходя из условия равновесия

$$\sigma_m = \frac{\pi R^2 - \pi r_3^2}{2\pi R} \cdot \frac{q}{t} \quad (4.1)$$

Значения меридиональных напряжений в крайних правых незагруженных краях оболочки (точка 3, рис. 5) по физическим соображениям должны стремиться к нулю.

Значения кольцевых напряжений определяются с помощью формулы Лапласа для тонкостенной оболочки

$$\frac{\sigma_m}{R_m} - \frac{\sigma_k}{R_k} = \frac{q}{t} \quad (4.2)$$

где R_m и R_k – радиусы главных кривизн.

Пример 1. При использовании (4.1) было найдено аналитическое значение кольцевого напряжения в точке 1, которое составило $\sigma_k = 179.05$ МПа.

Как видно из табл. 1 при отсутствии жестких смещений результаты повариантных расчетов практически совпали с вычисленными по известным формулам. Погрешности вычислений не превышают 2–3%.

Если оболочка получает возможность смещаться как жесткое целое, то результаты расчетов существенно различаются. В первом варианте при величине горизонтального смещения равном 8.5×10^{-4} м погрешность расчета по кольцевым напряжениям составила почти 6%. Если смещение увеличить в 3 раза, то эта погрешность составляет уже 13% и является неприемлемой.

Во втором варианте расчета наблюдается стабильная картина напряженно деформированного состояния оболочки вне зависимости от величины жесткого смещения. Погрешность вычислений не превышает 2%.

Пример 2. Значение кольцевого напряжения на левом краю оболочки (точка 1) определяется согласно выражению

$$\sigma_k = R_k \frac{q}{t} = \frac{90 \cdot 5}{2} = 225 \text{ МПа}$$

Как видно из табл. 2 при наличии стержневой опоры на левом краю конструкции оба варианта расчета (традиционный и векторный способ интерполяции перемещений) позволяют получать приемлемые конечно-элементные решения, которые практически совпали с найденными по формуле (4.2).

Если оболочка смещается как жесткое целое, то картина напряженно-деформированного состояния существенно различается. В первом варианте расчета уже при смещении 0.027 м наблюдается некорректное значение кольцевого напряжения в точке 3 (рис. 5). Дальнейшее увеличение величины жесткого смещения, как видно, приводит к совершенно неприемлемым результатам.

Во втором варианте расчета (при использовании авторских интерполяционных выражений (2.25)) величина жесткого смещения абсолютно не влияет на картину напряженно-деформированного состояния. Даже при смещении в 2.71 м наблюдается устойчивое стремление показателей напряжений к вычисленным аналитически по вышеуказанным формулам.

5. Выводы. Опираясь на анализ представленных результатов можно сделать следующие выводы:

– разработанный алгоритм формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента с использованием авторской методики получения аппроксимирующих выражений на основе векторного способа интерполяции перемещений позволяет учитывать смещения конструкции как жесткого целого;

– при учете жестких смещений целесообразно использовать в качестве узловых неизвестных компоненты вектора перемещения и компоненты производных векторов перемещений узловых точек (2.36) в рассматриваемой криволинейной системе координат;

– разработанные на основании определенных условий учета граничных условий для компонент производных векторов узловых смещений условия сопряжения сочлененных оболочек вращения являются математически корректными, что подтверждено результатами расчетов;

– разработанные и математически обоснованные кинематические зависимости между узловыми неизвестными в точках сопряжения нескольких оболочек вращения приводят к корректным показателям напряженно-деформированного состояния при учете смещения конструкции как жесткого целого;

– использование компонент вектора перемещений и их производных (3.1) в качестве узловых неизвестных при реализации векторного способа аппроксимации перемещений не дает возможности получать корректные значения напряжений если допускаются смещения оболочки как абсолютно твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. СПб.: СПбГУ, 2010. 348 с.
2. *Пелех Б.Л.* Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища школа, 1978. 159 с.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
4. *Krysko A.V., Awrejcewicz J., Mitskevich S.A., Zhigalov M.V., Krysko V.A.* Nonlinear dynamics of heterogeneous shells. Part 2. Chaotic dynamics of variable thickness shells // *Int. J. Non Linear Mech.* 2021. V. 129. P. 103660.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103660>
5. *Шевченко А.С.* Численные методы: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2022. 381 с.
6. *Самогин Ю.Н.* Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов. М.: Физматлит, 2012. 200 с.
7. *Аганов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. М.: АСВ, 2000. 152 с.
8. *Ефанов К.В.* Расчет нефтяных аппаратов методом конечных элементов. Самиздат: Литрес, 2020. 132 с.
9. *Трушин С.И.* Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2019. 305 с.
10. *Beirao Da Veiga L., Lovadina C., Mora D.* A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2015. V. 295. P. 327–346.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.013>
11. *Liang K., Ruess M., Abdalla M.* Co-rotational finite element formulation used in the Koiter-Newton method for nonlinear buckling analyses // *Finite Elem. Anal. Des.* 2016. V. 116. P. 38–54.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2016.03.006>
12. *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976. 486 с.
13. *Kattan P.I., Voyiadjis G.Z.* Damage mechanics with finite elements. Practical applications with computer tools. Berlin: Springer, 2002. 123 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-56384-3>
14. *Кей С.В., Бейсинджер З.Е.* Расчет тонких оболочек на основе метода конечных элементов // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Т. 1. Л: Судостроение, 1974. С. 151–178.
15. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 391 с.
16. *Скопинский В.Н.* Напряжения в пересекающихся оболочках. М.: Физматлит, 2008. 400 с.
17. *Dzhabrailov A.S., Nikolaev A.P., Klochkov Y.V., Ishchanov T.R., Gureeva N.A.* Calculation of an elliptic cylindrical shell outside elastic limits based on the FEM with various forms of defining equations // *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2020. V. 49. P. 518–529.
<https://doi.org/10.3103/S1052618820060023>
18. *Демидов С.П.* Теория упругости. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.
19. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1994. 528 с.
20. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
21. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. 1024 с.

УДК 539.374

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ АДГЕЗИОННЫХ СЛОЕВ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2023 г. В. В. Глаголев^{a,*}, А. А. Маркин^{a,**}

^aТулский государственный университет, Тула, Россия

* e-mail: vadim@tsu.tula.ru

** e-mail: markin-nikram@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.01.2023 г.

После доработки 30.01.2023 г.

Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматривается состояние предразрушения тонкого адгезионного слоя конечной толщины в окрестности трещиноподобного дефекта. Предлагается учитывать гидростатическое давление, формирующее энергию деформации объема, для нахождения критического состояния. Критическое значение J -интеграла для моды нагружения I+II предполагается зависимым от произведения энергии деформации объема и толщины слоя в торце адгезива. Предельное значение произведения энергии объема и толщины слоя при нагружении по моде I, а также критические значения J -интеграла для мод нагружения I и II определяют величину параметра разрыхления конкретно-го адгезива в предлагаемом критерии разрушения.

Ключевые слова: линейный параметр, энергетическое произведение, энергия деформации объема, J -интеграл, метод конечных элементов

DOI: 10.31857/S0572329923600019, EDN: KPBBKN

Введение. В силу того, что критические значения J -интегралов для адгезионных слоев при модах I и II существенно отличаются [1, 2], рассмотрим возможное влияние гидростатического давления на предел прочности трещиноподобных дефектов в адгезионных слоях при моде нагружения I+II. Принимаем, что напряженное состояние адгезионного слоя регулярно и определяется конечными значениями тензора напряжений в рамках модели “слоя взаимодействия” [3]. В этом случае поток упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта определяется J -интегралом, который представим в виде энергетического произведения (ЭП) равного произведению удельной свободной энергии и толщины слоя δ_0 [4]. В силу конечных значений тензора напряжений при любых конечных значениях линейного параметра δ_0 возможно выделение энергии деформации формы и энергии деформации объема, определяемой через гидростатическое давление. При чистом сдвиге адгезионного слоя критическое значение J -интеграла определяет поток упругой энергии нагружения по моде II.

1. Формулировка критерия. Предельное состояние трещиноподобного дефекта в линейно упругом теле связывается концепцией J -интеграла с потоком упругой энергии в вершину трещины [5–7]. Для трещины в виде математического разреза поток упругой энергии G в случае смешанной моды нагружения I+II определяется через квадрат коэффициента интенсивности напряжений $K^2 = K_I^2 + K_{II}^2$ [6, 7]:

Таблица 1. Механические свойства адгезивов

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
E (GPa)	4.9	1.85	0.49
ν	0.35	0.33	0.3
G_{IC} (N/m)	200	430	2360
G_{IIC} (N/m)	380	4700	5410

$$G = \alpha \frac{K^2}{E} = \alpha(G_I + G_{II}) \quad (1.1)$$

где $\alpha = 1$ для плоского напряженного состояния; $\alpha = 1 - \nu^2$ для состояния плоской деформации; E – модуль упругости тела; ν – коэффициент Пуассона; K_I – коэффициент интенсивности напряжений для нагружения по моде I; K_{II} – коэффициент интенсивности напряжений для нагружения по моде II. Критическое значение потока энергии G_C определяет предельное состояние трещины. Экспериментальное подтверждение критерия в виде (1.1) для однородных тел является проблематичным в силу неустойчивости трещины моды II и отсутствия режима ее устойчивого подрастания.

Отметим, что аппарат линейной механики разрушения применяется для расчетов прочности адгезионных слоев композитов [1, 2]. В силу того, что механические свойства адгезивов могут существенно отличаться от свойств сопрягаемых ими тел, возможно обеспечить устойчивое подрастание трещины моды II и определить соответствующий критический поток упругой энергии G_{IIC} [8]. Согласно данным работ [1, 2] приведем в табл. 1 механические свойства ряда адгезивов.

Из табл. 1 видим, что критериальная характеристика в виде (1.1) не является корректной в силу существенного различия двух предельных значений G_{IC} и G_{IIC} . В работе [9] предложено рассматривать в качестве критерия следующую взаимосвязь между потоками упругой энергии:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^{\alpha_2} = 1 \quad (1.2)$$

где α_1, α_2 – постоянные материала.

Постоянные α_1, α_2 , следуя работе [10], полагаются равными: $\alpha_1 = \alpha_2$. Для нахождения постоянной α_1 строится набор кривых при различных значениях α_1 и проводится сравнение с тестируемым материалом [2, 10, 11]. В случае рассмотрения двух постоянных в критерии (1.2) их нахождение не очевидно.

Рассмотрим альтернативный подход к критериям (1.1), (1.2). Положим, что процесс разрушения локализуется в адгезиве с регулярным распределением напряженно-деформированного состояния по его толщине δ_0 . В случае обратимого деформирования значение J-интеграла равно потоку упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта и принимает вид [4]:

$$G = \delta_0 \phi \quad (1.3)$$

где ϕ – изменение удельной свободной энергии на торце адгезионного слоя; $\delta_0 \phi$ – энергетическое произведение.

Представим приращение удельной свободной энергии в виде суммы инвариантных слагаемых [12]:

$$\varphi = (3(1 - 2\nu)\sigma^2 + (1 + \nu)\tau^2)/(2E) = \varphi^\sigma + \varphi^\tau \quad (1.4)$$

где $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – гидростатическое давление; $\tau^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}$ – свертка девиаторных составляющих тензора напряжений; φ^σ – изменение свободной энергии деформации объема; φ^τ – изменение свободной энергии деформации формы.

Таким образом энергетическое произведение (1.3) представимо в виде суммы энергетических произведений энергии деформации объема $\delta_0\varphi^\sigma$ и энергии деформации формы $\delta_0\varphi^\tau$.

В силу того, что в окрестности трещиноподобного дефекта при нагружении по моде I реализуется высокое положительное гидростатическое давление, а при нагружении по моде II гидростатическое давление равно нулю, считаем, что гидростатическое давление является причиной существенного различия в критических значениях J-интеграла при нагружении адгезионного слоя по моде I и моде II. Положительное гидростатическое давление способствует “разрыхлению” адгезива и уменьшает его прочностные свойства. С другой стороны, гидростатическое сжатие материального объема не должно приводить к его разрушению.

С учетом (1.3), (1.4) критерий разрушения сформулируем в следующем виде:

$$\delta_0((1 + \text{sign}(\sigma)\beta)\varphi^\sigma + \varphi^\tau) = G_{\text{IC}} \quad (1.5)$$

где β – параметр, характеризующий “разрыхление” адгезива.

В критическом состоянии моды II, когда $\varphi_{\text{IC}}^\sigma = 0$ из (1.5) приходим к тождеству: $\delta_0\varphi_{\text{IC}}^\tau = G_{\text{IC}}$.

В силу того, что в критическом состоянии моды I $\delta_0(\varphi_{\text{IC}}^\sigma + \varphi_{\text{IC}}^\tau) = G_{\text{IC}}$ из (1.5) и последнего равенства получаем представление параметра в виде

$$\beta = \frac{G_{\text{IC}} - G_{\text{IC}}}{\delta_0\varphi_{\text{IC}}^\sigma} \quad (1.6)$$

Из данной формулы следует, что при известных критических значениях G_{IC} и G_{IIC} параметр β определяется критическим для данной моды I значением $\varphi_{\text{IC}}^\sigma$ и толщиной слоя.

2. Определение параметра адгезива. Рассмотрим нахождение параметра β для адгезионных слоев, представленных в табл. 1. В этом случае необходимо определить напряженное состояние в вершине адгезионного слоя при его нормальном разрыве для малой, но конечной толщины δ_0 .

На рис. 1 представлена схема нагружения слоистого композита длиной $l + a$, состоящего из трех тел. Тела 1 и 2 с одинаковыми толщинами h и механическими свойствами связаны адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 с отличными от сопрягаемых им тел свойствами. Правый торец образца жестко закреплен от горизонтальных перемещений, на левых торцах тел действует симметричная распределенная нагрузка P . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки. Данная схема определяет стандартный для эксперимента ДКБ-образец и используется для нахождения прочностной характеристики – критического потока упругой энергии или J_c -интеграла согласно схеме податливости Ирвина [1].

Вариационные уравнения равновесия системы двух тел, связанных слоем [3], в силу симметрии задачи преобразуются в вариационное уравнение для тела 1 [14]:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_l \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dl \quad (2.1)$$

где S_1 – площадь тела 1; \mathbf{u} – векторное поле перемещений тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор средних напряжений; $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор средних деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+(x_1)}{\delta_0} \quad (2.2)$$

u_s^+ – компоненты вектора перемещений верхней границы слоя; $s = 1, 2$; L_1 – граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\cdot \cdot$ – двойное скалярное умножение; \cdot – скалярное умножение. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций. При линейно упругом деформировании слоя связь средних напряжений и деформаций определяется законом Гука:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \delta_{ij} \right) \quad (2.3)$$

где E_3 , ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя; $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – объемная деформация слоя; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Определяющие соотношения тел будем рассматривать в форме закона Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \boldsymbol{\varepsilon} \delta_{ij} \right) \quad (2.4)$$

где E_1 , ν_1 – модуль упругости и коэффициент Пуассона; $\boldsymbol{\varepsilon}$ – объемная деформация.

Уравнение (2.1) совместно со связями (2.2)–(2.4) и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 0, \quad \sigma_{12} = -P; & x_1 &= -a, \quad x_2 \in [\delta_0/2; \delta_0/2 + h] \\ \sigma_{11} &= 0, \quad \sigma_{12} = 0; & x_1 &= [-a; l], \quad x_2 = \delta_0/2 + h \\ u_1 &= 0, \quad u_2 = 0; & x_1 &= l, \quad x_2 \in [\delta_0/2; \delta_0/2 + h] \\ \sigma_{11} &= 0 \quad \sigma_{12} = 0; & x_1 &= [-a; 0], \quad x_2 = \delta_0/2 \end{aligned}$$

является замкнутым, однозначно определяет поле перемещений тела и его напряженное состояние. Согласно (2.2), (2.3) находится напряженное состояние адгезионного слоя. Задача может быть решена численным методом. В работе используем метод конечных элементов (МКЭ) [15] с квадратичным распределением поля перемещений по элементу в состоянии плоской деформации. Размер грани элемента в концевой зоне адгезионного слоя соответствовал линейному параметру δ_0 .

Согласно данным работы [1] рассмотрим образец со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $a = 0.055$ м, $h = 0.0127$ м, $b = 0.025$ м, $l = 0.245$ м, $E_1 = 200$ ГПа, $\nu_1 = 0.3$, где b – толщина образца в направлении нормали к рассматриваемому сечению.

Следуя работам [16, 17] приведем выражение J-интеграла для ДКБ-образца, найденное из решения 2D задачи для модели слоя нулевой толщины:

$$J_1 = \frac{12(F/b)^2 (1 - \nu_1^2)}{h E_1} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + 0.673 \frac{h}{a} \right)^2 \quad (2.5)$$

Таблица 2. Критические значения силы

F_{cr} (N)		
Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
1078	1580	3702

Таблица 3. Сходимость энергетического произведения

δ_0 (m)	$\delta_0 \Phi_{IC}$ (N/m)		
	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
10^{-3}	207	488	3105
10^{-4}	194	432	2541
10^{-5}	190	415	2330
10^{-6}	193	418	2295

где $F = Pbh$ – внешняя сила.

Из (2.5) и связи $J_{IC} = G_{IC}$ найдем значение критической силы:

$$F_{cr} = b \sqrt{\frac{G_{IC} h E_1}{12(1 - \nu_1^2)}} \left(\frac{a}{h} \left(1 + 0.673 \frac{h}{a} \right) \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Результаты расчетов по (2.6) с учетом данных табл. 1 и заявленных характеристик консолей поместим в табл. 2.

Полученные критические значения силы соответствуют значениям начала роста трещины в адгезиве, найденным по R-кривым, согласно работе [1]. Критическое значение распределенной внешней касательной нагрузки для граничного условия определяем в виде: $P = F_{cr}/(bh)$.

Результаты расчетов критического энергетического произведения для известной критической силы в случае различных толщин слоя при решении задачи (2.1)–(2.4) МКЭ поместим в табл. 3.

Сравнение результатов табл. 3 со значением G_{IC} из табл. 1, показывает, что решение МКЭ для относительно тонкого слоя с учетом осевых напряжений приводит практически к одинаковому результату (с точностью до 4%). Таким образом значение ЭП для тонких, но имеющих конечную толщину слоев, соответствует известным 2D решениям по нахождению J-интеграла для классической модели трещины в виде математического разреза.

В табл. 4 поместим результаты расчетов из определения (1.4) зависимости предельного значения энергетического произведения энергии деформации объема $\delta_0 \Phi_{IC}^o$ от толщины слоя для F_{cr} МКЭ.

Из результатов расчетов видно, что при уменьшении толщины слоя, как и для ЭП, имеет место вычислительная сходимость характеристики $\delta_0 \Phi_{IC}^o$. Однако в слое нулевой толщины выделение энергетического произведения энергии формы на торце слоя не имеет смысла, а ее прямое экспериментальное определение не очевидно.

В табл. 5 поместим значения коэффициента β для рассмотренных адгезивов. Значения критических потоков упругой энергии G_{IC} и G_{IIC} , брались согласно данным табл. 1. Критическое значение энергетического произведения энергии деформации объема определялось согласно данным табл. 4 для $\delta_0 = 10^{-6}$ м.

Таблица 4. Сходимость значения энергетического произведения энергии деформации объема

δ_0 (м)	$\delta_0 \Phi_{IC}^\sigma$ (Н/м)		
	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
10^{-3}	148	330	1949
10^{-4}	135	287	1580
10^{-5}	130	274	1443
10^{-6}	132	276	1420

Таблица 5. Значение коэффициента β для адгезивов

β		
Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
1.4	15.5	2.1

Отметим, что для нахождения коэффициента β согласно формуле (1.6) необходимы критические значения J -интеграла для нагружения адгезионного слоя по моде I и моде II. Данные характеристики могут быть получены в результате стандартных экспериментов над компактными образцами для классической модели трещины в виде математического разреза с сингулярным распределением поля напряжений. Нахождение критического значения энергетического произведения энергии объема возможно только для модели с конечным напряженным состоянием разрушаемого адгезионного слоя. В этом случае существенным будет значение коэффициента Пуассона адгезива. Так уменьшение коэффициента Пуассона для адгезива Sikaforce 7752 до нуля приведет к уменьшению энергетического произведения энергии объема с 1420 Н/м до 783 Н/м при неизменном значении J -интеграла. Таким образом коэффициент Пуассона предельно тонкого адгезионного слоя оказывает влияние на коэффициент β .

Нулевой коэффициент Пуассона для адгезива в рамках рассматриваемой постановки (2.1)–(2.4) приводит к аналитическому решению в рамках теории пластин Миндлина–Рейснера [18, 19] для тела I. В этом случае имеет место следующее распределение напряжений на торце тонкого адгезионного слоя [14]:

$$\bar{\sigma}_{22}|_{x_1=0} = \frac{2(F/b)\sqrt{6(1+\nu_1)}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} \left(\frac{a}{h} \sqrt{1-\nu_1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\bar{\sigma}_{11}|_{x_1=0} = \frac{12(F/b)}{5\sqrt{\delta_0 h}} \left(\frac{E_3}{E_1} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{h} \sqrt{1-\nu_1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) (\sqrt{6(1+\nu_1)}^{\frac{3}{2}} - 1)$$

Таким образом, в силу существенного различия в модулях упругости рассматриваемых тел: $E_3/E_1 \approx 2.5 \times 10^{-3}$, гидростатическое давление на торце слоя будет формировать напряжение отрыва. При этом напряженное состояние в слое может быть найдено в рамках упругих связей Прандтля [20, 21]. Энергетическое произведение энергии объема в этом случае будет равно:

$$\delta_0 \Phi_{IC}^\sigma = \frac{4(F/b)^2(1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \frac{h}{a} \right)^2 \quad (2.7)$$

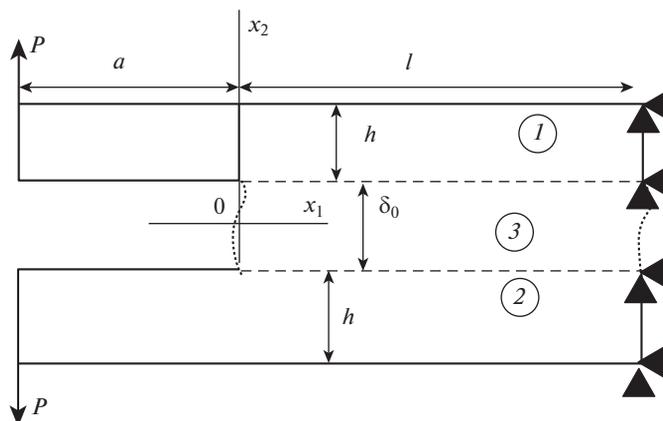


Рис. 1. Модель ДКБ-образца.

Представление (2.7) не зависит от свойств адгезива и принимает значение 744 Н/м, что на 5% отличается от расчетного значения по МКЭ для $\delta_0 = 10^{-6}$ м.

Заключение. Предложена система критериев (1.4)–(1.6), отражающая влияние гидростатической составляющей напряжений на экспериментально установленное существенное различие критических значений потоков энергии через торцевую часть адгезива, ослабленного трещиноподобным дефектом, при нагружениях по моде I и моде II.

Использование данных критериев возможно для предельно тонких адгезионных слоев с регулярным распределением поля напряжений по длине слоя. Для конкретизации критерия разрушения материала адгезионного слоя необходимы критические значения J-интеграла для мод нагружения I и II. Нахождение энергетического произведения энергии объема возможно из решения задачи (2.1)–(2.4) с учетом (2.6) и анализом вычислительной сходимости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/>, в Тульском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the double-cantilever beam and tapered double-cantilever beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // *Int. J. Adhes.* 2016. V. 67. P. 103–111. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032>
2. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // *Int. J. Fract.* 2017. V. 207. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>
3. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *Int. J. Solids Struct.* 2019. V. 158. P. 141–149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>
4. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *Int. J. Fract.* 2020. V. 224. № 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>
5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Сам. ун-т, 2001. 630 с.

7. *Kanninen M.F., Popelar C.H.* Advanced fracture mechanics. N.Y.: Oxford University Press, 1985. 563 p.
8. *Campilho R.D.S.G., Pinto A.M.G., Banea M.D., da Silva L.F.M.* Optimization study of hybrid spot-welded/bonded single-lap joints // *Int. J. Adhes.* 2012. V. 37. P. 86–95.
<https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2012.01.018>
9. *Wu E.M., Reuter R.C.J.* Crack extension in fiberglass reinforced plastics. University of Illinois TAM Report № 275. 1965.
<https://doi.org/10.21236/ad0613576>
10. *Alfano G., Crisfield M.A.* Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2001. V. 50. № 7. P. 1701–1736.
<https://doi.org/10.1002/nme.93>
11. *Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sánchez-Arce I.J., Madani K., Prakash C.* Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts // *Processes.* 2022. V. 10. № 12. P. 2730.
<https://doi.org/10.3390/pr10122730>
12. *Хан Х.Г.* Теория упругости. Основы линейной теории. М.: Мир, 1988. 343 с.
13. *Irwin G.R., Kies J.A.* Critical energy rate analysis of fracture strength // *Welding J. Res. Suppl.* 1954. V. 33. № 4. P. 193–198.
14. *Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A.* On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part I. Elastic deformation // *PNR-PU Mech. Bulletin.* 2022. № 3. P. 116–124.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.12>
15. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
16. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
17. *Andrews M.G., Massabó R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.
<https://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013>
18. *Mindlin R.D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *J. Appl. Mech.* 1951. V. 18. P. 31–38.
https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8865-4_29
19. *Reissner E.* Reflections on the theory of elastic plates // *Appl. Mech. Rev.* 1985. V. 38. № 11. P. 1453–1464.
<https://doi.org/10.1115/1.3143699>
20. *Prandtl L., Knauss W.G.* A thought model for the fracture of brittle solids // *Int. J. Fract.* 2011. V. 171. P. 105–109.
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9637-3>
21. *Ентов В.М., Салганик Р.Л.* К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1968. № 6. С. 87–99.

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК КВАДРАТУРНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

© 2023 г. А. В. Капцов^а, Е. И. Шифрин^{а,*}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: shifrin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.

После доработки 22.03.2023 г.

Принята к публикации 23.03.2023 г.

Рассматривается задача обнаружения и идентификации упругого включения в изотропной, линейно упругой плоскости. Предполагается, что на бесконечности заданы постоянные напряжения. Предполагается также, что на некоторой замкнутой кривой, содержащей внутри себя включение, известны действующие усилия и перемещения. В случае, когда область, занимаемая включением, является квадратурной, разработан метод идентификации ее узловых точек. Разработанный метод основан на применении принципа взаимности. Рассмотрены численные примеры.

Ключевые слова: упругость, плоская задача, квадратурная область, узловые точки, обратная задача

DOI: 10.31857/S0572329923600147, EDN: XOMURK

1. Введение. В случае, когда переопределенные данные (данные Дирихле и Неймана) известны на замкнутой кривой, охватывающей дефект (включение, полость или трещину), одним из наиболее эффективных методов его идентификации является метод, основанный на исследовании скачка в соотношении взаимности [1]. Этот метод был успешно применен к решению обратных задач статической теории упругости [2–8]. В указанных публикациях были решены задачи идентификации плоской трещины, эллипсоидального включения и нескольких эллипсоидальных включений в трехмерном упругом пространстве, а также множества прямолинейных трещин в упругой плоскости. Таким образом, в известных публикациях в основном решались задачи идентификации дефектов, имеющих каноническую форму. В настоящей публикации рассматривается задача идентификации некоторых характеристик областей, занимаемых дефектами не только канонической формы.

Поскольку ниже рассматриваются включения, занимающие квадратурные области, коротко напомним определение и основные свойства квадратурных областей. Ограничимся односвязными областями $D \subset R^2$, ограниченными гладкими, замкнутыми, жордановыми кривыми ∂D . Основы теории квадратурных областей были заложены в работах [9, 10]. Множество функций, голоморфных в области D и принадлежащих $L_1(D)$, обозначим $AL^1(D)$. Согласно [10] область D называется квадратурной если существует конечное число точек z_1, z_2, \dots, z_m , $z_i \in D$ таких, что для любых функций $f(z) \in AL^1(D)$ имеет место следующее тождество

$$\int_D f(z) dS = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n_k-1} a_{kj} f^{(j)}(z_k) \quad (1.1)$$

Здесь Ox_1x_2 – декартовы координаты, $z = x_1 + ix_2$, a_{kj} – комплексные постоянные, не зависящие от функции $f(z)$. Точки $z_k = x_{k1} + ix_{k2}$ называются узловыми точками.

Величина $n = \sum_{k=1}^m n_k$ называется порядком квадратурного тождества (1.1).

Имеются также другие, эквивалентные определения квадратурной области [9, 10]. Напомним их, поскольку они понадобятся ниже.

Область называется квадратурной если существует функция $S(z)$, называемая функцией Шварца, которая удовлетворяет следующим условиям. $S(z)$ – мероморфная функция в области D . Полюсы функции $S(z)$ совпадают с узловыми точками z_k и порядки полюсов равны соответствующим величинам n_k . Кроме того, на границе ∂D имеет место следующее равенство

$$S(z) = \bar{z}, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad z \in \partial D \quad (1.2)$$

В случае, когда область D ограничена и односвязна, условие (1.1) эквивалентно следующим условиям. 1) Существует рациональная функция $\varphi(t)$, $t = t_1 + it_2$, осуществляющая конформное отображение единичного диска U на область D . 2) Полюсы функции $\varphi(t)$ расположены в точках $\tau_k^* = 1/\bar{\tau}_k$ и $\varphi(\tau_k) = z_k$, $\tau_k = \tau_{k1} + i\tau_{k2}$. Порядки полюсов τ_k^* равны соответствующим величинам n_k .

Важное свойство квадратурных областей было установлено в [11–13]. В упрощенной формулировке, достаточной для настоящей статьи, доказанное в [11–13] утверждение может быть сформулировано следующим образом.

Пусть D – односвязная область, ограниченная простой, замкнутой, C^∞ кривой. В этом случае существует квадратурная область, конформно эквивалентная области D и сколь угодно близкая к ней в смысле C^∞ .

Вопрос единственности для квадратурных областей, то есть вопрос о том, в какой степени равенство (1.1) определяет область D , до сих пор остается открытым. Здесь известны лишь частные результаты. Например, доказано, что квадратурная область порядка 1 ($m = 1$, $n_1 = 1$) является кругом. Другие результаты, касающиеся проблемы единственности для квадратурных областей можно найти в [10, 14].

2. Математическая формулировка задачи. Предположим, что область $D \subset R^2$ занята изотропным, линейно упругим телом с модулем сдвига μ_I и коэффициентом Пуассона ν_I . Как и выше, границу области D обозначаем ∂D . Предположим также, что область $S = R^2 \setminus D$ занята изотропным, линейно упругим телом с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M . Введем декартову систему координат Ox_1x_2 . Предположим, что на бесконечности заданы постоянные напряжения σ_{11}^∞ , σ_{12}^∞ и σ_{22}^∞ . Будем помечать верхним индексом M напряженно деформированное состояние в матрице S : $\mathbf{u}^M(x)$ – вектор перемещений, $e_{\alpha\beta}^M(x)$ – тензор деформаций и $\sigma_{\alpha\beta}^M(x)$ – тензор напряжений. Уравнения плоской теории упругости в области S имеют вид:

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\beta}^M(x) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^M(x) + u_{\beta,\alpha}^M(x)), \quad \alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in S \\
 \sigma_{\alpha\beta}^M(x) &= 2\mu_M \left(\frac{\nu_{M*}}{1 - 2\nu_{M*}} \theta^M(x) \delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}^M(x) \right), \quad \theta^M(x) = \sum_{k=1}^2 e_{kk}^M(x) \\
 \sigma_{\alpha\beta,\beta}^M(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, $\nu_* = \nu$ в случае плоской деформации и $\nu_* = \nu/(1 + \nu)$ в случае плоского напряженного состояния.

Упругое поле во включении D будем помечать верхним индексом I : $\mathbf{u}^I(x)$ – вектор перемещений, $e_{\alpha\beta}^I(x)$ – тензор деформаций и $\sigma_{\alpha\beta}^I(x)$ – тензор напряжений. Уравнения плоской теории упругости в области D имеют вид:

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\beta}^I(x) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^I(x) + u_{\beta,\alpha}^I(x)), \quad \alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in D \\
 \sigma_{\alpha\beta}^I(x) &= 2\mu_I \left(\frac{\nu_{I*}}{1 - 2\nu_{I*}} \theta^I(x) \delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}^I(x) \right), \quad \theta^I(x) = \sum_{k=1}^2 e_{kk}^I(x) \\
 \sigma_{\alpha\beta,\beta}^I(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Между матрицей и включением предполагается полное сцепление.

$$\mathbf{u}^M(x^*) = \mathbf{u}^I(x^*), \quad \sigma_{\alpha\beta}^M(x^*) N_\beta(x^*) = \sigma_{\alpha\beta}^I(x^*) N_\beta(x^*), \quad x^* \in \partial D \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{N}(x^*) = (N_1(x^*), N_2(x^*))$ – единичная нормаль к границе ∂D включения D в точке x^* .

Пусть $D \subset \Omega$, где Ω – односвязная, ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что на границе $\partial\Omega$ известны действующие усилия и перемещения.

$$\sigma_{\alpha\beta}^M(x') n_\beta(x') = t_\alpha^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u}^M(x') = \mathbf{u}^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega \tag{2.5}$$

Здесь $n(x') = (n_1(x'), n_2(x'))$ – единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ в точке x' .

В общем случае задача заключается в идентификации включения D с помощью имеющихся данных. В настоящей статье рассматривается более скромная задача – идентификация узловых точек квадратурного включения D .

3. Функционал скачка в соотношении взаимности. Упругие поля, удовлетворяющие уравнениям (2.1) во всей плоскости, будем называть регулярными упругими полями и помечать верхним индексом r : $\mathbf{u}^r(x)$ – вектор перемещений, $e_{\alpha\beta}^r(x)$ – тензор деформаций, $\sigma_{\alpha\beta}^r(x)$ – тензор напряжений, $x \in R^2$. Рассмотрим функционал, определенный на пространстве регулярных упругих полей

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_{\partial\Omega} (t_\alpha^0(x') u_\alpha^r(x') - t_\alpha^r(x') u_\alpha^0(x')) dl, \quad t_\alpha^r(x') = \sigma_{\alpha\beta}^r(x') n_\beta(x') \tag{3.1}$$

Из принципа взаимности следует, что в случае, когда область Ω не содержит неоднородностей, равенство $RG(\mathbf{u}^r) = 0$ имеет место для любых регулярных полей $\mathbf{u}^r(x)$. Из равенств (2.1), (2.4), (2.5) и (3.1) следует, что в случае, когда область Ω содержит внутри включение D , функционал $RG(\mathbf{u}^r)$ может быть записан в виде

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_{\partial D} \left(t_{\alpha}^M(x^*) u_{\alpha}^r(x^*) - t_{\alpha}^r(x^*) u_{\alpha}^M(x^*) \right) dl \quad (3.2)$$

$$t_{\alpha}^M(x^*) = \sigma_{\alpha\beta}^M(x^*) N_{\beta}(x^*)$$

Из равенства (3.2) и условий полного сцепления (2.3) имеем

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_{\partial D} \left(t_{\alpha}^I(x^*) u_{\alpha}^r(x^*) - t_{\alpha}^r(x^*) u_{\alpha}^I(x^*) \right) dl, \quad t_{\alpha}^I(x^*) = \sigma_{\alpha\beta}^I(x^*) N_{\beta}(x^*) \quad (3.3)$$

Из равенства (3.3), формулы Грина и уравнений (2.2) следует

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_D [(\lambda_I - \lambda_M) \theta^I \theta^r + 2(\mu_I - \mu_M) e_{\alpha\beta}^I e_{\alpha\beta}^r] dx \quad (3.4)$$

Здесь $\lambda_I = 2\mu_I \nu_{I^*} / (1 - 2\nu_{I^*})$, $\lambda_M = 2\mu_M \nu_{M^*} / (1 - 2\nu_{M^*})$ – постоянные Ламе, $\theta^r(x) = \sum_{k=1}^2 e_{kk}^r(x)$.

4. Вид функционала на некотором подмножестве регулярных упругих полей. Регулярные упругие поля плоской теории упругости представляются с помощью двух голоморфных функций [15]

$$2\mu_M(u_1^r + iu_2^r) = \kappa_M \Phi_r(z) - z\Phi_r'(z) - \overline{\Psi_r(z)}$$

$$\sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r = 4 \operatorname{Re}[\Phi_r(z)], \quad \sigma_{22}^r - \sigma_{11}^r + 2i\sigma_{12}^r = 2[\bar{z}\Phi_r'(z) + \Psi_r(z)] \quad (4.1)$$

Здесь $\kappa_M = 3 - 4\nu_M$ в случае плоского деформированного состояния и $\kappa_M = (3 - \nu_M)/(1 + \nu_M)$ в случае плоского напряженного состояния, $\Phi_r(z) = \phi_r'(z)$, $\Psi_r(z) = \psi_r'(z)$.

Рассмотрим подмножество регулярных упругих полей, удовлетворяющих условию $\Phi_r(z) = 0$. Из (4.1) следует, что для упругих полей из данного подмножества справедливы равенства

$$\theta^r = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta}^r = 2\mu_M e_{\alpha\beta}^r \quad (4.2)$$

Из (3.4) и (4.2) имеем

$$RG(\mathbf{u}^r) = \frac{(\mu_I - \mu_M)}{\mu_M} \int_D e_{\alpha\beta}^I \sigma_{\alpha\beta}^r dx \quad (4.3)$$

Рассмотрим регулярное упругое поле \mathbf{u}^r , построенное с помощью голоморфных функций $\Phi_r(z) = 0$ и $\Psi_r(z) = \mu_M H(z)$. Из (4.1) и (4.3) следует

$$RG(\mathbf{u}^r) = (\mu_I - \mu_M) \int_D [(e_{22}^I - e_{11}^I) \operatorname{Re} H + 2e_{12}^I \operatorname{Im} H] dx \quad (4.4)$$

Пометим верхним индексом ρ регулярное упругое поле, отвечающее голоморфным функциям $\Phi_{\rho}(z) = 0$ и $\Psi_{\rho}(z) = i\mu_M H(z)$. Из (4.1) и (4.3) получим

$$RG(\mathbf{u}^{\rho}) = (\mu_I - \mu_M) \int_D [(e_{11}^I - e_{22}^I) \operatorname{Im} H + 2e_{12}^I \operatorname{Re} H] dx \quad (4.5)$$

Из равенств (4.4) и (4.5) следует

$$RG(\mathbf{u}^r) - iRG(\mathbf{u}^{\rho}) = (\mu_I - \mu_M) \int_D [(e_{22}^I - e_{11}^I) - 2ie_{12}^I] H dx \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) может быть рассмотрено как функционал, определенный на пространстве голоморфных функций $H(z) \in AL^1(D)$. Введем следующее обозначение для этого функционала

$$RG(\mathbf{u}^r) - iRG(\mathbf{u}^p) = P(H(z)) \quad (4.7)$$

Учитывая равенства (2.2) и обозначение (4.7), равенство (4.6) может быть записано в виде

$$P(H) = \frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_D [(\sigma_{22}^I - \sigma_{11}^I) - 2i\sigma_{12}^I] H(z) dx \quad (4.8)$$

5. Свойства функционала P(H) и различные формы его представления. Лемма 1. Справедливо следующее равенство

$$\begin{aligned} P(H'(z)) &= \frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_D [(\sigma_{22}^I - \sigma_{11}^I) - 2i\sigma_{12}^I] H'(z) dx = \\ &= -\frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z)(t_1^I + it_2^I) dl \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $t^I = (t_1^I, t_2^I)$ – определенные в (3.3) усилия, действующие на границу включения ∂D .

Доказательство. Преобразуем правую часть равенства (5.1) с помощью формулы Гаусса–Остроградского и уравнения равновесия.

$$-\frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z)(\sigma_{1\beta}^I n_\beta + i\sigma_{2\beta}^I n_\beta) dl = -\frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_D H_{,\beta}(z)(\sigma_{1\beta}^I + i\sigma_{2\beta}^I) dx \quad (5.2)$$

Равенство (5.1) следует из (5.2) и равенств $H_{,1} = H'(z)$, $H_{,2} = iH'(z)$.

В случае, когда область D односвязна, напряженное состояние во включении может быть представлено двумя голоморфными функциями, аналогично (4.1), см. [15]

$$\begin{aligned} 2\mu_I(u_1^I + iu_2^I) &= \kappa_I \Phi_I(z) - \overline{z\Phi_I'(z) - \Psi_I(z)} \\ \sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I &= 4 \operatorname{Re}[\Phi_I(z)], \quad \sigma_{22}^I - \sigma_{11}^I + 2i\sigma_{12}^I = 2[\overline{z\Phi_I'(z)} + \Psi_I(z)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\Phi_I(z) = \Phi_I'(z)$, $\Psi_I(z) = \Psi_I'(z)$, $\kappa_I = 3 - 4\nu_I$ в случае плоской деформации, $\kappa_I = (3 - \nu_I)/(1 + \nu_I)$ в случае плоского напряженного состояния.

Функцию Эри для напряженного состояния во включении обозначим $U^I(x_1, x_2)$.

$$\sigma_{11}^I = \frac{\partial^2 U^I}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22}^I = \frac{\partial^2 U^I}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12}^I = -\frac{\partial^2 U^I}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5.4)$$

В соответствии с [15] введем функцию

$$f_I(x_1, x_2) = \frac{\partial U^I}{\partial x_1} + i \frac{\partial U^I}{\partial x_2} \quad (5.5)$$

В [15] показано, что функция, определенная в (5.5), выражается через введенные выше голоморфные функции следующим образом

$$f_I(x_1, x_2) = \Phi_I(z) + z\Phi_I'(z) + \overline{\Psi_I(z)} \quad (5.6)$$

Из результатов [15] также следует, что на границе включения справедливо равенство

$$t_1^I(x') + it_2^I(x') = -i \frac{\partial f_I(x')}{\partial l} \quad (5.7)$$

Из (5.1) и (5.7) следует

$$P(H'(z)) = \frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) \frac{\partial f_I}{\partial l} dl \quad (5.8)$$

Интегрируя в правой части (5.8) по частям, получим

$$P(H'(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H'(z) f_I(x_1, x_2) dz \quad (5.9)$$

Поскольку любые голоморфные функции в односвязной области D являются производными от некоторых других голоморфных функций, равенство (5.9) может быть записано в виде

$$P(H(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) f_I(x_1, x_2) dz \quad (5.10)$$

Из (5.6), (5.10) и того факта, что интеграл от голоморфной функции по замкнутому контуру равен нулю, следует

$$P(H(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) (\overline{z\Phi'_I(z)} + \overline{\Psi_I(z)}) dz \quad (5.11)$$

Используя равенства (5.11) и (5.3), можно выразить функционал $P(H)$ через перемещения на границе включения

$$P(H(z)) = i(\mu_I - \mu_M) \int_{\partial D} H(z) (u_1^I + iu_2^I) dz \quad (5.12)$$

6. Представление функционала $P(H)$ в виде линейной комбинации дельта-функций и их производных. Поскольку усилия, действующие на границу включения ∂D самоуравновешены, напряженное состояние в матрице $S = R^2 \setminus D$ выражается с помощью двух голоморфных функций аналогично (4.1) и (5.3)

$$\begin{aligned} 2\mu_M(u_1^M + iu_2^M) &= \kappa_M \Phi_M(z) - z\Phi'_M(z) - \overline{\Psi_M(z)} \\ \sigma_{11}^M + \sigma_{22}^M &= 4 \operatorname{Re}[\Phi_M(z)], \quad \sigma_{22}^M - \sigma_{11}^M + 2i\sigma_{12}^M = 2[\overline{z}\Phi'_M(z) + \Psi_M(z)] \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $\Phi_M(z) = \Phi'_M(z)$, $\Psi_M(z) = \Psi'_M(z)$.

Кроме того, согласно [15], справедливо следующее представление

$$\Phi_M(z) = \Gamma z + \Phi_M^0(z), \quad \Psi_M(z) = \Gamma' z + \Psi_M^0(z), \quad \Phi_M^0(\infty) = \Psi_M^0(\infty) = 0 \quad (6.2)$$

Постоянные Γ и Γ' выражаются через напряжения, заданные на бесконечности

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty) \quad (6.3)$$

Аналогично (5.6), рассмотрим функцию

$$f_M(x_1, x_2) = \Phi_M(z) + z\Phi'_M(z) + \overline{\Psi_M(z)} \quad (6.4)$$

В терминах введенных функций условия полного сцепления между матрицей и включением (2.3) имеют вид [15]

$$\begin{aligned} f_I(x_1, x_2) &= \Phi_I(z) + z\Phi'_I(z) + \overline{\Psi_I(z)} = \overline{f_M(x_1, x_2)} = \overline{\Phi_M(z) + z\Phi'_M(z) + \overline{\Psi_M(z)}} \\ \frac{1}{2\mu_I} [\kappa_I \Phi_I(z) - z\Phi'_I(z) - \overline{\Psi_I(z)}] &= \frac{1}{2\mu_M} [\kappa_M \Phi_M(z) - z\Phi'_M(z) - \overline{\Psi_M(z)}] \end{aligned} \quad (6.5)$$

$(x_1, x_2) \in \partial D$

Обозначим D' область, симметричную области D относительно вещественной оси. Пусть $g(z)$ – голоморфная функция в области D . Определим голоморфную функцию в области D' [9]

$$\bar{g}(z) = \overline{g(\bar{z})}, \quad z \in D' \quad (6.6)$$

Нетрудно видеть [9], что справедливо следующее равенство

$$\bar{g}(\bar{z}) = g(z), \quad z \in D \quad (6.7)$$

Принимая во внимание равенство (6.7), условия сопряжения (6.5) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \varphi_I(z) + z\bar{\Phi}_I(\bar{z}) + \bar{\Psi}_I(\bar{z}) &= \varphi_M(z) + z\bar{\Phi}_M(\bar{z}) + \bar{\Psi}_M(\bar{z}) \\ \kappa_I\varphi_I(z) - z\bar{\Phi}_I(\bar{z}) - \bar{\Psi}_I(\bar{z}) &= \gamma[\kappa_M\varphi_M(z) - z\bar{\Phi}_M(\bar{z}) - \bar{\Psi}_M(\bar{z})], \quad z \in \partial D \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь $\gamma = \frac{\mu_I}{\mu_M}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_M(z) &= x, \quad z\bar{\Phi}_I(\bar{z}) + \bar{\Psi}_I(\bar{z}) = y, \quad \varphi_I(z) = a, \\ z\bar{\Phi}_M(\bar{z}) + \bar{\Psi}_M(\bar{z}) &= b, \quad z \in \partial D \end{aligned} \quad (6.9)$$

Используя условия полного сцепления (6.8), выразим величины x и y через величины a и b . В результате получим

$$x = \frac{(\kappa_I + 1)a + (\gamma - 1)b}{\gamma\kappa_M + 1}, \quad y = \frac{(\kappa_I - \gamma\kappa_M)a + \gamma(\kappa_M + 1)b}{\gamma\kappa_M + 1} \quad (6.10)$$

Определим аналитические функции двух переменных

$$Q_1(z, \zeta) = \varphi_I(z) + z\bar{\Phi}_I(\zeta) + \bar{\Psi}_I(\zeta), \quad z \in D, \quad \zeta \in D \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} Q_2(z, \zeta) &= \frac{1}{\gamma\kappa_M + 1} [(\kappa_I + 1)\varphi_I(z) + \gamma(\kappa_M + 1)(z\bar{\Phi}_M(\zeta) + \bar{\Psi}_M(\zeta))] \\ &z \in D, \quad \zeta \notin \bar{D} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь \bar{D} – замыкание области D .

Пусть $S(z)$ – мероморфная функция Шварца в замкнутой области \bar{D} . Определим мероморфную функцию

$$Q(z) = \begin{cases} Q_1(z, S(z)), & z \in D, \quad S(z) \in D \\ Q_2(z, S(z)), & z \in D, \quad S(z) \notin \bar{D} \end{cases} \quad (6.13)$$

Из (5.6), (6.4), (6.5), (6.7) и (6.9)–(6.12) имеем

$$Q_1(z, S(z)) = Q_2(z, S(z)) = f_I(x_1, x_2), \quad z \in \partial D \quad (6.14)$$

Предположим для простоты, что полюсы функции Шварца в области D – простые. Обозначим эти полюсы z_1, z_2, \dots, z_n . Таким образом, в окрестности точки z_k функция $S(z)$ имеет вид

$$S(z) = \frac{R_k}{z - z_k} + g_k(z) \quad (6.15)$$

где $g_k(z)$ – голоморфная функция в некоторой окрестности точки z_k .

Учитывая поведение упругого поля $\mathbf{u}^M = (u_1^M, u_2^M)$ на бесконечности (6.2), получим асимптотику функции $Q_2(z, S(z))$ при $z \rightarrow z_k$.

$$Q_2(z, S(z)) = \frac{\gamma(\varkappa_M + 1) \bar{\Gamma}' R_k}{(\gamma \varkappa_M + 1)(z - z_k)} + G_k(z) \quad (6.16)$$

Здесь $G_k(z)$ – голоморфная функция в окрестности точки z_k .

Из (6.13) и (6.16) следует, что $Q(z)$ – мероморфная функция в области D , простые полюсы которой расположены в точках z_1, z_2, \dots, z_n . Из (5.10), (6.13) и (6.14) получим

$$P(H(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) Q(z) dz \quad (6.17)$$

Интеграл в (6.17) равен сумме вычетов подынтегральной функции в точках z_k

$$P(H(z)) = \sum_{k=1}^n A_k H(z_k) \quad (6.18)$$

где $A_k = \frac{\pi(\mu_I - \mu_M) \gamma(\varkappa_M + 1) \bar{\Gamma}' R_k}{\mu_I (\gamma \varkappa_M + 1)}$.

Принимая во внимание выражение для γ , имеем

$$A_k = \frac{\pi(\mu_I - \mu_M)(\varkappa_M + 1) \bar{\Gamma}' R_k}{(\mu_I \varkappa_M + \mu_M)} \quad (6.19)$$

7. Определение узловых точек квадратурного включения. Рассмотрим последовательность голоморфных функций $H_m(z) = \left(\frac{z}{L}\right)^m$, где L – некоторый линейный размер, $m = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим

$$P(H_m(z)) = b_m \quad (7.1)$$

Из (6.18) и (7.1) получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_k w_k^m = b_m, \quad w_k = \frac{z_k}{L} \quad (7.2)$$

Уравнения (7.2) содержат $2n$ неизвестных: A_k и w_k , $k = 1, \dots, n$. Методы нахождения этих неизвестных с помощью известных значений b_m , $m = 0, \dots, 2n - 1$ хорошо разработаны [16–18]. В соответствии с [16], рассмотрим ганкелевы матрицы

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{2n-1} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Искомые величины w_k являются собственными значениями обобщенной задачи на собственные значения

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{a} = w \mathbf{H}_0 \mathbf{a} \quad (7.4)$$

Здесь \mathbf{a} – собственный вектор, соответствующий собственному значению w .

После определения неизвестных w_k , $k = 1, \dots, n$, коэффициенты A_k определяются из системы линейных, алгебраических уравнений (7.2) для $m = 0, 1, \dots, n - 1$.

Число узловых точек, соответствующих области D , заранее неизвестно. В связи с этим, необходимо решать последовательность задач в предположении, что имеется $n = 1, 2, \dots$ узловых точек. В случае, когда предполагаемое количество узловых точек n превосходит действительное количество узловых точек области D , некоторые из полу-

ченных собственных значений w_k являются паразитными. Для исключения паразитных решений ниже используется следующий критерий.

Обозначим $A_{n\max} = \max_{k=1, \dots, n} |A_k|$. Собственные значения w_k , для которых соответствующие коэффициенты A_k удовлетворяют неравенству $|A_k|/A_{n\max} < \varepsilon_{cr}$, где ε_{cr} некоторая малая величина, рассматриваются как паразитные и исключаются из рассмотрения. В численных примерах, рассмотренных ниже, принимается $\varepsilon_{cr} = 0.01$.

8. Численные примеры. В представленных выше теоретических результатах предполагается, что упругое тело безгранично. В рассмотренных ниже примерах упругое тело ограничено, однако характерные размеры дефекта много меньше размеров тела, что дает возможность использовать полученные результаты. Во всех примерах предполагается, что упругое тело занимает квадратную область $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : |x_i| \leq L, i = 1, 2\}$, $L = 10$ см. В качестве упругих постоянных материала приняты: модуль Юнга $E_M = 68.5$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_M = 0.36$. Такие упругие постоянные соответствуют алюминию. Во всех примерах рассматривается плоское напряженное состояние и предполагается, что усилия, приложенные к границе тела $\partial\Omega$, соответствуют одноосному растяжению в направлении оси x_2 .

$$\mathbf{t}^0(x') = (0, \sigma_{n_2}(x')), \quad x' \in \partial\Omega \quad (8.1)$$

где $\sigma = 100$ МПа.

Используемые в примерах переопределенные данные (перемещения внешней границы тела $\partial\Omega$) получены путем численного решения прямой задачи для тела с неоднородностью при заданных граничных условиях (8.1) на внешней границе $\partial\Omega$.

Наиболее известным примером квадратурной области является круг. В случае, когда область D является кругом с центром в точке z_0 , из теоремы о среднем следует, что для любой голоморфной функции $f(z)$ справедливо равенство

$$\int_D f(z) dS = |D| f(z_0) \quad (8.2)$$

где $|D|$ – площадь круга.

Из (8.2) следует, что круг – квадратурная область порядка 1. Единственная узловая точка расположена в центре круга.

Отметим, что также справедливо и обратное утверждение. Если порядок квадратурной области равен 1, то эта область является кругом, центр которого совпадает с узловой точкой [10].

Напомним, что функция Шварца для круга с центром в точке z_0 и радиусом r_0 имеет вид [9].

$$S_{\text{circ}}(z) = \frac{r_0^2}{z - z_0} + \bar{z}_0 \quad (8.3)$$

Пример 1. В этом примере в качестве неоднородности рассматривается круговая полость с центром в точке $(x_{01}, x_{02}) = (4, 3)$ и радиусом $r_0 = 1$, см. рис. 1. Здесь все величины даны в сантиметрах.

Узловые точки были определены при различных предположениях о количестве узловых точек n . Величина n варьировалась от 1 до 10. В результате использования сформулированного выше критерия оказалось, что для всех рассмотренных значений n определяется только одна узловая точка. Проиллюстрируем это на примере, в котором ожидаемое количество узловых точек $n = 10$. В табл. 1 представлены координаты полученных узловых точек $z_k = L \cdot w_k$ и соответствующие им нормированные коэффициенты $\alpha_k = |A_k|/A_{n\max}$.

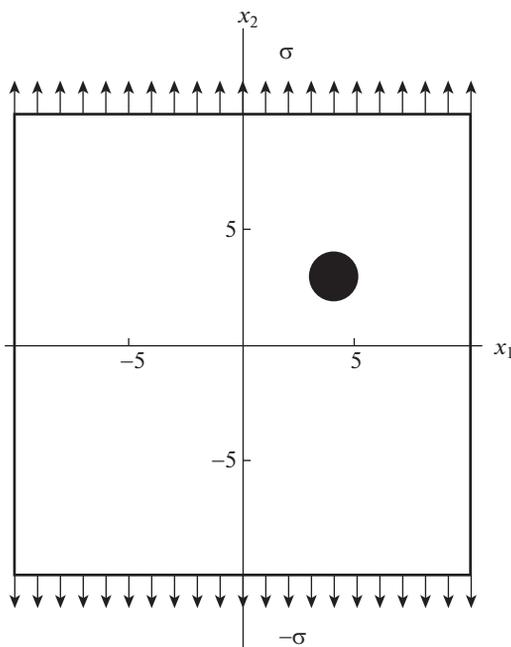


Рис. 1. Квадратная пластина с круговой полостью.

Как видно из табл. 1, для 9 из 10 полученных узловых точек выполнено неравенство $\alpha_k < \varepsilon_{cr} = 0.01$. Отметим, что значения α_k для этих девяти точек много меньше выбранного критериального значения. Таким образом, согласно сформулированному в предыдущем разделе критерию, эти девять точек должны быть исключены и остается только одна узловая точка, имеющая в табл. 1 номер 6. Координаты оставшейся точки, как и ожидалось, с точностью до двух десятичных знаков совпадают с координатами центра круга.

Зависимость координат установленной узловой точки от предполагаемого количества узловых точек n представлена в табл. 2.

Из табл. 2 следует, что с точностью до трех десятичных знаков, координаты определяемой узловой точки не зависят от предполагаемого значения n и совпадают с координатами центра круга с очень высокой точностью.

Таблица 1. Узловые точки и нормированные коэффициенты для круговой полости в случае $n = 10$ и параметров круга $z_0 = 4 + 3i$, $r_0 = 1$

k	1	2	3	4	5
α_k	5.29×10^{-14}	4.04×10^{-10}	1.14×10^{-9}	2.15×10^{-10}	3.82×10^{-7}
z_k	$-15.79 + 4.9i$	$-9.47 - 9.39i$	$-7.18 - 6.47i$	$-6.51 + 7.61i$	$3.55 + 4.99i$
k	6	7	8	9	10
α_k	1	3.9×10^{-5}	1.28×10^{-8}	4.8×10^{-9}	1.13×10^{-9}
z_k	$4 + 3i$	$4.3 + 2.68i$	$8.41 - 6.76i$	$9.68 - 9.43i$	$10.37 - 3.02i$

Таблица 2. Зависимость координат установленной узловой точки от величины n

n	1	2	3	4	5
z_0	$4.0025 + 3.0024i$	$4.0024 + 3.0023i$	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0022i$
n	6	7	8	9	10
z_0	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0023i$	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0022i$

Поскольку в данном примере установлено, что имеется только одна узловая точка, то, как указано выше, отсюда следует, что искомая неоднородность является кругом [10]. Если предположить, что неоднородность является полостью, то радиус круга также может быть определен.

Из (7.2) следует, что в случае, когда имеется единственная узловая точка, справедливо равенство $A_1 = b_0$. Следовательно, из формулы (6.19), предполагая, что дефект является полостью ($\mu_J = 0$), имеем

$$-\pi(\kappa_M + 1)\bar{\Gamma}' R_1 = b_0 \tag{8.4}$$

В случае одноосного растяжения вдоль оси x_2 , из (6.3) получим

$$\Gamma' = \frac{\sigma}{2} \tag{8.5}$$

Из (6.15) и вида функции Шварца (8.3) следует

$$R_1 = r_0^2 \tag{8.6}$$

Наконец, из формул (8.4)–(8.6) получим

$$r_0^2 = \frac{-2b_0}{\pi(\kappa_M + 1)\sigma} \tag{8.7}$$

В результате вычислений было получено $b_0 = -(486.1754 + 1.4725i)$ Мпа · см². Отметим, что из-за погрешностей вычислений величина b_0 оказалась комплексной, однако мнимая часть числа на несколько порядков меньше его вещественной части. Если пренебречь мнимой частью и подставить вещественную часть в формулу (8.7), получим $r_0 \approx 1.026$. Таким образом, радиус круговой полости вычисляется с достаточно высокой точностью.

Замечание. Параметры круговой полости с помощью переопределенных данных на всей внешней границе тела можно также определить с помощью метода, описанного в [3]. Однако, в методе [3] нужно априори предполагать, что полость имеет форму круга. В представленном здесь методе тот факт, что полость имеет форму круга, не предполагается, а устанавливается.

Пример 2. В этом примере дефект D также является круговой полостью, центр которой расположен в точке $(x_{01}, x_{02}) = (-6, -4)$, а радиус равен $r_0 = 0.5$. Как и в примере 1, количество предполагаемых узловых точек n варьировалось от 1 до 10. Вычисления показали, что при всех рассмотренных значениях n после исключения паразитных решений оставалась только одна узловая точка. Проиллюстрируем этот результат в случае $n = 10$. Координаты всех десяти узловых точек z_k и соответствующие им нормированные коэффициенты α_k представлены в табл. 3.

Таблица 3 показывает, что согласно сформулированному выше критерию остается только одна узловая точка под номером 3. Остальные узловые точки являются паразитными. Координаты установленной узловой точки с точностью до нескольких десятичных знаков совпадают с координатами центра круга. Точность определения коор-

Таблица 3. Узловые точки и нормированные коэффициенты для круговой полости в случае $n = 10$ и параметров круга $z_0 = -6 - 4i$, $r_0 = 0.5$

k	1	2	3	4	5
α_k	9.69×10^{-9}	2.67×10^{-10}	1	1.24×10^{-4}	9.92×10^{-8}
z_k	$-9.62 - 9.71i$	$-8.77 + 7.93i$	$-6 - 4i$	$-5.61 - 4.2i$	$-5.52 - 8.16i$
k	6	7	8	9	10
α_k	2.25×10^{-7}	4.25×10^{-8}	1.19×10^{-10}	9.66×10^{-16}	1.68×10^{-8}
z_k	$0.42 - 5.05i$	$6.99 - 8.05i$	$7.65 + 9.23i$	$9.25 + 21.5i$	$9.45 - 9.63i$

Таблица 4. Зависимость координат установленной узловой точки для круговой полости с параметрами $z_0 = -6 - 4i$ и $r_0 = 0.5$ от числа предполагаемых узловых точек n

n	1	2	3	4	5
z_0	$-6.0006 - 4.0002i$	$-6.0006 - 4.0002i$	$-6.0006 - 4.0002i$	$-6.0004 - 4.0003i$	$-6.0006 - 4.0002i$
n	6	7	8	9	10
z_0	$-6.0005 - 4.0002i$	$-6.0006 - 4.0002i$	$-6.0007 - 4.0003i$	$-6.0006 - 4.0003i$	$-6.0006 - 4.0003i$

динат центра круга иллюстрируется в табл. 4, где представлены координаты установленной узловой точки в зависимости от предполагаемого количества узловых точек n . Так как в этом примере радиус круговой полости меньше, чем в примере 1, центр круга определяется с более высокой точностью.

Полученная в результате вычислений величина b_0 оказалась равной $b_0 = -(117.9 + 0.1i)$ МПа \cdot см². Пренебрегая мнимой частью, которая много меньше вещественной части, и подставив вещественную часть в формулу (8.7), получим $r_0 = 0.505$. Таким образом, погрешность в определении радиуса круговой полости составляет один процент.

Пример 3. В этом примере неоднородность представляет собой жесткое круговое включение, занимающее ту же область, что и круговая полость в примере 2. Проведенные вычисления показали, что и в данном примере обнаруживается единственная узловая точка. В табл. 5 представлены координаты полученных узловых точек z_k и соответствующие им нормированные коэффициенты α_k для случая, когда предполагаемое количество узловых точек $n = 10$.

Из табл. 5 следует, что согласно принятому критерию остается только одна узловая точка, идущая под номером 5. Координаты этой точки совпадают с координатами центра круга.

Таблица 5. Узловые точки и нормализованные коэффициенты для жесткого кругового включения

k	1	2	3	4	5
α_k	4.37×10^{-9}	1.11×10^{-9}	4.46×10^{-13}	2.42×10^{-4}	1
z_k	$-9.43 - 9.38i$	$-8.43 + 8.02i$	$-7.47 + 15.69i$	$-6.19 - 4.01i$	$-6.00 - 4.00i$
k	6	7	8	9	10
α_k	1.86×10^{-7}	9.25×10^{-9}	9.73×10^{-9}	2.40×10^{-10}	3.72×10^{-9}
z_k	$-3.19 + 0.52i$	$2.30 + 5.19i$	$6.75 - 7.55i$	$8.87 + 8.62i$	$9.45 - 9.56i$

Вычисления показали, что при любом предполагаемом количестве узловых точек n от $n = 1$ до $n = 10$ координаты оставшейся после исключения паразитных решений узловой точки отличаются от координат центра круга только начиная с четвертого десятичного знака после запятой. Например, в случае $n = 10$ полученные координаты узловой точки $z_0 = -5.9998 - 3.9999i$.

Чтобы определить радиус жесткого кругового включения перейдем к формуле (6.19) к пределу при $\mu_I \rightarrow \infty$. В результате получим

$$A_1 = b_0 = \frac{\pi(\kappa_M + 1)\bar{\Gamma}' R_1}{\kappa_M} \quad (8.8)$$

Из (8.8), учитывая (8.3) и (8.5), получаем

$$r_0^2 = \frac{2\kappa_M b_0}{\pi(\kappa_M + 1)\sigma} \quad (8.9)$$

В результате вычислений было получено $b_0 = 58.9 - 0.0334i$ МПа · см². Можно видеть, что мнимая часть b_0 много меньше вещественной части. Пренебрегая мнимой частью и подставив вещественную часть b_0 в формулу (8.9), получим $r_0 = 0.497$, что с достаточно высокой точностью совпадает с радиусом рассматриваемого, жесткого, кругового включения.

Пример 4. Пусть полость D имеет форму кардиоиды. Напомним, что кардиоида является квадратурной областью, которая может быть получена путем сдвига и поворота области, чья граница описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a \left(\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \\ x_2(t) &= a \left(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \right), \quad 0 \leq t < 2\pi \end{aligned} \quad (8.10)$$

Здесь a – параметр.

В примере рассматривается случай, когда кардиоида D определяется параметром $a = 0.5$ и сдвинута на вектор $(x_{01}, x_{02}) = (4, 3)$. Рассматриваемая кардиоида представлена на рис. 2.

Согласно [19], для любой функции $f(z) \in AL^1(D)$, в случае, когда область D задается уравнениями (8.10) и сдвинута на вектор z_0 , справедливо равенство

$$\int_D f(z) dS = \frac{3\pi a^2}{2} f'(z_0) + \frac{\pi a^3}{2} f''(z_0) \quad (8.11)$$

где $z_0 = x_{01} + ix_{02}$.

Из (8.11) следует, что кардиоида имеет единственную узловую точку z_0 порядка 2. Вследствие этого функция Шварца имеет один полюс в точке z_0 порядка 2.

Расчеты показали, что, начиная с $n = 2$, обнаруживаются две простые узловые точки, весьма близкие к кратной узловой точке, отвечающей рассматриваемой кардиоиде. Координаты получаемых узловых точек и соответствующие им нормированные коэффициенты в случае $n = 10$ представлены в табл. 6.

Как видно из табл. 6, согласно принятому критерию, остаются только две узловые точки под номерами 6 и 7, координаты которых очень близки к точным координатам двойной узловой точки.

Устойчивость результатов по отношению к количеству предполагаемых узловых точек n иллюстрируется в табл. 7.

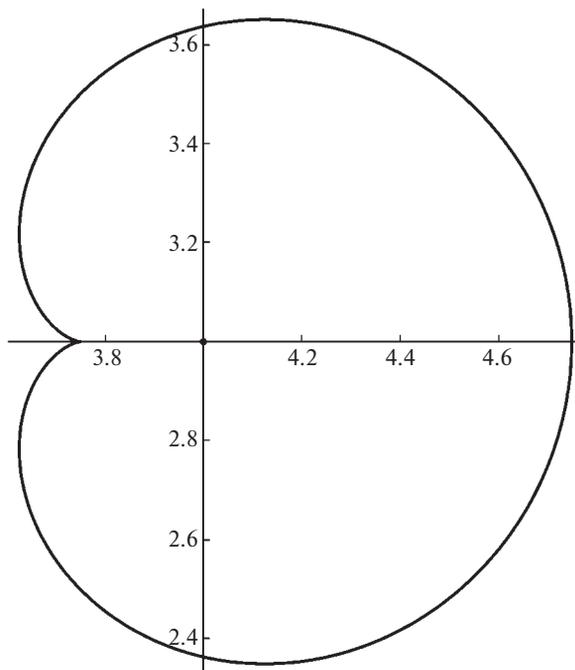


Рис. 2. Полость, имеющая форму кардиоиды.

Пример 5. Еще одним известным примером квадратурной области является овал Неймана. Овалом Неймана называется область, которая может быть получена путем сдвига и поворота области, чья граница описывается следующей кривой

$$x_1(t) = \sqrt{a^2 + 4\varepsilon^2 \cos^2(t)} \cos t, \quad x_2(t) = \sqrt{a^2 + 4\varepsilon^2 \cos^2(t)} \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi \quad (8.12)$$

Здесь a и ε – постоянные.

Согласно [9], функция Шварца для овала Неймана, граница которого описывается уравнениями (8.12), имеет вид

$$S(z) = \frac{z(a^2 + 2\varepsilon^2) + z\sqrt{a^4 + 4(a^2 + z^2)\varepsilon^2}}{2(z^2 - \varepsilon^2)} \quad (8.13)$$

Из (8.13) следует, что функция Шварца для овала Неймана имеет два простых полюса в точках $z = \pm\varepsilon$.

Таблица 6. Узловые точки и нормированные коэффициенты для полости, имеющей форму кардиоиды в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	1.04×10^{-19}	6.61×10^{-10}	1.89×10^{-9}	2.07×10^{-10}	5.21×10^{-9}
z_k	$-27.00 - 27.25i$	$-9.37 - 9.45i$	$-6.50 - 6.81i$	$-5.92 + 7.69i$	$-0.39 + 5.74i$
k	6	7	8	9	10
α_k	0.77	1	1.04×10^{-8}	4.09×10^{-9}	3.27×10^{-16}
z_k	$3.97 + 3.00i$	$4.02 + 3.00i$	$7.45 - 6.79i$	$9.52 - 9.42i$	$25.13 - 4.90i$

Таблица 7. Зависимость положения обнаруженных узловых точек от числа предполагаемых узловых точек для полости в виде кардиоиды

n	1	2	3	4	5
z_1, z_2	$4.1877 + 3.0003i$	$3.9601 + 2.9927i$	$3.9739 + 3.0060i$	$3.9716 + 2.9999i$	$3.9710 + 3.0002i$
		$4.0278 + 3.0057i$	$4.0177 + 2.9958i$	$4.0192 + 3.0006i$	$4.0196 + 3.0004i$
n	6	7	8	9	10
z_1, z_2	$3.9712 + 2.9997i$	$3.9709 + 2.9999i$	$3.9707 + 2.9994i$	$3.9707 + 2.9995i$	$3.9707 + 2.995i$
	$4.0194 + 3.0008i$	$4.0197 + 3.0006i$	$4.0198 + 3.0010i$	$4.0198 + 3.0010i$	$4.0198 + 3.0009i$

В рассматриваемом примере взяты следующие значения параметров овала Неймана: $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.25$, описываемый в (8.13) овал Неймана сдвинут на вектор $z_0 = 1 + 2i$ и повернут на угол $\pi/2$, см. рис. 3. Таким образом, координаты узловых точек полости расположены в точках $z_1 = 1 + 1.75i$ и $z_2 = 1 + 2.25i$. Рассматриваемая полость изображена на рис. 3.

Проведенные численные расчеты показали, что, начиная с $n = 2$, после применения принятого выше критерия остается ровно две узловых точки. Проиллюстрируем это

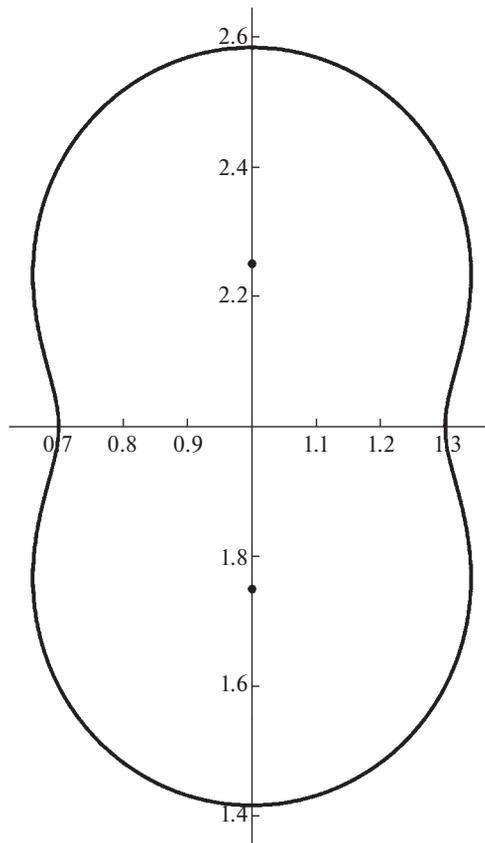
**Рис. 3.** Полость, имеющая форму овала Неймана.

Таблица 8. Узловые точки и нормированные коэффициенты для полости, имеющей форму овала Неймана, в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	2.42×10^{-9}	2.21×10^{-9}	6.98×10^{-8}	2.96×10^{-7}	0.98
z_k	$-12.38 + 3.57i$	$-11.19 + 11.60i$	$-9.75 - 9.98i$	$-7.8 - 7.40i$	$0.998 + 1.717i$
k	6	7	8	9	10
α_k	1.0	8.46×10^{-5}	2.22×10^{-7}	9.18×10^{-8}	1.74×10^{-9}
z_k	$0.998 + 2.276i$	$2.83 + 0.72i$	$7.21 - 7.64i$	$9.4 - 9.65i$	$11.34 + 10.91i$

Таблица 9. Зависимость положения установленных узловых точек от числа предполагаемых узловых точек для полости в виде овала Неймана

n	1	2	3	4	5
z_1, z_2	$1 + 2i$	$0.998 + 1.716i$ $0.998 + 2.274i$	$1.0 + 1.722i$ $1.0 + 2.281i$	$1.0 + 1.719i$ $0.988 + 2.277i$	$1.0 + 1.721i$ $1.0 + 2.278i$
n	6	7	8	9	10
z_1, z_2	$0.999 + 1.719i$ $1.0 + 2.277i$	$1.0 + 1.721i$ $1.0 + 2.278i$	$0.999 + 1.718i$ $0.997 + 2.277i$	$1.0 + 1.717i$ $1.0 + 2.276i$	$0.998 + 1.717i$ $0.998 + 2.276i$

результатом расчетов для случая $n = 10$. В табл. 8 представлены все 10 узловых точек z_k , отвечающих $n = 10$, и соответствующие им нормированные коэффициенты α_k .

Из табл. 8 следует, что согласно принятому критерию остаются только две узловые точки под номерами 5 и 6. Координаты этих точек достаточно близки к точным координатам. Погрешность в определении узловых точек менее 2%.

Устойчивость получаемых результатов по отношению к количеству предполагаемых узловых точек n иллюстрируется в табл. 9.

Таблица 9 показывает исключительную устойчивость результатов.

Пример 6. Здесь рассматривается случай полости, имеющей форму квадратурной области третьего порядка. Рассматриваемая квадратурная область строится следующим образом. Три узловые точки расположены в вершинах равностороннего треугольника: $z_1 = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -R$, $z_3 = \frac{R}{2} - \frac{R\sqrt{3}}{2}i$. Граница области получается путем пересечения окружностей радиуса R с центрами в начале координат и в указанных узловых точках [14], см. рис. 4. Рассматриваемая область ограничена внешними частями дуг окружностей.

В примере принято $R = 0.4$. В этом случае координаты узловых точек, с учетом приближенного значения величины $\sqrt{3}$, равны: $z_1 = 0.2 + 0.3464i$, $z_2 = -0.4$, $z_3 = 0.2 - 0.3464i$. Соответствующая область изображена на рис. 5.

Из проведенных численных расчетов следует, что, начиная с $n = 3$, из всех получающихся узловых точек остается ровно 3 простые узловые точки. В табл. 10 представлены все полученные узловые точки z_k и соответствующие им нормированные коэффициенты α_k для случая $n = 10$ предполагаемых узловых точек.

Согласно принятому критерию, из десяти узловых точек таблицы 10 остается только три точки с номерами 4, 5 и 6. Эти три точки достаточно близки к указанному выше точному расположению узловых точек. Погрешности составляют порядка 10%. Устойчивость определяемых положений узловых точек по отношению к количеству предпо-

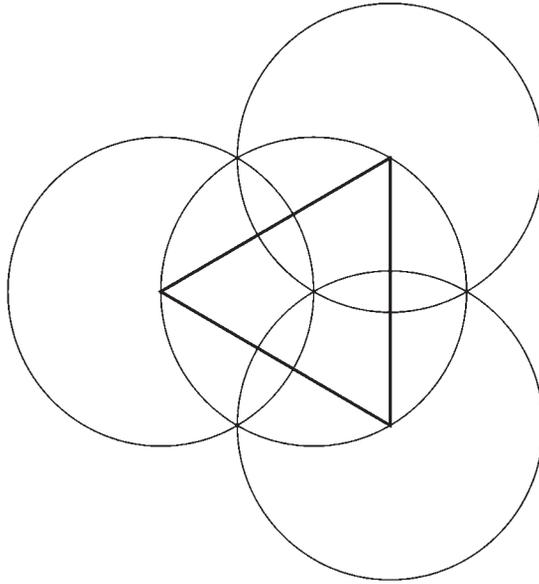


Рис. 4. Построение квадратурной области третьего порядка.

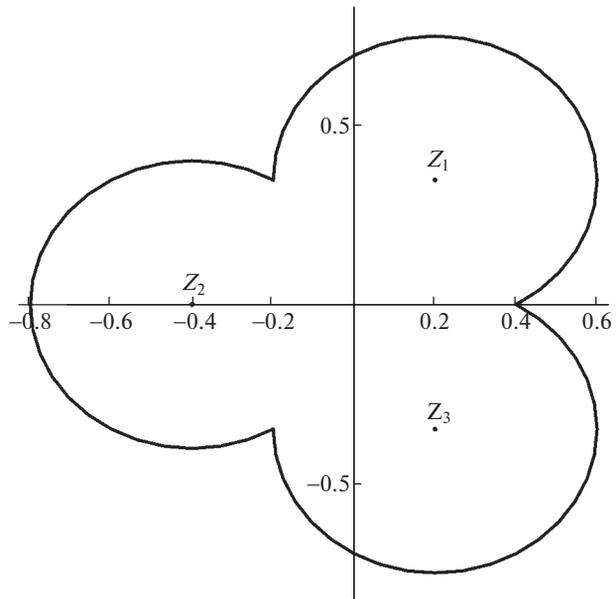


Рис. 5. Полость в виде квадратурной области третьего порядка.

Таблица 10. Узловые точки и нормированные коэффициенты для полости, имеющей форму квадратурной области третьего порядка, в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	3.76×10^{-8}	3.41×10^{-8}	9.50×10^{-8}	0.995	1
z_k	$-9.55 - 9.63i$	$-8.11 + 8.31i$	$-7.56 - 7.96i$	$-0.38 - 0.009i$	$0.203 - 0.305i$
k	6	7	8	9	10
α_k	0.924	1.96×10^{-7}	7.00×10^{-8}	1.42×10^{-10}	2.78×10^{-8}
z_k	$0.226 + 0.309i$	$2.932 + 3.503i$	$7.583 - 8.102i$	$8.996 + 8.182i$	$9.552 - 9.655i$

Таблица 11. Зависимость положений установленных узловых точек от числа предполагаемых узловых точек для полости в виде квадратурной области третьего порядка

n	3	4	5	6	7
z_1, z_2, z_3	$0.13175 + 0.2650i$ $-0.4522 - 0.0831i$ $0.1211 - 0.2197i$	$0.3776 + 0.3055i$ $-0.4325 - 0.1637i$ $0.0451 - 0.2219i$	$0.2262 + 0.3112i$ $-0.3789 - 0.0102i$ $0.2008 - 0.3071i$	$0.2413 + 0.2912i$ $-0.3988 - 0.0213i$ $0.1906 - 0.2826i$	$0.2469 + 0.2809i$ $-0.4086 - 0.0273i$ $0.1869 - 0.2719i$
n	8	9	10	11	12
z_1, z_2, z_3	$0.2460 + 0.2809i$ $-0.4086 - 0.0263i$ $0.1878 - 0.2722i$	$0.2208 + 0.3105$ $-0.3781 - 0.0055i$ $0.2071 - 0.3083i$	$0.2260 + 0.3090i$ $-0.3801 - 0.0091i$ $0.2027 - 0.3048i$	$0.2233 + 0.3101i$ $-0.3789 - 0.0073i$ $0.2048 - 0.3070i$	$0.2222 + 0.3106i$ $-0.3782 - 0.0065i$ $0.2057 - 0.3080i$
n	13	14	15		
z_1, z_2, z_3	$0.2194 + 0.3107i$ $-0.3775 - 0.0043i$ $0.2088 - 0.3091i$	$0.2184 + 0.3093i$ $-0.3784 - 0.0031i$ $0.2104 - 0.3079i$	$0.2185 + 0.3093i$ $-0.3784 - 0.0032i$ $0.2102 - 0.3079i$		

лагаемых узловых точек n иллюстрируется в табл. 11. В этой таблице представлены полученные координаты узловых при различных значениях n .

Результаты, представленные в табл. 11, показывают, что хотя то, что имеются 3 узловые точки определяется с $n = 3$, их координаты начинают устанавливаться с $n = 5$. Окончательная стабилизация результатов происходит начиная с $n = 9$. Установленные координаты узловых точек достаточно близки к точным значениям, но содержат систематическую ошибку порядка 10%. Такая ошибка, вероятно, связана с неточностью в исходных данных, часть из которых определяется путем решения прямой задачи. Решение прямой задачи для тела с полостью столь сложной, невыпуклой формы содержит некоторую погрешность.

Пример 7. В предыдущих примерах неоднородности представляли собой квадратурные области. Цель данного примера выяснить, что дает разработанный метод в случае, когда область, занимаемая дефектом, не является квадратурной. Известно, что эллипс, согласно данному выше определению, не является квадратурной областью. Для эллипса, ограниченного кривой

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0 \quad (8.14)$$

функция Шварца имеет вид [9]

$$S(z) = \frac{a^2 + b^2}{c^2} - \frac{2ab}{c^2} \sqrt{z^2 - c^2} \quad (8.15)$$

Таблица 12. Узловые точки и нормированные коэффициенты для эллиптической полости в случае $n = 5$

k	1	2	3	4	5
α_k	2.48×10^{-9}	8.08×10^{-7}	0.536	1	0.472
z_k	$-9.17 - 10.30i$	$-1.58 - 0.48i$	$3.38 + 2.76i$	$4.03 + 2.99i$	$4.66 + 3.23i$

Таблица 13. Узловые точки и нормированные коэффициенты для эллиптической полости в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	2.22×10^{-9}	8.46×10^{-11}	5.61×10^{-9}	6.34×10^{-8}	0.444
z_k	$-9.53 - 9.58i$	$-8.75 + 8.39i$	$-7.46 - 7.71i$	$-2.57 - 1.02i$	$3.30 + 2.74i$
k	6	7	8	9	10
α_k	1	0.825	0.266	3.05×10^{-9}	6.52×10^{-10}
z_k	$3.81 + 2.92i$	$4.37 + 3.13i$	$4.77 + 3.28i$	$9.31 + 8.39i$	$10.33 - 9.44i$

Здесь $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Отсюда следует, что для любой голоморфной в эллиптической области D функции $f(z)$ справедливо равенство [9]

$$\int_D f(z) dS = \frac{2ab}{c^2} \int_{-c}^c f(x) \sqrt{c^2 - x^2} dx \tag{8.16}$$

Таким образом, интеграл от голоморфной функции по эллиптической области выражается через интеграл по отрезку, соединяющему два фокуса. Поскольку, по определению, интеграл от голоморфной функции по квадратурной области должен выражаться с помощью линейной комбинации значений функции и их производных в конечном числе точек, эллиптическая область не является квадратурной.

Пусть полость D имеет форму эллипса с полуосями $a_1 = 1, a_2 = 0.25$. Предположим, что центр эллипса расположен в точке $(4, 3)$ и большая ось эллипса наклонена к оси x_1 под углом 20° . Проведенные расчеты показали, что с увеличением числа предполагаемых узловых точек n количество определяемых узловых точек постепенно увеличивается. Все определяемые узловые точки находятся вблизи большей оси эллипса между его фокусами. В табл. 12 приведены значения определяемых узловых точек z_k и соответствующих им нормированных коэффициентов α_k в случае $n = 5$.

Согласно принятому критерию остаются три узловые точки под номерами 3, 4 и 5. Точка z_4 близка к центру эллипса. Нетрудно видеть, что фокусы эллипса расположены в точках $F_1 = 3.09 + 2.67i$ и $F_2 = 4.91 + 3.33i$. Уравнение прямой, проходящей через фокусы и центр эллипса имеет вид

$$x_2 = 0.364x_1 + 1.545 \tag{8.17}$$

Точки z_3 и z_5 расположены очень близко к прямой (8.17) и находятся между фокусами. Эллиптическая полость с установленными тремя узловыми точками изображена на рис. 6.

В случае $n = 10$ обнаруживаются 4 узловые точки. Значения определяемых узловых точек z_k и соответствующих им нормированных коэффициентов α_k в случае $n = 10$ приведены в табл. 13.

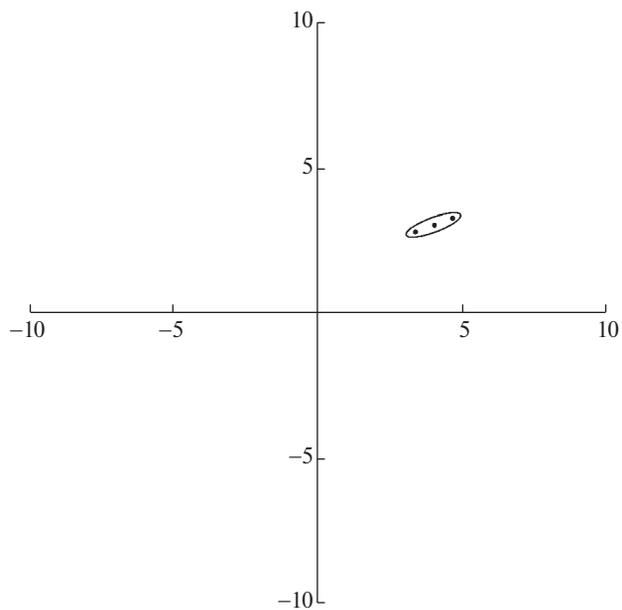


Рис. 6. Эллиптическая полость с узловыми точками, отвечающими $n = 5$.

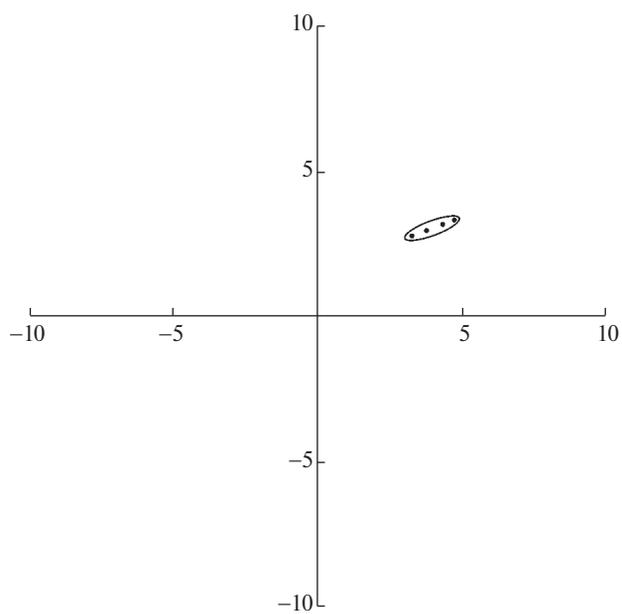


Рис. 7. Эллиптическая полость с узловыми точками, отвечающими $n = 10$.

Из табл. 13 видно, что, согласно принятому критерию, остаются только 4 узловые точки z_5, \dots, z_8 . Эти точки расположены очень близко к прямой (8.17) и находятся между фокусами эллипса. Изображение эллиптической полости и обнаруженных четырех узловых точек представлено на рис. 7.

9. Заключение. Рассмотрена плоская задача теории упругости об идентификации неоднородности (полости или включения) в упругом теле. Разработан метод, позволяющий в случае, когда неоднородность занимает квадратную область, определять ее узловые точки, представляющие собой полюсы функции Шварца. Рассмотрен ряд численных примеров, иллюстрирующих полученные теоретические результаты. Представлен также пример, в котором область, занимаемая неоднородностью, не является квадратной и множество особых точек функции Шварца занимает некоторую кривую. В этом случае получаемый с помощью разработанного метода дискретный набор особенностей принадлежит особому множеству функции Шварца и с увеличением числа искомых особенностей начинает аппроксимировать множество особенностей функции Шварца.

Часть из представленных в статье результатов в краткой форме изложена в публикации [20].

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700050-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andrieux S., Ben Abda A.* Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // *Inverse Probl.* 1996. V. 12. P. 553–563.
2. *Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.* Reciprocity principle and crack identification // *Inverse Probl.* 1999. V. 15. P. 59–65.
3. *Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Application of invariant integrals to the problems of defect identification // *Int. J. Fract.* 2007. V. 147. P. 45–54.
https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6929-1_6
4. *Шифрин Е.И.* Идентификация эллипсоидального дефекта в упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение (сжатие) // *Изв. РАН. МТТ.* 2010. № 3. С. 131–142.
5. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // *Inverse Probl.* 2010. V. 26. 055001.
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/5/055001>
6. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements // *Int. J. Solids Struct.* 2011. V. 48. № 7–8. P. 1154–1163.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.12.016>
7. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // *Int. J. Solids Struct.* 2013. V. 50. № 22–23. P. 3707–3716.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.009>
8. *Shifrin E.I., Kaptsov A.V.* Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis // *Inverse Probl.* 2018. V. 34. 015009. <https://doi.org/https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa9d74>
9. *Davis P.J.* The Schwarz function and its applications. The Carus Mathematical Monographs 17. Mathematical Association of America. 1974.
10. *Aharonov D., Shapiro H.S.* Domains on which analytic functions satisfy quadrature identities // *J. d'Analyse Math.* 1976. V. 30. P. 39–73.
11. *Gustafsson B.* Quadrature identities and the Schottky double // *Acta Appl. Math.* 1983. V. 1. P. 209–240.
12. *Bell S.R.* Quadrature domains and kernel function zipping // *Arkiv mat.* 2005. V. 43. P. 271–287.
13. *Bell S.R.* Density of quadrature domains in one and several complex variables // *Complex Var. Elliptic Equ.* 2009. V. 54. № 3–4. P. 165–171.

14. *Ameur Y., Helmer M., Tellander F.* On the uniqueness problem for quadrature domains // *Comput. Methods Funct. Theory.* 2021. V. 21. P. 473–504.
<https://doi.org/10.1007/s40315-021-00373-w>
15. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
16. *Golub G.H., Milanfar P., Varah J.* A stable numerical method for inverting shape from moments // *SIAM J. Sci. Comput.* 1999. V. 21. № 4. P. 1222–1243.
<https://doi.org/10.1137/S1064827597328315>
17. *El Badia A., Ha-Duong T.* An inverse source problem in potential analysis // *Inverse Probl.* 2000. V. 16. № 3. P. 651–663.
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/16/3/308>
18. *Kang H., Lee H.* Identification of simple poles via boundary measurements and an application of EIT // *Inverse Probl.* 2004. V. 20. № 6. P. 1853–1863.
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/6/010>
19. *Lee S.-Y., Makarov N.G.* Topology of quadrature domains // *J. Am. Math. Soc.* 2016. V. 29. P. 333–369.
20. *Шифрин Е.И., Капцов А.В.* Идентификация узловых точек упругого включения в упругой плоскости // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления.* 2023. Т. 509. С. 77–82.
<https://doi.org/10.31857/S268695432370011X>

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ГОРЯЧЕВА–СРЕТЕНСКОГО

© 2023 г. А. А. Косов^{а,*}

^аИнститут динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,
Иркутск, Россия

*e-mail: kosov_idstu@mail.ru

Поступила в редакцию 25.08.2022 г.

После доработки 11.03.2023 г.

Принята к публикации 23.03.2023 г.

Изучаются уравнения движения гиростата Горячева–Сретенского. Установлено, что одна компонента вектора угловой скорости совершает колебания с нулевым средним значением на всех решениях вне множества нулевого уровня интеграла площадей. Найдены все стационарные решения, включающие два состояния покоя и два параметрических семейства перманентных вращений. Методом интегральных связей Четаева получены достаточные условия устойчивости стационарных решений. На основе анализа корней характеристического уравнения получены условия неустойчивости. Установлена возможность гироскопической стабилизации за счет момента циркулярно-гироскопических сил при определенных условиях.

Ключевые слова: гиростат Горячева–Сретенского, частные и общие интегралы, стационарные решения, устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329922600657, EDN: RTQUEU

1. Введение. В динамике твердого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), так и случаи частичной интегрируемости, когда удается получить дополнительный частный интеграл [1–3]. Один из таких частично интегрируемых случаев для уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки был найден Д.Н. Горячевым [4], который показал существование четвертого по счету интеграла на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей. Интегрирование дифференциальных уравнений движения с использованием дополнительного интеграла было выполнено [5] С.А. Чаплыгиным, установившим, что решения в общем случае представляются гиперэллиптическими функциями времени. Эти результаты были распространены Л.Н. Сретенским [6] на более общие по сравнению с твердым телом уравнения движения гиростата, содержащие дополнительный параметр – вектор гиростатического момента.

Исследования случая Горячева–Чаплыгина для твердого тела и гиростата Горячева–Сретенского, а также их аналогов и обобщений успешно продолжаются и в настоящее время по нескольким направлениям. Изучались [7] эргодические свойства решений волчка Горячева–Чаплыгина, показано, что собственное вращение и прецессия обладают главным движением, а нутация является квазипериодической функцией времени. Обобщение случая Горячева–Чаплыгина, где в гамильтониане присутствует ряд новых дополнительных параметров, изучалось в [2], при этом сохраняется вывод

об интегрируемости на нулевом уровне интеграла площадей. Доказана [8] периодичность движений тела в случае Горячева при малых значениях энергии.

Были найдены [9] стационарные решения уравнений гиростата Горячева–Сретенского, лежащие на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей, но анализ их устойчивости не проводился. Изучалась [10] орбитальная устойчивость периодических движений твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина, показана их неустойчивость в первом приближении. Затем эта неустойчивость была подтверждена [11] и в строгой нелинейной постановке применением теоремы Четаева. Были выделены инвариантные множества волчка Горячева–Чаплыгина и обобщенным методом Рауса исследовалась их устойчивость [12].

Объектом исследования в данной статье являются уравнения движения гиростата Горячева–Сретенского с дополнительным моментом циркулярно-гироскопических сил. Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся уравнения движения, их первые интегралы и формулируются задачи исследования. В разделе 3 установлено, что одна из компонент вектора угловой скорости совершает колебания с нулевым средним значением на всех движениях вне множества нулевого уровня интеграла площадей. В разделе 4 найдены все стационарные решения, среди которых два состояния покоя и два параметрических семейства перманентных вращений, и получены условия устойчивости или неустойчивости найденных стационарных решений. В разделе 5 построение и исследование устойчивости стационарных решений проведено в случае нелинейного потенциала. В разделе 6 рассматривается влияние момента циркулярно-гироскопических сил на устойчивость стационарных решений и доказана возможность стабилизации в линейном приближении при условиях, аналогичных теореме Томсона–Тета–Четаева. Раздел 7 посвящен обсуждению результатов. В заключение кратко сформулированы основные результаты статьи.

2. Дифференциальные уравнения движения, первые интегралы и постановка задачи.

Рассмотрим векторную форму уравнений движения гиростата с неподвижной точкой под действием момента потенциальных и циркулярно-гироскопических сил

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_2 = L(t, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} \quad (2.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = \text{col}(p, q, r)$ – вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma} = \text{col}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат, $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T > 0$ – симметричная положительно определенная матрица тензора инерции относительно неподвижной точки, $\boldsymbol{\lambda} = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор гиростатического момента, $U(\boldsymbol{\gamma})$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция (потенциал), $L(t, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$ – произвольная непрерывная функция. Отметим, что уравнения движения гиростата под действием момента потенциальных и гироскопических сил, аналогичные или более общие, чем система (2.1), (2.2), рассматривались во многих работах (см., например, [13–16]). Момент циркулярно-гироскопических сил вида $\mathbf{M}_2 = L(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}$ использовался в уравнениях Гриоли [17]. Момент вида $\mathbf{M}_2 = L\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}$, $L = \text{const}$ возникает при вращении ферромагнитного тела в постоянном и однородном магнитном поле в случае, изученном в [18].

Как известно [13–16], система (2.1), (2.2) имеет три первых интеграла:

$$J_1 = J_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + 2U(\boldsymbol{\gamma}) = c_1 = \text{const} \quad (2.3)$$

$$J_2 = J_2(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\gamma}^T (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma}) = c_2 = \text{const} \quad (2.4)$$

$$J_3 = J_3(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma} = 1 \quad (2.5)$$

Предположим пока, что момент $\mathbf{M}_2 = L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma$ отсутствует, т.е. что $L(t, \gamma, \omega) \equiv 0$. Далее всюду будем считать матрицу инерции диагональной $\mathbf{I} = \text{diag}(A, B, C)$, потенциал пока будем полагать линейной функцией $U(\gamma) = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$, и параметры отвечающими условиям гиростата Горячева–Сретенского [4, 6]: $A = B = 4C$, $b = c = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. При этих условиях система (2.1), (2.2) и первые интегралы в координатной форме запишутся так

$$\begin{aligned} 4C\dot{p} &= 3Cqr - \lambda_3q \\ 4C\dot{q} &= -3Cpr + \lambda_3p + a\gamma_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} C\dot{r} &= -a\gamma_2 \\ \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$J_1 = 4Cp^2 + 4Cq^2 + Cr^2 + 2a\gamma_1 = c_1 = \text{const} \quad (2.8)$$

$$J_2 = 4Cp\gamma_1 + 4Cq\gamma_2 + \gamma_3(Cr + \lambda_3) = c_2 = \text{const} \quad (2.9)$$

$$J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (2.10)$$

В [6] установлено, что функция

$$J_4 = 4C(Cr - \lambda_3)(p^2 + q^2) - 4aCp\gamma_3 \quad (2.11)$$

удовлетворяет во всем фазовом пространстве дифференциальному соотношению

$$j_4 = \left. \frac{dJ_4}{dt} \right|_{(2.6), (2.7)} = -aqJ_2 \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что на инвариантном множестве $J_2 = 0$, задаваемом нулевым уровнем интеграла площадей (2.8), функция (2.11) порождает первый интеграл

$$J_4 = 4C(Cr - \lambda_3)(p^2 + q^2) - 4aCp\gamma_3 = c_4 = \text{const} \quad (2.13)$$

с произвольной постоянной $c_4 = \text{const}$. Наличие четырех известных первых интегралов (2.8)–(2.10) и (2.13) позволяет выполнить на множестве $J_2 = 0$ интегрирование в квадратурах [6]. Однако поведение решений и их свойства представляют несомненный интерес и вне этого множества $J_2 = 0$. Задача построения решений вне множества $J_2 = 0$ рассматривались в [19], где была проведена редукция к системе двух уравнений.

Задачи исследования в данной статье состоят в том, чтобы:

1) установить эргодические свойства компоненты $q(t)$ решения системы (2.6), (2.7) вне множества $J_2 = 0$;

2) выявить все стационарные решения, которые задаются постоянными, обращающимися правые части уравнений движения (2.6), (2.7) в нуль;

3) используя первые интегралы получить методом интегральных связей Четаева [20] достаточные условия устойчивости выявленных стационарных решений;

4) используя уравнения линейного приближения и теорему Ляпунова выявить случаи неустойчивости;

5) распространить условия устойчивости на случай нелинейного потенциала и выяснить влияние циркулярно-гироскопических сил на устойчивость стационарных решений.

3. О поведении $q(t)$ вне множества $J_2 = 0$. *Утверждение 1.* Для всякого решения $(\omega(t), \gamma(t))$ системы уравнений движения гиростата (2.6), (2.7), не лежащего в инвариантном мно-

жестве $J_2 = 0$, его компонента $q(t)$ совершает колебания с нулевым средним значением

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(\tau) d\tau = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение $(\omega(t), \gamma(t))$, не лежащее на множестве $J_2 = 0$. Из существования интегралов J_1 и J_3 вытекает ограниченность решения $(\omega(t), \gamma(t))$ при всех $-\infty < t < +\infty$. Значит на этом решении будет ограничена сверху и снизу при всех $-\infty < t < +\infty$ и задаваемая формулой (2.11) функция J_4 . Интегрируя дифференциальное равенство (2.12), получаем $J_4(\omega(t), \gamma(t)) = J_4(\omega(0), \gamma(0)) -$

$- aJ_2(\omega(0), \gamma(0)) \int_0^t q(\tau) d\tau$, поэтому, поскольку $aJ_2(\omega(0), \gamma(0)) \neq 0$, то из ограниченности функции J_4 вдоль решения $(\omega(t), \gamma(t))$ следует, что $\left| \int_0^t q(\tau) d\tau \right| < +\infty$ при всех

$-\infty < t < +\infty$. Следовательно, среднее значение равно нулю $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(\tau) d\tau = 0$. Утверждение доказано.

Следствие 1. Для любого стационарного решения $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \text{const}$, не лежащего в множестве $J_2 = 0$, всегда будет $\bar{q} = 0$.

Это следствие полезно при отыскании всех стационарных решений системы (2.6), (2.7).

4. Стационарные решения и условия их устойчивости. Все стационарные решения $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \text{const}$ системы (2.6), (2.7), лежащие на инвариантном множестве $J_2 = 0$, были найдены в [9], при этом для них характерно $\bar{q} = 0$. Таким образом, с учетом следствия 1 для всех стационарных решений системы (2.6), (2.7) выполняются равенства $\bar{q} = 0$, $\bar{\gamma}_2 = 0$. Поэтому для нахождения стационарных решений получаем систему уравнений

$$-3C\bar{p}\bar{r} + \lambda_3\bar{p} + a\bar{\gamma}_3 = 0, \quad \bar{p}\bar{\gamma}_3 - \bar{r}\bar{\gamma}_1 = 0 \quad (4.1)$$

Эта система имеет очевидное решение

$$\bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = 0, \quad \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_3 = 0, \quad \bar{\gamma}_1 = \sigma = \pm 1 \quad (4.2)$$

Все другие вещественные стационарные решения находятся следующим образом. Используя геометрический интеграл (2.10), полагаем $\bar{\gamma}_1 = \cos\varphi$, $\bar{\gamma}_3 = \sin\varphi$, где $0 < \varphi < 2\pi$ — произвольно. Заметим, что решения (4.1) с $\bar{\gamma}_1 = 0$ нас не интересуют, так как они влекут $\bar{\gamma}_3 = 0$ и противоречат геометрическому интегралу. Поэтому считаем, что $\bar{\gamma}_1 = \cos\varphi \neq 0$. В случае $\bar{\gamma}_3 = 0$ из системы (4.1) вновь получается решение (4.2), поэтому считаем, что $\bar{\gamma}_3 = \sin\varphi \neq 0$. Из второго уравнения (4.1) выражаем \bar{r} и, подставляя в первое, получаем квадратное относительно \bar{p} уравнение $3C\sin\varphi\bar{p}^2 - \lambda_3\cos\varphi\bar{p} - a\sin\varphi\cos\varphi = 0$, которое имеет вещественные корни при условии

$$D = \lambda_3^2\cos^2\varphi + 12aC\sin^2\varphi\cos\varphi \geq 0 \quad (4.3)$$

Таким образом, система (2.6), (2.7) имеет при всех $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \pi/2, \pi, 3\pi/2$, удовлетворяющих неравенству (4.3), два стационарных решения (при $D = 0$ они совпадают)

$$\begin{aligned} \bar{p}_{1,2} &= \frac{\lambda_3\cos\varphi \pm \sqrt{D}}{6C\sin\varphi}, & \bar{q} &= 0, & \bar{r}_{1,2} &= \frac{\lambda_3\cos\varphi \pm \sqrt{D}}{6C\cos\varphi} \\ \bar{\gamma}_1 &= \cos\varphi, & \bar{\gamma}_2 &= 0, & \bar{\gamma}_3 &= \sin\varphi \end{aligned} \quad (4.4)$$

Других стационарных решений, кроме двух состояний покоя (4.2) и двух однопараметрических семейств перманентных вращений (4.4), система (2.6), (2.7) не имеет.

Перейдем теперь к анализу устойчивости стационарных решений. Введем обозначения для отклонений от невозмущенного стационарного движения

$$\begin{aligned} x_1 &= p - \bar{p}, & x_2 &= q - \bar{q}, & x_3 &= r - \bar{r} \\ x_4 &= \gamma_1 - \bar{\gamma}_1, & x_5 &= \gamma_2 - \bar{\gamma}_2, & x_6 &= \gamma_3 - \bar{\gamma}_3 \end{aligned}$$

В этих переменных интегралы уравнений возмущенного движения для стационара (4.2), выпишутся следующим образом:

$$J_1 - \bar{J}_1 = 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 + 2ax_4, \quad J_3 - \bar{J}_3 = 2\sigma x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

Здесь и далее \bar{J}_i означает значение выбранного интеграла на невозмущенном движении. Функцию Ляпунова по методу Четаева [20] строим в виде связки (линейной комбинации) интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_3 (J_3 - \bar{J}_3)$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем число α_3 следующим образом $\alpha_3 = -a\sigma$, тогда функция $V(x)$ будет квадратичной формой $V(x) = 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 - a\sigma(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)$. В случае $\sigma = -\text{sign}(a)$ эта квадратичная форма является положительно определенной по отношению ко всем переменным $x = \text{col}(x_1, \dots, x_6)$. Тем самым доказано следующее

Утверждение 2. Состояние покоя (4.2), соответствующее значению $\sigma = -\text{sign}(a)$, устойчиво по Ляпунову.

Для анализа устойчивости второго состояния покоя (4.2), которому соответствует $\sigma = \text{sign}(a)$, воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Для этого состояния покоя характеристическое уравнение линейного приближения имеет вид

$$z^2(z^4 + a_2z^2 + a_0) = 0 \quad (4.5)$$

где

$$a_2 = \frac{\lambda_3^2 - 20C|a|}{16C^2}, \quad a_0 = \frac{|a|(4C|a| - \lambda_3^2)}{16C^3} \quad (4.6)$$

Для того, чтобы уравнение (4.5) не имело корней с положительной вещественной частью, оба коэффициента (4.6) должны быть неотрицательны, что приводит к противоречивым условиям $\lambda_3^2 \geq 20C|a|$, $4C|a| \geq \lambda_3^2$. Это означает, что один из коэффициентов (4.6) отрицателен и уравнение (4.5) имеет корень с положительной вещественной частью. Тем самым доказано следующее

Утверждение 3. Состояние покоя (4.2), соответствующее значению $\sigma = \text{sign}(a)$, неустойчиво по Ляпунову.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости перманентных вращений из семейств (4.4). В этом случае интегралы уравнений возмущенного движения записываются так

$$\begin{aligned} J_1 - \bar{J}_1 &= 8C\bar{p}x_1 + 2C\bar{r}x_3 + 2ax_4 + 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 \\ J_2 - \bar{J}_2 &= 4C\bar{\gamma}_1x_1 + C\bar{\gamma}_3x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 + 4Cx_1x_4 + 4Cx_2x_5 + Cx_3x_6 \\ J_3 - \bar{J}_3 &= 2\bar{\gamma}_1x_4 + 2\bar{\gamma}_3x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \end{aligned}$$

Функцию Ляпунова по методу Четаева [20] строим в виде связки интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_2 (J_2 - \bar{J}_2) + \alpha_3 (J_3 - \bar{J}_3) + \beta_2 (J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3 (J_3 - \bar{J}_3)^2$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке числа α_2 и α_3 выберем следующим образом

$$\alpha_2 = -\frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1}, \quad \alpha_3 = \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2}$$

Тогда функцию Ляпунова можно записать в виде

$$V(x) = V_{14}(x_1, x_4) + V_{25}(x_2, x_5) + V_{36}(x_3, x_6) + \beta_2 (J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3 (J_3 - \bar{J}_3)^2$$

где

$$V_{14}(x_1, x_4) = 4Cx_1^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} 4Cx_1x_4 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} x_4^2$$

$$V_{25}(x_2, x_5) = 4Cx_2^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} 4Cx_2x_5 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} x_5^2$$

$$V_{36}(x_3, x_6) = Cx_3^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} Cx_3x_6 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} x_6^2$$

Так как положительные числа β_2 и β_3 можно брать как угодно большими, то для положительной определенности квадратичной части функции Ляпунова необходимо и достаточно [21], чтобы квадратичная форма $V_2(x) = V_{14}(x_1, x_4) + V_{25}(x_2, x_5) + V_{36}(x_3, x_6)$ была положительно определенной на линейном множестве

$$\Theta = \{\bar{\gamma}_1 x_4 + \bar{\gamma}_3 x_6 = 0, 4C\bar{\gamma}_1 x_1 + C\bar{\gamma}_3 x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 = 0\}$$

Поскольку переменные x_2 и x_5 не входят в линейные ограничения Θ , то квадратичная форма $V_{25}(x_2, x_5)$ должна быть положительно определена, для чего в соответствии с критерием Сильвестра необходимо и достаточно

$$\Delta = \lambda_3 \bar{r} - 3C\bar{r}^2 > 0 \quad (4.7)$$

В силу полного совпадения коэффициентов, это же неравенство (4.7) обеспечит и положительную определенность квадратичной формы $V_{14}(x_1, x_4)$. А условия положительной определенности квадратичной формы $V_{36}(x_3, x_6)$ даются неравенством $\lambda_3 \bar{r} > 0$, которое заведомо выполнено при выполнении (4.7). Таким образом, условие (4.7) гарантирует положительную определенность трех первых слагаемых (каждого относительно своих переменных), а значит и всей функции Ляпунова. Тем самым доказано

Утверждение 4. Каждое перманентное вращение из однопараметрических семейств (4.4), для которого выполнено неравенство (4.7), является устойчивым по Ляпунову.

Нарушение неравенства (4.7) для какого-либо стационарного решения (4.4) еще не означает его неустойчивость, поскольку это условие является лишь достаточным. Для получения условий неустойчивости воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Для стационарных решений (4.4) характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет вид (4.5), где коэффициенты вместо (4.6) задаются следующими формулами

$$a_2 = \bar{p}^2 + \bar{r}^2 + \frac{(3C\bar{r} - \lambda_3)^2 - 20Ca\bar{\gamma}_1}{16C^2} \quad (4.8)$$

$$a_0 = \frac{1}{16C^3} (9C^3 \bar{p}^2 \bar{r}^2 + 9C^3 \bar{r}^4 - 12aC^2 \bar{p}^2 \bar{\gamma}_1 - 14aC^2 \bar{p} \bar{r} \bar{\gamma}_3 - 13aC^2 \bar{r}^2 \bar{\gamma}_1 - 6C^2 \bar{p}^2 \bar{r} \lambda_3 - 6C^2 \bar{r}^3 \lambda_3 + 4Ca^2 \bar{\gamma}_1^2 + 2aC\lambda_3 \bar{p} \bar{\gamma}_3 + 6aC\lambda_3 \bar{r} \bar{\gamma}_1 + C\bar{p}^2 \lambda_3^2 + C\bar{r}^2 \lambda_3^2 - a\lambda_3^2 \bar{\gamma}_1) \quad (4.9)$$

Из теоремы Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5. Каждое перманентное вращение из однопараметрических семейств (4.4), для которого коэффициенты характеристического уравнения a_2 и a_0 , вычисляемые по формулам (4.8) и (4.9), удовлетворяют хотя бы одному из трех условий $a_2 < 0$, $a_0 < 0$, $a_2^2 - 4a_0 < 0$, является неустойчивым по Ляпунову.

Пример 1. Пусть параметры системы (2.6), (2.7) имеют следующие значения: $C = 1$, $\lambda_3 = 4$, $a = -1$. При $\varphi = \frac{\pi}{6}$ имеются два стационарных решения вида (4.4):

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{48 - 6\sqrt{3}}, & \bar{r}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{18}(4\sqrt{3} + \sqrt{48 - 6\sqrt{3}}), & \bar{\gamma}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \bar{\gamma}_3 &= \frac{1}{2} \\ \bar{p}_2 &= \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\sqrt{48 - 6\sqrt{3}}, & \bar{r}_2 &= \frac{\sqrt{3}}{18}(4\sqrt{3} - \sqrt{48 - 6\sqrt{3}}), & \bar{\gamma}_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \bar{\gamma}_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Вычисляя по формуле (4.7), для первого решения находим $\Delta = \sqrt{3}(16 - \sqrt{3} - 4\sqrt{16 - 2\sqrt{3}}) = 0.18 \dots > 0$. Для второго решения получаем $\Delta = \sqrt{3}(16 - \sqrt{3} + 4\sqrt{16 - 2\sqrt{3}}) = 49.24 \dots > 0$. Таким образом, из утверждения 4 следует, что оба стационарных решения, отвечающих $\varphi = \frac{\pi}{6}$, устойчивы по Ляпунову.

При $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ имеются два стационарных решения вида (4.4):

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{1}{6}(4 - \sqrt{16 + 6\sqrt{2}}), & \bar{r}_1 &= \frac{1}{6}(4 - \sqrt{16 + 6\sqrt{2}}), & \bar{\gamma}_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \bar{\gamma}_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \bar{p}_2 &= \frac{1}{6}(4 + \sqrt{16 + 6\sqrt{2}}), & \bar{r}_2 &= \frac{1}{6}(4 + \sqrt{16 + 6\sqrt{2}}), & \bar{\gamma}_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \bar{\gamma}_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Условия (4.7) для обоих решений нарушаются. Вычисляя по формуле (4.9) коэффициент характеристического уравнения, для первого решения получаем $a_0 = -\frac{7}{32} - \frac{11}{12}\sqrt{2} + \frac{5}{24}\sqrt{8 + 3\sqrt{2}} = -0.78 \dots < 0$, а для второго $a_0 = -\frac{7}{32} - \frac{11}{12}\sqrt{2} - \frac{5}{24}\sqrt{8 + 3\sqrt{2}} = -2.24 \dots < 0$. Таким образом, на основании утверждения 5 оба стационарных решения, отвечающих $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, неустойчивы по Ляпунову.

Изменим теперь значение одного параметра, положив $\lambda_3 = 1$. Тогда при $\varphi = \frac{9\pi}{16}$ имеются два стационарных решения вида (4.4):

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= 0.2240 \dots, & \bar{r}_1 &= -1.1261 \dots, & \bar{\gamma}_1 &= \cos\left(\frac{9\pi}{16}\right), & \bar{\gamma}_3 &= \sin\left(\frac{9\pi}{16}\right) \\ \bar{p}_2 &= -0.2903, & \bar{r}_2 &= 1.4594 \dots, & \bar{\gamma}_1 &= \cos\left(\frac{9\pi}{16}\right), & \bar{\gamma}_3 &= \sin\left(\frac{9\pi}{16}\right) \end{aligned}$$

Вычисляя по формуле (4.7) для первого решения находим $\Delta = -3.8879... < 0$, а для второго $\Delta = -2.3148... < 0$. Условия (4.7) для обоих решений нарушаются. Вычисляя по формулам (4.8), (4.9) коэффициенты характеристического уравнения для первого решения получаем $a_0 = 1.0422... > 0$, $a_2 = 2.2726... > 0$, $a_2^2 - 4a_0 = 0.9960... > 0$. Для второго решения соответственно получаем $a_0 = 1.0057... > 0$, $a_2 = 2.6838... > 0$, $a_2^2 - 4a_0 = 3.1801... > 0$. Все корни характеристических уравнений лежат на мнимой оси, утверждение 5 неприменимо. Таким образом, в данном случае вопрос об устойчивости для обоих стационарных решений остается открытым.

5. Случай нелинейного потенциала $U(\gamma_1)$. В этом разделе рассмотрим гиростат Горячева–Сретенского в более общем случае нелинейного потенциала $U = U(\gamma_1)$, где $U(\gamma_1)$ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Отметим, что такого вида потенциальная функция, зависящая только от одной компоненты вектора γ , использовалась в [22]. Уравнения движения вместо (2.6), (2.7) и интеграл энергии теперь запишутся так

$$4C\dot{p} = 3Cqr - \lambda_3 q$$

$$4C\dot{q} = -3Cpr + \lambda_3 p + U'(\gamma_1)\gamma_3$$

$$C\dot{r} = -U'(\gamma_1)\gamma_2$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2$$

$$J_1 = 4Cp^2 + 4Cq^2 + Cr^2 + 2U(\gamma_1) = c_1 = \text{const}$$

Интеграл площадей и геометрический интеграл для системы (5.1), (5.2) сохраняют вид (2.4), (2.5). Состояния покоя (4.2) будут стационарными решениями и для системы (5.1), (5.2). Другие стационарные решения $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \text{const}$ системы (5.1), (5.2), для которых $\bar{q} = 0$, $\bar{\gamma}_2 = 0$, находятся с помощью квадратного относительно \bar{p} уравнения

$$3C\sin\varphi\bar{p}^2 - \lambda_3\cos\varphi\bar{p} - U'(\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

которое имеет вещественные корни при условии

$$D_1 = \lambda_3^2\cos^2\varphi + 12U'(\cos\varphi)C\sin^2\varphi\cos\varphi \geq 0$$

Таким образом, система (5.1), (5.2) имеет при всех $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \pi/2, \pi, 3\pi/2$, удовлетворяющих неравенству (5.5), два стационарных решения

$$\begin{aligned} \bar{p}_{1,2} &= \frac{\lambda_3\cos\varphi \pm \sqrt{D_1}}{6C\sin\varphi}, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{r}_{1,2} = \frac{\lambda_3\cos\varphi \pm \sqrt{D_1}}{6C\cos\varphi} \\ \bar{\gamma}_1 &= \cos\varphi, \quad \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \sin\varphi \end{aligned}$$

При $D_1 = 0$ эти решения (5.6) совпадают друг с другом. Для анализа устойчивости состояний покоя (4.2) функцию Ляпунова по методу Четаева [20] строим в виде связки интегралов

$$\begin{aligned} V(x) &= J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_3(J_3 - \bar{J}_3) + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2 = \\ &= 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 + 2U'(\sigma)x_4 + \alpha_3(2\sigma x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + \\ &\quad + U''(\sigma)x_4^2 + 4\beta_3x_4^2 + o(\|x\|^2), \end{aligned}$$

где используется интеграл энергии в форме (5.3). С целью уничтожения линейных слагаемых в связке и подавления влияния слагаемого $U''(\sigma)x_4^2$ если $U''(\sigma) < 0$, выбо-

рем числа α_3 и β_3 следующим образом: $\alpha_3 = -U'(\sigma)\sigma$, $4\beta_3 \geq |U''(\sigma)|$. Тогда квадратичная часть функции $V(x)$ будет формой $V(x) = 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 - U(\sigma)\sigma(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + (4\beta_3 + U''(\sigma))x_4^2$. В случае $U'(\sigma)\sigma < 0$ эта квадратичная форма является положительно определенной по отношению ко всем переменным $x = \text{col}(x_1, \dots, x_6)$. Тем самым доказано следующее

Утверждение 6. Состояние покоя (4.2) системы (5.1), (5.2), для которого выполнено условие $U'(\sigma)\sigma < 0$, устойчиво по Ляпунову.

Для линеаризованной в окрестности состояния покоя (4.2) системы (5.1), (5.2) характеристическое уравнение имеет вид (4.5), а коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_2 = \frac{\lambda_3^2 - 20CU'(\sigma)\sigma}{16C^2}, \quad a_0 = \frac{U'(\sigma)(4CU'(\sigma) - \lambda_3^2\sigma)}{16C^3} \quad (5.7)$$

Если $U'(\sigma)\sigma > 0$, то один из коэффициентов (5.7) будет отрицателен, поэтому справедливо следующее

Утверждение 7. Состояние покоя (4.2) системы (5.1), (5.2), для которого выполнено условие $U'(\sigma)\sigma > 0$, неустойчиво по Ляпунову.

В случае линейного потенциала $U = a\gamma_1$ одно из двух состояний покоя (4.2) было устойчиво, а другое неустойчиво. В случае же нелинейной функции $U = U(\gamma_1)$ возможны ситуации, когда оба состояния покоя устойчивы, или оба неустойчивы. Например, для функции $U(\gamma_1) = a\gamma_1^2$ при $a < 0$ оба состояния покоя устойчивы, а при $a > 0$ оба неустойчивы.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости перманентных вращений из семейств (5.6). В этом случае интегралы уравнений возмущенного движения записываются так

$$J_1 - \bar{J}_1 = 8C\bar{p}x_1 + 2C\bar{r}x_3 + 2U'(\bar{\gamma}_1)x_4 + 4Cx_1^2 + 4Cx_2^2 + Cx_3^2 + U''(\bar{\gamma}_1)x_4^2 + o(\|x\|^2)$$

$$J_2 - \bar{J}_2 = 4C\bar{\gamma}_1x_1 + C\bar{\gamma}_3x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 + 4Cx_1x_4 + 4Cx_2x_5 + Cx_3x_6$$

$$J_3 - \bar{J}_3 = 2\bar{\gamma}_1x_4 + 2\bar{\gamma}_3x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

Функцию Ляпунова по методу Четаева [20] строим в виде связки интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_2(J_2 - \bar{J}_2) + \alpha_3(J_3 - \bar{J}_3) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке числа α_2 и α_3 выберем следующим образом

$$\alpha_2 = -\frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1}, \quad \alpha_3 = \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2}$$

Тогда квадратичную часть функции Ляпунова можно записать в виде

$$V_2(x) = V_{14}(x_1, x_4) + V_{25}(x_2, x_5) + V_{36}(x_3, x_6) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2$$

где

$$V_{14}(x_1, x_4) = 4Cx_1^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1}4Cx_1x_4 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2}x_4^2 + U''(\bar{\gamma}_1)x_4^2$$

$$V_{25}(x_2, x_5) = 4Cx_2^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1}4Cx_2x_5 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2}x_5^2$$

$$V_{36}(x_3, x_6) = Cx_3^2 - \frac{2\bar{p}}{\bar{\gamma}_1} Cx_3x_6 + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} x_6^2$$

Так как положительные числа β_2 и β_3 можно брать как угодно большими, то для положительной определенности квадратичной части функции Ляпунова необходимо и достаточно [21], чтобы квадратичная форма $V_2(x)$ была положительно определенной на линейном множестве $\Theta = \{\bar{\gamma}_1x_4 + \bar{\gamma}_3x_6 = 0, 4C\bar{\gamma}_1x_1 + C\bar{\gamma}_3x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 = 0\}$.

Поскольку переменные x_2 и x_5 не входят в линейные ограничения Θ , то квадратичная форма $V_{25}(x_2, x_5)$ должна быть положительно определена, для чего в соответствии с критерием Сильвестра необходимо и достаточно выполнения неравенства (4.7). На множестве Θ выразим x_3 и x_6 через x_1 и x_4 , тогда после подстановки форма $V_{14}(x_1, x_4) + V_{36}(x_3, x_6)$ запишется так

$$V_{14} + V_{36} = a_{11}x_1^2 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{44}x_4^2$$

где

$$a_{11} = \frac{4C(1 + 3\bar{\gamma}_1^2)}{\bar{\gamma}_3^2}, \quad a_{14} = \frac{4}{\bar{\gamma}_3^3}(3C\bar{r}\bar{\gamma}_1^2 - \lambda_3\bar{\gamma}_1^2 - C\bar{r})$$

$$a_{44} = \frac{(3C\bar{r}\bar{\gamma}_1 - \lambda_3\bar{\gamma}_1)^2}{C\bar{\gamma}_3^4} - \frac{2\bar{r}\bar{\gamma}_1(3C\bar{r} - \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^4} + \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^4} + U''(\bar{\gamma}_1)$$

Применив критерий Сильвестра, получаем необходимые и достаточные условия положительной определенности формы $V_{14} + V_{36}$ в виде следующего неравенства

$$C\bar{\gamma}_3^4(1 + 3\bar{\gamma}_1^2)U''(\bar{\gamma}_1) + 32C^2\bar{p}^2\bar{\gamma}_3^2 + C\bar{r}\lambda_3\bar{\gamma}_3^2 - 8C^2\bar{r}^2\bar{\gamma}_1^2\bar{\gamma}_3^2 - 8C^2\bar{r}^2\bar{\gamma}_3^4 - 8C\lambda_3\bar{p}\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_3^3 + 4C\lambda_3\bar{r}\bar{\gamma}_1^4 + \lambda_3^2\bar{\gamma}_1^2\bar{\gamma}_3^2 > 0 \quad (5.8)$$

Из наличия положительно определенного первого интеграла на основании теоремы Ляпунова вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 8. Каждое перманентное вращение из однопараметрических семейств (5.6), для которого выполнены неравенства (4.7) и (5.8), является устойчивым по Ляпунову.

Замечание. Если $U''(\bar{\gamma}_1) \geq 0$ и выполнено неравенство (4.7), то будет выполняться и неравенство (5.8).

Для получения условий неустойчивости воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Для стационарных решений (5.6) характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет вид (4.5), где коэффициенты вместо (4.6) задаются следующими формулами

$$a_2 = \bar{p}^2 + \bar{r}^2 + \frac{4}{C}\bar{\gamma}_3^2U''(\bar{\gamma}_1) + \frac{(3C\bar{r} - \lambda_3)^2 - 20C\bar{\gamma}_1U'(\bar{\gamma}_1)}{16C^2} \quad (5.9)$$

$$a_0 = \frac{1}{16C^3}(C\bar{\gamma}_3^2U''(\bar{\gamma}_1)(\lambda_3\bar{r} - 3C\bar{r}^2 - 4\bar{\gamma}_1U'(\bar{\gamma}_1)) + 9C^3\bar{p}^2\bar{r}^2 + 9C^3\bar{r}^4 - 12U'(\bar{\gamma}_1)C^2\bar{p}^2\bar{\gamma}_1 - 14U''(\bar{\gamma}_1)C^2\bar{p}\bar{r}\bar{\gamma}_3 - 13U'(\bar{\gamma}_1)C^2\bar{r}^2\bar{\gamma}_1 - 6C^2\bar{p}^2\bar{r}\lambda_3 - 6C^2\bar{r}^3\lambda_3 + 4CU'(\bar{\gamma}_1)^2\bar{\gamma}_1^2 + 2U'(\bar{\gamma}_1)C\lambda_3\bar{p}\bar{\gamma}_3 + 6U'(\bar{\gamma}_1)C\lambda_3\bar{r}\bar{\gamma}_1 + C\bar{p}^2\lambda_3^2 + C\bar{r}^2\lambda_3^2 - U'(\bar{\gamma}_1)\lambda_3^2\bar{\gamma}_1) \quad (5.10)$$

Из теоремы Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению вытекает теперь справедливость следующего утверждения.

Утверждение 9. Каждое перманентное вращение из однопараметрических семейств (5.6), для которого коэффициенты a_2 и a_0 , характеристического уравнения (4.5), вычисляемые по формулам (5.9) и (5.10), удовлетворяют хотя бы одному из трех условий $a_2 < 0$, $a_0 < 0$, $a_2^2 - 4a_0 < 0$, является неустойчивым по Ляпунову.

Сопоставляя основные результаты данного и предыдущего разделов отметим, что особенность случая нелинейного потенциала проявляется в том, что как достаточные, так и необходимые условия устойчивости перманентных вращений существенным образом зависят от значения второй производной $U''(\bar{\gamma}_1)$ на исследуемом стационарном решении. А вот для состояний покоя в случае нелинейного потенциала условия устойчивости от значения второй производной не зависят и вполне аналогичны случаю линейного потенциала.

6. О влиянии момента циркулярно-гироскопических сил на устойчивость стационарных решений. Вернемся теперь к рассмотрению системы (2.1), (2.2), в которой действует момент циркулярно-гироскопических сил $L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma$, т.е. функция $L = L(t, \gamma, \omega)$ не обращается тождественно в ноль. Потенциал $U = U(\gamma_1)$ будем считать таким же, как в разделе 5, а параметры удовлетворяющими условиям Горячева–Сретенского. Тогда в координатной форме уравнения движения записываются так

$$\begin{aligned} 4C\dot{p} &= 3Cqr - \lambda_3q + L(q\gamma_3 - r\gamma_2) \\ 4C\dot{q} &= -3Cpr + \lambda_3p + U'(\gamma_1)\gamma_3 + L(r\gamma_1 - p\gamma_3) \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$C\dot{r} = -U'(\gamma_1)\gamma_2 + L(p\gamma_2 - q\gamma_1)$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \quad (6.2)$$

Легко проверить, что справедливы следующие факты:

- 1) система (6.1), (6.2) и система (5.1), (5.2) имеют одни и те же стационарные решения;
- 2) система (6.1), (6.2) имеет те же первые интегралы (5.3), (2.9), (2.10).

Поэтому условия устойчивости стационарных решений, полученные с помощью интегральных связей Четаева и сформулированные в утверждениях 6 и 8, будут справедливы и по отношению к системе (6.1), (6.2). Таким образом, здесь имеется прямая аналогия с второй теоремой Томсона–Тэта–Четаева [23]: если построением знакоопределенной связки интегралов установлена устойчивость стационарного решения системы (5.1), (5.2) с действием только потенциального момента $\gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}$, то она сохраняется в системе (6.1), (6.2) при добавлении произвольного циркулярно-гироскопического момента $L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma$.

Рассмотрим теперь как обстоит дело касательно свойства неустойчивости. Далее считаем, что в системе (6.1) $L(t, \gamma, \omega) = L = \text{const}$. Тогда характеристическое уравнение для состояния покоя (4.2) системы (6.1), (6.2) по-прежнему имеет вид (4.5), а его коэффициенты выражаются следующим образом

$$a_2 = \frac{L^2}{4C^2} + \frac{\lambda_3^2 - 20CU'(\sigma)\sigma}{16C^2}, \quad a_0 = \frac{U'(\sigma)(4CU'(\sigma) - \lambda_3^2\sigma)}{16C^3} \quad (6.3)$$

Из (6.3) следует, что если выполнено условие

$$4C\sigma U'(\sigma) - \lambda_3^2 > 0 \quad (6.4)$$

то при всех достаточно больших $|L|$ будут выполнены неравенства $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_2^2 - 4a_0 > 0$, следовательно, все корни соответствующего характеристического уравнения (4.5) будут расположены на мнимой оси.

Тем самым установлено, что при выполнении (6.4) циркулярно-гироскопический момент $L\omega \times \gamma$ с достаточно большим по модулю коэффициентом $L = \text{const}$ осуществляет гироскопическую стабилизацию в первом приближении для неустойчивого при одном только потенциальном моменте состояния покоя. Если же вместо (6.4) выполнено неравенство $U'(\sigma)(4CU'(\sigma) - \lambda_3^2\sigma) < 0$, то при любом $L = \text{const}$ характеристическое уравнение будет иметь корень с положительной вещественной частью, следовательно состояние покоя будет неустойчиво.

Рассмотрим теперь произвольное перманентное вращение семейства (5.6), оно при любом L будет стационарным решением и для системы (6.1), (6.2). Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид (4.5), в котором коэффициент a_0 задается формулой (5.10), а коэффициент a_2 является квадратным трехчленом $a_2 = b_2L^2 + b_1L + b_0$, в котором $b_2 = \frac{4\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_3^2}{16C^2} > 0$. Поэтому, если для a_0 , вычисляемого по формуле (5.10), будет выполнено условие $a_0 > 0$, то при всех достаточно больших $|L|$ будут выполнены неравенства $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $a_2^2 - 4a_0 > 0$, следовательно, все корни соответствующего характеристического уравнения (4.5) будут расположены на мнимой оси.

Таким образом, для перманентных вращений также установлена возможность стабилизации в первом приближении за счет присоединения момента циркулярно-гироскопических сил. Здесь налицо полная аналогия с первой теоремой Томсона—Тэта—Четаева [23]: если коэффициент при наименьшей степени в характеристическом уравнении положителен, то возможна гироскопическая стабилизация за счет момента $L\omega \times \gamma$ с достаточно большим по модулю коэффициентом $L = \text{const}$, а если коэффициент при наименьшей степени отрицателен, то такая стабилизация невозможна.

7. Обсуждение результатов. Исследование устойчивости движения гиростатов методом интегральных связей Четаева было начато В.В. Румянцевым [24]. Достаточные условия устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата были получены методом Четаева в [25], а с помощью теоремы Рауса—Ляпунова в [26]. Но в этих работах рассматривался случай общего положения (все компоненты вектора гиростатического момента ненулевые, все координаты центра масс ненулевые), поэтому полученные в них условия не применимы к случаю гиростата Горячева—Сретенского. Этот случай по терминологии [27] является вырожденным и должен изучаться отдельно. Если в уравнениях движения гиростата (2.1) потенциал удовлетворяет условиям Горячева, т.е. имеет вид $U(\gamma) = a\gamma_1$, а вектор гиростатического момента вместо условий Сретенского подчинен условиям $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то имеет место другой вырожденный в смысле [27] случай, для которого устойчивость перманентных вращений вокруг первой главной оси инерции рассматривалась в [28].

В дальнейшем исследования устойчивости стационарных решений уравнений движения тяжелого гиростата были продолжены и развиваются и в настоящее время (см., например, [29–32] и цитированную там литературу). Из недавних работ этого направления отметим [33], где были найдены семейства перманентных вращений и условия их устойчивости в случае, когда потенциал линейный и зависит только от одной переменной. Сопоставление на ряде примеров показало, что утверждение 4 и теорема 6 из [33] дают одинаковые области устойчивости, хотя записи самих условий устойчивости существенно различаются. При этом в [33] условия Горячева—Сретенского не используются, поэтому теорема 6 из [33] применима к более широкому классу систем, чем утверждение 4. Однако в случае нелинейного потенциала, где применимо утверждение 8, результаты [33] не применимы, поскольку относятся только к случаю линейного потенциала.

Отметим также, что возможность и условия стабилизации в линейном приближении за счет момента циркулярно-гироскопических сил для уравнений движения гиростата ранее в литературе не рассматривались, и аналогия с теоремами Томсона—Тэта—Четаева не устанавливалась.

Заключение. В заключение сформулируем кратко основные результаты статьи. Установлено, что на всех решениях, лежащих вне множества $J_2 = 0$ нулевого уровня интеграла площадей, компонента вектора угловой скорости $q(t)$ имеет нулевое среднее значение по всей оси времени. Найдены все стационарные решения уравнений движения гиростата Горячева—Сретенского и проведен анализ их устойчивости. Доказано, что одно состояние покоя устойчиво, а другое неустойчиво. Получены достаточные условия устойчивости перманентных вращений. Показана возможность гироскопической стабилизации в первом приближении за счет момента циркулярно-гироскопических сил при определенных условиях, аналогичных теореме Томсона—Тэта—Четаева.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 22-29-00819.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
3. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 2012. 401 с.
4. Горячев Д.Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Матем. сб. 1900. Т. 21. Вып. 3. С. 431–438.
5. Чаплыгин С.А. Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // Тр. Отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания. 1901. Т. 10. Вып. 2. С. 32–34.
6. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292–294.
7. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. 256 с.
8. Гашененко И.Н. О решении Д.Н. Горячева // Механика твердого тела. 2009. Вып. 39. С. 29–41.
9. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: ЛГУ, 1988. 144 с.
10. Маркеев А.П. О тождественном резонансе в одном частном случае задачи об устойчивости периодических движений твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 32–37.
11. Бардин Б.С. К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева—Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14–21.
12. Каранетян А.В. Инвариантные множества механических систем с симметрией // Проблемы устойчивости и управления. М.: Физматлит, 2013. С. 184–210.
13. Щетинина Е.К. Новые решения уравнений Гриоли—Пуассона в случае инвариантного соотношения // Вісник Донецького національного університету. Сер. А. Природничі науки. 2010. № 2. С. 24–28.
14. Горр Г.В., Мазнев А.В. О решениях уравнений движения твердого тела в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента // Механика твердого тела. 2017. Вып. 47. С. 12–24.
15. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. № 2. P. 216–219.
<https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001>
16. Зыза А.В. Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьют. исслед. моделир. 2018. Т. 10. № 1. С. 7–25.
<https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25>

17. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur. 1963. V. 35. f. 1–2. P. 35–39.
18. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.
19. *Мерцалов Н.И.* Задача о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку при $A = B = 4C$ и интеграле площадей $\neq 0$ // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. 1946. № 5. С. 697–701.
20. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
21. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
22. *Макеев Н.Н.* Интегрируемость гиростатических систем в магнитном поле // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. 2003. Вып. 5. С. 49–70.
23. *Меркин Д.П.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Физматлит, 1987. 304 с.
24. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гиростатов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 1. С. 9–16.
25. *Анчев А.* О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 49–58.
26. *Дружинин Э.И.* Устойчивость стационарных движений гиростатов // Труды Казанского авиационного института Казань: Изд-во КАИ. 1966. Вып. 92. С. 12–23.
27. *Дружинин Э.И.* Об устойчивости стационарных движений гиростатов в вырожденных случаях // Труды Казанского авиационного института Казань: Изд-во КАИ. 1968. Вып. 97. С. 30–48.
28. *Ковалев А.М.* Устойчивость равномерных вращений тяжелого гиростата вокруг главной оси // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 994–998.
29. *Vera J.A.* The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 401. № 3. P. 836–849.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.11.003>
30. *de Bustos Munoz M.T., Guirao J.L.G., Vera Lopez J.A., Campuzano A.V.* On sufficient conditions of stability of the permanent rotations of a heavy triaxial gyrostat // Qualit. Theory Dyn. Syst. 2015. V. 14. № 2. P. 265–280.
<https://doi.org/10.1007/s12346-014-0128-6>
31. *Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A.* Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field // Appl. Math. Comput. 2017. V. 293. P. 404–415.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.08.041>
32. *Kosov A.A., Semenov E.I.* On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D. Nonlin. Phenom. 2022. V. 430. P. 133103.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133103>
33. *Lanchares V., Iñarrea M., Pascual A.I., Elipe A.* Stability conditions for permanent rotations of a heavy gyrostat with two constant rotors // Mathematics. 2022. V. 10. P. 1882.
<https://doi.org/10.3390/math10111882>

УДК 539.735

**О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА,
НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНЕШНЕГО
ДАВЛЕНИЯ, ПРИ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ ЗАКОНЕ
ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ**

© 2023 г. Б. Г. Миронов^{a,*}, Ю. Б. Миронов^{b,**}

^aРоссийский университет транспорта, 127994, Москва, Россия

^bМосковский технический университет связи и информатики,
111024, г. Москва, Россия

*e-mail: mbg.chspu@yandex.ru

**e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.

После доработки 27.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

В работе исследовано кручение стержней из анизотропно упрочняющегося жестко-пластического материала при линеаризованном законе пластического течения. Предполагается, что на стержень действует внешнее давление, которое меняется линейно вдоль образующей. Определены компоненты тензоров напряжения и деформации, описывающих предельное состояние стержня.

Ключевые слова: пластичность, стержень, упрочнение, кручение, анизотропия, деформация, напряжение, линеаризация, ассоциированный закон течения

DOI: 10.31857/S0572329923600226, EDN: ZTZBHC

Кручение, как один из распространенных видов деформации тел, довольно часто встречается в практике. Исследованию кручения различных стержней посвящено много работ. Основополагающими среди них являются работы [1–3]. В работах [5, 6] и [8, 9] содержатся исследования кручения стержней из неоднородного материала. Кручение стержней из упрочняющегося материала рассмотрено в работах [4, 10]. В [7] и [10] исследовано кручение стержней в случае, когда они находятся под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей.

При кручении напряженно-деформированное состояние стержней из анизотропно упрочняющегося материала, находящихся под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей стержня, определяется из соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu (\lambda, \mu - \text{const}) \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \quad (2)$$

– условие текучести

$$(\tau_{xz} - ce_{xz})^2 + (\tau_{yz} - ce_{yz})^2 = k^2 (k - \text{const}) \quad (3)$$

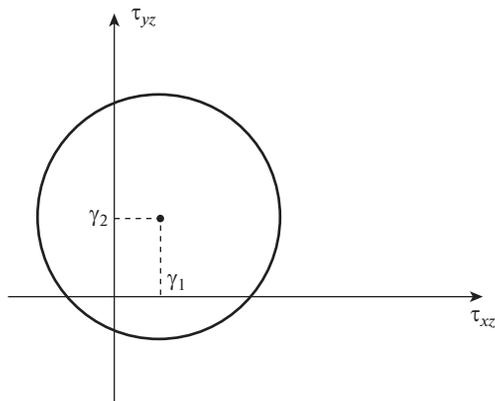


Рис. 1. Линеаризованное условие пластичности.

– соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{de_{xz}}{\tau_{xz} - ce_{xz}} = \frac{de_{yz}}{\tau_{yz} - ce_{yz}}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0 \quad (4)$$

где e_{ij} – компоненты деформации, σ_{ij} – компоненты напряжения, k – предел текучести.

Предполагается, что упрочнение линейное ($c = \text{const}$).

В плоскости τ_{xz}, τ_{yz} уравнение (3) определяет окружность радиуса k (рис. 1) с центром в точке с координатами $\gamma_1 = ce_{xz}$, $\gamma_2 = ce_{yz}$.

Линеаризация соотношений ассоциированного закона пластического течения заключается в том, что во время всего процесса пластического деформирования компоненты приращения пластических деформаций пропорциональны компонентам напряжений, возникающим в начальный момент пластического течения, то есть компонентам напряжений, которые определяются из задачи теории идеальной пластичности

$$\frac{de_{xz}^0}{\tau_{xz}^0} = \frac{de_{yz}^0}{\tau_{yz}^0}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0 \quad (5)$$

где компоненты напряжения τ_{xz}^0, τ_{yz}^0 , удовлетворяют условию идеальной пластичности

$$(\tau_{xz}^0)^2 + (\tau_{yz}^0)^2 = k^2 \quad (6)$$

Учитывая, что компоненты перемещения u, v, w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y) \quad (7)$$

где w – депланация, θ – крутка. Соотношения связи между компонентами деформации и компонентами перемещения запишем в виде

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(-\theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (8)$$

Из (8) получим

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta \quad (9)$$

Соотношение (5) интегрируется

$$\frac{e_{xz}}{\tau_{xz}^0} = \frac{e_{yz}}{\tau_{yz}^0}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0 \quad (10)$$

Полагая, что компоненты деформаций при кручении стержня из анизотропно упрочняющегося материала остаются теми же, что и при кручении стержня из идеально пластического материала можно удовлетворить соотношениям (9) и (10). Соответствующая задача теории идеальной пластичности о кручении стержня из идеально пластического материала, находящегося под действием внешнего давления, может считаться решенной, то есть компоненты деформаций e_{xz}, e_{yz} можно считать определенными. При этом

$$e_{xz} = -\frac{\lambda\theta(x+c_1)(x+c_2)}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}}, \quad e_{yz} = -\theta(x+c_1) \quad (11)$$

где c_1 и c_2 – постоянные вдоль характеристик соотношения (9).

Система уравнений, исследуемая в дальнейшем, представляет собой систему из соотношений (1–3), (9), (10).

Дифференцируя соотношение (3) по переменной x , получим

$$(\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + (\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = c \left((\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + (\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) \quad (12)$$

Согласно (12), из уравнения равновесия (2) имеем

$$(\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} (\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \left(c \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} - \lambda \right) (\tau_{xz} - ce_{xz}) + c \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} (\tau_{yz} - ce_{yz}) \quad (13)$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (13) имеет вид

$$\frac{dx}{(\tau_{yz} - ce_{yz})} = -\frac{dy}{(\tau_{xz} - ce_{xz})} = \frac{d\tau_{yz}}{\left(c \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} - \lambda \right) (\tau_{xz} - ce_{xz}) + c \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} (\tau_{yz} - ce_{yz})} \quad (14)$$

Из (14) следует, что характеристики определяются из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\tau_{xz} - ce_{xz}}{\tau_{yz} - ce_{yz}} \quad (15)$$

Вдоль характеристик (15) справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = \lambda x + \alpha, \quad \tau_{yz} = ce_{yz} \pm \sqrt{k^2 - (\lambda x + \alpha - ce_{xz})^2} \quad (16)$$

где $\alpha = \text{const}$ вдоль каждой характеристики.

Аналогично дифференцируя соотношение (3) по переменной y , получим

$$(\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + (\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = c \left((\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + (\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} \right) \quad (17)$$

Тогда из уравнения равновесия (2) имеем

$$-(\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + (\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = c \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} (\tau_{xz} - ce_{xz}) + \left(c \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} - \lambda \right) (\tau_{yz} - ce_{yz}) \quad (18)$$

Система уравнений для определения характеристик и соотношений вдоль характеристик уравнения (18) имеет вид

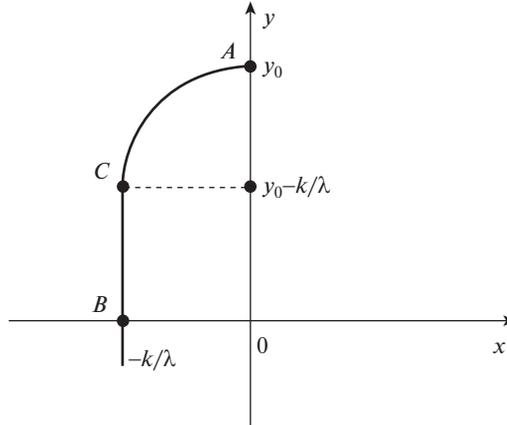


Рис. 2. Огибающая семейства характеристик.

$$-\frac{dx}{(\tau_{yz} - ce_{yz})} = \frac{dy}{(\tau_{xz} - ce_{xz})} = \frac{d\tau_{xz}}{c \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} (\tau_{xz} - ce_{xz}) + \left(c \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} - \lambda \right) (\tau_{yz} - ce_{yz})} \quad (19)$$

Из (19) и (3) следует, что вдоль характеристик (15) справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = ce_{xz} \pm \sqrt{k^2 - (\lambda y + \beta - ce_{yz})^2}, \quad \tau_{yz} = \lambda y + \beta \quad (20)$$

где $\beta = \text{const}$ вдоль каждой характеристики.

Рассмотрим кручение стержня полигонального сечения. На рис. 2 показана часть поперечного сечения стержня: линия AO – свободная граница стержня ($x = 0$). AC – характеристика и BC – огибающая семейства характеристик ($x = -\frac{k}{\lambda}$) (определяемые из решения задачи теории идеальной пластичности). На контуре сечения вектор касательного напряжения $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ параллелен контуру.

Компоненты деформаций (в соответствии с теорией идеальной пластичности) в области $ABCO$ могут быть записаны в виде

$$e_{xz} = -\frac{\lambda \theta \left(x + \frac{k}{\lambda} \right) x}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}}, \quad e_{yz} = -\theta \left(x + \frac{k}{\lambda} \right) \quad (21)$$

С учетом (21) из (16) получим соотношения для компонент напряжений

$$\tau_{xz} = \lambda x, \quad \tau_{yz} = -c\theta \left(x + \frac{k}{\lambda} \right) + \sqrt{k^2 - \left(\lambda x + \frac{c\lambda \theta \left(x + \frac{k}{\lambda} \right) x}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}} \right)^2} \quad (22)$$

Согласно (21) и (22) из (15) найдем уравнение характеристик

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\lambda x + \frac{c\lambda\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)x}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}}}{\sqrt{k^2 - \left(\lambda x + \frac{c\lambda\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)x}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}}\right)^2}} \quad (23)$$

Из (23) следует, что характеристики ортогональны контуру AO поперечного сечения стержня и касаются огибающей BC .

Согласно (22), компонента напряжения τ_{yz} может быть представлена в виде

$$\tau_{yz} = \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2} \left(1 + \frac{c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\left(2\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2} + c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\right)}{k^2 - (\lambda x)^2} \right) - c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right) \quad (24)$$

С учетом первого соотношения (22) из (24) имеем

$$\tau_{yz} = \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2} \left(1 + \frac{c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)}{\sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2}} \right) - c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right) \quad (25)$$

Как и в случае идеальной пластичности, компонента напряжения τ_{xz} линейно зависит от величины x . В начальный момент пластического деформирования $\theta = 0$ и $\tau_{yz} = \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2}$. В случае, когда $\theta \neq 0$ распределение τ_{yz} относительно θ носит нелинейный характер. При этом компонента напряжения τ_{yz} уменьшается с ростом крутки θ . Следует также отметить, что при возрастании крутки θ величина

$$\tau^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 - \tau_{xz}^2 \frac{c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\left(2\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2} + c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\right)}{k^2 - (\lambda x)^2} - 2c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right) \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2} \left(1 + \frac{c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\left(2\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2} + c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\right)}{k^2 - (\lambda x)^2} \right) + c^2\theta^2\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)^2 \quad (26)$$

убывает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
4. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002. 448 с.
5. Ольшев В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.

6. *Миронов Б.Г.* К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.
7. *Миронов Б.Г., Козлова Л.С.* Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 3. С. 107–113.
8. *Mironov B.G., Mironov Yu.B.* Torsion anisotropic and composite cylindrical rod // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1203. P. 012009.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012009>
9. *Mironov B.G., Mironov Yu.B.* Torsion of Non-Uniform Cylindrical and Prismatic Rods Made of Ideally Plastic Material under Linearized Yield Criterion // Mech. Solids. 2020. V. 55. P. 813–819.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420060102>
10. *Mironov B.G., Mironov Yu.B.* Problem on Torsion of Rods Made of a Hardening Material under the Action of Variable External Pressure Using a Linearized Plasticity condition // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 2. P. 271–277.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922020143>

УДК 531.3

О ПОДАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЙ БАЛОЧНЫХ МОСТОВ ПОЕЗДОМ КАК ИНЕРЦИОННЫМ ДЕМПФЕРОМ

© 2023 г. В. Ю. Поляков^{a,*}, В. В. Саурин^{b,**}

^aРоссийский университет транспорта, Москва, Россия

^bИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: pvy55@mail.ru

**e-mail: saurin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 06.04.2023 г.

После доработки 15.04.2023 г.

Принята к публикации 17.04.2023 г.

В статье рассматривается проблема недопущения резонанса в мостовых балках от периодического воздействия подвижного состава. Резонансные колебания балок становятся реальностью при высоких скоростях движения, когда поезд сформирован из одинаковых вагонов. Явление подавления колебаний балок поездом возможно лишь при точном соотношении длины вагона и балки, что значительно сокращает набор необходимых длин балок. Кроме того, рассмотрение вопросов взаимодействия поезда и моста в целях безопасности требует привлечения достаточно сложного и громоздкого математического аппарата и соответствующего программного обеспечения. В статье предлагается новый метод ограничения колебаний балок, пригодный для любых пролетов и доступный для инженеров на этапе предпроектного назначения динамических параметров балок.

Ключевые слова: динамика мостов, высокоскоростная магистраль, резонанс, подавление колебаний

DOI: 10.31857/S0572329923600251, EDN: TXOFFR

1. Введение. Из-за повышенных требований к плану высокоскоростной магистрали (ВСМ), необходимости устройства пересечения с другими дорогами только на разных уровнях доля мостов на магистрали значительно возрастает [1–3] и достигает 94% от общей длины линии. Благодаря простоте монтажа и дешевизне свободно опертая балка стала предпочтительной конструкцией для строительства мостов на ВСМ. Однако по мере того, как скорость поезда постоянно увеличивается, проблемы, связанные с вибрационной реакцией моста, становятся более важными. Поэтому динамический анализ мостов под нагрузкой скоростных поездов привлекает внимание многих исследователей из разных стран. За последние несколько десятилетий проведен ряд теоретических исследований по вибрационному отклику и колебаниями свободно опертым балкой моста высокоскоростной железной дороги [4–6]. Однако из-за роста скорости движения эта область исследований остается актуальной и сложной.

Введение высокоскоростного движения поездов со скоростями до 111 м/с (400 км/ч) делает реальной возможность возбуждения резонансных колебаний в наиболее распространенных конструкциях мостов – балочных [7]. При этом динамический коэффициент достигает 4 [7]. Резонанс также опасен ухудшением взаимодействия колеса и рельса и ведет к сходу колеса с рельса [8].

Модели упругих балок используются для описания механических систем в широком классе приложений. Мосты, рельсы, манипуляторы и резонаторы – вот несколько примеров конструкций, которые были смоделированы как балки для изучения их поведения. Некоторые материалы, а также геометрические и внешние параметры могут существенно повлиять на их характеристики. Среди параметров, оказывающих значительное влияние на поведение строительных конструкций, является приложенная нагрузка. Тип нагрузки варьируется от простой статической нагрузки на точку до нагрузки, зависящей от пространства и времени.

Поведение гибкой балки с подвижной нагрузкой или системой масса–пружина привлекало внимание исследователей на протяжении десятилетий. Можно отметить работы [9, 10]. Это стало популярной темой в литературе из-за широкого использования во многих инженерных приложениях, например, подвесные мосты, мостовые краны и привязные спутниковые системы [11]. Было предложено несколько моделей для описания характеристик системы и влияния движущейся нагрузки или массы на динамическую характеристику балки. Монография [12] является одним из первых комплексных исследований в этом отношении. Аналитические решения реакции балки были представлены для различных типов нагрузок, таких как подвижная постоянная нагрузка, подвижная гармоническая нагрузка и движущиеся массы. Поскольку конструкция подвергается нагрузке, изменяющейся в пространстве и времени, результирующие напряжения и деформации значительно выше, чем наблюдаемые при стационарных нагрузках. Наиболее распространенными являются балки, использующие модель Эйлера–Бернулли с постоянной движущейся нагрузкой. В более точных моделях используется динамическая система подвижная масса–пружина–демпфер на балке; эти модели учитывали инерцию и эффект отскока движущегося объекта [12, 15]. Для решения уравнений движения системы использовались различные аналитические и численные подходы, такие как метод конечных элементов [16], метод штрафа [17] и множитель Лагранжа [18]. Краткий обзор работ по движущейся нагрузке с их приложениями предоставлен в [19].

В работе Янга [20] и в монографии [21] рассматривается подавление колебаний балок поездом, который и возбуждает эти колебания. В статье [22] явление антирезонанса, или подавления колебаний балок нагрузкой рассмотрены применительно к реальным проектным решениям на высокоскоростных магистралях (ВСМ). Термин “антирезонанс” был введен, по всей видимости, Я.Г. Пановко и И.И. Губановой в их книге (см. например [23]). Классический антирезонанс представлен на рис. 1. Антирезонанс проявляется в виде монотонного уменьшения амплитуды вынужденных колебаний середины балки во время прохода поезда [22]. После прохода поезда ($t > 4.5$ с) происходят свободные колебания. Проблема применения, предложенного в монографии [20] условия подавления колебаний балки подвижным составом заключается в строгом выполнении соотношения длины пролетного строения и вагона. Так, для распространенной длины вагона 25 м (ICE3, CRH380B, CRH3C, AVE-103, Siemens Velaro Rus и т.д.) длина пролетного строения должна быть равна 12.5 м, или 37.5 м или 62.5 м для проявления эффекта подавления колебаний. Однако при движении поездов с другой длиной вагона, например, TGV (18.7 м), резонанс указанных пролетных строений становится возможным на скорости 78 м/с (281 км/ч). С другой стороны, при установленной длине пролетного строения 33 м длина вагона должна быть равна 13.2 м, 22 м или 66 м. При иных вагонах резонанс в таких балках реализуется при скоростях менее расчетных.

Все эти условия значительно затрудняют практическую реализацию подавления колебаний поездом, как инерционным демпфером. В реальности, пересечение различных препятствий требует широкого разнообразия пролетов балок. Так, например, на ВСМ в Китае [21] в основном применяются стандартные балки длиной 20, 24, 32, 40 м. При этом длина средних вагонов различных типов поездов варьируется от 24.77 м до 26.6 м.

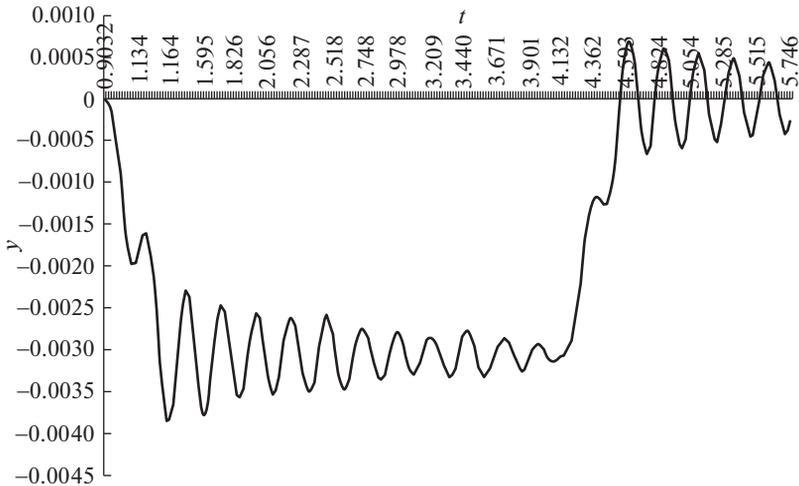


Рис. 1. Явление антирезонанса.

Определение критических скоростей движения, вызывающих резонанс или, наоборот, подавление колебаний с оценкой безопасности движения по коэффициенту схода производится с помощью сложных методов теории оптимального управления и математического анализа, а также соответствующего программного обеспечения [20, 22]. При проектировании же требуются относительно простые практические методы, позволяющие инженеру не только определить режим динамического поведения балочных пролетных строений до подробной разработки проектной документации, но и назначать удачные динамические параметры балок еще на стадии предпроектной разработки конструкции.

Таким образом, разработка иных условий, позволяющих определить поведение балочных пролетных строений при высокоскоростном движении, или заранее задать удовлетворительные динамические параметры балок является актуальной задачей.

2. Метод определения условий резонанса и подавления колебаний балок. Изучим следующую задачу. Рассмотрим упругую прямолинейную балку показанную на рис. 2.

Балка с изгибной жесткостью EJ и линейной плотностью ρ имеет длину L . Считается, что на балку действует постоянная по величине вертикальная сила $P(t) = \text{const}$, движущаяся вдоль горизонтальной оси со скоростью $V = \text{const}$. В начальный момент времени балка находится в покое, т. е. $y(0, x) = y'(0, x) = 0$ и сила P приложена к левому концу балки $x = 0$. В момент времени $t = L/V$, когда сила оказывается приложенной к правому концу, на левом конце возникает новая сила P , которая движется вдоль балки со скоростью $V = \text{const}$. Таким образом балка оказывается под действием периодической нагрузки с периодом $T = L/V$. Граничные условия не зависят от времени и определяются условиями закрепления: $y(t, 0) = y''(t, 0) = y(t, L) = y''(t, L) = 0$.

Движение балки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$EJ \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial y^2} = \delta(x - Vt)P \quad (1.1)$$

В данном случае демпфирование не учитывается. Здесь $\delta(x)$ – дельта функция.

Решение будем искать в виде

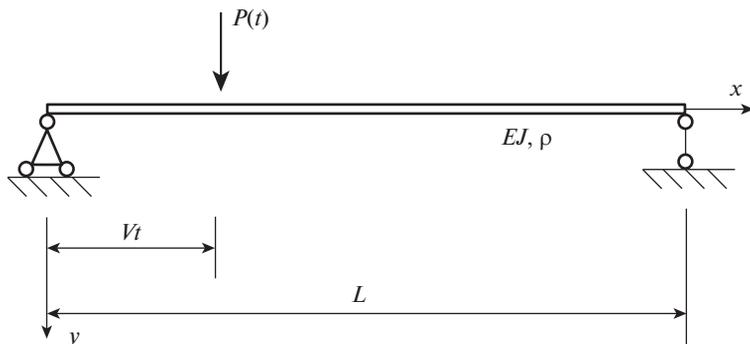


Рис. 2. Упругая балка под действием подвижной силы $P(t)$.

$$y(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (1.2)$$

Где m – элемент натуральной последовательности. Последовательно умножая уравнение (1.1) на $\sin \frac{i\pi x}{L}$ и интегрируя его по длине балки от 0 до L уравнение (1.1) сводится к счетному количеству независимых уравнений для нахождения функций $q_m(x)$, $i = 1, \dots, \infty$

$$\frac{\partial^2 q_m(t)}{\partial t^2} + \frac{\pi^4 m^4 EJ}{L^4 \rho} q_m(t) - \frac{2P \sin \left(\frac{\pi m V t}{L} \right)}{\rho L} = 0, \quad m = 1, \dots, \infty \quad (1.3)$$

Решение уравнений (1.3) имеет вид

$$q_m(t) = C_1 \cos \left(\frac{\pi^2 m^2 \sqrt{EJ}}{L^2 \sqrt{\rho}} t \right) + C_2 \sin \left(\frac{\pi^2 m^2 \sqrt{EJ}}{L^2 \sqrt{\rho}} t \right) + \frac{2P \sin \left(\frac{\pi m V t}{L} \right) L^3}{\pi^2 m^2 (EJ \pi^2 m^2 - L^2 V^2 \rho)} \quad (1.4)$$

Для первого интервала движения ($0 < t < L/V$), учитывая начальные условия $q_m(0) = \frac{\partial q_m(0)}{\partial t} = 0$, решение имеет вид

$$q_m(t) = \frac{2PL^3}{\sqrt{EJ} m^3 \pi^3} \left[\frac{VL \sqrt{\rho} \sin \left(\frac{\pi^2 m^2 \sqrt{EJ}}{L^2 \sqrt{\rho}} t \right) - \pi m \sqrt{EJ} \sin \left(\frac{\pi V m t}{L} \right)}{(EJ \pi^2 m^2 - L^2 V^2 \rho)} \right] \quad (1.5)$$

Для того чтобы построить решение для второго интервала ($L/V < t < 2L/V$) нужно учесть, что терминальные условия первого движения являются начальными для второго

$$q_m\left(\frac{L}{V}\right) = -\frac{2PL^4V\sqrt{\rho}\sin\left(\frac{\pi^2m^2\sqrt{EJ}}{VL\sqrt{\rho}}\right)}{\sqrt{EJ}m^3\pi^3(EJ\pi^2m^2 - L^2V^2\rho)}$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial t}\Big|_{t=\frac{L}{V}} = -\frac{2PL^2V\left(\cos\left(\frac{\pi^2m^2\sqrt{EJ}}{VL\sqrt{\rho}}\right) - (-1)^m\right)}{m\pi(EJ\pi^2m^2 - L^2V^2\rho)}$$
(1.6)

Введем в рассмотрение параметр

$$\beta_0 = \frac{\pi\sqrt{EJ}}{VL\sqrt{\rho}}$$
(1.7)

Тогда соотношения (1.6) переписутся в виде

$$q_m\left(\frac{L}{V}\right) = \frac{2PL^2\sin(\pi m^2\beta_0)}{\sqrt{\rho EJ}m^3\pi^3V(\beta_0^2m^2 - 1)}$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial t}\Big|_{t=\frac{L}{V}} = \frac{2P(\cos(\pi m^2\beta_0) - (-1)^m)}{m\pi\rho(\beta_0^2m^2 - 1)}$$
(1.8)

Интересным представляется случай, когда параметр β_0 является целым числом

$$\beta_0 = 1, 2, \dots$$
(1.9)

В этом случае первое соотношение из (1.8) тождественно равно нулю

$$q_m\left(\frac{L}{V}\right) = 0$$

а второе имеет вид

$$\frac{\partial q_m}{\partial t}\Big|_{t=\frac{L}{V}} = \frac{2P}{m\pi\rho(\beta_0^2m^2 - 1)}((-1)^{m^2\beta_0} - (-1)^m)$$
(1.10)

Очевидно, что значение выражения (1.10) определяется значением скобки, которую, не теряя общности можно переписать в виде

$$((-1)^{m\beta_0} - (-1)^m) = \begin{cases} 0, & \beta_0 = 2i + 1 \\ 2(-1)^m, & \beta_0 = 2i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots$$
(1.11)

Таким образом, если значение параметра β_0 является нечетным числом $\beta_0 = 2i - 1$, $i = 1, 2, \dots$, то реализуются условия антирезонанса и терминальные условия для этого движения имеют вид

$$q_m\left(\frac{L}{V}\right) = 0, \quad \frac{\partial q_m}{\partial t}\Big|_{t=\frac{L}{V}} = 0$$
(1.12)

Используя это свойство, можно утверждать, что какая бы не была система последовательно действующих движущихся сосредоточенных сил вдоль балки, амплитуды возникающих колебаний всегда будут ограниченными. А при условии наличия диссипативных сил такие колебания будут затухать.

В случае, если значение параметра β_0 является четным числом $\beta_0^* = 2i$, $i = 1, 2, \dots$, то несмотря на то, что в конце движения реализуются нулевые перемещения по всей длине балки, распределение скоростей могут быть не нулевыми

$$\left. \frac{\partial q_m}{\partial t} \right|_{t=\frac{L}{V}} = \frac{2P[(-1)^{m\beta_0} - (-1)^m]}{m\pi\rho(\beta_0^2 m^2 - 1)} = \begin{cases} \frac{-4P}{m\pi\rho(\beta_0^2 m^2 - 1)}, & m = 2i - 1 \\ 0, & m = 2i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Таким образом при четных значениях параметра m (четные моды) так же, как и в предыдущем случае наблюдается явление антирезонанса. Можно предположить, что для нечетных мод при периодическом нагружении балки бегущими силами может наблюдаться явление резонанса.

Рассмотрим следующий процесс нагружения балки бегущими вдоль нее поперечными силами с интенсивностью P . В начальный момент времени $t = 0$ к левому концу балки приложена сила P , которая движется по направлению к правому концу со скоростью V . В момент времени, когда сила достигает правого конца на левом конце балки появляется сила P , которая движется к правому концу с той же скоростью V . Далее процесс повторяется.

Предположим, что в некоторый момент времени $t_j = j\frac{L}{V}$ происходит смена сил и на левом конце возникает сила P_j . По индукции можно доказать, что начальное условие для этой задачи (1.13) имеет вид

$$\left. \frac{\partial q_m}{\partial t} \right|_{t=j\frac{L}{V}} = \frac{-4P(2j-1)}{m\pi\rho(\beta_0^2 m^2 - 1)} \quad (1.14)$$

Для полноты картины осталось рассмотреть один особый случай. Из соотношения (1.8) следует, что при $m = \beta_0 = 1$ знаменатель становится равным нулю. Поэтому рассмотрим этот случай отдельно. Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 q_1(t)}{\partial t^2} + \frac{\pi^2 V^2}{L^2} q_1(t) - \frac{2P \sin(\pi V t)}{\rho L} = 0 \quad (1.15)$$

Решение (1.15) имеет вид

$$q_1(t) = \sin\left(\frac{\pi V t}{L}\right) c_2 + \cos\left(\frac{\pi V t}{L}\right) c_1 - \frac{P t}{\pi \rho V} \cos\left(\frac{\pi V t}{L}\right) + \frac{P L}{\pi^2 \rho V^2} \sin\left(\frac{\pi V t}{L}\right) \quad (1.16)$$

Из (1.16) видно, что начальные условия $q_m(0) = \frac{\partial q_m(0)}{\partial t} = 0$ удовлетворяются при $c_1 = c_2 = 0$. При этом терминальные условия есть

$$q_1^1\left(\frac{L}{V}\right) = \frac{P L}{\pi \rho V^2} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial q_1^1}{\partial t} \right|_{t=\frac{L}{V}} = 0 \quad (1.17)$$

Используя условия (1.17) в качестве начальных для второго движения получим

$$q_1^{(2)}(t) = \frac{P}{\pi^2 \rho V^2} \left(\pi(L - Vt) \cos\left(\frac{\pi V t}{L}\right) + L \sin\left(\frac{\pi V t}{L}\right) \right) \quad (1.18)$$

Терминальные условия для этого движения имеют нулевые движения

$$q_1^1\left(\frac{L}{V}\right) = 0, \quad \left. \frac{\partial q_1^1}{\partial t} \right|_{t=\frac{L}{V}} = 0 \quad (1.19)$$

Таким образом в отличие от общего случая (β_0 – нечетные числа) периодические движения реализуются на двух циклах движения.

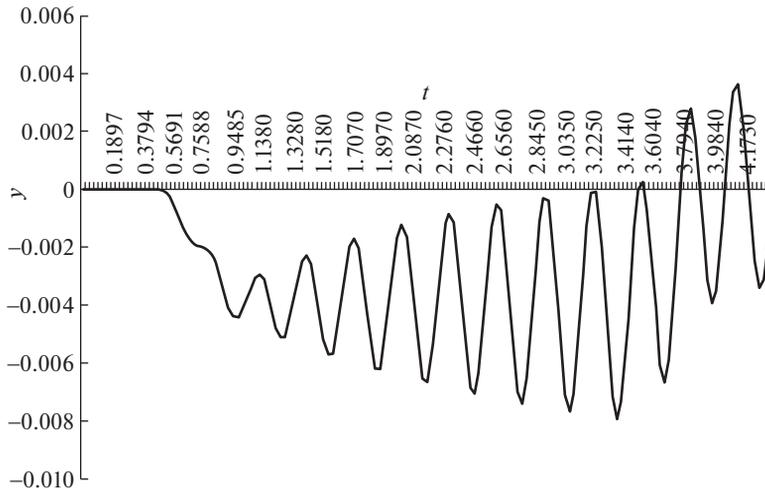


Рис. 3. Диаграмма колебаний $y(t)$ середины балки 50 м от 10-вагонного поезда при резонансе и $\beta_0 = 4$, $V = 82.5$ м/с.

3. Верификация метода с помощью компьютерного моделирования. Очевидно, что сформулированные в п. 2 условия не полностью соответствуют реальным условиям, поскольку подвижной состав представляет собой для пролетного строения множество движущихся переменных сил, а не одиночную постоянную силу. Поэтому из-за суперпозиции сил контакта подавление колебаний в виде антирезонанса может и не происходить. Однако, по нашему мнению, подавление колебаний может проявляться в виде ограниченности амплитуды колебаний.

Проверка сформулированных условий проявления резонанса и подавления или ограничения колебаний производилась с помощью комплекса численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений колебаний подвижного состава из 10 вагонов с 10 степенями свободы каждый, дифференциальных уравнений в частных производных для верхнего строения пути и балок пролетных строений [24]. Модель вагона с 10 степенями свободы учитывает колебания подпрыгивания и галопирования кузова вагона и тележек, которые возбуждаются проходом через мост. Такие колебания вагона, как виляние, боковой относ, боковая качка не рассматриваются, так как такие колебания не возбуждаются мостами.

Рассмотрим движение поезда со скоростью 82.5 м/с (297 км/ч) по балке 50 м для различных значений β_0 . Эта скорость является критической (вызывающей резонанс) исходной балки реального проекта.

Как и было предсказано, для $\beta_0 = 4$ и соответствующего ему соотношения EJ/m происходят резонансные колебания балки (рис. 3). Очевидно, что амплитуда резонансных колебаний будет возрастать с увеличением длины поезда (на линии С.-Петербург—Москва длина поезда Сапсан достигает 20 вагонов).

При $\beta_0 = 3$ в соответствии с п. 2 ожидалось явление антирезонанса. Из-за наложения колебаний от прохода не менее чем 4 колес, уместающихся на этой балке одновременно, монотонного уменьшения амплитуды вынужденных колебаний не наблюдается. При этом (рис. 4) видно, что амплитуда вынужденных колебаний остается ограниченной. Согласно нормам [25] предельный прогиб для такой балки составляет 2.2 см. Однако важным представляется практическое отсутствие свободных колебаний после

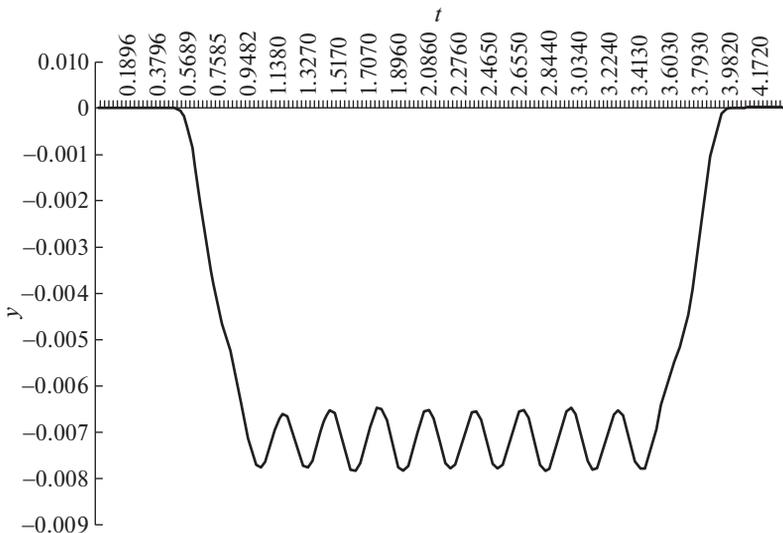


Рис. 4. Диаграмма колебаний $y(t)$ середины балки 50 м при $\beta_0 = 3$, $V = 82.5$ м/с.

ухода поезда, что подтверждает выполнение условия (2.12). Таким образом, можно констатировать подтверждение численным экспериментом на более подробной модели [24] теоретических результатов преобразований и вычислений, изложенных в п. 2.

4. Заключение. Разработан новый метод прогнозирования динамического поведения балочных пролетных строений мостов на ВСМ. Этот инженерный метод позволяет без привлечения сложного программного обеспечения на этапе предпроектных работ назначить динамические параметры балки с предписанным динамическим поведением. Таким образом можно избежать резонанса балки, достижимого при высокоскоростном движении.

Работа выполнена в рамках госзадания № 123021700050-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jiang L., Feng Y., Zhou W., He B. Vibration characteristic analysis of high-speed railway simply supported beam bridge-track structure system // *Steel Compos. Struct.* 2019. V. 31. № 6. С. 591–600. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.31.6.591>
2. Fryba L. A rough assessment of railway bridges for high speed trains // *Eng. Struct.* 2001. V. 23. № 5. С. 548–556. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(00\)00057-2](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(00)00057-2)
3. Lin C.C., Wang J.F., Chen B.L. Train-induced vibration control of high-speed railway bridges equipped with multiple tuned mass dampers // *J. Bridge Eng.* 2005. V. 10. № 4. С. 398–414. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2005\)10:4\(398\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2005)10:4(398))
4. Feng Y., Jiang L., Zhou W., Lai Z., Chai X. An analytical solution to the mapping relationship between bridge structures vertical deformation and rail deformation of high-speed railway // *Steel Compos. Struct.* 2019. V. 33. № 2. С. 209–224. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.33.2.209>
5. Miguel L.F.F., Lopez R.H., Torii A.J. Robust design optimization of TMDs in vehicle-bridge coupled vibration problems // *Eng. Struct.* 2016. V. 126. С. 703–711. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.08.033>

6. *Pisal A.Y., Jangid R.S.* Vibration control of bridge subjected to multi-axle vehicle using multiple tuned mass friction dampers // *Int. J. Adv. Struct. Eng.* 2016. V. 8. C. 213–227.
<https://doi.org/10.1007/s40091-016-0124-y>
7. *Левин Б.А., Поляков В.Ю.* Мосты ВСМ: основные проблемы и решения // Бюллетень ОУС ОАО РЖД. 2019. № 1. С. 34–52.
8. *Poliakov V., Zhang N., Saurin V. Thanh D.N.* Running safety of a high-speed train within a bridge zone // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2020. V. 20. № 11.
<https://doi.org/10.1142/S0219455420501163>
9. *Li J., Zhang H.* Moving load spectrum for analyzing the extreme response of bridge free vibration // *Hindawi. Shock Vib.* 2020. V. 6. C. 13.
<https://doi.org/10.1155/2020/9431620>
10. *Bashmal S.* Determination of critical and cancellation speeds of euler–bernoulli beam subject to a continuously moving load // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2019. V. 19. № 3. 22 с.
<https://doi.org/10.1142/S0219455419500305>
11. *Lee K., Cho Y., Chung J.* Dynamic contact analysis of a tensioned beam with a moving mass–spring system // *J. Sound Vib.* 2012. V. 331. № 11. С. 2520–2531. 1
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.01.014>
12. *Fryba L.* *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads.* Thomas Telford, 1999, 524 с.
13. *Dmitriev A.S.* Transverse vibrations of a three-span beam under a moving load // *Soviet Applied Mech.* 1974. V. 10. C. 1263–1266.
<https://doi.org/10.1007/BF00882128>
14. *Olsson M.* On the fundamental moving load problem // *J. Sound Vib.* 1991. V. 145. № 2. С. 299–307.
15. *Wen R.K.* Dynamic response of beams traversed by two-axle loads // *J. Eng. Mech. Div.* 1968. V. 86. С. 91–111.
16. *Lin Y.-H., Trethewey M.W.* Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads // *J. Sound Vib.* 1990. V. 136. № 2. С. 323–342.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90860-3](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90860-3)
17. *Cho Y.H.* Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper // *J. Sound Vib.* 2008. V. 315. № 3. С. 433–454.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.02.024>
18. *Lee K.* Analysis of dynamic contact between overhead wire and pantograph of a high-speed electric train // *Proc. Instn Mech. Eng. F: J. Rail Rapid Transit.* 2007. V. 221. № 2. P. 157–166.
19. *Ouyang H.* Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview) // *Mech. Syst. Signal Process.* 2011. V. 25. № 6. P. 2039–2060.
20. *Yang Y.B., Yau J.D., Wo Y.S.* *Vehicle–bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways.* Singapore: World Scientific Publishing Co., 2004. 530 p.
21. *Xia H., Zhang N., Guo W.* *Dynamic interaction of train-bridge systems in high-speed railways. Theory and Applications.* World Scientific Publishing Co., 2004. 530 p.
22. *Поляков В.Ю.* Анतिрезонанс пролетных строений железнодорожных мостов при высокоскоростном движении // *Транспортное строительство.* 2018. № 10. С. 2–5.
23. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* *Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки.* 4 изд. Пер. М.: Наука, 1987. 352 с.
24. *Поляков В.Ю.* Численное моделирование взаимодействия подвижного состава с мостовыми конструкциями при высокоскоростном движении // *Строительная механика и расчет сооружений.* 2016. № 2. С. 54–60.
25. Свод правил СП 453.1325800.2019 Сооружения искусственные высокоскоростных железнодорожных линий. Правила проектирования и строительства. М.: Стандартинформ, 2020. 139 с.

УДК 537.632

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО НЕКОНТАКТНОГО ИНДУКЦИОННОГО ПОДВЕСА

© 2023 г. Д. Ю. Скубов^{a,b,*}, Д. А. Индейцев^b, П. П. Удалов^{a,**}, И. А. Попов^{a,***},
А. В. Лукин^{a,****}, К. В. Полеткин^{c,*****}

^aСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

^bИнститут проблем машиноведения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия

^cInstitute of Microstructure Technology, Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany

*e-mail: skubov.dsk@yandex.ru

**e-mail: pp_udalov@mail.ru

***e-mail: popov_ia@spbstu.ru

****e-mail: lukin_av@spbstu.ru

*****e-mail: k.poletkin@gmail.com

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

После доработки 27.01.2023 г.

Принята к публикации 30.01.2023 г.

В работе выполняется построение и исследование нелинейной электромеханической модели движения микромасштабного проводящего недеформируемого кольца в неконтактном электромагнитном индукционном подвесе. Аналитически найдены положения равновесия кольца, исследована их устойчивость, построены соответствующие бифуркационные диаграммы. С применением асимптотических методов нелинейной механики исследована нелинейная динамика системы вблизи ее положения равновесия. Проведена линеаризация системы вблизи ее положения равновесия, получено выражение для магнитной жесткости подвеса. Рассмотрена возможность использования электростатических полей для управления величиной суммарной линейной жесткости левитирующего подвеса.

Ключевые слова: магнитная левитация, МЭМС, датчик ускорений, электромагнитная индукция, инерциальный датчик, магнитный неконтактный подвес

DOI: 10.31857/S0572329922600864, EDN: RTQSUR

1. Введение. Электромагнитный неконтактный подвес – устройство, работающее на принципе электромагнитной левитации и использующее пондеромоторные силы для компенсации силы тяжести. Это приводит к стабилизационному удержанию чувствительной части устройства в равновесии без механического крепления [1–5]. При этом чувствительный элемент подвеса может приобретать достаточно большую (теоретически бесконечную) чувствительность при правильной настройке электрической части системы [6], что позволяет использовать данный прибор как сенсор, регистрирующий малейшие воздействия на чувствительный элемент в окрестности своего положения равновесия, что показано в [6–13]. Для демонстрации принципа работы прибора предположим, что подвес работает как датчик ускорений. С уменьшением жесткости подвеса ($c \rightarrow 0$) чувствительность акселерометра неограниченно увеличивается и в пределе становится бесконечной [6]. Таким образом, при технологической воз-

возможности исключения механической жесткости из модели оказывается возможным получить прибор с бесконечной (очень большой) чувствительностью и, как следствие, перспективой измерять сколь угодно малые внешние ускорения. Для управления величиной жесткости предлагается использовать комбинацию магнитного и электрического подвесов, чтобы при определенных параметрах электрической и магнитной частот конструкции свести к нулю суммарную линейную жесткость системы.

Множество работ посвящено тематике разработки конструкции и режимов работы электромагнитного подвеса. В [6] рассмотрен описанный подход при конструировании электромагнитного подвеса в случае дискообразной массы при учете только осевых движений левитирующей массы. В работах [12, 14] получены динамические уравнения левитирующей массы при дополнительном учете угловых смещений вследствие возникновения магнитных моментов. В [10, 15] получены общие условия устойчивого движения левитирующей массы, в [16] обсуждаются построение и оценка взаимной индуктивности контуров различной формы, в [17] проводится численный анализ режимов работы электромагнитного подвеса.

Основной целью данной работы является развитие общего аналитического подхода к исследованию нелинейной динамики электромагнитных подвесов на примере постановки задачи, впервые рассмотренной в [6]. В работе выполняется построение и исследование нелинейной электромеханической модели движения микромасштабного проводящего недеформируемого кольца в неконтактном электромагнитном индукционном подвесе. Аналитически найдены положения равновесия кольца, исследована их устойчивость, построены соответствующие бифуркационные диаграммы. С применением асимптотических методов нелинейной механики исследована нелинейная динамика системы вблизи ее положения равновесия. Проведена линеаризация системы вблизи ее положения равновесия, получено выражение для магнитной жесткости подвеса. Рассмотрена возможность использования электростатических полей для управления величиной суммарной линейной жесткости левитирующего подвеса.

2. Математическая модель. При рассмотрении магнитного подвеса предполагается, что по катушке индуктивности (левитационной катушке) протекает периодический ток. В левитирующем теле, изготовленном из проводящего материала, вследствие закона электромагнитной индукции возникают наведенные токи, которые взаимодействуют с питающим током. При этом взаимодействии возникает сила Ампера, которая может отталкивать или притягивать левитирующее тело в зависимости от направления ponderomotorных сил. Стабилизирующая катушка выступает в качестве регулятора возможных движений инерционной массы. При определенных условиях, сформулированных в статье [12], в микромеханическом неконтактном подвесе левитационная и стабилизационная катушки могут быть рассмотрены отдельно. Схематическое изображение рассматриваемой проблемы представлено на рис. 1.

Энергия магнитного поля W , создаваемого катушкой срединного радиуса r_c , толщины t_c , запитываемая переменным током i_1 , и дископодобной инерционной массой (ИМ) радиуса r_{pm} , толщины t_{pm} с наведенным током i_2 , записывается как

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12}(y) i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \quad (2.1)$$

где L_1 и L_2 – собственные индуктивности катушки и ИМ, соответственно [5]:

$$L_1 = \mu_0 r_c w^2 \left(\ln \frac{8r_c}{t_c} - 2 \right), \quad L_2 = \mu_0 r_{pm} \left(\ln \frac{16r_{pm}}{t_{pm}} - 2 \right) \quad (2.2)$$

w – количество витков катушки, $M_{12}(y)$ – взаимная индуктивность между катушкой и ИМ, μ_0 – магнитная постоянная, y – координата вертикального перемещения ИМ относительно катушки индуктивности.

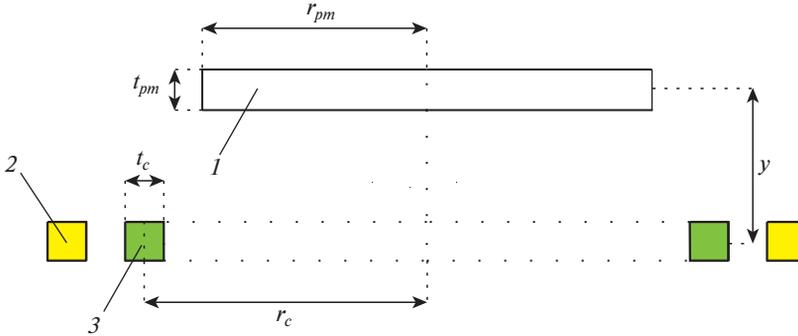


Рис. 1. Схематическое изображение магнитной части электромагнитного подвеса; 1 – инерционная масса, 2, 3 – левитационная и стабилизирующая катушки соответственно.

В общем случае взаимная индуктивность $M_{12}(y)$ является сложной неэлементарной функцией [18]. Это составляет определенную трудность для аналитического исследования модели магнитного подвеса [19]. Известны приближенные выражения для взаимной индуктивности [5, 6, 18], применимые в условиях ряда допущений, заключающихся в предположении о том, что характерные размеры катушки и ИМ намного больше высоты положения равновесия левитации y_0 . Также предполагается, что индуцированный вихревой ток i_2 распределяется вдоль ИМ таким образом, что можно выделить контур, соответствующий максимальному значению плотности вихревого тока [19]. Контур вихревого наведенного тока i_2 геометрически определяется как окружность, имеющая тот же диаметр, что и ИМ [19]. В силу указанных особенностей устройства, силовое взаимодействие в вертикальном направлении сводится к взаимодействию между вихревым током i_2 и током катушки i_1 [20]. Иными словами, данное приближение соответствует случаю линейных токов, т.е. сведению взаимодействия токов в проводниках к токам по некоторым кривым в пространстве [21]. Если рассматривать ИМ и наведенный ток как окружности, то взаимная индуктивность между ними может быть описана точной формулой Максвелла для двух колец радиусов r_c и r_{pm} [18]:

$$M_{12}(\kappa) = \mu_0 w^2 \sqrt{r_c r_{pm}} \left[\left(\frac{2}{\kappa} - \kappa \right) K(\kappa) - \frac{2}{\kappa} E(\kappa) \right], \quad \kappa^2(y) = \frac{4r_c r_{pm}}{(r_c + r_{pm})^2 + y^2} \quad (2.3)$$

где $K(\kappa)$ и $E(\kappa)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $\kappa(y)$ – эллиптический модуль [22].

При выводе уравнений динамики ИМ рассматривается динамика его центра тяжести. Предполагается, что ИМ перемещается только в вертикальном направлении. В указанной постановке потенциальная Π и кинетическая T энергии имеют вид:

$$\Pi = \tilde{m}gy, \quad T = \frac{1}{2} \tilde{m} \dot{y}^2 \quad (2.4)$$

где \tilde{m} – масса ИМ, g – ускорение свободного падения, $(\dot{})$ – обозначение производной по времени t .

Диссипативная функция системы Ψ может быть записана как

$$\Psi(\dot{y}, i_2) = \frac{1}{2} R_2 i_2^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 \quad (2.5)$$

где R_2 – электрическое сопротивление ИМ, μ – коэффициент механического трения между ИМ и окружающей средой.

Также предполагается, что ток катушки i_1 создается генератором переменного тока, то есть:

$$i_1 = i_a \sin \omega t \quad (2.6)$$

где i_a и ω – амплитуда и частота тока i_1 соответственно.

Для записи уравнений движения ИМ и наведенного тока i_2 применим формализм Лагранжа–Максвелла. В качестве обобщенных координат примем перемещение y и ток i_2 и запишем уравнения Лагранжа–Максвелла в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial i_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial i_2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial (W - \Pi - T)}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (2.7)$$

Подставляя выражения (2.2)–(2.6) в выражение (2.7), получим

$$\begin{aligned} L_2 \ddot{i}_2 + \frac{dM_{12}(y)}{dy} \dot{y} i_a \sin \omega t + M_{12}(y) i_a \omega \cos \omega t + R_2 i_2 &= 0 \\ \tilde{m} \ddot{y} + \mu \dot{y} - \frac{dM_{12}}{dy} i_2 i_a \sin \omega t + \tilde{m} g &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Система уравнений (2.8) задает динамику колебаний ИМ при воздействии на нее переменного тока i_1 , протекающего в катушке индуктивности. Для дальнейшего исследования системы (2.8) введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{L_1 i_a^2}{2 \tilde{m} g r_c}, \quad \beta = \frac{\mu_0 r_c}{L_1}, \quad \tau = \omega t, \quad \varepsilon = \frac{g}{2 \omega^2 r_c} \\ \lambda &= \frac{\mu}{\tilde{m} \omega}, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = \frac{y}{2 r_c}, \quad a = \frac{r_{pm}}{r_c}, \quad j_2 = \frac{i_2}{i_a}, \quad l = \frac{L_2}{L_1}, \quad r = \frac{R_2}{L_1 \omega} \\ m_{12} &= \frac{M_{12}}{L_1} = \beta \sqrt{a} \left[\left(\frac{2}{\kappa} - \kappa \right) K(\kappa) - \frac{2}{\kappa} E(\kappa) \right], \quad \kappa^2(\xi) = \frac{4a}{(1+a)^2 + 4\xi^2} \\ \frac{dm_{12}}{d\xi} &= \frac{\partial m_{12}}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} = -\frac{8\beta a}{\kappa^2} \left[\frac{(2 - \kappa^2)E(\kappa) - 2K(\kappa)}{1 - \kappa^2} \right] \frac{\xi}{((1+a)^2 + 4\xi^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

и перепишем систему (2.8) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} l j_1' + r j_2 &= -\frac{dm_{12}}{d\xi} \xi' \sin \tau - m_{12} \cos \tau \\ \xi'' + \lambda \xi' &= \varepsilon \left(\alpha \frac{dm_{12}}{d\xi} j_2 \sin \tau - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $()' = \frac{d}{d\tau}$ – обозначение производной по безразмерному времени τ .

Величина $\varepsilon \alpha = \frac{L_1 I_1^2}{4 r_c^2 \omega^2 m}$ определяет отношение между магнитной и механической энергиями системы. Из (2.9) видно, что входящий в нее параметр ε , обозначающий собой отношение гравитационного ускорения к центробежному, является малым. Данное утверждение следует из предположения [6] о высокой частоте ω питающего

тока i_1 . Для характерных параметров системы [6, 10] $r_c = 265$ мкм, $\omega = 6.28$ мрад/с, $\varepsilon = 18 \times 10^{-9}$. Таким образом, получена безразмерная динамическая система левитирующей массы и наведенного тока с явным малым параметром ε , что позволяет применять асимптотические методы нелинейной механики для оценки динамических режимов исследуемой системы [23].

Сначала решается задача о нахождении положения равновесия ИМ для пары неизвестных $(j_2, \xi) = (j_{20}, \xi_0)$ системы (2.10), где $j_{20} = j_{20}(\tau)$ – гармоническая функция наведенного тока, которая соответствует постоянному значению положения равновесия ξ_0 .

3. Определение положения равновесия системы. Исследуем равновесные состояния инерционной массы. В силу гармоничности тока возбуждения i_1 магнитная сила, действующая на ИМ, также гармонична, что приводит к установившемуся колебательно-му процессу ИМ относительно некоторого положения ξ_0 . Для этого перепишем выражение (2.10) для переменной силы тока $j_2 = j_{20}(\tau)$, соответствующей постоянному значению $\xi = \xi_0$ ($\xi'_0 = 0, \xi''_0 = 0$):

$$\begin{aligned} lj_{20} + rj_{20} &= -\frac{m_{12}(\xi_0)}{2} e^{i\tau} + \text{к.с.} \\ \frac{i\alpha}{2} \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} j_{20} e^{i\tau} + \frac{1}{2} + \text{к.с.} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где к.с. – комплексное сопряжение выражения.

Разрешая первое выражение системы (3.1), установившееся периодическое решение для тока j_{20} записывается в форме

$$j_{20} = \frac{im_{12}(\xi_0)}{2\sqrt{l^2 + r^2}} e^{i(\tau+\phi)} + \text{к.с.} \quad (3.2)$$

где $i^2 = -1$ – обозначение мнимой единицы,

$$\cos \phi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}, \quad \sin \phi = \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}} \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.2) во второе уравнение системы (3.1) и интегрируя по периоду пондеромоторной силы $\tau \in [0, \pi]$, мы получаем выражение для нахождения среднего за период значения положения равновесия ξ_0 :

$$f(\xi_0) = -\left(\frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} m_{12}(\xi_0) + \frac{2(l^2 + r^2)}{\alpha l} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Устойчивость найденного положения равновесия ξ_0 , задаваемого выражением (3.4), определяется характером экстремума функции Дирихле–Лагранжа $F = -\int f(\xi) d\xi = W - \Pi$, вычисленной в положении равновесия ξ_0 , [6]:

$$\frac{df(\xi_0)}{d\xi_0} < 0 \quad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.4) в выражение (3.5), условие на устойчивость положения равновесия ξ_0 примет следующий вид

$$m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0) m_{12}(\xi_0) + \left(m_{12}^{\xi}(\xi_0) \right)^2 > 0 \quad (3.6)$$

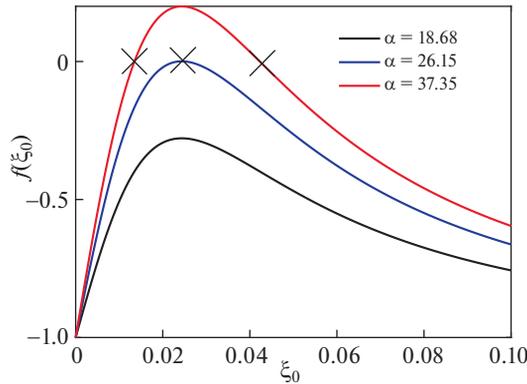


Рис. 2. График функции $f(\xi_0)$ при $\alpha = 18.68, 26.15, 37.35$; $r = 22 \times 10^{-6}$, $l = 0.022$, $a = 0.94$, $\beta = 0.0059$. Крестики – обозначение решения $f(\xi_0) = 0$.

Видно, что устойчивость положения равновесия ξ_0 зависит только от геометрических и физических параметров системы и в явном виде не зависит от параметров питающего тока.

Выражение (3.4) является трансцендентным уравнением относительно положения равновесия ξ_0 , которое отвечает случаю равенства сил Ампера и тяжести ИМ. На рис. 2 представлен график нормированной функции $f(\xi_0)$ относительно ее максимального значения при различных параметрах α .

Из рис. 2 видно, что решением уравнения (3.4) являются два положения равновесия ξ_0 , устойчивость которых определяется выражением (3.6). При изменении параметров системы возможно наблюдение состояния системы, при котором два положения равновесия сливаются в одно, то есть возникает седлоузловая бифуркация [24]. При этом в системе существует единственное полуустойчивое положение равновесия. Для качественного исследования эволюции системы при изменении ее параметров используется программный пакет MatCont [25]. На рис. 3, 4 приведены зависимости положения равновесия ξ_0 от параметров α и r , варьирование которых соответствует изменению амплитуды i_a и частоты ω тока генератора i_1 согласно выражениям (2.9) (при фиксированных остальных параметрах системы). Сплошным линиям соответствует устойчивое положение равновесия, пунктирным – неустойчивое.

Из рис. 3, 4 видно, что седлоузловая бифуркация соответствует граничному значению варьируемого параметра и определяет таким образом область существования положений равновесия [24]. Для дальнейшего исследования бифуркации, которой соответствует пара параметров (α^*, r^*) , продолжим рассматриваемое положение равновесия по одному из активных параметров (α или r) [25]. Для определения области существования устойчивого положения равновесия на плоскости параметров (α, r) осуществим продолжение по параметру точки бифуркации. Для продолжения подойдет точка слияния устойчивого и неустойчивого равновесий. Именно эта точка продолжается над плоскостью (α, r) и дает границу области существования устойчивых равновесий.

На рис. 5 изображены области устойчивого и неустойчивого движения в пространстве параметров $\alpha - r$.

Из рис. 5 видно, что в рассматриваемой системе существует набор параметров, отвечающий случаю полуустойчивого движения ИМ. Согласно условию (3.6) видно, что

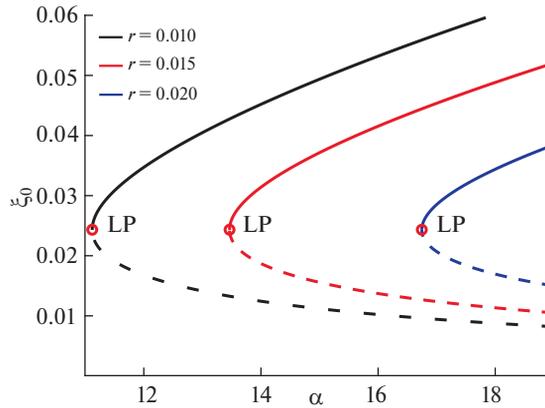


Рис. 3. Эволюция положений равновесий ξ_0 от параметра α при $r = 0.01; 0.015; 0.02$, $l = 0.022$, $a = 0.94$, $\beta = 0.0059$; красные кружки – обозначение седлоузловой бифуркации (LP) при соответствующих параметрах системы [25].

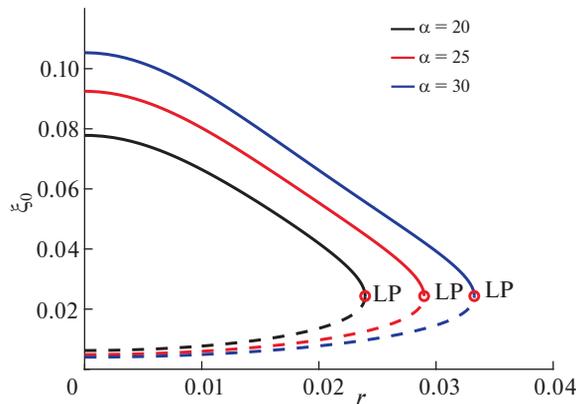


Рис. 4. Эволюция положений равновесий ξ_0 от параметра r при $\alpha = 20; 25; 30$, $l = 0.022$, $a = 0.94$, $\beta = 0.0059$; красные кружки – обозначение седлоузловой бифуркации (LP) при соответствующих параметрах системы [25].

случаю существования устойчивого равновесия соответствует область параметров, находящаяся выше линии, полученной путем численного продолжения бифуркационного состояния системы [25]. Таким образом, при фиксированном параметре r имеется возможность через уменьшение амплитуды питающего тока (уменьшение параметра α) зайти в область неустойчивости, что означает следующее: в устойчивой зоне колебаний ИМ располагаются два положения равновесия (см. рис. 3, 4), на границе устойчивости два положения равновесия сливаются в одно, при попадании в зону неустойчивости положений равновесия не наблюдается. Иными словами, в рассматриваемой системе существуют области параметров, при которых положения равновесия отсутствуют, что физически связано с недостаточной амплитудой тока питания ка-

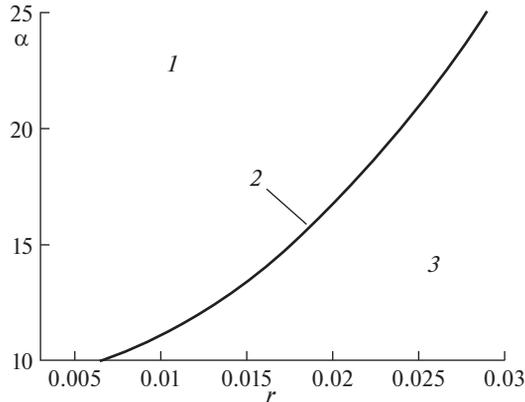


Рис. 5. Область устойчивости движений ИМ в координатах $\alpha - r$; 1, 3 – области устойчивости и неустойчивости соответственно, 2 – граница устойчивости.

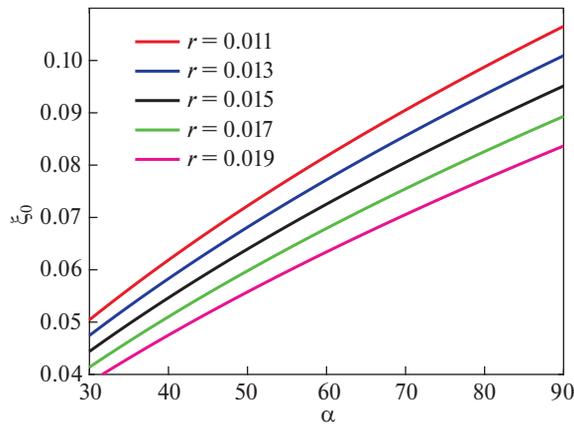


Рис. 6. Зависимость положения равновесия ξ_0 от параметра α при $r = 11 \times 10^{-3}$; 13×10^{-3} ; 15×10^{-3} ; 17×10^{-3} ; 19×10^{-3} для системы после усреднения.

тушки i_a (сила тяжести преобладает над силой Ампера) или же малой частотой ω (малая энергия низкочастотного воздействия между током катушки и наведенными токам в ИМ).

На рис. 6–9 изображены зависимости величины устойчивого положения равновесия ξ_0 от физических параметров системы.

Из рис. 6–9 видно, что при увеличении параметра α , что соответствует случаю увеличения тока i_a , величина ξ_0 растет, что связано с увеличением электромагнитной силы, действующей на кольцо. При увеличении параметра r , что соответствует случаю уменьшения частоты ω , положение равновесия ξ_0 принимает меньшие значения, что вызвано увеличением реактивного сопротивления системы. При увеличении параметра l положение равновесия также принимает меньшие значения, что обозначает уменьшение числа витков катушки индуктивности i , следовательно, уменьшение плотности магнитного потока, пронизывающего ИМ.

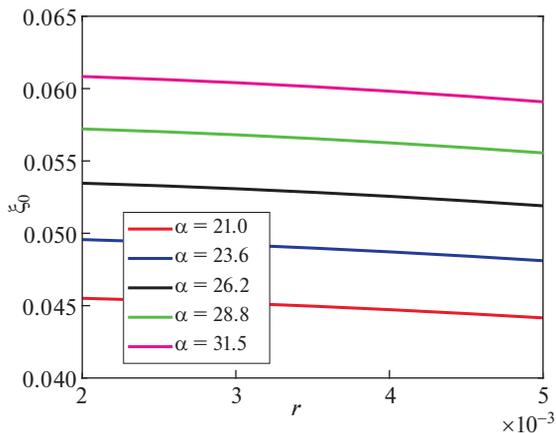


Рис. 7. Зависимость положения равновесия ξ_0 от параметра r при $\alpha = 21; 23.6; 26.2; 28.8; 31.5$ для системы после усреднения.

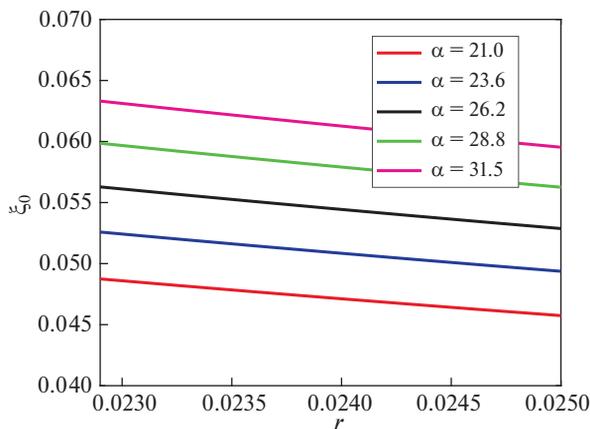


Рис. 8. Зависимость положения равновесия ξ_0 от величины $1/r$ при $\alpha = 21; 23.6; 26.2; 28.8; 31.5$ для системы после усреднения.

4. Исследование нелинейной динамики ИМ. Для нахождения равномерно пригодного асимптотического решения системы (2.10) применим метод многих масштабов [23] и представим искомые функции в виде следующих разложений по малому параметру ε :

$$\begin{aligned}
 \xi(T_0, T_1, T_2, \varepsilon) &= \xi_0 + \varepsilon \xi_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \xi_2(T_0, T_1, T_2) \\
 j_2(T_0, T_1, T_2, \varepsilon) &= j_{20}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon j_{21}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 j_{22}(T_0, T_1, T_2) \\
 m_{12}(\xi) &= m_{12}(\xi_0) + \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi}(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 m_{12}(\xi_0)}{d\xi^2}(\xi - \xi_0)^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

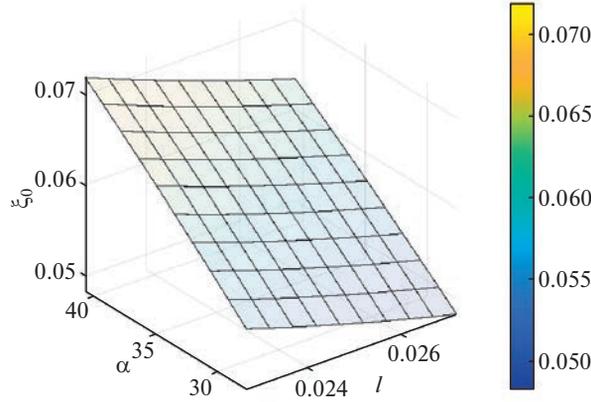


Рис. 9. Зависимость положения равновесия ξ_0 от величин l и α при $r = 22 \times 10^{-6}$ для системы после усреднения.

$$\frac{dm_{12}(\xi)}{d\xi} = \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} + \frac{d^2m_{12}(\xi_0)}{d\xi^2}(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \frac{d^3m_{12}(\xi_0)}{d\xi^3}(\xi - \xi_0)^2$$

где $T_0 = \tau$, $T_1 = \varepsilon\tau$, $T_2 = \varepsilon^2\tau$, $D_n = \partial/\partial T_n$. Далее принимается, что диссипация механической энергии мала, что позволяет перенормировать коэффициент λ : $\lambda \rightarrow \varepsilon\lambda$.

Подставляя уравнение (4.1) в уравнения (2.10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 \\ \hline lD_0j_{20} + rj_{20} &= -\frac{m_{12}(\xi_0)}{2}e^{iT_0} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (4.2a)$$

$$D_0^2\xi_0 = 0 \quad (4.2b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \\ \hline lD_0j_{21} + rj_{21} &= \frac{1}{2}m_{12}^\xi(\xi_0)(i[D_0\xi_1 + D_1\xi_0] - \xi_1)e^{iT_0} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (4.3a)$$

$$D_0^2\xi_1 = -\frac{i}{2}\alpha m_{12}^\xi(\xi_0)j_{20}e^{iT_0} - \frac{1}{2} + \text{к.с.} \quad (4.3b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \\ \hline lD_0j_{22} + rj_{22} &= -\frac{1}{2}(m_{12}^\xi(\xi_0)[\xi_2 - iD_0\xi_2] + m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)[\xi_1^2 - 2i\xi_1D_0\xi_1])e^{iT_0} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$D_0^2\xi_2 = -\lambda D_0\xi_1 - \frac{i\alpha}{2}(m_{12}^\xi(\xi_0)j_{21} + m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)j_{20}\xi_1)e^{iT_0} + \text{к.с.} \quad (4.4b)$$

где количество верхних индексов ξ обозначает порядок производной по переменной ξ .

Частное решение уравнения (4.2) при нулевой степени ε запишется как

$$j_{20} = \frac{im_{12}(\xi_0)}{2\sqrt{r^2 + l^2}}e^{i(T_0+\phi)} + \text{к.с.} \quad (4.5)$$

где ξ_0 – постоянная величина.

Подставляя уравнение (4.5) в уравнение (4.3b), получаем

$$\xi_1 = - \left(1 + \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} m_{12}(\xi_0) \frac{\alpha e^{i\phi}}{2\sqrt{l^2 + r^2}} \right) \frac{T_0^2}{4} - \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} m_{12}(\xi_0) \frac{\alpha e^{i(\phi+2T_0)}}{16\sqrt{l^2 + r^2}} + \text{к.с.} \quad (4.6)$$

Из уравнения (4.6) видно, что в его правой части присутствует член, зависящий от квадрата времени T_0^2 , что приводит к неограниченно возрастающему решению для величины ξ_1 . Данное обстоятельство нарушает равномерную пригодность найденного решения, и для устранения этого вводится условие разрешимости [23] для уравнения (4.6), которое заключается в обнулении коэффициента при величине T_0^2 . Используя определение величины ϕ (3.3) и приводя подобные, условие на отсутствие секулярного слагаемого в уравнении (4.6) запишется как

$$\frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} m_{12}(\xi_0) = - \frac{2(l^2 + r^2)}{\alpha l} \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) полностью совпадает с уравнением (3.4) и определяет положение равновесия ξ_0 . Решением трансцендентного уравнения (4.7) является постоянное перемещение ξ_0 , которое определяет нетривиальное положение равновесия ИМ.

Подставляя (4.7) в (4.6), запишем ξ_1 как

$$\xi_1 = \frac{e^{i(2T_0+\phi)}}{8 \cos \phi} + \text{к.с.} \quad (4.8)$$

и перепишем уравнение для тока j_{21} (4.3a) в форме

$$lD_0 j_{21} + r j_{21} = \frac{1}{8 \cos \phi} m_{12}^{\xi}(\xi_0) (e^{i(T_0+\phi)} - 3e^{i(3T_0+\phi)}) + \text{к.с.} \quad (4.9)$$

Решение уравнения (4.9) j_{21} имеет вид

$$j_{21} = \left(\frac{Y_1}{2} - \frac{iY_2}{2} \right) e^{i(T_0+\phi)} + \left(\frac{Y_3}{2} - \frac{iY_4}{2} \right) e^{i(3T_0+\phi)} + \text{к.с.} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{m_{12}^{\xi}(\xi_0)}{8 \sin \phi} \frac{r(9l^2 + r^2)}{(9l^4 + 10l^2 r^2 + r^4)}, & Y_2 &= \frac{m_{12}^{\xi}(\xi_0)}{8 \sin \phi} \frac{l(9l^2 + r^2)}{(9l^4 + 10l^2 r^2 + r^4)} \\ Y_3 &= -\frac{m_{12}^{\xi}(\xi_0)}{8 \cos \phi} \frac{3r(l^2 + r^2)}{(9l^4 + 10l^2 r^2 + r^4)}, & Y_4 &= -\frac{m_{12}^{\xi}(\xi_0)}{8 \cos \phi} \frac{9l(l^2 + r^2)}{(9l^4 + 10l^2 r^2 + r^4)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Наконец, подставляя (4.11) в (4.4b) и интегрируя полученное уравнение, получаем выражение для переменной ξ_2 :

$$\xi_2 = B_1 T_0^2 + B_2 \quad (4.12)$$

где

$$B_1 = \frac{\alpha(m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)m_{12}(\xi_0)(l^2 + r^2) + (m_{12}^{\xi}(\xi_0))^2(l^2 - r^2))}{32l(l^2 + r^2)} \quad (4.13)$$

B_2 – несекулярный член [23].

Из уравнения (4.12) по аналогии с (4.6) следует, что значение B_1 должно тождественно равняться нулю [23], откуда выводится следующее условие на отсутствие секулярного члена в уравнении (4.12):

$$m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)m_{12}(\xi_0) + (m_{12}^{\xi}(\xi_0))^2 \cos 2\phi = 0 \quad (4.14)$$

Данный результат может быть объяснен следующим образом: на начальном этапе асимптотической процедуры постулировалось, что первое приближение для величины ξ не зависит от более медленных времен T_1, T_2 , что также могло привести к указанным особенностям полученных результатов.

Таким образом, асимптотическое разложение колебаний левитирующей массы для величин ξ, j_2 запишется как:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \frac{\varepsilon}{4 \cos \phi} \cos(2T_0 + \phi) + \dots \\ j_2 &= -\frac{m_{12}(\xi_0)}{\sqrt{r^2 + l^2}} \sin(T_0 + \phi) + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Далее рассмотрен вопрос об оценке линейной жесткости магнитного подвеса.

$$\frac{\xi}{\xi_0} \ll 1 \quad (4.16)$$

В силу (4.16) функция взаимной индуктивности $m_{12}(\xi)$ может быть разложена в ряд Тейлора вблизи точки ξ_0 . Подставляя два последних выражения (4.1) во второе уравнение системы (2.10) с учетом выражения (3.2), линейная часть дифференциального уравнения смещения ИМ ξ_{lin} вблизи положения равновесия ξ_0 записывается как:

$$\xi_{lin}'' + \lambda \xi_{lin}' + c_m \xi_{lin} = F_{\xi_{lin}} \quad (4.17)$$

где

$$c_m = \frac{\alpha \varepsilon}{l} (m_{12}^{\xi}(\xi_0))^2 \cos \phi \sin(\tau + \phi) \sin \tau \quad (4.18)$$

где $F_{\xi_{lin}}$ – обобщенная сила, действующая на ИМ и включающая в себя нелинейные члены относительно ξ_{lin} .

Из уравнения (4.18) видно, что магнитная жесткость c_m имеет периодический характер и, в общем случае, знакопеременность, что означает колебательный режим левитации ИМ вблизи среднего положения равновесия.

Для более детального исследования зависимости жесткости c_m от параметров системы рассмотрим среднее значение жесткости $\langle c_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} c_m(\tau) d\tau$:

$$\langle c_m \rangle = \frac{\alpha \varepsilon l}{2(l^2 + r^2)} [m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)m_{12}(\xi_0) + (m_{12}^{\xi}(\xi_0))^2] \quad (4.19)$$

Из выражения (4.19) видно, что средняя за период магнитная жесткость всегда положительна, но неосредненная магнитная жесткость является периодической функцией, и это необходимо брать во внимание при проектировании электрической схемы компенсации жесткости c_m .

5. Числовой пример. Далее приведено сравнение аналитических результатов динамики ИМ вблизи положения равновесия ξ_0 с данными численного расчета, проведенного в программном комплексе Matlab (исследуемая система интегрировалась с использованием встроенной функции ode45 при заданных начальных условиях $[\xi, \xi', j_2]_{t=0} = [0.053, 0, 0]$ [26]). Согласно работам [6], [27] приняты следующие физические и геометрические свойства магнитного подвеса: $r_{pm} = 250$ мкм, $t_{pm} = 10$ мкм, $\rho = 19300$ кг/м³,

Таблица 1. Сравнение высот положения равновесия ИМ

Аналитическая формула (2.9), мкм	Численный результат, мкм
26.185	26.194

$L_2 = 1.25$ нГн, $r_c = 265$ мкм, $t_c = 88$ мкм, $w = 12$, $L_1 = 56.5$ нГн, $i_a = 0.35$ А, $\omega = 6.28$ Мрад/с. Безразмерные величины, определяемые выражениями (2.9), равняются: $a = 0.94$, $l = 0.022$, $r = 0.0022$, $\alpha = 35.28$, $\beta = 0.006$, $\varepsilon = 4.7 \times 10^{-12}$, $\lambda = 2 \times 10^{-12}$, $\omega = 6.28$ Мрад/с. В табл. 1 приведено сравнение величин положений равновесия ξ_0 . Из нее видно, что нахождение среднего положения с достаточной степенью точности совпадает с численными результатами. Относительная ошибка при этом составляет порядка 0.03%, что связано с возможными погрешностями численного определения положения равновесия.

Далее на рис. 10 приведен график установившегося процесса колебаний ИМ в случае численного расчета и аналитических выражений (2.10), (4.15).

Из рис. 10 видно, что аналитические выражения в достаточной степени совпадают с прямыми численными результатами, что говорит о корректности применения асимптотической методики анализа нелинейной динамики ИМ под действием электромагнитных сил. Видно, что в системе присутствуют колебания вблизи положения равновесия ξ_0 , но их амплитуда имеет порядок ε , что является достаточно малой величиной по отношению к ξ_0 .

6. Выводы. В представленной работе был рассмотрен электромагнитный неконтактный подвес, запитываемый переменным электрическим током. Получены выражения для нахождения положения равновесия дископодобной левитирующей массы. Оценена магнитная жесткость системы и показано, что она имеет вид периодической функции. С помощью методов теории бифуркаций получены области в пространстве параметров, отвечающие устойчивым и неустойчивым движениям системы. Исследованы особенности применения асимптотического метода многих масштабов к анализу нелинейной динамики рассматриваемого класса электромеханических систем с малой переменной жесткостью подвеса. Предметом дальнейших исследований является распространение предложенного подхода на анализ нелинейной динамики простран-

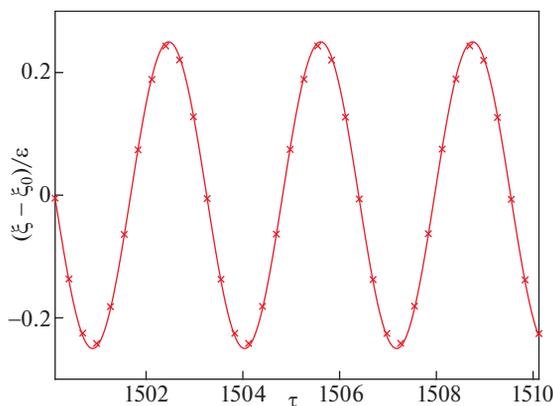


Рис. 10. График зависимости безразмерного перемещения ИМ ξ от безразмерного времени τ в случае прямого численного счета (красные крестики) и аналитических формул (2.10), (4.15) (красная сплошная линия).

ственных движений проводящих твердых тел в неконтактных индукционных подвесах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Post R.F., Ryutov D.D.* The Inductrack: A simpler approach to magnetic levitation // IEEE Trans. Appl. Supercond. 2000. V. 10. № 1. P. 901–904.
<https://doi.org/10.1109/77.828377>
2. *Kordyuk A.A.* Magnetic levitation for hard superconductors // J. Appl. Phys. 1998. V. 83. № 1. P. 610–612.
<https://doi.org/10.1063/1.366648>
3. *Крюков О.В.* Преимущества электромагнитного подвеса приводных электродвигателей газоперекачивающих агрегатов // Главный энергетик. 2015. Т. 5–6. № 9. С. 16–23.
4. *Han H., Kim D.* Magnetic levitation. Springer. 2016.
<https://doi.org/10.1007/978-94-017-7524-3>
5. *Maxwell J.* Electricity and magnetism. Dover New York. 1954. V. 2.
6. *Poletkin K.V., Chernomorsky A.I., Shearwood C.* Proposal for micromachined accelerometer, based on a contactless suspension with zero spring constant // IEEE Sens. J. 2012. V. 12. № 7. P. 2407–2413.
<https://doi.org/10.1109/JSEN.2012.2188831>
7. *Poletkin K.V., Asadollahbaik A., Kampmann R., Korvink J.* Levitating micro-actuators: A review // Actuators. 2018. V. 7. № 2. P. 17.
<https://doi.org/10.3390/act7020017>
8. *Lu Z., Poletkin K., den Hartogh B. et al.* 3D micro-machined inductive contactless suspension: Testing and modeling // Sens. Actuator A Phys. 2014. V. 220. P. 134–143.
<https://doi.org/10.1016/j.sna.2014.09.017>
9. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Badilita V.* A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics // J. Microelectromechanical Syst. 2015. V. 24. № 5. P. 1248–1250.
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2015.2469211>
10. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U. et al.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // Int. J. Mech. Sci. 2017. V. 131–132. P. 753–766.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016>
11. *Poletkin K.* On the static pull-in of tilting actuation in electromagnetically levitating hybrid micro-actuator: Theory and experiment // Actuators. 2021. V. 10. № 10. P. 256.
<https://doi.org/10.3390/act10100256>
12. *Poletkin K.V.* Static pull-In behavior of hybrid levitation microactuators: Simulation, modeling, and experimental study // IEEE/ASME Trans. Mechatron. 2021. V. 26. № 2. P. 753–764.
<https://doi.org/10.1109/TMECH.2020.2999516>
13. *van de Vegte J.* Feedback control systems // Automatica. 1996. V. 6. № 32. P. 945–946.
14. *Poletkin K.V., Shalati R., Korvink J.G., Badilita V.* Pull-in actuation in hybrid micromachined contactless suspension // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1052. P. 012035.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1052/1/012035>
15. *Poletkin K.V., Lu Z., Wallrabe U. et al.* A qualitative technique to study stability and dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // 2017 19th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS). 2017. P. 528–531.
<https://doi.org/10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994102>
16. *Poletkin K.V.* Calculation of magnetic force and torque between two arbitrarily oriented circular – laments using Kalantarov–Zeitlin’s method // Int. J. Mech. Sci. 2022. V. 220. P. 107159.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107159>
17. *Poletkin K.* Levitation micro-systems: Applications to sensors and actuators. Springer Nature. 2020.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-58908-0>
18. *Rosa E., Grover F.* Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. No. 169. US Government Printing Office. 1948.

19. *Poletkin K.V., Korvink J.G.* Modeling a pull-in instability in micro-machined hybrid contactless suspension // *Actuators*. 2018. V. 7. № 1. P. 11.
<https://doi.org/10.3390/act7010011>
20. *Lu Z., Poletkin K., Wallrabe U., Badilita V.* Performance characterization of micromachined inductive suspensions based on 3D wire-bonded microcoils // *Micromachines*. 2014. V. 5. № 4. P. 1469–1484.
<https://doi.org/10.3390/mi5041469>
21. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Физматлит. 2003.
22. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей. Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат. 1986.
23. *Nayfeh A.H.* Perturbation methods. John Wiley & Sons. 2008.
<https://doi.org/10.1002/9783527617609>
24. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag. 1998.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>
25. *Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Yu.A.* MATCONT: A MATLAB Package for numerical bifurcation analysis of ODEs // *ACM Trans. Math. Softw.* 2003. V. 29. № 2. P. 141–164.
<https://doi.org/10.1145/779359.779362>
26. *Higham D., Higham N.* MATLAB Guide. Third edition. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2017. P. 500. ISBN: 978-1-61197-465-2.
27. *Williams C.B., Shearwood C., Mellor P.H., Yates R.B.* Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor // *Sens. Actuator A Phys.* 1997. V. 61. № 1. P. 469–473.
[https://doi.org/10.1016/S0924-4247\(97\)80307-X](https://doi.org/10.1016/S0924-4247(97)80307-X)

УДК 539.37+539.214

ОБ ИЗМЕНЕНИЯХ В ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ ДЕФЕКТА СПЛОШНОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ПОВТОРНОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2023 г. А. А. Буренин^{a,*}, Л. В. Ковтанюк^{a,b,**}, Г. Л. Панченко^{a,b,***}

^aИнститут машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

^bИнститут автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия

*e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

**e-mail: lk@iacp.dvo.ru

***e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 10.04.2023 г.

После доработки 16.04.2023 г.

Принята к публикации 18.04.2023 г.

Приводятся результаты расчетов напряженно-деформируемых состояний упруго-вязкопластического материала, содержащего одиночный цилиндрический дефект сплошности и нагружаемого внешним давлением. Гидростатическое давление на поверхности, удаленной от дефекта, первоначально возрастает, некоторое время выдерживается постоянным и затем постепенно падает до нуля. Процесс всестороннего сжатия оставляет после разгрузки в окрестности дефекта сплошности сформированные уровень и распределение остаточных напряжений. Рассчитывается изменение таких напряжений при повторном нагружении и разгрузке. Интенсивность и характер повторного нагружения считаются идентичными первоначальному. Расчеты проводятся в рамках поставленной одномерной задачи теории больших деформаций. Материал полагается несжимаемым. Учитывается развитие областей вязкопластического течения в активной части процесса и затухание их при разгрузке. Оцениваются изменения в геометрических размерах эволюционирующего дефекта.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, большие деформации, остаточные напряжения, повторное нагружение

DOI: 10.31857/S0572329923600275, EDN: BNCCFU

1. Введение. Дефекты сплошности в форме микропор или микротрещин неизбежно присутствуют в материалах металлоизделий. В условиях эксплуатации изделий дефекты могут увеличиваться в размерах, могут возникать новые. Это приводит к развитию дефектной структуры материала. Учет подобных обстоятельств в механике связывают со специальным параметром состояния, называемым повреждаемостью, и таким способом устанавливают подход к изучению длительной прочности материалов. Разрушение, связанное с эволюцией дефектной структуры, получило описание в пионерских работах Ю.Н. Работнова [1] и Л.М. Качанова [2]. Данное научное направление остается значимым и развивающимся в настоящее время [3–5]. Достаточно полный обзор результатов, полученных в этой области исследований, содержится в [6].

С другой стороны, также отмечалось упрочнение материалов при их обработке повышенным уровнем гидростатического сжатия [7–11]. Объяснялся данный эффект явлением “залечивания” микродефектов сплошности за счет интенсивного воздействия на материал всесторонним давлением. Попытки в расчетах этого явления [10–

13] приводили к задачам теории больших упругопластических деформаций, так как в окрестности дефекта перемещения сравнимы с его геометрическими размерами и поэтому деформации невозможно принять малыми. Показательными для дальнейшего являются результаты расчетов в одномерной задаче о всестороннем сжатии упругопластического материала с одиночным дефектом сплошности [14, 15]. Наблюдался эффект “приспособляемости” дефекта к циклическим нагружениям по типу “нагрузка–разгрузка”, когда после каждой разгрузки размер дефекта, уровень и распределение в его окрестности остаточных напряжений повторялись. Объяснялось это парадоксальное обстоятельство тем, что в расчетах использовалась математическая модель идеальной упругопластической среды. Считалось, что отказ от идеальности пластического течения приведет либо к развитию дефекта, либо к его “залечиванию”. Здесь откажемся от идеальности упругопластического деформирования, добавив в диссипативные свойства материала вязкое сопротивление пластическому течению. Используемая математическая модель также как и в [14, 15] будет опираться на определение обратимых и необратимых деформаций с помощью дифференциальных уравнений их изменения [15–17]. Из-за возрастания объема вычислений ограничимся только двумя шагами, когда при первоначальном нагружении и разгрузке в окрестности дефекта создается поле остаточных напряжений, а при повторном таком же нагружении и разгрузке происходит его изменение. Это позволит проследить за направлением таких изменений, включая начало в эволюции размера дефекта.

2. Основные соотношения модели. В модели больших деформаций тензоры обратимых \mathbf{e} и необратимых \mathbf{p} деформаций определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса) [15]

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{e}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{z})) \\ \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla^T\mathbf{v}), \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{e}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - \nabla^T\mathbf{v}) \\ \mathbf{z} &= A_1^{-1}[A_2^2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + A_2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}] \\ A_1 &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad A_2 = 2 - L_1 \\ L_1 &= \text{tr } \mathbf{e}, \quad L_2 = \text{tr } \mathbf{e}^2, \quad L_3 = \text{tr } \mathbf{e}^3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

В данных зависимостях \mathbf{v} – вектор скорости, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ – тензор скоростей изменения необратимых деформаций. Второе уравнение (2.1) определяет объективную производную по времени, обеспечивающую геометрическую корректность кинематики деформируемой среды. Когда $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0}$, тензор необратимых деформаций \mathbf{p} остается неизменным, а его компоненты изменяются в соответствии со вторым уравнением (2.1), что характерно для процесса разгрузки.

Тензор полных деформаций Альманси \mathbf{d} согласно (2.1) имеет вид

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{e} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что тензор \mathbf{e} является линейной частью тензора обратимых деформаций $\mathbf{c} = \mathbf{e} - 0.5\mathbf{e}^2$. Но в качестве меры обратимых деформаций будем использовать тензор \mathbf{e} , для которого записано первое уравнение изменения (2.1).

Будем считать материал несжимаемым. Тогда из закона сохранения энергии следует, что напряжения в материале полностью определяются обратимыми деформациями

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} -P_1 \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{d}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{d}), & \mathbf{p} \equiv \mathbf{0} \\ -P_2 \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{e}), & \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь P_1 и P_2 – неизвестные функции добавочного гидростатического давления; \mathbf{I} – единичный тензор; $W = \rho_0 \Psi$ – упругий потенциал; ρ_0 – плотность материала в его свободном состоянии; Ψ – термодинамический потенциал (плотность распределения свободной энергии), для которого принимается гипотеза о его независимости от тензора необратимых деформаций \mathbf{p} . Для изотропного деформируемого материала разложим упругий потенциал в ряд Маклорена

$$W = (a - \mu) J_1 + a J_2 + b J_1^2 - \kappa J_1 J_2 - \zeta J_1^3 + \dots$$

$$J_k = \begin{cases} L_k, & \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ I_k, & \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$L_1 = \text{tr } \mathbf{d}, \quad L_2 = \text{tr } \mathbf{d}^2, \quad I_1 = \text{tr } \mathbf{c}, \quad I_2 = \text{tr } \mathbf{c}^2$$

В зависимостях (2.4) μ – модуль сдвига, a , b , κ , ζ – другие механические постоянные.

В качестве поверхности нагружения примем обобщенное условие пластического течения Треска–Сен-Венана [18]

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = k, \quad F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| - \eta \max |\varepsilon_k^p| \quad (2.5)$$

следствием которого является ассоциированный закон пластического течения [18, 19]

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \xi \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \xi > 0 \quad (2.6)$$

В соотношениях (2.5) и (2.6) σ_i , ε_k^p – главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций; k – предел текучести; η – коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

3. Постановка задачи. Упругое равновесие. Рассмотрим краевую задачу о поведении дефекта сплошности в деформируемом материале в условиях приложения к нему повторных нагрузок. Так как нагружаемая поверхность материала значительно превосходит размеры дефекта сплошности, то деформирование можно считать одномерным, а за границу этого дефекта можно принять круговую цилиндрическую поверхность первоначального радиуса r_0 . Также считаем, что граничное воздействие осуществляется на цилиндрической поверхности первоначального радиуса R_0 ($R_0 \geq r_0$). Пусть материал продеформирован при следующих граничных условиях

$$\sigma_{rr}|_{r=R^*} = -P^*, \quad \sigma_{rr}|_{r=r^*} = 0 \quad (3.1)$$

Здесь σ_{rr} – радиальная компонента тензора напряжений в цилиндрической системе координат r , φ , z , R^* и r^* – радиусы внешней и внутренней цилиндрических поверхностей в условиях равновесия. В рассматриваемых условиях получаем, что вектор перемещений имеет только одну компоненту $u_r = u$, отличную от нуля. На граничных поверхностях для нее получаем

$$u(R^*) = R^* - R_0, \quad u(r^*) = r^* - r_0 \quad (3.2)$$

Из соотношения (2.2) выпишем отличные от нуля компоненты тензора деформаций Альманси

$$d_{rr} = u' - \frac{(u')^2}{2}, \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} - \frac{u^2}{2r^2}, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.3)$$

Из условия несжимаемости среды и зависимостей (3.3) следует дифференциальное уравнение для компоненты перемещения

$$(1 - u')\left(1 - \frac{u}{r}\right) = 1 \quad (3.4)$$

Решая уравнение (3.4) с предположением, что точки граничных поверхностей с первоначальными координатами $r = R_0$ и $r = r_0$ в текущий момент времени имеют координаты $r = R(t)$ и $r = s(t)$ соответственно, найдем

$$u = r - \sqrt{r^2 + \varphi(t)}, \quad \varphi(t) = R_0^2 - R^2(t) = r_0^2 - s^2(t) \quad (3.5)$$

Из (3.3) и (3.5) для компонент тензора деформаций Альманси следует

$$d_{rr} = \frac{1}{2}(1 - H^{-1}), \quad d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}(1 - H), \quad H = 1 + \frac{\varphi}{r^2} \quad (3.6)$$

Для ненулевых компонент тензора напряжений получим следующие зависимости из (2.3) и (2.4)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + G(d_{rr}, d_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P + G(d_{\varphi\varphi}, d_{rr}), \quad \sigma_{zz} = -P \\ P &= P_1 - a + \mu - 2b(d_{rr} + d_{\varphi\varphi}) + (\kappa + 3\zeta)(d_{rr}^2 + d_{\varphi\varphi}^2) + 6\zeta d_{rr} d_{\varphi\varphi} \\ G(x, y) &= k_1 x - k_2 x^2 - k_3 xy + k_4 x^3 + k_5(xy^2 + 2x^2 y) \\ k_1 &= 2\mu, \quad k_2 = 2(2a + 2b + \kappa), \quad k_3 = 2(2b + \kappa), \\ k_4 &= 6(\kappa + \zeta), \quad k_5 = 2(\kappa + 3\zeta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

С учетом зависимостей (3.6) для компонент деформаций из (3.7) определим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + L(H), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P + L(H^{-1}), \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = N(H) \\ L(H) &= \frac{k_4}{8}(1 - H^{-3}) + a_1(1 - H^{-2}) + a_2(1 - H^{-1}) + a_3(H - 1) + \frac{k_5}{8}(H^2 - 1) \\ N(H) &= a_4(H - H^{-1}) + a_5(H^2 - H^{-2}) + \frac{k_4}{8}(H^3 - H^{-3}) \\ a_1 &= a + b - \frac{3}{4}(3\kappa + 5\zeta), \quad a_2 = \mu - 2a - 3b + \frac{5}{2}(\kappa + 3\zeta), \quad a_3 = b - \frac{3}{4}(\kappa + 5\zeta) \\ a_4 &= \mu - 2a - 2b + \frac{1}{4}(7\kappa + 15\zeta), \quad a_5 = a + b - 2\kappa - 3\zeta \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для вычисления неизвестной функции $P = P(r)$ воспользуемся уравнением равновесия

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (3.9)$$

Интегрируя уравнение (3.9) с учетом (3.8), для компонент напряжений и функции P получим окончательные зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= M(H, x), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = M(H, x) - N(H), \quad P = L(H) - M(H, x) \\ M(H, x) &= a_6 \ln \frac{H}{x} + \frac{k_1}{4}(H - x) + a_7((H - 1)^2 - (x - 1)^2) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{k_4}{48} ((H-1)^3 - (x-1)^3) + a_8(x^{-1} - H^{-1}) + \frac{k_4}{32} ((1-x^{-1})^2 - (1-H^{-1})^2), \quad (3.10)$$

$$x = \frac{r_0^2}{s_0^2}, \quad a_6 = \frac{1}{2} \left(\mu - a - b + \frac{1}{2} (\kappa + 3\zeta) \right)$$

$$a_7 = \frac{1}{4} \left(a + b + \frac{1}{4} (\kappa - 3\zeta) \right), \quad a_8 = \frac{1}{2} \left(a + b - \frac{1}{2} (\kappa + 3\zeta) \right)$$

При записи (3.10) использовалось второе граничное условие (3.1), в котором r^* заменено на s_0 . Обозначение s_0 введено для крайнего значения радиуса внутренней поверхности, соответствующего давлению p_0 на внешней поверхности, при котором на внутренней граничной поверхности впервые выполнится условие пластичности (2.5) в виде

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})|_{r=s_0} = 2k, \quad N(x) = 2k \quad (3.11)$$

Второе уравнение (3.11) служит для нахождения значения s_0 . Значение нагружающего давления p_0 , при котором на внутренней поверхности впервые выполнится условие пластического течения, следует из первого соотношения (3.10) и первого краевого условия (3.1) в виде $\sigma_{rr}|_{r=R} = -p_0$:

$$p_0 = M(x, h), \quad h = H(R) = \frac{R_0^2}{R^2} = 1 + \frac{\varphi}{R_0^2 - \varphi} \quad (3.12)$$

4. Вязкопластическое течение при возрастающем и постоянном нагружающем давлении. В состоянии упругого равновесия под действием давления $p = p_0$ деформируемый материал находится до момента времени $t = 0$. Далее с момента времени $t = 0$ начнем увеличивать внешнее давление. Таким образом, граничные условия задачи примут вид

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -p(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0, \quad p(t) = p_0(1 + \gamma t), \quad \gamma > 0 \quad (4.1)$$

При увеличении давления $p(t)$ от внутренней граничной поверхности $r = s(t)$ растет область $s(t) \leq r \leq m(t)$, в которой происходит вязкопластическое течение. Упругопластическая граница $r = m(t)$ отделяет расширяющуюся область течения от области $m(t) \leq r \leq R(t)$, в которой материал деформируется обратимо. Во всей области вязкопластического течения выполняется условие пластичности (2.5) в форме

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2k + 2\eta \epsilon_{rr}^p \quad (4.2)$$

Уравнение равновесия (3.9) при $t \geq 0$ заменим уравнением движения среды

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho_0 \dot{v}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad (4.3)$$

Здесь $v = v_r$ — отличная от нуля компонента вектора скорости. Для нее и ее производной по времени из соотношений (2.1) и (3.5) следуют зависимости

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} (1 - u')^{-1} = -\frac{\dot{\varphi}}{2r}, \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + vv' = -\frac{\dot{\varphi}}{2r} - \frac{\dot{\varphi}^2}{4r^3} \quad (4.4)$$

Тогда уравнение (4.3) с учетом (4.4) примет вид

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -\frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\dot{\varphi}}{r} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2r^3} \right) \quad (4.5)$$

Интегрируя уравнение движения (4.5) в области обратимого деформирования $m(t) \leq r \leq R(t)$ и учитывая первое граничное условие (4.1), найдем компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p(t) + M(H, h) + S(\varphi, R, r), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - N(H) \\ S(\varphi, R, r) &= \frac{\rho_0}{2} \left(\dot{\varphi} \ln \frac{R}{r} + \frac{\dot{\varphi}^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

В области течения $s(t) \leq r \leq m(t)$ из (2.4) для компонент напряжений следуют соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + G(c_{rr}, c_{\varphi\varphi}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P + G(c_{\varphi\varphi}, c_{rr}), \quad \sigma_{zz} = -P, \quad c_{rr} = e_{rr} - \frac{e_{rr}^2}{2} \\ c_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} - \frac{e_{\varphi\varphi}^2}{2}, \quad P = P_2 - a + \mu - 2b(c_{rr} + c_{\varphi\varphi}) + (k + 3\zeta)(c_{rr}^2 + c_{\varphi\varphi}^2) + 6\zeta c_{rr} c_{\varphi\varphi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из зависимостей (2.2), (3.6) и (4.7) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + L(H_1), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -P + L(H_1^{-1}), \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= N(H_1), \quad H_1 = H(1 - 2p_{rr}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Проинтегрируем уравнение движения (4.5) в области вязкопластического течения $s(t) \leq r \leq m(t)$ с учетом третьей зависимости (4.8) и второго граничного условия (4.1) и найдем компоненту напряжений σ_{rr} , исключив неизвестную функцию $P = P(r)$

$$\sigma_{rr} = -\int_s^r \frac{N(H_1)}{r} dr + S(\varphi, s, r) \quad (4.9)$$

Из зависимостей (2.1) следуют соотношения

$$\varepsilon_{rr}^p = -\varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{\dot{p}_{rr}}{1 - 2p_{rr}}, \quad p_{\varphi\varphi} = -\frac{p_{rr}}{1 - 2p_{rr}}, \quad \dot{p}_{rr} = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + v p'_{rr} \quad (4.10)$$

Зависимости (4.2), (4.8) и (4.10) приводят к дифференциальному уравнению относительно компоненты необратимых деформаций p_{rr}

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} - \frac{\dot{\varphi}}{2r} p'_{rr} = \frac{1 - 2p_{rr}}{2\eta} (N(H_1) - 2k) \quad (4.11)$$

На упругопластической границе $r = m(t)$ выполняется следующее из условия непрерывности напряжений соотношение $N(H) = 2k$, сравнивая которое со вторым уравнением (3.11), получим соотношение для $r = m(t)$

$$m = \sqrt{\frac{\varphi}{x - 1}} \quad (4.12)$$

Из условия непрерывности компоненты тензора напряжений σ_{rr} на упругопластической границе $r = m(t)$ и зависимостей (4.6) и (4.9) следует интегро-дифференциальное уравнение для функции $\varphi(t)$

$$S(\varphi, s, R) - \int_s^m \frac{N(H_1)}{r} dr - M \left(1 + \frac{\varphi}{m^2}, h \right) = -p \quad (4.13)$$

Начальными условиями для уравнения (4.13) являются следующие условия

$$\varphi(0) = r_0^2 - s_0^2, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (4.14)$$

Система уравнений (4.11)–(4.14) относительно неизвестных функций p_{rr} , $m(t)$ и $\phi(t)$ была решена численно при помощи конечно-разностного метода.

В области обратимого деформирования из (2.2) и (3.6) найдем компоненты тензора обратимых деформаций

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{rr}} = 1 - \sqrt{H^{-1}}, \quad e_{\phi\phi} = 1 - \sqrt{1 - 2d_{\phi\phi}} = 1 - \sqrt{H} \quad (4.15)$$

Соотношения (2.2), (3.6) и (4.10) позволяют получить зависимости для компонент тензора обратимых деформаций в области вязкопластического течения

$$e_{rr} = 1 - \sqrt{\frac{1 - 2d_{rr}}{1 - 2p_{rr}}} = 1 - \sqrt{H_1^{-1}}, \quad e_{\phi\phi} = 1 - \sqrt{\frac{1 - 2d_{\phi\phi}}{1 - 2p_{\phi\phi}}} = 1 - \sqrt{H_1} \quad (4.16)$$

В некоторый момент времени t_1 зафиксируем внешнее нагружающее давление на значении $p_1 = p(t_1)$ и положим, что оно далее остается постоянным. Такое изменение режима нагружения не приводит к существенным изменениям деформационной картины. Все соотношения данного раздела продолжают выполняться и в этом случае.

5. Торможение течения при уменьшающемся давлении. В момент времени $t_2 > t_1$ начнем уменьшать давление на внешней границе $r = R(t)$ по закону

$$p(t) = p_1(1 - \gamma_1(t - t_2)), \quad \gamma_1 > 0 \quad (5.1)$$

Уменьшение давления (5.1) приводит к тому, что в деформируемом материале появляется область разгрузки $m_1(t) \leq r \leq m(t)$, в которой $\epsilon_{rr}^p = 0$. При этом компоненты тензора необратимых деформаций \mathbf{p} продолжают изменяться согласно второму уравнению (2.1). Новая упругопластическая граница $r = m_1(t)$ отделяет область разгрузки $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ от сужающейся области $s(t) \leq r \leq m_1(t)$, в которой продолжается вязкопластическое течение. А в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ материал по-прежнему деформируется обратимо.

Компоненты тензора напряжений в области обратимого деформирования $m(t) \leq r \leq R(t)$ удовлетворяют соотношениям (4.6), а в области вязкопластического течения $s(t) \leq r \leq m_1(t)$ – (4.8) и (4.9). Интегрируя уравнение движения (4.5) в области разгрузки $m_1(t) \leq r \leq m(t)$, установим, что для компоненты тензора напряжений σ_{rr} выполняется зависимость (4.9). Также из (2.2), (2.4) и (3.6) для компонент напряжений в этой области следуют соотношения (4.7) и (4.8).

В области течения компонента необратимых деформаций p_{rr} удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.11). В области разгрузки $m_1(t) \leq r \leq m(t)$ согласно последней зависимости (4.10) и второму уравнению (2.1) для компоненты тензора необратимых деформаций p_{rr} следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial t} - \frac{\phi}{2r} p'_{rr} = 0 \quad (5.2)$$

Условие непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = m_1(t)$ приводит к равенству $N(H_1)|_{r=m_1} = 2k$. Сопоставляя его со вторым уравнением (3.12), получим, что

$$q = \sqrt{\phi \frac{1 - 2p_{rr}(q)}{x + 2p_{rr}(q) - 1}}, \quad q = m_1 \quad (5.3)$$

Непрерывность компоненты тензора напряжений σ_{rr} на границе $r = m(t)$ приводит к интегро-дифференциальному уравнению (4.13) для функции $\varphi(t)$, начальными условиями для которого являются условия непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ в момент времени t_2 .

Из зависимостей (3.2) и (3.5) следует уравнение для границы $r = m(t)$

$$m(t) = \sqrt{m^2(c) + \varphi(c) - \varphi(t)}, \quad c = t_2 \quad (5.4)$$

Уравнения (4.11), (4.13), (5.2)–(5.4) относительно неизвестных функций p_{rr} (в областях течения и разгрузки), $\varphi(t)$, $m(t)$ и $m_1(t)$ решались одновременно при помощи конечно-разностного метода.

Компоненты тензора обратимых деформаций в области обратимого деформирования имеют вид (4.15), а в областях вязкопластического течения и разгрузки – (4.16).

В расчетный момент времени $t_3 > t_2$ упругопластическая граница $r = m_1(t)$ достигнет внутренней граничной поверхности $r = s(t)$. С этого момента времени деформируемый материал разделяется на две области: область обратимого деформирования $m(t) \leq r \leq R(t)$ и область с накопленными необратимыми деформациями $s(t) \leq r \leq m(t)$.

Напряжения определяются соотношениями (4.6) в области обратимого деформирования и зависимостями (4.8), (4.9) в области с остаточными необратимыми деформациями. Компонента остаточных необратимых деформаций p_{rr} в области $s(t) \leq r \leq m(t)$ удовлетворяет уравнению (5.2). Для функции $\varphi(t)$ остается верным интегро-дифференциальное уравнение (4.13) с условиями непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ в момент времени t_3 . Для границы $r = m(t)$ продолжает выполняться уравнение (5.4). Система уравнений (4.13), (5.2) и (5.4) относительно неизвестных функций $\varphi(t)$, p_{rr} и $m(t)$ также решена конечно-разностным методом.

В момент времени $t_4 = t_2 + \gamma_1^{-1}$, соответствующий полной разгрузке, давление на внешней границе $r = R(t)$ станет равным нулю. В этот момент времени компонента тензора напряжений σ_{rr} на внутренней и внешней граничных поверхностях также равна нулю. Но при этом в продеформированном материале присутствуют остаточные напряжения, а также упругие и пластические деформации.

6. Повторное нагружение. С момента полной разгрузки t_4 будем снова увеличивать внешнюю нагрузку по закону $p(t) = p_1 \gamma(t - t_4)$. С увеличением давления сначала происходит обратимое деформирование материала. В этом случае из системы уравнений (4.13), (5.2) и (5.4) вычисляются функции $\varphi(t)$, p_{rr} и $m(t)$. Для нахождения напряжений и обратимых деформаций используются соотношения (4.6) и (4.15) в области обратимого деформирования и (4.8), (4.9) и (4.16) в области с остаточными необратимыми деформациями.

В некоторый момент времени $t_5 > t_4$ при внешнем давлении $p_2 = p(t_5) > p_0$ на внутренней граничной поверхности $r = s(t)$ снова выполнится условие пластичности $(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})|_{r=s_2} = 2k$, в котором $s_2 = s(t_5) < s_0$. С момента времени t_5 при дальнейшем увеличении внешней нагрузки от внутренней граничной поверхности $r = s(t)$ развивается область вязкопластического течения $s(t) \leq r \leq m_2(t)$. Граница $r = m_2(t)$ отделяет ее от области с остаточными необратимыми деформациями $m_2(t) \leq r \leq m(t)$. А в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ материал продолжает деформироваться обратимо. Интегрируя уравнение движения (4.5) с учетом граничных условий и условия непрерывности

напряжений, получим зависимости для вычисления компонент тензора напряжений: в областях $s(t) \leq r \leq m_2(t)$ и $m_2(t) \leq r \leq m(t)$ – (4.8), (4.9), в области $m(t) \leq r \leq R(t)$ – (4.6). Для определения компоненты тензора необратимых деформаций p_{rr} в области течения служит уравнение (4.11), а в области с накопленными необратимыми деформациями – уравнение (5.2). Из условия непрерывности напряжений на упругопластической границе $r = m_2(t)$ следует выполнение уравнения (5.3), в котором $q = m_2(t)$. Упругопластическая граница $r = m(t)$ удовлетворяет уравнению (5.4), в котором $c = t_4$.

В расчетный момент времени $t_6 > t_5$ упругопластическая граница $r = m_2(t)$ достигает границы $r = m(t)$. Таким образом, с последующим ростом давления с момента времени t_6 в материале остается две области: область вязкопластического течения $s(t) \leq r \leq m_2(t)$ и область обратимого деформирования $m_2(t) \leq r \leq R(t)$. Далее, в момент времени $t_7 = t_4 + \gamma^{-1} > t_6$ остановим рост внешнего давления на значении $p(t_7) = p_1$ и продолжим нагружение при постоянном давлении. Такое изменение условий нагружения не вызывает качественных изменений деформационного процесса.

Начиная с некоторого момента времени $t_8 > t_7$, будем уменьшать давление по закону $p(t) = p_1(1 - \gamma_2(t - t_8))$, в котором $\gamma_2 > 0$. Такое изменение режима нагружения приводит к возникновению новой области разгрузки $m_3(t) \leq r \leq m_2(t)$. В уменьшающейся области $s(t) \leq r \leq m_3(t)$ продолжается вязкопластическое течение, а в области $m_2(t) \leq r \leq R(t)$ материал деформируется обратимо. В расчетный момент времени $t_9 > t_8$ упругопластическая граница $r = m_3(t)$ доходит до внутренней границы $r = s(t)$, после чего вязкопластическое течение в материале прекращается. В материале остаются две области: область обратимого деформирования $m_2(t) \leq r \leq R(t)$ и область разгрузки $s(t) \leq r \leq m_2(t)$. В момент времени $t_{10} = t_8 + \gamma_2^{-1}$ внешнее давление становится равным нулю, как и значения компоненты тензора напряжений σ_{rr} на внутренней и внешней границах. Но, как и при первой разгрузке, в материале присутствуют остаточные напряжения и деформации. При этом уровень остаточных напряжений при повторной полной разгрузке становится выше, а радиус внутренней граничной поверхности меньше, чем при первой полной разгрузке. Таким образом, если теперь снова нагружать материал внешним давлением, то вязкопластическое течение начнется при значении давления, большем, чем p_2 . То есть вязкость материала при каждом повторном нагружении способствует увеличению порога, которого должно достичь давление для начала процесса течения в материале. Если принять внешнее давление достаточно высоким, то возможно возникновение повторного (обратного) вязкопластического течения при разгрузке [15, 20]. Не исключается вероятность наступления данного эффекта на некотором последующем цикле нагружений. В таком случае расчеты значительно усложняются, но при формулировании выводов это обстоятельство следует учитывать.

Расчеты проводились в безразмерных переменных $x = r/R_0$ и $\tau = \gamma t$ при значениях постоянных: $r_0/R_0 = 0.03$, $a/\mu = 0.9$, $b/\mu = 4$, $\kappa/\mu = 20$, $\zeta/\mu = 80$, $k/\mu = 0.003$, $\gamma\eta/\mu = 2.395$, $\rho_0\gamma^2 R_0^2/\mu = 2.585 \times 10^{-12}$, $\gamma_1/\gamma = 1$, $\gamma_2/\gamma = 1$. На рис. 2, а изображен график зависимости радиуса внутренней граничной поверхности $s(t)/R_0$ от времени. Здесь $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\tau_3 = 2.21$, $\tau_4 = 3$, $\tau_5 = 3.79$, $\tau_6 = 3.99$, $\tau_7 = 4$, $\tau_8 = 5$, $\tau_9 = 5.12$. Рис. 1, б иллюстрирует изменение упругопластических границ $\tilde{m} = m(t)/R_0$ в интервале по вре-

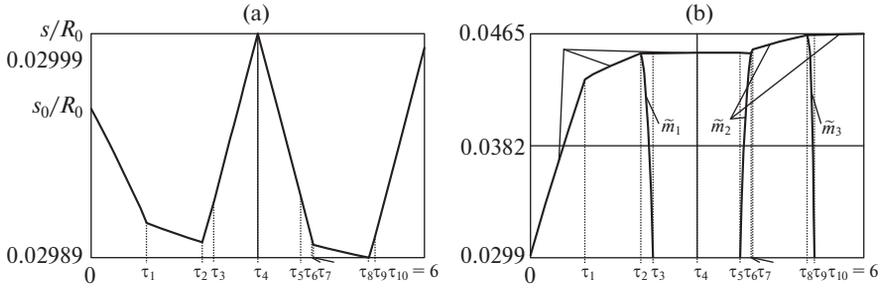


Рис. 1. Графики (а) радиуса внутренней граничной поверхности и (б) упругопластических границ в зависимости от времени.

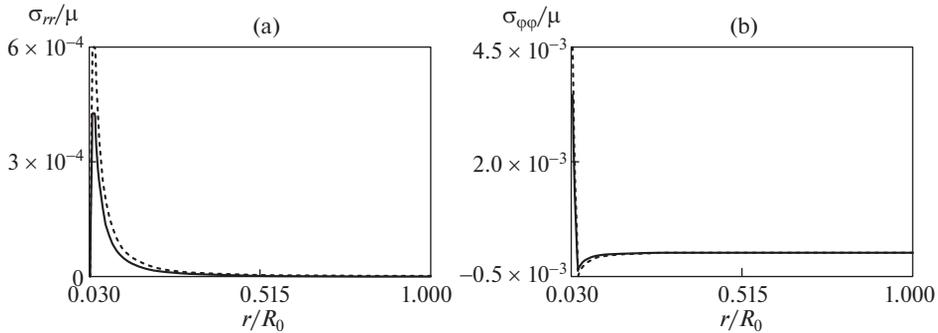


Рис. 2. Остаточные напряжения (а) σ_{rr}/μ и (б) $\sigma_{\phi\phi}/\mu$.

мени от 0 до τ_6 , $\tilde{m}_1 = m_1(t)/R_0$ в интервале от τ_2 до τ_3 , $\tilde{m}_2 = m_2(t)/R_0$ в интервале от τ_5 до τ_{10} и $\tilde{m}_3 = m_3(t)/R_0$ в интервале от τ_8 до τ_9 .

На рис. 2 представлены графики остаточных напряжений. Сплошной чертой изображены компоненты остаточных напряжений σ_{rr}/μ (рис. 2, а) и $\sigma_{\phi\phi}/\mu$ (рис. 2, б) в момент полной разгрузки τ_4 при первом нагружении, а пунктирной чертой — эти же компоненты в момент полной разгрузки τ_{10} при повторном нагружении.

Остаточные необратимые и обратимые деформации в момент времени τ_{10} представлены на рис. 3, а и рис. 3, б соответственно.

7. Заключение. В данной работе рассмотрены процессы развития и торможения вязкопластического течения в материале с одиночным дефектом сплошности при двух последовательных нагружениях. Нагружение осуществлялось посредством приложения внешнего давления, сначала растущего со временем, затем постоянного и далее уменьшающегося до нуля. Далее осуществлялся второй цикл нагружения внешним давлением в таком же порядке. Учет дополнительного диссипативного фактора, вносимого вязким сопротивлением пластическому течению, приводит к исчезновению эффекта приспособляемости дефекта к циклическим нагрузкам по типу “нагрузка–разгрузка”, имеющего место в условиях идеальной упругопластичности. Уровень остаточных напряжений растет, радиус дефекта уменьшается, несмотря на неувеличи-

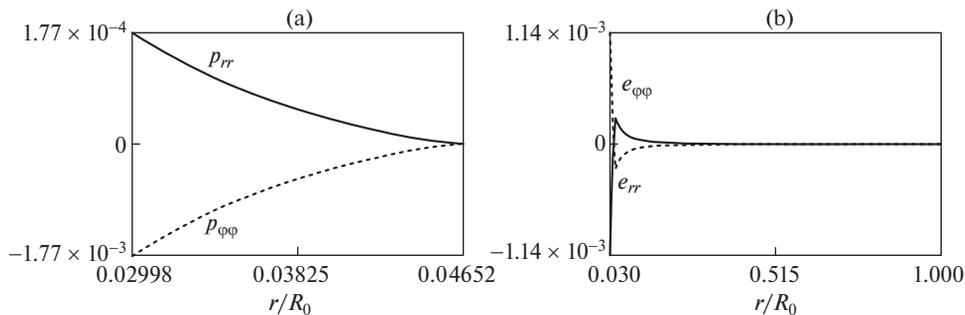


Рис. 3. Остаточные (а) необратимые и (б) обратимые деформации.

вающееся значение нагружающего давления. Давление выбиралось так, что повторное течение при разгрузке не возникает. Однако, с каждым циклом нагружения вероятность его возникновения возрастает, что приведет к усложнению расчетов.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-11-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
3. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
4. *Волков И.А., Игумнов Л.А.* Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 304 с.
5. *Betten J.* Creep Mechanics. Berlin: Springer – Verlag, 2008. 367 p.
6. *Локощенко А.М., Фомин Л.В., Терауд В.В., Басалов Ю.Г., Агабабян В.С.* Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 2. С. 275–318.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1765>
7. *Горелов В.И.* Исследование влияния высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // ПМТФ. 1984. № 5. С. 157–158.
8. *Новиков Н.В., Левитас В.И., Шестаков С.И.* Исследование напряженного состояния силовых элементов аппаратов высокого давления // Проблемы прочности. 1984. № 11. С. 43–48.
9. *Горелов В.И., Зорихин В.Н.* Технология упрочнения контейнеров для прессования металлов // Технология двигателестроения. 1984. № 11–12. С. 40–43.
10. *Левитас В.И.* Большие упругопластические деформации при высоком давлении. Киев: Наук. думка. 1987. 232 с.
11. *Черемской П.Г., Слезов В.В., Бетехтин В.И.* Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990. 376 с.
12. *Ковтаниук Л.В., Мурашкин Е.В.* Формирование полей остаточных напряжений у одиночных сферических включений в идеальной упругопластической среде // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 94–104.
13. *Ковтаниук Л.В., Мурашкин Е.В., Роговой А.А.* О динамике микропоры в несжимаемой вязкоупругопластической среде в условиях активного нагружения и последующей разгрузке // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 2. С. 176–186.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.2.21>
14. *Буренин А.А., Ковтаниук Л.В., Полоник М.В.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // ПММ. 2003. Т. 67. № 2. С. 315–325.

15. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
16. *Быковцев Г.И., Шитиков А.В.* Конечные деформации упругопластических сред // ДАН СССР. Т. 311. № 1. С. 59–62.
17. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестник ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
18. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
19. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
20. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН. 2000. Т. 375. № 6. С. 767–769.

УДК 539.3

ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2023 г. В. В. Васильев^{a,*}, Л. В. Федоров^b

^aЦентральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, 141371 Россия

^bНПО Машиностроение, Реутов 143966 Россия

*e-mail: vvvas@dol.ru

Поступила в редакцию 09.06.2023 г.

После доработки 12.06.2023 г.

Принята к публикации 13.06.2023 г.

Статья посвящена обсуждению принципиальных проблем, возникающих в релятивистской механике (общей теории относительности) применительно к определению напряжений, порождаемых гравитацией в деформируемом твердом теле. Рассматриваются три такие проблемы. Первая связана с неполнотой системы уравнений Эйнштейна, которая включает шесть взаимно независимых уравнений при десяти неизвестных коэффициентах метрического тензора. Вторая возникает при определении напряжений в твердом теле, порождаемых гравитацией – для статической задачи три уравнения закона сохранения теории (уравнения равновесия) включают шесть неизвестных напряжений, что в отличие от теории Ньютона не позволяет определить гравитационные напряжения. Третья проблема связана с приведением линеаризованных уравнений Эйнштейна к уравнениям гравитационной теории Ньютона. Такое приведение оказывается возможным только для пустого пространства и несправедливо для твердого тела. Отмеченные противоречия удается устранить, ограничивая область применения теории специальным пространством, которое является евклидовым в отношении пространственных координат и римановым только в отношении времени. Обсуждение иллюстрируется сферически симметричной задачей, которая сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: релятивистская механика, теория упругости, сферически симметричная задача

DOI: 10.31857/S0572329923700083, EDN: BRJMFL

1. Введение. В классической механике твердого тела в рамках гравитационной теории Ньютона процессы описываются с помощью симметричного тензора второго ранга, который называется в теории относительности тензором энергии-импульса и имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} - \rho v^\alpha v^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad T^{\alpha 4} = \rho c v^\alpha, \quad T^{44} = \rho c^2 \quad (1.1)$$

Здесь $\sigma^{\alpha\beta}$ – тензор напряжений, v^α – скорость, ρ – плотность и c – скорость света. Гравитация учитывается компонентой T^{44} тензора. То обстоятельство, что входящая в нее плотность такая же, что и в кинематических составляющих компонент $T^{\alpha\beta}$, определяется гипотезой об эквивалентности инертной и гравитационной масс, подтвержденной экспериментально. Структура тензора (1.1) следует из уравнений динамики и гравитационной теории Ньютона. Эти уравнения, записанные в эйлеровых

координатах, включают три уравнения движения и уравнение неразрывности. Тожественными преобразованиями эти уравнения можно привести к одинаковой форме, выражающейся через компоненты тензора (1.1) [1]. Вводя четырехмерное пространство-время с метрической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - g_{44} c^2 dt^2 \quad (1.2)$$

эти уравнения можно привести к одному уравнению для тензора энергии-импульса, то есть

$$\text{Div} T^{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.3)$$

То обстоятельство, что гравитация имеет геометрическую интерпретацию, также следует из теории Ньютона. Сравнивая траекторию движения частицы в гравитационном поле Ньютона с уравнением геодезической линии в пространстве с метрической формой (1.2), можно установить, что гравитационный потенциал Ньютона выражается через метрический коэффициент g_{44} в форме (1.2).

Уравнения релятивистской механики, представляющие собой феноменологическую теорию основанную на классической модели среды как однородного изотропного континуума, не обладающего микроструктурой, постулируют пропорциональность между тензором T^{ij} и тензором Эйнштейна

$$E^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \quad (1.4)$$

так, что

$$\chi T^{ij} = E^{ij} \quad (1.5)$$

В равенстве (1.4) R^{ij} компоненты тензора кривизны Риччи, зависящие от метрического тензора, и $R = g_{ij} R^{ij}$. В символической форме равенства (1.4) и (1.5) могут быть представлены как 10 нелинейных уравнений второго порядка относительно 10 компонент метрического тензора, то есть

$$L^{ij}(g) = \chi T^{ij} \quad (1.6)$$

где компоненты тензора T^{ij} удовлетворяют четырем уравнениям (1.3). Коэффициент пропорциональности

$$\chi = 8\pi G/c^4 \quad (1.7)$$

определяется из условия вырождения рассматриваемой теории в теорию Ньютона при малых уровнях гравитации и выражается через классическую гравитационную постоянную G . Уравнения (1.6) описывают гравитацию в сплошной среде – вакууме, газе, жидкости и твердом теле. Традиционно отмечается, что сложная структура уравнений (1.6) не позволяет получить решение. Однако проблема не только в этом. Как показано далее, существуют причины принципиального характера, затрудняющие решение.

2. Проблема определения метрического тензора. Эта проблема связана с тем что система уравнений (1.6), определяющая метрический тензор, является неполной [2–5]. Действительно, формально для 10 компонентов метрического тензора имеется 10 уравнений. Однако из уравнений (1.3) и (1.5) следует, что тензор Эйнштейна имеет специальную структуру – он тождественно удовлетворяет четырем уравнениям

$$\text{Div} E^{ij} = 0 \quad (2.1)$$

В связи с этим из десяти уравнений (1.6) только шесть уравнений являются взаимно независимыми и система является неполной. Традиционно считается, что независимые переменные в этих уравнениях могут быть подвергнуты некоторому координат-

ному преобразованию и в результате получены четыре координатных условия, обеспечивающие полноту системы. Однако общая форма таких условий неизвестна. Альтернативно, в качестве дополнительных уравнений предложено использовать условия гармоничности, имеющие вид [3, 6]

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} g^{ij}) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь $|g|$ — определитель метрического тензора. Несмотря на наличие доказательства существования решения уравнений (1.6) и (2.2) в вакууме [7] и полученного решения сферически симметричной задачи [6], условие (2.2) не получило широкого признания.

Ситуацию позволяет немного прояснить обращение к линейной теории упругости. Для задач статики $T_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ и уравнения (1.3) совпадают с уравнениями равновесия, которые в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Символы $(\cdot \cdot \cdot)_{,j}$ и $(1, 2, 3)$ обозначают дифференцирование по x_j и круговую перестановку индексов. Максвелл в 1870 году и Морера в 1892 году предложили следующее преобразование для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \Phi_{22,33} + \Phi_{33,22} - 2\Phi_{23,23}, & \sigma_{12} &= -\Phi_{33,12} - \Phi_{12,33} + \Phi_{13,23} + \Phi_{23,13}, \\ \sigma_{13} &= -\Phi_{23,13} + \Phi_{12,23} - \Phi_{13,22} + \Phi_{23,12}, & \sigma_{22} &= \Phi_{11,33} + \Phi_{33,11} - 2\Phi_{13,13} \\ \sigma_{23} &= -\Phi_{11,23} + \Phi_{12,13} + \Phi_{13,12} - \Phi_{23,11}, & \sigma_{33} &= \Phi_{11,22} + \Phi_{22,11} - 2\Phi_{12,12} \end{aligned} \quad (2.4)$$

в которых Φ_{ij} является тензором функций напряжений. Подстановка напряжений (2.4) в уравнения равновесия (2.3) позволяет тождественно удовлетворить эти уравнения. Аналогичная ситуация имеет место для уравнений релятивистской механики — подстановка тензора (1.4) в уравнения (2.1) позволяет тождественно удовлетворить эти уравнения. Продолжая эту аналогию, запишем линеаризованную форму уравнений, следующую из уравнений (1.4) и (1.5). Предположим, что компоненты метрического тензора имеют следующий вид:

$$g_{ij} = 1 + f_{ij}, \quad g_{i4} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad g_{44} = -(1 + f_{44}) \quad (2.5)$$

где амплитудные значения функций f много меньше единицы. Осуществляя линеаризацию равенств (1.4) и учитывая уравнения (1.5), получим

$$\chi \sigma_{11} = \frac{1}{2} (-f_{22,33} - f_{33,22} + 2f_{23,23} - f_{44,22} - f_{44,33}) \quad (2.6)$$

$$\chi \sigma_{12} = \frac{1}{2} (f_{33,12} + f_{12,33} - f_{13,23} - f_{23,13} + f_{44,12}) \quad (2.7)$$

$$\chi \sigma_{13} = \frac{1}{2} (f_{22,13} - f_{12,23} + f_{13,22} - f_{23,12} + f_{44,13}) \quad (2.8)$$

$$\chi \sigma_{22} = \frac{1}{2} (-f_{11,33} - f_{33,11} + 2f_{13,13} - f_{44,11} - f_{44,33}) \quad (2.9)$$

$$\chi \sigma_{23} = \frac{1}{2} (f_{11,23} - f_{12,13} - f_{13,12} + f_{23,11} + f_{44,23}) \quad (2.10)$$

$$\chi \sigma_{33} = \frac{1}{2} (-f_{11,22} - f_{22,11} + 2f_{12,12} - f_{44,11} - f_{44,22}) \quad (2.11)$$

$$\chi \mu c^2 = -\frac{1}{2}(f_{11,33} + f_{11,22} + f_{22,11} + f_{22,33} + f_{33,11} + f_{33,22} - 2f_{12,12} - 2f_{13,13} - 2f_{23,23}) \quad (2.12)$$

Уравнения (2.6)–(2.11) совпадают с уравнениями (2.4) если принять $\chi = 1$, $f_{44} = 0$ и $f_{ij} = -2\phi_{ij}$. Таким образом, линеаризованные уравнения Эйнштейна по существу совпадают с уравнениями Максвелла–Мореры теории упругости. В теории упругости известно, что уравнения (2.4) разрешимы только если напряжения удовлетворяют уравнениям совместности деформаций, сформулированных в напряжениях. Как известно [8], уравнения совместности деформаций имеют простую геометрическую интерпретацию, согласно которому деформируемое пространство является евклидовым и его тензор кривизны равен нулю. Такие уравнения не могут существовать в релятивистской механике. Однако отмеченная аналогия с уравнениями теории упругости позволяет предположить, что гравитация порождает не общее, а некоторое специальное риманово пространство и уравнения Эйнштейна должны быть дополнены не формальными математическими координатными условиями, а физическими условиями, специализирующими риманово пространство в релятивистской механике. Такие условия предложены ниже в разделе 6.

3. Проблема определения гравитационных напряжений. Для деформируемого твердого тела уравнения поля (1.6) содержат в правых частях компоненты тензора энергии-импульса T^{ij} , которые включают согласно равенствам (1.1) неизвестные напряжения. Отсюда, в частности, следует, что искривленное пространство порождается не только гравитацией, но и напряженным состоянием тела. Для задачи статики напряжения связаны тремя уравнениями (1.3), которые являются, по существу, уравнениями равновесия. Однако эти три уравнения включают шесть напряжений и система является неполной. В теории упругости напряжения определяются из системы уравнений, включающей уравнения равновесия и уравнения совместности деформаций. Однако, как отмечено выше, в релятивистской механике уравнения, аналогичные уравнениям совместности деформаций теории упругости не могут существовать и напряжения определить в общем случае невозможно. Создается парадоксальная ситуация – гравитационная теория Ньютона позволяет определить гравитационные напряжения, а более общая теория – релятивистская механика не позволяет этого сделать. Традиционно в общей теории относительности рассматриваются только идеальные жидкости и газы, для которых тензор напряжений имеет только одну компоненту – давление, то есть $\sigma_{ii} = -p$, $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$). Однако равновесное состояния при этом возможно только если тело имеет сферическую форму. В терминах теории упругости напряженное состояние такого тела является статически определимым и для определения давления не требуется привлечения уравнений совместности деформаций. Определение гравитационных напряжений в твердом теле обсуждается далее в разделе 6.

4. Проблема приведения релятивистской механики к гравитационной теории Ньютона. Как уже отмечалось, коэффициент χ в уравнении (1.5) определяется в результате приведения линеаризованных уравнений релятивистской механики к уравнению гравитационной теории Ньютона. Линеаризованные уравнения поля (2.6)–(2.12) необходимо дополнить уравнениями (1.3), которые имеют вид

$$\sigma_{ij,j} - \frac{\mu c^2}{2} f_{44,j} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (4.1)$$

и обобщают уравнения равновесия (2.3), учитывая гравитационное поле. Преобразуем уравнения (2.6)–(2.12). Выразим производные $f_{23,23}$, $f_{13,13}$, $f_{12,12}$ из уравнений (2.6), (2.9) и (2.11) и подставим их в уравнение (2.12). В результате получим

$$\Delta f_{44} = \chi(\mu c^2 - \sigma)$$

Здесь $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ – инвариант тензора напряжений. Пренебрегая σ по сравнению с μc^2 , имеем

$$\Delta f_{44} = \chi \mu c^2 \quad (4.2)$$

В теории Ньютона гравитационный потенциал ψ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \psi = 4\pi G \mu \quad (4.3)$$

Сравнивая уравнения (4.2) и (4.3), можно заключить, что $f_{44} = 2\psi/c^2$ и получить выражение $\chi = 8\pi G/c^4$, совпадающее с формулой (1.7).

Однако более детальный анализ показывает, что приведенный выше вывод выражения для χ некорректен для твердого тела. Дело в том, что уравнения (2.6)–(2.11) в общем случае несовместны. Дифференцируя и складывая эти уравнения, можно установить, что система является совместной если левые части уравнений удовлетворяют следующим условиям:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (4.4)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями равновесия (4.1) если $f_{44} = 0$, то есть при отсутствии гравитации. Таким образом, линеаризованные уравнения релятивистской механики не описывают гравитацию. Равенство (1.4) для χ можно получить если рассмотреть эти уравнения во втором приближении [9].

В следующем разделе обсуждаемые проблемы иллюстрируются на примере сферически симметричной задачи, которая допускает аналитическое решение.

5. Сферически симметричная статическая задача. Метрическая форма (1.2) в сферических координатах r, θ, φ имеет вид

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}d\Omega^2 - g_{44}c^2dt^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (5.1)$$

Входящие сюда метрические коэффициенты зависят только от радиальной координаты. Как уже отмечалось в разделе 1, теория гравитации Ньютона может быть сформулирована в терминах релятивистской механики и соответствует следующим метрическим коэффициентам в форме (5.1) [2]:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{44} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad (5.2)$$

определяющим гравитационное поле в вакууме, создаваемое шаром с радиусом R . В равенствах (5.2)

$$r_g = \frac{2mG}{c^2} \quad (5.3)$$

– так называемый гравитационный радиус, выражающийся через массу однородного шара с плотностью ρ

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \quad (5.4)$$

Выражения (1.4) для тензора Эйнштейна имеют вид

$$E_1^1 = \frac{1}{g_{22}} - \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{g'_{22}}{g_{22}} \right)^2 + \frac{g'_{22}g'_{44}}{2g_{22}g_{44}} \right] \quad (5.5)$$

$$E_2^2 = -\frac{1}{2g_{11}} \left[\frac{g_{44}''}{g_{44}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{44}'}{g_{44}} \right)^2 + \frac{g_{22}''}{g_{22}} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{22}'}{g_{22}} \right)^2 + \frac{g_{22}'}{2g_{22}} \left(\frac{g_{44}'}{g_{44}} - \frac{g_{11}'}{g_{11}} \right) - \frac{g_{11}'g_{44}'}{2g_{11}g_{44}} \right] \quad (5.6)$$

$$E_4^4 = \frac{1}{g_{22}} - \frac{1}{g_{11}} \left[\frac{g_{22}''}{g_{22}} - \frac{1}{4} \left(\frac{g_{22}'}{g_{22}} \right)^2 - \frac{g_{11}'g_{22}'}{2g_{11}g_{22}} \right] \quad (5.7)$$

где $(\dots)' = d(\dots)/dr$. Здесь используются смешанные компоненты тензора E_i^j , которые совпадают в сферических координатах с физическими компонентами. В результате из равенств (1.1) и (1.5) следует

$$E_1^1 = \chi T_1^1 = \chi \sigma_r, \quad E_2^2 = \chi T_2^2 = \chi \sigma_\theta, \quad E_4^4 = \chi T_4^4 = \chi \rho c^2 \quad (5.8)$$

где σ_r и σ_θ – радиальные и кольцевые напряжения. Имеется одно уравнение (1.3), принимающее вид

$$(\sigma_r)' + \frac{g_{22}'}{g_{22}} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{g_{44}'}{2g_{44}} (\sigma_r - \rho c^2) = 0 \quad (5.9)$$

Рассмотрим пустое пространство, окружающее шар ($r \geq R$). В этом случае $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ и $\mu = 0$, то есть $E_i^j = 0$, уравнения (5.5)–(5.7) являются однородными и допускают общее решение. Из уравнения (5.7) можно выразить g_{11} через g_{22} , подставить полученный результат в уравнение (5.5) и найти g_{44} . Решение должно удовлетворять асимптотическому условию – при $r \rightarrow \infty$ оно должно сводиться к равенствам (5.2), соответствующим теории Ньютона. Окончательно имеем [10]

$$g_{11}^e = \frac{(g_{22}')^2}{4(g_{22} - r_g \sqrt{g_{22}})}, \quad g_{44}^e = 1 - \frac{r_g}{\sqrt{g_{22}}} \quad (5.10)$$

Индекс “e” соответствует внешнему пространству шара. Естественно теперь попытаться подставить соотношения (5.10) в уравнение (5.6) и определить g_{22} . Однако в результате такой подстановки уравнение (5.6) удовлетворяется тождественно. Таким образом, равенства (5.10) являются решением уравнений (5.5)–(5.7) при любой функции $g_{22}(r)$. Этот результат иллюстрирует неполноту системы уравнений Эйнштейна относительно компонентов метрического тензора, которая рассматривается в разделе 2.

Как уже отмечалось, традиционно предлагается дополнить уравнения (5.5)–(5.7) некоторым координатным условием. Наиболее распространенным является условие К. Шварцшильда, согласно которому принимается $g_{22} = r^2$. Заметим, что это современная интерпретация – изначально К. Шварцшильд использовал другое условие [11], которое сводится к записанному выше. Традиционно [5, 12, 13] обсуждаемое условие обосновывается следующим образом. Примем, что $g_{22} = f^2(r)$ и введем новую радиальную координату $r' = f(r)$. Опуская для сокращения записи штрих, получим $g_{22} = r'^2$. Такое преобразование справедливо только для бесконечного сферического пространства, для которого $0 \leq (r, r') < \infty$ и различие между r и r' не является существенным. Если в пространстве находится шар с радиусом $r = R$, то определить соответствующее значение r' невозможно и преобразование координаты теряет смысл.

Принимая $g_{22} = r'^2$ в равенствах (5.10), получим решение Шварцшильда [11]

$$g_{11} = \frac{1}{1 - r_g/r}, \quad g_{44} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad (5.11)$$

Это решение является сингулярным при $r = r_g$ и $r = 0$ и определяет объект, называемый черной дырой. Традиционная трактовка решения заключается в следующем. Предположим, что решение (5.11) справедливо для всего пространства, то есть при $0 \leq r < \infty$. Тогда при $r = 0$ имеет место сингулярность, окруженная сферой с радиусом r_g , при котором тоже имеется сингулярность и который называется радиусом горизонта событий. Такое название объясняется тем, что при $r < r_g$ метрические коэффициенты изменяют знак. Поскольку они не могут быть отрицательными, изменяются знаки в метрической форме (5.1) – при первом члене появляется знак минус, а при последнем – плюс. В результате радиальная координата оказывается подобна временной, а так как время необратимо, то все объекты, оказавшиеся за горизонтом событий необратимо движутся к центру и информация от них не распространяется наружу. Свет не может выйти из под горизонта событий и черная дыра является невидимой. Из этого, в частности, следует, что черная дыра не может быть идентифицирована экспериментально. Для этого надо проникнуть за горизонт событий и передать информацию о внутреннем пространстве, что в принципе невозможно.

Рассмотрим внутреннюю область шара ($0 \leq r \leq R$). При координатном условии Шварцшильда $g_{22} = r^2$ уравнение (5.7) с учетом равенств (5.8) принимает вид

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{g_{11}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{g'_{11}}{r g_{11}} \right) = \chi \rho c^2 \quad (5.12)$$

и в случае постоянной плотности имеет следующее общее решение [10]:

$$g_{11}^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \chi \rho c^2 r^2 - \frac{C}{r}} \quad (5.13)$$

Индекс “ i ” соответствует внутренней области. Постоянная интегрирования $C = 0$ так как в противном случае метрический коэффициент в центре шара оказывается сингулярным для шара любого размера. На поверхности шара $r = R$ полученное решение должно совпадать с решением (5.11), то есть должно выполняться граничное условие

$$g_{11}^i(R) = g_{11}^e(R) \quad (5.14)$$

Учитывая равенства (1.4) и (5.3) для χ и r_g , в результате получим равенство (5.4) для массы шара. Однако это равенство соответствует евклидову пространству внутри шара, а оно должно быть римановым, в котором масса определяется равенством

$$m_i = 4\pi\rho \int_0^R \sqrt{g_{11}^i} r^2 dr$$

Подставляя сюда выражение (5.13) (при $C = 0$), получим

$$m_i = \frac{2\pi}{r_g} \rho R^4 \left(\sqrt{\frac{R}{r_g}} \arcsin \sqrt{\frac{r_g}{R}} - \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}} \right) \approx \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \left(1 + \frac{3r_g}{R} + \dots \right) \quad (5.15)$$

Это выражение совпадает с равенством (5.4) при $r_g = 0$, то есть при отсутствии гравитации. Поскольку масса шара в релятивистской механике определяется соотношением (5.13), граничное условие (5.14) в решении Шварцшильда не выполняется. Причина связана с тем, что при координатном условии $g_{22} = r^2$ уравнение (5.7), имеющее второй порядок, вырождается в уравнение (5.12), имеющее первый порядок. В резуль-

тате, решение (5.13) не содержит еще одной постоянной интегрирования необходимой для удовлетворения граничного условия на поверхности шара.

Как отмечено в разделе 3, определить гравитационные напряжения в шаре невозможно, так как напряжения σ_r и σ_θ связаны лишь одним уравнением (5.9).

Решение Шварцшильда не является единственным. Для внешнего поля получено решение, основанное на условии гармоничности (2.2) [6]. Имеются и другие решения этой задачи [10, 14, 15], не обладающие сингулярностью.

Рассмотрим на примере сферически симметричной задачи проблему приведения релятивистской теории к теории Ньютона, обсуждавшуюся в разделе 4. Соотношения аналогичные равенствам (2.5) для этой задачи имеют вид

$$g_{11} = 1 + f_1, \quad g_{22} = r^2(1 + f_2), \quad g_{44} = 1 + f_4$$

а уравнения Эйнштейна аналогичные уравнениям (2.6)–(2.12) принимают следующую форму:

$$\chi\sigma_r = \frac{1}{r^2}(f - rf_4'), \quad \chi\sigma_\theta = \frac{1}{2r}(f - rf_4)', \quad \chi\mu c^2 = \frac{1}{r^2}(rf)' \quad (5.16)$$

где $f = f_1 - (rf_2)'$.

Рассмотрим наружное пространство ($R \leq r < \infty$), для которого $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ и $\rho = 0$. Уравнения (5.16) являются в этом случае однородными, то есть

$$f - rf_4' = 0, \quad (f - rf_4)' = 0, \quad (rf)' = 0 \quad (5.17)$$

Отсюда следует, что второе уравнение является следствием первого, что еще раз иллюстрирует неполноту системы уравнений поля для метрического тензора – имеется два независимых уравнения для трех функций $f_1(r)$, $f_2(r)$ и $f_4(r)$. Выразим функцию f из первого уравнения системы (5.17), а ее производную f' из второго уравнения и подставим результате в третье уравнение. Полученное уравнение

$$\Delta f_4 = 0$$

совпадает с уравнением, соответствующим теории Ньютона если считать, что функция f_4 является гравитационным потенциалом. Таким образом, для вакуума линеаризованные уравнения релятивистской механики приводятся к уравнению, следующему из теории Ньютона.

Рассмотрим внутреннее пространство ($0 \leq r \leq R$). Как следует из уравнений (5.16), правые части первых двух уравнений выражаются через одну и ту же функцию $F = f - rf_4'$. Исключая эту функцию, приходим к условию совместности первых двух уравнений системы (5.16), которое имеет вид

$$\sigma_r' + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (5.18)$$

Это уравнение равновесия в сферических координатах при отсутствии объемных сил. Линеаризация соответствующего уравнения релятивистской механики (5.9) дает

$$\sigma_r' + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{\mu c^2}{2} f_4' = 0 \quad (5.19)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5.18) при $f_4 = 0$, то есть при отсутствии гравитации. Причина полученного результата заключается в следующем. Последний член в уравнении (5.19) не следует из линеаризованных уравнений так как он имеет второй порядок малости. Таким образом, линеаризованные уравнения релятивистской механики не описывают гравитацию. Это оказывается возможным только для второго приближения [9].

6. Специальная форма риманова пространства релятивистской механики. Отмеченные выше проблемы релятивистской механики можно устранить если ввести специальное риманово пространство, которое появляется в результате следующих рассуждений. Как следует из равенств (1.1) для тензора энергии-импульса и уравнений (1.6) искривление пространства вызывается не только гравитацией, но и напряженным состоянием среды. Отсюда следует, что внутреннее пространство любого нагруженного тела является римановым. Однако трехмерное риманово пространство помещается в евклидово пространство шести измерений [12] и не может существовать в трехмерном евклидовом пространстве. Таким образом, представляется естественным предположить, что пространство, порождаемое гравитацией и напряженным состоянием тела, является евклидовым в отношении пространственных координат и римановым только в отношении времени. Для сферически симметричной задачи метрическая форма (1.2) имеет в этом случае вид [16]

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + 2g_{14} c dr dt - g_{44} c^2 dt^2 \quad (6.1)$$

Тензор Эйнштейна (1.4) записывается следующим образом:

$$E_1^1 = -\frac{1}{r^2 g} (r g_{44}' - g_{14}^2) \quad (6.2)$$

$$E_2^2 = \frac{1}{4rg^2} [4g_{14} g_{44} g_{14}' - 4g_{14}^2 g_{44}' - 2g_{44} g_{44}' - 2rg_{44} g_{44}'' + r(g_{44}')^2 - 2rg_{14}^2 g_{44}'' + 2rg_{14} g_{14}' g_{44}'] \quad (6.3)$$

$$E_4^4 = \frac{g_{14}}{r^2 g^2} (g g_{14} + 2r g_{44} g_{14}' - r g_{14} g_{44}') \quad (6.4)$$

$$E_1^4 = -\frac{g_{14} g_{44}'}{r g^2}, \quad E_4^1 = 0, \quad g = g_{44} + g_{14}^2 \quad (6.5)$$

Для метрической формы (6.1) имеется два уравнения закона сохранения (1.3), то есть

$$(T_1^1)' + \frac{2}{r} (T_1^1 - T_2^2) + \frac{g_{44}'}{2g} T_1^4 = 0, \quad g_{14} (T_1^1 - T_4^4) - g_{44} T_1^4 = 0 \quad (6.6)$$

Как уже отмечалось, тензор E_i^j тождественно удовлетворяет двум уравнениям (6.6) и только два из четырех уравнений (6.2)–(6.5) являются взаимно независимыми. Соответственно имеется два неизвестных метрических коэффициента g_{14} и g_{44} . Система уравнений Эйнштейна является полной и привлечения дополнительных условий не требуется.

Для пустого пространства, окружающего шар радиуса R , уравнения (6.2)–(6.5) являются однородными. Из уравнений для E_1^1 и E_1^4 с учетом решения (5.2) для теории Ньютона получим [16]

$$g_{14} = \sqrt{\frac{r g}{r}}, \quad g_{44} = 1 - \frac{r g}{r} \quad (6.7)$$

Подставляя это решение в уравнения (6.3) и (6.4) можно убедиться в том, что они удовлетворяются тождественно. Таким образом, равенства (6.7) являются решением уравнений (6.2)–(6.5) для вакуума. Координатная система, соответствующая метрическим коэффициентам (6.7), известна как система Гуллстанда–Пейнлеве. Она была получена в 20-х годах прошлого века в результате преобразования координат Шварц-

шильда. В настоящей работе соотношения (6.7) следуют из предлагаемой модели риманова пространства.

Рассмотрим внутреннее поле для упругого шара. Выразим T_1^4 из второго уравнения (6.6) и подставим результат в первое уравнение. Учтя равенства (5.8), получим уравнение (5.9), являющееся уравнением равновесия при наличии гравитационного поля. Поскольку пространство является евклидовым в отношении пространственных координат, можно ввести радиальное перемещение $u_r(r)$ и соответствующие деформации

$$\varepsilon_r = u_r', \quad \varepsilon_\theta = u_r/r$$

Отсюда следует уравнение совместности деформаций

$$(r\varepsilon_\theta)' = \varepsilon_r \quad (6.8)$$

Для упругого шара деформации выражаются через напряжения с помощью закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r]$$

где E – модуль упругости, а ν – коэффициент Пуассона. Подставляя деформации в уравнение (6.8), получим

$$(1 - \nu)\sigma_\theta' - \nu\sigma_r' + \frac{1 + \nu}{r}(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0$$

Добавляя это уравнение к уравнению равновесия (5.9), получим систему двух уравнений, из которых можно определить напряжения [17].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (гранта № 23-11-00275, выданного Институту прикладной механики РАН)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: Наукова думка, 1972. 148 с.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
3. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. В 3 т. М.: Мир, 1977.
5. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977. 431 с.
6. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007. 563 с.
7. Choquet-Bruhat Y. Theoreme d'existence pour certains systemes d'equations aux derivees partielles nonlinrares // Acta Math. 1952. V. 88. P. 141–225.
8. Власов В.З. Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах // Избр. Тр. Т. 1. М.: Изд.-во АН СССР, 1962. 558 с.
9. Vasiliev V.V., Fedorov L.V. Linearized equations of general relativity and the problem of reduction to the Newton theory // J. Mod. Phys. 2020. V. 11. P. 221–236. <https://doi.org/10.4236/jmp.2020.112014>
10. Васильев В.В., Федоров Л.В. Задача теории упругости для гравитирующего шара и некоторые геометрические эффекты // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 84–92.
11. Vasiliev V.V., Fedorov L.V. To the Schwarzschild solution in general relativity // J. Mod. Phys. 2018. V. 9. № 14. P. 2482–2494. <https://doi.org/10.4236/jmp.2018.914160>
12. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
13. Алексеев С.О., Памятных Е.А., Урсулов А.В., Третьякова Д.А., Латош Б.Н. Общая теория относительности. М.: URSS, 2020. 400 с.

-
14. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* To the complete set of equations for a static problem of general relativity // J. Mod. Phys. 2019. V. 10. № 12. P. 1401–1415.
<https://doi.org/10.4236/jmp.2019.1012093>
 15. *Vasiliev V.V.* Black holes or dark stars – what follows from the general relativity theory // J. Mod. Phys. 2017. V. 8. № 7. P. 1087–1100.
<https://doi.org/10.4236/jmp.2017.87070>
 16. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* To the solution of a spherically symmetric problem of general relativity // J. Mod. Phys. 2023. V. 14. № 2. P. 147–159.
<https://doi.org/10.4236/jmp.2023.142010>
 17. *Vasiliev V.V., Fedorov L.V.* Spherically symmetric problem of general relativity for an elastic solid sphere // J. Mod. Phys. 2023. V. 14. № 6. P. 818–832.
<https://doi.org/10.4236/jmp.2023.146047>

**АНИЗОТРОПИЯ ЭНЕРГИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ПЛАСТИНЧАТЫХ
КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ**

© 2023 г. Д. С. Лисовенко^{a,*}, А. И. Епишин^{b,**}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^bИнститут структурной макрокинетики и проблем материаловедения им. А.Г. Мерджанова РАН,
Черноголовка, Россия

*e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

**e-mail: a.epishin2021@gmail.com

Поступила в редакцию 26.06.2023 г.

После доработки 03.07.2023 г.

Принята к публикации 07.07.2023 г.

Получено аналитическое решение для остаточных напряжений и их энергии в упруго анизотропной двухкомпонентной пластинчатой структуре, где компоненты имеют идентичный тип упругой анизотропии, одинаковые или пропорциональные упругие константы и совпадающие главные оси упругой анизотропии. Полученное решение применено для анализа анизотропии упругой энергии таких кристаллических структур как рафт-структура γ/γ' монокристаллических никелевых жаропрочных сплавов, многослойных эрозионностойких нанопокровов ZrN/CrN и однослойных покрытий различного типа. Показано, что фактор минимизации упругой энергии остаточных напряжений оказывает существенное влияние на кристаллографическую ориентацию интерфейса в многослойных структурах и направление оси ростовой текстуры покрытий.

Ключевые слова: пластинчатая структура, упругая анизотропия, остаточные напряжения, упругая энергия, кубические кристаллы

DOI: 10.31857/S0572329923600524, EDN: BNGLGT

1. Введение. Большинство конструкционных и функциональных материалов являются гетерофазными, то есть состоящими из двух или более компонентов, различающихся по химическому составу и разделенных между собой поверхностями раздела. При совмещении разнородных компонентов в них вследствие размерного несоответствия возникают остаточные напряжения, которые оказывают существенное влияние на физико-механические свойства образованного композита. Остаточные напряжения могут быть желательными или нежелательными. Например, растягивающие остаточные напряжения в более прочной фазе композиционного материала обеспечивают более низкий уровень напряжений в менее прочной фазе при нагружении материала внешней растягивающей нагрузкой. Классическим примером реализации такого принципа упрочнения является предварительно напряженный железобетон. Однако в большинстве случаев остаточные напряжения имеют отрицательный эффект и поэтому обычно компании-производители стремятся минимизировать уровень остаточных напряжений в выпускаемых материалах и изделиях. Обзор, посвященный остаточным напряжениям в конструкционных материалах, приведен в работе [1].

Широким классом гетерофазных материалов являются периодические пластинчатые структуры, например, многофазные сплавы, такие как мартенситные, бейнитные и перлитные стали [2], сплавы на основе γ -алюминиды титана [3], направленно закристаллизованные композиты Nb/Nb₃Si₃ [4], многослойные защитные покрытия [5] и многие другие. Такие структуры могут формироваться в процессе кристаллизации материала (in-situ), путем последовательного нанесения его слоев, например, с использованием аддитивных технологий и при других технологических процессах. При этом возникающие остаточные напряжения могут не только непосредственно (механически) влиять на макроскопические свойства материала, но и косвенно видоизменяя его кристаллическую структуру и морфологию структурных составляющих, если процесс происходит при высоких температурах, когда структура материала формируется путем кристаллизации или диффузионно эволюционирует. Целью настоящей работы являлось развитие аналитической модели, которая позволяет оценивать уровень остаточных напряжений и их энергию в двухкомпонентных пластинчатых структурах. При этом рассматривается специальный случай пластинчатых структур, в которых компоненты имеют одинаковый тип упругой анизотропии, равные или пропорциональные упругие константы, а их главные оси упругой анизотропии совпадают. Полученные аналитические зависимости применены для исследования анизотропии упругой энергии пластинчатых кристаллических структур кубической сингонии, а именно: рафт-структуры γ/γ' , формирующейся в монокристаллах никелевых жаропрочных сплавов в процессе высокотемпературной ползучести [6], многослойных эрозионностойких покрытиях, состоящих из множества нанослоев ZrN и CrN [5], и однослойных покрытий различного типа, нанесенных на жесткую подложку.

2. Постановка задачи. На рис. 1 представлена модель рассматриваемой пластинчатой структуры. Полагается, что структура состоит из множества периодически чередующихся в направлении z слоев компонентов А и В постоянной толщины. Длина пластин в направлениях x и y намного больше их толщины. Пластины жестко соединены в плоскости интерфейса, при этом размерное несоответствие пластин δ в плоскости xy компенсируются их упругими деформациями. Параметр δ определен следующим образом: $\delta = (l_B - l_A)/l_A$, где l_A и l_B – линейный размер нестесненных пластин А и В, то есть в состоянии до их совмещения. Так как рассматривается структура многослойная и она состоит из длинных пластин, то считается, что изгибные деформации и концевые эффекты в этой структуре отсутствуют. Полагается, что компоненты А и В имеют одинаковый тип упругой анизотропии, главные оси их упругой анизотропии совпадают, а упругие податливости равны $S_{ij}^A = S_{ij}^B = S_{ij}$. Отсюда и далее будем обозначать компоненты матрицы упругих податливостей в главных осях упругой анизотропии большими символами S_{ij} , а в лабораторной системе xuz малыми s_{ij} . Задача настоящего аналитического исследования состояла в получении решения для остаточных напряжений и упругой энергии в данной структуре в предположении, что интерфейс А/В имеет произвольную ориентацию по отношению к главным осям упругой анизотропии.

3. Основные уравнения и их решение. В отсутствие внешней нагрузки при произвольном сечении модели пластинчатой структуры (рис. 1) плоскостями, перпендикулярными осям x , y и z , разделенные части объекта должны оставаться в равновесии. Из сечения плоскостью, перпендикулярной z , следует, что все компоненты тензора напряжений с индексом z должны быть равны нулю: $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = \sigma_{yz} = 0$. То есть структура находится в плоском напряженном состоянии с $\sigma_{xx} \neq 0$, $\sigma_{yy} \neq 0$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \neq 0$. Из сечений плоскостями, перпендикулярными осям x и y , следуют уравнения равновесия

$$\sigma_{xx}^A(1 - f^B) + \sigma_{xx}^B f^B = 0 \quad (3.1)$$

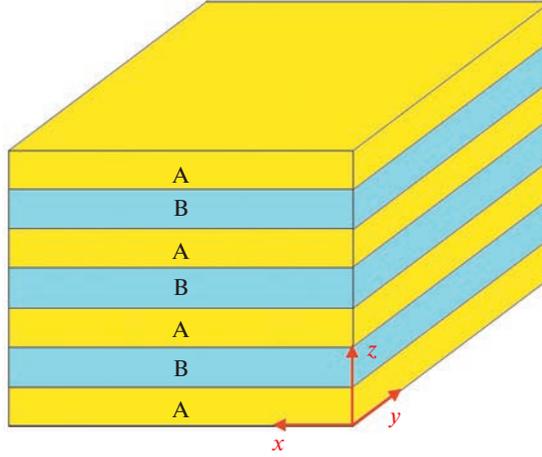


Рис. 1. Модель двухкомпонентной пластинчатой анизотропной структуры.

$$\sigma_{yy}^A(1 - f^B) + \sigma_{yy}^B f^B = 0 \quad (3.2)$$

$$\sigma_{xy}^A(1 - f^B) + \sigma_{xy}^B f^B = 0 \quad (3.3)$$

где f^B – объемная доля компонента В.

При жестком соединении пластин А и В вдоль осей x и y должны выполняться уравнения совместности линейных деформаций

$$\varepsilon_{xx}^A = \varepsilon_{xx}^B + \delta \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{yy}^A = \varepsilon_{yy}^B + \delta \quad (3.5)$$

а также угловых деформаций в плоскости xy

$$\varepsilon_{xy}^A = \varepsilon_{xy}^B \quad (3.6)$$

Учитывая только ненулевые компоненты тензора напряжений, по закону Гука получаем деформации

$$\varepsilon_{xx}^C = s_{11}^C \sigma_{xx}^C + s_{12}^C \sigma_{yy}^C + s_{16}^C \sigma_{xy}^C \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_{yy}^C = s_{12}^C \sigma_{xx}^C + s_{22}^C \sigma_{yy}^C + s_{26}^C \sigma_{xy}^C \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{xy}^C = \frac{1}{2}(s_{16}^C \sigma_{xx}^C + s_{26}^C \sigma_{yy}^C + s_{66}^C \sigma_{xy}^C) \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{zz}^C = s_{13}^C \sigma_{xx}^C + s_{23}^C \sigma_{yy}^C + s_{36}^C \sigma_{xy}^C \quad (3.10)$$

где s_{ij} – компоненты матрицы упругих податливостей в лабораторной системе координат xuz ($x = 1, y = 2, z = 3$), а символ C принимает значения А или В.

Таким образом, имеется 12 линейных уравнений ((3.1)–(3.6) и (3.7)–(3.10)) $\times 2$ относительно 12-ти неизвестных $\varepsilon_{xx}^C, \varepsilon_{yy}^C, \varepsilon_{xy}^C, \sigma_{xx}^C, \sigma_{yy}^C, \sigma_{xy}^C$ ($C = A, B$).

Решение данной системы уравнений имеет вид

$$\varepsilon_{xx}^C = \varepsilon_{yy}^C = \alpha^C \delta \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{xy}^C = 0 \quad (3.12)$$

$$\sigma_{xx}^C = \alpha^C K_{xx} \delta \quad (3.13)$$

$$\sigma_{yy}^C = \alpha^C K_{yy} \delta \quad (3.14)$$

$$\sigma_{xy}^C = \alpha^C K_{xy} \delta \quad (3.15)$$

где

$$\alpha^A = f^B \quad (3.16)$$

$$\alpha^B = f^B - 1 \quad (3.17)$$

$$K_{xx} = \frac{\beta_{22} - \beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \quad (3.18)$$

$$K_{yy} = \frac{\beta_{11} - \beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \quad (3.19)$$

$$K_{xy} = \frac{s_{16}(\beta_{22} - \beta_{12}) + s_{26}(\beta_{11} - \beta_{12})}{s_{66}(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)} \quad (3.20)$$

$$\beta_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i6}s_{j6}}{s_{66}} \quad (3.21)$$

Деформация ε_{zz}^C и эффективный нормальный коэффициент Пуассона ν^* могут быть получены, исходя из соотношений (3.10), (3.13)–(3.21),

$$\varepsilon_{zz}^C = -\nu^* \alpha^C \delta \quad (3.22)$$

$$\nu^* = -\frac{\beta_{13}(\beta_{22} - \beta_{12}) + \beta_{23}(\beta_{11} - \beta_{12})}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \quad (3.23)$$

Таким образом, тензоры деформаций и напряжений могут быть записаны в следующем виде

$$\hat{\varepsilon}^C = \alpha^C \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\hat{\sigma}^C = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^C & \sigma_{xy}^C & 0 \\ \sigma_{xy}^C & \sigma_{yy}^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

с компонентами σ_{ij}^C , определяемыми соотношениями (3.13)–(3.21).

Следует отметить, что компоненты тензора деформаций, включая эффективный коэффициент Пуассона ν^* , инвариантны относительно поворота осей x и y в плоскости пластин, в то время как компоненты тензора напряжений ориентационно зависят.

Удельная упругая энергия компонентов структуры определяется соотношением

$$W^C = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^C \varepsilon_{xx}^C + \sigma_{yy}^C \varepsilon_{yy}^C) + \sigma_{xy}^C \times (\varepsilon_{xy}^C = 0) \quad (3.26)$$

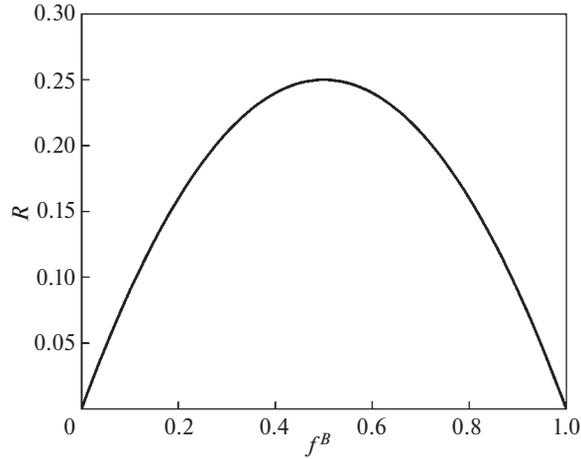


Рис. 2. Зависимость параметра R от объемной доли f^B .

Подставляя в (3.26) напряжения и деформации из (3.11)–(3.21), получаем

$$W^C = \frac{1}{2} K(\alpha^C \delta)^2 \quad (3.27)$$

где

$$K = K_{xx} + K_{yy} = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} - 2\beta_{12}}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2} \quad (3.28)$$

жесткость пластины при двухосной деформации.

Удельная упругая энергия структуры в целом равна

$$\bar{W} = (1 - f^B)W^A + f^B W^B = WR(f^B) \quad (3.29)$$

где $W = K\delta^2/2$ – упругая энергия отдельной пластины, двухосно деформированной с деформацией δ , а $R(f^B) = f^B(1 - f^B)$ – функция объемной доли компонента В, изменяющаяся от 0 до 0.25, см. рис. 2.

Из рис. 2 видно, что рассматриваемая пластинчатая структура имеет максимальную удельную упругую энергию, равную $W/4$, при равных объемных долях компонентов $f^A = f^B = 0.5$. При стремлении объемной долей одного из компонентов к нулю напряжения в ней повышаются, и ее удельная упругая энергия стремится к максимальной предельной величине W . Однако, вклад этой компоненты в общую энергию структуры, определяемый ее объемной долей, также стремится к нулю. Удельная упругая энергия другого компонента стремится к нулю вследствие понижения в ней уровня остаточных напряжений и, следовательно, общая упругая энергия структуры стремится к нулю. Таким образом, структуры с близкими объемными долями компонентов имеют большую упругую энергию, тогда как структуры с сильно различающимися объемными долями меньшую.

Все приведенные выше соотношения справедливы для двухкомпонентной пластинчатой структуры с любым типом упругой анизотропии при условии идентичности типов упругой анизотропии компонентов А и В, и равенства их упругих констант и совпадения главных осей упругой анизотропии.

Запись вышеприведенных формул упрощается, когда оси x и y совпадают с направлением главных напряжений в плоскости $xу$, то есть когда $K_{xy} = 0$ и, следовательно, $\sigma_{xy}^C = 0$, см. (3.15). Как следует из (3.20), (3.21) этот случай реализуется для ориентации, при которой выполняется условие:

$$s_{16}(s_{22} - s_{12}) + s_{26}(s_{11} - s_{12}) = 0 \quad (3.30)$$

При этом все формулы могут быть упрощены путем замены $\beta_{ij} \rightarrow s_{ij}$.

Упругие податливости s_{ij} в произвольной системе координат $xуz$ можно выразить через базовые упругие податливости S_{ij} как $s_{ij} = f(S_{ij}, \varphi, \theta, \psi)$, где φ, θ, ψ — углы Эйлера, то есть соответственно углы прецессии, нутации и собственного вращения лабораторной системы координат по отношению к базовой кристаллографической. В рассматриваемом случае ψ — это угол вращения осей x и y в плоскости пластины, то есть вокруг оси z . Из физического смысла ясно, что энергия пластин (как и компоненты тензора деформаций, см. (3.24)) определяется только двумя углами φ и θ , однако жесткости пластины и компоненты тензора напряжений, имеющие индексы x и y , зависят от выбранной лабораторной системы координат $xуz$, то есть от угла ψ . При заданных φ и θ соотношение (3.30) определяет угол поворота ψ осей x и y вокруг z для ориентации их вдоль осей главных напряжений в пластинах.

Далее будем рассматривать только случай, когда пластины А и В являются кубическими кристаллами.

4. Пластинчатая структура с кубической кристаллической решеткой. Как отмечалось выше, энергия пластин W , определяемая ее двухосной жесткостью K , не зависит от ψ , поэтому для простоты ниже будем рассматривать только такие системы координат $xуz$ для которых $\psi = 0$. Ориентационные преобразования компонент s_{ij} кубических кристаллов при $\psi = 0$ приведены в приложении.

Для кубических кристаллов целесообразно анализировать изменение энергии W в двух характеристических случаях, в которых $\psi = 0$, а φ имеет постоянное значение, 0° или 45° , и поэтому величина W определяется только поворотом оси z (нормаль к поверхности пластин) на угол θ . При таком вращении z последовательно совпадает со всеми низкоиндексными осями кубического кристалла.

Первый случай — когда ось x лабораторной системы координат совпадает с $[100]$ ($\varphi = 0$), а две другие y и z поворачиваются в плоскости (001) на угол θ (см. рис. 3,а), второй — когда ось x совпадает с $[1\bar{1}0]$ ($\varphi = 45^\circ$), а y и z поворачиваются на угол θ в плоскости $(1\bar{1}0)$ (см. рис. 3,б). Покажем, что в обоих случаях оси x и y совпадают с осями главных напряжений, лежащими в плоскости $xу$. Ось z априори является осью главного напряжения σ_{zz} поскольку все напряжения, в том числе касательные, с индексом z равны нулю.

Поскольку в рассматриваемых случаях $\psi = 0$, то для анализа можно использовать преобразования $s_{ij} = f(S_{ij}, \varphi, \theta, \psi = 0)$, приведенные в приложении. Из формул (6А), (7А) видно, что компонента $s_{26} = -s_{16}\cos^2\theta$ и, поэтому соотношение (3.30) может быть записано в виде

$$s_{16}[s_{22} - s_{12} - \cos^2\theta(s_{11} - s_{12})] = 0 \quad (4.1)$$

То есть (3.30) выполняется, когда $s_{16} = 0$. Поскольку $s_{16} = -S/2\sin 4\varphi\cos\theta$, то $s_{16} = 0$ при $\varphi = 45^\circ \times n$. Таким образом, условие (3.30) выполняется для обоих случаев, показанных на рис. 3, и соотношение (3.28) для жесткости пластины K может записано просто в упругих податливостях s_{ij}

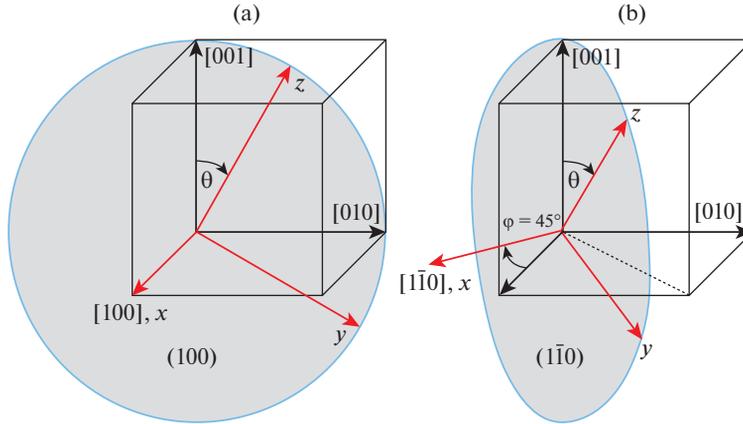


Рис. 3. Поворот лабораторной системы координат xyz относительно кристаллографической. (а) Ось поворота x совпадает с $[100]$, $\varphi = 0$. (б) Ось поворота x совпадает с $[1\bar{1}0]$, $\varphi = 45^\circ$.

$$K = \frac{s_{11} + s_{22} - 2s_{12}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2} \quad (4.2)$$

Для первого случая, подставляя упругие податливости из (1А)–(3А) и учитывая, что $\varphi = 0^\circ$, получаем

$$\frac{K}{E} = \frac{2(1 + \nu) - \frac{A}{2} \sin^2 2\theta}{1 - \nu^2 - \frac{A}{2} \sin^2 2\theta} \quad (4.3)$$

где $E = S_{11}^{-1}$ и $\nu = -S_{12}/S_{11}$ – соответственно, модуль Юнга и коэффициент Пуассона в кристаллографической системе координат $\langle 001 \rangle$, а $A = S/S_{11}$ – коэффициент упругой анизотропии, $S = S_{11} - S_{12} - 0.5S_{44}$ – коэффициент анизотропии.

Для второго случая, подставляя упругие податливости из (1А)–(3А) и учитывая, что $\varphi = 45^\circ$, получаем

$$\frac{K}{E} = \frac{2(1 + \nu) - \frac{A}{2} \left(1 + 3\cos^2 \theta + \frac{3}{4} \sin^2 2\theta\right)}{1 - \nu^2 + \nu A \cos^2 \theta + \frac{A^2}{4} \sin^2 2\theta - \frac{A}{2} \left(1 + \cos^2 \theta + \frac{3}{4} \sin^2 2\theta\right)} \quad (4.4)$$

Характеристическими направлениями в кубической кристаллической решетке являются низкоиндексные направления $[001]$, $[011]$ и $[111]$. Поэтому представляет интерес рассмотреть случаи, когда ось z совпадает с этими направлениями, а оси x и y совпадают с другими низкоиндексными направлениями. Такими ортогональными системами координат являются $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = [100], [010], [001]$; $[100], [01\bar{1}], [011]$ и $[1\bar{1}0], [11\bar{2}], [111]$. Первые две системы соответствуют случаю 1, описанному выше, то есть повороту системы координат xyz в плоскости (100) , см. рис. 3,а, а третья система – случаю 2, то есть повороту xyz в плоскости $(1\bar{1}0)$, см. рис. 3,б. Таким образом, во всех трех системах координат оси xyz совпадают с осями главных напряжений и полученные выше формулы (3.18), (3.19), (3.23), (3.28) могут быть упрощены путем подстановки $\beta_{ij} \rightarrow s_{ij}$,

Таблица 1. Формулы для нормализованных упругих жесткостей K_{xx}/E , K_{yy}/E , K/E и эффективного коэффициента Пуассона ν^* для низкоиндексных кристаллографических ориентаций

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	[100],[010],[001]	[100],[01 $\bar{1}$],[011]	[1 $\bar{1}$ 0],[11 $\bar{2}$],[111]
$\frac{K_{xx}}{E}$	$\frac{1}{1-\nu}$	$\frac{1+\nu-A/2}{1-\nu^2-A/2}$	$\frac{1}{1-\nu-A/3}$
$\frac{K_{yy}}{E}$	$\frac{1}{1-\nu}$	$\frac{1+\nu}{1-\nu^2-A/2}$	$\frac{1}{1-\nu-A/3}$
$\frac{K}{E}$	$\frac{2}{1-\nu}$	$\frac{2(1+\nu)-A/2}{1-\nu^2-A/2}$	$\frac{2}{1-\nu-A/3}$
ν^*	$\frac{2\nu}{1-\nu}$	$\frac{2\nu(1+\nu-A/2)-A/2}{1-\nu^2-A/2}$	$\frac{2(\nu-A/3)}{1-\nu-A/3}$

а упругая жесткость K_{xy} и касательное напряжение σ_{xy}^C равны нулю. Проводя данную подстановку и используя ориентационные преобразования $s_{ij} = f(S_{ij}, \varphi, \theta, \psi = 0)$ из приложения были получены формулы для нормализованных упругих жесткостей K_{xx}/E , K_{yy}/E , K/E , и эффективного коэффициента Пуассона ν^* , см. табл. 1. Следует отметить, что формулы для K/E и ν^* , в отличие от формул для K_{xx}/E и K_{yy}/E , зависят только от направления $\bar{z} = [hkl]$, поэтому ниже будем использовать обозначение $K(\bar{z}) = K_{hkl}$.

На рис. 4 представлена зависимость нормализованных упругих жесткостей K_{001}/E , K_{011}/E и K_{111}/E от коэффициента упругой анизотропии A и коэффициента Пуассона ν , аналогично диаграмме $\nu - A$, предложенной авторами ранее в работе [7]. Видно, что величины упругих жесткостей K_{001} , K_{011} и K_{111} повышаются как с изменением A от отрицательных значений до предельного положительного значения $A = 1 + \nu$ (при данном ν), так и при увеличении ν от нуля до предельного значения 0.5. Причем при стремлении $\nu \rightarrow 0.5$ и $A \rightarrow 1.5$, то есть к углу диаграммы $\nu - A$ величины упругих жесткостей K_{011} и K_{111} стремятся к бесконечности поскольку знаменатели формул для K_{011} и K_{111} стремятся к нулю. Соотношение величин K_{001} , K_{011} и K_{111} определяется знаком A . При $A < 0$ выполняется неравенство $K_{001} > K_{011} > K_{111}$, при $A = 0$ все жесткости равны $K_{001} = K_{011} = K_{111}$, а при $A > 0$ неравенство меняет знак $K_{001} < K_{011} < K_{111}$. Независимо от знака A различие между величинами K_{001} , K_{011} и K_{111} увеличивается с повышением ν .

5. Применение полученного решения для реальных структур. Полученное решение было применено для анализа анизотропии энергии остаточных напряжений в двухкомпонентных пластинчатых структурах следующих типов: в рафт-структуре γ/γ' монокристаллических никелевых жаропрочных сплавов и в многослойных эрозионно-стойких покрытиях, состоящих из множества чередующихся нанослоев ZrN и CrN.

Никелевые жаропрочные сплавы имеют двухфазную γ/γ' -микроструктуру, где матрицей является сложнелегированный γ -твердый раствор никеля (ГЦК, кубическая структура A1), а упрочнителем – дисперсные γ' -выделения (фаза на основе интерметаллида Ni_3Al с упорядоченной кубической структурой L1₂). Кристаллические решетки γ - и γ' -фаз подобны, так как в обоих фазах атомы расположены в узлах ГЦК-решетки со структурой A1, при этом γ - и γ' -решетки имеют одинаковую кристаллографическую ориентацию, то есть для них выполняется следующее ориентационное

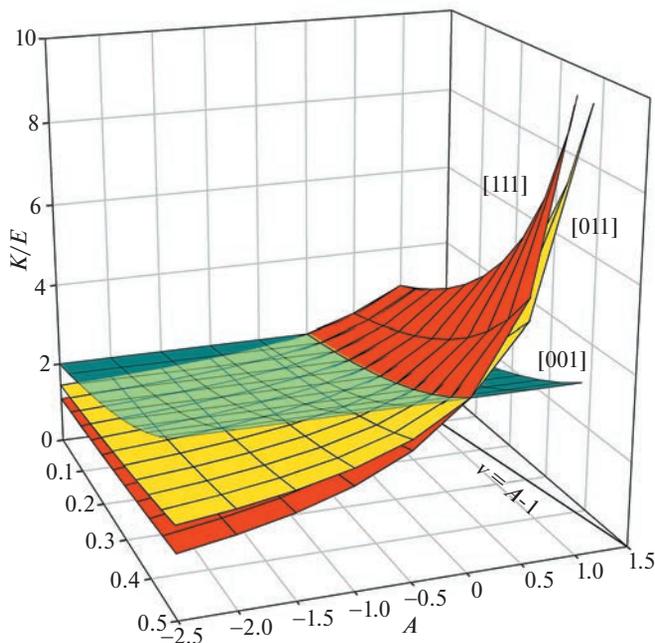


Рис. 4. Зависимость нормализованных упругих жесткостей K_{001}/E , K_{011}/E и K_{111}/E от коэффициента упругой анизотропии A и коэффициента Пуассона ν .

соотношение $\{001\}_{\gamma} \parallel \{001\}_{\gamma'}$ и $\langle 100 \rangle_{\gamma} \parallel \langle 100 \rangle_{\gamma'}$. Рафт-структура γ/γ' формируется в никелевых жаропрочных сплавах в процессе высокотемпературной ползучести вследствие направленной коалесценции дисперсных выделений γ' -фазы. В результате этого процесса образуется периодическая структура, состоящая из протяженных γ - и γ' -пластин, разделенных (001) ориентированными интерфейсами. Образующиеся γ' -пластины термодинамически стабильны и эффективно тормозят движение деформационных дислокаций, таким образом многократно замедляя скорость ползучести сплава. Одним из факторов высокой термодинамической стабильности (001) ориентированной рафт-структуры является ее низкая удельная упругая энергия \bar{W} . В настоящей работе рассчитывали упругую энергию остаточных (мисфитных) напряжений в рафт-структуре [001] монокристаллов никелевого жаропрочного сплава CMSX-4 [8] после 150 часового испытания на ползучесть при температуре 1100°C и напряжении 120 МПа, проведенного в работе [9]. Для расчета \bar{W} требуются следующие данные для сплава CMSX-4, соответствующие условиям испытаний: упругие податливости S_{ij} γ - и γ' -фаз, объемная доля γ' -фазы $f^{\gamma'}$, и размерный мисфит γ - и γ' -пластин δ . Согласно [10] S_{ij} γ - и γ' -фаз очень близки и при 1100°C равны $S_{11} = 14.27 \text{ ТПа}^{-1}$, $S_{12} = -6.01 \text{ ТПа}^{-1}$, $S_{44} = 11.51 \text{ ТПа}^{-1}$ и производные от них $E = 70.1 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.421$ и $A = +1.02$; $f^{\gamma'}$ (1100°C) = 60.1% об. Размерный мисфит γ - и γ' -пластин δ в состоянии после ползучести является суммой мисфита кристаллических решеток изолированных γ - и γ' -фаз δ_0 , и деформационного мисфита δ_d , обусловленного существенно большей пластической деформацией менее прочной γ -фазы, чем упрочняющей γ' -фазы. Согласно результатам из-

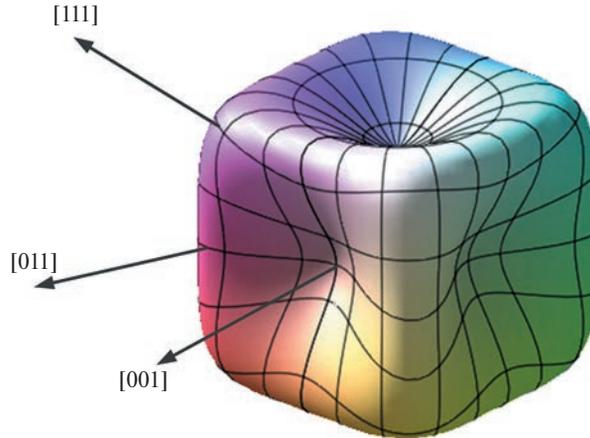


Рис. 5. Представление ориентационной зависимости упругой энергии рафт-структуры $\gamma/\gamma' \bar{W} = f(\varphi, \theta)$ сплава CMSX-4 в сферической системе координат.

мерений методом нейтронной дифракции δ_0 сплава CMSX-4 при 1000°C равен -0.22% [11], а согласно рентгеноструктурным исследованиям δ_d сплава CMSX-4 после указанного выше испытания на ползучесть равен $+0.31\%$ [9]. Таким образом, результирующий размерный мисфит $\delta = -0.22\% + 0.31\% = +0.09\%$.

На рис. 5 показан 3D-график ориентационной зависимости $\bar{W} = f(\varphi, \theta)$, рассчитанный с использованием вышеуказанных численных характеристик сплава CMSX-4. Видно, что при представлении в сферической системе координат поверхность $\bar{W} = f(\varphi, \theta)$ имеет форму куба с вогнутыми внутрь гранями. Диагонали куба, вдоль которых \bar{W} имеет максимальное значение, совпадают с кристаллографическими направлениями $\langle 111 \rangle$, а впадины на гранях куба, где \bar{W} минимально, совпадают с направлениями $\langle 001 \rangle$. Кристаллографические направления $\langle 011 \rangle$ проходят через середину ребер куба, где \bar{W} имеет промежуточное значение.

Более детально ориентационная зависимость упругой энергии может быть проанализирована в плоских сечениях поверхности $\bar{W} = f(\varphi, \theta)$, как представлено на рис. 6. Зависимости $\bar{W} = f(\varphi = 0, \theta)$ и $\bar{W} = f(\varphi = 45^\circ, \theta)$, соответствующие сечениям (100) и $(1\bar{1}0)$, построены в полярных координатах с использованием формул (3.27), (3.29), (4.3), (4.4). Из рис. 6 видно, что в этих сечениях лежит множество низкоиндексных направлений, которые обычно представляют наибольший интерес. Из рис. 6,а, зависимость $\bar{W} = f(\varphi = 0, \theta)$, и рис. 6,б, зависимость $\bar{W} = f(\varphi = 45^\circ, \theta)$, видно, что энергия рафт-структуры сильно анизотропна. Минимально ее значение $2.35 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3$ соответствует нормали [001] к плоскости интерфейса γ/γ' , максимальное $5.68 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3$ (в 2.4 раза выше, чем для [001]) соответствует нормали [111] и промежуточное значение $5.06 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3$ (в 2.2 раза выше, чем для [001]) соответствует нормали [011]. Очевидно, что такая сильная анизотропия упругой энергии рафт-структуры стабилизирует ее в низкоэнергетической (001) ориентации, что оказывает положительный эффект на сопротивление ползучести [001] монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов при высоких температурах.

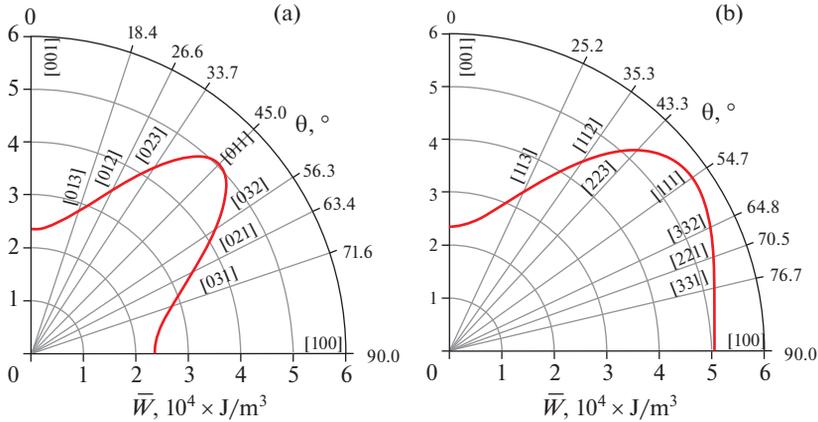


Рис. 6. Представление ориентационной зависимости упругой энергии рафт-структуры $\gamma/\gamma \bar{W} = f(\varphi, \theta)$ сплава CMSX-4 в полярной системе координат. (а) Вращение на угол θ вокруг оси $[100]$, сечение (100) , $\varphi = 0^\circ$. (б) Вращение на угол θ вокруг оси $[1\bar{1}0]$, сечение $(1\bar{1}0)$, $\varphi = 45^\circ$.

Покрyтия нитридов переходных металлов имеют высокую температуру плавления, высокую твердость, отличную физическую и химическую стабильность, что позволяет использовать эти покрyтия для защиты деталей. Такие покрyтия наносят методом ионно-плазменного напыления, в процессе которого образуются текстурированные покрyтия с высокими остаточными напряжениями. Служебные свойства покрyтий существенным образом зависят от кристаллографического направления их текстуры, которое определяется рядом факторов, таких как анизотропия скорости роста кристаллов, анизотропия энергии остаточных напряжений, кристаллографическая ориентация подложки и др. В настоящей работе будем рассматривать только фактор анизотропии энергии остаточных напряжений применительно к перспективным многослойным эрозиянностойким покрyтиям ZrN/CrN, состоящим из чередующихся нанослоев ZrN и CrN. Оба эти нитрида имеют кубическую кристаллическую решетку B1, структура типа NaCl. Для расчета энергии остаточных напряжений, как и вышеприведенном примере, требуются упругие податливости слоев S_{ij} , объемная доля одного из слоев, например, CrN, и размерное несоответствие слоев δ . Согласно результатам работ [12, 13] упругие податливости ZrN и CrN близки и соответственно равны: $S_{11}^{Zr} = 2.26 \text{ ТПа}^{-1}$, $S_{12}^{Zr} = -0.355 \text{ ТПа}^{-1}$, $S_{44}^{Zr} = 7.25 \text{ ТПа}^{-1}$ для ZrN [12] и $S_{11}^{Cr} = 2.1 \text{ ТПа}^{-1}$, $S_{12}^{Cr} = -0.27 \text{ ТПа}^{-1}$, $S_{44}^{Cr} = 10 \text{ ТПа}^{-1}$ для CrN [13]. Далее в расчетах будем использовать величины упругих податливостей, усредненные как $\bar{S}_{ij} = (S_{ij}^{ZrN} + S_{ij}^{CrN})/2$: $\bar{S}_{11} = 2.18 \text{ ТПа}^{-1}$, $\bar{S}_{12} = -0.312 \text{ ТПа}^{-1}$, $\bar{S}_{44} = 8.62 \text{ ТПа}^{-1}$ и производные от них $E = 459 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.143$ и $A = -0.834$. В работе [5] методом рентгеноструктурного анализа исследовали напыленное покрyтие ZrN/CrN и получили следующие значения остаточных напряжений: $\sigma_{xx}^{Zr} = -550 \text{ МПа}$ для слоя и ZrN и $\sigma_{xx}^{Cr} = +290 \text{ МПа}$ для слоя CrN. Подставляя данное значение в уравнение равновесия (3.1), получаем объемную долю слоя CrN: $f^{CrN} = \sigma_{xx}^{Zr}/(\sigma_{xx}^{Zr} - \sigma_{xx}^{Cr}) = -550 \text{ МПа}/(-550 \text{ МПа} - 290 \text{ МПа}) \approx 65\% \text{ об.}$ Размерный мисфит δ в покрyтии ZrN/CrN может быть оценен по формуле (3.13) как $\delta = \sigma_{xx}^{Zr}/f^{CrN} K_{xx}$. Согласно работе [14] преимущественным направлением текстуры покрyтия ZrN/CrN является

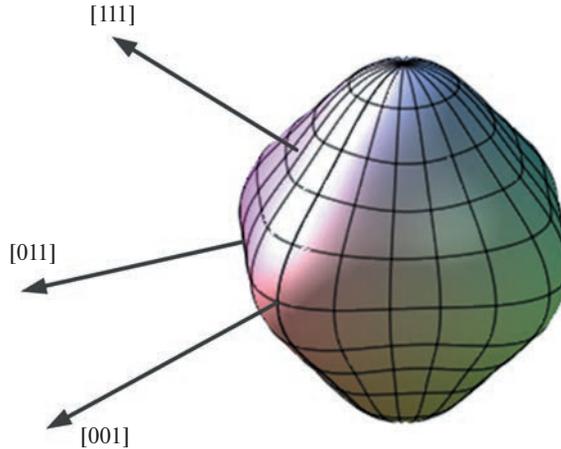


Рис. 7. Представление ориентационной зависимости упругой энергии $\bar{W} = f(\varphi, \theta)$ многослойного эрозийноустойчивого нанопокрyтия ZrN/CrN в сферической системе координат.

[111], поэтому используя соответствующую формулу для K_{xx} из табл. 1, выражение для δ может быть записано в виде $\delta = \sigma_{xx}^{Zr}/E \times (1 - \nu - A/3) / f^{CrN}$. Подставляя сюда численные значения получаем $\delta \approx -0.21\%$, то есть в естественном состоянии слой ZrN длиннее чем слой CrN. Это согласуется с тем фактом, что размер элементарной ячейки ZrN больше чем CrN [5].

На рис. 7 показан 3D-график ориентационной зависимости $\bar{W} = f(\varphi, \theta)$, рассчитанный с использованием вышеуказанных численных характеристик многослойного покрытия ZrN/CrN. Видно, что при представлении в сферической системе координат поверхность $\bar{W} = f(\varphi, \theta)$ имеет форму близкую к октаэдру. Диагонали октаэдра, вдоль которых \bar{W} имеет максимальное значение, совпадают с кристаллографическими направлениями $\langle 001 \rangle$, а нормали на гранях октаэдра, где \bar{W} минимально, совпадают с направлениями $\langle 111 \rangle$. Кристаллографические направления $\langle 011 \rangle$ проходят через середину ребер октаэдра, где \bar{W} имеет промежуточное значение.

На рис. 8 ориентационная зависимость упругой энергии многослойного покрытия ZrN/CrN представлена в полярной системе координат, на рис. 8a – зависимость $\bar{W} = f(\varphi = 0, \theta)$, соответствующая сечению 3D-графика на рис. 7 плоскостью (100), и на рис. 8b – зависимость $\bar{W} = f(\varphi = 45^\circ, \theta)$, соответствующая сечению 3D-графика плоскостью $(1\bar{1}0)$. Видно, что упругая энергия многослойного (111) ориентированного покрытия ZrN/CrN на порядок выше, чем упругая энергия (001) ориентированной рафт-структуры сплава CMSX-4, что объясняется как большим по абсолютной величине размерным мисфитом, $|\delta^{ZrN/CrN}| \approx 0.21\%$ против $\delta^{CMSX-4} \approx 0.09\%$, так и значительно большей жесткостью слоев нитридов, $K_{111}^{ZrN/CrN} \approx 720$ ГПа против $K_{001}^{CMSX-4} \approx 121$ ГПа. В отличие от рафт-структуры сплава CMSX-4 с положительным коэффициентом анизотропии $A = +1.02$, для которого выполняется неравенство $\bar{W}_{001}^{CMSX-4} < \bar{W}_{011}^{CMSX-4} < \bar{W}_{111}^{CMSX-4}$, для многослойного покрытия ZrN/CrN с отрицательным коэффициентом анизотропии $A = -0.834$ выполняется обратное неравенство

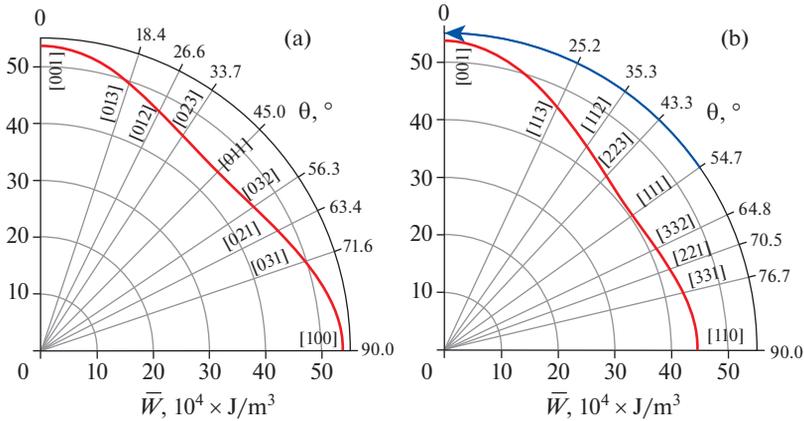


Рис. 8. Ориентационная зависимость упругой энергии $\bar{W} = f(\varphi, \theta)$ многослойного покрытия ZrN/CrN в полярной системе координат. (а) Вращение на угол θ вокруг оси [100], сечение (100), $\varphi = 0^\circ$. (б) Вращение на угол θ вокруг оси $[1\bar{1}0]$, сечение $(1\bar{1}0)$, $\varphi = 45^\circ$.

$\bar{W}_{001}^{\text{ZrN/CrN}} > \bar{W}_{011}^{\text{ZrN/CrN}} > \bar{W}_{111}^{\text{ZrN/CrN}}$. Кроме того, степень анизотропии упругой энергии покрытия ZrN/CrN значительно меньше, чем для сплава CMSX-4, характеристическое отношение энергий для покрытия ZrN/CrN равно $\bar{W}_{001}^{\text{ZrN/CrN}} / \bar{W}_{111}^{\text{ZrN/CrN}} \approx 1.3$, тогда как для сплава CMSX-4 обратное характеристическое отношение равно $\bar{W}_{111}^{\text{CMSX-4}} / \bar{W}_{001}^{\text{CMSX-4}} \approx 2.4$. Такая низкая анизотропия упругой энергии покрытия ZrN/CrN возможно является причиной того, что при определенных условиях напыления покрытия может преобладать не фактор упругой энергии, а фактор ростовой анизотропии (более быстрый рост кубических кристаллов в направлении [001]), в результате чего в покрытиях ZrN/CrN, как и в ряде других нитридных покрытий, образуется не [111] ориентированная текстура, а текстуры с осями [113] или [001] [14–16], то есть происходит поворот оси текстуры в последовательности [111] \rightarrow [113] \rightarrow [001], как показано дуговой стрелкой на рис. 8,б.

Упругое решение, полученное для двухкомпонентных структур, справедливо и для однослойных покрытий, если величину $R(f^B)$ в формуле (3.29) положить равной 1. Поэтому в настоящей работе с использованием полученного решения была также проанализирована анизотропия упругой энергии нескольких однослойных покрытий, нанесенных различными методами. Поскольку для большинства представленных в литературе покрытий размерный мисфит δ не известен, анализировалась только величина нормализованной жесткости K/E , которая напрямую связана с энергией W . На рис. 9 представлены ориентационные зависимости нормализованной жесткости K/E для трех типов покрытий: медного Cu, вольфрамового W и покрытия из нитрида титана TiN. Расчет зависимостей осуществляли по формулам (4.3), (4.4) с использованием литературных данных для упругих податливостей, для Cu и W из [17], и для TiN из [18]. Из рис. 9 видно, что для медного покрытия с положительным коэффициентом упругой анизотропии $A = +0.98$ выполняется неравенство $K_{001}^{\text{Cu}}/E^{\text{Cu}} < K_{011}^{\text{Cu}}/E^{\text{Cu}} < K_{111}^{\text{Cu}}/E^{\text{Cu}}$, для покрытия TiN с $A = -2.01$ справедливо обратное неравенство $K_{001}^{\text{TiN}}/E^{\text{TiN}} > K_{011}^{\text{TiN}}/E^{\text{TiN}} > K_{111}^{\text{TiN}}/E^{\text{TiN}}$, а для вольфрамового покрытия с $A \approx 0$ величина K/E практически изотропна, $K_{001}^{\text{W}}/E^{\text{W}} \approx K_{011}^{\text{W}}/E^{\text{W}} \approx K_{111}^{\text{W}}/E^{\text{W}}$.

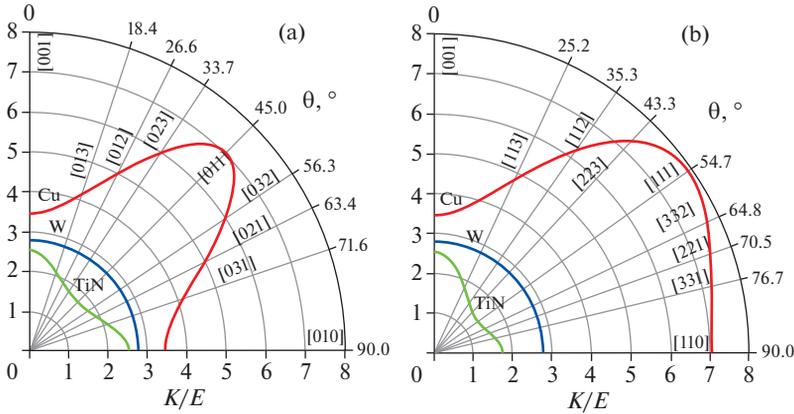


Рис. 9. Ориентационные зависимости нормализованной жесткости $K/E = f(\theta)$ для трех типов покрытий – Cu (красные линии), W (синие линии) и TiN (зеленые линии). (a) – поворот осей x и y в плоскости (100) . (b) – поворот осей x и y в плоскости $(1\bar{1}0)$.

Как следует из графика на рис. 4 соотношение величин нормализованных упругих жесткостей покрытий K_{001}/E и K_{111}/E , а, следовательно, и их упругих энергий W_{001} и W_{111} , зависит от знака и величины коэффициента упругой анизотропии A , и величины коэффициента Пуассона ν . Поэтому следует ожидать корреляцию кристаллографического направления текстуры покрытий с величинами этих упругих характеристик. Для анализа этой корреляции для ряда покрытий был построен 3D-график, на котором горизонтальные оси показывают величины A и ν материала покрытия, а вертикальная ось – соответствующее отношение K_{111}/K_{001} . Видно, что покрытия с положительным A (Ni, Cu, Ta), для которых отношение $K_{111}/K_{001} > 1$, показывают преимущественно текстуру $\langle 001 \rangle$, тогда как покрытия с отрицательным A (Cr, CrN, TiN, ZrN), для которых отношение $K_{111}/K_{001} < 1$, показывают преимущественно текстуру $\langle 111 \rangle$. Для построения данного графика использовались данные из следующих литературных источников: упругие константы для Ni, Cu, Ta и Cr из [17], TiN из [18], CrN из [13] и ZrN из [12]; данные о преимущественной ориентации текстуры для Ni из [19, 20], Cu из [20], Ta из [21], Cr из [20], CrN из [22], TiN из [15, 16] и ZrN из [16].

6. Упругая анизотропии с условием $S_{ij}^A = kS_{ij}^B$. Рассмотрим кратко в данном разделе пластинчатую структуру, аналогичную рассмотренной ранее в разделе 3, но не с равными упругими податливостями компонентов, а с пропорциональными, то есть для которых выполняется соотношение $S_{ij}^A = kS_{ij}^B$. Поскольку упругие податливости в лабораторной системе координат s_{ij} связаны с S_{ij} линейной однородной связью, то для них справедливо аналогичное соотношение $s_{ij}^A = ks_{ij}^B$. Такое же соотношение следует из (3.21) для β_{ij} : $\beta_{ij}^A = k\beta_{ij}^B$. Используя соотношение $s_{ij}^A = ks_{ij}^B$ и (3.1)–(3.10), получаем формулы для компонент тензора деформаций и тензора напряжений, аналогичные (3.11)–(3.15), (3.22)

$$\epsilon_{xx}^C = \epsilon_{yy}^C = \alpha^C \delta \tag{6.1}$$

$$\epsilon_{xy}^C = 0 \tag{6.2}$$

$$\sigma_{xx}^C = \alpha^C K_{xx}^C \delta \quad (6.3)$$

$$\sigma_{yy}^C = \alpha^C K_{yy}^C \delta \quad (6.4)$$

$$\sigma_{xy}^C = \alpha^C K_{xy}^C \delta \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_{zz}^C = -\nu^* \alpha^C \delta \quad (6.6)$$

Однако величины сомножителей α^C здесь другие

$$\alpha^A = \frac{kf^B}{1 + (1 - k)f^B} \quad (6.7)$$

$$\alpha^B = \frac{1 - f^B}{1 + (1 - k)f^B} \quad (6.8)$$

Упругие жесткости K_{xx}^C , K_{yy}^C и K_{xy}^C могут быть рассчитаны, используя формулы, аналогичные (3.18)–(3.21)

$$K_{xx}^C = \frac{\beta_{22}^C - \beta_{12}^C}{\beta_{11}^C \beta_{22}^C - (\beta_{12}^C)^2} \quad (6.9)$$

$$K_{yy}^C = \frac{\beta_{11}^C - \beta_{12}^C}{\beta_{11}^C \beta_{22}^C - (\beta_{12}^C)^2} \quad (6.10)$$

$$K_{xy}^C = \frac{s_{16}^C(\beta_{22}^C - \beta_{12}^C) + s_{26}^C(\beta_{11}^C - \beta_{12}^C)}{s_{66}^C(\beta_{11}^C \beta_{22}^C - (\beta_{12}^C)^2)} \quad (6.11)$$

$$\beta_{ij}^C = s_{ij}^C - \frac{s_{i6}^C s_{j6}^C}{s_{66}^C} \quad (6.12)$$

При этом для упругих жесткостей выполняются соотношения пропорциональности

$$K_{xx}^B = k K_{xx}^A \quad (6.13)$$

$$K_{yy}^B = k K_{yy}^A \quad (6.14)$$

$$K_{xy}^B = k K_{xy}^A \quad (6.15)$$

Формула для эффективного нормального коэффициента Пуассона ν^* имеет вид, подобный (3.23)

$$\nu^* = -\frac{\beta_{13}^C(\beta_{22}^C - \beta_{12}^C) + \beta_{23}^C(\beta_{11}^C - \beta_{12}^C)}{\beta_{11}^C \beta_{22}^C - (\beta_{12}^C)^2} \quad (6.16)$$

Причем в силу пропорциональной связи $\beta_{ij}^A = k \beta_{ij}^B$ величина ν^* не зависит от того какие β_{ij} используются в расчете, β_{ij}^A или β_{ij}^B .

Удельная упругая энергия компонентов структуры определяется соотношением (3.26) и записывается как

$$W^C = \frac{1}{2} K^C (\alpha^C \delta)^2 \quad (6.17)$$

$$K^C = K_{xx}^C + K_{yy}^C = \frac{\beta_{11}^C + \beta_{22}^C - 2\beta_{12}^C}{\beta_{11}^C\beta_{22}^C - (\beta_{12}^C)^2} \quad (6.18)$$

Здесь K^C жесткость соответствующей пластины (А или В) при двухосной деформации, при этом как и для других жесткостей для K^A и K^B справедливо соотношение

$$K^B = kK^A \quad (6.19)$$

Согласно (3.29), (6.7), (6.8) и (6.17) удельная упругая энергия структуры в целом равна

$$\bar{W} = (1 - f^B)W^A + f^B W^B = W^A \frac{(k + 1 - f^B)(1 - f^B)}{kf^B} \quad (6.20)$$

В случае $k = 1$ или $S_{ij}^A = S_{ij}^B = S_{ij}$ формулы, представленные в данном разделе, будут иметь вид формул, приведенных в разделе 3.

7. Выводы. Получено аналитическое решение для остаточных напряжений и их энергии в периодической двухкомпонентной пластинчатой структуре, где компоненты имеют идентичный тип упругой анизотропии, одинаковые или пропорциональные упругие константы и совпадающие главные оси упругой анизотропии. Полученное решение применено для анализа анизотропии упругой энергии таких кристаллических структур как рафт-структура γ/γ' монокристаллических никелевых жаропрочных сплавов, многослойных эрозионностойких нанопокровтий ZrN/CrN и однослойных покровтий различного типа. Показано, что сильная анизотропия упругой энергии стабилизирует низкоэнергетическую (001) ориентацию рафт-структуры [001] монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов. Анизотропия упругой энергии многослойных нанопокровтий ZrN/CrN не столь сильно выражена, поэтому преимущественное направление текстуры покровтия [111], соответствующее наименьшей упругой энергии, может изменяться на [113] или [001] в зависимости от условий нанесения покровтий. В целом для покровтий наблюдается корреляция кристаллографического направления их текстуры и анизотропии упругой энергии, характер которой определяется величинами коэффициента упругой анизотропии A и коэффициента Пуассона ν .

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-29-01200).

Приложение. Ниже приведены ориентационные зависимости упругих податливостей кубического кристалла $s_{ij} = f(S_{ij}, \varphi, \theta, \psi = 0)$, где φ , θ и ψ – углы Эйлера. В настоящей работе рассматриваются только такие ориентации, для которых $\psi = 0$. Приведенные формулы могут быть получены как с использованием общего преобразования упругих податливостей, описанное в [23], так и специального упрощенного преобразования для кубических кристаллов, предложенного в [24]. Матрица преобразования в углах Эйлера представлена в [25].

$$s_{11} = S_{11} - \frac{S}{2} \sin^2 2\varphi \quad (1A)$$

$$s_{22} = S_{11} - \frac{S}{2} (\sin^2 2\varphi \cos^4 \theta + \sin^2 2\theta) \quad (2A)$$

$$s_{12} = S_{12} + \frac{S}{2} \sin^2 2\varphi \cos^2 \theta \quad (3A)$$

$$s_{13} = S_{12} + \frac{S}{2} \sin^2 2\varphi \sin^2 \theta \quad (4A)$$

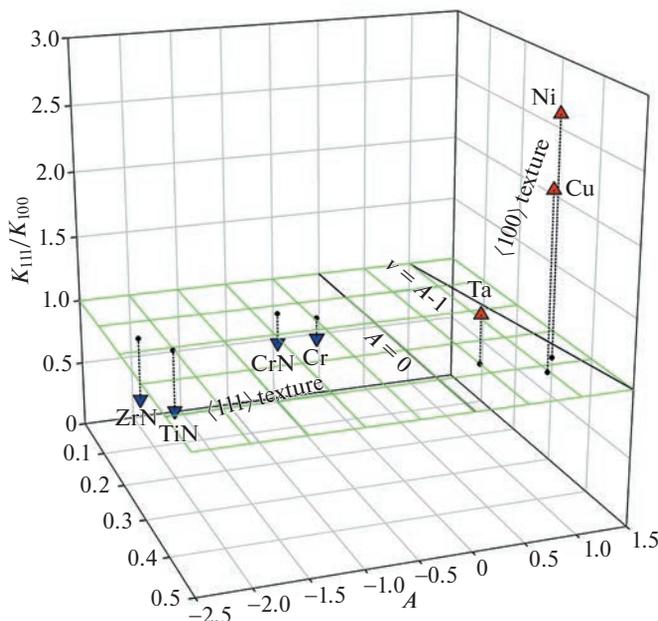


Рис. 10. Корреляция преимущественной ориентации текстуры покрытий кубических металлов и нитридов с их упругими характеристиками ν и A . Сравни с графиком на рис. 4.

$$s_{23} = S_{12} + \frac{S}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \right) \sin^2 2\theta \quad (5A)$$

$$s_{16} = -\frac{S}{2} \sin 4\varphi \cos \theta \quad (6A)$$

$$s_{26} = \frac{S}{2} \sin 4\varphi \cos^3 \theta \quad (7A)$$

$$s_{36} = \frac{S}{4} \sin 4\varphi \sin \theta \sin 2\theta \quad (8A)$$

$$s_{66} = S_{44} + 2S \times \sin^2 2\varphi \cos^2 \theta \quad (9A)$$

где $S = S_{11} - S_{12} - S_{44}/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tabatabaieian A., Ghasemi A.R., Shokrieh M.M. et al.* Residual stress in engineering materials: A review // *Adv. Eng. Mater.* 2022. V. 24. № 3. P. 2100786. <https://doi.org/10.1002/adem.202100786>
2. *Wang X., Zurob H.S., Xu G. et al.* Influence of microstructural length scale on the strength and annealing behavior of pearlite, bainite, and martensite // *Metall. Mater. Trans. A.* 2013. V. 44. P. 1454–1461. <https://doi.org/10.1007/s11661-012-1501-1>

3. Appel F., Clemens H., Fischer F. Modeling concepts for intermetallic titanium aluminides. *Prog. Mater. Sci.* 2016. V. 81. P. 55–124.
<https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2016.01.001>
4. Svetlov I.L., Kuzmina N.A., Neiman A.V. et al. Effect of the rate of solidification on the microstructure, phase composition, and strength of Nb/Nb₅Si₃ in-situ composites // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2015. V. 79. P. 1146–1150.
<https://doi.org/10.3103/S1062873815090245>
5. Muboyadzhyan S.A., Aleksandrov D.A., Gorlov D.S. Ion-plasma erosion-resistant nanocoatings based on metal carbides and nitrides // *Russ. Metall.* 2010. V. 2010. P. 790–799.
<https://doi.org/10.1134/S0036029510090077>
6. Epishin A., Link T., Bruckner U., Portella P.D. Evolution of the γ/γ' -microstructure during high temperature creep of a nickel-base superalloy // *Acta Mater.* 2000. V. 48. P. 4169–4177.
[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(00\)00197-X](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00197-X)
7. Епишин А.И., Лисовенко Д.С. Экстремальные значения коэффициента Пуассона кубических кристаллов // *ЖТФ.* 2016. Т. 86. № 10. С. 74–82.
8. Harris K., Erickson G.L., Sikkenga S.L. et al. Development of the rhenium containing superalloys CMSX-4 & CM 186 LC for single crystal blade and directionally solidified vane applications in advanced turbine engines // *Superalloys.* 1992. Warrendale, PA: TMS. P. 297–306.
https://doi.org/10.7449/1992/Superalloys_1992_297_306
9. Epishin A., Link T., Brückner U. Microstructural stability of CMSX-4 and CMSX-10 under high temperature creep conditions. *Materials for Advanced Power Engineering, FZ Jülich, 2006*, P. 507–520.
10. Epishin A., Fedelich B., Finn M., Künecke G., Rehmer B., Nolze G., Leistner C., Petrushin N., Svetlov I. Investigation of elastic properties of the single-crystal nickel-base superalloy CMSX-4 in the temperature interval between room temperature and 1300°C // *Crystals.* 2021. V. 11. P. 152.
<https://doi.org/10.3390/cryst11020152>
11. Glatzel U. *Microstructure and internal strains of undeformed and creep deformed samples of a nickel-base superalloy.* Berlin.: Verlag Dr. Köster, 1994. 80 p.
12. Chen X.-J., Struzhkin V.V., Wu Z. et al. Hard superconducting nitrides // *PNAS USA.* 2005. V. 102. № 9. P. 3198–3201.
<https://doi.org/10.1073/pnas.0500174102>
13. Antonov V., Jordanova I. First principles study of crystallographic structure and elastic properties of chromium // *AIP Conf. Proc.* 2010. V. 1203. P. 1149–1154.
<https://doi.org/10.1063/1.3322328>
14. Samim P.M., Fattah-alhosseini A., Elmkhah H., Imantalab O. Nanoscale architecture of ZrN/CrN coatings: microstructure, composition, mechanical properties and electrochemical behavior // *J. Mater. Res. Technol.* 2021. V. 15. P. 542–560.
<https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2021.08.018>
15. McKenzie D.R., Yin Y., McFall W.D., Hoang N.H. The orientation dependence of elastic strain energy in cubic crystals and its application to the preferred orientation in titanium nitride thin films // *J. Phys.: Condens. Matter.* 1996. V. 8. P. 5883–5890.
<https://doi.org/10.1088/0953-8984/8/32/008>
16. Betsofen S.Y., Ashmarin A.A., Petrov L.M., Grushin I.A., Lebedev M.A. Effect of the ion-plasma process parameters on the texture and properties of TiN and ZrN coatings // *Russ. Metall.* 2021. V. 2021. P. 1238–1244.
<https://doi.org/10.1134/S0036029521100037>
17. Second and higher order elastic constants // Ed. by D.F. Nelson. Springer, 1992. V. 29a of *Landolt-Börnstein – Group III Condensed Matter.*
<https://doi.org/10.1007/b44185>
18. Kim J.O., Achenbach J.D., Mirkarimi P.B. et al. Elastic constants of single crystal transition metal nitride films measured by line focus acoustic microscopy // *J. Appl. Phys.* 1992. V. 72. P. 1805–1811.
<https://doi.org/10.1063/1.351651>
19. Sampath S., Herman H. Rapid solidification and microstructure development during plasma spray deposition // *J. Therm. Spray Technol.* 1996. V. 5. P. 445–456.
<https://doi.org/10.1007/BF02645275>

20. *Ковенский И.М., Поветкин В.В.* Металловедение покрытий, М.: СП Интермет Инжиниринг, 1999. 296 с.
21. *Гончаров О.Ю., Ильин И.А., Титорев Д.Б., Титорова Д.В.* Текстуры покрытий молибдена, тантала и борида гафния, полученных химическим газофазным осаждением // Перспективные материалы. 2008. № 4. С. 69–73.
22. *Kirchlechner C., Martinschitz K.J., Daniel R. et al.* Residual stresses and thermal fatigue in CrN hard coatings characterized by high-temperature synchrotron X-ray diffraction // Thin Solid Films. 2010. V. 518. № 8. P. 2090–2096.
<https://doi.org/10.1016/j.tsf.2009.08.011>
23. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
24. *Макклиток Ф., Аргон А.* Деформация и разрушение материалов, М.: Мир, 1970. 443 с.
25. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.

УДК 533.2; 534.12

ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ

© 2023 г. А. Г. Хакимов^{а,*}

^аИнститут механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: hakimov@anrb.ru

Поступила в редакцию 27.03.2023 г.

После доработки 03.05.2023 г.

Принята к публикации 10.05.2023 г.

Определяются частоты изгибных колебаний углеродной нанотрубки (УНТ) по полу-безмоментной теории. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на УНТ в предположении ее цилиндрического изгиба. Поверхности УНТ контактируют со средой разной плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

Ключевые слова: УНТ, газ, плотность, давление, присоединенная масса

DOI: 10.31857/S0572329923600214, EDN: IZGYHW

1. Введение. Определение спектра частот пластин и оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, имеет большое значение [1–3]. Этой теме посвящена обширная литература. К ней примыкает также серия работ по колебаниям тонкостенных тел, не контактирующих с внешней средой. Работа [4] посвящена аналитическому и численному исследованиям свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой. Сравнительный анализ результатов расчетов, полученных для моделей сжимаемой и несжимаемой среды, показывает, что при решении задачи определения параметров свободных колебаний оболочки сжимаемостью среды можно пренебречь. В то же время для решения практических задач, требующих учета полного спектра собственных частот системы оболочка–среда, должна использоваться модель сжимаемой среды, в рамках которой получены результаты о влиянии жесткости оболочки на спектр частот объема среды. Некоторые результаты решений для цилиндрических оболочек, в том числе взаимодействующих со средой, представлены в статьях [5–7].

Среди многочисленных видов применения микро- и нанопленок, нанопроволок, нанотрубок может быть указано также использование их в качестве детекторов и сенсоров в химии, биологии и т.д. [8–10].

В [11] представлен метод, позволяющий определять частоты колебаний цилиндрических оболочек бесконечной длины в акустической среде. Полученные результаты показывают, что существует низкая частота, когда излучение не происходит, и высокая частота, когда внешний источник обеспечивает передачу энергии, которая излучается. Резонанс возникает только в диапазоне низких частот. Метод требует только модификации для учета эффекта статического давления в окружающей среде.

Моделируя микротрубки тонкими упругими цилиндрическими оболочками [12], получены собственные частоты и собственные моды ограниченных упругих колебаний в системе оболочка—жидкость.

В [13] рассматривается радиальная динамика однослойной углеродной нанотрубки при динамическом сжатии в линейной постановке. Применяется уравнение изгибной деформации тонкостенной цилиндрической оболочки (кругового кольца), основанное на гипотезах Кирхгофа.

Однако во всех этих работах взаимодействие среднего давления сред и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей оболочки не учитывается. Это взаимодействие принимается во внимание в статьях [14, 15] в случае легких газов, когда присоединенная масса сред мала. В монографиях [1–3] также не учитывается указанный эффект среднего давления. В [16] определяется спектр частот двухпорного резонатора с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на поверхности резонатора и кривизны, а также действия осевой нагрузки.

В данной работе определяются собственные частоты колебаний однослойной углеродной нанотрубки (УНТ) с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны срединной поверхности, а также действия присоединенной массы газовой среды с удаленными границами.

Представляет интерес вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию УНТ. Это проще выяснить в случае несжимаемой жидкости. Далее, с учетом полученного результата рассматривается случай сжимаемой жидкости в более простой постановке (в частности, не производится разложение в ряд Тейлора условий контакта).

Ввиду одинакового давления по всей поверхности УНТ объектом исследования может быть принято кольцо с эффективными значениями радиуса R , толщины h , ширины b , плотности по площади ρh , модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν . Кольцо образуется зигзагообразным рядом атомов углерода [17, 18]. Если ось x направлена вдоль трубки, ось $y = R\theta$ по окружности (θ – центральный угол), то расстояние по y равно $a = l\cos 30^\circ = 0.123$ нм. При площади $S = 3\sqrt{3}l^2/4$, приходящейся на один атом, эффективная ширина кольца равна $b = Sa^{-1} = 0.213$ нм. Так как масса атома углерода равна $m = 1.99 \times 10^{-26}$ кг, то эффективная плотность по площади

$$\rho h = mS^{-1} = 0.76 \times 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2} \quad (1.1)$$

Во многих работах (в том числе в обзорных статьях [19–21]) приводятся значения модуля упругости и приведенные толщины однослойных углеродных нанотрубок, которые находятся в диапазонах: $E = (1–5) \times 10^6$ МПа, $h = 0.07–0.34$ нм. Эти данные получены экспериментально, а также с привлечением теоретического моделирования. Разброс значений E и h объясняется разными образцами для испытаний, аппаратурой, методами определения и т.д. Эффективный радиус R определяется через число атомов N , образующих кольцо, например, для хиральности зигзаг

$$2\pi R = aN \quad (1.2)$$

На внутреннюю и внешнюю поверхности УНТ действуют давления $p_0 + p_1$ и $p_0 + p_2$ жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1). Здесь p_0 – давление сборки, в частности, атмосферное давление, действующее на все поверхности, p_1, p_2 – избыточные давления. При определении нагрузки q исходим из предположения, что ρ_1, ρ_2 и p_1, p_2 остаются постоянными при изгибе УНТ.

2. Несжимаемая среда. Возникающие в результате движения УНТ давления обозначим через \bar{p}_1 и \bar{p}_2 . Уравнения динамики несжимаемой жидкости относительно потенциала скорости $\varphi(r, \theta, t)$ в цилиндрических координатах r, θ имеют вид [1–3]

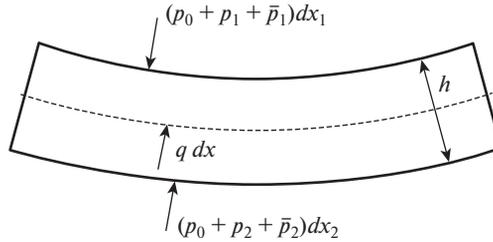


Рис. 1. Элемент dx модели поперечного сечения УНТ.

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{r^2 \partial \theta^2} = 0, \quad \bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2} \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} \quad (2.1)$$

Условия на поверхностях для функции прогиба $w(\theta, t)$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial t} \left(r = R - \frac{h}{2} - w \right), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial t} \left(r = R + \frac{h}{2} - w \right) \quad (2.2)$$

Радиальные перемещения считаем положительными, если они направлены к центру поперечного сечения.

На большом удалении от поверхности УНТ возмущения исчезают

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = 0 \quad (r = \infty) \quad (2.3)$$

Примем

$$w = W \cos n\theta \sin \omega t \quad (2.4)$$

Тогда в функциях

$$\varphi_1 = \Phi_1(r) \cos n\theta \cos \omega t, \quad \varphi_2 = \Phi_2(r) \cos n\theta \cos \omega t \quad (2.5)$$

по (2.1) имеем $\Phi_1(r) = A_1 r^n$, $\Phi_2(r) = A_2 r^{-n}$. При этом удовлетворяются условие ограниченности решения при $r = 0$ и условие (2.3).

Разлагая функции $\partial \varphi_1 / \partial r$, $\partial \varphi_2 / \partial r$ в ряд Тейлора в окрестности $r = R$, условия (2.2) приведем к виду

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \left(-\frac{h}{2} + w \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} = -\frac{\partial w}{\partial t} (r = R), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \left(\frac{h}{2} + w \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} = -\frac{\partial w}{\partial t} (r = R)$$

В линейной задаче член w в данных условиях должен быть опущен. Подставляя сюда выражения (2.4), (2.5) с учетом Φ_1 , Φ_2 , получаем

$$A_1 = -\frac{2W\omega R^{2-n}}{n(2R - nh + h)}, \quad A_2 = \frac{2W\omega R^{n+2}}{n(2R - nh - h)}$$

Выражения (2.5) через амплитуду прогиба W приобретают вид

$$\varphi_1 = -\frac{2W\omega R^{2-n} r^n}{n(2R - nh + h)} \cos n\theta \cos \omega t, \quad \varphi_2 = \frac{2W\omega R^{n+2} r^{-n}}{n(2R - nh - h)} \cos n\theta \cos \omega t \quad (2.6)$$

При вычислении акустического давления на поверхностях УНТ $r = R - h/2 + w$, $r = R + h/2 + w$ выражение (2.1) также сведем к поверхности $r = R$

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= -\rho_1 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left(-\frac{h}{2} + w \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial r} \right] \quad (r = R) \\ \bar{p}_2 &= -\rho_2 \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \left(\frac{h}{2} + w \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t \partial r} \right] \quad (r = R)\end{aligned}\quad (2.7)$$

Подставим в (2.7) выражения (2.6), предварительно опустив нелинейные члены с w . Тогда получаем

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= -\rho_1 \omega^2 W R b_1 \cos n\theta \sin \omega t, & \bar{p}_2 &= \rho_2 \omega^2 W R b_2 \cos n\theta \sin \omega t \\ b_1 &= \frac{2R - hn}{n(2R - hn + h)}, & b_2 &= \frac{2R - hn}{n(2R - hn - h)}\end{aligned}$$

С учетом соотношения для прогиба эти выражения могут быть представлены в виде

$$\bar{p}_1 = \rho_1 R b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar{p}_2 = -\rho_2 R b_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\quad (2.8)$$

Распределенная сила q определяется по формуле [17, 18]

$$q = p_2 - p_1 + \bar{p}_2 - \bar{p}_1 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2R} + \frac{(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)h}{2R}$$

или с учетом (2.8)

$$q = p_2 - p_1 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2R} - (\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2) R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2) \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\quad (2.9)$$

Уравнение радиальной динамики тонкого кольца относительно функции прогиба в предположении о нулевой деформации срединной поверхности имеет вид [22]

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{T_0 R^2}{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \dot{w} \right) = \frac{R^4}{D} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}\quad (2.10)$$

где q – внешнее давление, действующее на УНТ, точка над буквой означает производную по времени t , T_0 – кольцевое растягивающее усилие при $p_1 > p_2$, которое находится по формуле

$$\begin{aligned}T_0 &= (p_0 + p_1) \int_0^{\pi/2} \left(R - \frac{h}{2} \right) \cos \theta d\theta - (p_0 + p_2) \int_0^{\pi/2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \cos \theta d\theta = \\ &= (p_1 - p_2) R - (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2}\end{aligned}\quad (2.11)$$

Линейное уравнение (2.10) получено преобразованием дифференциальных уравнений движения элемента кольца в проекциях на касательную и нормаль с учетом изменения кривизны линии поперечного сечения УНТ [23].

Уравнение колебаний УНТ (2.10) с учетом (2.11), (2.9) для p_0, p_1, p_2 не зависящих, а \bar{p}_1, \bar{p}_2 зависящих от θ , записывается

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left[(p_1 - p_2) R - (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \right] \frac{R^2}{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \dot{w} \right) = \frac{R^4}{D} \left[-(\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2) R \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} + (\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2) \frac{h}{2} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} \right]\end{aligned}\quad (2.12)$$

Подставляя (2.4) в уравнение (2.12), получим

$$\dot{W}_n + \omega_n^2 W_n = 0, \quad \omega_n^2 = \Omega_n^2 \frac{1}{1 + \mu} \left(1 + \frac{3\alpha}{n^2 - 1} - \frac{3\alpha_1}{n^2 - 1} \right), \quad \Omega_n^2 = \frac{n^2(n^2 - 1)^2 \xi^2}{(n^2 + 1)R^4} \quad (2.13)$$

$$\alpha = \frac{(p_1 - p_2)R^3}{3D}, \quad \alpha_1 = \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)R^2 h}{2 \cdot 3D}, \quad \xi = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1 - \nu^2)}}$$

$$\mu = \frac{\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2}{\rho} \cdot \frac{R}{h} \cdot \frac{n^2}{(n^2 + 1)} - \frac{\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2}{2\rho} \cdot \frac{n^2}{(n^2 + 1)}$$

где Ω_n – собственные частоты при нулевом давлении p_1 и p_2 .

При $\rho_1 = \rho_2, p_1 = p_2$ имеем $\alpha = 0$

$$\omega_n^2 = \Omega_n^2 \frac{1 - \alpha_1}{1 + \mu}$$

При $\alpha_1 = 1$ происходит потеря устойчивости круговой формы УНТ в виде эллипса ($n = 2$), причем, критическое давление потери устойчивости равно

$$p_{1cr} = \frac{3D}{R^2 h},$$

откуда следует, что УНТ может потерять устойчивость даже при нулевом перепаде давления вследствие действия среднего давления. Например, для одностенной УНТ с хиральностью кресло (10, 10), радиусом $R = 0.678$ нм [24] для модуля упругости $E = 0.972 \times 10^6$ МПа, коэффициента Пуассона $\nu = 0.278$ [21] и толщине h , принятой равной 0.052 нм, при нулевом перепаде давления критическое давление потери устойчивости p_{1cr} равно 1.55 ГПа [24], что соответствует давлению перехода круговой формы поперечного сечения к эллиптической или потере устойчивости кругового поперечного сечения одностенной УНТ [25].

Параметры α, α_1 и μ определяют влияние избыточного давления, среднего давления и плотности окружающей среды. Таким образом, избыточное давление в УНТ повышает, среднее давление и плотность понижают собственную частоту УНТ. При $\alpha \ll 1, \alpha_1 \ll 1, \mu \ll 1$ их влияние исчезает.

Собственные частоты изгибных колебаний УНТ при ее контакте с жидкостью снижаются. Это объясняется влиянием присоединенной массы жидкости. Учет разности площадей внутренней и внешней поверхностей УНТ оказывает понижающее влияние на собственные частоты.

По модели несжимаемой жидкости имеется повышение собственной частоты за счет перепада давлений, уменьшение частоты за счет действия среднего давления и присоединенной массы.

3. Сжимаемая среда. По модели сжимаемой среды вместо уравнений (2.1) имеем [1–3]

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{c_{1,2}^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{\partial t^2} = 0, \quad \bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial t}, \quad c_{1,2}^2 = \kappa_{1,2} \frac{p_{1,2}}{\rho_{1,2}} \quad (3.1)$$

где $c_{1,2}$ – скорость звука, $\kappa_{1,2}$ – коэффициент адиабаты. В отличие от случая несжимаемой жидкости здесь давление и плотность не являются независимыми, а связаны изотермическим законом.

При функциях (2.7), (2.8)

$$w = W \cos n\theta \sin \omega t, \quad \Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(r) \cos n\theta \cos \omega t \quad (3.2)$$

из волнового уравнения (3.1) следует

$$\Phi_{1,2} = A_{1,2} J_n \left(\frac{\omega r}{c_{1,2}} \right) + B_{1,2} Y_n \left(\frac{\omega r}{c_{1,2}} \right) \quad (3.3)$$

где J_n, Y_n – функции Бесселя первого и второго рода.

Положив $B_1 = 0, A_2 = 0$ в соответствии с условиями (2.3), получаем частное решение

$$\varphi_1 = A_1 J_n \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \cos n\theta \cos \omega t, \quad \varphi_2 = B_2 Y_n \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) \cos n\theta \cos \omega t \quad (3.4)$$

Как показано выше, при определении распределенной нагрузки q необходимо учитывать условия при $r = R \pm h/2$, а при определении \bar{p}_1, \bar{p}_2 на поверхностях УНТ и удовлетворении условий (2.2) в линейной задаче вместо $r = R \pm h/2 + w$ можно принять $r = R$. Тогда из условия конечности решения при $r = 0$ и условия (2.3) следует

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{W\omega R}{nf_1}, \quad B_2 = \frac{W\omega R}{nf_2}, \quad t_1 = \frac{R}{c_1}, \quad t_2 = \frac{R}{c_2} \\ f_1 &= -\frac{\omega(2R+h)}{2nc_1} J_{n+1}(\omega t_1) + J_n(\omega t_1) \left(n - \frac{n^2 h}{2R} + \frac{hn}{2R} + \frac{\omega^2 h R}{2c_1^2} \right) \\ f_2 &= \frac{\omega(2R-h)}{2nc_2} Y_{n+1}(\omega t_2) + Y_n(\omega t_2) \left(-n - \frac{n^2 h}{2R} + \frac{hn}{2R} + \frac{\omega^2 h R}{2c_2^2} \right) \end{aligned}$$

Подставим в (2.7) выражения (3.4), предварительно опустив нелинейные члены с w . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -\rho_1 \omega^2 W R f_{11} \cos n\theta \sin \omega t, \quad \bar{p}_2 = -\rho_2 \omega^2 W R f_{22} \cos n\theta \sin \omega t \\ f_{11} &= \frac{f_{10}}{f_1}, \quad f_{10} = \frac{\omega h}{2c_1} J_{n+1}(\omega t_1) + J_n(\omega t_1) \left(1 - \frac{nh}{2R} \right) \\ f_{22} &= \frac{f_{20}}{f_2}, \quad f_{20} = \frac{\omega h}{2c_2} Y_{n+1}(\omega t_2) - Y_n(\omega t_2) \left(1 + \frac{nh}{2R} \right) \end{aligned}$$

С учетом соотношения для прогиба эти выражения могут быть представлены в виде

$$\bar{p}_1 = \rho_1 f_{11} R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar{p}_2 = \rho_2 f_{22} R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Находим распределенную поперечную нагрузку

$$q = p_2 - p_1 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2R} + (-\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{2} (\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

Уравнение колебаний УНТ (2.10) с учетом (2.11), (3.6) для p_0, p_1, p_2 не зависящих, а \bar{p}_1, \bar{p}_2 зависящих от θ , записывается

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left[(p_1 - p_2) R - (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \right] \frac{R^2}{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \ddot{w} \right) = \frac{R^4}{D} \left[(-\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) R \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} (\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) h \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Частное решение принимается в виде (3.2). Подставляя (3.2) в уравнение (3.7), получим

$$\begin{aligned} \omega_n^2 - \Omega_n^2 \left(1 + \frac{3\alpha}{n^2 - 1} - \frac{3\alpha_1}{n^2 - 1} \right) + \omega_n^2 \frac{n^2 R}{\rho h(n^2 + 1)} (\rho_1 f_{11} - \rho_2 f_{22}) - \\ - \omega_n^2 \frac{n^2}{2\rho(n^2 + 1)} (\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Omega_n^2 = \frac{n^2(n^2 - 1)^2 \xi^2}{(n^2 + 1)R^4}, \quad \alpha = \frac{(p_1 - p_2)R^3}{3D}, \quad \alpha_1 = \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)R^2 h}{2 \cdot 3D}$$

В случае несжимаемой жидкости $t_1 \rightarrow 0$, $t_2 \rightarrow 0$ и из (3.8) следует

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \Omega_n^2 \left(1 + \frac{3\alpha}{n^2 - 1} - \frac{3\alpha_1}{n^2 - 1} \right) / (1 + \mu) \\ \mu &= \frac{\rho_1 f_{11n} - \rho_2 f_{22n}}{\rho} \cdot \frac{R}{h} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 1} - \frac{\rho_1 f_{11n} + \rho_2 f_{22n}}{2\rho} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 1} \\ f_{11n} &= \frac{2R - hn}{n(2R - hn + h)}, \quad f_{22n} = \frac{2R + hn}{n(2R + hn - h)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для решения уравнения (3.8) в случае сжимаемой жидкости применяется метод последовательных приближений. Принимается, что нулевое приближение $f_{11}^{(0)} = f_{11n}$, $f_{22}^{(0)} = f_{22n}$, и из уравнения (3.9) находится круговая частота колебаний первого приближения $\omega_n^{2(1)}$. По полученной частоте первого приближения $\omega_n^{2(1)}$ находится первое приближение $f_{11}^{(1)}$, $f_{22}^{(1)}$ и так далее. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не удовлетворится условие $|\omega_n^{2(k-1)} - \omega_n^{2(k)}| \leq \varepsilon$, где ε наперед заданная малая величина.

На рис. 2, а приводятся зависимости первой частоты изгибных колебаний УНТ f_1 (ГГц) от давления $p_1 = p_2$ (ГПа) для модуля упругости $E = 0.972 \times 10^6$ МПа, коэффициента Пуассона $\nu = 0.278$ [21], радиуса $R = 0.678$ нм, толщины $h = 0.052$ нм и при нулевом перепаде давления. Из рис. 2, а видно, что с ростом давления собственная частота колебаний уменьшается, причем влияние среднего давления значительно. Модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν взяты из работы [21] для однослойной УНТ хиральности кресло (10, 10), а толщина принята $h = 0.052$ нм, согласно результатам моделирования потери устойчивости под действием среднего давления [24, 25], что не соответствует диапазону изменения приведенных толщин $h = 0.07 - 0.34$ нм. На рис. 2, б приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний цилиндрической оболочки от давления по формулам для сжимаемой жидкости для разных газов. Рассмотрены газы гелий, воздух, двуокись углерода с целью показать, что собственные частоты колебаний УНТ зависят от плотности газовой среды. Из рис. 2, б видно, что с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 3 приведены зависимости первой частоты изгибных колебаний УНТ f_1 (ГГц) от давления p_1 (ГПа) для гелия $\rho_1 = 0.1785$ кг/м³: по формулам для несжимаемой (2.14) и сжимаемой (3.7) жидкостей (сплошная, штриховая линии соответственно). Видно, что учет сжимаемости жидкости приводит к уменьшению частоты колебаний.

4. Заключение. Собственные частоты изгибных колебаний УНТ при ее контакте с жидкостью снижаются. Это объясняется влиянием присоединенной массы жидкости. Учет разности площадей внутренней и внешней поверхностей УНТ оказывает понижающее влияние на собственные частоты.

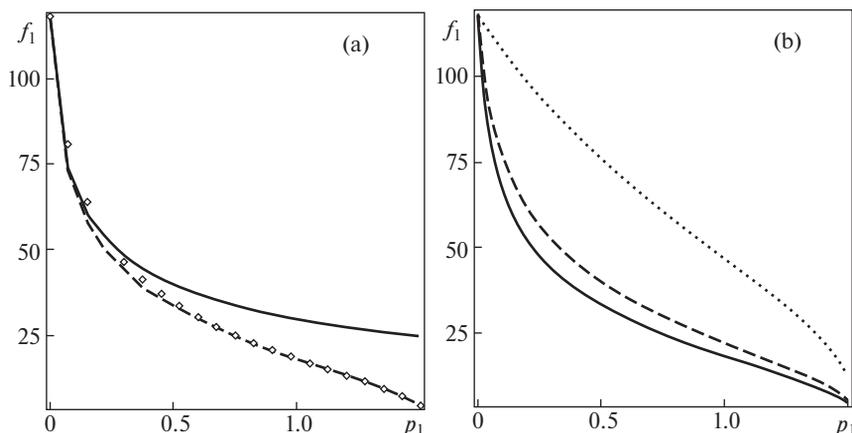


Рис. 2. Зависимость первой частоты изгибных колебаний УНТ f_1 (ГГц) от давления $p_1 = p_2$ (ГПа): (а) для двуокиси углерода $\rho_1 = 1.9768 \text{ кг/м}^3$ с учетом действия среднего давления по формулам для несжимаемой (2.13), сжимаемой (3.8) жидкостей и без учета действия среднего давления (3.8) (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (б) по формулам для сжимаемой (3.8) жидкости для разных газов: $\rho_1 = 0.1785$ (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) кг/м^3 (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно).

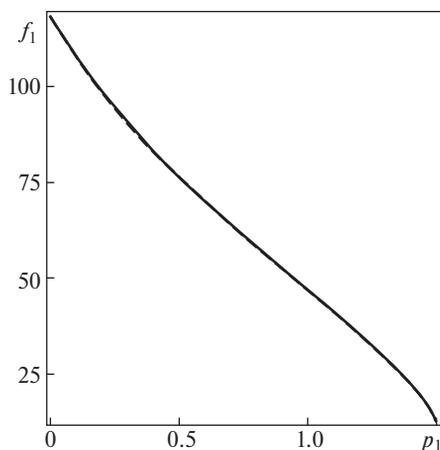


Рис. 3. Зависимость первой частоты изгибных колебаний УНТ f_1 (ГГц) от давления p_1 (ГПа) для гелия $\rho_1 = 0.1785 \text{ кг/м}^3$: по формулам для несжимаемой (2.14) и сжимаемой (3.7) жидкостей (сплошная, штриховая линии соответственно).

По модели несжимаемой жидкости имеется повышение собственной частоты за счет перепада давлений, уменьшение частоты за счет действия среднего давления и присоединенной массы.

УНТ может потерять устойчивость даже при нулевом перепаде давления вследствие действия среднего давления.

Для сжимаемой жидкости влияние носит более сложный характер, так как присоединенная масса зависит от скорости звука и от самой частоты колебаний. Кроме того, давление и плотность газовой среды не являются независимыми.

Влияние контактирующей среды на частоту колебаний является значительным для весьма тонких оболочек из материала с низким модулем упругости. Учет его необходим особенно в случае элементов микро- и наноразмерных толщин.

Эти результаты могут быть также использованы при моделировании колебаний оболочек, контактирующих с жидкостью и газом.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00578.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 103 с.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
3. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1994. 208 с.
4. Дяченко И.А., Миронов А.А. Аналитические и численные исследования свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. № 1. С. 35–48.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-1-35-48>
5. Leizerovich G.S., Taranukha N.A. Nonobvious features of dynamics of circular cylindrical shells // Mech. Solids. 2008. V. 43. № 2. P. 246–253.
<https://doi.org/10.3103/S0025654408020106>
6. Rawat A., Matsagar V., Nagpal A. Finite element analysis of thin circular cylindrical shells // Proc. Indian National Sci. Acad. 2016. V. 82. № 2. P. 349–355.
<https://doi.org/10.16943/ptinsa/2016/48426>
7. Farshidianfar A., Oliazadeh P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories // Int. J. Mech. Appl. 2012. V. 2 (5). P. 74–80.
<https://doi.org/10.5923/j.mechanics.20120205.04>
8. O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M. et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. 2010. № 464. P. 697–703.
<https://doi.org/10.1038/nature08967>
9. Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M. et al. Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // Nature. 2007. № 446. P. 1066–1069.
<https://doi.org/10.1038/nature05741>
10. Husale S., Persson H.H.J., Sahin O. DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // Nature. 2009. № 462. P. 1075–1078.
<https://doi.org/10.1038/nature08626>
11. Bleich H.H., Baron M.L. Free and Forced vibration of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1954. V. 21. № 2. P. 167–177.
12. Sirenko Y.M., Stroschio M.A., Kim K.W. Elastic vibrations of microtubules in a fluid // Phys. Rev. 1996. V. 53. № 1. P. 1003–1010.
13. Дмитриев С.В., Ильгамов М.А. Радиальная реакция углеродной нанотрубки на динамическое давление // ДАН. Физика. Технические науки. 2021. Т. 501. № 1. С. 8–13.
<https://doi.org/10.31857/S2686740021060080>
14. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
<https://doi.org/10.7868/S086956521728009X>
15. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // ФТТ. 2019. Т. 61. № 10. С. 1825–1830.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2019.10.48255.381>

16. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
<https://doi.org/10.22055/jacm.2021.36470.2848>
17. *Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С.* Собственные частоты радиальных колебаний углеродных нанотрубок // *ЖТФ.* 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732–1737.
<https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21>
18. *Dmitriev S.V., Semenov A.S., Savin A.V., Ilgamov M.A., Bachurin D.V.* Rotobreather in a carbon nanotube bundle // *J. Micromech. Mol. Phys.* 2020. V. 5. № 3. 2050010.
<https://doi.org/10.1142/S2424913020500101>
19. *Harik V.M.* Ranges of applicability for the continuum beam model in the mechanics of carbon nanotubes and nanorods // *Solid State Commun.* 2001. V. 120. № 7–8. P. 331–335.
[https://doi.org/10.1016/S0038-1098\(01\)00383-0](https://doi.org/10.1016/S0038-1098(01)00383-0)
20. *Qian D., Wagner G.J., Lin W.K., Ju M.F., Ruoff R.S.* Mechanics of carbon nanotubes // *Appl. Mech. Rev.* 2002. V. 55. № 6. P. 495–532.
<https://doi.org/10.1115/1.1490129>
21. *Елецкий А.В.* Механические свойства углеродных нанотрубок и материалов на их основе // *Успехи физических наук.* 2007. Т. 177. № 3. С. 233–274.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200703a.0233>
22. *Ильгамов М.А.* Перестройка гармоник при изгибе цилиндрической оболочки вследствие динамического сжатия // *ПМТФ.* 2011. Т. 52. № 3. С. 167–174.
23. *Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W.* Vibration problems in engineering. New York: John Wiley & Sons, 1974.
24. *Wu J., Zang J., Larade B. et al.* Computational design of carbon nanotube electromechanical pressure sensors // *Phys. Rev. B.* 2004. V. 69. P. 153406.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.153406>
25. *Хакимов А.Г.* К статической устойчивости формы поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, углеродной нанотрубки // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 1. С. 95–101.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060101>

УДК 531.381: 534.1

**СЕМЕЙСТВО КОЛЕБАНИЙ, СВЯЗЫВАЮЩЕЕ УСТОЙЧИВОЕ
И НЕУСТОЙЧИВОЕ ПЕРМАНЕНТНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО
ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ**

© 2023 г. В. Н. Тхай^{a,*}

^aИнститут проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

*e-mail: tkhaivn@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.

После доработки 18.04.2023 г.

Принята к публикации 10.05.2023 г.

Исследуется вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае принадлежности центра тяжести главной плоскости эллипсоида инерции. Дается редукция системы уравнений Эйлера–Пуассона к обратимой консервативной системе с двумя степенями свободы, проводится бифуркационный анализ перманентных вращений. Находятся глобальные семейства периодических движений, связывающие устойчивое и неустойчивое перманентные вращения одной частоты. Доказывается, что невырожденное симметричное периодическое движение в обратимой механической системе всегда продолжается на глобальное семейство.

Ключевые слова: тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, обратимость, перманентные вращения, редукция, бифуркация, ляпуновское семейство, глобальное продолжение, колебания вращающегося тела

DOI: 10.31857/S0572329923600123, EDN: HQIKAO

1. Предварительные замечания. Постановка задачи. Для изучения движений твердого тела с одной неподвижной точкой и центром тяжести, принадлежащем главной плоскости эллипсоида инерции, применяются уравнения Эйлера–Пуассона

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + Pz_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2r - \gamma_3q \\ B\dot{q} &= (C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3p - \gamma_1r \\ C\dot{r} &= (A - B)pq - Px_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1q - \gamma_2p \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь A, B, C – главные моменты инерции тела, P – вес тела, x_0, y_0, z_0 – координаты центра тяжести ($y_0 = 0$), $\Omega = (p, q, r)$ – угловая скорость, $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали, направленный вверх.

Система (1.1) инвариантна относительно преобразования

$$R_y : (p, r, \gamma_1, \gamma_3, q, \gamma_2, t) \rightarrow (p, r, \gamma_1, \gamma_3, -q, -\gamma_2, -t)$$

Она принадлежит [1] к классу обратимых механических систем

$$\begin{aligned} \dot{u} &= U(u, v), & \dot{v} &= V(u, v), & u &\in \mathbb{R}^l, & v &\in \mathbb{R}^n, & l \geq n \\ U(u, -v) &= -U(u, v), & V(u, -v) &= V(u, v) \end{aligned} \quad (1.2)$$

с неподвижным множеством $M = \{u, v : v = 0\}$. Переменные u и v обычно ассоциируются с квазикоординатой (координатой) и с квазискоростью (скоростью) соответ-

ственно, совпадая с ними в некоторых механических системах [1]. В записи системы (1.2) отражается фундаментальное свойство пространственно-временной симметрии моделей ньютоновой механики. Системой уравнений (1.2) описывается большинство моделей классической и небесной механики [1].

Теория обратимых механических систем развивается на основе свойства пространственно-временной симметрии. В пространстве (u, v) фазовой портрет системы (1.2) симметричен относительно множества M . На симметричных движениях переменная v равняется на M нулю. Если обращение v в нуль на M происходит и во второй раз, то получается симметричное периодическое движение (СПД) в виде колебания. Постоянные решения системы (1.2), принадлежащие M , называются в обратимой механической системе (1.2) положениями равновесия: $u = \text{const}$, $v = 0$. СПД вырождается в положение равновесия.

Данное элементарное изложение теории СПД будет достаточным для понимания материала статьи. Что же касается применяемого в статье нелокального результата о глобальном семействе невырожденных СПД, то он подробно излагается в разд. 6.

В формальной записи (1.2) системы (1.1) за вектор u берется $u = (p, r, \gamma_1, \gamma_3)$, а $v = (q, \gamma_2)$. Множество M записывается в виде

$$M_y = \{p, r, \gamma_1, \gamma_3, q, \gamma_2 : q = 0, \gamma_2 = 0\}$$

При исследовании системы (1.2) переменные γ_1 , γ_2 и γ_3 в общем случае не стеснены ограничением принадлежности сфере Пуассона.

Основной целью статьи является нахождение глобальных семейств движений — колебаний вращающегося тела с фиксированным значением кинетического момента. Семейство связывает устойчивое и неустойчивое перманентные вращения; такие движения ранее не описывались.

При этом система уравнений Эйлера—Пуассона исследуется как обратимая механическая система (1.2), в которой q и γ_2 объединены в пару переменных $v = (q, \gamma_2)$, принимающей на перманентных вращениях нулевое значение и интерпретирующей как скорость. Для физической задачи (1.1) изучается принадлежность вектора Γ сфере Пуассона.

В [2] вводилось понятие вращательного движения механической системы — колебания, наложенного на равномерное вращение. Такие движения исследуются как колебания посредством перехода в равномерно вращающуюся систему координат. В этой статье ситуация сложнее.

Перманентные вращения тела изучаются как равновесия обратимой механической системы (1.2). Дается редукция системы (1.2) к обратимой консервативной системе с двумя степенями свободы. Проводится бифуркационный анализ равновесий редуцированной системы. С помощью доказанной теоремы о глобальном семействе невырожденных СПД находятся все семейства маятниковых колебаний вращающегося тела, которые связывают устойчивое и неустойчивое перманентные вращения. Такие семейства колебаний реализуются для любых значений кинетического момента, за исключением нулевого и бифуркационных значений.

В статье дается параллельное рассмотрение системы (1.1) и системы (1.2) с неподвижным множеством M_y . В системе (1.2) скорости p , q , r и проекции γ_1 , γ_2 , γ_3 системы (1.1) рассматриваются как формальные переменные. Смысл переменных в (1.2) при необходимости поясняется в тексте. Редуцированная система также записывается в виде (1.2). Теория бифуркаций Пуанкаре—Четаева применяется к равновесиям редуцированной системы. Выводы об устойчивости получаются из анализа квадратичной части интеграла энергии, дополненным построением кривых перманентных вращений. Наконец, применяется теория глобального семейства СПД, включающая ло-

кальную теорему Ляпунова—Брюно—Девани и теорему о существовании и построении глобального семейства периодических движений.

Подходы могут быть полезны в других задачах механики.

В динамике тяжелого твердого тела известны три решения, для которых центр тяжести лежит в главной плоскости эллипсоида инерции (решения Гесса, Гриоли, Докшевича). Для них эллипсоид инерции не является эллипсоидом вращения и поэтому результаты, полученные в статье, могут быть использованы для получения новых свойств в указанных решениях.

Обзор современного состояния исследований задачи Эйлера о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки дается в [3]. Перманентные вращения тела изучались во многих работах (см. [4]). Для рассматриваемого тела ($y_0 = 0$) результаты по устойчивости и бифуркации перманентных вращений наиболее полно описаны В.Н. Рубановским в [5, § 3].

Что касается теоремы Ляпунова о центре (см. [6]) в нелокальной постановке, то в [7] даны условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Theta \in \mathbb{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Theta$, эти результаты развиты в [8]. Связанная проблема ставилась в [9, 10] как задача продолжения симметричного периодического движения обратимой механической системы на глобальное семейство СПД. Также в [9] для тела в общем случае, когда его параметры не стеснены условиями типа равенства, установлены два семейства маятниковых колебаний, связывающие нижнее и верхнее равновесия; в [10] найдено глобальное пространственное семейство колебаний для тела с центром тяжести в главной плоскости эллипсоида инерции.

2. Перманентные вращения. Функция $V = (V_q, V_{\gamma_2})$ в системе (1.1) дается проекциями

$$\begin{aligned} V_q &= [(C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1)]/B \\ V_{\gamma_2} &= \gamma_3 p - \gamma_1 r \end{aligned}$$

Поэтому все перманентные вращения тела

$$\begin{aligned} p &= p^0(\text{const}), & q &= 0, & r &= r^0(\text{const}) \\ \gamma_1 &= \gamma_1^0(\text{const}), & \gamma_2 &= 0, & \gamma_3 &= \gamma_3^0(\text{const}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

находятся из равенств

$$(C - A)r^0 p^0 + P(x_0\gamma_3^0 - z_0\gamma_1^0) = 0, \quad \gamma_3^0 p^0 - \gamma_1^0 r^0 = 0 \quad (2.2)$$

Постоянные решения (2.1) образуют семейства и включают при $p^0 = r^0 = 0$ верхнее и нижнее положения равновесия тела. Решениями (2.1) описываются перманентные вращения тела вокруг вертикальной оси.

Из (2.2) следует, что $p^0 r^0 \neq 0$. В самом деле, если $p^0 \neq 0, r^0 = 0$, то $\gamma_3^0 = 0$ и $\gamma_1^0 = 0$. Поэтому для перманентных вращений из второго равенства в (2.2) выводится отношение

$$\frac{p^0}{\gamma_1^0} = \frac{r^0}{\gamma_3^0} = \chi, \quad \chi^2 = p^{02} + r^{02} \quad (2.3)$$

в котором $\chi \neq 0$. Параметр χ может быть положительным или отрицательным. Полагается: $\gamma_1 = \cos \alpha, \gamma_3 = \sin \alpha$. Тогда первое равенство в (2.2) записывается в виде

$$\chi^2(C - A) \cos \alpha \sin \alpha + P(x_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha) = 0 \quad (2.4)$$

В результате из (2.4) для любого фиксированного $\chi \neq 0$ получается уравнение

$$\chi^2 = F(\alpha), \quad F(\alpha) = \frac{P}{C-A} \left(-\frac{x_0}{\cos \alpha} + \frac{z_0}{\sin \alpha} \right) \quad (2.5)$$

$$C \neq A, \quad \sin \alpha \neq 0, \quad \cos \alpha \neq 0$$

для нахождения перманентных вращений рассматриваемого тела. Без ограничения общности уравнение (2.5) рассматривается в интервале $\alpha \in (-\pi, \pi)$. В промежутке длиной $\pi/2$ (по переменной α) уравнение (2.5) допускает один или два корня. Для этих корней параметр χ – фиксирован, они различаются только углами α .

Функция (2.5) содержит параметры тела. Далее анализ равенства (2.5) проводится на примере тела, для которого

$$C > A, \quad x_0 > 0, \quad z_0 > 0$$

Функция $F(\alpha)$ возрастает в интервале $(-\pi, -\pi/2)$, причем $F(-\pi + 0) \rightarrow -\infty$, $F(-\pi/2 - 0) \rightarrow +\infty$. Поэтому при $\alpha \in (-\pi, -\pi/2)$ уравнение (2.5) допускает единственный корень. В интервале $(-\pi/2, 0)$ функция $F(\alpha)$ принимает отрицательные значения, поэтому уравнение (2.5) не имеет корней.

В интервале $(0, \pi/2)$ асимптотика такова: $F(+0) \rightarrow +\infty$, $F(\pi/2 - 0) \rightarrow -\infty$. Функция $F(\alpha)$ монотонно убывает. Поэтому при $\alpha \in (0, \pi/2)$ уравнение (2.5) имеет единственный корень.

В интервале $(\pi/2, \pi)$ функция $F(\alpha)$ принимает положительные значения. Поэтому, начиная с значения угловой скорости $\chi = \chi^*$, уравнение (2.5) допускает два различных корня: числу χ^* отвечает двойной корень. Соответствующее χ^* значение угла $\alpha = \alpha^*$ находится из равенства:

$$x_0 \sin^3 \alpha^* + z_0 \cos^3 \alpha^* = 0$$

Число χ^* будет бифуркационным значением угловой скорости, оно вычисляется из равенства

$$\chi^{*2} = \frac{P}{C-A} \left(-\frac{x_0}{\cos \alpha^*} + \frac{z_0}{\sin \alpha^*} \right)$$

Соответствующее ему значение s^* постоянной кинетического момента s (явный вид для s приводится в (3.1)) также является бифуркационным. Параметром в уравнении (2.5) служит χ^2 , поэтому можно рассматривать только положительные значения χ (или s).

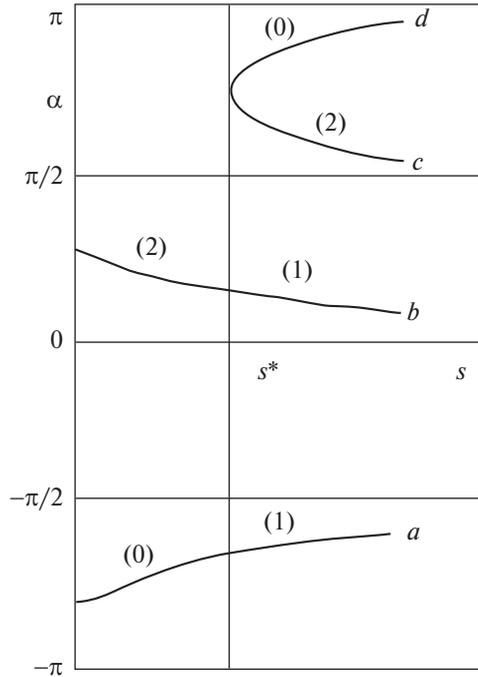
Таким образом, выводится лемма 1.

Лемма 1. Пусть $C > A$, $x_0 > 0$, $z_0 > 0$. Тогда тяжелое твердое тело с неподвижной точкой в случае $y_0 = 0$ при любых фиксированных значениях кинетического момента $s \neq 0$ допускает два перманентных вращения, один из которых принадлежит интервалу $\alpha \in (-\pi, -\pi/2)$, второй – интервалу $\alpha \in (0, \pi/2)$. При росте модуля кинетического момента, начиная с граничного значения s^* , к указанным вращениям добавляются еще два перманентных вращения, которые принадлежат интервалу $\alpha \in (\pi/2, \pi)$.

Модуль кинетического момента отражает величину угловой скорости вращения тела. При $s < s^*$ динамика тела в основном определяется силой тяжести, после преодоления кинетическим моментом бифуркационного значения s^* вклад вращения тела в динамику становится “решающим” в смысле леммы 1.

Аналогичный анализ проводится для тела в случае $C < A$, а также для точек параметрической плоскости (x_0, z_0) из оставшихся квадрантов. Формулировки соответствующих лемм опускаются.

Лемма 1 иллюстрируется на рис. 1. На нем в скобках приводится степень неустойчивости точек (перманентных вращений) кривой.

Рис. 1. $C > A$, $x_0 > 0$, $z_0 > 0$.

3. Редукция системы (1.1) на уровне кинетического момента. Система (1.1) допускает классические интегралы

$$\begin{aligned} H &\equiv Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3) = 2h(\text{const}) \\ K &\equiv Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = s(\text{const}) \\ I &\equiv \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \zeta(\text{const}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

При $\zeta = 1$ равенство $I = 1$ выражает принадлежность единичного вектора сфере Пуассона; сам интеграл существует при любых значениях переменных γ_1 , γ_2 и γ_3 .

В системе (1.1) для значений $s \neq 0$ применяются замены

$$\gamma_1 = \rho_1 \cos \alpha, \quad \gamma_3 = \rho_1 \sin \alpha, \quad p = \rho_2 \cos \delta, \quad r = \rho_2 \sin \delta \quad (3.2)$$

Тогда система (1.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \gamma_2 \rho_2 \sin(\delta - \alpha) \\ \rho_1 \dot{\alpha} &= q\rho_1 + \gamma_2 \rho_2 \cos(\delta - \alpha) \\ \rho_2 \dot{\delta} &= -\left(\frac{B-C}{A} q\rho_2 \sin \delta + \frac{P}{A} z_0 \gamma_2\right) \sin \delta + \left(\frac{A-B}{C} q\rho_2 \cos \delta - \frac{P}{C} x_0 \gamma_2\right) \cos \delta \\ \dot{\gamma}_2 &= -\rho_1 \rho_2 \sin(\delta - \alpha) \\ B\dot{q} &= \frac{1}{2}(C - A)\rho_2 \sin 2\delta + P\rho_1(x_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha) \end{aligned} \quad (3.3)$$

При этом она остается инвариантной относительно замены

$$(\rho_1, \alpha, \delta, \gamma_2, q, t) \rightarrow (\rho_1, \alpha, \delta, -\gamma_2, -q, -t)$$

и принадлежит к классу обратимых механических систем с неподвижным множеством $M_1 = \{\rho_1, \alpha, \delta, \gamma_2, q : \gamma_2 = 0, q = 0\}$. Интегралы (3.1) переписываются в виде

$$H = \rho_2^2(A \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta) + Bq^2 + 2P\rho_1(x_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha)$$

$$\rho_2 = \frac{s}{A \cos \delta \cos \alpha + C \sin \delta \sin \alpha}$$

$$\rho_1^2 + \gamma_2^2 = \zeta$$

Системой (3.3), с учетом геометрического равенства $\zeta = 1$, на сфере Пуассона задается консервативная система с двумя степенями свободы, содержащая параметр s^2 .

Теорема 1. Движение твердого тела с центром тяжести, принадлежащим главной плоскости эллипсоида инерции при любом значении кинетического момента, за исключением нулевого и бифуркационных $\pm s^*$ значений, описывается на сфере Пуассона обратимой консервативной системой с двумя степенями свободы, содержащей параметр s^2 .

Таким образом, при каждом значении кинетического момента s , за исключением нулевого и бифуркационных значений, на сфере Пуассона происходит редукция системы уравнений Эйлера—Пуассона к системе (3.3), в которой выполняется равенство $\zeta = 1$.

Для редуцированной системы записывается интеграл энергии

$$H = \frac{s^2(A \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta)}{(A \cos \delta \cos \alpha + C \sin \delta \sin \alpha)^2} + Bq^2 + 2P\sqrt{1 - \gamma_2^2}(x_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha) \quad (3.4)$$

В обратимой механической системе (1.2) переменные q и γ_2 интерпретируются как скорости. Постоянные решения, на которых $q = 0$, $\gamma_2 = 0$, являются равновесиями редуцированной системы, а для тела они означают перманентные вращения. При этом из равенств (2.3) находится связь между параметрами χ и s для равновесий

$$\chi = \frac{s}{A \cos^2 \alpha^0 + C \sin^2 \alpha^0}$$

Наконец, для перманентных вращений согласно (2.4) справедливо равенство

$$f(\alpha^0) = 0,$$

$$f(\alpha) \equiv -\frac{s^2(C - A) \sin 2\alpha}{2(A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha)^2} - P(x_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha)$$

Редуцированная консервативная система (3.3) записана в виде, отличном от стандартного, где применяются силовая функция и выражение для кинетической энергии. Поэтому далее проводится анализ функции W

$$W = \frac{s^2(A \cos^2 \delta + C \sin^2 \delta)}{(A \cos \delta \cos \alpha + C \sin \delta \sin \alpha)^2} + 2P(x_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha) \quad (3.5)$$

полученной из выражения (3.4) при $q = 0$, $\gamma_2 = 0$ и заданной на пересечении сферы Пуассона, фиксированного уровня интеграла кинетического момента $K = s$ и неподвижного множества M_y обратимой механической системы (1.1). Функция W совпадает с H на неподвижном множестве M_y . Критические точки функции W совпадают с равновесиями редуцированной системы и дают перманентные вращения тела.

4. Семейство симметричных движений, связывающее перманентные вращения. Записываются условия существования равновесий редуцированной системы

$$W'_\alpha = -\frac{s^2(A\cos^2\delta + C\sin^2\delta)(-A\cos\delta\sin\alpha + C\sin\delta\cos\alpha)}{(A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha)^3} +$$

$$+ 2P(-x_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha) = 0$$

$$W'_\delta = \frac{s^2(C - A)\sin 2\delta}{2(A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha)^2} -$$

$$- s^2\frac{(A\cos^2\delta + C\sin^2\delta)(-A\sin\delta\cos\alpha + C\cos\delta\sin\alpha)}{(A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha)^3} = 0,$$

в которых через (') обозначается частная производная по соответствующей переменной. Второе равенство выполняется тождественно по α , если $\delta = \alpha$. Поэтому только первое равенство

$$f(\alpha) = 0 \quad (4.1)$$

служит уравнением для нахождения всех равновесий редуцированной системы. Уравнение (4.1) совпадает с уравнением (2.5), качественное исследование корней которого проведено в разд. 2. Поэтому производная

$$f'(\alpha) = -\frac{s^2(C - A)\cos 2\alpha}{(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^2} + \frac{s^2(C - A)\sin^2 2\alpha}{(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^3} - P(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha) \quad (4.2)$$

при $s = s^*$ для значения угла $\alpha^* \in (\pi/2, \pi)$ равна нулю. В остальных интервалах производная $f'(\alpha)$ для точек равновесия отлична от нуля.

Все критические точки функции (3.5) находятся из условий $W'_\alpha = 0$, $W'_\delta = 0$. Они принадлежат прямой $\delta = \alpha$ и находятся из уравнения (4.1). Следовательно, при любом значении кинетического момента два соседних по углу α равновесия на плоскости (α, δ) связываются прямой $l_1: \delta = \alpha$.

Оказывается, равновесия связываются двумя кривыми. Исключим нулевое и бифуркационное значения кинетического момента. Функция W представляется в виде

$$W(\alpha, x) = \frac{s^2}{(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)} \left(1 + x^2 \left(1 + \frac{3(C - A)\sin^2 2\alpha}{4(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^2} \right) \right) +$$

$$+ 2P[(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha) + xf(\alpha) - x^2/2(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha)] + \dots \quad (4.3)$$

$$\delta = \alpha + x$$

В силу равенства (4.1) функция $f(\delta)$ обращается в нуль только в точках равновесия. Это означает, что в (4.3) коэффициент при x вне кривых равновесий (рис. 1) отличен от нуля. Поэтому из условия равенства значений функции W при $x = 0$ и $x \neq 0$ находится вторая кривая l_2 , соединяющая равновесия, на которой функция W меняется также, как и на кривой l_1 .

Таким образом, равновесия при $s \neq 0$ и $s \neq \pm s^*$ всегда соединяются двумя кривыми, на которых функция W меняется единообразно. Эти кривые принадлежат неподвижному множеству M_1 обратимой механической системы (3.3).

Лемма 2. При фиксированном значении кинетического момента $s \neq 0, \pm s^*$ соседние по углу α равновесия соединяются двумя кривыми, на каждой из которых энергия H меняется монотонно.

Система (1.1) обратима. Поэтому согласно лемме 2 в системе (1.1) при $\zeta = 1$ реализуются два семейства симметричных движений, связывающих соседние по углу α перманентные вращения. Другие семейства симметричных движений не могут связывать перманентные вращения.

5. Типы точек на кривых равновесия (перманентного вращения). Исследование равновесий консервативной системы с параметром обычно проводится с применением теории бифуркаций Пуанкаре—Четаева [11]. Однако система (3.3) записана в таком виде, где трудно выделить силовую функцию и кинетическую энергию. Поэтому для различения типов точек на кривой равновесий и построения бифуркационной диаграммы используется функция W и выражение для энергии H . В системе (3.3) квадратичная часть

$$H_2 = k_\xi \xi + k_x x^2 + Bq^2 + k_\gamma \gamma_2^2, \quad \xi = \alpha - \alpha^0 \quad (5.1)$$

энергии H в окрестности равновесия определяет тип равновесия. Коэффициенты k_ξ , k_x , k_γ на каждой кривой (см. рис. 1) принимают соответствующие этой кривой значения одного знака.

Функция $W(\alpha, 0)$ на кривой равновесия принимает экстремальные значения. При этом в диапазоне $s \in (-s^*, s^*)$ минимум достигается на кривой a , максимум — на кривой b (рис. 1). В диапазоне $s \in (-\infty, -s^*) \cup (s^*, +\infty)$ функция $W(\alpha, 0)$ убывает между кривыми $a(c)$ и $b(d)$, возрастает между кривыми $b(d)$ и $c(a)$. При этом минимум достигается на кривой $b(d)$, максимум — на кривой $a(c)$ (рис. 1). Согласно лемме 2 такое же поведение наблюдается на кривой l_2 для функции $W(\alpha, x)$.

Для значений α^0 , $f(\alpha^0) = 0$, из выражения (4.3) выводится функция $W(\alpha^0, x)$ одной переменной x . При $|s| > |s^*|$ значение этой функции определяется слагаемым с множителем s^2 . Поэтому в (5.1) коэффициент $k_x > 0$ на всех кривых равновесия. В выражении (3.4) для полной механической энергии радикал раскладывается в окрестности точки $\gamma_2 = 0$.

В диапазоне $s \in (-s^*, s^*)$ значения функции W определяются силой тяжести; тело допускает только две кривые перманентных вращений, которые примыкают соответственно к нижнему (кривая a) и верхнему (кривая b) равновесиям. Нижнему равновесию отвечает две пары чисто мнимых корней, верхнему — две пары действительных корней [9]. Эти характеристики, в силу непрерывной зависимости корней от параметра χ , распространяются на малые угловые скорости вращения, а также согласно теории бифуркации [11] на весь регулярный диапазон до точки бифуркации.

В диапазоне $s \in (-\infty, -s^*) \cup (s^*, +\infty)$ значение функции W определяется слагаемым с множителем s^2 . Поэтому на кривых b и d функция $W(\alpha, x)$ достигает минимума, а на кривых a и c она имеет седловые точки. Качественные характеристики сохраняются в пределах рассматриваемого диапазона.

На кривой a функция $W(\alpha, 0)$ достигает максимума. При $\alpha^0 \rightarrow -\pi/2$, $r = x_0 \cos \alpha^0 + z_0 \sin \alpha^0 < 0$. Поэтому в (5.1) получается: $k_\xi < 0$, $k_x > 0$, $k_\gamma > 0$. Точка на кривой a имеет пару чисто мнимых корней и пару действительных корней противоположного знака.

На кривой b имеем $r > 0$, а коэффициенты в (5.1) имеют знаки: $k_\xi > 0$, $k_x > 0$, $k_\gamma < 0$. Поэтому точке на кривой b отвечает пара чисто мнимых корней и пара действительных корней противоположного знака.

На кривой c функция $W(\alpha, 0)$ достигает максимума, что приводит к неравенству $k_\xi < 0$ в функции (5.1). Коэффициент $k_x > 0$. При $\alpha^0 \rightarrow \pi/2$ на рассматриваемой кривой $r > 0$, и $k_\gamma < 0$. Точкам на кривой c отвечают две пары действительных корней.

На кривой d при достаточно больших s^2 угол α^0 близок к π , поэтому $r < 0$. При этом функция $W(\alpha, 0)$ достигает минимума. Поэтому все коэффициенты в (5.1) – положительные: точкам кривой d отвечают две пары чисто мнимых корней.

Из проведенного анализа выделяется один качественный результат. При любом s , за исключением бифуркационных значений, реализуется комбинация точек центр – седло, в которой равновесия принадлежат соседним кривым: $a - b$ и $c - d$. Согласно лемме 2 эти точки связываются симметричными движениями. Движения могут быть периодическими. Для обоснования этого предположения обратимся к глобальным семействам невырожденных СПД обратимой механической системы (1.2).

6. Глобальные семейства невырожденных СПД обратимой механической системы. Для редуцированной системы справедлива [6] теорема Ляпунова о существовании в окрестности равновесия, содержащего чисто мнимые корни характеристического уравнения, локального семейства периодических движений (теорема Ляпунова о центре). Эта теорема находит многочисленные приложения, в том числе в механике. Однако долго оставалась неясной граница применимости ляпуновского семейства. Прогресс в этом вопросе начался с работ [7, 8]. В [7] даны условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Theta \in \mathbb{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Theta$, эти результаты развиты в [8].

В обратимых механических системах вопрос о границе ставился [9, 10] как задача о двустороннем продолжении по периоду T любого невырожденного СПД на глобальное семейство невырожденных СПД. Глобальное семейство содержит все невырожденные СПД с непрерывно изменяющимся на семействе периодом T : оно ограничивается движениями, не принадлежащими семейству. К примеру, семейство колебаний математического маятника образует глобальное семейство, на фазовой плоскости оно ограничено равновесиями и сепаратрисами.

Далее излагается следующий результат: если в обратимой механической системе есть невырожденное СПД, то оно всегда продолжается на глобальное семейство невырожденных СПД. В [9, 10] результат о продолжении получался при наложении некоторых дополнительных условий.

Рассматривается гладкая обратимая механическая система (1.2). Необходимые и достаточные условия существования СПД с начальной точкой u^0 и периодом T даются равенствами

$$v_s(u^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2; \quad s = 1, \dots, n \quad (6.1)$$

отражающими факт двоекратного пересечения траекторией неподвижного множества.

Равенства (6.1) выполняются и в случае равновесия, но при этом число T не определяется.

Условия (6.1) сводятся к n равенствам, полученным при $\tau = 0, T/2$. Они содержат параметр T и приводят к семейству СПД по T . Вводится понятие невырожденного СПД.

Определение [9]. Случай

$$\text{rank} G(u^0, \tau) \neq n, \quad G(u^0, \tau) = \left\| \frac{\partial v_s(u^0, \tau)}{\partial u_j^0} \right\|, \quad \tau = 0, T/2 \quad (6.2)$$

называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.

Условия (6.2) заданы неравенствами и выполняются также в некоторой окрестности точки u^0 . Поэтому невырожденное СПД локально продолжается по периоду T или

то же самое – по скалярному параметру h семейства СПД, от которого зависит период: $T = T(h)$, $T' \neq 0$, где (\cdot) означает дифференцирование по h . При этом $u^0 = u^0(h) \in M$.

Ввиду важности указанного свойства невырожденного СПД формулируется и подробно доказывается лемма 3.

Лемма 3. Невырожденное СПД локально продолжается по периоду T (параметру h).

Доказательство. Пусть обратимая механическая система (1.2) допускает СПД с периодом T^* . Значит, система (6.1) имеет решение $u^0 = u^*$, $\tau = 0, T^*/2$. В его окрестности совместна линейная система

$$G(u^*, \tau)\delta u^0 + b(u^*, \tau)\delta t = 0$$

$$G(u^*, \tau) = \left\| \frac{\partial v_s(u^*, \tau)}{\partial u_j^0} \right\|, \quad b(u^*, \tau) = \left\| \frac{\partial v_s(u^*, \tau)}{\partial t} \right\|, \quad \tau = 0, T^*/2 \quad (6.3)$$

выводимая из (6.1) для вариаций δu^0 и δt . В начальной точке СПД:

$$b(u^*, 0) = V(u^*, 0) \neq 0$$

Для невырожденного СПД по определению $\text{rank}G(u^*, T^*/2) \neq 0$. Оно гарантирует единственность СПД данного периода T^* . Тогда единственность решения в начальной точке дается неравенством $\text{rank}G(u^*, 0) \neq 0$. При $\tau = T^*/2$ траектория СПД пересекает неподвижное множество: $u^{**} = u(u^*, T^*/2)$, $v^{**} = 0$. Поэтому $b(u^*, T^*/2) = V(u^{**}, 0) \neq 0$.

Равенства (6.3) рассматриваются при $\tau = 0, T^*/2$, как системы n линейных уравнений с $l \geq n$ неизвестными. В матрице $G(u^*, \tau)$ выделяется невырожденная квадратная матрица, которой отвечают переменные $\delta u_1^0, \dots, \delta u_n^0$. Тогда из систем (6.3) находятся $\delta u_1^0, \dots, \delta u_n^0$ как линейные функции δt и $\theta = (\delta u_{n+1}^0, \dots, \delta u_l^0)$. При $\delta t = 0$ и $\theta = 0$ имеем нулевое решение. Пусть $\delta t = 0$, $\theta \neq 0$. Тогда получается, что вместе с данным невырожденным СПД система допускает $(l - n)$ -семейство по параметру θ невырожденных СПД. Возникает задача продолжения по периоду T невырожденного СПД при фиксированном θ . При этом задача продолжения при $l > n$ сводится к задаче с $l = n$ для возмущенного ($\theta \neq 0$) СПД.

В случае $l = n$ получается, что точки пересечения СПД с неподвижным множеством меняются монотонно вместе с δt . При $\delta t \neq 0$ вариация $(\delta u_1^0, \dots, \delta u_n^0)$ становится ненулевой, а точки u^* и $u^* + \delta u^0$ при непрерывном изменении δt соединяются прямой, параметризованной посредством h . На этой прямой период $T(h)$ становится функцией переменной h . Если значению $h = h^*$ отвечает СПД с точкой u^* , то при двустороннем изменении δt получается $T'(h^*) \neq 0$. По теореме о неявной функции это приводит (локально) к монотонному по периоду T (по параметру h) продолжению СПД.

Лемма 3 доказана.

Из доказательства леммы 3 следует, что семейство невырожденных СПД может ограничиваться, в частности, равновесием (условие $V(u, 0) = 0$) или вырожденным СПД (условие $\text{rank}G < n, V(u, 0) \neq 0$).

Условия (6.2) выделяют на неподвижном множестве обратимой механической системы две области: начальных ($\tau = 0$) и конечных ($\tau = T/2$) точек невырожденных СПД. Эти точки связываются траекторией СПД. Области могут быть локальными, удовлетворяющими лемме 3, и глобальными, содержащими все точки связных открытых множеств. Глобальные области обозначаются соответственно через Λ_0 и Λ_T .

Оказывается, на основе свойства локальной продолжимости невырожденного СПД для любого невырожденного СПД конструируется содержащее его глобальное семейство невырожденных СПД. Лемма 3 справедлива для системы $l \geq n$, поэтому глобальное семейство заполняет в фазовом пространстве область размерности $l - n + 2$.

Справедлива теорема 2.

Теорема 2. Пусть обратимая механическая система (1.2) допускает невырожденное симметричное периодическое движение. Тогда оно всегда продолжается по периоду T на глобальное семейство невырожденных СПД, на котором период $T(h)$ монотонно зависит от параметра семейства h .

Доказательство. Пусть обратимая механическая система допускает невырожденное СПД. Тогда оно принадлежит локальному семейству невырожденных СПД. При этом начальные и конечные точки принадлежат соответственно областям $\Lambda_0^k \in \Lambda_0$ и $\Lambda_T^k \in \Lambda_T$. Согласно лемме 3 все СПД локального семейства продолжают по периоду T . При этом возникают две ситуации. В первой их них области Λ_0^k и Λ_T^k они не приобрели новых точек: глобальное семейство построено.

Во-второй ситуации области Λ_0^k и Λ_T^k расширяются (одновременно) в том смысле, что содержат все точки прежней области, а также новые точки. Значит, семейство невырожденных СПД получило продолжение по периоду T , как в сторону увеличения, так и уменьшения T . На полученном семействе монотонное изменение периода $T(h)$ от параметра семейства сохраняется.

На следующем шаге возникает такая же альтернатива, как на предыдущем шаге итерации.

В конечном результате получаются глобальные области Λ_0 и Λ_T , в которой выполняются условия (6.2). При этом точки этих областей связываются СПД, принадлежащими глобальному семейству невырожденных СПД. В областях выполняется условия $\text{rank}G(u^0, 0) = n$ и $\text{rank}G(u^0, T/2) = n$, на границе областей Λ_0 и Λ_T эти условия нарушаются. Глобальное семейство достигается за бесконечное число шагов. На глобальном семействе СПД период $T(h)$ является монотонной функцией постоянной энергии h .

Теорема 2 доказана.

Теорема 2 в случае $l = n$ приводилась по существу в [9, 10]. В формулировках [9, 10] накладывались условия: $V(u, 0) \neq 0$, $\delta V(u, 0) \neq 0$.

Следствие. Локальное ляпуновское семейство в обратимой механической системе продолжается на глобальное семейство симметричных колебаний (глобальная теорема Ляпунова о центре для СПД).

Доказательство. На ляпуновском семействе период T является монотонной функцией постоянной энергии, и семейство состоит из невырожденных СПД. По теореме 2 любое невырожденное СПД продолжается на глобальное семейство колебаний.

Глобальное семейство СПД обозначается через Σ . Оно заполняет $(l - n + 2)$ -инвариантное многообразие $\hat{\Sigma}$ в фазовом пространстве.

В рамках глобальной теоремы Ляпунова о центре для СПД семейство Σ может быть ограниченным по координате с неограниченно растущим периодом. Это происходит, когда граница $\partial\Sigma$ семейства Σ содержит центр и седло. Здесь СПД глобального семейства называются *маятниковыми колебаниями*.

Доказательство теоремы 2 сопровождается замечаниями.

1. Системы (6.3) с заменой u^* на u^0 выполняются на глобальном семействе тождественно по паре (u^0, τ) . При этом линейные дифференциальные формы

$$\xi_s \equiv \sum_{j=1}^n g_{sj}(u^0, \tau) \delta u_j^0 + b_s(u^*, \tau) \delta t, \quad \tau = 0, T/2, \quad s = 1, \dots, n \quad (6.4)$$

связаны условиями $\xi_s = 0$, $s = 1, \dots, n$. Они справедливы одновременно как при $\tau = 0$, так и при $\tau = T/2$. Поэтому формы (6.4) приводятся к виду, в котором, например, только формы с номером $s = 1$ содержат δt . Независимость остальных форм от δt означает, что глобальное семейство описывается обратимой механической системой (1.2) с переменными $u \in \mathbb{R}^{l-n+1}$, $v \in \mathbb{R}$.

2. Согласно теореме 2 при подходе к границе $\hat{\Sigma}$ производная $T'(h)$ стремится к нулю или бесконечности. В консервативной системе первый случай реализуется для центра или вырожденного СПД, второй – для центра, седла или неограниченного в фазовом пространстве СПД.

3. Глобальное семейство невырожденных периодических решений для автономной системы общего вида построено в [12]; глобальная теорема Ляпунова о центре дается в [12, следствие 1].

7. Семейства колебаний вращающегося тела. Для локальных периодических движений близ равновесия обратимой механической системы применяется аналог теоремы Ляпунова о центре. Основное отличие аналога от теоремы Ляпунова заключается в применимости его для системы, не допускающей первый интеграл. В исследуемой задаче (1.1) первый интеграл (энергии) существует. Поэтому нет принципиальных препятствий к применению результатов [9, 10] для нелокального продолжения ляпуновского семейства. Однако в [9, 10] не гарантируется достижения глобального семейства периодических движений, содержащих все возможные движения семейства.

Далее применяется теорема 2 о глобальном семействе невырожденных СПД, существование которой естественным образом следует из локального утверждения. Сама локальная теорема установлена в работах [13, 14] и названа в [13, 14] теоремой Ляпунова–Брюно–Девани.

Здесь система (1.2) в окрестности равновесия представляется в виде

$$\dot{u} = \hat{A}v + \dots, \quad \dot{v} = \hat{B}u + \dots, \quad u \in \mathbb{R}^l, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad l \geq n \quad (7.1)$$

где \hat{A} и \hat{B} – матрицы, в правых частях явно выписаны только линейные члены.

Приведем формулировку теоремы Ляпунова–Брюно–Девани [14].

Пусть: а) характеристическое уравнение системы (7.1) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda$, б) среди других корней этого уравнения нет равных $\pm ip\lambda$ ($p \in \mathbb{N}$), в) $\text{rank} \hat{B} = n$. Тогда к равновесию примыкает семейство симметричных периодических движений (СПД).

На семействе СПД период монотонно меняется с расстоянием от равновесия [14].

Теорема Ляпунова–Брюно–Девани применяется к обратимой механической системе (1.1). При этом находятся все возможные ляпуновские семейства, примыкающие к перманентным вращениям. В системе (1.1) переменные $u \in \mathbb{R}^4$ и $v \in \mathbb{R}^2$. Поэтому в системе (7.1) характеристическое уравнение имеет $l - n = 2$ нулевых корней. Согласно анализу в разд. 5 в регулярных по s диапазонах остальные корни для (7.1) не равны нулю. Поэтому в (7.1) получается $\text{rank} \hat{A} = \text{rank} \hat{B} = n$. Значит, условие в) теоремы Ляпунова–Брюно–Девани выполняется.

Локальные семейства, найденные по теореме Ляпунова–Брюно–Девани, продолжают на глобальные семейства невырожденных СПД (теорема 2). В итоге получают колебания вращающегося тела. Далее результаты приводятся для тела с характеристиками: $C > A$, $x_0 > 0$, $z_0 > 0$.

В диапазоне $-s < s < s^*$ функция $W(\alpha, 0)$ при фиксированном s возрастает от точки A_1 кривой a до точки B_1 кривой b (рис. 1), само перманентное вращение в точке A_1 содержит две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_{1,2}$, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, а перманентное вращение в точке B_1 — две пары действительных корней противоположного знака, равных по модулю $|\lambda_{1,2}|$. Согласно теореме Ляпунова—Брюно—Девани из точки A_1 начинается ляпуновское семейство, отвечающее корню λ_1 , которое согласно теореме 2 продолжается на глобальное семейство колебаний. При этом глобальное семейство согласно теореме 1 принадлежит пересечению сферы Пуассона и уровня интеграла $K = s$. В силу замечания 1 к теореме 2 глобальное семейство описывается консервативной системой с одной степенью свободы. Его границей является седловая точка B_1 на кривой b . Поэтому период колебаний монотонно возрастает вместе с $W(\alpha, 0)$, пока угол α не достигает граничного значения в точке B_1 . Реализуется глобальное семейство маятниковых колебаний.

При выполнении условия $\lambda_2 \neq p\lambda_1$, $p \in \mathbb{N}$, по теореме Ляпунова—Брюно—Девани в точке A_1 берет начало также другое — второе ляпуновское семейство, которое при продолжении по теореме 2 приводит к глобальному семейству СПД, отвечающему корню λ_2 : это семейство также связывает точки A_1 и B_1 . Следовательно, устойчивое и неустойчивое перманентные вращения связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний. При этом в указанных глобальных семействах реализуется один и тот же сценарий достижения предельного значения периода: для точки A_1 период $T \rightarrow T_* \neq 0$, для точки B_1 период $T \rightarrow +\infty$. Согласно анализу функции $W(\alpha, x)$ (разд. 5) начальные и конечные точки СПД глобальных семейств маятниковых колебаний принадлежат соответственно кривым $\delta = \alpha$ и $\delta = \alpha + x + o(x)$.

Таким образом, с учетом результата, полученном в [10] для равновесий тела, получается, что в диапазоне $-s^* < s < s^*$ два глобальных семейства колебаний вращающегося тела связывают устойчивое и неустойчивое перманентные вращения.

По такому же сценарию реализуются в диапазоне $(-\infty < s < -s^*) \cup (s^* < s < +\infty)$ глобальные семейства, начинающиеся на устойчивых перманентных вращениях кривой d (рис. 1). Здесь функция $W(\alpha, 0)$ убывает между кривыми c и d . Реализуются два глобальных семейства маятниковых колебаний вращающегося тела.

Далее в этом же диапазоне рассматривается точка A_2 на кривой b (рис. 1). Ей отвечает пара чисто мнимых корней $\pm\lambda_1$. К точке A_2 примыкает ляпуновское семейство, которое согласно теореме 2, продолжается на глобальное семейство, ограниченное точкой B_2 на кривой a . Точки пересечения СПД с неподвижным множеством согласно анализу в разд. 5 принадлежат прямой l_1 . Поэтому при подходе к точке B_2 период колебаний стремится к бесконечности: B_2 отвечает седлу. Перманентные вращения связываются глобальным семейством маятниковых колебаний.

Наконец, обратимся к точке B_2 на кривой a (рис. 1). Она содержит пару чисто мнимых корней $\pm\lambda_2$, которой отвечает ляпуновское семейство. По теореме 2 ляпуновское продолжается на глобальное семейство колебаний. Из анализа функции $W(\alpha, x)$ (разд. 5) следует, что точки пересечения СПД с неподвижным множеством принадлежат кривой l_2 . Поэтому период колебаний ограничивается наличием чисто мнимых корней для точки на кривой d : на границе глобального семейства неизбежно реализуется сценарий $T' \rightarrow 0$.

Проведенный анализ остается справедливым и в других случаях, когда $C \neq A$, $x_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$. С учетом этого обстоятельства формулируется основной результат.

Теорема 3. Тяжелое твердое тело с неподвижной точкой и центром, расположенным в главной плоскости эллипсоида инерции, допускает глобальные семейства колебаний вращающегося тела. Они существуют в регулярных для кинетического момента диапазонах, где $s \neq 0, \pm s^*$, s^* – бифуркационное значение.

В диапазоне

$$1. \quad -s^* < s < 0, \quad 0 < s < s^*$$

в теле наблюдаются устойчивые и неустойчивые перманентные вращения. При фиксированном s они связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний вращающегося тела.

В диапазоне

$$2. \quad -\infty < s < -s^*, \quad s^* < s < \infty$$

в теле наблюдаются четыре семейства перманентных вращений, из которых два семейства рождаются в результате бифуркации. Точки рождающихся семейств (устойчивых и неустойчивых) при каждом s связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний вращающегося тела. Остальные два семейства являются продолжением семейств, примыкающих к равновесиям тела. Эти семейства связываются только одним глобальным семейством маятниковых колебаний вращающегося тела. Для семейства, исходящего из нижнего равновесия тела, период движений при подходе к границе глобального семейства стремится к конечному числу.

Заметим, что частные случаи задачи, в которых реализуется равенство между параметрами тела, также анализируются с помощью теоремы Ляпунова–Брюно–Девани и теоремы 2.

8. Заключение. Тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой и центром масс, расположенным в главной плоскости эллипсоида инерции, допускает маятниковые движения Млодзиевского [15]. Они состоят из СПД типа колебаний и СПД типа вращений [2] с горизонтальной осью. В последнем типе движений колебания накладываются на равномерные вращения. Наряду с этими движениями, тело допускает второе – пространственное семейство маятниковых колебаний, соединяющее нижнее (устойчивое) и верхнее (неустойчивое) равновесия тела [10]. На указанных движениях кинетический момент тела $s = 0$.

Перманентные вращения тела происходят вокруг вертикальной оси и реализуются, когда $s \neq 0$. Вместе с ними наблюдаются глобальные семейства маятниковых колебаний вращающегося тела.

В диапазонах изменения кинетического момента

$$1. \quad -s^* < s < 0, \quad 0 < s < s^*$$

в теле реализуются два семейства перманентных вращений, одно из которых примыкает к нижнему (устойчивому) равновесию, другое – к верхнему (неустойчивому) равновесию. Семейства наследуют свойство устойчивости равновесий тела. При каждом фиксированном s устойчивое и неустойчивое перманентные вращения связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний вращающегося тела.

В диапазоне

$$2. \quad -\infty < s < -s^*, \quad s^* < s < \infty$$

в теле реализуются четыре семейства перманентных вращений, из которых два семейства рождаются в результате бифуркации. Точки рождающихся семейств (устойчивых и неустойчивых) при каждом s связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний вращающегося тела. Остальные два семейства являются продолжением семейств, примыкающих к равновесиям тела. Эти семейства связываются только одним глобальным семейством маятниковых колебаний вращающегося тела. Для

семейства, исходящего из нижнего равновесия тела, при $|s| > |s^*|$ период движений при подходе к границе глобального семейства стремится к конечному числу.

Выводы справедливы для тела, в котором $C \neq A$, $x_0 \neq z_0$, $y_0 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. В. 4. С. 578–586.
2. *Тхай В.Н.* Вращательные движения механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. В. 2. С. 79–195.
3. *Ганешенко И.Н., Горп Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. Т. 7. Киев: Наукова думка, 2012. 401 с.
4. *Холостова О.В.* Об устойчивости перманентных вращений Штауде в общем случае геометрии масс твердого тела // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 3. С. 357–375.
5. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами. Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1975. С. 121–200.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
7. *Zevin A.A.* Nonlocal generalization of Lyapunov theorem // Nonlinear analysis, theory, methods and applications. 1997. V. 28. № 9. P. 1499–1507.
8. *Zevin A.A.* Global continuation of Lyapunov centre orbits in Hamiltonian systems // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 1339–1349.
9. *Тхай В.Н.* Колебания и равновесия в обратимой механической системе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2021. В. 4. С. 709–715. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.416>
10. *Tkhai V.N.* Spatial oscillations of a physical pendulum // Proc. 2022 16th Int. Conf. on stability and oscillations of nonlinear control systems (Pyatnitskiy’s Conference). IEEE, 2022. P. 21844085. <https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807507>.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.
12. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // Автомат. и телемех. 2023. № 5. С. 30–44.
13. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к N -планетной задаче // ПММ. 1998. Т. 62. В. 1. С. 56–72.
14. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // ПММ. 2000. Т. 64. В. 1. С. 46–58.
15. *Млодзиевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этнограф. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.

УДК 539.3

К 70-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ А.О. ВАТУЛЬЯНА

DOI: 10.31857/S0572329923600500, EDN: JEQGKI

8 октября 2023 г. исполняется 70 лет одному из ведущих ученых России, профессору, доктору физико-математических наук, заслуженному деятелю науки РФ, почетному работнику высшего профессионального образования РФ Ватульяну Александру Ованесовичу.

Научные интересы А.О. Ватульяна лежат в области классических и неклассических моделей механики сплошной среды. Особого внимания заслуживают его работы, посвященные исследованию задач о колебаниях анизотропных упругих и электроупругих слоистых сред со смешанными граничными условиями при наличии полостей и трещин. Для этого класса задач А.О. Ватульяном был развит метод граничных интегральных уравнений на основе предложенных им интегральных представлений фундаментальных решений, разработана экономичная реализация метода граничных элементов для сред с анизотропией различного типа. Следует отметить общие результаты, связанные с решением обратных коэффициентных задач, которые с успехом применяются к важным прикладным задачам идентификации неоднородного предварительного напряженного состояния, для идентификации свойств тканей в биомеханике, в первую очередь, для определения свойств костного регенерата, а также при анализе колебаний биомеханических конструкций, использующихся при хирургическом лечении переломов. Кроме того, А.О. Ватульян разработал теоретические основы идентификации упругих и вязких свойств кожного покрова на основе акустического мониторинга.

А.О. Ватульян – автор более четырехсот научных работ и ряда монографий. Является постоянным членом редколлегии журналов “Известия РАН. Механика твердого тела”, “Экологический вестник ЧЭС”, “Владикавказский математический журнал”, “Российский журнал биомеханики”, “Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика”, “Известия НАН РА. Механика”.

Большое внимание профессор А.О. Ватульян уделяет научно-педагогической и организационной работе, подготовке молодых ученых и специалистов. Он был научным консультантом по трем докторским диссертациям, под его руководством защитились более 30 кандидатов физико-математических наук, многие из которых продолжают вести активные научные исследования. А.О. Ватульян активно участвует в организации и проведении научных конференций и школ (ежегодные, начиная с 1995 г. конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”; с 2006 г. – “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете”). А.О. Ватульян – член Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике (с 2006), член Совета РАН по механике деформируемого твердого тела, руководитель грантов РФФИ и РНФ, член диссертационных советов при ЮФУ и ДГТУ.

А.О. Ватульян – человек с широким кругозором, его опыт и высочайшая научная квалификация высоко оцениваются в профессиональном сообществе ученых-механиков.

Редакция журнала сердечно поздравляет Александра Ованесовича Ватульяна с юбилеем, от всей души желает здоровья, счастья и дальнейших творческих успехов.