

Известия

ISSN 1026-3519

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



НАУКА
— 1727 —

2024

5

СОДЕРЖАНИЕ

О взаимосвязи результатов аналитических решений задач теории упругости и оптимизации напряженного состояния в окрестности особых точек <i>А. Ю. Федоров, В. П. Матвееenko</i>	3
О нестационарных контактных задачах для анизотропных композитов в неклассических областях <i>В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, С. Б. Уафа, В. С. Евдокимов, О. М. Бабешко</i>	18
О сборке горячей посадкой упруговязкопластического диска с некруговым включением <i>А. А. Буренин, А. В. Ткачева</i>	29
Эллиптический погранслой в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа <i>И. В. Кириллова</i>	48
Производство тепла за счет деформаций ползучести и пристеночного вязкопластического течения в материале пробки в круглой трубе под действием переменного перепада давления <i>Л. В. Ковтанюк, Г. Л. Панченко, Е. О. Попова</i>	60
Динамический изгиб балки <i>В. В. Саурин</i>	78
Электроупругость пьезоволоконного дискового актюатора <i>А. А. Паньков</i>	97
О влиянии неклассического диффузионного процесса на длительное разрушение составного растягиваемого стержня в процессе ползучести <i>Л. В. Фомин, А. А. Далинкевич, Ю. Г. Басалов</i>	122
Описание явления уменьшения пластичности с увеличением предела текучести поликристалла <i>В. Ю. Марина</i>	138
Применение неинкрементального подхода для осесимметричного расчета больших деформаций методом конечных элементов в тензорно-матричной форме <i>В. В. Чехов</i>	164

Ориентация зоны локализованной поврежденности в хрупком твердом теле при истинном трехосном сжатии <i>И. А. Пантелеев, Д. В. Ложкин, В. А. Ляховский</i>	187
Усталостная прочность при высокочастотном нагружении материалов, полученных методом селективного лазерного плавления <i>И. С. Никитин, Н. Г. Бураго, А. Д. Никитин, Б. А. Стратула</i>	210
Расслоение полосы, состоящей из двух одинаковых ортотропных полуполос с осями изотропии, симметрично наклоненными к границе раздела <i>К. Б. Устинов, Н. Л. Борисова</i>	235

УДК 539.3

О ВЗАИМОСВЯЗИ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ОПТИМИЗАЦИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

© 2024 г. А. Ю. Федоров^{а,*}, В. П. Матвеев^{а,**}

^аИнститут механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

^{*}e-mail: fedorov@icmm.ru, ^{**}e-mail: mvp@icmm.ru

Поступила в редакцию 02.08.2024 г.

После доработки 10.08.2024 г.

Принята к публикации 12.08.2024 г.

В работе приводятся результаты двух направлений исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек упругих тел, а именно: смены типа граничных условий; края поверхности контакта различных материалов. Результатом первого направления являются решения задач теории упругости в окрестности особых точек, из которых следует возможность бесконечных напряжений в этих точках. Второе направление связано с анализом численными и экспериментальными методами напряженного состояния в окрестности особых точек, которые, как правило, имеют место при моделировании реальных объектов и являются потенциальными зонами концентрации напряжений. Основным содержанием работы является установление на основе сопоставления результатов двух направлений взаимосвязи вариантов с минимальным уровнем напряжений в окрестности особых точек с результатами о характере сингулярности напряжений в этих точках.

Ключевые слова: упругость, сингулярность напряжений, концентрация напряжений, оптимизация геометрии, распределение напряжений на границе раздела

DOI: 10.31857/S1026351924050013, EDN: UBYNIB

1. Введение. Одним из результатов классической теории упругости является возможность существования сингулярных решений, связанных с появлением бесконечных значений напряжений в особых точках поверхности, где имеет место нарушение ее гладкости, происходит смена типа краевых условий, контактируют различные материалы, а также внутри тела, в точках нарушения условия гладкости поверхности контакта различных материалов. Примером теоретических обоснований появления сингулярных решений является работа [1], где было показано, что для уравнений линейной теории упругости в окрестности угловых точек имеет место решение вида

$$\sigma \sim \sum_{n=1} K_n f_n r^{\lambda_n - 1}, \text{ при } r \rightarrow 0, \quad c < \operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_n < \dots \quad (1.1)$$

или более сложное, с логарифмическими составляющими в случае кратных точек спектра λ_n . Здесь r — расстояние до угловой точки, K_n — коэффициенты интенсивности напряжений; f_n — функции углового распределения поля напряжения σ в окрестности угловой точки, в плоском случае зависящие от одной полярной угловой переменной φ при этом $c = 0$, в пространственном — от двух сферических координат φ, θ при $c = -0.5$. Из представления решения (1.1) следует, что если среди λ_n имеется хотя бы одно, удовлетворяющее условию $\operatorname{Re} \lambda_n < 1$, то напряжения стремятся к бесконечности при r , стремящимся к нулю.

Изучением поведения напряжений в окрестностях особых точек занимаются многие исследователи. Для двумерных и трехмерных задач линейной теории упругости рассмотрены различные варианты особых точек. Достаточно полно результаты, достигнутые в этой области, представлены в обзорных работах [2–6].

Особые точки и связанные с ними сингулярные решения с одной стороны представляют теоретический интерес, а с другой стороны, они достаточно часто встречаются в расчетных схемах прикладных задач и их окрестности, как правило, являются зонами ярко выраженной концентрации напряжений. В настоящей работе представлен обзор результатов решения оптимизационных задач, связанных с поиском вариантов, обеспечивающих минимальный уровень концентрации напряжений в окрестности особых точек. Основным содержанием работы является установление взаимосвязи оптимальных решений в окрестности особых точек с характером сингулярности напряжений в этих точках.

2. Точка поверхности со сменой типа граничных условий. Примером задачи, в которой есть особые точки, где имеет место смена типа граничных условий, является представленный на рис. 1, а цилиндр, находящийся под действием массовых сил с неподвижной внешней поверхностью и свободной от нагрузок внутренней и торцевых поверхностями. Для данного цилиндра была решена задача поиска геометрии торцевых поверхностей, обеспечивающих минимальные напряжения в окрестности особой точки — пересечение торцевой и внешней поверхности [7]. Оптимизационные задачи решались при ограничениях, обеспечивающих поиск геометрии в пределах заданных размеров h, l . Результатом решения оптимизационных задач являются геометрии для соответствующих ограничений h, l . Общим свойством этих геометрий является угол сопряжения свободной торцевой и внешней неподвижной поверхностей — α .

Аналогичная по постановке задача была рассмотрена в работах [8, 9], где для цилиндра, представленного на рис. 1, б, необходимо было найти геометрию боковой поверхности в окрестности точек, где имеет место смена типа граничных условий, при ограничениях h, l , за пределы которых не может выходить искомая геометрия. Были рассмотрены два варианта оптимизационной задачи. В первом — геометрия должна обеспечивать минимальную

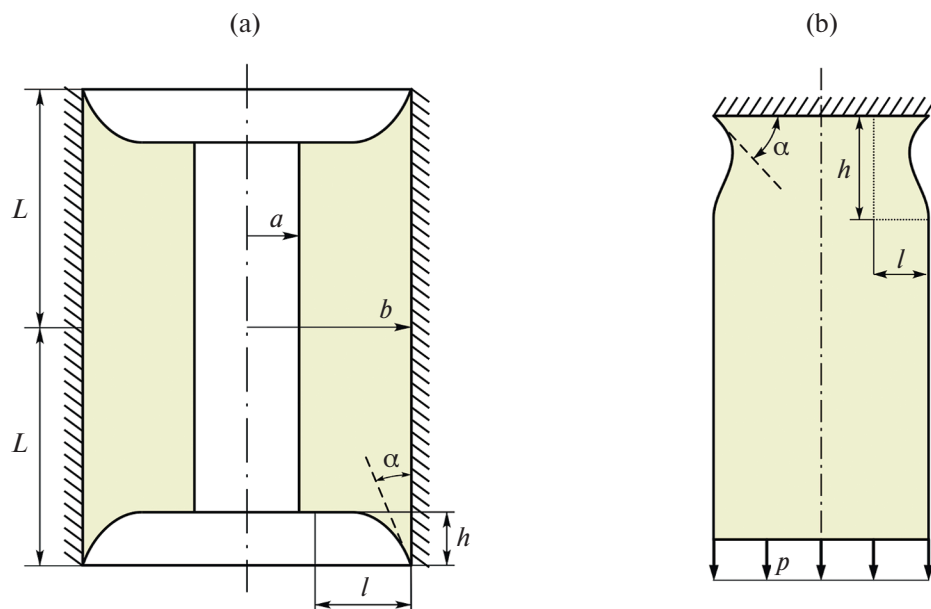


Рис. 1. Расчетные схемы для цилиндров, находящихся под действием массовых сил (а) и растягивающих усилий (б).

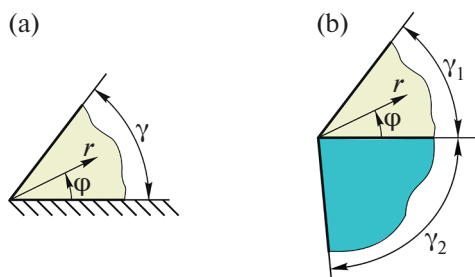


Рис. 2. Однородный (а) и составной (б) плоские клинья в полярных координатах.

интенсивность касательных напряжений, во втором варианте — наименьшее отклонение отрывных напряжений на закрепленном торце от их среднего значения. Основным результатом решения оптимизационных задач является то, что все найденные геометрии для соответствующего значения коэффициента Пуассона материала имеют одинаковый угол сопряжения свободной от нагрузок и неподвижной поверхностей — α .

Для рассматриваемого типа особой точки вывод о наличии сингулярных решений может быть сделан на основе анализа собственных решений для клина (рис. 2, а), одна грань которого неподвижна, а вторая свободна от напряжений [10]:

$$u_r^i = r^{\lambda_i} \xi_r^i(\phi), \quad u_\phi^i = r^{\lambda_i} \xi_\phi^i(\phi).$$

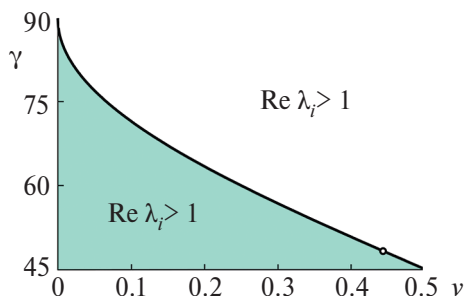


Рис. 3. Области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений (угол γ в градусах).

Здесь u_r^i, u_ϕ^i — компоненты вектора перемещений в полярной системе координат; ξ_r^i, ξ_ϕ^i — собственные функции; λ_i — собственные значения.

При наличии среди собственных значений хотя бы одного, удовлетворяющего условию $\text{Re } \lambda_i < 1$, напряжения в вершине клина принимают бесконечные значения. Для данного типа особой точки собственные значения λ_i определяются значением угла раствора клина γ и значением коэффициента Пуассона материала ν . На рис. 3 в области параметров γ, ν приведена кривая, которая для первого собственного значения разделяет области решений с сингулярностью напряжений ($\text{Re } \lambda_i < 1$) и решений без сингулярности напряжений ($\text{Re } \lambda_i \geq 1$).

Для рассматриваемого типа особой точки взаимосвязь сингулярных решений с геометриями, обеспечивающими минимальный уровень концентрации напряжений в окрестности особых точек, определяется следующим условием. Для оптимальных геометрий угол сопряжения свободной и неподвижной поверхностей вместе с коэффициентом Пуассона материала являются одной из точек на кривой (рис. 3), разделяющей решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

Результат о взаимосвязи сингулярных решений и концентрации напряжений в окрестности особой точки в работе [11] получил экспериментальное подтверждение. Цилиндрические образцы из полиметилметакрилата марки СТ-1 (рис. 4, а) были испытаны при растяжении и консольном изгибе. Образцы имели выточки на боковой поверхности с разными углами сопряжения свободной боковой поверхности и стальной поверхностью, к которой приклеены образцы. Необходимо отметить, что модуль упругости стали почти на два порядка больше модуля упругости полиметилметакрилата, то есть в данном случае верхнюю поверхность цилиндрического образца можно рассматривать как неподвижную. На рис. 4, б представлены зависимости усилия отрыва от величины угла α . Результаты эксперимента демонстрируют, что максимальные усилия отрыва, которые можно полагать реализуются при минимальной концентрации напряжений, имеют место при угле $\alpha \approx 48^\circ$, который вместе со значением коэффициента Пуассона полиметилметакрилата ($\nu \approx 0.45$) дает точку на кривой, разделяющей решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

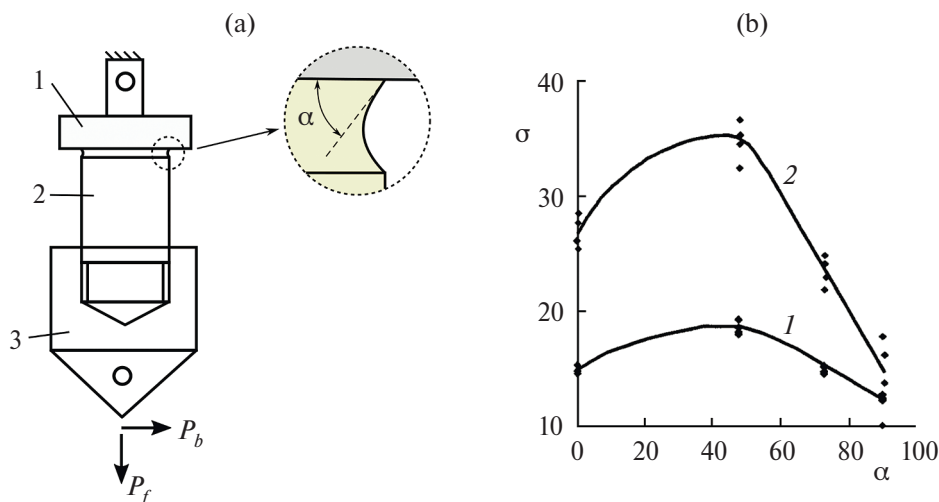


Рис. 4. Схема испытаний: 1 — стальной грибок, 2 — образец, 3 — нижний захват (а); зависимость прочности соединения σ (в МПа) от угла стыка α (в градусах) при нормальном отрыве (1) и при консольном изгибе (2) (б).

3. Край поверхности соединения различных материалов. В расчетных схемах прикладных задач теории упругости достаточно часто имеет место тип особой точки, представляющий край поверхности соединения различных материалов. Поведение напряжений в окрестности данной особой точки может быть проанализировано на основе анализа собственных решений для составного клина (рис. 2, б), боковые грани которого свободны от напряжений, а на поверхности соединения различных материалов выполняются условия идеального контакта [12]. Собственные значения, определяющие характер сингулярности напряжений в окрестности особой точки, зависят в данном случае от углов раствора γ_1, γ_2 частей составного клина, коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 и отношения модулей упругости E_2/E_1 .

В работе [8] была рассмотрена задача для двухслойного цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления (рис. 5). Решалась задача оптимизации, связанная с поиском геометрии торцевых поверхностей в окрестности особой точки — края поверхности соединения различных материалов — обеспечивающей минимальное значение интенсивности касательных напряжений в окрестности особой точки. Ограничения h, l_1, l_2 определяют допустимую область изменения геометрии. Результатом решения оптимизационных задач являются геометрии торцевых поверхностей для разных комбинаций механических характеристик материалов и ограничений h, l_1, l_2 . Для каждой из комбинаций механических характеристик материалов найденные оптимальные геометрии имеют одинаковые углы сопряжения α_1, α_2 в особой точке свободных от нагрузок поверхностей и поверхности соединения материалов.

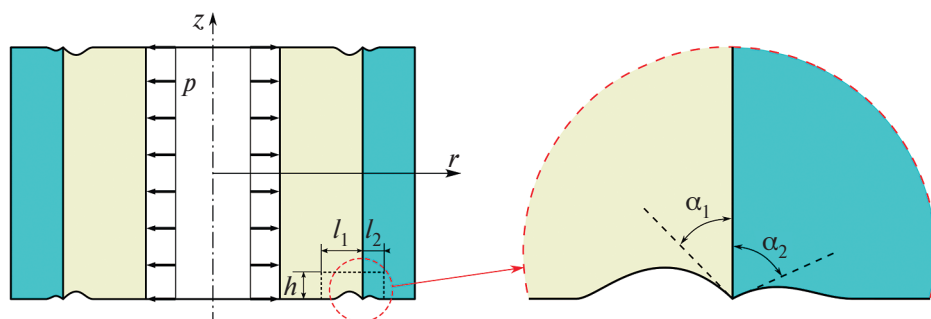


Рис. 5. Расчетная схема двухслойного полого цилиндра.

Взаимосвязь полученных результатов с сингулярными решениями определяется следующим образом. Для составного клина для каждой из комбинаций значений $\nu_1, \nu_2, E_2/E_1$ в области параметров γ_1, γ_2 может быть построена кривая, разграничивающая области решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Углы оптимальных поверхностей α_1, α_2 соответствуют точке на этой кривой.

На основе анализа решений для составного клина в работе [13] было экспериментально продемонстрировано, что комбинации значений углов и механических характеристик материалов, соответствующие несингулярному решению задачи о собственных значениях в вершине составного клина обеспечивают «малонапряженное состояние в окрестности края поверхности контакта составного тела». Аналогичные результаты устранения концентрации напряжений в окрестности края поверхности контакта соединения различных материалов на основе выбора геометрий, при которых отсутствуют сингулярные решения, приведены в работах [14–18]. Здесь следует выделить работу [14], где показано, что среди геометрий с углами из области решений без сингулярности напряжений наименьший уровень напряжений вдоль поверхности контакта разных материалов наблюдается для геометрии с углом, близким к критическому (разделяющим решения с сингулярностью напряжений и без нее).

В работе [19] на примере соединения двух трапециевидных пластин из различных материалов (рис. 6) в результате решения оптимизационной задачи также было показано, что минимальный уровень напряжений на поверхности соединения материалов соответствует границе между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

В работе [20] проанализирована неединственность значений углов, обеспечивающих оптимальный вариант. Был рассмотрен составной цилиндр, представленный на рис. 7, а. Рассматривалась задача поиска оптимальной формы боковой поверхности при использовании в качестве изменяемой части боковой поверхности дуг окружности. В качестве критериев оптимизации использовались значения интенсивности напряжений в одной из составных частей цилиндрического тела, либо условие, обеспечивающее наименьшее отклонение напряжений по поверхности соединения от их среднего значения на этой поверхности. В одном из рассмотренных вариантов были следующие

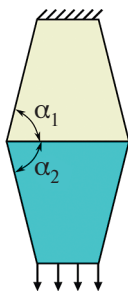
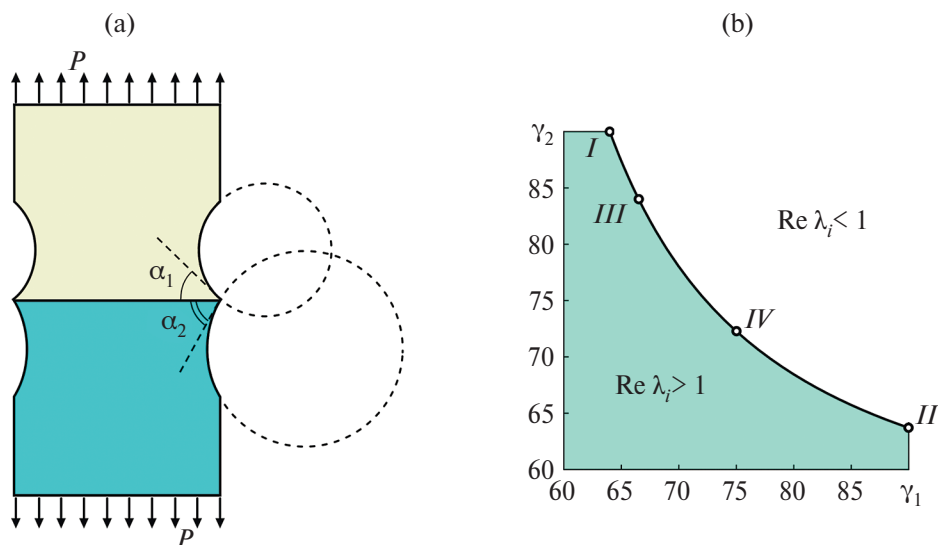


Рис. 6. Соединение двух трапециевидных пластин.

Рис. 7. Расчетная схема для составного цилиндра (а); кривая, разделяющие решения с сингулярностью и без сингулярности в плоскости параметров γ_1 и γ_2 (для $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $E_2/E_1 = 10$) (б).

значения упругих постоянных: $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $E_2/E_1 = 10$. На рис. 7, б для этого варианта представлена кривая, разделяющая в области значений γ_1 , γ_2 решения с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

Рассмотрены различные варианты оптимизационных задач. Сначала оптимизацию геометрии провели только для верхней, менее жесткой, части составного цилиндра. Для рассмотренных критериев оптимизации была получена одна оптимальная геометрия с углом $\gamma_1 = 64.05^\circ$ (точка I на рис. 7, б). Другая серия расчетов была выполнена, когда оптимизировалась геометрия нижней, более жесткой, части составного цилиндра. В этом случае параметры оптимальных решений определяют точку II на рис. 7, б. В следующей серии расчетов оптимизируется геометрия боковых поверхностей верхней и нижней частей составного цилиндра. В этой серии использовались три варианта критериев оптимизации. В первом варианте рассмотрено

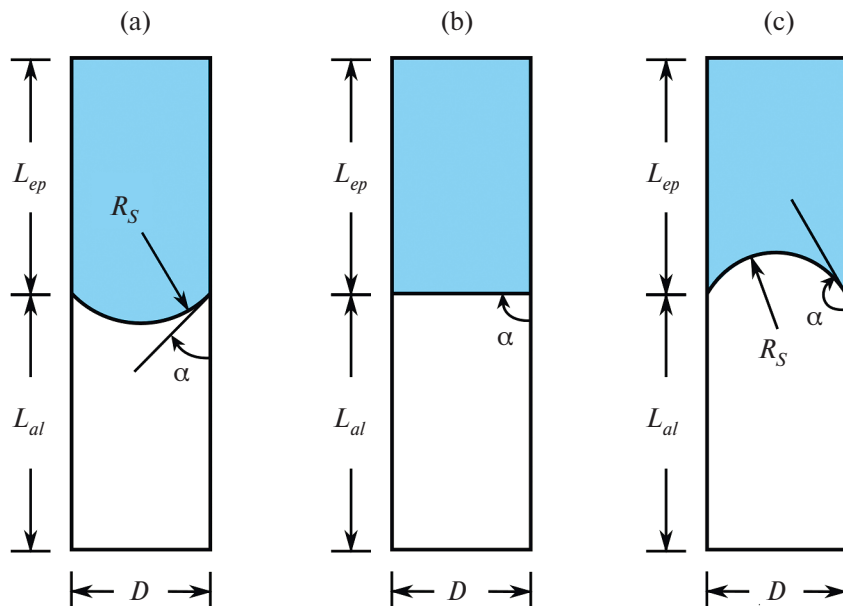


Рис. 8. Геометрии образцов.

использование максимального значения интенсивности напряжений в верхней (менее жесткой) части составного цилиндра. В этом случае значения углов γ_1 и γ_2 у оптимальной поверхности определяют точку III на рис. 7, b. При использовании максимального значения интенсивности напряжений в нижней (более жесткой) части составного цилиндра значения углов γ_1 и γ_2 оптимальной поверхности соответствуют точке I на рис. 7, b. В третьем варианте использовалось условие, обеспечивающее наименьшее отклонение напряжений по поверхности идеального соединения от их среднего значения на этой поверхности. В этом случае значения углов γ_1 и γ_2 у оптимальной поверхности определяют точку IV на рис. 7, b.

При анализе взаимосвязи сингулярных решений и концентрации напряжений в окрестности особых точек представляет интерес работа [21], где приведены экспериментальные результаты различных вариантов соединения двух материалов (рис. 8). Сравнивались усилия разрушения соединения цилиндрических образцов из алюминия 6061T6 и эпоксидного клея Epox 815 при разных углах сферической поверхности контакта. Ключевым параметром для этой поверхности контакта является угол α , определяющий геометрию в окрестности особой точки. В работе показано существование угла, при котором обеспечивается наибольшая прочность соединения. Данный угол, в совокупности с механическими характеристиками алюминия и эпоксидного клея, определяет границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений, но такое обобщение в работе отсутствует.

4. Сети поверхностных трещин. На поверхности материалов могут возникать не только одиночные трещины, но и сети трещин, которые встречаются

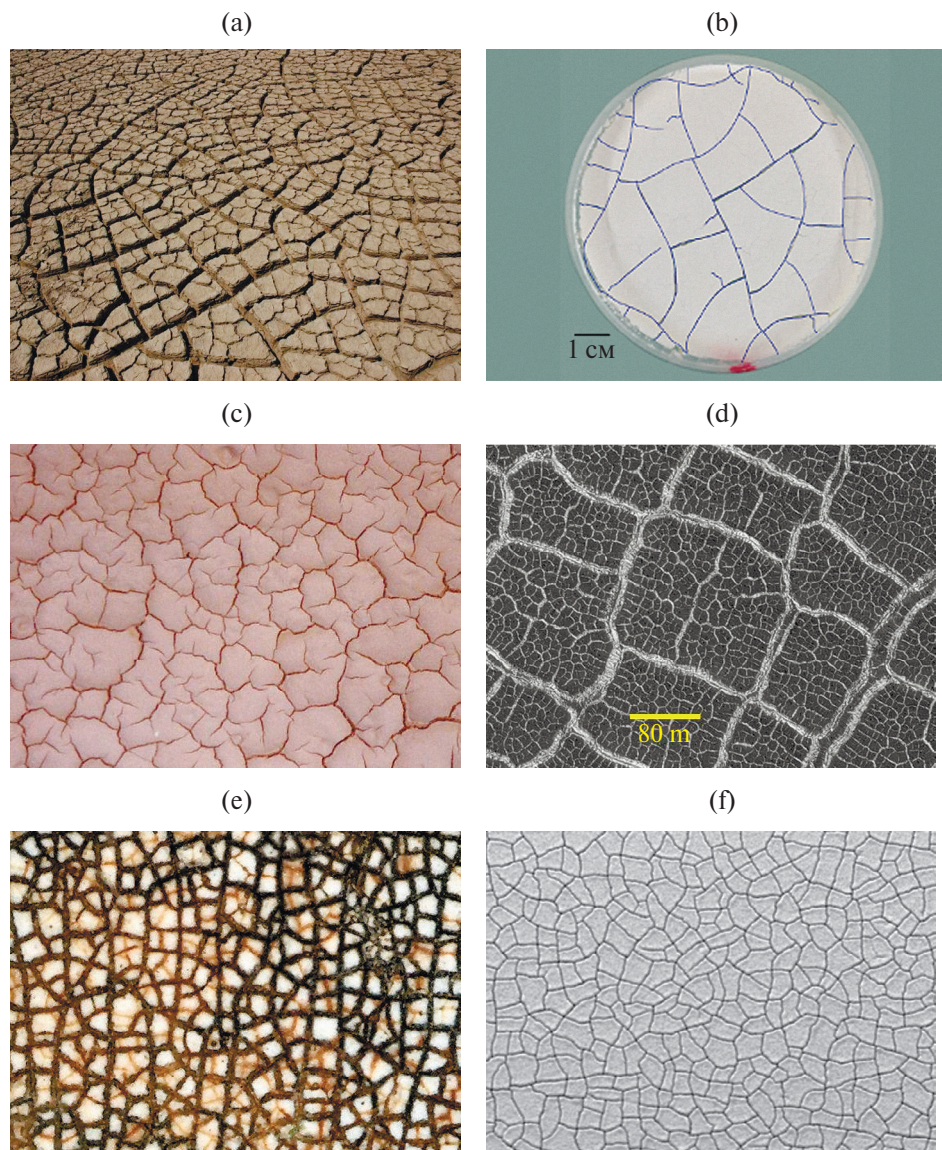


Рис. 9. Фотографии поверхностных трещин: треснувшая земля в Rann of Kutch (Индия) (a); высушенный водный раствор кукурузного крахмала [29] (b); поверхность высохшего солончака (Сицилия) (c); трещины на дне ударного кратера на Марсе [30] (d); старая керамическая поверхность (e); поверхность образца из жаропрочной стали после испытания на термическую усталость [26] (f).

как на природных, так и на техногенных объектах. На рис. 9 показаны типичные картины поверхностных трещин. Структура трещин имеет повторяющиеся систематические рисунки вне зависимости от материала, что привлекает

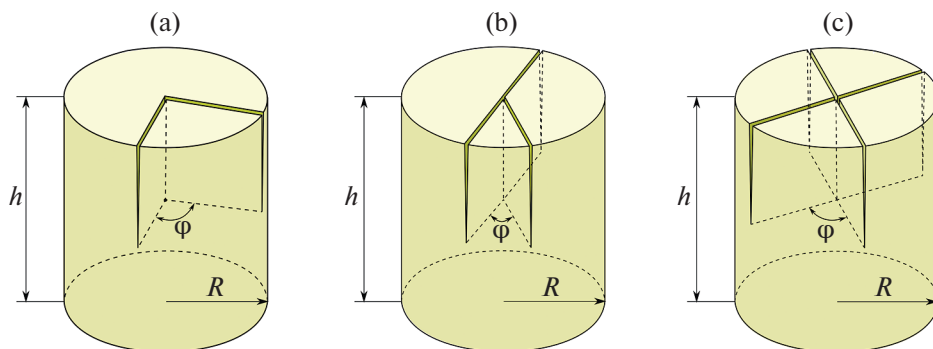


Рис. 10. Расчетная схема пересечения двух (а), трех (б) и четырех (с) клиновидных трещин.

внимание многих исследователей. Опубликовано большое количество работ, связанных с изучением механизмов распространения трещин на поверхности различных материалов, однако до сих пор нет объяснений, почему получается тот или иной узор.

В работах [22–24] отмечается, что сети трещин в основном состоят из четырех типов многоугольных фрагментов: треугольников, четырехугольников, пятиугольников и шестиугольников, при этом наиболее распространены варианты пересечений трех или четырех трещин. Некоторые исследователи отметили следующую закономерность в точках пересечения трех и четырех трещин на поверхности, а именно: три трещины чаще сходятся под углом $\sim 120^\circ$ [24–27], а четыре трещины сходятся под углом $\sim 90^\circ$ [24–26, 28].

В работе [31] рассмотрен вариант взаимосвязи сингулярных решений с картиной поверхностных трещин на основе пространственной модели клиновидных трещин, представляющей пересечение двух, трех, четырех клиновидных трещин, вершина пересечения которых является особой точкой (рис. 10). Получено сопоставление результатов численного моделирования пересечения двух, трех, четырех клиновидных трещин с реальными картинами сеток поверхностных трещин. Для двух трещин, пересекающихся под углом φ (рис. 10, а), обнаружена корреляция между значением угла φ , при котором достигается максимум средней плотности энергии деформаций в малой сфере, центр которой расположен в особой точке и величиной угла излома линии сетки трещин на поверхности бетона. При этом минимум средней плотности энергии деформаций имеет место при минимальном значении показателя, определяющего характер сингулярности напряжений.

Аналогично для трех трещин рассмотрены две наиболее распространенные конфигурации: Y и T. Установлено, что для T-конфигурации максимуму средней плотности энергии деформаций и наименьшему значению показателя сингулярности напряжений отвечает угол $\varphi = 90^\circ$, что полностью соответствует симметричной T-конфигурации, встречающейся в реальных картинах поверхностных трещин. Для X-конфигурации из четырех трещин выявлено, что максимум средней плотности энергии деформаций и наименьшее значение

показателя сингулярности имеют место, когда все углы между четырьмя трещинам равны. Это также совпадает с закономерностью, наблюдаемой в реальных картинах трещин.

5. Заключение. В работе представлены результаты классической теории упругости, связанные с построением решений в окрестности особых точек, где имеет место смена типа граничных условий, край поверхности контакта различных материалов, и результаты решения прикладных задач поиска оптимальных вариантов с минимальным уровнем концентрации напряжений в окрестности особых точек. Основным результатом работы является констатация взаимосвязи оптимальных решений в окрестности особых точек с характером сингулярности напряжений в этих точках, которая заключается в следующем: углы, определяющие в окрестности особых точек геометрию оптимального варианта, и упругие постоянные материалов в соответствующей задаче теории упругости для окрестности особых точек определяют границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Кроме этого, приводятся результаты, позволяющие рассматривать для поверхностных трещин вариант взаимосвязи результатов с сингулярным поведением напряжений со структурой поверхностных трещин.

Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
2. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57. № 4. P. 251–297.
<https://doi.org/10.1115/1.1762503>
3. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // Appl. Mech. Rev. 2004. V. 57. № 5. P. 385–439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>
4. *Paggi M., Carpinteri A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Appl. Mech. Rev. 2008. V. 61. № 2. 020801. <https://doi.org/10.1115/1.2885134>
5. *Carpinteri A., Paggi M.* Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today // Eng. Fract. Mech. 2009. V. 76. № 12. P. 1771–1784. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.03.012>
6. *Pook L.P.* A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2013. V. 36. № 8. P. 699–723. <https://doi.org/10.1111/ffe.12074>
7. *Колтунов М.А., Кузнецов Г.Б., Матвеев В.П., Трояновский И.Е., Шардаков И.Н.* Оптимизация геометрии осесимметричного тела при наличии смены типа граничных условий в угловой точке // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький. 1978. Вып. 9. С. 55–60.
8. *Борзенков С.М., Матвеев В.П.* Оптимизация упругих тел в окрестности особых точек // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 93–100.
9. *Matveyenko V.P., Borzenkov S.M.* Semianalytical singular element and its application to stress calculation and optimization // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1996. V. 39. № 10. P. 1659–1680.

- [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960530\)39:10%3C1659::AID-NME919%3E3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960530)39:10%3C1659::AID-NME919%3E3.0.CO;2-W)
10. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
 11. Ковров В.Н., Золотухин В.Г. Экспериментальное исследование зависимости адгезионной прочности металлополимерного соединения от геометрии контактной зоны // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 4. С. 493–498.
 12. Dempsey J.P., Sinclair G.B. On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // J. Elasticity. 1981. V. 11. P. 317–327. <https://doi.org/10.1007/BF00041942>
 13. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
 14. Wu Z. Design free of stress singularities for bi-material components // Compos. Struct. 2004. V. 65. № 3–4. P. 339–345. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.11.009>
 15. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design // Exp. Mech. 2004. V. 44. P. 608–615. <https://doi.org/10.1007/BF02428250>
 16. Xu L.R., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // Exp. Mech. 2004. V. 44. P. 616–621. <https://doi.org/10.1007/BF02428251>
 17. Wang P., Xu L.R. Convex interfacial joints with least stress singularities in dissimilar materials // Mech. Mater. 2006. V. 38. № 11. P. 1001–1011. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.10.002>
 18. Baladi A., Arezoodar A.F. Dissimilar materials joint and effect of angle junction on stress distribution at interface // Int. J. Mech. Aero. Indust. Mechatron. Manufacturing Eng. 2011. V. 5. № 7. P. 1184–1187.
 19. Park J., Anderson W.J. Geometric optimization of two bonded wedges involving stress singularities // Compos. Eng. 1994. V. 4. № 9. P. 901–912. [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(94\)90034-5](https://doi.org/10.1016/0961-9526(94)90034-5)
 20. Fedorov A.Y., Matveenko V.P. Optimization of geometry and mechanical characteristics of elastic bodies in the vicinity of singular points // Acta Mechanica. 2018. V. 229. P. 645–658. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1990-5>
 21. Wetherhold R.C., Dargush G.F. Improvement of adhesive strength at a bi-material interface by adjusting the interface angles at the free edge // Theor. Appl. Fract. Mech. 2015. V. 77. P. 69–73. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.02.002>
 22. Velde B. Structure of surface cracks in soil and muds // Geoderma. 1999. V. 93. № 1–2. P. 101–124. [https://doi.org/10.1016/S0016-7061\(99\)00047-6](https://doi.org/10.1016/S0016-7061(99)00047-6)
 23. Tang C., Shi B., Liu C., Zhao L., Wang B. Influencing factors of geometrical structure of surface shrinkage cracks in clayey soils // Eng. Geol. 2008. V. 101. № 3–4. P. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2008.05.005>
 24. Shorlin K.A., de Bruyn J.R., Graham M., Morris S.W. Development and geometry of isotropic and directional shrinkage-crack patterns // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. № 6. P. 6950–6957. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.6950>
 25. Vogel H.-J., Hoffmann H., Roth K. Studies of crack dynamics in clay soil: I. Experimental methods, results, and morphological quantification // Geoderma. 2005. V. 125. № 3–4, P. 203–211. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2004.07.009>
 26. Le Roux S., Medjedoub F., Dour G., Rézai-Aria F. Image analysis of microscopic crack patterns applied to thermal fatigue heat-checking of high temperature tool steels // Micron. 2013. V. 44. P. 347–358. <https://doi.org/10.1016/j.micron.2012.08.007>

27. Korneta W., Mendiratta S.K., Menteiro J. Topological and geometrical properties of crack patterns produced by the thermal shock in ceramics // *Phys. Rev. E*. 1998. V. 57. № 3. P. 3142–3152.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.3142>
28. Scott G.J.T., Webster R., Nortcliff S. An analysis of crack pattern in clay soil: its density and orientation // *J. Soil Sci.* 1986. V. 37. № 4. P. 653–668.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1986.tb00394.x>
29. Montigny A., Walwer D., Michaut C. The origin of hierarchical cracks in floor-fractured craters on Mars and the Moon // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2022. V. 600. 117887.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2022.117887>
30. <https://www.europlanet-society.org/patterns-in-mars-crater-floors-give-picture-of-drying-lakes-eps0905/> (Дата обращения 18.07.2024)
31. Федоров А.Ю., Галкина Е.Б. Сравнение общих закономерностей, характерных для структур поверхностных трещин и для напряжений в окрестности вершин пространственных трещин // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16. № 3. С. 375–386.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.32>

RELATIONSHIP BETWEEN THE RESULTS OF ANALYTICAL SOLUTIONS OF ELASTICITY THEORY PROBLEMS AND OF STRESS STATE OPTIMIZATION IN THE VICINITY OF SINGULAR POINTS

A. Yu. Fedorov^{a, *}, V. P. Matveenko^{a, **}

^a*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

e-mail: fedorov@icmm.ru*, *e-mail: mvp@icmm.ru*

Abstract. The paper presents the results of two directions of the study of the stress-strain state in the vicinity of singular points of elastic bodies, namely: change of the type of boundary conditions; edges of the contact surface of different materials. The result of the first direction is the solution of elasticity theory problems in the vicinity of singular points, from which the possibility of infinite stresses at these points follows. The second direction is associated with the analysis by numerical and experimental methods of the stress state in the vicinity of singular points, which, as a rule, occur when modeling real objects and are potential stress concentration zones. The main content of the article is to establish, based on a comparison of the results of the two directions, the relationship between variants with a minimum stress level in the vicinity of singular points with the results on the nature of the stress singularity at these points.

Keywords: elasticity, stress singularity, stress concentration, geometry optimization, stress distribution at the interfaces

REFERENCES

1. Kondrat'ev V. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 1967. Vol. 16. P. 227–313.
<http://mi.mathnet.ru/eng/mmo186>

2. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis // *Appl. Mech. Rev.* 2004. V. 57. № 4. P. 251–297.
<https://doi.org/10.1115/1.1762503>
3. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *Appl. Mech. Rev.* 2004. V. 57. № 5. P. 385–439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>
4. *Paggi M., Carpinteri A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* 2008. V. 61. № 2. 020801.
<https://doi.org/10.1115/1.2885134>
5. *Carpinteri A., Paggi M.* Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today // *Eng. Fract. Mech.* 2009. V. 76. № 12. P. 1771–1784.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.03.012>
6. *Pook L.P.* A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2013. V. 36. № 8. P. 699–723.
<https://doi.org/10.1111/ffe.12074>
7. *Koltunov M.A., Kuznetsov G.B., Matveenko V.P., Troianovskii I.E., Shardakov I.N.* Optimization of axisymmetric body geometry in the presence of change of type of boundary conditions at the corner point // *Priladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Gor'kii*, 1978. № 9. P. 55–60.
8. *Borzenkov S., Matveenko V.* Optimization of elastic bodies in the vicinity of singular points // *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, 1996. № 2. P. 93–100.
9. *Matveyenko V.P., Borzenkov S.M.* Semianalytical singular element and its application to stress calculation and optimization // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1996. V. 39. № 10. P. 1659–1680.
[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960530\)39:10%3C1659::AID-NME919%3E3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960530)39:10%3C1659::AID-NME919%3E3.0.CO;2-W)
10. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* *Theory of Elasticity*. 3rd edition, N.Y.: McGraw-Hill, 1970. 608 p.
11. *Kovrov V.N., Zolotukhin V.G.* Experimental studies on the adhesion strength of a polymer-metal bond depending on the contact zone geometry // *Mechanics of Composite Materials*. 1999. V. 35. № 4. P. 335–338.
<https://doi.org/10.1007/BF02259722>
12. *Dempsey J.P., Sinclair G.B.* On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // *J. Elasticity*. 1981. V. 11. P. 317–327.
<https://doi.org/10.1007/BF00041942>
13. *Chobanyan K.* *Stress State in Compound Elastic Bodies*. Yerevan: Armenian Academy of Sciences Press, 1987. 338 p.
14. *Wu Z.* Design free of stress singularities for bi-material components // *Compos. Struct.* 2004. V. 65. № 3–4. P. 339–345. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.11.009>
15. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design // *Exp. Mech.* 2004. V. 44. P. 608–615.
<https://doi.org/10.1007/BF02428250>
16. *Xu L.R., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // *Exp. Mech.* 2004. V. 44. P. 616–621.
<https://doi.org/10.1007/BF02428251>
17. *Wang P., Xu L.R.* Convex interfacial joints with least stress singularities in dissimilar materials // *Mech. Mater.* 2006. V. 38. № 11. P. 1001–1011.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.10.002>

18. *Baladi A., Arezoodar A.F.* Dissimilar materials joint and effect of angle junction on stress distribution at interface // *Int. J. Mech. Aero. Indust. Mechatron. Manufacturing Eng.* 2011. V. 5. № 7. P. 1184–1187.
19. *Park J., Anderson W.J.* Geometric optimization of two bonded wedges involving stress singularities // *Compos. Eng.* 1994. V. 4. № 9. P. 901–912.
[https://doi.org/10.1016/0961-9526\(94\)90034-5](https://doi.org/10.1016/0961-9526(94)90034-5)
20. *Fedorov A.Y., Matveenko V.P.* Optimization of geometry and mechanical characteristics of elastic bodies in the vicinity of singular points // *Acta Mechanica.* 2018. V. 229. P. 645–658.
<https://doi.org/10.1007/s00707-017-1990-5>
21. *Wetherhold R.C., Dargush G.F.* Improvement of adhesive strength at a bi-material interface by adjusting the interface angles at the free edge // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2015. V. 77. P. 69–73. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.02.002>
22. *Velde B.* Structure of surface cracks in soil and muds // *Geoderma.* 1999. V. 93. № 1–2. P. 101–124. [https://doi.org/10.1016/S0016-7061\(99\)00047-6](https://doi.org/10.1016/S0016-7061(99)00047-6)
23. *Tang C., Shi B., Liu C., Zhao L., Wang B.* Influencing factors of geometrical structure of surface shrinkage cracks in clayey soils // *Eng. Geol.* 2008. V. 101. № 3–4. P. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2008.05.005>
24. *Shorlin K.A., de Bruyn J.R., Graham M., Morris S.W.* Development and geometry of isotropic and directional shrinkage-crack patterns // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 61. № 6. P. 6950–6957.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.6950>
25. *Vogel H.-J., Hoffmann H., Roth K.* Studies of crack dynamics in clay soil: I. Experimental methods, results, and morphological quantification // *Geoderma.* 2005. V. 125. № 3–4, P. 203–211.
<https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2004.07.009>
26. *Le Roux S., Medjedoub F., Dour G., Rézaï-Aria F.* Image analysis of microscopic crack patterns applied to thermal fatigue heat-checking of high temperature tool steels // *Micron.* 2013. V. 44. P. 347–358.
<https://doi.org/10.1016/j.micron.2012.08.007>
27. *Korneta W., Mendiratta S.K., Menteiro J.* Topological and geometrical properties of crack patterns produced by the thermal shock in ceramics // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57. № 3. P. 3142–3152.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.3142>
28. *Scott G.J.T., Webster R., Nortcliff S.* An analysis of crack pattern in clay soil: its density and orientation // *J. Soil Sci.* 1986. V. 37. № 4. P. 653–668.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1986.tb00394.x>
29. *Montigny A., Walwer D., Michaut C.* The origin of hierarchical cracks in floor-fractured craters on Mars and the Moon // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2022. V. 600. 117887.
<https://doi.org/10.1016/j.epsl.2022.117887>
30. <https://www.europlanet-society.org/patterns-in-mars-crater-floors-give-picture-of-drying-lakes-eps0905/> (Дата обращения 18.07.2024)
31. *Fedorov A.Yu., Galkina E.B.* Comparison of general regularities inherent to structures of surface cracks and stresses near the tips of spatial cracks // *Computational Continuum Mechanics.* 2023. V. 16. № 3. P. 375–386.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.32>

УДК 539.3

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТОВ В НЕКЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

© 2024 г. В. А. Бабешко^{а, *}, О. В. Евдокимова^б, С. Б. Уафа^а,
В. С. Евдокимов^а, О. М. Бабешко^а

^аКубанский государственный университет, Краснодар, Россия

^бЮжный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 01.05.2024 г.

После доработки 13.05.2024 г.

Принята к публикации 14.05.2024 г.

В работе впервые дается точное решение контактной задачи о нестационарном воздействии клиновидного, с прямым углом штампа, занимающего первый квадрант, на деформируемое многослойное основание. Основание, на которое действует жесткий штамп в форме четверти плоскости, может быть многослойным анизотропным композитным материалом. Предполагается, что для него можно построить функцию Грина, что позволяет получить интегральное уравнение контактной задачи. В качестве параметров, описывающих интегральное уравнение, принимаются геометрические декартовы координаты первого квадранта и параметр времени, изменяющийся на всей оси. Предполагается, что время в рассматриваемой граничной задаче следует из отрицательной бесконечности, пересекает начало координат и растет до бесконечности, охватывая весь временной интервал. Таким образом, исключено требование в постановке задачи Коше, когда необходимо задание начальных условий. В этой постановке задача сводится к решению трехмерного интегрального уравнения Винера–Хопфа. Попытки аналитического или численного решения этой задачи авторам не известны. Исследование и решение контактной задачи осуществлено с использованием блочных элементов в варианте, применимом к интегральным уравнениям. Доказывается, что построенное решение точно удовлетворяет интегральному уравнению. Изучены свойства построенного решения. В частности, показано, что решение нестационарной контактной задачи имеет более высокую концентрацию контактных напряжений на краях штампов и в угловой точке штампа, по сравнению со статическим случаем. Это соответствует наблюдаемому на практике более эффективному нестационарным воздействием жестких тел на деформируемые среды, для их разрушения, по сравнению со статическим. Результаты могут оказаться полезными в инженерной практике, сейсмологии, при оценке воздействия набегающих волн на фундаменты, в областях использования интегральных уравнений Винера–Хопфа в теории вероятности и статистики и других областях.

Ключевые слова: контактные задачи, трехмерное интегральное уравнение Винера–Хопфа, клиновидная область, блочный элемент, анизотропия, композит, факторизация

DOI: 10.31857/S1026351924050021, **EDN:** UBWXKY

Введение. Смешанные задачи, в том числе, контактные задачи, играют важную роль в самых разных областях практики. Они возникают в проблемах прочности и разрушения [1], распространения волн в упругих телах [2], акустике [3], неразрушающих методах контроля [4], теории рассеивания электромагнитных волн и создании элементной базы электроники [5], теории волн в жидкости [6,7], геофизике [8]. Работы [9–21] посвящены исследованиям смешанных, контактных задач теории упругости для неклассических областей, как для изотропных сред, так и для анизотропных материалов. Применяемые в этих работах методы включают разнообразие аналитических и численных подходов. Ряд этих подходов, опирающихся на метод интегральных уравнений, требует достаточно детального анализа свойств ядер интегральных уравнений. В то же время разработки и внедрение в инженерную практику новых анизотропных композитов, делает ряд перечисленных подходов не эффективными, что показано ниже. Разработанный в [22] метод точного решения двумерного интегрального уравнения Винера–Хопфа для изотропной слоистой среды существенно опирался на глубокие знания свойств символа ядра интегрального уравнения, функцию $K(\alpha, \beta)$ преобразования Фурье ядра, который, в случае слоистой среды, является мероморфным. Покажем, что в случае анизотропной среды, такой метод не применим в связи с непреодолимыми сложностями, возникающими при попытке применения метода изотропного случая [22]. В качестве примера приводится случай анизотропной контактной задачи для термоэлектроупругого слоя [14].

Уравнения состояния имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_y &= c_{ykl}^{E,\theta} s_{kl} - e_{yk}^\theta E_k - \lambda_y^E \theta, \\ d_i &= e_{ikl}^\theta s_{kl} + \varepsilon_y^{s,\theta} E_j + \rho_i^S, \\ \eta &= \lambda_{ij}^E s_y + \rho_i^S E_i + \alpha \theta.\end{aligned}$$

Здесь σ — тензор напряжений; $c_{ijkl}^{E,\theta}$ — тензор упругих постоянных; s_{ij} — тензор деформаций упругой среды; E_i — компоненты вектора напряженности электрического поля; $\theta = T - T_0$; θ, T и T_0 — соответственно относительная, абсолютная и начальная температура; η — плотность энтропии; d_i — компоненты вектора электрической индукции; e_{kij}^θ — тензор пьезомодулей; $\varepsilon_{ij}^{s,\theta}$ — тензор диэлектрических проницаемостей; ρ_i^S — пирoeлектрические коэффициенты; $\alpha = \rho c_\varepsilon^E T_0^{-1}$; c_ε^E — удельная теплоемкость при постоянной деформации; ρ — плотность материала.

Исключая из приведенных соотношений все переменные, кроме w, ψ, θ , получаем систему динамических анизотропных уравнений в частных производных вида

$$\begin{aligned}
c_{ijkl} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} - \lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + F_i &= \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \\
e_{ik} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_j} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_i} + \rho_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= 0, \quad i, j, k, = 1, 2, 3, \\
k_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + W &= T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \rho_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \alpha \theta \right).
\end{aligned}$$

Вид функции Грина приведен в [14] и совершенно не доступен для построения разложения символа интегрального уравнения Винера–Хопфа $K(\alpha, \beta)$, в форме, использованной в [22].

Тем не менее разработанные в [22] методы решения двумерных интегральных уравнений Винера–Хопфа для изотропного случая подсказали вид и способ построения решения трехмерного интегрального уравнения Винера–Хопфа для анизотропных композитов. В связи с этим был разработан подход, который обходит необходимость детального изучения символа $K(\alpha, \beta)$ интегральных уравнений. Он использует блочные элементы и метод факторизации применительно к интегральным уравнениям.

Область действия штампа описывается осями x, y первого квадранта декартовой системы координат, а параметр времени, изменяющейся на всей бесконечной оси, описывается координатой t , которая, в дальнейшем, для удобства обозначений системы координат, будет переобозначена на z . Таким образом, область действия штампа описывается геометрической и временной областью $\Omega (0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq t)$.

...Ниже приводится аналитическое представление решения интегрального уравнения Винера–Хопфа в трехмерной геометрико-временной постановке в области $\Omega (0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq t)$. Здесь рассмотрен случай произвольного во времени воздействия штампа на анизотропный композит в первом квадранте на основе нового подхода.

1. Постановка задачи. Рассматривается трехмерное интегральное уравнение Винера–Хопфа, заданное в первом квадранте [22]. Оно имеет вид

$$\begin{aligned}
Kq &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty k(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) q(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = f(x, y, z), \\
k(x, y, z) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_3} K(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\alpha d\beta d\gamma, \\
0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty, \quad 0 \leq z \leq \infty, \quad z &\equiv t, \\
Q(\alpha, \beta, \gamma) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q(\xi, \eta, \zeta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta)} d\xi d\eta d\zeta, \\
F(\alpha, \beta, \gamma) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi, \eta, \zeta) e^{i(\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta)} d\xi d\eta d\zeta.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Функция $K(\alpha, \beta, \gamma)$, в общем случае комплекснозначная, порождается решением анизотропной граничной задачи в многослойной среде, является непрерывной и суммируемой на осях по трем аргументам, с поведением на бесконечности вида.

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta, \gamma) &= O(\alpha^{-1}), \quad \beta = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}, \\ K(\alpha, \beta, \gamma) &= O(\beta^{-1}), \quad \alpha = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}, \\ K(\alpha, \beta, \gamma) &= O(\gamma^{-1}), \quad \alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const}, \quad |\alpha|, |\beta|, |\gamma| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Примеры материалов, имеющих анизотропную структуру, в том числе, композитных, приведены во многих работах, в частности в [9–21].

Для интегрального уравнения (1.1) справедливы теоремы единственности [14].

Теорема 1. Пусть вещественная или мнимая составляющие функции $K(\alpha, \beta, \gamma)$ знакопостоянные на вещественных осях (α, β, γ) . Тогда интегральное уравнение (1.1) имеет единственное решение.

Для случая динамических контактных задач справедлива приведенная ниже теорема единственности [14]

Теорема 2. Пусть вещественные полюсы функции $K(\alpha, \beta, \gamma)$ последовательно чередуются с нулями при движении по контурам $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Тогда интегральное уравнение (1.1) имеет единственное решение.

Доказана.

Теорема 3. В условиях единственности, решение интегрального уравнения (1.1) для произвольной с непрерывной и суммируемой на осях первой производной функции $f(x, y, z)$ дается формулой

$$q(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\alpha d\beta d\gamma. \quad (1.3)$$

Здесь приняты обозначения [14]

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha, \beta, \gamma) &= K^{-1}F - K_{+\alpha}^{-1}\{K_{-\alpha}^{-1}F\}_{-\alpha} - K_{+\alpha+\beta}^{-1}\{K_{+\alpha-\beta}^{-1}\{K_{-\alpha}^{-1}F\}_{+\alpha}\}_{-\beta} - \\ &\quad - K_{+\alpha+\beta+\gamma}^{-1}\{K_{+\alpha+\beta-\gamma}^{-1}\{K_{+\alpha-\beta}^{-1}\{K_{-\alpha}^{-1}F\}_{+\alpha}\}_{+\beta}\}_{-\gamma}, \\ Q_2(\alpha, \beta, \gamma) &= K^{-1}F - K_{+\beta}^{-1}\{K_{-\beta}^{-1}F\}_{-\beta} - K_{+\beta+\gamma}^{-1}\{K_{+\beta-\gamma}^{-1}\{K_{-\beta}^{-1}F\}_{+\beta}\}_{-\gamma} - \\ &\quad - K_{+\beta+\gamma+\alpha}^{-1}\{K_{+\beta+\gamma-\alpha}^{-1}\{K_{+\beta-\gamma}^{-1}\{K_{-\beta}^{-1}F\}_{+\beta}\}_{+\gamma}\}_{-\alpha}, \\ Q_3(\alpha, \beta, \gamma) &= K^{-1}F - K_{+\gamma}^{-1}\{K_{-\gamma}^{-1}F\}_{-\gamma} - K_{+\gamma+\alpha}^{-1}\{K_{+\gamma-\alpha}^{-1}\{K_{-\gamma}^{-1}F\}_{+\gamma}\}_{-\alpha} - \\ &\quad - K_{+\gamma+\alpha+\beta}^{-1}\{K_{+\gamma+\alpha-\beta}^{-1}\{K_{+\gamma-\alpha}^{-1}\{K_{-\gamma}^{-1}F\}_{+\gamma}\}_{+\alpha}\}_{-\beta}, \\ Q(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{3}[Q_1(\alpha, \beta, \gamma) + Q_2(\alpha, \beta, \gamma) + Q_3(\alpha, \beta, \gamma)]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Операторы в фигурных скобках имеют вид

$$\begin{aligned}
\{G(\alpha, \beta, \gamma)\}_{+\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{G(\xi, \beta, \gamma)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha \in \Pi_{\alpha}^{+}, \\
\{G(\alpha, \beta, \gamma)\}_{-\alpha} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{G(\xi, \beta, \gamma)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha \in \Pi_{\alpha}^{-}, \\
\{G(\alpha, \beta, \gamma)\}_{+\beta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{G(\alpha, \eta, \gamma)}{\eta - \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^{+}, \\
\{G(\alpha, \beta, \gamma)\}_{-\beta} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{G(\alpha, \eta, \gamma)}{\eta - \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^{-}, \\
\{G(\alpha, \beta, \gamma)\}_{+\gamma} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{G(\alpha, \beta, \zeta)}{\zeta - \gamma} d\zeta, \quad \gamma \in \Pi_{\gamma}^{+}, \\
\{G(\alpha, \beta, \gamma)\}_{-\gamma} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{G(\alpha, \beta, \zeta)}{\zeta - \gamma} d\zeta, \quad \gamma \in \Pi_{\gamma}^{-}, \\
K_{+\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi, \beta, \gamma)}{\xi - \alpha} d\xi, \quad \alpha \in \Pi_{\alpha}^{+}, \\
K_{-\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln K(\xi, \beta, \gamma)}{\xi - \alpha} d\xi \right), \quad \alpha \in \Pi_{\alpha}^{-}, \\
K_{+\beta}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln K(\alpha, \eta, \gamma)}{\eta - \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^{+}, \\
K_{-\beta}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln K(\alpha, \eta, \gamma)}{\eta - \beta} d\eta \right), \quad \beta \in \Pi_{\beta}^{-}, \\
K_{+\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{\ln K(\alpha, \beta, \zeta)}{\zeta - \gamma} d\zeta, \quad \gamma \in \Pi_{\gamma}^{+}, \\
K_{-\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= \exp \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{\ln K(\alpha, \beta, \zeta)}{\zeta - \gamma} d\zeta \right), \quad \gamma \in \Pi_{\gamma}^{-}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь Π_{α}^{+} , Π_{α}^{-} — комплексные области выше, плюс, и ниже, минус, контура Γ_1 , Π_{β}^{+} , Π_{β}^{-} — области выше, плюс, и ниже, минус, контура Γ_2 , Π_{γ}^{+} , Π_{γ}^{-} — области выше, плюс, и ниже, минус, контура Γ_3 .

Удовлетворение построенного решения (1.3) интегральному уравнению (1.1) осуществляется достаточно просто подстановкой его в интегральное уравнение и учета свойств факторизованных функций (1.4) в интеграле Фурье.

2. Свойства решения (1.3) интегрального уравнения (1.1). 1. Покажем, что интегральное уравнение (1.1) точно удовлетворяется функцией (1.3), (1.4).

Внесем функцию $q(x, y, z)$ в интегральное уравнение (1.1), представленное в виде

$$Kq = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)]} q(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta d\alpha d\beta d\gamma = \\ = f(x, y, z).$$

После использования обозначений (1.1) получим представление

$$Kq = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K(\alpha, \beta, \gamma) Q(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\alpha d\beta d\gamma = f(x, y, z).$$

Внесем в эту формулу $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ из (1.4) и исследуем интеграл слева. В результате не сложного анализа исключения членов, обращающих интеграл в ноль, убеждаемся, что получается соотношение

$$Kq = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(\alpha, \beta, \gamma) e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\alpha d\beta d\gamma = f(x, y, z).$$

Применение метода факторизации и блочного элемента доказывает, что носителем решения является первый квадрант.

2. Покажем, что полученное решение (1.3) переходит в точное решение интегрального уравнения (1.1) для случая, когда уравнение (1.1) распадается на одномерные уравнения, решаемые традиционным одномерным методом уравнений Винера–Хопфа [5]. Это происходит, когда в ядре интегрального уравнения (1.1) имеет место разделение переменных, то есть $k(x, y, z) = k_1(x)k_2(y)k_3(z)$. Оно случается при наличии у преобразования Фурье ядра $K(\alpha, \beta, \gamma)$, называемого символом интегрального уравнения, со свойством $K(\alpha, \beta, \gamma) = K_1(\alpha)K_2(\beta)K_3(\gamma)$. Выполняя над символом требуемые формулой (1.4) вычисления, находим, что все двойные операции над $K_1(\alpha)$, $K_2(\beta)$ и $K_3(\gamma)$ обращаются в ноль. Остаются решения одномерных интегральных уравнений Винера–Хопфа по каждой координате.

3. Исследуем концентрации контактных напряжений на разных множествах границы штампа, даваемых полученным решением.

1) В решениях, представленных формулой (1.4), первые справа члены формируют вырожденную составляющую решения, описывающую его в зоне, дальней от границ четверть плоскости. Поэтому оно не содержит концентраций напряжений. Заметим, что вырожденная составляющая формируется по-ровну каждой из осей.

2) Вторые члены содержат граничные концентрации напряжений, свойственные одномерным интегральным уравнениям Винера–Хопфа [14].

Подобно одномерному случаю [14], они дают на прямолинейных границах штампа особенности вида $x^{-1/2}$, $y^{-1/2}$ и $z^{-1/2}$.

3) Третьи члены описывают концентрацию напряжений в угловой точке штампа, которая свойственна статической двумерной контактной задаче,

без нестационарного воздействия. Она формируется в результате оценки интеграла

$$q_0(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [K_{+\alpha+\beta}^{-1} \{K_{+\alpha-\beta}^{-1} \{K_{-\alpha}^{-1} F\}_{+\alpha}\}_{-\beta}] e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\alpha d\beta d\gamma \quad (2.1)$$

при одновременном предельном переходе $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0$.

В качестве примера покажем правило формирования первого члена подынтегральной функции для случая, когда взят простейший анизотропный символ $K(\alpha, \beta, \gamma)$, обладающий свойством (1.2), имеющий вид

$$K(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha^2 + s_1 \beta^2 + s_2 \gamma^2 + A^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad A > 0, \quad s_1, s_2 = \text{const.}$$

Для общего случая его оказывается достаточно, так как он содержит такие же предельные поведения (1.2) на бесконечности. При осуществлении факторизации по какому-нибудь параметру, остальные находятся на вещественной оси. Факторизовав функцию $K(\alpha, \beta, \gamma)$ по параметру α на верхнюю полуплоскость, получаем

$$K_{+\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = [\alpha + i(s_1 \beta^2 + s_2 \gamma^2 + A^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} = O(\alpha^{-\frac{1}{2}}) \quad A > 0.$$

Факторизацию функции $K_{+\alpha}(\alpha, \beta, \gamma)$ по параметру β на правую комплексную полуплоскость можно выполнить точно, в интегральном виде, нормализовав $K_{+\alpha}(\alpha, \beta, \gamma)$ по β на бесконечности. Для этого рассмотрим функцию, стремящуюся к единице при $|\beta| \rightarrow \infty$. Имеем

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{i}(\beta^2 + c^2)^{\frac{1}{4}} K_{+\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow 1, \quad |\beta| \rightarrow \infty, \quad c = s_1^{-1}(s_2 \gamma^2 + A^2),$$

отсюда по формуле факторизации из (1.5)

$$K_{+\alpha+\beta}(\alpha, \beta, \gamma) = (\beta + ic)^{-\frac{1}{4}} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\ln G(\alpha, \eta)}{\eta - \beta} d\eta, \quad \beta \in \Pi_{\beta}^{+}.$$

В результате получаем оценку

$$K_{+\alpha+\beta}(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow C(\beta + ic)^{-\frac{1}{4}} = O(\beta^{-\frac{1}{4}}), \quad |\beta| \rightarrow \infty.$$

Совершенно аналогично оцениваются другие члены со второй факторизацией. Внося эти оценки в (2.1), получим, в результате несложного анализа

$$q_0(x, y, z) = O(r^{-\frac{3}{4}}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Заметим, что этот результат близок к вычисленному приближенным методом в работе [17].

4) Поведение четвертых членов в (1.4) изучается подобно третьим, но уже осуществляется третья факторизация по не тронутому параметру, в частности, по параметру γ . В результате таких же вычислений, получаем

$$K_{+\alpha+\beta+\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = O(\gamma^{-\frac{1}{8}}).$$

Аналогично для других членов с тройной факторизацией. Суммировав особенности по всем трем осям, сходящимся в угловой точке штампа, в результате получаем описание концентрации контактных напряжений в вершине штампа, которая имеет вид

$$q(x, y, z) = O(r^{-\frac{7}{8}}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow 0.$$

Сопоставляя варианты 3) и 4) заключаем, что наличие не стационарного воздействия на штамп — увеличивает величину концентрации контактных напряжений в вершине штампа до уровня $r^{-7/8}$, в сравнении с $r^{-3/4}$ и, тем самым, усиливает его разрушительное воздействие на слой.

Последнее наблюдается на практике: подвижным ножом легче разрезать деформируемую среду, чем при статическом давлении на нож.

Выводы. Полученное решение трехмерного интегрального уравнения Винера—Хопфа, имеет приложение в сейсмологии. Выявлен наиболее опасный участок граница литосферной плиты — угловые множества, а также наиболее уязвимые зоны фундаментов — они в углах его площади. Кроме этого, полученный результат может найти применения в довольно многочисленных примерах приложений одномерного интегрального уравнения Винера—Хопфа, приведенных во введении к настоящей статье, в частности, при конструировании объектов из анизотропных композитов, где возникают такие контактные задачи. Возможно, результат окажется полезным и в других областях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда, региональный проект 24-11-20006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freund L.B.* Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge, UK. Cambridge University Press, 1998. 520 p.
2. *Achenbach J.D.* Wave propagation in Elastic Solids. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam: North-Holland. 1973. 480 p.
3. *Abrahams, I.D., Wickham, G.R.* General Wiener-Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors // J. Appl. Math. 1990. V. 50. № 3. P. 819–838.
4. *Norris, A.N., Achenbach J.D.* // Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material // J. Appl. Math. Mech. 1984. 37. P. 565–580.
5. *Нобл Б.* Метод Винера—Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 280 с.
6. *Ткачева Л.А.* Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 3. С. 136–145.
7. *Chakrabarti A., George A.J.* Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves // Appl. Math. Lett. 1994. V. 7. № 3. P. 43–47. [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(94\)90070-1](https://doi.org/10.1016/0893-9659(94)90070-1)
8. *Davis A.M.J.* Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline // Geophysics, Astrophysics, Fluid Dynamics. 1987. V. 39. № 1–2. P. 25–55. <https://doi.org/10.1080/03091928708208804>
9. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

10. Горячева И.Г., Мещерякова А.Р. Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений и изнашивания в контакте неидеально гладких поверхностей. // Физическая мезомеханика. 2022. Т. 25. № 4. С. 44–53.
11. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
12. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
13. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
14. Воронич И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Науч. мир, 1999. 246 с.
15. Ватутлян А.О. Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 727–734.
16. Колесников В.И., Беляк О.А. Математические модели и экспериментальные исследования — основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов. М.: Физматлит, 2021. 216 с.
17. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
18. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 335 с.
19. Kushch V.I. Micromechanics of composites: multipole expansion approach. Oxford; Waltham: Elsevier Butterworth-Heinemann. 2013. 489 p.
20. McLaughlin R. A study of the differential scheme for composite materials // Int. J. Eng. Sci. 1977. V. 15. P. 237–244.
21. Garces, G. Bruno G., Wanner A. Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites // Acta Materialia. 2007. V. 55. № 16. P. 5389–5400.
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.06.003>
22. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды. // ПММ. 2022. Т. 86. № 5. С. 628–637.
<https://doi.org/10.31857/S0032823522050046>

ON NONSTATIONARY CONTACT PROBLEMS FOR ANISOTROPIC COMPOSITES IN NONCLASSICAL AREAS

V. A. Babeshko^{a,*}, O. V. Evdokimova^b, S. B. Uafa^a,
V. S. Evdokimov^a, O. M. Babeshko^a

^aKuban State University, Krasnodar, 350040 Russia

^bSouthern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006 Russia

*e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. For the first time, an exact solution is given to the contact problem of the non-stationary action of a wedge-shaped, right-angled stamp occupying the first quadrant, which act on a deformable multilayer base. The base, which is affected by a rigid stamp in the shape of a quarter plane, can be a multilayer anisotropic composite material. It is assumed that it is possible to construct a Green's function for it, which makes it possible to construct an integral equation of the contact

problem. The geometric Cartesian coordinates of the first quadrant and the time parameter, which varies along the entire axis, are taken as parameters describing the integral equation. It is assumed that time in the boundary value problem under consideration follows from negative infinity, crosses the origin and grows to infinity, covering the entire time interval. Thus, there is no requirement in the formulation of the Cochet problem when it is necessary to set initial conditions. In this formulation, the problem is reduced to solving the three-dimensional Wiener-Hopf integral equation. The authors are not aware of any attempts to solve this problem analytically or numerically. The investigation and solution of the contact problem was carried out using block elements in a variant applicable to integral equations. It is proved that the constructed solution exactly satisfies the integral equation. The properties of the constructed solution are studied. In particular, it is shown that the solution of the non-stationary contact problem has a higher concentration of contact stresses at the edges of the stamps and at the angular point of the stamp, compared with a static case. This corresponds to the observed in practice more effective non-stationary effect of rigid bodies on deformable media, for their destruction, compared with static. The results may be useful in engineering practice, seismology, in assessing the impact of incoming waves on foundations, in the areas of using Wiener-Hopf integral equations in probability theory and statistics, and other areas.

Keywords: contact problems, three-dimensional Wiener-Hopf integral equation, wedge-shaped domain, block element, anisotropy, composite, factorization

REFERENCES

1. *Freund L.B.* Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge, UK. Cambridge University Press. 1998. p. 520
2. *Achenbach J.D.* Wave propagation in Elastic Solids. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam: North-Holland. 1973. p. 480
3. *Abrahams I.D. & Wickham G.R.* General Wiener-Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors // Journal of Applied Mathematics. 1990. 50. P. 819–838.
4. *Norris A.N. & Achenbach J.D.* // Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. 37. P. 565–580.
5. *Noble B.* Metod Vinera-Hopfa [The Wiener-Hopf method]. M.: Ill. 1962. 280 p.
6. *Tkacheva L.A.* Ploskaa zadacha o vibratsii plavaushei uprugoi plastini pod deistviem periodicheskoi vneshnei nagruzki [The planar problem of vibrations of a floating elastic plate under the action of periodic external load] // Applied mechanics and technical physics. 2004. Vol. 45. No. 5 (273). pp. 136–145. (In Russian)
7. *Chakrabarti A., George A.J.* Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves // Applied Mathematics Letters. 1994. 7. P. 43–47.
8. *Davis A.M.J.* Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline // Geophysics, Astrophysics, Fluid Dynamics. 1987. 39. P. 25–55.
9. *Goryacheva I.G.* Mehanika friksionnogo vzaimodeistvia [Mechanics of frictional interaction]. – M.: Nauka, 2001. – 478 p. (In Russian)

10. *Goryacheva I.G., Meshcheryakova A.R.* Modelirovanie nakoplenia kontaktno-ustalostnoi povrezhdenii i isnashivania v kontakte ne idealno gladikih poverhnostei [Modeling of accumulation of contact fatigue damage and wear in contact of imperfectly smooth surfaces]. // *Physical mesomechanics*. 2022. Vol. 25. No. 4. pp. 44–53. (In Russian).
11. *Bazhenov V.G., Igumnov L.A.* Metodi granichnih integralnih uravneni i granichnih elementov [Methods of boundary integral equations and boundary elements.] M.: Physical education, 2008. 352 p. (In Russian).
12. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Dinamika poverhnosti neodnorodnogo [Dynamics of the surface of inhomogeneous media.] Fizmatlit, 2009. 312 p. (In Russian).
13. *Kalinchuk V.V., Belyankovat I.* Dinamicheskie kontaktnie zadachi v prednapragneniih telah [Dynamic contact problems for prestressed bodies]. Fizmatlit, 2002. — 240 p. (In Russian).
14. *Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D.* Dinamika massivnih tel i resonansnie iavleniya v deformiruemih sredah [Dynamics of massive bodies and resonant phenomena in deformable media] / M., Nauka 1999. 246 p. (In Russian).
15. *Vatulyan A.O.* Kontaktnie zadachi so ssepleniem dlia anisotropnogo sloia [Contact problems with coupling for an anisotropic layer.] // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1977. Vol. 41. v. 4. C. 727–734. (In Russian).
16. *Kolesnikov V.I., Belyak O.A.* Matematicheskoe modelirovanie i eksperimentalnie issledovaniya-osnovadla polucheniya heterogennih antifriksionnih materialov [Mathematical models and experimental studies – the basis for the design of heterogeneous antifriction materials]. M.: Fizmatlit, 2021. 265 p. (In Russian).
17. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F.* Dinamika neodnorodnoi lineino uprugoi sredi [Dynamics of inhomogeneous linear elastic media]. M.: Nauka, 1989. 344 p. (In Russian).
18. *Christensen R.* Vvedenie v mehaniku kompozitov [Introduction to the mechanics of composites]. Moscow: Mir. 1982. 335 p. (In Russian).
19. *Kushch V.I.* Micromechanics of composites: multipole expansion approach. – Oxford; Waltham: Elsevier Butterworth-Heinemann. 2013. 489 p.
20. *McLaughlin R.* A study of the differential scheme for composite Materials // *International Journal of Engineering Science*. 1977. Vol. 15. P. 237–244.
21. *Garces G., Bruno G., Wanner A.* Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites // *Acta Materialia*. 2007. Vol. 55. P. 5389–5400.
22. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Tochnoe reshenie universalnim metodom modelirovaniya kontaktnoi zadachi v chetverti ploskosti mnogoslainoi sredi [The exact solution by a universal method of modeling a contact problem in a quarter plane of a multilayer medium.] // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 86. № 5. P. 628–637.
<https://doi.org/10.31857/S0032823522050046> (In Russian)

УДК 539.374

О СБОРКЕ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКОЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИСКА С НЕКРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

© 2024 г. А. А. Буренин^а, А. В. Ткачева^{а, *}

^аИнститут машиноведения и металлургии ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: 4nansi4@mail.ru

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

После доработки 13.05.2024 г.

Принята к публикации 14.05.2024 г.

Решением неодноточечной краевой задачи теории плоских температурных напряжений рассчитывается уровень и распределение температурных напряжений в каждый момент времени процесса проведения технологической операции сборки составного диска горячей посадкой, когда охватываемая деталь сборки отлична от круговой пластины. Вычисляются остаточные напряжения в элементах сборки и итоговый натяг в ней после ее остывания до комнатной температуры. Текущие и остаточные напряжения рассчитываются в зависимости от предварительного нагрева охватывающего кольца, термомеханических свойств сопрягаемых деталей и их изначальной геометрии. Пределы текучести упруговязкопластических элементов сборки полагаются существенно зависимыми от местной температуры. Обращается внимание на необходимость исключения сингулярности при постановке граничных условий на поверхностях сопряжения деталей сборки.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, температурные напряжения, горячая посадка, сборка с натягом, задача Гадолина

DOI: 10.31857/S1026351924050039, EDN: UBVBAN

Введение. В машиностроении в числе технологий сборки с натягом [1] остается востребованной операция горячей посадки цилиндрических деталей. Данная технологическая операция простая в своём производстве: холодную охватываемую деталь помещают в предварительно нагретую охватывающую (радиус цилиндрических деталей назначают заранее) и предоставляют возможность собранной конструкции остыть до комнатной температуры. Итогом является достаточно прочное соединение, удовлетворяющее назначенным функциональным требованиям. Технологическая операция горячей посадки таким способом полностью определяется процессом теплопроводности, выравнивающим распределение температуры по элементам соединения, доводя ее до однородно распределенной комнатной

температуры. В любой момент времени проведения операции посадки уровень и распределение температуры по формирующейся конструкции задают в ней соответствующее распределение температурных напряжений. Когда температура по сборке выравнивается и отпускается до комнатной, достигнутый уровень температурных напряжений в деталях сборки задает натяг в ней, определяя таким способом прочностные и иные функциональные качества собранной конструкции.

Красивую задачу теории неустановившихся температурных напряжений [2] моделирующую процесс горячей посадки называем задачей Гадолина [3–6], тем самым подчеркивая определяющую роль академика А.В. Гадолина в постановке данной проблемы применительно к сборке двухслойных стволов артиллерийских орудий [7].

Задача Гадолина является задачей расчета термомеханического процесса. Обычно [8] такой расчет производится последовательными шагами по времени, на каждом шаге которого разрешается задача о состоянии конструкции, то есть рассчитывается напряженно-деформированное состояние элементов в зависимости от достигнутого распределения температуры. Рассчитать такие состояния, особенно учитывая неизбежно возникающие области необратимого деформирования, бывает не просто [9–12]. Аналитическим расчетам в таких случаях способствует использование [3, 8, 13–15] кусочно-линейных пластических потенциалов, то есть классических условий пластичности максимальных касательных напряжений (условие Треска–Сен-Венана) или максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева) [16, 17].

Гладкое условие пластического течения максимальных октаэдрических напряжений (условие Мизеса [16, 17]) в качестве средств вычислений температурных напряжений в исследуемый момент времени заставляет обращаться к приближенным численным методам. Последние используются часто также в выборе условий пластичности Треска–Сен-Венана. Укажем некоторые публикации [18–21] разрешающие приближенным численным способом преимущественно одномерные задачи, включая задачу Гадолина о горячей посадке. Однако кусочно-линейные пластические потенциалы, помогающие аналитически рассчитать в зафиксированный момент времени температурные напряжения, несут в себе иную сложность. В условиях использования в расчетах данных потенциалов пластическая область разбивается на части [3, 5, 15, 22], где пластическое (вязкопластическое) течение подчинено различным системам уравнений в зависимости от соответствия напряжений разным граням или ребрам призм Треска или Ивлева [16, 17] в пространстве главных напряжений. Число подобластей в таком разделении может быть несколько; с возникновением повторных пластических течений [3, 23] число это только возрастает. В расчетах температурных напряжений в рамках одномерных задач Гадолина [3, 8, 14, 22–24] имеется возможность алгоритмически отследить моменты зарождения разных областей течения, их развитие с возможным делением, затуханием и схлопыванием. При решении задач теории температурных напряжений, отличных от одномерных, алгоритмически проследить за эволюцией различных областей пластических течений практически невозможно. Использование в расчетах гладкого условия пластичности Мизеса

оказывается здесь приемлемой альтернативой [6, 9, 24], так как в этом случае разделения области пластичности не происходит. В [6] сравниваются результаты расчетов, полученные с использованием классических условий пластического течения, максимальных касательных и максимальных октаэдрических напряжений.

Граничные условия неоднородных краевых задач теории неустановившихся температурных напряжений могут включать разрывы на граничных поверхностях задаваемых функций [6, 24]. Очевидно, что в процессе расчетов от такой сингулярности следует избавиться. Иначе [24] следует даже качественно ошибочный результат. Здесь рассматривается еще один вид сингулярности в задаваемых граничных условиях и указывается возможный способ избавления от такой особенности.

1. Постановка задачи. Исходные зависимости модели. Принимаем, что круглое тонкое кольцо с внешним радиусом $r = R_1$ и внутренним $r = R_2$ насаживается на тонкую пластину (рис. 1), две кромки которой AB и CD прямолинейны, а две другие $\widehat{AC}$ и $\widehat{BD}$ являются дугами окружности радиуса $r = R_3$. Таким образом сегменты AMB и CND (рис. 1) материалом не заполнены. Пластинку $ABDC$ считаем металлической с известными термомеханическими свойствами и называем далее охватываемой деталью сборки (I – рис. 1). Кольцо (II – рис. 1) также считаем изготовленным из металла, отличного от металла охватываемой детали I, и называем охватывающей деталью сборки. Последняя нагревается до некоторой достаточно высокой однородной температуры $T = T_*$, после чего в неё помещается охватываемая деталь I. Начало процесса посадки связываем с совпадением размеров $R_2 = R_3 = R$. При должном назначении R_2 и R_3 данное совпадение происходит достаточно быстро.

Целью расчетов считаем указание распределения изменяющихся температурных напряжений в элементах сборки во все последующие времена $t > 0$ технологической операции, включая распределение остаточных напряжений после остывания собранной конструкции до комнатной температуры.

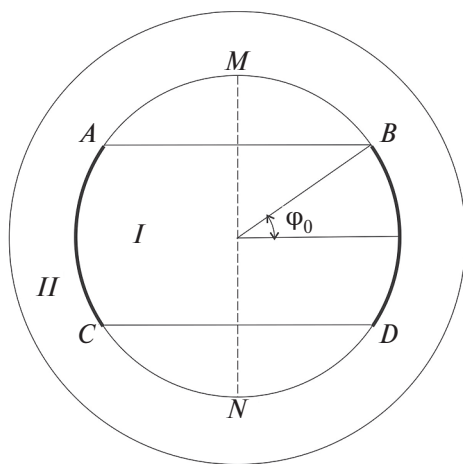


Рис. 1. Геометрия сборки.

Принимаем следующие допущения: материалы деталей сборки считаем упруговязкопластическими, пренебрегая упрочнением их в условиях возможного вязкопластического течения; пренебрегаем связанностью процессов деформирования и теплопроизводства, считая прирост тепла за счет деформирования пренебрежительно малым в сравнении с теплом, нагревшим изначально охватывающее кольцо до температуры T_* . Принятые допущения позволяют провести расчеты в рамках теории неустановившихся температурных напряжений, то есть в рамках несвязанной теории.

Деформации полагаются малыми, массовыми силами пренебрегается. Используется квазистатический подход, то есть силы инерции не учитываются. Тогда следствием законов сохранения является соотношения

$$\nabla \sigma = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{d\xi}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \sigma \cdot \varepsilon, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

В уравнении равновесия (1.1) σ – тензор напряжений. В уравнении баланса внутренней энергии (1.2) ρ – плотность; ξ – плотность распределения внутренней энергии; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$ – векторы перемещений, скоростей и потока тепла; ε – тензор скоростей деформации Эйлера, t – текущее время.

Тензор малых деформаций разделяется на обратимую и необратимую (пластическую) составляющие

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) = \mathbf{e} + \mathbf{p}. \quad (1.3)$$

Функцию $\xi(\mathbf{d}, s)$, где s – плотность распределения энтропии, принимаем в качестве термодинамического потенциала, для которого $\partial \xi / \partial s = T$ – температура. Введем иной термодинамический потенциал $\psi(\mathbf{d}, T) = \xi(\mathbf{d}, T) - sT$, называемый свободной энергией. Принимаем, что плотность распределения свободной энергии не зависит от необратимых деформаций: $\psi = \psi(\mathbf{e}, T)$. Это позволяет разделить консервативную и диссипативную составляющие процесса деформирования так, что из (1.2) и (1.3) следует [26]

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi(\mathbf{e}, T)}{\partial \mathbf{e}}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \nabla T + \frac{1}{T} \sigma \cdot \varepsilon^p, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + \frac{1}{T} \mathbf{q}, \quad \varepsilon^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, \quad \varepsilon^p + \varepsilon^e = \varepsilon.$$

Здесь $\mathbf{J}$ – вектор потока энтропии, ε^p – тензор скоростей пластических деформаций. Полагая материалы сопрягаемых элементов сборки изотропными и принимая простейшую (квадратную) зависимость для $\psi(\mathbf{e}, T)$ от инвариантов тензора $\mathbf{e}$ из (1.4) получим соотношения закона Дюамеля–Неймана

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} + 3\alpha T_0 K \theta) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.6)$$

$$\theta = T_0^{-1} (T - T_0), \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

В (1.6) T_0 — температура свободного состояния (комнатная температура) материалов элементов сборки; λ , μ , K — упругие постоянные, параметры Ламе и модуль всестороннего сжатия, α — коэффициент линейного температурного расширения, $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Если в качестве закона теплопроводности принять линейный закон Фурье с постоянным коэффициентом теплопроводности, то из уравнения баланса энтропии (1.5) следует уравнение теплопроводности в форме

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta - \frac{1}{c T_0} (\nu \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^p) + w(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

Здесь a , ν , c — коэффициенты температуропроводности, связанности и удельная теплоемкость; $w(\mathbf{x}, t)$ — возможные распределенные источники тепла в деформируемом теле ($\mathbf{x}$ — радиус вектор места действия источника тепла). Принятые допущения позволяют не учитывать в (1.7) источники тепла, производимого за счет деформирования, поэтому далее используется уравнение теплопроводности в форме

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta + w(\mathbf{x}, t). \quad (1.8)$$

Вязкопластическое течение в материалах деталей сборки происходит в условиях соответствия напряжений уравнению поверхности нагружения $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ в пространстве напряжений. При принятии условий принципа максимума Мизеса или постулата Драккера [16] имеем ассоциированный с поверхностью нагружения закон пластического течения

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \zeta \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \zeta > 0. \quad (1.9)$$

В качестве уравнения поверхности нагружения в пространстве напряжений (условия вязкопластического течения) принимаем следующее обобщение условия пластичности Мизеса [17]

$$f(\boldsymbol{\sigma}, k) = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\epsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\epsilon}^p)} - k = 0. \quad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10) следует

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2k} \Sigma^2 - 1 \right), \quad \Sigma^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \boldsymbol{\epsilon}^p &= \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma - k}{\Sigma} \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В (1.9)–(1.11) $k = k(\theta)$ — предел текучести в опытах на одноосное растяжение при $\theta = \text{const}$. Из-за зависимости от местной температуры в разных точках

сопрягаемых деталей предел текучести принимает разные значения. Начало вязкопластического течения ($\epsilon^p \neq 0$) в точках сборки связано с достижением напряженными состояниями поверхности нагружения. Такой начальной поверхностью в пространстве главных напряжений σ_j оказывается боковая поверхность наклонного цилиндра Мизеса [16], образующие которого параллельны гидростатической оси: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Обобщение классического условия пластичности связываем с учетом вязкого сопротивления, считая $\eta = \text{const}$ коэффициентом такой вязкости.

Зависимость предела текучести от температуры $k = k(\theta)$ конкретизируем далее в форме

$$k = k(\theta) = k_0 y, \quad y = \left(\frac{\theta_p - \theta}{\theta_p} \right)^2, \quad \theta_p = \frac{T_p - T}{T_p}. \quad (1.12)$$

Здесь T_p – температура плавления, наименьшая из температур плавления материалов деталей, участвующих в сборке.

2. Условия сборки. Температурная задача. Согласно принимаемой теории неустановившихся температурных напряжений уровень и распределение температуры по элементам сборки рассчитывается первоначально и отдельно. Сформируем с этой целью температурную задачу. Уравнение теплопроводности (1.8) запишем в используемой далее цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} = a_n \left(\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial \varphi^2} \right) - 2\beta_n \theta_n \quad (2.1)$$

В (2.1) $n = 1$ для охватываемой детали сборки (рис. 1), $n = 2$ для охватывающей. Коэффициенты β_n , задающие отток тепла с поверхностей пластин считаем далее постоянными.

Часть поверхности $r = R$, где сопряжения пластин отсутствует обозначим через Φ_1 так, что при $\varphi \in \Phi_1$ имеем: $\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0$ и $\pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0$ (рис. 1). Для поверхности сопряжения Φ_2 аналогично запишем: $\varphi \in \Phi_2$; $\pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + \varphi_0$ и $2\pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi_0$. Тогда начальные условия температурной задачи запишутся в форме

$$\theta_1(r, \varphi, 0) = 0 \quad \text{при} \quad r \leq R \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \quad \text{и} \quad \varphi \in \Phi_2, \quad (2.2)$$

$$\theta_2(r, \varphi, 0) = \theta_* \quad \text{при} \quad R \leq r \leq R_1.$$

$$\theta_* = T_0^{-1}(T_* - T_0).$$

Условие теплообмена деталей сборки по общей их поверхности сопряжения записываются в виде

$$\begin{aligned} \theta_1(R, \varphi, t) &= \theta_2(R, \varphi, t) \\ \chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad \text{при} \quad \varphi \in \Phi_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь χ_1, χ_2 — соответственно коэффициенты теплопроводности материалов деталей сборки.

Теплоотдачу от кромок сопрягаемых пластин в окружающую среду зададим с помощью условий

$$\begin{aligned} \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= \beta_2 \theta_2(R_1, \varphi, t), \\ \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=R} &= -\beta_2 \theta_2(R_1, \varphi, t) \quad \text{при } \varphi \in \Phi_1, \\ \chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \sin \varphi + \chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} \cos \varphi &= \beta_1 \theta_1(r, \varphi, t) \quad \text{при } \begin{cases} \varphi \in \Phi_1, \\ r = R \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Начальные (2.2) и граничные (2.3), (2.4) условия формируют краевую задачу для уравнения теплопроводности (2.1), предназначенную определению распределения температуры $\theta_1(r, \varphi, t)$ по охватываемой пластине и температуры $\theta_2(r, \varphi, t)$ по охватываемому кольцу (рис. 1). В качестве упрощающего допущения в (2.1)–(2.4) принимается, что коэффициенты теплоотдачи β_n ($n = 1, 2$) являются постоянными. Разрешая сформированную температурную задачу последовательными шагами по времени, устанавливаем достигнутое к рассматриваемому моменту времени искомое распределение температуры по сопрягаемым элементам сборки.

3. Термомеханическая задача. Принятием условий плоских напряженных состояний зависящая переменная u_z исключается из числа искомых неизвестных. В числе неизвестных остаются перемещения $u_r(r, \varphi, t)$, $u_\varphi(r, \varphi, t)$ и ненулевые компоненты деформаций

$$d_{rr} = u_{r,r}; \quad d_{\varphi\varphi} = r^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + u_r); \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\varphi}}{r} + r \left(\frac{u_\varphi}{r} \right)_{,r} \right). \quad (3.1)$$

В (3.1) координатой после запятой обозначена частная производная по ней. Этими зависимостями деформации в каждый момент времени (квазистатическое приближение) связываются с перемещениями. С их помощью в условиях плоских напряженных состояний ($\sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{zz} = 0$) задаются, следуя зависимостям закона Дюамеля–Неймана (1.6), ненулевые компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= l_1 u_{r,r} + l_2 r^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + u_r) - 2\alpha T_0 l_3 \theta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= l_1 r^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + u_r) + l_2 u_{r,r} - 2\alpha T_0 l_3 \theta, \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(r^{-1} u_{r,\varphi} + r(r^{-1} u_\varphi)_{,r} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$l_1 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad l_2 = \frac{\mu(5\lambda + 6\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad l_3 = \frac{3\mu K}{\lambda + 2\mu}.$$

В выбранной системе цилиндрических координат уравнения равновесия (1.1) в рассматриваемом случае записываются [27] в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,r} + r^{-1}\sigma_{r\varphi,\varphi} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) &= 0, \\ \sigma_{r\varphi,r} + r^{-1}\sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Подстановка (3.2) в (3.3) позволяет записать систему двух дифференциальных уравнений относительно двух искомым функций $u_r(r, j, t)$ и $u_\varphi(r, j, t)$.

$$\begin{aligned}l_1(u_{r,rr} + r^{-1}u_{r,r} + r^{-2}u_r) + \mu r^{-2}u_{r,\varphi\varphi} + l_2r^{-1}u_{\varphi,r\varphi} - 2\alpha T_0 l_3 \theta_{,r} &= 0, \\ l_3r^{-1}u_{\varphi,r\varphi} + \mu u_{\varphi,rr} + l_1r^{-2}u_{\varphi,\varphi\varphi} + l_2r^{-2}u_{r,\varphi} + 3\mu r^{-1}u_{\varphi,r} - 5\mu r^{-2}u_\varphi - 2\alpha T_0 l_3 \theta_{,\varphi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Дифференциальные уравнения (3.4) справедливы в каждой точке обеих деталей сборки, поэтому они не снабжены указанием на выбираемую деталь. Материалы элементов сборки продолжают деформироваться обратимо (упруго) до поры пока напряжения (3.2) не достигнут поверхности нагружения (1.10). До этого момента времени деформированные состояния в каждой точке материалов сборки в каждый рассматриваемый момент технологической операции горячей посадки подчинены системе уравнений (3.4). Также считается, что в этих уравнениях распределение температуры $\theta = \theta(r, \varphi, t)$ найдено предварительно и отдельно решением соответствующей температурной задачи.

Расчет возникающих температурных деформаций и напряжений согласно (3.4) требует постановки для этой системы дифференциальных уравнений необходимых граничных условий. На контактной поверхности (линии) $r = R$ и $\varphi \in \Phi_2$ деталей сборки считаем непрерывными радиальные компоненты вектора перемещений и тензора напряжений

$$\begin{aligned}u_r^{(1)}(R, \varphi, t) &= u_r^{(2)}(R, \varphi, t), \\ \sigma_{rr}^{(1)}(R, \varphi, t) &= \sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t)\end{aligned}\quad \text{при } \varphi \in \Phi_2. \quad (3.5)$$

На свободных краях сопрягаемых пластин имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(2)}(R_1, \varphi, t) &= \sigma_{r\varphi}^{(2)}(R_1, \varphi, t) = 0, \\ \sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t) &= \sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t) = 0\end{aligned}\quad \text{при } \varphi \in \Phi_1, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)}(r, \varphi, t) \sin(\varphi) + \sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, \varphi, t) \cos \varphi &= 0, \\ \sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, \varphi, t) \sin(\varphi) + \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, \varphi, t) \cos \varphi &= 0\end{aligned}\quad \text{при } \begin{cases} r = R \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi}, \\ \varphi \in \Phi_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Не запрещаем проскальзывания материалов деталей сборки вдоль их поверхностей сопряжения. Однако требование закона сухого трения запрещает проскальзывание до преодоления напряжениями $|\sigma_{r\varphi}|$ своего некоторого предельного значения

$$|\sigma_{r\varphi}^{(1)}(R, \varphi, t)| = |\sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t)| \leq g(\varphi, t) \quad \text{при } \varphi \in \Phi_2. \quad (3.8)$$

Зависимость $g(\varphi, t)$ в (3.8) от координаты φ и времени t определяется зависимостью этого параметра от местной температуры $\theta = \theta(R, \varphi, t)$. Иногда считают, что условие (3.8) выполняется в течении всего процесса термомодеформирования и знак неравенства в нем заменяют равенством. Трение в таком случае оказывается независимым от нормального давления. Опыты показывают, что такое положение приемлемо при развитых вязкопластических течениях в условиях повышенных температур (закон Зеделя). Но процесс операции горячей посадки, протекающей действительно при высоких $\theta \leq \theta_*$ температурах, невозможно считать развитым процессом вязкопластического течения. Последний существует в материалах элементов сборки ограниченное время. До его зарождения и после его остановки по поверхности сопряжения контактируют упругие тела. Проскальзывание начинается после преодоления барьера (3.8); закон трения скольжения в его общей для процесса форме зададим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t) &= -\sigma_{r\varphi}^{(1)}(R, \varphi, t) = \\ &= f(\varphi, t) \left| \sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t) \right| + \gamma(\varphi, t) \left| v_{\varphi}^{(1)}(R, \varphi, t) - v_{\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t) \right|, \\ \sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t) &> g(\varphi, t), \quad \varphi \in \Phi_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $f(\varphi, t)$ и $\gamma(\varphi, t)$ коэффициенты трения скольжения и вязкого трения соответственно. Их зависимость от φ и t вытекает из зависимости от местной температуры $\theta(R, \varphi, t)$. Принимаем ее в форме

$$g(\varphi, t) = g_0 y, \quad f(\varphi, t) = f_0 y, \quad \gamma(\varphi, t) = \gamma_0 y, \quad y = \left[\theta_p^{-1}(\theta_p - \theta) \right]^2. \quad (3.10)$$

Граничными условиями (3.5)–(3.9) в каждый рассчитываемый момент времени формируются разрывы в компонентах σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ тензора напряжений в точках A , B , C , D (рис. 1), то есть в пограничных точках областей Φ_1 и Φ_2 поверхности сопряжения $r = R$. Алгоритмы приближенных численных расчетов должны включать в себя процедуры сглаживания подобных разрывов. В [6, 24] показано, что если этим не озаботиться специально, то можно получить ошибки в расчетах не только количественные, но и качественные. По примеру [24] укажем первоначально способ исключения разрывов $\sigma_{r\varphi}$. С этой целью усложним зависимости (3.10), приняв их в форме

$$g(\varphi, t) = g_0 \xi(\varphi, \delta) y, \quad f(\varphi, t) = f_0 \xi(\varphi, \delta) y, \quad \gamma(\varphi, t) = \gamma_0 \xi(\varphi, \delta) y, \quad (3.11)$$

$$\xi(\varphi, \delta) = (\varphi_0 - \varphi) \left(\varphi_0 + \varphi + \frac{1 - 2\varphi_0 \delta + \delta^2}{\delta} \right) \quad \text{при } \varphi = \varphi_B \text{ и } \varphi = \varphi_C,$$

$$\xi(\varphi, \delta) = (\varphi_0 - \varphi) \left(\varphi_0 + \varphi + \frac{1 - 2\varphi_0 \delta - \delta^2}{\delta} \right) \quad \text{при } \varphi = \varphi_A \text{ и } \varphi = \varphi_D.$$

В (3.11) g_0, f_0, γ_0 – постоянные коэффициенты трения при комнатной температуре. В точках A , B , C и D (рис. 1) переменные параметры трения g, f, γ равны нулю, но уже в соответствующих соседних точках $\varphi_{A,D} + \delta$, $\varphi_{B,C} - \delta$ трение восстанавливается ($\xi(\varphi_B - \delta) = 1$). Таким способом с помощью специального задания параметров трения сглаживаем разрыв в граничных условиях для

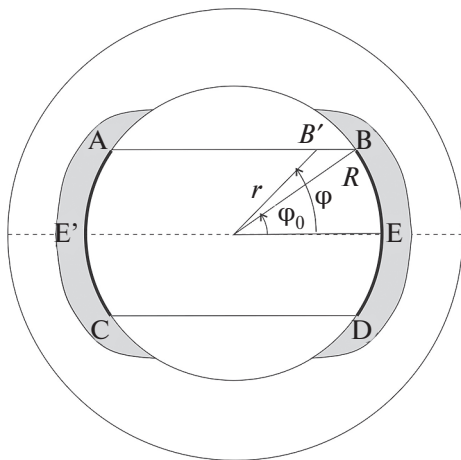


Рис. 2. Область вязкопластического течения: зарождение и развитие.

$\sigma_{r\varphi}$ в точках A, B, C и D области сопряжения (рис. 1). Параметр отступления δ от пограничных точек областей Φ_1 и Φ_2 выбираем в ходе вычислений.

В пограничных точках A, B, C и D (рис. 1) компоненты тензора напряжений претерпевают разрыв. В краевых условиях (3.6) и (3.7) следует привести сглаживание как вдоль поверхности (линии) $r = R$ для условий (3.6) так и вдоль плоскости (прямой) $r = R \sin(\varphi_0) \sin^{-1}(\varphi)$ для условий (3.7). Поясним принимаемую процедуру сглаживания на примере точки B (рис. 1 и рис. 2); в других точках сопряжения последующие действия аналогичны. В граничной области Φ_1 , свободной от нагрузок, выделим малую подобласть $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \delta_1$, считая, что в этой области $\sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t)$ изменяется по закону

$$\sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t) = -K(\varphi^2 - \varphi_0^2) + \left(2K\varphi_0 + K\delta_1 - \frac{\sigma_{0r}}{\delta_1}\right)(\varphi - \varphi_0) + \sigma_{0r}. \quad (3.12)$$

В (3.12) K — модуль всестороннего сжатия для материала охватывающей детали сборки; δ_1 — назначаемое увеличение координаты φ от φ_0 ; σ_{0r} — радиальное напряжений σ_{rr} в точке B , рассчитанное на предыдущем шаге вычислений: $\sigma_{0r} = \sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi_0, t)$; $\sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi_0, 0) = 0$.

В точке $B(R, \varphi_0)$ напряжения $\sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi_0, t) = 0$ за счет принятого закона трения (3.9)–(3.11) на сопрягаемых поверхностях. Условия (3.7) требуют в таком случае, чтобы $\sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi_0, t) = 0$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(R, \varphi_0, t) = 0$ (рис. 2). Эти условия выполненными быть не могут; в граничных условиях (3.7) в точке B возникает разрыв. Сглаживание их производим, назначая отступ от точки B до точки B' (рис. 2) вдоль прямой BA ($r = R \sin(\varphi_0) \sin^{-1}(\varphi)$) на расстояние $\delta_2 = R(\cos(\varphi_0) - \sin(\varphi_0) \operatorname{ctg}(\varphi)) = |BB'|$. Параметр δ_2 назначается, как и иные подобные δ и δ_1 в процессе вычислений. По аналогии с (3.12) добиваемся таким способом, чтобы левые части равенства (3.7) изменялись от приписанных им значений $\sigma_{rr}(R, \varphi_0, t) = \sigma_{0r}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}(R, \varphi_0, t) = \sigma_{0\varphi}$ в точке B отрезка до нуля в точке B' (рис. 2).

Расчеты согласно сформированной задачи для системы уравнений (3.4) с граничными условиями (3.5)–(3.12) продолжаем последовательными шагами по времени до тех пор, пока не выполняются условия вязкопластического течения (1.10) в некоторых точках деформируемой области. Расчеты показывают, что впервые эти условия в форме

$$f(\sigma, k) = \sqrt{\frac{3}{2} \tau \cdot \tau} - k = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2} - k = 0 \quad (3.13)$$

выполняются в точках E и E' сборки (рис. 2). От этих точек по материалу охватывающего кольца развиваются область вязкопластического течения.

В последующие моменты времени эта область может занимать полностью область контакта Φ_2 и даже выходить за предел данной области, как это показано на рис. 2 (выделенная область). В рамках такой области соотношения ассоциированного закона вязкопластического течения (1.11) позволяет записать

$$\varepsilon_{rr}^p = h(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = h(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \quad \varepsilon_{r\varphi}^p = h\sigma_{r\varphi}, \quad \varepsilon_{zz}^p = -h(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \quad (3.14)$$

$$h = \frac{\Sigma^2 - k^2}{3\Sigma^2}; \quad \Sigma^2 = \frac{3}{2} \tau \cdot \tau = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2.$$

Следствием (1.3) и (1.6) являются уравнения равновесия. В перемещениях (аналог (3.4)) уравнения равновесия приводят к соотношениям справедливым в областях вязкопластического течения

$$\begin{aligned} l_1 u_{r,rr} + \mu r^{-2} u_{r,\varphi\varphi} + (l_2 + \mu) r^{-1} u_{\varphi,r\varphi} + l_1 r^{-1} u_{r,r} - (l_1 + \mu) r^{-2} u_{\varphi,\varphi} - l_1 r^{-1} u_r - \\ - l_1 p_{rr,r} - l_2 p_{\varphi\varphi,r} - \mu r^{-1} p_{r\varphi,\varphi} - (l_1 - l_2) r^{-1} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + 2\alpha l_3 T_0 \theta_{,r} = 0; \\ l_1 r^{-2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \mu u_{\varphi,rr} + (l_2 + \mu) r^{-1} u_{r,r\varphi} - \mu r^{-1} u_{\varphi,r} + (l_1 - \mu) r^{-2} u_{r,\varphi} - \mu r^{-2} u_{\varphi} - \\ - l_1 r^{-1} p_{\varphi\varphi,\varphi} - l_2 r^{-1} p_{rr,\varphi} - \mu p_{r\varphi,r} - 2\mu r^{-1} p_{r\varphi} - 2\alpha l_3 T_0 r^{-1} \theta_{,\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В отличие от (3.4) уравнения равновесия (3.15) включает в себя накопленные к рассчитываемому моменту времени необратимые деформации p_{rr} , $p_{r\varphi}$, $p_{\varphi\varphi}$ и их производные по пространственным координатам. Если считать, что на предыдущем шаге вычислений пластические деформации достигли значений $\tilde{p}_{rr}$, $\tilde{p}_{r\varphi}$, $\tilde{p}_{\varphi\varphi}$, то для их значений вычисляемого шага расчетов возможно, следуя (3.14), записать приближенные зависимости

$$\begin{aligned} p_{rr} &= h(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\Delta t + \tilde{p}_{rr}, \\ p_{\varphi\varphi} &= h(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})\Delta t + \tilde{p}_{\varphi\varphi}, \\ p_{zz} &= -h(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})\Delta t + \tilde{p}_{zz}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Эти соотношения необходимы при формулировке краевых задач для уравнений (3.15) с соответствующими граничными условиями в конечных разностях.

4. Некоторые результаты вычислений. Расчеты проводятся последовательными шагами по времени. На каждом таком шаге предварительно рассчитывается уровень и распределение по элементам сборки температуры. Это позволяет рассчитать на этом же шаге параметры напряженно-деформируемых состояний в материалах деталей конструкции. С этой целью разрешается конечно-разностный аналог уравнений равновесия, то есть уравнений (3.4) для упругой области либо (3.15) для области вязкопластического течения. Система конечно-разностных уравнений учитывает в своей записи граничные условий (3.5)–(3.12). После расчетов имеем в данный момент времени распределения по сборке температуры, деформаций и температурных напряжений и на такой основе производим последующий шаг вычислений. Рассчитывая состояние сборки на каждом шаге таких вычислений, устанавливаем время и место зарождения и остановки вязкопластического течения, расположение упругопластических границ в материалах сопрягающихся деталей. Последние могут продвигаться в упругую область, развивая область течения (нагружающая упругопластическая граница), или в область вязкопластического деформирования, тормозя течение (разгружающая граница). В процессе остывания собранной конструкции продвигающаяся разгружающая упругопластическая граница приводит к схлопыванию вязкопластической области, и дальнейшее деформирование оказывается уже упругим при наличии приобретенных необратимых пластических деформаций. Эти деформации приводят к формированию поля остаточных напряжений при полном остывании сборки до комнатной температуры. Расчет процесса релаксации остаточных напряжений выходит за рамки используемой здесь математической модели.

Прежде всего, отметим следствия расчетов, позволяющие сделать некоторые выводы качественного характера для процесса проводимой конкретной операции посадки:

- вязкопластическому деформированию подвержен только материал охватывающего кольца сборки; материал охватываемой пластины в течение всего процесса протекания технологической операции деформируется обратимо (упруго);

- развитие областей вязкопластического течения в охватывающем кольце начинается от точек E и E' (рис. 2) области контакта Φ_2 ;

- разгружающая упругопластическая граница начинает свое продвижение по материалу охватывающего кольца также из точек E и E' (рис. 2), области деформирования;

- повторных (обратимых) вязкопластических течений в рассматриваемом случае процесса посадки не возникает.

Эти выводы справедливы именно для рассмотренной операции посадки. Ранее [3, 22] отмечалось, что возможно формирование разгружающей упругопластической границы на поверхности останавливающейся нагружающей границы и продвижение её в направлении обратном направлению движения нагружающей упругопластической границы. Это характерно в случае использования в расчетах условий пластичности (вязкопластичности) максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева) [3, 23]. Повторные пластические течения в условиях плоских напряженных состояниях, как в рассматриваемом случае, не возникают (исключение [15]); они

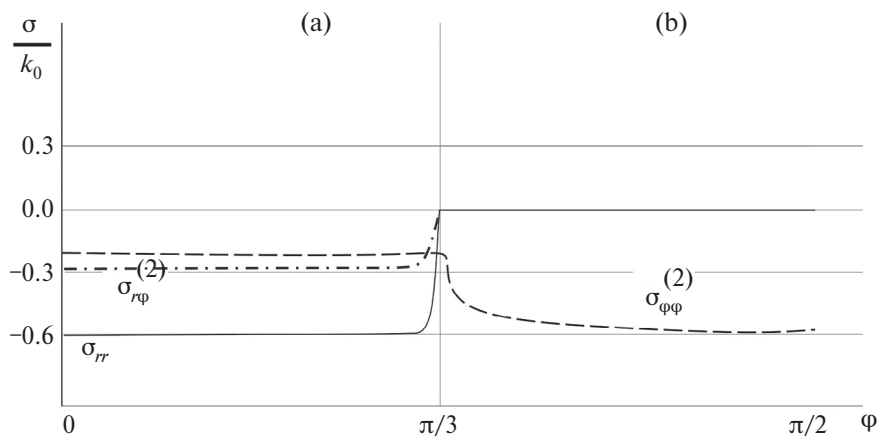


Рис. 3. Остаточные напряжения при $r = R$ в материале охватывающего кольца.

с необходимостью возникают в случае сборки длинномерных конструкций, двухслойных валов и труб [3, 6, 8, 22, 23].

Характерное распределение (рис. 3) остаточных напряжений по поверхности охватывающего кольца $r = R$, включающей в себя как поверхность константа Φ_2 , так и свободную поверхность Φ_1 , показано на рис. 3. При получении графических зависимостей принималось, что охватывающее кольцо изготовлено из латуни ($\lambda = 66.92$ ГПа, $\mu = 44.61$ ГПа, $k_0 = 350$ МПа, $a = 18 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_p = 1040$ °С, $T_0 = 400$ °С, $\alpha = 16.2 \cdot 10^{-6}$ (1/°С)), а охватываемая пластинка из бронзы ($k_0 = 290$ МПа, $\lambda = 58.26$ ГПа, $\mu = 38.84$ ГПа, $a = 36 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_p = 937$ °С, $T_0 = 20$ °С, $a = 19.1 \cdot 10^{-6}$ (1/°С)). Геометрические размеры деталей сборки задавались значениями: $R = 0.04$ м, $R_1 = 0.05$ м, $\varphi = \pi/3$.

На рис. 4 более детально указаны остаточные напряжения в элементах сборки при подходе к точке В, разделяющей область контакта Φ_2 и свободную от нагрузки область Φ_1 . Рисунком (рис. 4,а) показаны распределения остаточных напряжений при сглаживании разрывов в граничных условиях ($\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0.01\pi$), в то время как на рис. 4,б) графические зависимости построены в условиях $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$. Присутствие не только количественных, но и качественных различий в графических зависимостях, подчеркивает необходимость использования отмеченных здесь процедур сглаживания.

Заключение. Рассмотренная здесь задача Гадолина [7] о сборке с натягом за счет горячей посадки цилиндрических деталей, выполненных из упругопластических материалов, является характерным примером задач, направленных на моделирование технологических операций изготовления металлоизделий. Технологический процесс рассчитывается за счет разрешения в каждый его момент времени краевой задачи теории температурных напряжений в упругопластических материалах. Таким способом прослеживается эволюция температурных напряжений во время проведения операции, включая расчет сформировавшегося распределения остаточных напряжений. Последние, чаще всего, оказываются основной целью проводимых вычислений, так как именно они задают функциональные качества итоговой конструкции.

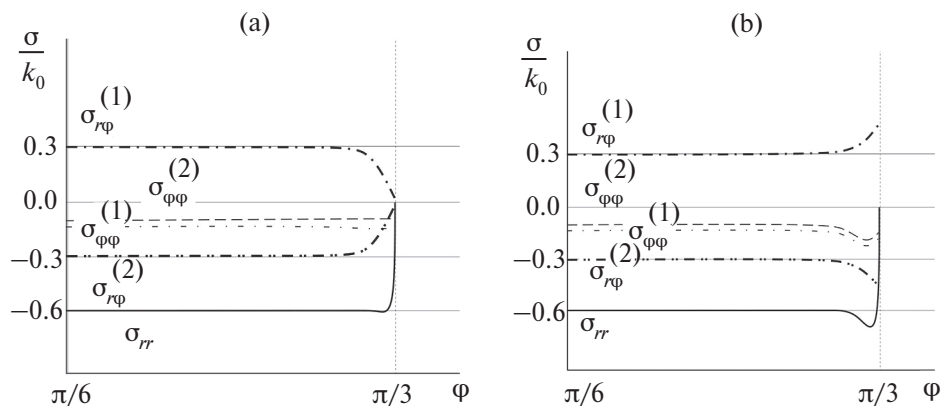


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в окрестности пограничной точки В: (а) — $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0.01\pi$; $\varphi_0 = \pi/3$; (б) — $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$; $\varphi_0 = \pi/3$.

Предполагаемый способ расчета изменяющихся в условиях проведения технологической операции температурных напряжений не запрещает учет упрочнения материалов сопрягаемых деталей при их пластическом деформировании как изотропного, так и трансляционного [28]. Учет кинематического упрочнения особенно необходим при возникновении повторных пластических течений [3, 29] в процессе разгрузки и остывания сборки.

Для исключения сингулярности в заданных граничных условиях используется искусственный прием сглаживания в разрывах значений задаваемых напряжений на граничных поверхностях сопрягаемых деталей. Показывается, что иначе следуют ошибочные результаты (сравнение 4,а,б). Именно подобные ошибки неоднократно встречаются [30–32] в результате расчетов температурных напряжений в собираемых конструкциях. Современная механика деформирования твердых тел располагает [33–37] набором средств для избежание ошибочного влияния сингулярности в задаваемых граничных условиях на следующие результаты расчетов. Некоторые такие предложения [33, 34] обладают признаками универсальности. Принятый здесь искусственный способ этого лишен. Он только преследует цель показать, что исключение сингулярности в граничных условиях бывает совершенно необходимо. На разработанном примере это удалось продемонстрировать.

Работа выполнена в рамках государственного задания Хабаровского Федерального научного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берникер Е.И. Посадка с натягом в машиностроении. М., Л.: Машиностроение, 1966. 168 с.
2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

3. Буренин А.А., Ткачева А.В. Эволюция температурных напряжений в задаче Гадолина о сборке двухслойной упругопластической трубы // Вестн. ПНИПУ. Сер. Мех. 2020. № 3. С. 20–31. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.3.03>
4. Попов А.Л., Челобеев Д.А., Бухалов В.И. Задача Гадолина в упругопластической постановке // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 804–812. <https://doi.org/10.31857/S003282350002744-8>
5. Буренин А.А., Ткачева А.В., Фирсов С.В. Задача Гадолина о сборке двухслойного вала горячей посадкой с испытанием соединения на отрыв // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26. № 3. С. 480–499. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1928>
6. Буренин А.А., Ткачева А.В. Задача Гадолина о процессе сборки двухслойной предварительно напряженной трубы // ПМТФ. 2023. Т. 64. № 5. С. 225–240. <https://doi.org/10.15372/PMTF202315249>
7. Гадолин А.В. Теория орудий, скрепленных обручами // Артилл. Журнал. 1861. № 12. С. 1033–1071.
8. Буренин А.А., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А. К расчетам неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // Вычисл. мех. спл. сред. 2017. Т. 10. № 3. С. 245–259. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20>
9. Дац Е.П., Мурашкин Е.В., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 32–43.
10. Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзенг Й.–Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // Докл. РАН. 2012. Т. 443. № 3. С. 310–312.
11. Сёмка Э.В. Об алгоритме вычисления параметров состояния термопластического диска // Вестник Башк. ун-та. Серия: мат. мех. Уфа. 2021. № 1. С. 10–15. <https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2021.1.2>
12. Александров С.Е., Лямина Е.А., Новожилова О.В. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полой диске // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 3. С. 43–48.
13. Дац Е.П., Петров М.Р., Ткачева А.В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборке горячей посадкой // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2015. Т. 26. № 4. С. 163–179.
14. Дац Е.П., Ткачева А.В., Шпорт Р.В. Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 204–213.
15. Буренин А.А., Каинг М., Ткачева А.В. К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // ДВМЖ. 2018. Т. 18. № 2. С. 131–146.
16. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
17. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 704.
18. Gajer U. A concise treatment of the shrink fit with elastic plastic hub // Int. Solids Struct. 1992. V. 29. P. 2463–2469.

19. *Mack W.* Thermal assembly of on elastic – plastic hub a solid shaft // *Arch. Appl. Mech.* V. 63. P. 42–50.
<https://doi.org/10.1007/BF00787908>
20. *Bengeri M., Mack W.* The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica.* 1994. V. 103. P. 243–257. <https://doi.org/10.1007/BF01180229>
21. *Kovacs A.* Residual stresses in thermally loaded shrink fit // *Period. Polytech., Mech. Eng.* 1996. V. 40. № 2. P. 103–112.
22. *Буренин А.А., Матвеев В.П., Ткачева А.В.* Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки // *Уч. Зап. КнАГТУ.* 2018. Т. 35. № 3. С. 31–41.
23. *Буренин А.А., Ткачева А.В.* О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 3. С. 86–99.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919030073>
24. *Буренин А.А., Ткачева А.В.* К расчетам технологической операции сборки горячей посадкой цилиндрических деталей // *ПММ.* 2022. Т. 86. № 4. С. 595–611.
<https://doi.org/10.31857/S0032823522040051>
25. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во Иностран. лит., 1963. 312 с.
26. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
27. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 399 с.
28. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
29. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Возможность повторного пластического течения при общей разгрузки упругопластической среды // *Докл. РАН.* 2000. Т. 375. № 6. С. 767–769.
30. *Erena D., Vazquez J., Navarro C., Talimi R.* Numerical study on the influence of artificial internal stress relief groove on fretting fatigue in a shrink-fitted assembly // *Tribol. Int.* 2020. V. 151. P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2020.106443>
31. *Потянихин Д.А., Дубенко Е.М.* Расчет напряженно-деформированного состояния заклепочного соединения, полученного с помощью азотного охлаждения заклепки // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния.* 2018. № 3(37). С. 134–144.
32. *Buczkowski R., Kleiber M.* A study of the surface roughness in elastic-plastic shrink fitted joint // *Tribol. Int.* 2016. V. 98. P. 125–132.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.02.021>
33. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики // *ПММ.* 2018. Т. 82 Вып. 4. С. 459–471.
<https://doi.org/10.31857/S003282350000204-4>
34. *Горайнов В.В., Попов М.И., Чернышов А.Д.* Решение задачи о напряжениях в отром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 5. С. 113–130.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919050088>
35. *Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И.* Существование и единственность R_ν – обобщенного решения задачи для системы Ламе с угловой сингулярностью // *Дифф. уравнения.* 2019. Т. 55. №6. С. 848–856.
<https://doi.org/10.1134/S0374064119060104>

36. Поликарпов М.В., Пеньков В.Б. Сосредоточенные силовые воздействия в методе граничных состояний // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2020. № 1(43). С. 34–44. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.43.1.004>
37. Ломакин Е.В., Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах упругости за счет градиентных эффектов // ДАН. 2019. Т. 489. № 6. С. 51–57. <http://dx.doi.org/10.31857/S0869-56524896585-591>

ON THE ASSEMBLY OF A HOT-FIT ELASTIC-VISCOPLASTIC DISK WITH A NON-CIRCULAR INCLUSION

A. A. Burenin, A. V. Tkacheva*

*Institute of Mechanical Science and Metallurgy, Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences*

*e-mail: 4nansi4@mail.ru

Abstract. The solution of a non-one-dimensional boundary value problem of the theory of plane temperature stresses is used to calculate the level and distribution of temperature stresses at each time point during the process of performing the technological operation of assembling a composite disk by hot fitting, when the enclosed assembly part is different from a circular plate. Residual stresses in the assembly elements and the resulting interference fit in it after its cooling to room temperature are calculated. Current and residual stresses are calculated depending on the preliminary heating of the enclosing ring, the thermomechanical properties of the mating parts and their initial geometry. The yield strengths of the elastic-viscoplastic elements of the assembly are assumed to be essentially dependent on the local temperature. Attention is drawn to the need to exclude singularity when setting boundary conditions on the mating surfaces of the assembly parts.

Keywords: elasticity, viscoplasticity, temperature stresses, shrink fit, interference fit, Gadolin problem.

REFERENCES

1. Bernicker E.I. Interference fit in mechanical engineering. M., L.: Mechanical engineering. 1966. 168 p. (in Russian)
2. Parkus H. Instationäre warmespannungen. Wien: Springer-Verlag. 1959.
3. Burenin A.A., Tkacheva A.V. Evolution of temperature stresses in the Gadolin problem of assembling a two-layer elastic-plastic pipe // Vestn. PNIPU. Ser. Mekh. 2020. No. 3. P. 20–31. (in Russian)
4. Bukhalov V.I., Popov A.L., Chelyubeev D.A. Gadolin's theory in elastoplastic formulation Mechanics of Solids. 2019. T. 54. № 2. С. 356–63.
5. Burenin A.A., Tkacheva A.V., Firsov S.V. Gadolin's problem on assembling a two-layer shaft by hot fitting with a joint tear-off test // Vesn. Sam. state tech. univ. Ser. Phys.-math. sciences. 2022. Vol. 26, No. 3. P. 480–499. (in Russian)

6. *Burenin A.A., Tkacheva A.V.* Gadolin problem of assembling a prestressed two-layer pipe Journal of applied mechanics and technical physics 64 № 5. 2023. P. 929–942.
DOI: 10.1134/s002189442305022x
7. *Gadolin A.V.* Theory of guns fastened with hoops // Artillery Journal. 1861. No. 12. P. 1033–1071. (in Russian)
8. *Burenin A.A., Tkacheva A.V., Shcherbatyuk G.A.* Calculation of the unsteady thermal stresses in elastoplastic solids Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. T. 59. № 7. C. 1197–1210.
9. *Dats E.P., Murashkin E.V., Tkacheva A.V., Shcherbatyuk G.A.* thermal stresses in an elastoplastic tube depending on the choice of yield conditions Mechanics of Solids. 2018. T. 53. № 1. C. 23–32.
10. *Aleksandrov S.E., Lomakin V., Dzeng I.-R.* Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disk of plastically compressible material subjected to thermal loading Doklady Physics. 2012. T. 57. № 3. C. 136–139.
11. *Semka E.V.* On the algorithm for calculating the state parameters of a thermoplastic disk // Bulletin of Bashkir University. Series: mat. mech. Ufa. 2021. No. 1. P. 10–15.
12. *Aleksandrov S.E., Lyamina E.A., Novozhilova O.V.* The influence of the relationship between yield strength and temperature on the stress state in a thin hollow disk Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2013. T. 42. № 3. C. 214–218.
13. *Dats E.P., Petrov M.R., Tkacheva A.V.* Piecewise linear plastic potentials in problems of the theory of thermal stresses on hot-fit assembly // Bulletin of ChSPU named after I.Ya. Yakovlev. Limit State Mechanics. 2015. Vol. 26, No. 4. P. 163–179. (in Russian)
14. *Dats E.P., Tkacheva A.V., Shport R.V.* Assembly of the “ring in ring” structure by the method of hot fitting // Bulletin of the ChSPU named after I. Ya. Yakovlev, Series: Mechanics of the limit state. 2014, No. 4 (22). P. 204–213. (in Russian)
15. *Burenin A.A., Kaing M., Tkacheva A.V.* On the calculation of plane stress states in the theory of unsteady temperature stresses in elastic-plastic bodies// Far Eastern Mechanical Engineering Journal. 2018. Vol. 18, No. 2. P. 131–146. (in Russian)
16. *Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.* Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian)
17. *Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D.* Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001, p. 704. (in Russian)
18. *Gamer U.* A concise treatment of the shrink fit with elastic plastic hub // Int. Solids Struct. 1992. V. 29. P. 2463–2469.
DOI:10.1007/BF01174165
19. *Mack W.* Thermal assembly of on elastic – plastic hub a solid shaft // Arch. Appl. Mech. V. 63. P. 42–50.
DOI: 10.1007/BF00787908
20. *Bengeri M., Mack W.* The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit// Acta Mechanica 1994, Vol. 103. P. 243–257.
DOI:10.1007/BF01180229
21. *Kovacs A.* Residual stresses in thermally loaded shrink fit// Period. Polytech., Mech. Eng. 1996. V. 40, № 2. P. 103–112.
22. *Burenin A.A., Matveenko V.P., Tkacheva A.V.* Temperature stresses during the assembly of a two-layer shaft by hot fitting // Uch. Zap. KnAGTU. 2018. Vol. 35, No. 3. P. 31–41. (in Russian)

23. *Burenin A.A., Tkacheva V.E.* Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit Mechanics of Solids. 2019. T. 54. № 4. C. 559–569.
24. *Burenin A.A., Tkacheva A.V.* On the calculations of the technological operation of hot-fitting assembly of cylindrical parts // PMM. 2022. Vol. 86, No. 4. P. 595–611. (in Russian)
25. *Prager W.* Introduction to mechanics of continua. Grinn and Co. USA. 1961.
26. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok: Dalnauka. 2013. 312 p. (in Russian)
27. *Germain P.* Cours de mecanique des milieux continus. Tome 1. Theorie genelale. Paris. 1973.
28. *Ivlev D.D., Bykovtsev G.I.* Theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka. 1971. 232 p. (in Russian)
29. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Polonik M.V.* The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium Doklady Physics. 2000. T. 45. № 12. C. 694–696.
30. *Erena D., Vazquez J., Navarro C., Talimi R.* Numerical study on the influence of artificial internal stress relief groove on fretting fatigue in a shrink-fitted assembly // Tribol. Int. 2020. V. 151. P. 1–9.
DOI: 10.1016/j.triboint.2020.106443
31. *Potyanykhin D.A., Dubenko E.M.* Calculation of the stress-strain state of a riveted joint obtained using nitrogen cooling of the rivet // Vestn. ChSPU named after I.Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the Limit State. 2018. No. 3(37). P. 134–144. (in Russian)
32. *Buczkowski R., Kleiber M.* A study of the surface roughness in elastic-plastic shrink fitted joint // Tribol. Int. 2016. V. 98. P. 125–132.
DOI: 10.1016/j.triboint.2016.02.021
33. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* Nonlocal solutions to singular problems of mathematical physics and mechanics. Mechanics of Solids. 2018. T. 53. № S. C. 135–144.
34. *Goryainov V.V., Popov M.I., Chernyshov A.D.* Solving the stress problem in a sharp wedge-whaped cutting tool using the quick decomposition method and the problem of matching boundary conditions. Mechanics of Solids. 2019. T. 54. № 7. C. 1083–1097.
35. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.* Existence and uniqueness of an rv-generalized solution of the dirichlet problem for the lamé system with a corner singularity Differential Equations. 2019. T. 55. № 6. C. 832–840.
36. *Penkov V.B., Polikarpov M.V.* Concentrated force actions in the boundary state method // Vestn. ChSPU named after I.Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. 2020. No. 1. P. 34–44. (in Russian)
37. *Lomakin E.V., Lurie S.A., Rabinskiy L.N., Solyaev Y.O.* Refined stress analysis in applied elasticity problems accounting for gradient effects Doklady Physics. 2019. T. 64. № 12. C. 482–486.

УДК 539.3

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПОГРАНСЛОЙ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

© 2024 г. И. В. Кириллова^{а,*}

“ФГБОУ ВО «СГУ им. Н.Г. Чернышевского», Саратов, Россия

** e-mail: nano-bio@info.sgu.ru*

Поступила в редакцию 21.06.2024 г.

После доработки 27.06.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

В данной статье построен метод решения краевой задачи для эллиптического погранслоя, имеющего место в тонкостенных оболочках вращения при ударных воздействиях нормального вида на лицевые поверхности. Эллиптический погранслой строится в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея и описывается эллиптическими уравнениями с граничными условиями, задаваемыми уравнениями гиперболического типа. В общем случае оболочек вращения не могут быть использованы методы решения уравнений для эллиптического погранслоя, разработанные для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Рассматриваемая ранее схема использования интегральных преобразований Лапласа и Фурье перестаёт работать, поскольку разрешающие уравнения становятся уравнениями с переменными коэффициентами. Предложенный в данной статье метод решения уравнений эллиптического погранслоя основан на использовании асимптотического представления изображений решения по Лапласу (по времени) в экспоненциальной форме. В работе приведён численный расчёт нормального напряжения по полученным аналитическим решениям для случая сферической оболочки.

Ключевые слова: асимптотический метод, эллиптический погранслой, оболочка вращения, сферическая оболочка, фронт поверхностных волн Рэлея, преобразование Лапласа, преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S1026351924050045, EDN: UBBQQG

1. Введение. При ударных воздействиях нормального типа NW (в соответствии с классификацией У.К. Нигула [1,2]), возникает эллиптический погранслой, определяющий особый тип нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) в тонких пластинах и оболочках в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Данный погранслой и выделяет нормальный тип ударного воздействия NW среди других видов ударных воздействий – продольного, изгибающего типа (LM) и продольного, тангенциального типа (LT).

Асимптотический подход к выводу уравнений теории оболочек был впервые разработан в трудах А.Л. Гольденвейзера [3, 4]. Концепция изменяемости напряженно-деформированного состояния (НДС) по координатам и её количественная оценка через показатели изменяемости позволила сформулировать принципы асимптотического интегрирования точных трёхмерных уравнений теории упругости в статике и получить этим методом уточнённые уравнения теории оболочек. Также удалось выделить составляющие НДС (безмоментная составляющая, простой краевой эффект и др.) как в статике, так и стационарной динамике, а также построить асимптотические методы их определения.

Разработанный для задач статики и стационарной динамики асимптотический подход дал возможность создать принципиально новую асимптотическую теорию нестационарных процессов деформации тонких оболочек [5–8], основанную на варианте метода сращиваемых разложений, позволяющего разделить фазовую область на различные участки, обладающие теми специфическими значениями показателей изменяемости и динамичности, которые соответствуют известным особенностям поведения нестационарных волн. В качестве таких особенностей, отличающих нестационарные задачи от задач статики и стационарной динамики, являются различные виды фронтов и квазифронтов, отражающих ударный характер приложения нагрузки.

В рамках разрабатываемой асимптотической теории нестационарных волн появилась необходимость нахождения новых асимптотических методов вывода приближенных теорий из точных трёхмерных уравнений теории упругости. Асимптотические уравнения двумерных составляющих, соответствующих классической теории Кирхгофа–Лява, получены в работе [5]. Общий подход к выводу уравнений для НДС в окрестностях фронтов волн и волновых квазифронтов изложен наиболее полно в работах [6–8]. В итоге были выделены безмоментная и изгибающая составляющая двумерной теории Кирхгофа–Лява, гиперболические погранслои в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига, параболический погранслой в окрестности квазифронта, связанного с ложным фронтом волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа–Лява и эллиптический погранслой в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. При различных типах ударных воздействий эти компоненты применяются в разных комбинациях, но полнота таких представлений доказывается наличием и определением расположения так называемых областей согласования соседних составляющих.

Проведённые исследования показали, что ни одна из известных двумерных теорий не может описать полностью рассматриваемую волновую картину вследствие высокой изменяемости и принципиально разного поведения нестационарного НДС в малых окрестностях фронтов и квазифронтов.

В работах [8, 9] окончательно описано построение асимптотически оптимальных уравнений эллиптического погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Выявлены уникальные свойства этого погранслоя: поведение решения вне лицевых поверхностей оболочки описывается эллиптическими уравнениями, а на поверхности для потенциальных функций, определяющих решение, описывается гиперболическими

уравнениями. Отметим, что такие качественные свойства решения базируются на анализе дальнего поля волны Рэля в случае упругой полуплоскости в классической задаче Лэмба [10], объясняющего эффект так называемых поверхностных волн. В работе [9] также получено решение для эллиптического погранслоя в случае цилиндрической оболочки: используются интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате.

В общем случае оболочек вращения, когда разрешающие уравнения содержат переменные коэффициенты, метод их решения, разработанный в [9], неприменим. В данной статье описывается новый разработанный асимптотический метод решения искомых уравнений в случае нормальной ударной нагрузки на лицевые поверхности произвольных оболочек вращения. Используются асимптотические методы в пространстве интегрального преобразования Лапласа по времени. В качестве примера приведены результаты расчёта нормального напряжения для сферической оболочки.

2. Постановка задачи. Рассмотрим оболочку вращения, изображённую на рис.1, где система координат (α, θ, z) привязана к срединной поверхности: α — длина дуги вдоль образующей, θ — угол в окружном направлении, z — внешняя нормаль к срединной поверхности. Напряжения и перемещения оболочки обозначим как σ_{ij} и v_i ($i, j = 1, 2$).

Для определенности рассмотрим осесимметричное НДС.

Граничные условия на лицевых поверхностях оболочки выберем в форме, аналогичной [9]:

$$\sigma_{33} = -P(\alpha, t), \sigma_{13} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad |\alpha| \leq L,$$

$$\sigma_{33} = 0, \sigma_{13} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad |\alpha| > L,$$

где h — полутолщина оболочки, t — время, L — ширина кольца нагрузки на поверхности. Ударное воздействие $P(\alpha, t)$ определяется следующим образом

$$P = pH(L - \alpha)H(t) \quad \text{при} \quad \alpha \geq 0,$$

$$P = pH(L + \alpha)H(t) \quad \text{при} \quad \alpha \leq 0.$$

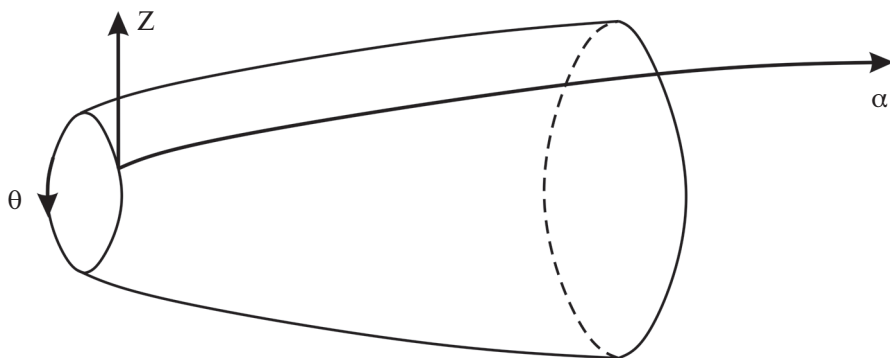


Рис. 1. Полубесконечная оболочка вращения.

Здесь p – амплитуда нагрузки, а $H(t)$ – единичная функция Хевисайда. При этом рассматриваются однородные начальные условия

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 3) \quad \text{при } t = 0.$$

Разрешающие уравнения эллиптического погранслоя при рассматриваемых воздействиях описаны в [8]. В исходной форме они записываются относительно объёмных и сдвиговых потенциалов $\varphi_i, \psi_i (i = 1, 2)$, когда потенциальные функции φ_1, ψ_1 определяют распространение возмущений в положительном направлении оси z , а φ_2 и ψ_2 – в отрицательном. Ограничиваясь рассмотрением только волны, инициируемой лицевой поверхностью $z = -h$, выпишем, соответственно, разрешающую систему уравнений только для потенциалов φ_1, ψ_1 (индекс «1» опускаем) в безразмерной форме в координатах $\xi = \alpha/h, \zeta = z/h, \tau = c_2 t/h$ (c_2 – скорость волны сдвига). Тогда уравнения, описывающие НДС рассматриваемого погранслоя, имеют форму

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} &= 0, \\ b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и являются уравнениями эллиптического типа, где $a = \sqrt{1 - \kappa^2 \kappa_R^2}$; $b = \sqrt{1 - \kappa_R^2}$; $\kappa^2 = c_1/c_2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$; $\kappa_R = c_R/c_2$; c_1 и c_R – скорости волн расширения и поверхностных волн Рэлея; ν – коэффициент Пуассона. Граничные условия на лицевой поверхности описываются уже гиперболическими уравнениями

$$\begin{aligned} \kappa_R^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= \frac{(1 + \nu)h}{E} \frac{\kappa_R B_\omega}{b} P, \quad \zeta = -1, \\ \left(a + \frac{\kappa^2 \kappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\kappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \\ + \left(g + \frac{\kappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= 0, \quad \zeta = \pm 1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где E – модуль Юнга, $\varepsilon = h/R$ – малый параметр тонкостенности оболочки, R – характерное значение радиусов кривизны, B – расстояние до оси вращения, а постоянные g, k_c, B_ω определяются выражениями

$$g = 1 - \frac{\kappa_R^2}{2}, \quad B_\omega = 2 \left[\frac{\kappa_R}{1 - \kappa_R^2} + \frac{\kappa \kappa_R}{1 - \kappa^2 \kappa_R^2} - \frac{4\kappa_R}{2 - \kappa_R^2} \right]^{-1}, \quad k_c = 2 + \kappa_R B_\omega.$$

Отметим, что поведение НДС в области рассматриваемого погранслоя можно наглядно анализировать на примере нормального напряжения σ_{33} , выражающегося через потенциалы следующим образом:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[\left(g + \frac{\kappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \left(b + \frac{\kappa_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \left(b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right].$$

3. Асимптотическое решение для эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударном воздействии нормального типа на лицевые поверхности.

В цитируемой работе [8] приведено решение для рассматриваемого эллиптического погранслоя в случае цилиндрической оболочки. В этом случае уравнения (2.1)–(2.2) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами, и для их решения были применены интегральные преобразования Лапласа по временной, а Фурье – по продольной переменной.

Разрешающие уравнения эллиптического погранслоя для рассматриваемого общего случая оболочек вращения имеют переменные коэффициенты, и поэтому вышеизложенная методика для нашего общего случая не подходит. Однако переменные коэффициенты являются при этом медленно изменяющимися по продольной координате. Это позволяет использовать в нашей работе, в качестве ключевого, метод экспоненциального представления в пространстве преобразования Лапласа по временной переменной. Главной особенностью предлагаемого здесь асимптотического подхода является определение выражения для изображения по Лапласу искомого решения в рассматриваемом случае оболочек вращения через известное решение для цилиндрической оболочки.

Рассмотрим сначала поведение потенциала ψ на границе $\zeta = -1$, определяемое первым уравнением системы (2.2), которое для его изображения по Лапласу примет вид

$$\kappa_R^2 \frac{d^2 \psi_0^L}{d\xi^2} - s^2 \psi_0^L + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{d\psi_0^L}{d\xi} = \frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\kappa_R B_\omega}{b} P^L, \\ \psi_0 = \psi|_{\zeta=-1}, \quad \psi_0^L = \int_0^\infty \psi_0 e^{-s\tau} d\tau, \quad P^L = \begin{cases} \frac{P}{s}, & |\xi| \leq L, \\ 0, & |\xi| > L, \end{cases} \quad (3.1)$$

где s – параметр преобразования Лапласа.

Проанализируем свойства решения для двойного интегрального преобразования (Лапласа по времени и Фурье по продольной координате) граничного значения потенциальной функции ψ_0 в случае цилиндрической оболочки. Оно легко получается из (3.1) при $B(\xi_0) = \text{const}$:

$$\psi_0^{LF} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\kappa_R B_\omega}{b} \frac{\sin \chi L}{s\chi(\kappa_R^2 \chi^2 + s^2)}, \\ \psi_0^F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \psi_0 e^{-i\chi\xi} d\xi. \quad (3.2)$$

Обращение преобразования Фурье для изображения (3.2) даёт, в соответствии с [11], следующее выражение для ψ_0^L :

$$\begin{aligned} \xi_0 \leq L_0 : \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_0}{E} p \frac{1}{s^3} \left[1 - \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\xi_0 - L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} + e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} \right) \right], \\ \xi_0 \geq L_0 : \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_0}{E} p \frac{1}{s^3} \left(e^{-\frac{\xi_0 - L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} - e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} \right), \quad L_0 = \varepsilon L, \quad \xi_0 = \frac{\alpha}{R}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В решении (3.3) слагаемые с $e^{\pm \frac{\xi_0 \pm L_0}{\kappa_R \varepsilon} s}$ определяют волны, возбуждаемые границами приложения ударной поверхностной нагрузки $\xi_0 = \pm L_0$. Так, в области $\xi_0 > 0$ граница $\xi_0 = L_0$ возбуждает прифронтовое поле в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея $\xi_0 = \kappa_R \tau_0 + L_0$ (слагаемое $\exp\{-(\xi_0 - L_0)/(\kappa_R \varepsilon)s\}$) и прифронтовое поле в окрестности фронта $\xi_0 = L_0 - \kappa_R \tau_0$ (слагаемое $\exp\{[(\xi_0 - L_0)/(\kappa_R \varepsilon)s]\}$). В этой же области $\xi_0 > 0$ граница $\xi_0 = -L_0$ возбуждает прифронтовое поле в окрестности фронта $\xi_0 = \kappa_R \tau_0 - L_0$ (слагаемое $\exp\{-(\xi_0 + L_0)/(\kappa_R \varepsilon)s\}$).

Отметим, что решение (3.3) можно непосредственно получить из (3.1) как линейную комбинацию частного решения неоднородного уравнения и общих решений уравнения однородного, определяющих вышеописанные волновые поля. Проведенный анализ позволяет построить асимптотическое решение уравнения (3.1) для общего случая оболочек вращения. Так, решения для волновых составляющих можно получить из однородного уравнения

$$\kappa_R^2 \frac{d^2 \psi_0^L}{d\xi^2} - s^2 \psi_0^L + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{d\psi_0^L}{d\xi} = 0 \quad (3.4)$$

методом экспоненциальных представлений с погрешностью $O(\varepsilon)$ в виде

$$\psi_0^L = C(s) \Psi(\xi_0, s) e^{\frac{\lambda(s)\xi_0}{\varepsilon}}, \quad (3.5)$$

где $\lambda(s)\xi_0/\varepsilon$ — специальный вид функции изменяемости, $C(s)$ — постоянная интегрирования, а $\Psi(\xi_0, s)$ — медленно изменяющаяся функция интенсивности, представляемая разложением в степенной ряд по малому параметру ε .

Подставляя (3.5) в (3.4), получаем с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ следующее уравнение

$$(\kappa_R^2 \lambda^2 - s^2) \Psi - \varepsilon \left(2\kappa_R^2 \lambda \Psi' + k_c \frac{B'}{B} \lambda \Psi \right) = 0,$$

которое даёт выражение для функции изменяемости

$$\lambda = \pm \frac{1}{\kappa_R} s$$

и нулевое приближение для функции интенсивности

$$\Psi(\xi_0, s) = \frac{1}{B^{k_r}}, \quad k_r = \frac{k_c}{2\kappa_R^2}.$$

Поскольку частное решение неоднородного уравнения (3.1) с погрешностью $O(\varepsilon)$ записывается в виде

$$\psi_0^L = -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_\omega}{E} \frac{1}{b} p \frac{1}{s^3},$$

полностью соответствующему такому же частному решению в (3.3), то общее решение уравнения (3.1) может быть получено при использовании волновых решений (3.5) за счёт выбора постоянных интегрирования $C(s)$ при условии его непрерывности в точках $\xi_0 = \pm L_0$. В итоге получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} \xi_0 \leq L_0: \quad \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_\omega}{E} \frac{1}{b} \frac{1}{s^3} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left(e^{\frac{\xi_0 - L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} + e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} \right) \right], \\ \xi_0 \geq L_0: \quad \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_\omega}{E} \frac{1}{2b} \frac{1}{s^3} \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left(e^{-\frac{\xi_0 - L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} - e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Полученное решение (3.6) полностью обобщает соответствующее решение (3.3) для случая цилиндрической оболочки. Поскольку нас интересуют асимптотики только в малых окрестностях условных фронтов волн Рэлея, то решение (3.6) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \xi_0 \leq L_0: \quad \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_\omega}{E} \frac{1}{b} \frac{1}{s^3} \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\xi_0 - L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} + e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} \right) \right], \\ \xi_0 \geq L_0: \quad \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_\omega}{E} \frac{1}{2b} \frac{1}{s^3} \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left(e^{-\frac{\xi_0 - L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} - e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, из вида асимптотики решения (3.7) следует, что она связана с соответствующим решением для цилиндрической оболочки следующим образом:

$$\psi_0^L = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \psi_{0,c}^L, \quad (3.8)$$

где $\psi_{0,c}^L$ является соответствующим решением для цилиндрической оболочки.

Перейдём к определению потенциалов ϕ , ψ в основной области. Анализируем систему (2.1)–(2.2) и выражение (2.3), приходим к выводу, что только первое уравнение в граничных условиях (2.2) содержит в асимптотически главной части волновой оператор, определяющий НДС в окрестностях условных фронтов поверхностных волн Рэлея. Следовательно, только в этом уравнении нужно учитывать величины нулевого и первого порядка малости;

в остальных же уравнениях достаточно удерживать только асимптотически главные величины. Следовательно, аналогично зависимости (3.8), все компоненты НДС могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij}^L = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \sigma_{j,c} \quad v_i^L = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} v_{i,c}^L.$$

где $\sigma_{ij,c}$, $v_{i,c}^L$ соответствующие решения для случая цилиндрической оболочки. Следовательно, аналогичные зависимости имеют место и для оригиналов:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \sigma_{j,c} \quad v_i^L = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} v_i.$$

Окончательно, используя результаты решения задачи об эллиптическом погранслое для цилиндрической оболочки [8], получаем следующее решение для напряжения σ_{33} :

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \frac{B_0 p}{2\pi \kappa_R} \left[\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right]^{k_r} & \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{2La(\zeta+1)}{a^2(\zeta+1)^2 - L^2 + (\xi - \kappa_R \tau)^2} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left(\frac{2Lb(\zeta+1)}{b^2(\zeta+1)^2 - L^2 + (\xi - \kappa_R \tau)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Асимптотический анализ решения (3.9) показывает, что вне малых окрестностей условного фронта волны Рэлея его порядок уменьшается до $O(\varepsilon)$. Отметим также следующую особенность рассматриваемого решения: вне узкой прифронтовой зоны эллиптического погранслоя [8,9] порядка $O(\varepsilon^2)$ решение для σ_{33} имеет порядок $O(1)$ только в малой приторцевой зоне $\zeta + 1 = O(\varepsilon)$. Следовательно, важнейшее предположение о достаточности отдельного рассмотрения волн, инициируемых каждой лицевой поверхностью, полностью оправдывается при построении решения в этой области:

$$\xi_0 - (\kappa_R \tau_0 \pm L_0) = O(\varepsilon^2),$$

где, как и показывают численные расчёты, имеет место первый скачок напряжения σ_{33} .

4. Анализ решения для эллиптического погранслоя в случае сферической оболочки. Рассмотрим свойства решения для нормального напряжения σ_{33} в зависимости от пространственных переменных и времени на примере сферической оболочки. На рис. 2 изображена схема сечения срединной поверхности такой оболочки плоскостью, проходящей через центр сферы. Для наглядности определения зависимости B (расстояния от текущей точки срединной поверхности до оси вращения) введены следующие обозначения: точка T — пересечение торцевой поверхности со срединной линией; точка A соответствует координате α_0 ; точка O_2 — граничная точка оси вращения; α_0 — текущая

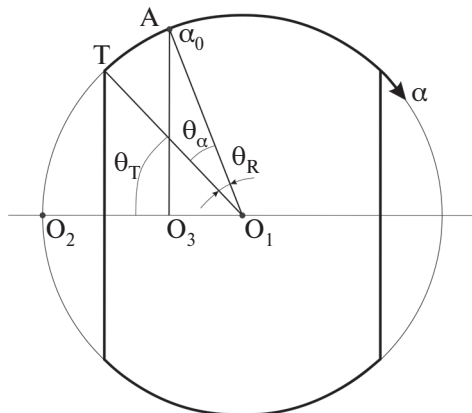


Рис. 2. Геометрия сечения сферической оболочки.

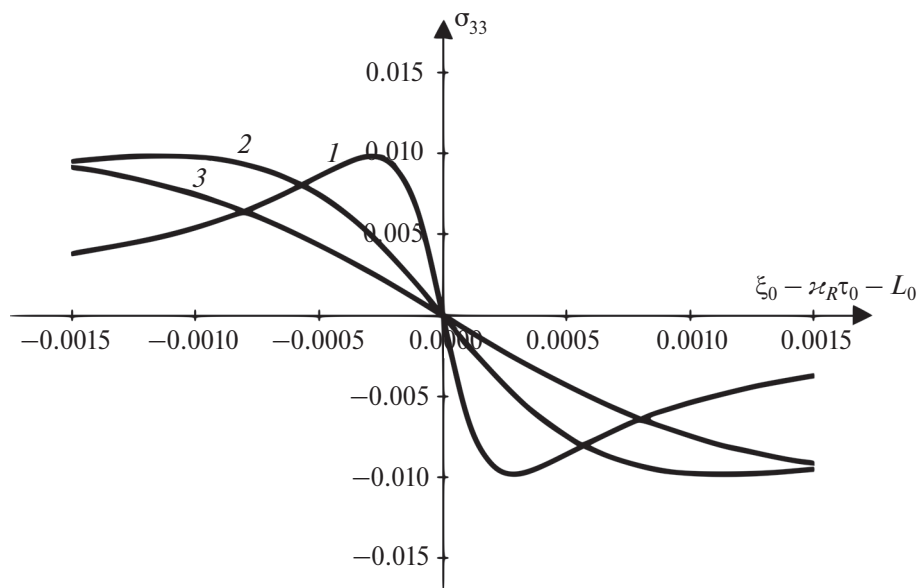


Рис. 3. График нормального напряжения σ_{33} в малой окрестности условного фронта волны Рэлея $\xi_0 = z_R \tau_0 + L_0$ в момент времени $\tau_0 = 1$ для значений нормальной координаты $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$.

координата; углы θ_T и θ_α соответствуют радиусам до точек T и A . Поскольку $\theta_\alpha = \alpha/R$, получаем выражение для $B(\alpha_0)$ через α_0 и угол θ_T

$$B = R \sin \theta_R = \sin \left(\theta_T + \frac{\alpha}{R} \right). \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) даёт возможность полностью определить закон распределения напряжения σ_{33} по координатам и времени в области действия эллиптического погранслоя.

На рис. 3. изображены графики нормального напряжения σ_{33} в малой окрестности условного фронта волны Рэлея $\xi_0 = \kappa_R \tau_0 + L_0$, возбуждаемого границей приложения нагрузки $\xi_0 = L_0$. Здесь кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям нормальной координаты $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$. Расчёты проведены для момента безразмерного времени $\tau_0 = 1$. Геометрические и механические параметры принимались следующими: $L_0 = 0.2$, $\theta_T = 0.93$, $\nu = 0.3$, $\kappa_R = 0.93$.

Расчёты подтверждают выводы предшествующего параграфа: первый скачок напряжения сосредоточен в узкой прифронтальной зоне и полностью сосредоточен в малой окрестности лицевой поверхности.

5. Заключение. В данной статье впервые представлен специфический асимптотический метод решения задачи для эллиптического погранслоя в произвольных оболочках вращения при ударных поверхностных нагрузках нормального типа. Он основан на решении на первом этапе базовой задачи для граничного значения потенциальной функции методом экспоненциальных представлений в пространстве интегрального преобразования Лапласа по временной переменной с последующим представлением компонент НДС через соответствующие компоненты эталонной задачи для цилиндрической оболочки. Проведённые численные расчёты полностью подтверждают правильность предложенного асимптотического подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *Int. J. Solids Struct.* 1969. V. 5. № 6. P. 607–627.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
2. *Нигул У.К.* Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // *ПММ.* 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 308–332.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. *Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // *ПММ.* 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 83–91.
6. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с.
7. *Kaplunov J.D., Noldé E. V., Kossovich L.Y.* Dynamics of thin walled elastic bodies. Academic Press, 1998. 226 p.
8. *Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // *Изв. РАН. МТТ.* 2022. № 2. С. 35–49.
<https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>

9. Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестник С.- Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. № 1. С. 113–120.
10. Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости. Доклады Академии наук. 2004. Т. 395. № 4. С. 482–484.
11. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of integral equations. 2nd ed. Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 1108 p.

ELLIPTIC BOUNDARY LAYER IN SHELLS OF REVOLUTION UNDER SURFACE SHOCK LOADING OF NORMAL TYPE

I. V. Kirillova^a, *

^a*Saratov State University, Saratov, Russia*

^{*}*e-mail: nano-bio@info.sgu.ru*

Abstract. This article presents a method for solving the boundary-value problem for an elliptic boundary layer occurring in thin-walled shells of revolution under impact loads of normal type applied to the face surfaces. The elliptic boundary layer is formed in the vicinity of the conditional front of Rayleigh surface waves and is described by elliptic equations with boundary conditions determined by hyperbolic equations. In the general case of shells of revolution, methods for solving elliptic boundary layer equations developed for shells of revolution with zero Gaussian curvature cannot be applied. The previously considered approach using Laplace and Fourier integral transforms fails because the governing equations become equations with variable coefficients. The method proposed in this article for solving the equations of the elliptic boundary layer is based on the use of asymptotic representations of the Laplace-transformed solutions (in time) in exponential form. Numerical calculations of normal stresses based on the obtained analytical solutions are provided for the case of a spherical shell.

Keywords: asymptotic method, elliptic boundary layer, shell of revolution, spherical shell, front of Rayleigh surface waves, Laplace transform, Fourier transform

REFERENCES

1. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Int. J. Solid and Structures. Vol. 5. № 6. 1969. P. 607–627.
2. Nigul U. Comparison of the results of the analysis of transient wave processes in shells and plates according to the theory of elasticity and approximate theories // Applied Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 33. Issue 2. Pp. 308–332.
3. Gol'Denveizer A.L. Theory of Elastic Thin Shells // Pergamon. 1961, p. 680.
4. Gol'Denveizer A.L., Lidskiy V.B., Tovstik P.E. Free vibrations of thin elastic shells. 1979. 384 p.

5. *Kaplunov Yu.D., Kirillova I.V., Kossovich L.Yu.* Asymptotic integration of the dynamic equations of the theory of elasticity for the case of thin shells. *J. Appl. Math. Mech.* Volume 57, Issue 1, pp. 95–103.
6. Kossovich L.Yu. Non-stationary problems of the theory of elastic thin shells. Saratov, 1986, 176 p.
7. *Kaplunov J.D., Nolde E. V., Kossovich L.Y.* Dynamics of thin walled elastic bodies // Academic Press. 1998. P. 226.
8. Kirillova I.V., Kossovich L.Y. Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions *Mechanics of Solids*. 2022. Т. 57. № 2. P. 232–243.
9. *Kirillova I.V., Kossovich L.Y.* refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*. 2017. Т. 50. № 1. С. 68–73.
10. *Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu.* Asymptotic model for calculating the far field of a Rayleigh wave in the case of an elastic half-plane. *Reports of the Academy of Sciences*. 2004. Vol. 395. No. 4. Pp. 482–484.
11. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of integral equations. 2nd ed. Chapman & Hall/CRC Press. 2008. P. 1108.

УДК 539.37, 539.214

ПРОИЗВОДСТВО ТЕПЛА ЗА СЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПРИСТЕНОЧНОГО ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В МАТЕРИАЛЕ ПРОБКИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

© 2024 г. Л. В. Ковтаниук^{a, b, *}, Г. Л. Панченко^{a, b, **},
Е. О. Попова^{a, ***}

^aИнститут автоматики и процессов управления ДВО РАН,
Владивосток, Россия

^bИнститут машиноведения и металлургии ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: lk@iacp.dvo.ru, **e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru, ***e-mail: polenao@bk.ru

Поступила в редакцию 13.06.2024 г.

После доработки 23.06.2024 г.

Принята к публикации 24.06.2024 г.

Получено решение связанной краевой задачи о неизотермическом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в недеформируемой круглой трубе. В условиях жесткого сцепления с поверхностью трубы материал деформируется под действием переменного перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки. Необратимое деформирование связано и с ползучестью, и с вязкопластическим течением материала и вызывает его разогрев. Дополнительно учитываются зависимости предела текучести, коэффициента вязкости и параметров ползучести материала от температуры. С использованием модели больших деформаций изучаются процессы ползучести и вязкопластического течения при возрастающем и постоянном перепаде давления, торможение течения и разгрузка среды при убывающем давлении, а также остывание материала после полного снятия механической нагрузки.

Ключевые слова: большие деформации, ползучесть, вязкопластическое течение, деформационное теплопроизводство, теплопроводность, связанное термомеханическое деформирование

DOI: 10.31857/S1026351924050054, EDN: UAZOLA

1. Введение. Повышение прочности, пластичности и других механических свойств металлов достигается многими способами, одним из которых является термомеханическая обработка. С другой стороны, многие элементы конструкций работают в условиях циклически изменяющихся нагрузок, вызывающих упругопластическое деформирование. Вследствие этого в элементах конструкций возникают тепловые деформации, которые

могут существенно изменять свойства материала и, как следствие, характер деформирования. Учет связанности полей деформаций и температуры позволяет качественно и количественно точнее описать поведение таких элементов конструкций и выявить при этом новые эффекты, однако и значительно усложняет модельные соотношения. Поскольку в областях течения необратимые деформации необходимо большие, то задачи о неизотермических течениях требуют рассмотрения в рамках модели больших упругопластических деформаций. Подобных подходов к моделированию упругопластических свойств существует достаточно много [1–5]. Здесь будем использовать модель, в которой согласно формализму неравновесной термодинамики, обратимые и необратимые деформации, как термодинамические параметры состояния в процессе деформирования, определяются формулированием для них дифференциальных уравнений их изменения (переноса) [6–8]. Обобщение модели на неизотермический случай содержится в [9], на случай учета вязких свойств материала при его пластическом течении – в [10].

Рост обратимых и необратимых деформаций в среде задают источники в уравнениях изменения деформаций при выборе соответствующих определяющих законов. Здесь будем использовать два определяющих закона, задающих накопление необратимых деформаций: закон ползучести и закон пластического течения. Согласно первому, накопление необратимых деформаций с началом деформирования обусловлено вязкими свойствами деформируемого материала. При достижении напряжениями поверхности нагружения действует второй определяющий закон. Таким образом, в процессе деформирования первоначально накапливаются необратимые деформации ползучести, а затем они продолжают рост за счет развивающегося пластического течения. На границах, отделяющих области течения от областей с деформациями ползучести, происходит смена механизмов накопления необратимых деформаций с медленного вязкого на быстрый пластический и наоборот при разгрузке. Такая последовательная смена механизмов производства необратимых деформаций, требующая согласования законов ползучести и пластического течения на границах, разделяющих области деформирования на части, для обеспечения непрерывности необратимых деформаций рассматривалась в [11–15].

Здесь, следуя аналогичному подходу, приведем решение неизотермической краевой задачи о необратимом деформировании материала, образующего пробку конечной длины в круглой недеформируемой трубе. Несжимаемый упруговязкопластический материал находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы и подвергается действию изменяющегося со временем перепада давления, заданного на торцевых поверхностях пробки. Отметим, что связанные задачи о прямолинейных течениях без учета ползучести материала ранее рассматривались в [16–19]. Производство тепла и необратимых пластических деформаций происходило за счет антиплоского деформирования и пристеночного трения. Здесь рассмотрим случай, когда тепло создается внутри только за счет необратимого деформирования (ползучести и пластичности), то есть приток тепла в среду через ее границу отсутствует.

2. Основные соотношения модели больших деформаций. Движение точек деформируемого материала зададим в пространственных переменных Эйлера.

Для термодинамических параметров состояния, которыми полагаем температуру T (или плотность распределения энтропии S), обратимые (термоупругие) $\mathbf{m}$ и необратимые деформации $\mathbf{p}$ согласно математической модели [6–8] справедливы дифференциальные уравнения их изменения:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{p}}{Dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, \\ \frac{D\mathbf{m}}{Dt} &= \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{z})), \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{w}, \\ \mathbf{x} &= -\mathbf{x}^T = \mathbf{w} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{e} + \alpha T_0 \theta \mathbf{I}, \quad \theta = T_0^{-1}(T - T_0), \\ \mathbf{z} &= -\mathbf{z}^T = A^{-1} \left(B^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + B (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m}^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{m} \right), \\ A &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad B = 2 - L_1, \\ L_1 &= \mathbf{I} \cdot \mathbf{m}, \quad L_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{m}^2, \quad L_3 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{m}^3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ – векторы перемещений и скорости; t – время; $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга; T , T_0 – текущая температура и температура свободного состояния (комнатная температура) соответственно; α – коэффициент линейного расширения; D/Dt – объективная производная по времени совершенно определенного вида, полученная при выводе дифференциальных уравнений изменения термодинамических параметров состояния обратимых и необратимых деформаций. От производной Яумана она отличается наличием нелинейной добавки $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{m})$ в тензоре вращений $\mathbf{x}$. Согласно первому уравнению (2.1) процессы деформирования, в которых необратимые деформации $\mathbf{p}$ неизменны, определяются равенством нулю источника необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$. В таком случае и компоненты тензора необратимых деформаций $\mathbf{p}$ изменяются также как при жестком перемещении тела.

Для тензора полных деформаций Альманси $\mathbf{d}$ из (2.1) получаем

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{m} + \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}. \tag{2.2}$$

В качестве термодинамического потенциала используется свободная энергия $\Phi(\mathbf{m}, T) = E(\mathbf{d}, S) - TS$, где $E(\mathbf{d}, S)$ – плотность распределения внутренней энергии. Принимая существенно упрощающую математическую модель гипотезу о том, что свободная энергия не зависит от необратимых деформаций, считаем, что консервативная часть процесса деформирования задается упругим потенциалом $W(\mathbf{m}, \theta) = \rho_0 \Phi(\mathbf{m}, T)$ (ρ_0 – плотность материала в свободном состоянии). Далее материал полагаем механически несжимаемым, но изменение его объема возможно за счет линейного расширения. Согласно уравнению неразрывности такое условие записывается в виде

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_3} = (1 + 3\alpha T_0\theta)^{-1},$$

$$I_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}, \quad I_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}^2, \quad I_3 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}^3. \quad (2.3)$$

Из закона сохранения энергии получаем формулу Мурнагана, связывающую напряжения с обратимыми деформациями, и уравнение баланса энтропии

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_1 \mathbf{I} + (1 + 3\alpha T_0 \theta)^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{m}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{m}), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} - T^{-2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}. \quad (2.5)$$

В зависимостях (2.4) и (2.5) P_1 – неизвестное гидростатическое давление, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{J}$ – векторы потока тепла и энтропии:

$$\mathbf{J} = \rho S \mathbf{v} - T^{-1} \mathbf{q}, \quad S = -T_0 \rho^{-1} \frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

Считая среду изотропной, упругий потенциал $W(J_1, J_2, \theta)$ принимаем в виде разложения этой функции в ряд Тейлора относительно свободного состояния деформируемого материала при комнатной температуре T_0 [20]

$$\begin{aligned} W(J_1, J_2, \theta) = & -2\mu J_1 - \mu J_2 + \kappa J_1^2 + (\kappa - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + v_1 J_1 \theta + \\ & + v_2 \theta^2 - v_3 J_1 \theta^2 - v_4 J_1^2 \theta - v_5 J_2 \theta - v_6 \theta^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$J_1 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}, \quad J_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}^2, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m} - 0.5 \mathbf{m}^2.$$

В (2.6) μ – модуль сдвига, κ , χ – упругие модули более высокого порядка, $v_k (k = 1, 2, \dots, 6)$ – термомеханические постоянные.

В этом случае из уравнения баланса энтропии (2.5) следует уравнение теплопроводности в форме

$$\begin{aligned} (1 + \beta_1 \theta + \beta_2 I_1) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{c} = & \lambda \Delta \theta - \frac{1}{2v_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \\ \beta_1 = \frac{(1 - 3\alpha T_0) v_2 - 3v_6}{v_2}, \quad \beta_2 = -\frac{v_3}{v_2}, \quad \beta_3 = -\frac{v_1 + v_5}{v_2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь λ – коэффициент температуропроводности.

Зависимость источника $\boldsymbol{\gamma}$ необратимых деформаций в уравнении их изменения от термодинамической силы должна задаваться определяющими законами. Далее полагаем, что необратимые деформации $\mathbf{p}$ накапливаются в материале с начального момента деформирования и за счет вязких свойств материала (ползучесть), и за счет его пластических свойств (течение).

Для конкретизации диссипативного механизма, связанного с накоплением необратимых деформаций, необходимо задать скорость роста необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ в зависимости от напряжений. В случае, пока напряженное состояние не достигло поверхности нагружения, считаем $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v$, т.е. что на данных стадиях процесса деформирования необратимые деформации производятся в форме деформаций ползучести. В области пластического течения

$\gamma = \epsilon^p$, то есть источник совпадает с тензором скоростей пластических деформаций. Следовательно, в уравнениях изменения необратимые деформации не разделяются на свои составляющие. Их различие состоит в разных механизмах их накопления. В условиях накопления деформаций ползучести выберем классический степенной закон Нортона [21]

$$\gamma = \epsilon^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma}, \quad V(\Sigma) = B \Sigma^n (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma = \Sigma = \max |\sigma_i - \sigma_j|. \quad (2.8)$$

В соотношениях (2.8) $V(\sigma)$ — термодинамический потенциал; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений; B, n — параметры ползучести материала.

Выход напряженного состояния на поверхность нагружения приводит к появлению области пластического течения, на границе которой определяющий закон ползучести должен быть заменен на определяющий закон, основанный на законе пластического течения. На такой граничной поверхности напряжения и деформации непрерывны, при таком подходе непрерывны и скорости необратимых деформаций. Тогда скорости пластических деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения [22, 23]

$$\mathbf{y} = \epsilon^p - \epsilon^{v_0} = \phi \frac{\partial f(\sigma, k)}{\partial \sigma}, \quad f(\sigma, \mathbf{y}) = 0, \quad \phi > 0. \quad (2.9)$$

Здесь ϵ^{v_0} — тензор скоростей деформаций ползучести в момент начала пластического течения. Накопленные к началу пластического течения деформации ползучести и их скорости ϵ^{v_0} являются начальными значениями для накапливающихся далее пластических деформаций.

В качестве поверхности нагружения принимаем условие пластичности Треска с учетом вязкого сопротивления пластическому течению [23]:

$$f(\sigma_i, y_k, k) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k - 2\eta \max |y_k|. \quad (2.10)$$

В (2.10) y_k — главные значения тензора $\mathbf{y}$, k — предел текучести, η — вязкость.

При температурном воздействии на материал от нее зависят и параметры материала. Для параметров ползучести B и n принимаем зависимости в форме [24]

$$B = \frac{c_1}{\sigma_0^{n-1}} \exp\left(-\frac{Q}{R_u T_0 (1 + \theta)}\right), \quad n = b_1 + \frac{b_2}{T_0 (1 + \theta)}. \quad (2.11)$$

В (2.11) c_1, σ_0, b_1 и b_2 — постоянные материала, Q — энергия активации, R_u — универсальная газовая постоянная. Для предела текучести и коэффициента вязкости пластического течения будем использовать соотношения [25]

$$k = k_0 (1 - \theta \theta_m^{-1})^2, \quad \eta = \eta_0 \exp(-v T_0 \theta), \quad \theta_m = (T_m - T_0) T_0^{-1}. \quad (2.12)$$

В (2.12) T_m — температура плавления деформируемого материала, k_0 , η_0 — предел текучести и вязкость материала при комнатной температуре, v — экспоненциальная скорость.

Чтобы получить замкнутую систему уравнений квазистационарного неизо-термического деформирования, к выписанным соотношениям необходимо добавить уравнения равновесия $\nabla \sigma = 0$.

3. Постановка задачи и деформирование до вязкопластического течения.

Рассмотрим пробку длины l , которую образует несжимаемый упруговязкопластический материал в круглой трубе радиуса R с недеформируемыми стенками. Боковая поверхность пробки находится в условиях жесткого сцепления со стенками трубы, а верхняя поперечная граничная поверхность пробки нагружается переменным давлением. Задача в цилиндрической системе координат r, ϕ, z решается в классе функций $\theta = \theta(r, t)$, $u = u_z(r, t)$, $v = v_z(r, t)$, $P_1 = P_1(r, z, t)$, где u и v — отличные от нуля компоненты векторов перемещений и скорости. Тогда на граничных поверхностях пробки $z = u(r, t)$ и $z = l + u(r, t)$ краевые условия имеют вид

$$\sigma_{zz}(0, u(0, t), t) = -p(t), \quad \sigma_{zz}(0, l + u(0, t), t) = 0, \quad (3.1)$$

где $r=0$ — координата максимального перемещения граничных точек пробки, $p(t)$ — задаваемое давление. Согласно второму условию (3.1) принимается, что сопротивление продавливанию на свободном конце пробки при $r=0$ отсутствует, хотя его можно задать и не равной нулю постоянной величиной. Условия сцепления на боковой поверхности пробки записываются в форме

$$u|_{r=R} = v|_{r=R} = 0. \quad (3.2)$$

Функция $p(t)$, задающая перепад давления, возрастает со временем с нулевого значения, и, пока напряженное состояние не достигло поверхности нагружения, необратимые деформации накапливаются в материале в результате медленного процесса ползучести. Необратимое деформирование приводит к разогреву материала, для его изменяющейся температуры принимаем условия:

$$\theta(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (3.3)$$

Для отличных от нуля компонент тензора деформаций Альманси согласно (2.2) получим

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}u'^2, \quad d_{rz} = \frac{1}{2}u', \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (3.4)$$

Из условия (2.3) и зависимостей (3.4) следует, что в рассматриваемом случае антиплоского движения тепловое расширение в материале отсутствует, таким образом зависимости (2.3), (2.4) и (2.7) справедливы при $\alpha=0$.

Согласно соотношениям (2.4) и (2.6) для отличных от нуля компонент тензора напряжений получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{\phi\phi} &= -(P_1 + 2\mu) + 2(\kappa - \nu_4\theta)(m_{rr} + m_{zz}) - 2(\mu - \nu_4\theta)m_{rz}^2 + \nu_1\theta - \nu_3\theta^2 = -p_1, \\
\sigma_{rz} &= 2(\mu - l_1\theta)m_{rz}, \quad \sigma_{rr} = -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{rr} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \\
\sigma_{zz} &= -p_1 + 2(\mu - l_1\theta)m_{zz} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2, \quad l_1 = \nu_1 + \nu_5.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Данные соотношения записаны с точностью до слагаемых первого порядка малости по компонентам обратимых деформаций m_{rr} и m_{zz} и второго — по компоненте m_{rz} [16–19].

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае принимают форму

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (3.6)$$

Интегрируя второе уравнение (3.6) с учетом зависимостей для напряжений (3.5), получаем

$$p_1 = c(t)z + p_0(r, t), \quad \sigma_{rz} = \frac{c(t)r}{2} + \frac{c_1(t)}{r}. \quad (3.7)$$

Из первой формулы (3.7) следует, что p_1 является линейной функцией координаты z . Функцию интегрирования $c_1(t)$ полагаем равной нулю, чтобы напряжение σ_{rz} имело конечное значение при $r=0$, $c_1(t)$ найдем из граничных условий (3.1). Тогда компонента σ_{rz} тензора напряжений принимает окончательный вид

$$\sigma_{rz} = -\frac{pr}{2l}, \quad p = p(t). \quad (3.8)$$

Потенциал ползучести (2.8) перепишем в следующей форме $V(\sigma_{ij}) = B((\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{rz}\sigma_{rz})^{n/2}$. Ограничимся в нем слагаемыми до порядка n по напряжению, тогда для скоростей деформаций ползучести из (2.8), (3.5) и (3.8) найдем

$$\varepsilon_{rz}^v = -Bn\left(\frac{pr}{l}\right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^v = -\varepsilon_{zz}^v = \frac{\varepsilon_{rz}^v m_{rr} - m_{zz}}{2m_{rz}}. \quad (3.9)$$

Уравнение теплопроводности (2.7) при учете соотношений (3.5), (3.8) и (3.9) примет форму

$$\left(1 + \beta_1\theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^3}\right) \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 pr^2}{8l^2(\mu - l_1\theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = q\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r}\right) - \frac{Bn}{2\nu_2} \left(\frac{pr}{l}\right)^n. \quad (3.10)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (3.10) при условии зависимости параметров ползучести материала от температуры (2.11) и начальном и граничных условиях для температуры (3.3) решено численно.

Кинематика среды в рассматриваемом случае описывается зависимостями, следующими из соотношений (2.1), (2.2):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rz} &= \frac{dd_{rz}}{dt} = \frac{\partial d_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{2} v' = \varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz} = \frac{\partial m_{rz}}{\partial t} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial t}, \\
x_{rz} = -x_{zr} &= \frac{2\varepsilon_{rz}(1 - m_{zz})}{m_{rr} + m_{zz} - 2}, \quad \gamma_{rr} = \frac{dp_{rr}}{dt} + 2p_{rz}(r_{zr} + \gamma_{rz}), \\
\gamma_{zz} &= \frac{dp_{zz}}{dt} + 2p_{rz}(r_{rz} + \gamma_{rz}), \quad \gamma_{rr} = -\gamma_{zz} = \frac{\gamma_{rz} m_{rr} - m_{zz}}{2 m_{rz}},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

в которых скорости необратимых деформаций равны скоростям деформаций ползучести: $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$.

Из соотношений (3.5), (3.8), (3.9) и (3.11) найдем компоненты тензоров обратимых и необратимых деформаций m_{rz} и p_{rz} :

$$m_{rz} = -\frac{pr}{4l(\mu - l_1\theta)}, \quad p_{rz} = -\int_0^t Bn\left(\frac{pr}{l}\right)^{n-1} dt. \tag{3.12}$$

Для градиента перемещений точек материала пробки из (3.11) получаем

$$u' = 2(m_{rz} + p_{rz}). \tag{3.13}$$

Перемещения точек материала пробки находятся интегрированием уравнения (3.13) с учетом граничного условия (3.2).

Для компонент обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} из кинематических зависимостей (3.11) следует система уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{zz}}{\partial t} &= \gamma_{rz} \left(m_{rz} - \frac{p_{zz}}{m_{rz}} \right) + \frac{4(\varepsilon_{rz}^e + \gamma_{rz}) p_{rz}}{2 + m_{rz}^2} \left(1 + p_{zz} - \frac{m_{rz}^2}{2} - 2m_{rz} p_{rz} \right), \\
p_{rr} &= -p_{zz} - 2p_{rz}^2, \quad m_{zz} = -p_{zz} + \frac{m_{rz}^2}{2} + 2m_{rz} p_{rz}, \quad m_{rr} = -m_{zz} - m_{rz}^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Интегрируя первое уравнение равновесия (3.6) с учетом граничных условий (3.1) и соотношений (3.5), получим зависимости, связывающие компоненты тензора напряжений и найденные ранее распределения температуры, перемещений и компоненты обратимых деформаций

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \frac{p}{l}(z - l - u(0, t)) - \int_0^r \frac{2(\mu - l_1\theta)m_{rr} + (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2}{r} dr + \\
&+ 2(\mu - l_1\theta)(m_{zz} - m_{rr}) - 2(\mu - l_1\theta(0, t))(m_{zz}(0, t) - m_{rr}(0, t)), \\
\sigma_{rr} &= \sigma_{zz} + 2(\mu - l_1\theta)(m_{rr} - m_{zz}), \\
\sigma_{\phi\phi} &= -p_1 = \sigma_{zz} - 2(\mu - l_1\theta)m_{zz} - (3\mu + l_1\theta)m_{rz}^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Найденное решение неизотермической краевой задачи при возрастающем перепаде давления остается справедливым до момента времени t_1 , в который

на боковой границе пробки $r = R$ впервые выполнится условие пластического течения (2.10) в следующем виде

$$|\sigma_{rz}|_{r=R} = k(t_1),$$

в котором предел текучести зависит от температуры (первая формула (2.12)). Из уравнения $p(t_1)R = 2lk(t_1)$ находится момент начала течения t_1 .

4. Вязкопластическое течение материала при возрастающем и постоянном перепаде давления. Начиная с момента времени t_1 в материале развивается область вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$. Движущаяся граница $r = m(t)$ отделяет расширяющуюся область течения от сужающейся области $0 \leq r \leq m(t)$, в которой материал продолжает накапливать необратимые деформации ползучести. Зависимости (3.5) для компонент тензора напряжений выполняются и в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$, и в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$, следовательно в обеих областях остается справедливым соотношение (3.8) для компоненты тензора напряжений s_{rz} .

В вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$ скорости деформаций ползучести имеют вид (3.9), а уравнение теплопроводности – (3.10).

Из ассоциированного закона пластического течения (2.9) следует, что условие пластичности (2.10) в рассматриваемом случае ($\sigma_{rz} < 0$, $\varepsilon_{rz}^p < 0$) записывается в форме

$$\sigma_{rz} = -k + \eta(\varepsilon_{rz}^p - \varepsilon_{rz}^{v_0}). \quad (4.1)$$

Используя соотношение (3.8), выразим из (4.1) компоненту тензора скоростей пластических деформаций ε_{rz}^p

$$\varepsilon_{rz}^p = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{pr}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (4.2)$$

Компонента тензора скоростей деформаций ползучести $\varepsilon_{rz}^{v_0}$ в точке в момент достижения ее упругопластической границей в текущий момент времени t вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{rz}^{v_0} = -Bn \left(\frac{pm}{l} \right)^{n-1}. \quad (4.3)$$

Из предположения о непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m(t)$, разделяющей области с разными механизмами накопления необратимых деформаций следует уравнение

$$\frac{pm}{2l} = k_0 \left(1 - \frac{\theta(m, t)}{\theta_m} \right)^2, \quad (4.4)$$

из которого определяется положение границы $r = m(t)$ в каждый момент времени.

Уравнение теплопроводности (2.7) в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ с учетом зависимостей (3.5) и (4.2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_1 \theta + \frac{\beta_3 l_1 p^2 r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\beta_3 p r^2}{8l^2 (\mu - l_1 \theta)^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \\ & = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{p r}{2l \nu_2} \left(\frac{1}{\eta} \left(k - \frac{p r}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнения теплопроводности (3.10) и (4.5), а также уравнения (4.3) и (4.4) составляют систему уравнений относительно неизвестных функций: θ в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$, $m(t)$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}$. Для решения этой системы необходимы граничные условия для температуры (3.3), начальные условия $m(t_2) = R$ и $\varepsilon_{rz}^{v_0}(R) = -B(t_2)n(t_2)(p(t_2)R/l)^{n(t_2)-1}$, условия непрерывности функции θ и ее производной $\partial q / \partial r$ на границе $r = m(t)$ и условия непрерывности температуры в момент начала вязкопластического течения t_1 . Данная система уравнений решена с использованием разработанного на основе конечно-разностного метода алгоритма.

Для описания кинематики среды используются соотношения (3.11), в которых $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^v$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^v$ в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m(t)$ и $\gamma_{rr} = \varepsilon_{rr}^p$, $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ и $\gamma_{zz} = \varepsilon_{zz}^p$ в области вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$.

Для компоненты тензора обратимых деформаций m_{rz} справедлива первая формула (3.12) в областях $0 \leq r \leq m(t)$ и $m(t) \leq r \leq R$. Компонента тензора необратимых деформаций p_{rz} в области $0 \leq r \leq m(t)$ вычисляется по второй формуле (3.12), а в области течения $m(t) \leq r \leq R$ является решением дифференциального уравнения, следующего из (3.11) и (4.2),

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \left(k - \frac{p r}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}. \quad (4.6)$$

При решении этого уравнения используется условие непрерывности компоненты необратимых деформаций p_{rz} в момент времени t_1 . Перемещения точек материала находятся интегрированием уравнения (3.13) с использованием условия непрерывности перемещений на границе $r = m(t)$ и граничного условия (3.2). Компоненты обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} вычисляются из системы уравнений (3.14) при $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ в области $0 \leq r \leq m(t)$ и $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ в области $m(t) \leq r \leq R$. Напряжения в области $0 \leq r \leq m(t)$ находятся из зависимостей (3.15). Эти же соотношения справедливы и для напряжений в области течения $m(t) \leq r \leq R$, что следует из условия непрерывности напряжений на границе $r = m(t)$.

Пусть в некоторый момент времени $t_2 > t_1$ перепад давления на граничных поверхностях пробки становится постоянным, равным $p(t_2)$. Такое изменение режима нагружения приводит к тому, что положение границы $r = m(t)$ перестает изменяться. Области вязкоупругого деформирования $0 \leq r \leq m(t)$ и вязкопластического течения $m(t) \leq r \leq R$ теперь не изменяют своих размеров, но необратимые деформации по-прежнему продолжают в них накапливаться. Все соотношения данного раздела продолжают выполняться и в данном случае. Только в уравнениях теплопроводности (3.10) и (4.5) нужно учитывать, что $\partial p / \partial t = 0$.

5. Течение при убывающем перепаде давления. Разгрузка среды и остывание. Далее в некоторый момент времени $t_3 > t_2$ начнем уменьшать давление $p(t)$. С этого момента времени от неподвижной поверхности $r = m(t_3)$ к границе пробки $r = R$ движется новая граница $r = m_1(t)$, которая разделяет уменьшающуюся область вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ и область $m(t_3) \leq r \leq m_1(t)$ с накопленными необратимыми пластическими деформациями. В слоях $m(t_3) \leq r \leq m_1(t)$ и $0 \leq r \leq m(t_3)$ необратимые деформации теперь накапливаются в результате процесса ползучести, поэтому их можно рассматривать как одну область $0 \leq r \leq m_1(t)$.

Компоненты тензора напряжений во всех областях деформирования удовлетворяют соотношениям (3.5). Из уравнений равновесия (3.6) с учетом условия непрерывности напряжений, получим, что для компоненты σ_{rz} остается справедливой зависимость (3.8) во всех областях. В области $0 \leq r \leq m_1(t)$ скорости деформаций ползучести имеют вид (3.9). Компонента скорости необратимых деформаций ε_{rz}^p в области вязкопластического течения $m_1(t) \leq r \leq R$ вычисляется по формуле (4.2). Уравнение теплопроводности имеет вид (3.10) в вязкоупругой области $0 \leq r \leq m_1(t)$ и (4.5) в области течения $m_1(t) \leq r \leq R$.

Из условия непрерывности скоростей необратимых деформаций на границе $r = m_1(t)$ следует уравнение для определения ее положения

$$\frac{1}{\eta} \left(k_0 \left(1 - \frac{\theta(m_1, t)}{\theta_m} \right)^2 - \frac{pm_1}{2l} \right) + \varepsilon_{rz}^{v_0}(m_1) = -Bn \left(\frac{pm_1}{l} \right)^{n-1}. \quad (5.1)$$

В уравнении (5.1) $\varepsilon_{rz}^{v_0}(r)$ является известной функцией, вычисленной на предыдущих этапах задачи.

Система уравнений (3.10), (4.5) и (5.1) относительно неизвестных функций $m_1(t)$ и θ в областях $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $m_1(t) \leq r \leq R$ также решена численно с помощью разработанного алгоритма. При ее решении использовались граничные условия (3.3), начальное условие $m_1(t_3) = m(t_3)$, условия непрерывности функции θ и ее производной $\partial q / \partial r$ на границе $r = m_1(t)$ и непрерывность температуры θ в момент времени t_3 .

В обеих областях деформирования компонента m_{rz} удовлетворяет первой зависимости (3.12). В вязкоупругой области $0 \leq r \leq m_1(t)$ компонента p_{rz} вычисляется по второй формуле (3.12), а в области течения $m_1(t) \leq r \leq R$ находится интегрированием уравнения (4.6). Интегрируя уравнение (3.13) в обеих областях с учетом граничного условия жесткого сцепления и условия непрерывности перемещений на границе $r = m_1(t)$, найдем перемещения точек деформируемого материала.

Компоненты тензора обратимых деформаций m_{rr} , m_{zz} и необратимых деформаций p_{rr} , p_{zz} в обеих областях определяются из системы уравнений (3.14) при $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$ в области $0 \leq r \leq m_1(t)$ и $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^p$ в области $m_1(t) \leq r \leq R$. Компоненты тензора напряжений вычисляются из соотношений (3.15) при условии их непрерывности на границе $r = m_1(t)$.

В расчетный момент времени $t_4 > t_3$ поверхность $r = m_1(t)$ достигает границы пробки $r = R$. С этого момента времени вязкопластическое течение в материале прекращается, а накопление необратимых деформаций теперь происходит

только за счет ползучести. Во всем слое уравнение теплопроводности принимает форму (3.10), для компонент m_{rz} и p_{rz} справедливы уравнения (3.12), перемещения вычисляются из дифференциального уравнения (3.13). Остальные обратимые и необратимые деформации вычисляются из системы уравнений (3.14), в которой $\gamma_{rz} = \varepsilon_{rz}^v$. Для напряжений остаются справедливыми зависимости (3.15).

В момент времени t_5 , вычисляемый из уравнения $p(t_5) = 0$, перепад давления становится равным нулю. Также становятся равными нулю компонента обратимых деформаций m_{rz} и компонента напряжений σ_{rz} , а остальные компоненты тензора напряжений перестают зависеть от координаты z . С момента времени t_5 уравнение теплопроводности принимает форму

$$(1 + \beta_1 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = q \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (5.2)$$

Чтобы задать остывание материала пробки, вместо граничных условий (3.3) принимаем условия

$$\left. \frac{\partial \theta(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (\delta \theta' + h \theta)|_{r=R} = 0, \quad (5.3)$$

в которых δ и h — коэффициент теплопроводности и коэффициент теплоотдачи материала соответственно.

Уравнение (5.2) с граничными условиями (5.3) и начальным условием непрерывности температуры в момент времени t_5 решается численно. С течением времени материал полностью остывает.

Расчеты проводились в безразмерных переменных r/R и $\tau = \alpha_1 t / \mu$ со следующей функцией $p(t)$

$$p(t) = \begin{cases} \alpha_1 t, & 0 \leq t < t_2 \\ \alpha_1 t_2, & t_2 \leq t < t_3 \\ \alpha_1 t_2 - \alpha_2 (t - t_3), & t_3 \leq t < t_5, \quad t_5 = \alpha_1 \alpha_2^{-1} t_2 + t_3 \end{cases}$$

при значениях безразмерных постоянных: $\beta_1 = -2.772$, $\beta_3 = -10$, $k_0 \mu^{-1} = 2.298 \times 10^{-3}$, $q_m = 2.074$, $l_1 \mu^{-1} = 0.452$, $lR^{-1} = 5$, $g \mu \alpha_1^{-1} R^{-2} = 2.638 \times 10^4$, $v_2 \mu^{-1} = 80$, $b_1 = 2.518$, $b_2 T_0^{-1} = 1.48$, $c_1 \mu \alpha_1^{-1} = 4.887 \times 10^4$, $\sigma_0 \mu^{-1} = 7.199 \times 10^{-6}$, $QR_u^{-1} T_0^{-1} = 52.37$, $v T_0 = 1.212$, $\alpha_2 \alpha_1^{-1} = 2$, $hR\delta^{-1}$, $hR\delta^{-1} = 0.01$.

На рис. 1 изображены графики изменения границ области вязкопластического течения в зависимости от безразмерного времени τ : $\tilde{m} = m/R$ в интервале от $\tau_1 = 0.023$ до $\tau_3 = 0.027$ и $\tilde{m} = m_1/R$ в интервале от τ_3 до $\tau_4 = 0.028$. Из графика видно, что в интервале от $\tau_2 = 0.025$ до τ_3 , соответствующем постоянному перепаду давления, изменения границы области течения не происходит. С момента времени τ_3 от границы $m(\tau_3)/R$ в обратном направлении движется граница $m_1(t)/R$, которая в момент времени τ_4 достигает границы $r = R$ и течение в материале прекращается.

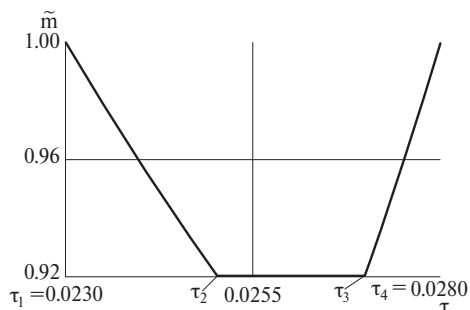


Рис. 1. График границы области вязкопластического течения в зависимости от времени.

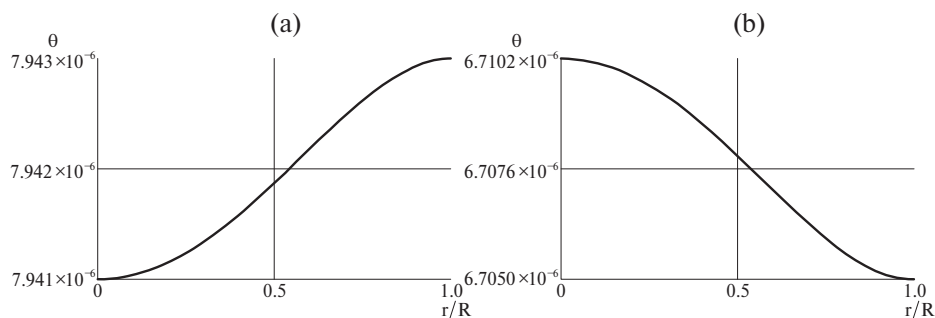


Рис. 2. Распределение температуры в материале пробки в моменты времени τ_2 и τ_4 .

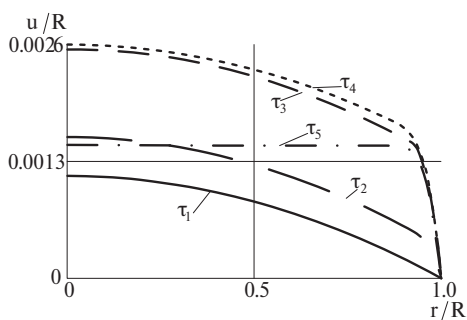


Рис. 3. Распределение перемещений в разные моменты времени.

На рис. 2 показаны графики зависимости безразмерной температуры θ от радиуса в моменты времени τ_2 (рис. 2, а) и τ_4 (рис. 2, б). Из сравнения графиков следует, что при уменьшении перепада давления температура в материале снижается.

Рис. 3 иллюстрирует графики перемещений u/R в зависимости от радиуса r/R в моменты времени τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4 и $\tau_5 = 0.0395$. Все моменты времени, кроме последнего, демонстрируют увеличение перемещений, тогда как в последний момент времени τ_5 , соответствующий нулевому перепаду давления, перемещения снижаются за счет исчезновения обратимых деформаций.

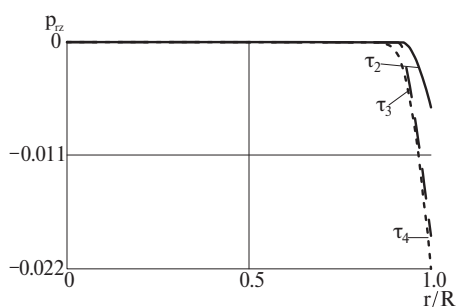


Рис. 4. Распределение компоненты необратимых деформаций p_{rz} в разные моменты времени.

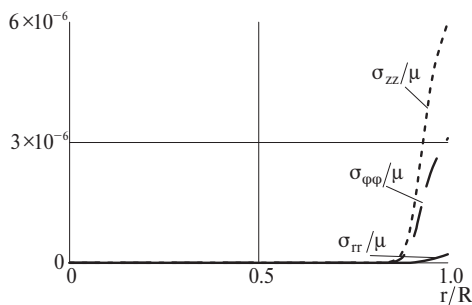


Рис. 5. Остаточные напряжения в материале.

На рис. 4 представлены распределения компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} по материалу пробки в моменты времени τ_2 , τ_3 и τ_4 . На рис. 5 приведены распределения остаточных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}/\mu$, $\tilde{\sigma}_{\phi\phi} = \sigma_{\phi\phi}/\mu$ и $\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz}/\mu$ в материале пробки.

6. Заключение. В данной статье получено решение связанной краевой задачи теории больших упругопластических деформаций о неизоотермическом деформировании пробки конечной длины в круглой недеформируемой трубе под действием перепада давления, сначала возрастающего с течением времени, затем постоянного и далее убывающего до нуля. Необратимые деформации в материале накапливаются в результате процессов ползучести и вязкопластического течения. Разогрев материала происходит только за счет процессов необратимого деформирования, так как материал пробки имеет жесткое сцепление со стенками трубы, то есть отсутствует трение материала о границу, и нет дополнительного притока тепла извне. При таких условиях в квазистатическом приближении нагрев материала ожидаемо оказывается незначительным, однако даже такое изменение температуры сказывается на всех характеристиках напряженно-деформированного состояния рассматриваемого материала. Также интересным оказывается эффект снижения температуры в процессе торможения вязкопластического течения при уменьшении нагружающего давления, хотя необратимые пластические деформации и деформации ползучести при этом продолжают накапливаться.

Разработка математической модели выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FWW-2021-0005, FWW-2022-0002), конечно-разностная схема и численные расчеты получены при поддержке РНФ (проект № 22-11-00163).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1115/1.3564580>
2. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наук. думка, 1987. 232 с.

3. *Xia Z., Ellyin F.* A finite elastoplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardening rule // *ASME. J. Appl. Mech.* 1995. V. 62. № 3. P. 733–739.
<https://doi.org/10.1115/1.2897008>
4. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // *Вестн. ДВО РАН.* 1996. № 4. С. 8–13.
5. *Shutov A.V., Ihlemann J.* Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // *Int. J. Plast.* 2014. V. 63. P. 183–197.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.07.004>
6. *Быковцев Г.А., Шитиков А.В.* Конечные деформации упругопластических сред // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
7. *Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В.* Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // *ДАН.* 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
8. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое послеледействие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
9. *Ковтанюк Л.В.* Моделирование больших упругопластических деформаций в неизо-термическом случае // *Дальневост. матем. журн.* 2004. Т. 5. № 1. С. 110–120.
10. *Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В.* О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // *Вестник ДВО РАН.* 2006. № 4. С. 87–93.
11. *Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации в усло-виях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластиче-ских потенциалов // *ДАН.* 2016. Т. 470. № 3. С. 275–278.
<https://doi.org/10.7868/S0869565216270086>
12. *Бегун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О.* Смена механизмов накопления необрати-мых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирова-ния // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 1. С. 103–112.
13. *Буренин А.А., Панченко Г.Л., Ковтанюк Л.В., Галимзянова К.Н.* О согласовании ме-ханизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжа-тии // *ДАН.* 2018. Т. 482. № 4. С. 403–406.
<https://doi.org/10.31857/S086956520003046-3>
14. *Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л.* Всестороннее гидростатическое сжатие ци-линдрического слоя в условиях ползучести и пластического течения // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния.* 2019. № 3 (41). С. 76–84.
<https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.41.3.005>
15. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // *Arch. Appl. Mech.* 2020. V. 90. P. 829–845.
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
16. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л.* Неизотермическое движение упруго-вязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // *ДАН.* 2015. Т. 464. № 3. С. 284–287.
<https://doi.org/10.7868/S0869565215270080>

17. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. Развитие и торможение вязкопластического течения в слое в условиях его нагрева за счет трения о шероховатую плоскость // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 4. С. 101–111.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20150410>
18. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. Движение упруговязкопластической среды в круглой трубе при ее нагреве за счет пристеночного трения // ПММ. 2016. Т. 80, № 2. С. 265–275.
19. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 6–18.
20. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
21. Norton F.H. The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
22. Ишинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
23. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
24. Iost A. The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence // J. Mater. Sci. 1998. V. 33. P. 3201–3206.
<https://doi.org/10.1023/A:1004368511595>
25. Pla F., Mancho A.M., Herrero H. Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio // Phys. D. 2009. V. 238. № 5. P. 572–580.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.12.015>

HEAT PRODUCTION DUE TO CREEP STRAINS AND WALL VISCOPLASTIC FLOW IN THE PLUG MATERIAL IN A ROUND PIPE UNDER THE ACTION OF VARIABLE PRESSURE DIFFERENCE

L. V. Kovtanyuk ^{a,b,*}, G. L. Panchenko ^{a,b,**}, E. O. Popova ^{a,***}

^a Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

^b Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

*e-mail: lk@iacp.dvo.ru,

**e-mail: panchenko@iacp.dvo.ru,

***e-mail: polenao@bk.ru

Abstract. A solution to the coupled boundary-value problem of non-isothermal deformation of a material forming a finite-length plug in an undeformable circular tube is presented. Under the conditions of rigid adhesion to the tube surface, the material undergoes deformation due to a varying pressure differential applied at the end faces of the plug. Irreversible deformation is associated with both creep and visco-plastic flow of the material, leading to its heating. Additionally, dependencies of the yield strength, viscosity coefficient, and creep parameters on temperature are considered. Using a large-deformation model, the study investigates creep and visco-plastic flow under increasing and constant pressure differentials, flow deceleration and unloading of the medium under decreasing pressure, and the cooling of the material after complete removal of the mechanical load.

Keywords: large deformations, creep, viscoplastic flow, deformation-induced heat generation, thermal conductivity, coupled thermal deformation.

REFERENCES

1. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // *ASME. J. Appl. Mech.* 1969. V. 36. I. 1. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1115/1.3564580>
2. *Levitas V.I.* Large elastoplastic deformations of materials at high pressure. Kyiv: Nauk. Dumka, 1987. 232 p. [in Russian]
3. *Xia Z., Ellyin F.* A finite elastoplastic constitutive formulation with new co-rotational stress-rate and strain-hardening rule // *ASME. J. Appl. Mech.* 1995. V. 62. I. 3. P. 733–739.
<https://doi.org/10.1115/1.2897008>
4. *Myasnikov V.P.* Equations of motion of elastoplastic materials under large deformations // *Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.* 1996. No. 4. P. 8–13. [in Russian]
5. *Shutov A.V., Ihlemann J.* Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change // *Int. J. Plast.* 2014. V. 63. P. 183–197.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.07.004>
6. *Bykovtsev G.I., Shitikov A.V.* Finite deformations in an elastoplastic medium, *Sov. Phys. Dokl.* **35** (3), 297–299. (1990).
7. *Burenin A.A., Bykovtsev G.I., Kovtanyuk L.V.* A simple model of finite strain in an elastoplastic medium, *Dokl. Phys.* **41** (3), 127–129 (1996).
8. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect (Dal'nauka, Vladivostok, 2013) [in Russian]
9. *Kovtanyuk L.V.* Modeling of large elastoplastic deformations in an nonisothermal case, *Dal'nevost. Mat. Zh.* **5** (1), 110–120 (2004) [in Russian]
10. *Kovtanyuk L.V., Shitikov A.V.* On the theory of large elastoplastic deformations taking into account temperature and rheological effects // *Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.* 2006. No. 4. P. 87–93. [in Russian]
11. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials // *Doklady Physics.* 2016. V. 61. I. 9. P. 463–466.
<https://doi.org/10.1134/S102833581609007X>
12. *Begun A.S., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* Change of accumulation mechanisms of irreversible deformations of materials in an example of viscometric deformation // *Mechanics of Solids.* 2018. V. 53. I. 1. P. 85–92.
<https://doi.org/10.3103/S0025654418010107>
13. *Burenin A.A., Galimzyanova K.N., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Matching growth mechanisms of irreversible deformation of a hollow sphere under uniform compression // *Doklady Physics.* 2018. V. 63. I. 10. P. 407–410.
<https://doi.org/10.1134/S1028335818100026>
14. *Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Comprehensive hydrostatic compression of cylindrical layer in conditions of creep and plastic flow // *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.* 2019. № 3 (41). P. 76–84. [in Russian]
<https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.41.3.005>

15. *Begun A.S., Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Lemza A.O.* On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. V 90. P. 829–845.
<https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>
16. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* “Nonisothermal motion of an elastoviscoplastic medium through a pipe under a changing pressure drop,” Dokl. Phys. 60 (9), 419–422 (2015).
<https://doi.org/10.1134/S1028335815090098>
17. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* “Development and deceleration of viscoplastic flow in a layer heated by friction on a rough plane,” J. Appl. Mech. Tech. Phys. 56, 626–635 (2015).
<https://doi.org/10.1134/S0021894415040100>
18. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* “The motion of an elastoplastic medium in a circular tube heated due to boundary friction,” J. Appl. Math. Mech. 80 (2), 190–197 (2016).
doi:10.1016/j.jappmathmech.2016.06.01
19. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* “Deformation and Heating of an Elastoviscoplastic Cylindrical Layer Moving Owing to a Varying Pressure Drop,” Mech. Solids 53, 1–11 (2018).
<https://doi.org/10.3103/S0025654418010016>
20. *Lurie A.I.* Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. 512 p. [in Russian]
21. *Norton F.H.* The creep steel of high temperature. Y.: Mc Graw Hill, 1929. 110 p.
22. *Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D.*, Mathematical theory of plasticity. M.: Fizmatlit, 2001. 704 p. [in Russian]
23. *Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.* Plasticity theory. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. [in Russian]
24. *Iost A.* The correlation between the power-law coefficients in creep: the temperature dependence // J. Mater. Sci. 1998. V. 33. P. 3201–3206.
<https://doi.org/10.1023/A:1004368511595>
25. *Pla F.* Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio // Phys. D. 2009. V. 238. I. 5. P. 572–580.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.12.015>

УДК 531.3

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ

© 2024 г. В. В. Саурин^{а,*}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: saurin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 18.04.2024 г.

После доработки 28.05.2024 г.

Принята к публикации 03.06.2024 г.

В статье рассматриваются задачи динамического изгиба балок полубесконечной длины. Для решения таких задач в статье применяется метод, основанный на удовлетворении законов сохранения, а именно, закона сохранения энергии, закона изменения количества движения и закона изменения момента количества движения. Полученные результаты сравниваются с аналитическим решением задачи о движении полубесконечного стержня, нагруженного на конце поперечной силой. Особенностью данного решения является то, что изменение напряжённо-деформированного состояния стержня характеризуется волновым фронтом. Считается, что все изменения в состоянии балки происходят с бесконечной скоростью. Показано, что в отличие от переноса продольных возмущений по длине балки, которые происходят с постоянной скоростью, изгибные возмущения распространяются с переменной скоростью, причём, с ростом времени эта скорость уменьшается и стремится к нулю в бесконечно удалённом положении волнового фронта балки. Обнаружено, что скорости распространения волнового фронта при передачи сосредоточенной силы и сосредоточенного момента отличается друг от друга. При этом скорость передачи поперечной силы почти в два раза превосходит скорость волнового фронта от изгибающего момента.

Ключевые слова: упругий стержень, начально-краевая задача, законы сохранения, волновой фронт

DOI: 10.31857/S1026351924050061, EDN: UAUTGX

1. Введение. Исследование динамического поведения конструкций и их элементов притягивает внимание ученых всего мира. Тем не менее остаётся ещё много вопросов, которые следуют рассмотреть более внимательно и скрупулезно. Следует отметить, что при значительном интересе к таким задачам большинство работ относятся к изучению собственных колебаний таких конструкции [1–3], в то время как решению волновых уравнений уделяется значительно меньшее внимание.

Хорошо известны задачи о продольных волновых движениях стержней, как однородных, так и не однородных, находящихся в условиях разных

стеснений [4–10]. В этих работах показано, что в стержне возникает волновой фронт, который движется по длине стержня со скоростью звука. При этом точка приложения нагрузки (свободный конец) движется также с постоянной скоростью, но в противоположную сторону. И это решение не вызывает никаких возражений у исследователей.

Значительно меньшее количество работ посвящено исследованию динамики стержней, подверженных импульсному воздействию. Можно отметить работы [11, 12], выполненные в Санкт-Петербурге под руководством академика Н.Ф. Морозова.

В литературе также известно аналитическое решение задачи о движении стержня бесконечной длины, нагруженного в некоторой точке поперечной силой [13]. Особенностью данного решения является то, что в решении отсутствует волновой фронт. Считается, что все изменения напряжённо деформированного состояния балки распространяются с бесконечной скоростью. В литературе нет объяснения этого факта. Можно предположить, что такое отличие может быть связано, во-первых, некорректностью описания данного явления. Во-вторых, это может соответствовать физической сущности рассматриваемого явления и все результаты корректны. В статье довольно подробно исследуются эти решения.

В статье применяется метод, основанный на удовлетворении законов сохранения, а именно, закона сохранения энергии, закона изменения количества движения и закона изменения момента количества движения.

Рассмотрены три задачи о движении однородного полубесконечной длины стержня под действием постоянными продольной силы, поперечной силы, а также сосредоточенного момента. Полученные результаты сравниваются друг с другом и с ранее полученными решениями.

2. Динамическое поведение балки под действием сосредоточенной продольной силы. Рассмотрим длинный однородный стержень постоянного сечения, показанный на рис. 1, у которого один конец расположен в точке $x = 0$, а другой уходит в бесконечность. Предположим, что продольные напряжения в стержне являются преобладающими настолько, что остальными компонентами тензора напряжений можно пренебречь. Материал, из которого сделан стержень, характеризуется модулем упругости E . Так, что

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t), \quad (2.1)$$

где $\sigma(x, t)$ – функция внутренних напряжений, а

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.2)$$

– функция деформаций, возникающих в процессе движения стержня.

Введем в рассмотрение функцию плотности количества движения p

$$p(x, t) = \rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Тогда динамическое уравнение равновесия для стержня, связывающее инерционную силу с изменением напряжения по длине стержня, имеет вид

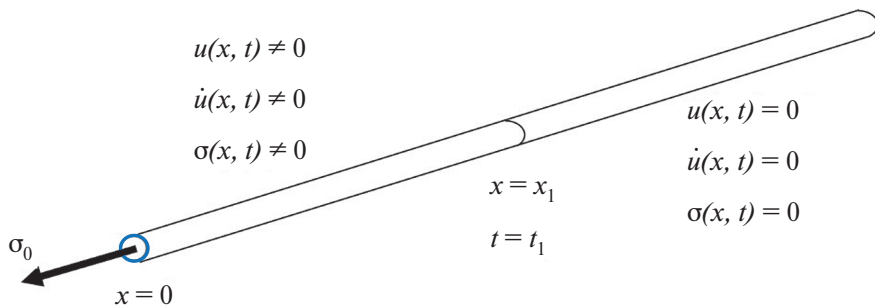


Рис. 1. Полубесконечный однородный стержень.

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.4)$$

Используя соотношения (0.1)–(0.4), можно получить волновое уравнение

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5)$$

определяющее скорость распространения продольных упругих волн в стержне

$$v_s = \sqrt{E/\rho}. \quad (2.6)$$

Здесь E – модуль Юнга, ρ – объемная плотность, u – функция перемещений точек стержня.

Предположим, что стержень в начальный момент времени находится в покое, т. е. перемещения и скорости всех точек стержня равны нулю

$$u(x, t) = \dot{u}(x, t) = 0, \quad t = 0. \quad (2.7)$$

В этот же момент времени к левому концу стержня ($x=0$) прикладывается сила σ_0 . Считается, что в процессе движения стержня эта сила не меняется. Изучим изменение состояния стержня в процессе его движения. После того, как сила была приложена к стержню, он начинает двигаться, растягиваясь вслед за силой. При этом возмущение точек стержня, вызванные внешней силой распространяется в противоположную сторону. Следовательно область возмущения увеличивается в процессе движения.

При этом точки стержня движутся таким образом, что можно выделить некоторую точку $x=x_1$ и соответствующий момент времени $t=t_1$. Слева от этой точки состояние стержня считается возмущённым

$$u(x, t) \neq 0, \quad \dot{u}(x, t) \neq 0, \quad \sigma(x, t) \neq 0, \quad x < x_1, \quad t < t_1, \quad (2.8)$$

а справа остается невозмущенным

$$u(x, t) = 0, \quad \dot{u}(x, t) = 0, \quad \sigma(x, t) = 0, \quad x > x_1, \quad t > t_1. \quad (2.9)$$

Со временем положение точки x_1 изменяется со скоростью v_f (скорость волнового фронта).

Для того чтобы описать динамическое поведение стержня нужно удовлетворить все законы сохранения, а именно закон сохранения энергии и закон изменения количества движения.

Предположим, чтобы удовлетворить всем законам сохранения можно выбрать функцию перемещений в виде линейной функции от пространственной координаты и времени

$$u(x, t) = a + bx + ct, \quad (2.10)$$

где a , b и c — неизвестные константы. Очевидно, что функция (2.10) тождественно удовлетворяет уравнению (2.5). Предположим также, что скорость волнового фронта также постоянна $v_f = \text{const}$.

Для того чтобы вычислить изменения кинетической ΔT и потенциальной ΔW энергий, а также работу внешних сил ΔA , выделим малый элемент стержня с координатой $x = x_1$ и длиной Δx . Используя введенное постоянство скорости волнового фронта, можно видеть, что справедливо следующее равенство

$$\Delta x = v_f \Delta t. \quad (2.11)$$

Здесь Δt — временной интервал, в течение которого произошло изменение в координате Δx . Тогда изменение кинетической энергии ΔT на этом интервале имеет вид

$$\Delta T = \rho \frac{v_d^2}{2} \Delta x, \quad (2.12)$$

где v_d — скорость деформирования стержня

$$v_d = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Для изменения потенциальной энергии получим следующее выражение

$$\Delta W = \frac{\sigma_0^2}{2E} \Delta x. \quad (2.14)$$

При этом прирост совершенной работы внешней силой σ_0 есть

$$\Delta A = \frac{\sigma_0^2}{E} \Delta x. \quad (2.15)$$

Тогда из закона сохранения энергии $\Delta T + \Delta W - \Delta A = 0$ находится скорость деформирования стержня

$$v_d = \frac{\sigma_0}{\sqrt{E\rho}}. \quad (2.16)$$

Закон изменения количества движения позволяет найти скорость волнового фронта v_f в явном виде. Для изменения количества движения p на заданном интервале Δx имеем следующее выражение

$$\Delta p = \rho v_d \Delta x. \quad (2.17)$$

Для приращения импульса силы Δf с учетом (2.11) получим

$$\Delta f = \sigma_0 \Delta t = \sigma_0 \frac{\Delta x}{v_f}. \quad (2.18)$$

Равенство правых частей равенств и позволяет выразить скорость волнового фронта v_f через скорость деформирования v_d

$$v_f = \frac{\sigma_0}{\rho v_d}. \quad (2.19)$$

Или с учетом

$$v_f = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.20)$$

Сравнение соотношений и позволяет сделать вывод, что скорость волнового фронта v_f равна скорости распространения продольных упругих волн в стержне v_s .

Учитывая, что движение точек стержня происходят с постоянной скоростью, то перемещения стержня можно записать в виде

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sigma_0}{E}(x - v_f t), \quad x < v_f t, \\ u &= 0, \quad x \geq v_f t. \end{aligned} \quad (2.21)$$

3. Динамический изгиб балки под действием сосредоточенного поперечной силы. Рассмотрим, как и в предыдущем случае, прямолинейный стержень полубесконечной длины, показанный на рис. 2. Считается, что стержень находится в покое, то есть перемещения $u(x)=0$ и скорости $\dot{u}(x)=0$ всех точек стержня равны нулю. В начальный момент времени $t=0$ к концу стержня с координатой $x=0$ прикладывается сосредоточенная поперечная сила $P_0 > 0$, которая воздействует на стержень всё время.

Задача состоит в том, чтобы определить напряжённо деформированное состояние стержня в любой момент времени.

Сначала кратко приведем основные результаты, полученные ранее [13], при решении данной задачи, основываясь на модели балки Эйлера–Бернулли. Из балочного уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta_1(x), \quad (3.1)$$

где $\delta_1(x)$ дельта функция, с помощью преобразования Фурье по x находим

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - \cos z^2 t)}{z^2} \cos xz dz. \quad (3.2)$$

Здесь единицами измерения длины служит радиус инерции стержня $r = (J/S)^{1/2}$; времени — r/c_0 , где $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$; J , S — момент инерции и площадь поперечного сечения балки.

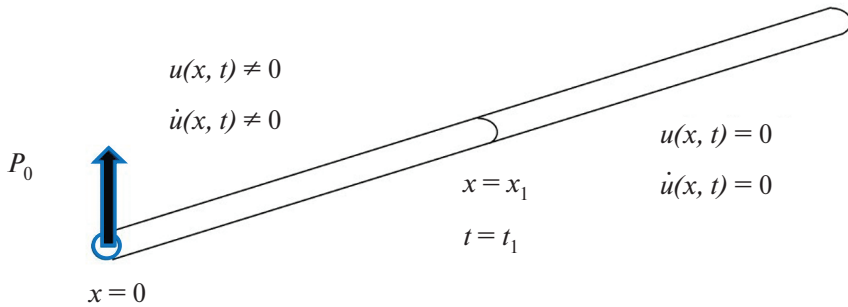


Рис. 2. Изгибаемый стержень сосредоточенной силой.

Дифференцируя интеграл по времени (здесь дифференцирование под знаком интеграла допустимо), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z^2 t \cos zx}{z^2} dz = \frac{\kappa}{2} \{F(\kappa) - C(\kappa)\} + \sqrt{\frac{t}{\pi}} \sin\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right), \quad \kappa = \frac{x^2}{4t}, \quad (3.3)$$

где $F(\kappa)$ и $C(\kappa)$ – интегралы Френеля:

$$F(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\kappa} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad C(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\kappa} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt. \quad (3.4)$$

Интегрируя по частям (0.25) получим

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \left\{ \sin\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right) - \kappa \cos\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \sqrt{\pi \kappa} [S(\kappa) - F(\kappa)] + \sqrt{\pi \kappa^2} [1 - F(\kappa) - S(\kappa)] \right\}. \quad (3.5)$$

Функция перемещений (3.5) представлена на рис. 3 для трех моментов времени. Из представленных зависимостей видно, что решение определено на всем диапазоне $x > 0$, $t > 0$ и нельзя выделить такую точку x_1 (как это было сделано в предыдущем разделе), определяющую положение волнового фронта. Другими словами, скорость распространения возмущения по длине балки равна бесконечности. Также стоит отметить осциллирующий характер решения.

Характерной особенностью полученного решения является то, что оно представимо в виде

$$u = t^{\frac{2}{3}} v(\kappa). \quad (3.6)$$

Амплитуда прогиба растёт пропорционально $t^{3/2}$, а форма, как функция $\kappa = x^2/4t$, остается постоянной (в функции от x , оставаясь подобной самой себе, расширяется пропорционально $\sqrt{t}$. При $x=0$ ($\kappa=0$))

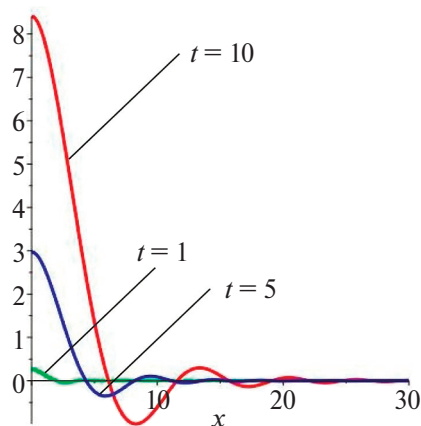


Рис. 3. Функция перемещений u для моментов времени $t=1, 5, 10$.

$$u = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{\frac{3}{2}}. \quad (3.7)$$

При $x \rightarrow \infty$

$$u \sim -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \frac{\sin\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right)}{\kappa^2}. \quad (3.8)$$

Таким образом, прогиб стержня описывается осциллирующей функцией. Для кривизны балки из следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ \cos\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\pi\kappa} [1 - F(\kappa) - C(\kappa)] \right\} \quad (3.9)$$

При $\kappa=0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sqrt{\frac{t}{2\pi}}. \quad (3.10)$$

А при $\kappa \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \frac{\sin\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right)}{\kappa}. \quad (3.11)$$

Для того чтобы решить эту задачу, удовлетворяя, как и в предыдущем параграфе законам сохранения, сделаем два важных предположения. Во-первых, в некоторый момент времени $t=t_1$ существует такая точка $x=x_1$ (рис. 3), которая разделяет стержень на две части. При $x > x_1$ все точки стержня находятся

в покое (2.9). А при $x < x_1$ все точки стержня имеют не нулевые перемещения и скорости (2.8).

Во-вторых, для всех точек $x < x_1$ напряжённо деформированное состояние стержня является однородным и удовлетворяет следующему уравнению состояния

$$u_{xxx} - \frac{P_0}{EJ} = 0. \quad (3.12)$$

Также будем считать, что положение точки x_1 является непрерывной функцией времени t .

Трижды интегрируя уравнение (0.33) по координате x получим следующее выражение для функции перемещений

$$u(x, t) = \frac{P_0 x^3}{6EJ} + \frac{c_1(t)x^2}{2} + c_2(t)x + c_3(t). \quad (3.13)$$

Здесь $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ есть неизвестные функции времени. В дальнейшем аргументы у функций будут опущены.

Удовлетворяя условие непрерывности функции перемещений в точке $x = x_1(t)$ и исключая функцию c_3 , получим следующую функцию перемещений

$$u = P_0 \frac{x^3 - x_1^3}{6EJ} + c_1 \frac{x^2 - x_1^2}{2} + c_2 (x - x_1). \quad (3.14)$$

Функция скоростей u_t находится простым дифференцированием функции перемещений по времени

$$u_t = c_{1t} \frac{x^2 - x_1^2}{2} - c_{2t} (x - x_1) - \frac{P_0 x_1^2 x_{1t}}{2EJ} - x_{1t} c_2 - x_1 c_{2t}. \quad (3.15)$$

После сделанных предположений задача заключается в нахождении трех неизвестных функций времени x_1 , c_1 и c_2 . Для определения этих функций воспользуемся законами сохранения, а именно, законами сохранения энергии, изменения количества движения и изменения момента количества движения.

Закон сохранения энергии имеет вид

$$T_0(t) + \Pi_0(t) - A_0(t) = 0 \quad (3.16)$$

Для кинетической энергии имеем следующее выражение

$$\begin{aligned} T_0(t) = & \frac{\rho x_1^5 c_{1t}}{15} + \frac{\rho x_1^4 x_{1t} c_{1t}}{3} + \frac{\rho x_1^3 x_{1t}^2 c_1^2}{2} + \frac{\rho P_0 x_1^5 c_{1t} x_{1t}}{6EJ} + \frac{\rho P_0 x_1^4 x_{1t}^2 c_1}{2EJ} + \\ & + \frac{\rho P_0^2 x_1^5 x_{1t}^2}{8EJ^2} + \frac{5\rho x_1^4 c_1 c_2}{24} + \frac{\rho x_1^3 x_{1t} c_{1t} c_2}{3} + \frac{\rho x_1^3 x_{1t} c_{2t} c_1}{2} + \rho x_1^2 x_{1t}^2 c_1 c_2 + \\ & + \frac{\rho P_0 x_1^4 c_{2t} x_{1t}}{4EJ} + \frac{\rho P_0 x_1^3 x_{1t}^2 c_{2t}}{2EJ} + \frac{\rho x_1^3 c_{2t}^2}{6} + \frac{\rho x_1^2 c_{2t} x_{1t} c_2}{2} + \frac{\rho x_1 x_{1t}^2 c_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Понятно, что любой квалифицированный исследователь способен выписать это соотношение в явном виде. Выражение приведено только для того, чтобы продемонстрировать насколько сложно в него входят неизвестные функции.

Потенциальная энергия имеет следующее представление

$$W_0 = \int_0^{x_1(t)} \frac{(P_0 x)^2}{6EJ} dx = \frac{P_0^2 x_1^3}{6EJ}. \quad (3.18)$$

И работа внешних сил

$$A_0 = P_0 u(t, 0) = -P_0 x_1 \left(\frac{x_1 c_1}{2} + \frac{x_1^2}{6EJ} + c_2 \right). \quad (3.19)$$

Подстановка выражений (3.17)–(3.19) в равенство позволяет скомпоновать одно обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, зависящее от трех неизвестных функций x_1 , c_1 и c_2 .

Выражение для плотности количества движения стержня имеет вид

$$p(x, t) = \rho u_t. \quad (3.20)$$

Закон изменения количества движения (условие динамического равновесия) дает

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{x_1} \rho u_t dx \right)_t - P_0 = & -2\rho x_1^2 c_{1t} x_{1t} - \rho x_1 c_1 x_{1t}^2 - \frac{\rho x_1^3 c_{1tt}}{3} - \rho x_1^2 c_1 x_{1tt} - \\ & - \frac{\rho P_0 x_1^2 x_{1t}^2}{EJ} - \frac{\rho P_0 x_1^3 x_{1t}}{2EJ} - 2\rho x_1 c_{2t} x_{1t} - \frac{\rho x_1^2 c_{2tt}}{2} - \rho x_1 c_2 x_{1tt} - P_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Выражение для плотности момента количества движения стержня имеет вид

$$l_0 = \rho u_t x. \quad (3.22)$$

Изменение моментов вычислим относительно точки $x=0$. Момент от силы P_0 равен нулю. Тогда выражение $dL/dt=0$ ведет к $L=\text{const}$. В начальный момент времени $L=0$. Отсюда вытекает, что $L=0$. Следовательно момент количества движения не зависит от времени и равен нулю

$$L = \int_0^{x_1} l_0 dx = 3x_1^2 c_{1t} + 12x_1 c_1 x_{1t} + \frac{6P_0}{EJ} x_1^2 x_{1t} + 4x_1 c_{2t} + 12c_2 x_{1t} = 0. \quad (3.23)$$

Таким образом имеем три нелинейных дифференциальных уравнения, а именно, (3.16) с подстановками (3.17)–(3.19), и уравнения (3.21) и (3.23) относительно трех переменных функций x_1 , c_1 и c_2 .

Введем в рассмотрение две новые функции x_2 и c_3

$$x_2 = x_1^2, \quad c_3 = c_1 x_1, \quad (3.24)$$

подстановка которых в систему уравнений приводит компоненты этих уравнений к однородному виду относительно степеней функций x_2 , c_2 и c_3 . Тогда используя замену

$$\{x_2 = b_1 t, \quad c_3 = b_2 t, \quad c_2 = b_3 t\}, \quad (3.25)$$

получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров $\{b_1, b_2, b_3\}$

$$108\rho b_1 b_2^2 + 330\rho b_1 b_2 b_3 + 260\rho b_1 b_3^2 + \frac{80\rho P_0 b_1^2 b_2}{EJ} + \frac{120\rho P_0 b_1^2 b_3}{EJ} + \frac{15\rho P_0^2 b_1^3}{EJ^2} + 240P_0 b_2 + 480P_0 b_3 + \frac{160P_0^2 b_1}{EJ} = 0, \quad (3.26)$$

$$10\rho EJb_1 b_2 + 18\rho EJb_1 b_3 + 3\rho P_0 b_1^2 + 24P_0 EJ = 0, \quad (3.27)$$

$$15EJb_2 + 20EJb_3 + 6P_0 b_1 = 0. \quad (3.28)$$

Эта система уравнений имеет единственное аналитическое решение

$$\left\{ b_1 = \sqrt{\frac{10EJ(385\sqrt{13} - 1373)}{27\rho}}, \quad b_2 = \frac{8\sqrt{30}P_0(40 - 11\sqrt{13})}{3\sqrt{\rho EJ(385\sqrt{13} - 1373)}}, \right. \\ \left. b_3 = -\frac{P_0(1027 - 275\sqrt{13})}{\sqrt{30\rho EJ(85\sqrt{13} - 1373)}} \right\} \quad (3.29)$$

или приближенное значение

$$\left\{ b_1 = 2.368\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}, \quad b_2 = 1.272\frac{P_0}{\sqrt{\rho EJ}}, \quad b_3 = -1.665\frac{P_0}{\sqrt{\rho EJ}} \right\}. \quad (3.30)$$

Из решения (3.30) следует, что искомые функции $x_1(t)$, $c_1(t)$ и $c_2(t)$ имеют вид

$$x_1 = 1.539\left(\frac{EJ}{\rho}\right)^{1/4}\sqrt{t}, \quad c_1 = \frac{0.827P_0}{\sqrt{EJ\sqrt{\rho EJ}}}\sqrt{t}, \quad c_2 = -\frac{1.665P_0}{\sqrt{\rho EJ}}t. \quad (3.31)$$

Таким образом функцию перемещений балки можно представить в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} P_0 \left(\frac{0.167}{EJ} x^3 - \frac{1.665}{\sqrt{\rho EJ}} xt + \frac{0.975}{\sqrt{\rho\sqrt{\rho EJ}}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{0.413}{\sqrt{EJ\sqrt{\rho EJ}}} x^2 \sqrt{t} \right), & x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1. \end{cases} \quad (3.32)$$

Характерное распределение перемещений по длине балки представлено на рис. 4. Важно отметить, что присутствует волновой фронт (точка x_1). Наличие

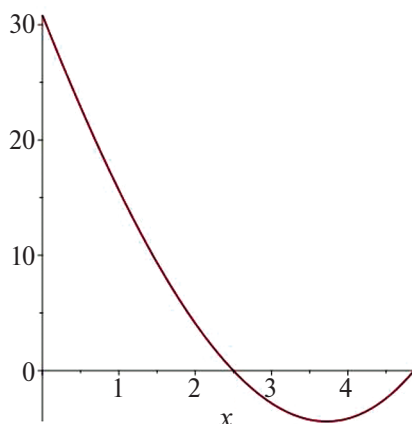


Рис. 4. Перемещения балки в момент времени $t = 10$ при следующих значениях параметров $EJ = \rho = M_0 = 1$.

отрицательных перемещений объясняется тем, что суммарный момент количества движения балки всегда равен нулю.

Соответственно, для скоростей точек балки имеем следующее представление

$$u_t(x, t) = \begin{cases} P_0 \left(-\frac{1.664}{\sqrt{\rho EJ}} x + \frac{0.207}{\sqrt{EJ \sqrt{\rho EJ}}} \frac{x^2}{\sqrt{t}} + \frac{1.462\sqrt{t}}{\sqrt{\rho \sqrt{\rho EJ}}} \right), & x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1. \end{cases} \quad (3.33)$$

При этом скорость волнового фронта $v_f(t)$ является величиной переменной и равна

$$v_f(t) = 0.769 \left(\frac{EJ}{\rho} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (3.34)$$

Важно отметить, что скорость волнового фронта зависит от жесткостных и инерционных характеристик балки и не зависит от величины перерезывающей силы P_0 . Стоит отметить, что с увеличением времени скорость волнового фронта уменьшается и стремится к нулю при бесконечном распространении возмущения. Скорость точки приложения нагрузки является корневой функцией времени в процессе движения и равна

$$u_t(0, t) = \frac{1.462 P_0}{\sqrt{\rho \sqrt{\rho EJ}}} \sqrt{t}. \quad (3.35)$$

4. Динамический изгиб балки под действием сосредоточенного момента.

Рассмотрим прямолинейный стержень полубесконечной длины, показанный на рис. 5. Считается, что стержень находится в покое, то есть перемещения $u(x) = 0$ и скорости $\dot{u}(x) = 0$ всех точек стержня равны нулю. В начальный

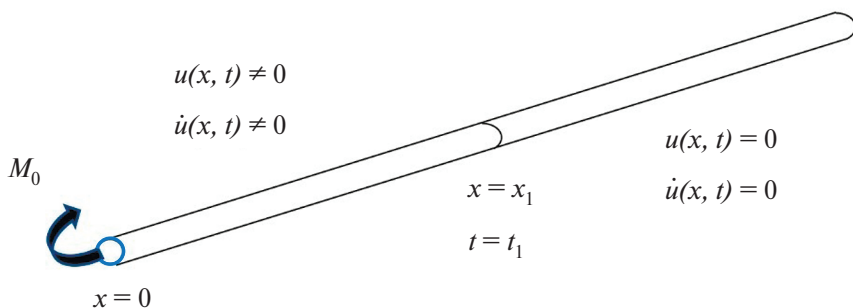


Рис. 5. Изгибаемый стержень сосредоточенным моментом.

момент времени $t=0$ к концу стержня с координатой $x=0$ прикладывается сосредоточенный изгибающий момент $M_0 > 0$, который воздействует на стержень всё время $t > 0$.

Также введены инерционные (линейная плотность материала ρ) и жесткостные (изгибная жёсткость EJ) характеристики стержня. Здесь E – модуль Юнга и J – момент инерции сечения. Считается, что все характеристики стержня постоянны и не изменяются, как по длине, так и во времени.

Задача состоит в том, чтобы определить напряжённо деформированное состояние стержня в любой момент времени. Для решения этой задачи сделаем два важных предположения. Во-первых, предположим, что в некоторые моменты времени $t=t_1$ существует такая точка $x=x_1$ (рис. 5), которая разделяет стержень на две части. При $x > x_1$ все точки стержня остаются в покое (2.9). А при $x < x_1$ все точки стержня имеют не нулевые перемещения и скорости (2.8). Во-вторых, предполагается, что для всех точек $x < x_1$ напряжённо деформированное состояние стержня является однородным и удовлетворяет следующему уравнению состояния

$$EJu_{xx} - M_0 = 0. \quad (4.1)$$

Также будем считать, что положение точки x_1 является непрерывной функцией времени t . Все, сделанные здесь предположения аналогичны тем, которые были сделаны в предыдущем параграфе.

Дважды интегрируя уравнение (0.57) по координате x , получим следующее выражение для функции перемещений

$$u(x, t) = -\frac{M_0 x^2}{2EJ} - a_1(t)x - b_1(t). \quad (4.2)$$

Здесь $a_1(t)$ и $b_1(t)$ есть неизвестные функции времени. Аргументы у функций в дальнейшем опускаются.

Удовлетворяя условие непрерывности функции перемещений в точке $x=x_1$ и исключая функцию b_1 , получим следующую функцию перемещений

$$u = \frac{M_0 (x_1^2 - x^2)}{2EJ} + a_1(x_1 - x). \quad (4.3)$$

Функция скоростей u_t находится простым дифференцированием функции перемещений по времени

$$u_t = a_{1t}(x_1 - x) + \left(\frac{M_0 x_1}{EJ} + a_1 \right) x_{1t}. \quad (4.4)$$

После сделанных предположений задача заключается в нахождении двух неизвестных функций времени x_1 и a_1 . Для определения этих функций воспользуемся законами сохранения, а именно, законами сохранения энергии, изменения количества движения и изменения момента количества движения.

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$T_0(t) + \Pi_0(t) - A_0(t) = 0, \quad (4.5)$$

где $T_0(t)$ — кинетическая энергия балки, $\Pi_0(t)$ — ее потенциальная энергия, $A_0(t)$ — работа внешних сил, совершенная над балкой. Все эти величины вычислены в момент времени t .

Для кинетической энергии имеем следующее выражение

$$\begin{aligned} T_0 = \int_0^{x_1} \frac{\rho u_t^2}{2} dx = & \frac{\rho a_t^2 x_1^3}{6} + \frac{\rho a x_1^2 a_t x_{1t}}{2} + \frac{\rho a_1^2 x_1 x_{1t}^2}{2} + \\ & + \frac{\rho M_0 x_1^3 a_{1t} x_{1t}}{2EJ} + \frac{\rho M_0 a_1 x_1^2 x_{1t}^2}{EJ} + \frac{\rho M_0^2 x_1^3 x_{1t}^2}{2EJ^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Потенциальная энергия имеет следующее представление

$$W_0 = \int_0^{x_1} \frac{M_0^2}{2EJ} dx = \frac{M_0^2 x_1}{2EJ}. \quad (4.7)$$

И работа внешних сил

$$A_0 = \int_0^{x_1} u_x \Big|_{x=0} dx = -M_0 a_1. \quad (4.8)$$

Подстановка выражений (4.6)–(4.8) в равенство позволяет скомпоновать одно обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, зависящее от двух неизвестных функций x_1 и a_1 .

Выражение для плотности количества движения стержня имеет вид

$$p(x, t) = \rho u_t(x, t) \quad (4.9)$$

Тогда закон изменения количества движения (условие динамического равновесия) имеет вид $dP(t)/dt = F = 0$. Следовательно, $P(t) = C = \text{const}$. Начальное условие $P(0) = 0$ позволяет определить константу $C = 0$. Тогда закон изменения количества движения эквивалентен равенству нулю интеграла от скоростей балки по ее длине

$$\int_0^{x_1} u_t dx = \frac{\rho x_1^2 a_{1t}}{2} + \rho x_1 x_{1t} a_1 + \frac{\rho M_0 x_1^2 x_{1t}}{EJ} = 0. \quad (4.10)$$

Выражение для плотности момента количества движения стержня имеет вид

$$l_0 = \rho u_t x. \quad (4.11)$$

Изменение моментов вычислим относительно точки $x=0$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{x_1} l_0 dx \right] - M_0 &= \frac{\rho x_1^3 a_{1tt}}{6} + \frac{\rho x_1^2 x_{1tt} a_1}{2} + \rho x_1^2 x_{1t} a_{1t} + \\ &+ \rho x_1 a_1 x_{1t}^2 + \frac{\rho M_0 x_1^3 x_{1tt}}{2EJ} + \frac{\rho M_0 x_1^2 x_{1t}^2}{2EJ} - M_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом, для нахождения двух неизвестных функций $\{x_1, a_1\}$ имеется три нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5), (4.10) и (4.12). Найти точное решение такой задачи весьма затруднительно. Это связано, во-первых, с тем, что уравнения, входящие в систему, являются нелинейными. Во-вторых, система уравнений является переопределенной. На три уравнения приходится только две переменные. То есть, для того чтобы существовало решение этой системы, уравнения должны быть зависимы. Проанализировать эту систему в полном объеме вряд ли удастся. Однако, построить некоторое частное решение вполне возможно.

Для начала, попробуем специальной подстановкой преобразовать к более удобному, однородному относительно степеней неизвестных функций виду. Введем в рассмотрение две новые функции x_2 и a_2

$$x_2 = x_1^2, \quad a_2 = a_1 x_1. \quad (4.13)$$

Используя замену (4.13), уравнения (4.5), (4.10) и (4.12) соответственно преобразуются к виду

$$\begin{aligned} 4\rho EJ^2 a_{2t}^2 x_2^2 + 2\rho EJ^2 a_{2t} x_{2t} a_2 x_2 + \rho EJ^2 x_{2t}^2 a_2^2 + 6\rho M_0 EJ a_{2t} x_{2t} x_2^2 + \\ + 3\rho M_0 EJ x_{2t}^2 a_2 x_2 + 3\rho M_0^2 x_{2t}^2 x_2^2 + 24M_0 EJ^2 a_2 x_2 + 12M_0^2 EJ x_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$2M_0 x_{2t} x_2 + 2EJ a_{2t} x_2 + EJ x_{2t} a_2 = 0, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho a_{2tt} x_2^3}{6} + \frac{\rho x_{2tt} x_2^2 a_2}{2} + \rho a_{2t} x_{2t} x_2^2 + \rho x_{2t}^2 x_2 a_2 + \\ + \frac{\rho M_0 x_{2tt} x_2^3}{2EJ} + \frac{3\rho M_0 x_{2t}^2 x_2^2}{2EJ} - M_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из представления уравнений (4.16)–(4.17) видно, что переменные $x_2(t)$ и $c_2(t)$ входят однородно (с одинаковыми степенями) в уравнения. Таким образом, подстановка $\{x_2 = b_1 t, c_2 = b_2 t\}$ сводит систему дифференциальных уравнений соответственно к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров $\{b_1, b_2\}$

$$7\rho EJ^2 b_1 b_2^2 + 9\rho EJ M_0 b_1^2 b_2 + 3\rho M_0^2 b_1^3 + 24EJ^2 M_0 b_2 + 12EJM_0^2 b_1 = 0, \quad (4.17)$$

$$2M_0 b_1 + 3EJ b_2 = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\rho M_0}{4EJ} b_1^2 + \frac{\rho b_1 b_2}{3} - M_0 = 0. \quad (4.19)$$

Видно, что проще всего разрешить уравнения (4.18) и (4.19). В результате имеем

$$\left\{ b_1 = 6\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}, b_2 = -\frac{4M_0}{\sqrt{EJ\rho}} \right\}. \quad (4.20)$$

Можно убедиться, что подстановка (4.20) тождественно удовлетворяет уравнению (4.17).

Из решения (4.20) следует, что искомые функции $x_1(t)$ и $a_1(t)$ имеют вид

$$x_1 = \sqrt{6t\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}}, \quad a_1 = -\frac{2M_0}{3}\sqrt{\frac{6t}{EJ\sqrt{\rho EJ}}}. \quad (4.21)$$

Таким образом функцию перемещений балки (0.59) можно представить в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} -M_0 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{8t}}{\sqrt{3}} + t \right), & x < \sqrt{6t\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}}, \\ 0, & x \geq \sqrt{6t\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Характерное распределение перемещений по длине балки представлено на рис. 6. Важно отметить, что присутствует волновой фронт (точка x_1). Наличие отрицательных перемещений объясняется тем, что суммарное количество движения балки всегда равно нулю.

Соответственно, для скоростей точек балки имеем следующее представление

$$u_t(x, t) = \begin{cases} M_0 \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}t^4\sqrt{\rho EJ^3}} - \frac{1}{\sqrt{\rho EJ}} \right), & x < \sqrt{6t\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}} \\ 0, & x \geq \sqrt{6t\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}} \end{cases} \quad (4.23)$$

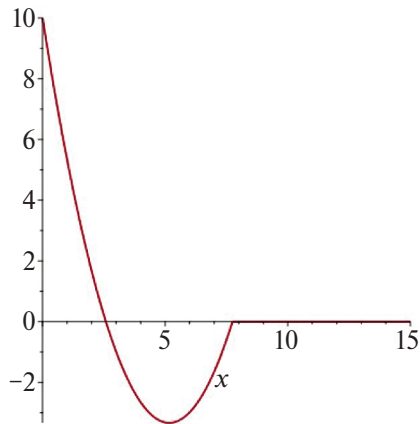


Рис. 6. Перемещения балки в момент времени $t = 10$ при следующих значениях параметров $EJ = \rho = M_0 = 1$.

При этом, скорость волнового фронта $v_f(t)$ является величиной переменной и равна

$$v_f(t) = \sqrt{\frac{3}{2t} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}}. \quad (4.24)$$

Важно отметить, что скорость волнового фронта зависит от жесткостных и инерционных характеристик балки и не зависит от величины изгибающего момента M_0 . С увеличением времени скорость волнового фронта уменьшается и стремится к нулю при бесконечном распространении возмущения. Скорость точки приложения нагрузки постоянна в процессе движения и равна

$$u_t(0, t) = -\frac{M_0}{\sqrt{\rho EJ}}. \quad (4.25)$$

5. Некоторые выводы и сопоставления.

1. Из условия выполнения интегральных законов, а именно, закона сохранения энергии, закона изменения количества движения и закона изменения момента количества движения решены аналитически три задачи нестационарной динамики стержня.

2. Построены точные выражения для перемещений балки для этих трёх задач. Следует отметить, что если при продольных движениях функция перемещений (0.21) точно удовлетворяет волновое уравнение (0.5), то функции изгибных перемещений (0.53) и (0.77) не удовлетворяют волновому уравнению (0.22).

3. Все построенные решения характеризуется наличием в балке волнового фронта. При этом в аналитическом решении волнового уравнения (0.22) все динамические возмущения распространяются по длине балки с бесконечной скоростью в отсутствие волнового фронта.

4. Показано, что в отличие от передачи продольных возмущений по длине балки, которые происходят с постоянной скоростью, изгибные возмущения распространяются с переменной скоростью, причём, с ростом времени это скорость уменьшается и стремится к нулю в бесконечно удаленной точке балки.

5. Из представленных решений следует, что скорости распространения волнового фронта для передачи сосредоточенной силы и сосредоточенного момента отличается друг от друга. При этом скорость передачи поперечной силы почти в два раза превосходит скорость волнового фронта от изгибающего момента.

Работа выполнена в рамках Госзадания № 124012500437-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nayfeh A.H., Abdelrahman W.G.* An approximate model for wave propagation in rectangular rods and their geometric limits // JVC. 2000. V. 6. № 1. P. 3–17.
<https://doi.org/10.1177/107754630000600101>
2. *Clough R.W. and Penzien J.* Dynamics of Structures. New York: McGraw-Hill, 1993. 634 p.
3. *Cortes F., Elejabarrieta M.J.* Longitudinal vibration of a damped rod—part I: complex natural frequencies and mode shapes // Int. J. Mech. Sci. 2006. V. 48. № 9. P. 969–975.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.03.010>
4. *Abramson H. N., Plass H. J., Ripperger, E. A.* Stress wave propagation in rods and beams // in Advances in Applied Mechanics. New York: Academic Press, 1958. V. 5. P. 111–194.
5. *Morse R. W.* The velocity of compressional waves in rods rectangular cross sections // J. Acoust. Soc. Am. 1950. V. 22. P. 219–223.
6. *Hsueh W.J.* Free and forced vibrations of stepped rods and coupled system // JSV. 1999. V. 226. № 5. P. 891–904.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2249>
7. *Krawczuk M., Grabowska J., Palacz M.* Longitudinal wave propagation, part I: comparison of rod theories // JSV. 2006. V. 295. № 3–5. P. 461–478.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.12.048>
8. *Yang, K.* A unified solution for longitudinal wave propagation in an elastic rod // JSV. 2008. V. 314. № 1–2. P. 307–329.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.007>
9. *Gan C.B., Wei, Y.M., and Yang, S.X.* Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section // JSV. 2014. V. 333. № 2. P. 434–445.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.09.010>
10. *Bayanov E.V., Gulidov A.I.* Propagation of elastic waves in circular rods homogeneous over the cross section // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52. № 5. P. 808–814.
<https://doi.org/10.1134/S0021894411050166>
11. *Беляев А.К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П., Шурпатов А.О.* Динамика стержня при продольном ударе телом // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 3. С. 506–515.
12. *Беляев, А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Тонкий стержень при продольном динамическом сжатии // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 19–34.
13. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

DYNAMIC BENDING OF A BEAM

V. V. Saurin^{a, *}^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, IPMech RAS, Moscow, Russia*^{*}*e-mail: saurin@ipmnet.ru*

Abstract. The article discusses problems of dynamic bending for beams of semi-infinite length. To solve such problems, the article uses a method based on the implementation of the conservation laws, namely, the law of energy conservation, the law of change in momentum and the law of change in angular momentum. The results obtained are compared with the analytical solution for the problem of a semi-infinite beam motion loaded at the free end with a transverse force. The peculiarity of this solution is that the change in the stress-strain state of the rod is characterized by a wave front. It is considered that all changes in the state of the beam occur at an infinite speed. All designed solutions are characterized by the presence of a wave front in the beam. It is shown that, in contrast to the transfer of longitudinal disturbances along the length of the beam, which occur at a constant speed, bending disturbances propagate at a variable speed, and, with increasing time, this speed decreases and tends to zero at an infinitely distant point of the beam. It was discovered that the propagation velocity of the wave front during the transfer of concentrated force and concentrated moment differs from each other. In this case, the speed of transverse force transfer is almost twice as high as the speed of the wave front from the bending moment.

Keywords: elastic rod, initial-boundary value problem, conservation laws, wave front

REFERENCES

1. *Nayfeh A.H., Abdelrahman W.G.* An Approximate Model for Wave Propagation in Rectangular Rods and Their Geometric Limits // *Journal of Vibration and Control*, 2000. V. 6 №1. P. 3–17.
<https://doi.org/10.1177/107754630000600101>
2. *Clough R.W. and Penzien J.* Dynamics of Structures// McGraw-Hill, 1993, New York, 634 P.
3. *Cortes F., Elejabarrieta M.J.* Longitudinal vibration of a damped rod—part I: complex natural frequencies and mode shapes// *International Journal of Mechanical Sciences*. 2006. V. 48, P. 969–975.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.03.010>.
4. *Abramson H.N., Plass H.J., and Ripperger E.A.* Stress wave propagation in rods and beams // in *Advances in Applied Mechanics*, 1958. V. 5, Academic Press, New York, P. 111–194.
5. *Morse R.W.* The velocity of compressional waves in rods rectangular cross sections // *Journal of the Acoustical Society of America*, 1950. V. 22, P. 219–223.
6. *Hsueh W.J.* Free and forced vibrations of stepped rods and coupled system// *Journal of Sound and Vibration*, 1999. V. 226, № 5, P. 891–904.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2249>.

7. *Krawczuk M., Grabowska J., and Palacz M.* Longitudinal wave propagation, part I: comparison of rod theories// *Journal of Sound and Vibration*, 2006. V. 295. P. 461–478.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.12.048>.
8. *Yang K.* A unified solution for longitudinal wave propagation in an elastic rod// *Journal of Sound and Vibration*, 2008. V. 314. P. 307–329.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.007>.
9. *Gan C. B., Wei Y.M., and Yang S.X.* Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section// *Journal of Sound and Vibration*, 2014. V. 333. P. 434–445.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.09.010>.
10. *Bayanov E.V., Gulidov A.I.* Propagation of elastic waves in circular rods homogeneous over the cross section// *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011. Vol. 52. No. 5. P. 808–814.
<https://doi.org/10.1134/S0021894411050166>.
11. *Belyaev A.K., Ma Ch.-Ch., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P., Shurpatov A.O.* Dynamics of a rod under longitudinal impact by a body // *Bulletin of St. Petersburg State University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2017. Vol. 4 (62). Issue. 3. P. 506–515.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.312>. (in Russian)
12. Thin rod under longitudinal dynamic compression // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*. 2017. No. 4. P. 19–34. (in Russian)
13. *Slepyan L.I.* Non-stationary elastic waves. L.: Sudostroenie, 1972, 376 p. (in Russian)

УДК 539.3

ЭЛЕКТРОУПРУГОСТЬ ПЬЕЗОВОЛОКОННОГО ДИСКОВОГО АКТЮАТОРА

© 2024 г. А. А. Паньков^{а, *}

^аПермский национальный исследовательский политехнический
университет, Пермь, Россия

*e-mail: a_a_pankov@mail.ru

Поступила в редакцию 02.02.2024 г.

После доработки 22.02.2024 г.

Принята к публикации 26.03.2024 г.

Разработана микроструктурная модель катушечного композитного пьезоволоконного дискового (FibrCD) актюатора, который образован намоткой большого числа витков тонкого электродированного пьезоэлектрического волокна в виде экранированного одножильного кабеля с радиально поляризованным пьезоэлектрическим межэлектродным слоем с последующей пропиткой и континуализацией витков полимерным связующим. Получено точное аналитическое решение для электрического и деформационного полей осесимметричной связанной краевой задачи электроупругости на элементарной составной ячейке «пьезоэлектрический кабель/оболочка связующего». Далее, точное решение для электроупругих полей внутри составной ячейки, нагруженной электрическим напряжением на электродах кабеля, использовано для нахождения точных аналитических решений для тензоров эффективных коэффициентов пьезоэлектрических напряжений и линейного пьезоэлектрического расширения (деформаций) волоконного композита как гомогенного с цилиндрической анизотропией дискового FibrCD-актюатора в рамках известной полидисперсной модели структуры композита. Осуществлен расчет и численный анализ характеристик FibrCD-актюатора при различных значениях его макроскопических и структурных параметров, в частности, толщины диска (кольца), разности внешнего и внутреннего радиусов кольца, относительных размеров радиуса электропроводной жилы и толщины прослойки связующего между соседними витками кабеля. Подтверждена эффективность FibrCD-актюатора в сравнении с характеристиками традиционных актюаторов.

Ключевые слова: пьезоэлектрический FibrCD-актюатор, электроупругость, сигнальный кабель, волокнистый композит, эффективные свойства, полидисперсная модель, численное моделирование.

DOI: 10.31857/S1026351924050075, EDN: UAQNRF

1. Введение. Пьезоэлектрические элементы широко применяются в качестве сенсоров, генераторов, силовых приводов, преобразователей механической энергии в электрическую и наоборот и имеют форму пластин, цилиндров, дисков, колец, трубок, сфер из поляризованной керамики, например, PZT, ЦТС или полимера PVDF [1–5]. Для расширения функциональных возможностей и увеличения диапазона смещений и/или блокирующих усилий используют актюаторы с композитными, в частности, слоистыми структурами типа «пакет» из чередующихся тонких слоев пьезокерамики и электродов, например, пьезоэлектрических дисков или колец с электродамированными (металлизированными) поверхностями по границам их соединения. Количество слоев в пакетных пьезоэлектрических актюаторах может составлять от 5 до 200 штук и определяется требуемой амплитудой рабочих перемещений; толщина керамического слоя в пределах 20–100 мкм при толщине внутренних поверхностных электродов 3–4 мкм. В пакетных пьезоэлектрических актюаторах слои соединены механически последовательно, а электрически параллельно, при этом соседние слои пьезокерамики поляризованы в противоположных направлениях, поэтому результирующее относительное смещение торцов пакета сумма таких смещений всех слоев. Для снижения величины управляющего электрического напряжения U_{con} между электродами уменьшают толщину пьезоэлектрических слоев до 0.3–0.6 мм с учетом допустимых значений напряженности электрического поля пьезокерамики 1–2 кВ/мм.

Принцип создания «объемных» композитных пьезоэлектрических актюаторов пакетного типа (наличие взаимообратных поляризаций большого числа тонких пьезоэлементов, разделенных близко расположенными электродами и соединенных в «пакет» механически последовательно, а электрически параллельно) может быть применен к созданию перспективных «пленочных», в частности, микроволоконного MFC (Micro-Fiber Composite) [6], мембранного MDS [7], цилиндрического CDS [8, 9], эллипсоидальных, сферических и тороидальных [10] пьезоэлектрических актюаторов. MFC-актюаторы [6] представляют собой композитный пьезоэлектрический слой с близко уложенными в один ряд однонаправленными пьезокерамическими (PZT-5A) волокнами в полимерном (эпоксидном) связующем и находят широкое применение в различных областях науки и техники, в частности, в авиации для управления геометрией аэродинамических поверхностей лопасти вертолета. На верхней и нижней поверхности пьезоэлектрического слоя MFC-актюатора установлены друг под другом пленочные «встречно-гребенчатые» взаимодействующие электроды (IDE). На поверхности пьезоэлектрического слоя расстояние между соседними разнонаправленными прямолинейными узкими и тонкими полосками электродов 0.5 мм, при этом полная толщина такого пленочного MFC-актюатора 0.3 мм [11–14]. Дополнительное улучшение рабочих характеристик MFC-актюатора возможно с использованием вместо поликристаллических керамических волокон уникальных монокристаллических пьезоэлектрических волокон [12]. Этот же «пакетный» принцип расположения и взаимодействия большого числа чередующихся пьезоэлементов и электродов использован в мембранном MDS [7], цилиндрическом CDS [8, 9] и других криволинейных форм [15] пленочных пьезоэлектрических актюаторах

с двойными плоскими или цилиндрическими спиралями взаимодействующих поверхностных или встроенных по толщине пьезоэлектрической пленки [16] электродов. Эффективность MDS-актюатора подтверждена результатами численного моделирования в [17], в том числе и при наличии у актюатора периферийного «кольца поджатия» [18]. Представляет интерес обобщение принципов функционирования MDS, CDS и др. актюаторов [7, 8, 16] с двойными спиралями взаимодействующих электродов на более мощные объемные «катушечные» дисковые пьезоэлектрические FibrCD (Fibrous piezo Composite Disk) актюаторы [19], образованные намоткой большого числа витков тонкого экранированного одножильного кабеля [20, 21] с радиально поляризованным пьезоэлектрическим слоем между электродами) с последующей пропиткой и отверждением полимерным связующим, при этом в локальных областях контакта соседних витков также реализуются взаимообратные направления поляризации. Для изготовления FibrCD-актюаторов [19] могут быть использованы различные экранированные одножильные «сигнальные» кабели, например, с металлической токопроводящей жилой и полимерным PVDF пьезоэлектрическим слоем [20] или с полимерной токопроводящей жилой с композитным пьезоэлектрическим слоем [21–23].

Математическое моделирование функционирования пьезоэлектрических устройств: сенсоров и актюаторов различных типов основывается на постановке и решении аналитическими [24–31] или численными методами, например, методом конечных элементов [32–35] связанной краевой задачи электроупругости для заданной расчетной области с учетом ее конструктивных особенностей, наличия анизотропии, структурной и, как следствие, поляризационной неоднородности пьезоэлектрика при заданных условиях электро-механического нагружения устройства. Так в [31] получено точное аналитическое решение нестационарной связанной краевой задачи термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра, где в качестве нагрузки используется температурное поле. Точные аналитические решения возможно получить лишь для ограниченного круга задач электроупругости, как правило, канонических форм расчетных областей и такие решения эффективно используются для уточненного описания процессов функционирования, анализа и поиска оптимальных конструктивных параметров разрабатываемых устройств и верификации решений, полученных приближенными численными методами.

Цель — разработка микроструктурной математической модели катушечного композитного FibrCD —актюатора [19], постановка и точное аналитическое решение связанной краевой задачи электроупругости на элементарной цилиндрической составной ячейке с пьезоэлектрическим слоем и управляющими электродами, вычисление и анализ эффективных упругих модулей и коэффициентов пьезоэлектрических напряжений и линейного расширения его трансверсально-изотропной волокнистой структуры.

2. Пьезоволоконный дисковый актюатор. Разрабатываемый пьезоволоконный дисковый (FibrCD) актюатор (рис. 1) [19] представляют собой круговую катушку в виде мотка (скрепленного полимерным связующим) гибкого «одножильного экранированного» пьезоэлектрического кабеля (рис. 2), который

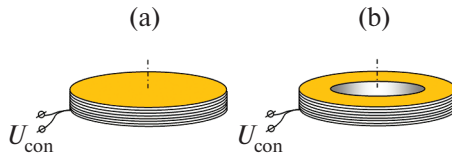


Рис. 1. Дискковый (а) и кольцевой (б) пьезоволоконные FibrCD-актуаторы.

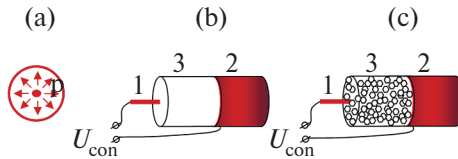


Рис. 2. Поперечное сечение с радиальными направлениями поляризации $\mathbf{p}$ (а) пьезоэлектрического волокна (кабеля) с электродами 1, 2 и однородным (б) или композитным (с) полимерным пьезоэлектрическим слоем 3.

имеет структуру цилиндрического конденсатора из двух соосных цилиндрических электродов, разделенных диэлектрическим пьезоэлектрическим слоем толщиной δ_0 . Поляризация (рис. 2, а) пьезоэлектрического слоя по радиальной координате $r \equiv \xi_3$ (ось симметрии электроупругих свойств пьезоэлектрика в его главных осях $\xi_{1,\dots,3}$, табл. 1) осуществляется в результате приложения поляризующего значения электрического напряжения U_{pol} к выходам электродов (рис. 2, б) в цилиндрической системе координат $r, \theta \equiv \xi_2, z \equiv \xi_1$, где ось z совмещена с центральной продольной осью пьезоэлектрического кабеля. Определяющие соотношения для пьезоэлектрического слоя составной ячейки (рис. 3, а) [1, 2]

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn} \varepsilon_{mn} - e_{nij} \hat{E}_n, \quad \hat{D}_i = e_{imn} \varepsilon_{mn} + \lambda_{in} \hat{E}_n \quad (2.1)$$

или в виде

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijmn} \sigma_{mn} + d_{nij} \hat{E}_n, \quad \hat{D}_i = d_{imn} \sigma_{mn} + \lambda_{in}^{(\sigma)} \hat{E}_n, \quad (2.2)$$

где σ, ε – тензоры напряжений и деформаций, $\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{E}}$ – векторы индукции и напряженности электрического поля, $\mathbf{c}, \mathbf{s}$ – взаимнообратные тензоры упругих жесткостей и податливостей, $\mathbf{e}, \mathbf{d}$ – тензоры пьезоэлектрических модулей, $\lambda, \lambda^{(\sigma)}$ тензоры диэлектрических проницаемостей с учетом выражений тензора упругих податливостей $\mathbf{s} \equiv \mathbf{c}^{-1}$, компонент тензора диэлектрических проницаемостей $\lambda_{in}^{(\sigma)} = \lambda_{in} + e_{ipq} d_{npq}$ при $\sigma = 0$, компонент $d_{nij} \equiv s_{ijpq} e_{npq}$ тензора $\mathbf{d}$ деформационных пьезомодулей пьезоэлектрического слоя. Электроупругие свойства пьезоэлектрического слоя считаем transversально-изотропными с характеристиками керамики PZT-5 (табл. 1) [1, 2] и матрицей пьезоэлектрических модулей

$$\|e_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

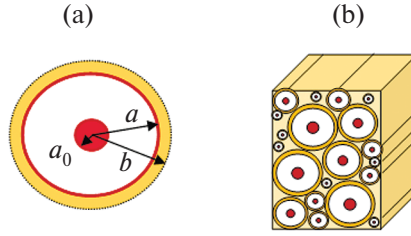


Рис. 3. Элементарная составная ячейка (а) полидисперсной модели (б) волокнистой структуры пьезокомпозита.

в главных координатных осях $\xi_{1,\dots,3}$, где тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями: $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, 23 и $32 \rightarrow 4$, 13 и $31 \rightarrow 5$, 12 и $21 \rightarrow 6$, в частности, используем обозначения: $c_{11} = c_{1111}$, $c_{12} = c_{1122}$, $c_{13} = c_{1133}$, $c_{33} = c_{3333}$, $e_{31} = e_{311}$, $e_{33} = e_{333}$, $\lambda_1 = \lambda_{11}$, $\lambda_3 = \lambda_{33}$. Пьезоэлектрический слой также может быть изготовлен из полимерного пьезоэлектрика PVDF (рис. 2, б) [20] или композитного материала (рис. 2, с) [21], в частности, полимера PVDF с высоким наполнением пьезокерамическими частицами. Поляризация композитного пьезоэлектрического слоя (рис. 2, с) также (как и для случая однородного пьезоэлектрического слоя) осуществляется в результате приложения поляризующего значения электрического напряжения U_{pol} к выводам электродов пьезоэлектрического кабеля. Композитные FibrCD-актюаторы (рис. 1) с волокнистой микроструктурой (рис. 1, 2) можно моделировать однородным на макроуровне диском (кольцом) с эффективными анизотропными электроупругими свойствами, характеризующимися тензорами упругих $\mathbf{c}^*$, пьезоэлектрических $\mathbf{e}^*$ и диэлектрических λ^* свойств. Тензоры $\mathbf{c}^*$, $\mathbf{e}^*$, λ^* вычисляются методами механики композитов, в частности, на ячейке периодичности в рамках модели идеальной периодической, например, гексагональной укладки (в плоскости поперечного сечения) соседних витков [36, 37], квазипериодического случайного расположения витков [22, 23] или, с целью получения аналитических решений, в рамках полидисперсной модели (рис. 3) [38].

Получим точное аналитическое решение связанной краевой задачи электроупругости на составной ячейке (рис. 3, а) и с использованием которого, далее, найдем эффективные коэффициенты линейного пьезоэлектрического расширения α_{ij}^* и пьезоэлектрических напряжений β_{ij}^* композитной волокнистой структуры FibrCD-актюатора (рис. 1) в рамках полидисперсной модели [22, 23, 38] (рис. 3, б). Искомые пьезоэлектрические коэффициенты α_{ij}^* , β_{ij}^* входят в определяющие соотношения [39] на макроуровне композита в виде

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = s_{ijmn}^* \langle \sigma_{mn} \rangle + \alpha_{ij}^* U_{\text{con}}, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = c_{ijmn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle - \beta_{ij}^* U_{\text{con}}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{c}^*$, $\mathbf{s}^*$ — взаимобратные тензоры эффективных упругих жесткостей и податливостей, $\langle \sigma \rangle$, $\langle \varepsilon \rangle$ — тензоры макронапряжений и макродеформаций соответственно, $\langle \dots \rangle$ — оператор осреднения по представительному объему композита области элементарной составной ячейки (рис. 3, а) при соответствующих условиях ее нагружения.

3. Математическая постановка задачи электроупругости на составной ячейке.

Используем цилиндрическую систему координат r, θ, z , где ось z совмещена с центральной продольной осью составной ячейки (рис. 3, а). Область ячейки состоит из концентрически расположенных и контактирующих между собой цилиндрических подобластей: электропроводной жилы ($0 < r < a_0$), пьезоэлектрического слоя ($a_0 < r < a$) и внешнего полимерного слоя ($a < r < b$) с бесконечно тонкой электродированной прослойкой экранирующим электродом между пьезоэлектрическим слоем и полимерным слоем при $r = a$. Рассматриваем лишь осесимметричное электромеханическое нагружение составной ячейки (рис. 3, а) через приложение электрического потенциала $\phi_* = U_{\text{con}}$ к электропроводной жиле и механическое нагружение внешнего контура при $r = b$ ячейки нормальным напряжением σ_* или радиальным смещением u_* . При этом на внешнем экранирующем электроде при $r = a$ и внутри внешнего полимерного слоя ($a < r < b$) электрические потенциалы равны нулю. Электропроводную жилу и внешний полимерный слой считаем пьезопассивными, упругими и изотропными. Требуем выполнения условий идеального механического контакта, т.е. непрерывности поля перемещений и вектора напряжений на межфазных поверхностях при $r = a_0, a$ составной ячейки. В результате, с учетом наличия осевой симметрии для геометрической формы, электроупругих свойств (в частности, цилиндрической анизотропии пьезоэлектрического слоя) и условий контакта слоев составной ячейки имеем осесимметричную краевую задачу электроупругости для области составной ячейки, в целом, относительно искомым деформационного и электрического полей как функций радиальной координаты r и с учетом ограниченности решения в центре при $r = 0$. Отличными от нуля являются лишь радиальная компонента u_r вектора перемещения, напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$, деформации $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$, потенциал ϕ , напряженность $\hat{E}_r$ и индукция $\hat{D}_r$ электрического поля.

Радиальные σ_{rr} и окружные $\sigma_{\theta\theta}$ напряжения удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (3.1)$$

а радиальные ε_{rr} и окружные $\varepsilon_{\theta\theta}$ деформации выражаются

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (3.2)$$

через радиальные перемещения u_r как функции от r . Радиальные компоненты индукции $\hat{D}_r$ и напряженности $\hat{E}_r$ электрического поля удовлетворяют уравнениям электростатики

$$\frac{d\hat{D}_r}{dr} + \frac{\hat{D}_r}{r} = 0, \quad \hat{E}_r = -d\phi/dr. \quad (3.3)$$

Для пьезоэлектрического слоя определяющие соотношения (2.1) примут вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= c_{33}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} - e_{33}\hat{E}_r, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} - e_{31}\hat{E}_r, \\
 \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - e_{31}\hat{E}_r, \\
 \hat{D}_r &= e_{33}\varepsilon_{rr} + e_{31}\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_3\hat{E}_r
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

с учетом радиальной поляризации и трансверсальной изотропии электроупругих свойств пьезоэлектрика (табл. 1) при равенстве нулю компонент

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 0, \quad \hat{D}_z = \hat{D}_\theta = 0.$$

Для изотропных упругих областей электропроводной жилы и внешнего полимерного слоя определяющие соотношения

$$\sigma_{(e)rr} = c_{(e)11}\varepsilon_{(e)rr} + c_{(e)12}\varepsilon_{(e)\theta\theta}, \quad \sigma_{(e)\theta\theta} = c_{(e)12}\varepsilon_{(e)rr} + c_{(e)11}\varepsilon_{(e)\theta\theta},$$

$$\sigma_{(e)zz} = c_{(e)12}(\varepsilon_{(e)rr} + \varepsilon_{(e)\theta\theta}), \quad \sigma_{(m)rr} = c_{(m)11}\varepsilon_{(m)rr} + c_{(m)12}\varepsilon_{(m)\theta\theta},$$

$$\sigma_{(m)\theta\theta} = c_{(m)12}\varepsilon_{(m)rr} + c_{(m)11}\varepsilon_{(m)\theta\theta}, \quad \sigma_{(m)zz} = c_{(m)12}(\varepsilon_{(m)rr} + \varepsilon_{(m)\theta\theta}),$$

как частный случай (3.4), где $c_{(e)11}, c_{(e)12}$ и $c_{(m)11}, c_{(m)12}$ независимые упругие константы этих областей, нижние индексы « e » и « m » указывают на принадлежность к электропроводной жиле и внешнему полимерному слою (матрице) соответственно. Поля напряжений, деформаций и перемещений в электропроводной жиле: $\sigma_{(e)rr}, \sigma_{(e)\theta\theta}, \varepsilon_{(e)rr}, \varepsilon_{(e)\theta\theta}, u_{(e)r}$ и во внешнем полимерном слое: $\sigma_{(m)rr}, \sigma_{(m)\theta\theta}, \varepsilon_{(m)rr}, \varepsilon_{(m)\theta\theta}, u_{(m)r}$ являются функциями координаты r и удовлетворяют аналогичным (3.1), (3.2) уравнениям равновесия (3.1) и соотношениям малых упругих деформаций (3.2).

Электромеханическое нагружение составной ячейки осуществляется через задание значений электрического потенциала

$$\phi|_{r=a_0} = U_{\text{con}}, \quad \phi|_{r=a} = 0 \tag{3.5}$$

напряжения

$$\sigma_{(m)rr}|_{r=b} = \sigma_*, \tag{3.6}$$

или перемещения

$$u_{(m)r}|_{r=b} = u_*, \tag{3.7}$$

условия идеального контакта на межфазных поверхностях

$$\sigma_{(e)rr}|_{r=a_0} = \sigma_{rr}|_{r=a_0}, \quad u_{(e)r}|_{r=a_0} = u_r|_{r=a_0}, \tag{3.8}$$

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \sigma_{(m)rr}|_{r=a}, \quad u_r|_{r=a} = u_{(m)r}|_{r=a}. \tag{3.9}$$

4. Решение задачи электроупругости на составной ячейке.

4.1. *Общее решение для пьезоэлектрического слоя.* Для пьезоэлектрического слоя составной ячейки (3.1)–(3.4) имеем систему двух дифференциальных уравнений [28]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{du_r}{rdr} - a_1 \frac{u_r}{r^2} + a_2 \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{rdr} \right) - a_3 \frac{d\phi}{rdr} &= 0, \\ \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1 + a_3) \frac{du_r}{rdr} + a_4 \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{rdr} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

относительно искомых полей перемещения $u_r(r)$ и электрического потенциала $\phi(r)$ как функций радиальной координаты r , где коэффициенты

$$a_1 = c_{11}/c_{33}, \quad a_2 = e_{33}/c_{33}, \quad a_3 = e_{31}/c_{33}, \quad a_4 = -\lambda_3/e_{33}. \quad (4.2)$$

В системе (4.1) первое уравнение домножим на a_4 , а второе — на a_2 и, далее, вычтем второе из первого, и в результате получим

$$a_3 a_4 \frac{d\phi}{dr} = (a_4 - a_2) r \frac{d^2 u_r}{dr^2} + [a_4 - a_2(1 + a_3)] \frac{du_r}{dr} - a_1 a_4 \frac{u_r}{r} \quad (4.3)$$

или после дифференцирования левой и правой частей уравнения (4.3) по r в виде

$$a_3 a_4 \frac{d^2 \phi}{dr^2} = (a_4 - a_2) r \frac{d^3 u_r}{dr^3} + (2a_4 - 2a_2 - a_2 a_3) \frac{d^2 u_r}{dr^2} - a_1 a_4 \frac{du_r}{rdr} + a_1 a_4 \frac{u_r}{r^2}. \quad (4.4)$$

Далее левую и правую части уравнения (4.3) поделим на r и сложим их с соответствующими частями уравнения (4.4), что дает

$$\begin{aligned} a_3 a_4 \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{rdr} \right) &= \\ &= (a_4 - a_2) r \frac{d^3 u_r}{dr^3} + (3a_4 - 3a_2 - a_2 a_3) \frac{d^2 u_r}{dr^2} + [a_4 - a_2(1 + a_3) - a_1 a_4] \frac{du_r}{rdr} \end{aligned}$$

или в виде

$$\begin{aligned} (a_4 - a_2) r \frac{d^3 u_r}{dr^3} + (3a_4 - 3a_2 - a_2 a_3 + a_3) \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \\ + [a_4 - a_2(1 + a_3) - a_1 a_4 + a_3(1 + a_3)] \frac{du_r}{rdr} = 0 \end{aligned}$$

с учетом выражения

$$a_4 \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{rdr} \right) = \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1 + a_3) \frac{du_r}{rdr},$$

которое следует из второго уравнения (4.1). Таким образом, приходим к результирующему виду дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 u_r}{dr^3} + \frac{A}{r} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{B}{r^2} \frac{du_r}{dr} = 0 \quad (4.5)$$

относительно искомой функции радиальных перемещений u_r , где коэффициенты

$$\begin{aligned} A &= 3 + a_3 \frac{1 - a_2}{a_4 - a_2}, \\ B &= \frac{a_4(1 - a_1) + (a_3 - a_2)(1 + a_3)}{a_4 - a_2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

с учетом (4.2). Частные решения дифференциального уравнения (4.5) ищем в виде $u_r = r^n$, после подстановки которого в (4.5) получим характеристическое уравнение

$$n(n-1)(n-2) + An(n-1) + Bn = 0$$

или в виде

$$n[n^2 + B - 1] = 0, \quad (4.7)$$

корни которого

$$n_1 = 0, \quad n_{2,3} = \pm \sqrt{1 - B} \quad (4.8)$$

с учетом (4.6). В рассматриваемом случае (для пьезоэлектрической области) имеем действительные значения корней $n_{2,3}$ (4.7), (4.8), поэтому искомое решение —

$$u_r = C_1 r^{n_2} + C_2 r^{n_3} + C_3. \quad (4.9)$$

Далее в результате подстановки найденного решения (4.9) в уравнение (4.3) получим

$$\begin{aligned} a_3 a_4 \frac{d\phi}{dr} &= \{(a_4 - a_2)n_2(n_2 - 1) + [a_4 - a_2(1 + a_3)]n_2 - a_1 a_4\} C_1 r^{n_2-1} + \\ &+ \{(a_4 - a_2)n_3(n_3 - 1) + [a_4 - a_2(1 + a_3)]n_3 - a_1 a_4\} C_2 r^{n_3-1} - a_1 a_4 C_3 r^{-1} \end{aligned}$$

или в виде

$$\frac{d\phi}{dr} = A' C_1 r^{n_2-1} + B' C_2 r^{n_3-1} + D' C_3 r^{-1},$$

решение которого —

$$\phi = C_1 \frac{A'}{n_2} r^{n_2} + C_2 \frac{B'}{n_3} r^{n_3} + C_3 D' \ln r + C_4, \quad (4.10)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{a_4 - a_2}{a_3 a_4} n_2^2 - \frac{a_2}{a_4} n_2 - \frac{a_1}{a_3}, \\
B' &= \frac{a_4 - a_2}{a_3 a_4} n_3^2 - \frac{a_2}{a_4} n_3 - \frac{a_1}{a_3}, \\
D' &= -\frac{a_1}{a_3}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

с учетом (4.2), $C_1, \dots, C_4$ константы интегрирования.

Таким образом, найденные функции u_r , ϕ радиального перемещения u_r (4.9) и электрического потенциала ϕ (4.10) являются общим решением осесимметричной связанной краевой задачи электроупругости (4.1) для пьезоэлектрического трансверсально-изотропного цилиндрического слоя с радиальной поляризацией. Соответствующие найденным полям u_r , ϕ общие решения для деформаций (3.2)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= C_1 n_2 r^{n_2-1} + C_2 n_3 r^{n_3-1}, \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= C_1 r^{n_2-1} + C_2 r^{n_3-1} + C_3 r^{-1}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

и электрической напряженности

$$-\hat{E}_r = C_1 A' r^{n_2-1} + C_2 B' r^{n_3-1} + C_3 D' r^{-1} \tag{4.13}$$

и, далее, с учетом (3.4) для напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= C_1 r^{n_2-1} (c_{13} + n_2 c_{33} + A' e_{33}) + C_2 r^{n_3-1} (c_{13} + n_3 c_{33} + B' e_{33}) + \\
&\quad + C_3 r^{-1} (c_{13} + D' e_{33}),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= C_1 r^{n_2-1} (c_{11} + n_2 c_{13} + A' e_{31}) + C_2 r^{n_3-1} (c_{11} + n_3 c_{13} + B' e_{31}) + \\
&\quad + C_3 r^{-1} (c_{11} + D' e_{31}),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= C_1 r^{n_2-1} (c_{12} + n_2 c_{13} + A' e_{31}) + C_2 r^{n_3-1} (c_{12} + n_3 c_{13} + B' e_{31}) + \\
&\quad + C_3 r^{-1} (c_{12} + D' e_{31})
\end{aligned} \tag{4.16}$$

и электрической индукции

$$\begin{aligned}
\hat{D}_r &= C_1 r^{n_2-1} (e_{31} + n_2 e_{33} - A' \lambda_3) + C_2 r^{n_3-1} (e_{31} + n_3 e_{33} - B' \lambda_3) + \\
&\quad + C_3 r^{-1} (e_{31} - D' \lambda_3).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2. Общие решения для жилы и внешнего слоя. Общие решения для изотропных областей электропроводной жилы ($0 < r < a_0$) и внешнего полимерного слоя связующего ($a < r < b$) запишем как частные случаи полученных ранее решений (4.9), (4.12), (4.14) (4.16) с учетом равенств: $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$ (4.2), $A = 3$, $B = 0$ (4.6), $n_{2,3} = \pm 1$ (4.8) для этих случаев. В частности, с учетом ограниченности решения в центре ($r = 0$) для электропроводной жилы имеем

$$\begin{aligned}
 u_{(e)r} &= C_{(e)1}r, \\
 \varepsilon_{(e)rr} &= \varepsilon_{(e)\theta\theta} = C_{(e)1}, \\
 \sigma_{(e)rr} &= \sigma_{(e)\theta\theta} = C_{(e)1}(c_{(e)13} + c_{(e)33}), \\
 \sigma_{(e)zz} &= C_{(e)1}(c_{(e)12} + c_{(e)13})
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

и для внешнего полимерного слоя (матрицы)

$$\begin{aligned}
 u_{(m)r} &= C_{(m)1}r + C_{(m)2}r^{-1}, \\
 \varepsilon_{(m)rr} &= C_{(m)1} - C_{(m)2}r^{-2}, \quad \varepsilon_{(m)\theta\theta} = C_{(m)1} + C_{(m)2}r^{-2}, \\
 \sigma_{(m)rr} &= C_{(m)1}(c_{(m)13} + c_{(m)33}) + C_{(m)2}(c_{(m)13} - c_{(m)33})r^{-2}, \\
 \sigma_{(m)\theta\theta} &= C_{(m)1}(c_{(m)11} + c_{(m)13}) + C_{(m)2}(c_{(m)11} - c_{(m)13})r^{-2}, \\
 \sigma_{(m)zz} &= C_{(m)1}(c_{(m)12} + c_{(m)13}) + C_{(m)2}(c_{(m)12} - c_{(m)13})r^{-2}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

4.3. Определение констант интегрирования. Константы интегрирования: $C_1, \dots, C_4$ (4.9), (4.10), (4.12) (4.17), $C_{(e)1}$ (4.18), $C_{(m)1}$, $C_{(m)2}$ (4.19), (4.20) определим из 3-х условий электромеханического нагружения (3.5) (3.7) по заданным значениям управляющего электрического напряжения U_{con} на электродах, механического напряжения σ_* или перемещения u_* на внешнем контуре и 4-х условий идеального контакта на межфазных поверхностях (3.8), (3.9).

Таким образом, из условия $\sigma_{(e)rr} = \sigma_{rr}$ (3.8) при $r = a_0$ с учетом вида решений (4.14), (4.18) следует равенство

$$\begin{aligned}
 &-C_{(e)1}(c_{(e)13} + c_{(e)33}) + C_1 a_0^{n_2-1}(c_{13} + n_2 c_{33} + A'e_{33}) + \\
 &+ C_2 a_0^{n_3-1}(c_{13} + n_3 c_{33} + B'e_{33}) + C_3 a_0^{-1}(c_{13} + D'e_{33}) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

из условия $u_{(e)r} = u_r$ (3.8) с учетом (4.9), (4.18) при $r = a_0$

$$-C_{(e)1}a_0 + C_1 a_0^{n_2} + C_2 a_0^{n_3} + C_3 = 0, \tag{4.22}$$

из условия $\sigma_{rr} = \sigma_{(m)rr}$ (3.9) с учетом (4.14), (4.20) при $r = a$

$$\begin{aligned}
 &C_1 a^{n_2-1}(c_{13} + n_2 c_{33} + A'e_{33}) + C_2 a^{n_3-1}(c_{13} + n_3 c_{33} + B'e_{33}) + \\
 &+ C_3 a^{-1}(c_{13} + D'e_{33}) - C_{(m)1}(c_{(m)13} + c_{(m)33}) - C_{(m)2}a^{-2}(c_{(m)13} - c_{(m)33}) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

из условия $u_r = u_{(m)r}$ (3.9) с учетом (4.9), (4.19) при $r = a$

$$C_1 a^{n_2} + C_2 a^{n_3} + C_3 - C_{(m)1}a - C_{(m)2}a^{-1} = 0, \tag{4.24}$$

из условия $\phi = U_{\text{con}}$ (3.5) с учетом (4.10) при $r = a_0$

$$C_1 \frac{A'}{n_2} a_0^{n_2} + C_2 \frac{B'}{n_3} a_0^{n_3} + C_3 D' \ln a_0 + C_4 = U_{\text{con}} \tag{4.25}$$

из условия $\phi = 0$ (3.5) с учетом (4.10) при $r = a$

$$C_1 \frac{A'}{n_2} a^{n_2} + C_2 \frac{B'}{n_3} a^{n_3} + C_3 D' \ln a + C_4 = 0, \quad (4.26)$$

из условия $\sigma_{(m)rr} = \sigma_\bullet$ (3.6) с учетом (4.20) при $r = b$

$$C_{(m)1}(c_{(m)13} + c_{(m)33}) + C_{(m)2}(c_{(m)13} - c_{(m)33})b^{-2} = \sigma_\bullet, \quad (4.27)$$

или из условия $u_{(m)r|r=b} = u_\bullet$ (3.7) с учетом (4.19)

$$C_{(m)1}b + C_{(m)2}b^{-1} = u_\bullet. \quad (4.28)$$

Константы интегрирования: $C_1, \dots, C_4$ (4.9), (4.10), (4.12) (4.17), $C_{(e)1}$ (4.18), $C_{(m)1}, C_{(m)2}$ (4.19), (4.20) определим из системы семи линейных алгебраических уравнений (4.21) (4.27)

$$\begin{aligned} a_{11}C_{(e)1} + a_{12}C_1 + a_{13}C_2 + a_{14}C_3 + a_{15}C_4 + a_{16}C_{(m)1} + a_{17}C_{(m)2} &= b_1, \\ &\dots \\ a_{71}C_{(e)1} + a_{72}C_1 + a_{73}C_2 + a_{74}C_3 + a_{75}C_4 + a_{76}C_{(m)1} + a_{77}C_{(m)2} &= b_7, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где отличные от нуля компоненты матрицы $[a]$ и вектор-столбца $\{b\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -c_{(e)13} - c_{(e)33}, \quad a_{12} = a_0^{n_2-1}(c_{13} + n_2 c_{33} + A' e_{33}), \\ a_{13} &= a_0^{n_3-1}(c_{13} + n_3 c_{33} + B' e_{33}), \quad a_{14} = a_0^{-1}(c_{13} + D' e_{33}), \\ a_{21} &= -a_0, \quad a_{22} = a_0^{n_2}, \quad a_{23} = a_0^{n_3}, \quad a_{24} = 1, \\ a_{32} &= a^{n_2-1}(c_{13} + n_2 c_{33} + A' e_{33}), \quad a_{33} = a^{n_3-1}(c_{13} + n_3 c_{33} + B' e_{33}), \\ a_{34} &= a^{-1}(c_{13} + D' e_{33}), \quad a_{36} = -c_{(m)13} - c_{(m)33}, \quad a_{37} = -a^{-2}(c_{(m)13} - c_{(m)33}), \\ a_{42} &= a^{n_2}, \quad a_{43} = a^{n_3}, \quad a_{44} = 1, \quad a_{46} = -a, \quad a_{47} = -a^{-1}, \\ a_{52} &= \frac{A'}{n_2} a_0^{n_2}, \quad a_{53} = \frac{B'}{n_3} a_0^{n_3}, \quad a_{54} = D' \ln a_0, \quad a_{55} = 1, \quad b_5 = U_{\text{con}}, \\ a_{62} &= \frac{A'}{n_2} a^{n_2}, \quad a_{63} = \frac{B'}{n_3} a^{n_3}, \quad a_{64} = D' \ln a, \quad a_{65} = 1, \end{aligned} \quad (4.30)$$

седьмая строка для случая

$$\begin{aligned} \sigma_{(m)rr|r=b} &= \sigma_\bullet, \\ a_{76} &= c_{(m)13} + c_{(m)33}, \quad a_{77} = (c_{(m)13} - c_{(m)33})b^{-2}, \quad b_7 = \sigma_\bullet, \end{aligned} \quad (4.31)$$

или для случая $u_{(m)r|r=b} = u_{\bullet}$ (3.7) –

$$a_{76} = b, \quad a_{77} = b^{-1}, \quad b_7 = u_{\bullet}. \quad (4.32)$$

Отметим, что для пьезоэлектрического слоя выполняется равенство

$$\int_{a_0}^a \hat{E}_r dr = U_{\text{con}}.$$

5. Эффективные пьезоэлектрические коэффициенты. Тензор эффективных пьезоэлектрических напряжений (2.4) композитного FibrCD-актюатора

$$\beta^* \equiv -\langle \sigma \rangle / U_{\text{con}} \quad (5.1)$$

определим через осредненные или «макроскопические» осесимметричные напряжения $\langle \sigma \rangle$ составной ячейки

$$\langle \sigma_{i'j'} \rangle = \bar{\sigma} \delta_{i'j'} + (\bar{\sigma}_{3'} - \bar{\sigma}) \delta_{i'3'} \delta_{j'3'}, \quad (5.2)$$

для случая $\langle \epsilon \rangle = 0$, т.е. при неподвижном внешнем контуре ($u_{\bullet} = 0$) и неподвижных торцов составной ячейки (4.32); здесь индекс $3'$ соответствует направлению продольной оси $r_{3'} \equiv z$ пьезоэлектрического кабеля и совпадает с окружной координатной линией диска актюатора, r_1, r_2 , плоскость изотропии эффективных трансверсально-изотропных электроупругих свойств волокнистого композита, $\delta_{i'j'}$, символы Кронекера. В формуле (5.2) использованы обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &\equiv \sigma_{(m)r|r=b} = C_{(m)1}(c_{(m)13} + c_{(m)33}) + C_{(m)2}b^{-2}(c_{(m)13} - c_{(m)33}), \\ \bar{\sigma}_{3'} &= c_e \sigma_{(e)3'} + c_p \bar{\sigma}_{(p)3'} + c_m \sigma_{(m)3'}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

для случая $u_{\bullet} = 0$, $U_{\text{con}} \neq 0$ (3.5), (3.7), (4.32). Тензор пьезоэлектрических напряжений (5.1) допускает выражение своих компонент

$$\beta_{i'j'}^* \equiv -\langle \sigma_{i'j'} \rangle / U_{\text{con}} = \beta_{1'}^* \delta_{i'j'} + (\beta_{3'}^* - \beta_{1'}^*) \delta_{i'3'} \delta_{j'3'}, \quad (5.4)$$

через независимые эффективные продольный $\beta_{3'}^*$ и поперечный $\beta_{1'}^*$ коэффициенты. В (5.3) макроскопическое продольное напряжение $\bar{\sigma}_{3'}$, это осредненное по поперечному сечению составной ячейки значение, которое рассчитывается через величины: $\sigma_{(e)3'}$, $\bar{\sigma}_{(p)3'}$, $\sigma_{(m)3'}$ осредненные по каждой из подобластей: жиле, пьезоэлектрическому слою и внешнему полимерному слою значения ранее полученных решений $\sigma_{(e)zz}$ (4.18), σ_{zz} (4.16), $\sigma_{(m)zz}$ (4.20) с учетом равенств $\sigma_{(e)3'} = \bar{\sigma}_{(e)3'} = \sigma_{(e)zz}$ в силу однородности напряженно-деформированного состояния электропроводной жилы. Осредненное по пьезоэлектрическому ($a_0 < r < a$) слою величина продольных напряжений имеет вид

$$\bar{\sigma}_{(p)3'} = C_1 \kappa_{1p}(c_{12} + n_2 c_{13} + A' e_{31}) + C_2 \kappa_{2p}(c_{12} + n_3 c_{13} + B' e_{31}) + C_3 \kappa_{3p}(c_{12} + D' e_{31}),$$

с учетом (4.16), где коэффициенты

$$\begin{aligned} \kappa_{1p} &\equiv \left\langle r^{n_2-1} \right\rangle_p = \frac{2}{n_2+1} \frac{a^{n_2+1} - a_0^{n_2+1}}{a^2 - a_0^2}, \\ \kappa_{2p} &\equiv \left\langle r^{n_3-1} \right\rangle_p = \frac{2}{n_3+1} \frac{a^{n_3+1} - a_0^{n_3+1}}{a^2 - a_0^2}, \quad \kappa_{3p} \equiv \left\langle r^{-1} \right\rangle_p = \frac{2}{a + a_0}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

относительные объемные доли

$$c_e = \left(\frac{a_0}{b} \right)^2, \quad c_p = \left(\frac{a}{b} \right)^2 - c_e, \quad c_m = 1 - c_e - c_p \quad (5.6)$$

элементов структуры (слоев) составной ячейки (рис. 3). Эффективный коэффициент пьезоэлектрического расширения в плоскости изотропии r_1, r_2 композита

$$\alpha^* = \varepsilon_{(m)00|r=b} / U_{\text{con}} \quad (5.7)$$

для случая $U_{\text{con}} \neq 0$, $\sigma_{\bullet} = 0$ (3.6), (4.31). Полученное осесимметричное решение (4.9) (4.32) для области составной ячейки (рис. 3, а) может быть использовано для нахождения лишь двух из пяти независимых эффективных упругих констант FibrCD-актюатора

$$k^* \equiv (c_{11}^* + c_{12}^*) / 2 = \langle \sigma \rangle / (2\varepsilon_{\bullet}), \quad c_{13}^* = c_{23}^* = \langle \sigma_{zz} \rangle / (2\varepsilon_{\bullet}) \quad (5.8)$$

при заданных значениях: $\varepsilon_{\bullet} \equiv u_{\bullet}/b \neq 0$, $U_{\text{con}} = 0$ с учетом $\varepsilon_{zz} = 0$ (3.5), (3.7), (4.32), где k^* — объемный модуль плоской деформации в плоскости r_1, r_2 , использованы обозначения: $c_{11}^* = c_{1111}^*$, $c_{12}^* = c_{1122}^*$, $c_{23}^* = c_{2233}^*$, компонент $c_{ij'm'n}^*$ тензора эффективных упругих свойств в координатных осях $r_1, \dots, r_3$, ось симметрии свойств, выполняется равенство $\beta_{ij'}^* = c_{ij'm'n}^* \alpha_{m'n}^*$. Отметим, что пьезоэлектрические коэффициенты α^* , β^* входят в определяющие соотношения (2.4) подхода термоанalogии [39], согласно которому величина управляющего электрического напряжения U_{con} , приложенного к выходам электродов актюатора, отождествляется с приращением температуры ΔT , т.е. «нагревом» гомогенной области, например, дискового или кольцевого актюатора (рис.1) с эффективными «термоупругими» свойствами.

6. Результаты численного моделирования. Осуществим расчет и численный анализ упругих и электрических полей внутри составной ячейки при различных случаях ее электромеханического нагружения ($\sigma_{\bullet}, u_{\bullet}, U_{\text{con}}$) и прогнозирование эффективных упругих k^* , c_{13}^* и пьезоэлектрических α^* , β_1^* , β_3^* констант (5.1) (5.8) композитного FibrCD-актюатора (рис.1). Электроупругие постоянные керамики PZT-5 приведены в табл. 1 [1, 2], модули Юнга и коэффициенты Пуассона изотропных упругих свойств электропроводной жилы: $E_{(e)} = 80$ ГПа, $\nu_{(e)} = 0.37$ (серебро) и эпоксидного связующего: $E_{(m)} = 20$ ГПа, $\nu_{(m)} = 0.35$. На рис. 4–6 даны графики распределений электроупругих полей по радиальной координате r при значениях радиусов: $a_0 = 0.1$ мм, $a = 0.15$ мм, $b = 0.17$ мм и различных условиях нагружения: $\sigma_{\bullet} = 10$ МПа, $U_{\text{con}} = 0$ В (рис. 4), $U_{\text{con}} \neq 0$ (рис. 5, 6) составной ячейки. На рис. 5 графики функций, полученные

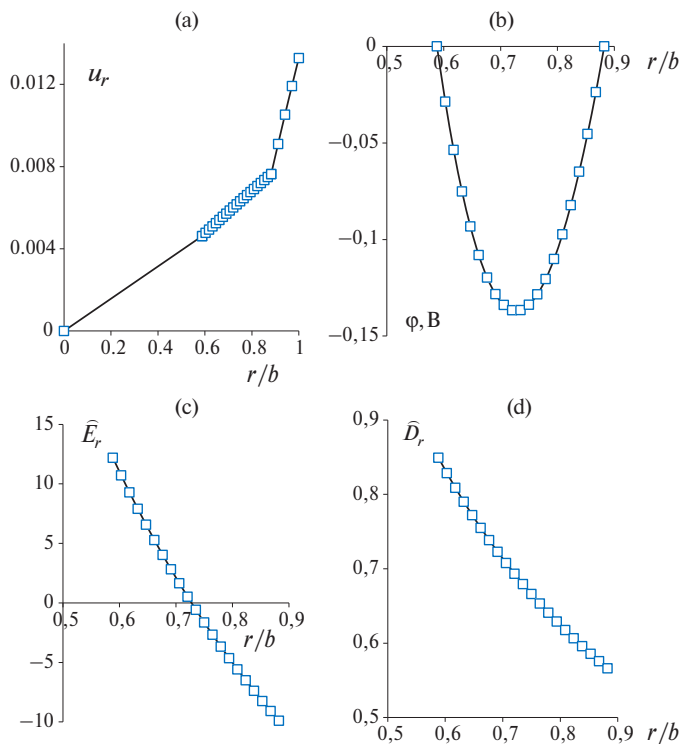


Рис. 4. Функции перемещения u_r [мкм] (а), электрического потенциала ϕ [В] (б), напряженности $\hat{E}_r$ [кВ/мм] (с) и индукции $\hat{D}_r$ [мКл/м²] (д) по радиальной координате r пьезоэлектрического слоя составной ячейки при $\sigma_* = 10$ МПа, $U_{\text{con}} = 0$ В.

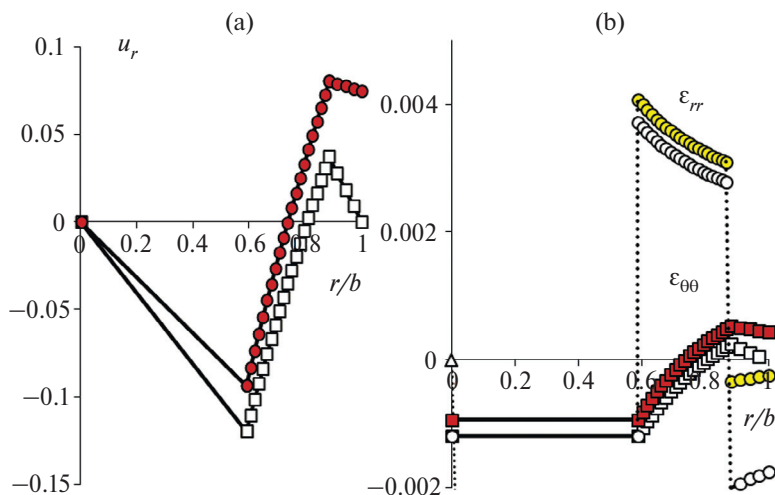


Рис. 5. Функции перемещения u_r [мкм] (а), радиальной ϵ_{rr} и окружной $\epsilon_{\theta\theta}$ деформаций (б) по радиальной координате r составной ячейки при $U_{\text{con}} = 1500$ В.

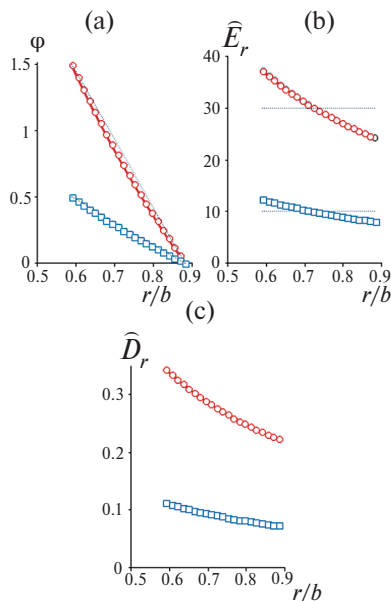


Рис. 6. Функции электрического потенциала ϕ [кВ] (а), напряженности $\hat{E}_r$ [кВ/мм] (б) и индукции $\hat{D}_r$ [Кл/м²] (с) по радиальной координате r пьезоэлектрического слоя при $U_{\text{con}} = 1500$ В ($\circ$), 500 В ($\square$); пунктирная линия — линейная аппроксимация (для сравнения).

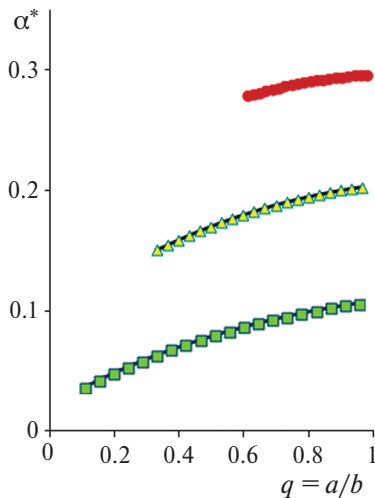


Рис. 7. Эффективный коэффициент α^* [мкВ^{-1}] пьезоэлектрического расширения компонента при $a_0 = 0.1$ ($\circ$), 0.05 (Δ), 0.01 ($\square$) [мм].

для различных граничных условий: $\sigma_{\bullet} = 0$ или $u_{\bullet} = 0$ на внешнем контуре составной ячейки при $U_{\text{con}} = 1500$ В, обозначены маркерами с заливкой (цветные) и без заливки (белые) соответственно. При этом для случаев на рис. 6

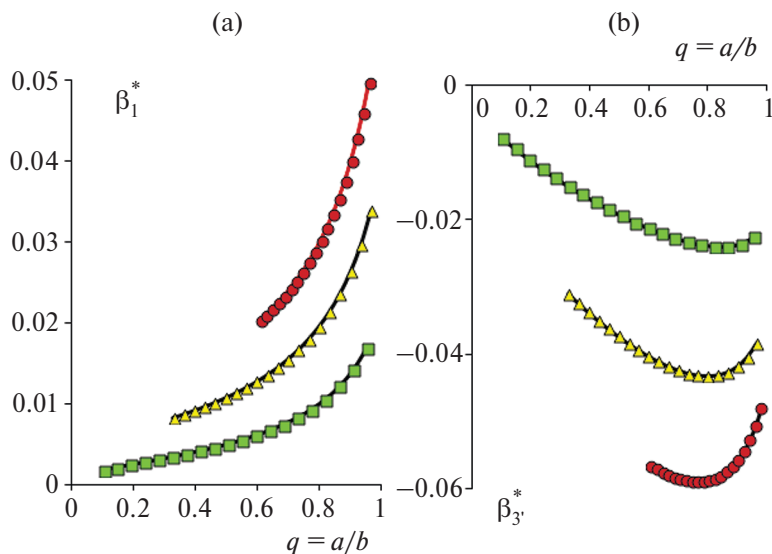


Рис. 8. Эффективные коэффициенты β_1^* (а), β_3^* (б) [МПа/В] пьезоэлектрических напряжений композита при $a_0 = 0.1$ (о), 0.05 (Δ), 0.01 ($\square$) [мм].

Таблица 1. Электроупругие свойства пьезокерамики PZT-5

Упругие постоянные, ГПа					Относительные диэлектрические постоянные		Пьезоэлектрические постоянные, Кл/м ²		
c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	λ_1/λ_0	λ_3/λ_0	e_{31}	e_{33}	e_{15}
121	75.4	75.2	111	21.1	916	830	-5.4	15.8	12.3

($U_{\text{con}} = 1500$ В, 500 В) установлено, что на графики электрического потенциала ϕ (рис. 6, а), напряженности $\bar{E}_r$ (рис. 6, б) и индукции $\bar{D}_r$ (рис. 6, в) практически не влияет различие задаваемых граничных механических условий: $\sigma_r = 0$ или $u_r = 0$ на внешнем контуре составной ячейки. В табл. 2 численные значения эффективных упругих и пьезоэлектрических констант композита (рис. 3, б) также получены для случая $a_0 = 0.1$ мм, $a = 0.15$ мм, $b = 0.17$ мм. На рис. 7, 8 даны графики зависимостей эффективных коэффициентов пьезоэлектрического расширения α^* (рис. 7) и пьезоэлектрических напряжений β_1^* , β_3^* (рис. 8) композита от структурного параметра $q = a/b$ при различных значениях радиуса электропроводной жилы a_0 с учетом области допустимых значений $q \in (q_0; 1)$, где начальное значение $q_0 = a_0/b$.

Для случая традиционных схем размещения электродов на поверхностях однородных пьезоэлектрических пластин, например, при установке электродов на основаниях пьезоэлемента в виде круглой пластины с поляризацией по ее толщине вдоль оси r_3 при $\epsilon_{33} = 0$ аналог коэффициента α^* (5.7) запишем в виде

Таблица 2. Эффективные упругие и пьезоэлектрические константы композита

k^*	$c_{13}^* = c_{23}^*$	α^*	β_1^*	β_3^*
ГПа		мкВ ⁻¹	МПа/В	
64.011	48.295	0.2939	0.0376	-0.0567

$$\tilde{\alpha} \approx (d_{31} + \nu_{13}d_{33}) / h \quad (6.1)$$

где значения деформационных пьезомодулей: $d_{33} = 0.3732$ нм/В, $d_{31} = -0.1704$ нм/В (2.2), коэффициент Пуассона $\nu_{13} = 0.383$ для керамики PZT-5 (табл. 1). Аналоги: $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3$ коэффициентов $\beta_1^* = \beta_2^*, \beta_3^*$, где в цилиндрической системе координат индексы 1 и 2 соответствуют радиальному и осевому, а индекс 3 — окружному направлениям координатных линий диска (рис. 1) запишем для двух случаев размещения электродов. В первом случае электроды установлены на верхнем и нижнем основаниях (торцах) дисковой (рис. 1, а) или кольцевой (рис. 1, б) пластины с поляризацией по толщине

$$\tilde{\beta}_1' = \tilde{\beta}_3' \approx e_{31}' / h, \quad \tilde{\beta}_2' \approx e_{33}' / h, \quad (6.2)$$

а во втором случае на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях кольцевой пластины с поляризацией по радиусу (рис. 1, б)

$$\tilde{\beta}_1'' \approx e_{33}'' / \Delta_R, \quad \tilde{\beta}_2'' = \tilde{\beta}_3'' \approx e_{31}'' / \Delta_R \quad (6.3)$$

где h — толщина пластины, Δ_R — разность внешнего и внутреннего радиусов кольцевой пластины. Преимущество предложенного пьезоэлектрического катушечного композитного FibrCD-актюатора перед подобными традиционными дисковыми актюаторами оценим по значениям коэффициентов эффективности вида: $\zeta \equiv \alpha^* / \tilde{\alpha}$, $\zeta_i' \equiv \beta_i^* / \tilde{\beta}_i'$ и $\zeta_i'' \equiv \beta_i^* / \tilde{\beta}_i''$, в частности, для актюаторов с торцевыми плоско-параллельными электродами

$$\zeta_1' = \frac{\beta_1^*}{e_{31}'} h, \quad \zeta_2' = \frac{\beta_1^*}{e_{33}'} h, \quad \zeta_3' = \frac{\beta_3^*}{e_{31}'} h \quad (6.4)$$

или концентрическими цилиндрическими электродами

$$\zeta_1'' = \frac{\beta_1^*}{e_{33}''} \Delta_R, \quad \zeta_2'' = \frac{\beta_1^*}{e_{31}''} \Delta_R, \quad \zeta_3'' = \frac{\beta_3^*}{e_{31}''} \Delta_R \quad (6.5)$$

где e_{33}, e_{31} пьезомодули керамики PZT-5 (табл. 1). Например, при значениях параметров: $h = \Delta_R = 10$ мм имеем для FibrCD-актюатора значения коэффициентов эффективности: $\zeta \approx -107$, $\zeta_1' = \zeta_2'' \approx -70$, $\zeta_2' = \zeta_1'' \approx 24$, $\zeta_3' = \zeta_3'' \approx 105$ с учетом данных в табл. 1, 2; при этом знак этих коэффициентов может быть изменен сменой знака управляющего электрического напряжения U_{con} на выходах электродов.

Заключение. Разработана микроструктурная модель композитного пьезоволоконного катушечного дискового FibrCD-актюатора (рис. 1, 2) [18] и с использованием подхода [28] получено точное аналитическое решение

связанной краевой задачи электроупругости для деформационного и электрического полей внутри его элементарной составной ячейки типа «пьезоэлектрический кабель/оболочка связующего» (рис. 3, а) в рамках полидисперсной модели (рис. 3, б) волоконной структуры актюатора. Электромеханическое нагружение составной ячейки осуществляется приложением управляющего электрического напряжения U_{con} к электродам кабеля и граничными условиями (σ_*, u_*) на его внешнем контуре. Точные решения для электроупругих полей (4.9), (4.10), (4.12)–(4.17) как функций радиальной координаты r внутри составной ячейки (рис. 3, а) использованы далее для нахождения аналитических решений (2.4), (5.1) (5.7) эффективных коэффициентов пьезоэлектрического линейного расширения α^* и пьезоэлектрических напряжений β^* FibrCD-актюатора (рис. 1) с цилиндрической анизотропией, когда ось симметрии эффективных электроупругих свойств волокнистого катушечного композита ориентирована по окружной координате актюатора. Графики на рис. 4 иллюстрируют существенную нелинейность распределения электрического потенциала ϕ по радиальной координате r для случая растяжения напряжением σ_* в поперечной плоскости составной ячейки при отсутствии управляющего электрического напряжения, $U_{\text{con}} = 0$. Установлено, что большие значения задаваемого управляющего электрического напряжения U_{con} , в частности, 500 или 1500 В на электродах обуславливают близкое к линейному распределение электрического потенциала ϕ по радиальной координате r (рис. 6, а). Осуществлен расчет и численный анализ коэффициентов α^* , β_j^* FibrCD-актюатора в сравнении с аналогичными характеристиками традиционных актюаторов (6.1)–(6.5) при различных значениях макроскопических и структурных геометрических параметров FibrCD-актюатора, в частности, толщины h диска или кольца, разности внешнего и внутреннего радиусов Δ_R кольца, относительных размеров толщины слоя полимерного связующего (как минимальной гарантированной прослойки связующего между витками) составной ячейки и радиуса электропроводной жилы a_0 пьезоэлектрического кабеля. Выявлено, что при значениях управляющего электрического напряжения $U_{\text{con}} > 0$ составная ячейка, в целом, осесимметрично расширяется, но при этом жила внутри ячейки находится в состоянии всестороннего сжатия в трансверсальной плоскости (рис. 5). При смене знака управляющего электрического напряжения, т.е. при $U_{\text{con}} < 0$ имеем сжатие составной ячейки и растяжение жилы в трансверсальной плоскости. Зависимости эффективных коэффициентов α^* , β_1^* , составной ячейки от параметра $q = a/b$ относительного значения толщины пьезоэлектрического слоя имеют монотонный характер (рис. 7, 8, а). Немонотонный характер зависимости от параметра q имеет лишь величина β_3^* (рис. 8, б) с наличием ярко выраженных экстремумов. Выявлено увеличение абсолютных значений всех коэффициентов α^* , β_1^* , β_3^* при уменьшении толщины пьезоэлектрического слоя при фиксированном значении внешнего радиуса составной ячейки (рис. 7, 8).

Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика. Т.1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
2. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультразвуке. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 448 с.
3. Панич А.Е. Пьезокерамические актюаторы. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. 160 с.
4. Performance-driven control of nano-motions systems / by Roel J.E. Merry. Eindhoven University of Technology, 2009. 285 p.
5. Pan'kov A.A. Piezoelectroluminescent fiber-optic sensors for temperature and deformation fields // Sensors and Actuators A: Physical. 2019. V. 288. P. 171–176.
<https://doi.org/10.1016/j.sna.2019.01.030>
6. Patent US 2003/0056351 A1. Piezoelectric Macro-Fiber Composite Actuator and Method for Making Same / Wilkie W.K., et al. Application Publ. March 27, 2003.
7. Патент RU № 2803015. Пьезоэлектрический MDS-актюатор / Паньков А.А., Опубликовано: 05.09.2023 Бюл. № 25, заявка № 2023109123 от 11.04.2023 г.
8. Патент RU № 2801619. Пьезоэлектрический CDS-актюатор / Паньков А.А., Опубликовано: 11.08.2023 Бюл. № 23, заявка № 2023111440 от 03.05.2023 г.
9. Патент RU № 2811420. Способ изготовления пьезоэлектрического актюатора / Паньков А.А., Опубликовано: 11.01.2024 Бюл. № 2, заявка № 2023127236 от 24.10.2023 г.
10. Патент RU № 2811455. Пьезоэлектрический актюатор / Паньков А.А., Опубликовано: 11.01.2024 Бюл. № 2, заявка № 2023113448 от 24.05.2023 г.
11. Emad D., Fanni M.A., Mohamed A.M., Yoshida S. Low-computational-cost technique for modeling macro fiber composite piezoelectric actuators using finite element method // Materials (Basel). 2021. V. 14. № 15. P. 4316.
<https://doi.org/10.3390/ma14154316>
12. Park J.-S., Kim J.-H. Analytical development of single crystal Macro Fiber Composite actuators for active twist rotor blades // Smart Mater. Struct. 2005. V. 14. № 4. P. 745–753.
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/14/4/033>
13. Сертификат RU № 2018666421. Компьютерная программа “MFC PROPERTIES” (MFSP) / Писарев П.В., Аношкин А.Н., Паньков А.А. Опубликовано: 17.12.2018. заявка № 2018663978 от 05.12.2018.
14. Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Bayandin S.R. Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2021. V. 1093. P. 012023.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/1093/1/012023>
15. Патент RU № 2811455. Пьезоэлектрический актюатор / Паньков А.А., Опубликовано: 11.01.2024 Бюл. № 2, заявка № 2023113448 от 24.05.2023 г.
16. Патент RU № 2811499. Пьезоэлектрический актюатор / Паньков А.А., Опубликовано: 12.01.2024 Бюл. № 2, заявка № 2023114457 от 01.06.2023 г.
17. Pan'kov A.A. Membrane piezoelectric MDS-actuator with a flat double helix of interacting electrodes // Mech. Solids. 2024. V. 59. № 2. P. 664–678.
<http://doi.org/10.1134/S0025654423601349>
18. Патент RU № 2793564. Пьезоэлектрический биморф изгибного типа / Паньков А.А. Опубликовано: 04.04.2023 Бюл. № 10, заявка № 2022129727 от 16.11.2022 г.
19. Патент RU № 2827058. Пьезоэлектрический FibrCD-актюатор / Паньков А.А., Опубликовано: 23.09.2024 Бюл. № 27; заявка № 2024102307 от 30.01.2024 г.

20. Patent US № 4629925. Piezoelectric coaxial cable / *M. Booth, R.J. Penneck*, Application Date: 20.11.1984. Publication Date: 16.12.1986. 8 p. <https://patents.google.com/patent/US4629925A/en>
21. Patent US № 4609845. Stretched piezoelectric polymer coaxial cable / *P.L. Soni, N.R. Farrar*. Application Date: 06.07.1984. Publication Date: 02.09.1986. 7 p. <https://insight.rpxcorp.com/patent/US4609845A>
22. *Паньков А.А.* Пьезокомпозиты и датчики: монография в 3-х частях / Часть 1. Статистическая механика пьезокомпозитов. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2022. 234 с.
23. *Паньков А.А.* Пьезокомпозиты и датчики: монография в 3-х частях / Часть 2. Пирозлектромагнитные эффекты композитов. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2023. 211 с.
24. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
25. *Ватульян А.О., Кирютенко А.Ю., Наседкин А.В.* Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектрoупругости // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 5. С. 135–142.
26. *Шульга Н.А.* Радиальные электромеханические нестационарные колебания полого пьезокерамического цилиндра при электрическом возбуждении // Прикладная механика. 2009. Т. 45. № 2. С. 30–35.
27. *Григоренко А.А., Лоза И.А.* О свободных неосесимметричных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с радиальной поляризацией // Прикладная механика. 2010. Т. 46. № 11. С. 20–30.
28. *Шляхин Д.А.* Нестационарная осесимметричная задача электрoупругости для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 1. С. 73–81.
29. *He T., Tian X., Shen Y.* A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // Eur. J. Mech.-A-Solid. 2005. V. 24. № 2. P. 349–359. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.001>
30. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* Динамическая задача термоэлектрoупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 117–126. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>
31. *Шляхин Д.А., Кальмова М.А.* Связанная нестационарная задача термоэлектрoупругости для длинного полого цилиндра // Вестн. Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 677–691. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>
32. *Белоконь А.В., Скалух А.С.* Математическое моделирование необратимых процессов поляризации. М.: Физматлит, 2010. 328 с.
33. *Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Nassar M.E.* Homogenization of porous piezocomposites with extreme properties at pore boundaries by effective moduli method // Mech.Solids. 2020. V. 55. P. 827–836. <https://doi.org/10.3103/S0025654420050131>
34. *Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Rybyanets A.N.* Numerical analysis of effective properties of heterogeneously polarized porous piezoceramic materials with local alloying pore surfaces // Mater. Phys. Mech. 2018. V. 40. № 1. P. 12–21. http://dx.doi.org/10.18720/MPM.4012018_3

35. Паньков А.А., Писарев П.В. Численное моделирование в ANSYS электроупругих полей в пьезоэлектролюминесцентном оптоволоконном датчике диагностирования объемного деформированного состояния композита // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. № 3. С. 153–166.
36. Победра Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. университета, 1984. 336 с.
37. Гетман И.П., Мольков В.А. Об эффективных характеристиках пьезоактивных композитов с цилиндрическими включениями // ПММ. 1992. Т. 56. № 3. С. 501–509.
38. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
39. Dong X.-J., Meng G. Dynamic analysis of structures with piezoelectric actuators based on thermal analogy method // Int. J. Adv. Manuf. Tech. 2006. V. 27. P. 841–844.
<https://doi.org/10.1007/s00170-004-2290-5>

ELECTROELASTICITY OF DISC PIEZOFIBROUS ACTUATOR

A. A. Pan'kov^{a, *}

^aPerm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

Abstract. A microstructural model of a coiled composite piezofiber disc (FibrCD) actuator has been developed. The actuator is formed by winding a large number of turns of thin electrode-coated piezoelectric fiber, designed as shielded single-core cable with radially polarized piezoelectric interelectrode layers. The winding is then impregnated and consolidated with a polymer binder. An exact analytical solution was obtained for the electrical and deformation fields of an axisymmetric coupled boundary problem of electroelasticity on the elementary composite cell "piezoelectric cable/binder shell." This exact solution for the electroelastic fields within the composite cell, subjected to an electric voltage applied to the cable electrodes, was subsequently used to derive exact analytical solutions for the tensors of effective piezoelectric stress coefficients and linear piezoelectric expansion (strain) of the fiber composite. These calculations treat the composite as a homogeneous material with cylindrical anisotropy, characteristic of the disc-shaped FibrCD actuator, based on the well-known polydisperse composite structure model. Calculations and numerical analysis of the FibrCD actuator's characteristics were performed for various values of its macroscopic and structural parameters, including the thickness of the disc (ring), the difference between the outer and inner radii of the ring, and the relative dimensions of the conductive core radius and the thickness of the binder layer between adjacent cable turns. The effectiveness of the FibrCD actuator was confirmed in comparison with the characteristics of conventional actuators.

Keywords: piezoelectric FibrCD actuator, electroelasticity, signal cable, fiber composite, effective properties, polydisperse model, numerical modeling.

REFERENCES

1. *Berlinkur D., Kerran D., ZHaffe G.* P'ezoelektricheskie i p'ezomagnitnye materialy i ih primeneniye v preobrazovatelyah [Piezoelectric and piezomagnetic materials and their applications in transducers] // Fizicheskaya akustika. T.1: Metody i pribory ul'trazvukovyh issledovaniy. CHast' A. Moscow: Mir, 1966. P. 204-326. (in Russian)
2. *Mezon U.* P'ezoelektricheskie kristally i ih primeneniya v ul'traakustike [Piezoelectric crystals and their applications in ultraacoustics]. Moscow: Izd—vo inostr. lit., 1952. 448 p. (in Russian)
3. *Panich A.E.* P'ezokeramicheskie aktyuatory [Piezoceramic actuators]. Rostov-on-Don: RGU, 2008. 160 p. (in Russian)
4. Performance-driven control of nano-motionsystems / by Roel J.E. Merry. — Eindhoven University of Technology, 2009. — 285 p.
5. *Pan'kov A.A.* Piezoelectroluminescent fiber-optic sensors for temperature and deformation fields // Sensors and Actuators A: Physical. 2019. V. 288. P. 171–176. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2019.01.030>
6. Patent US 2003/0056351 A1. Piezoelectric Macro-Fiber Composite Actuator and Method for Making Same / Wilkie W.K., et al. Application Publ. March 27, 2003.
7. Patent RU № 2803015. P'ezoelektricheskij MDS-aktyuator [Piezoelectric MDS-actuator] / Pan'kov A.A., Opubl.: 05.09.2023 Byul. № 25, zayavka № 2023109123 ot 11.04.2023 g. (in Russian)
8. Patent RU № 2801619. P'ezoelektricheskij CDS-aktyuator [Piezoelectric CDS-actuator] / Pan'kov A.A., Opubl.: 11.08.2023 Byul. № 23, zayavka № 2023111440 ot 03.05.2023 g. (in Russian)
9. Patent RU № 2811420. Sposob izgotovleniya p'ezoelektricheskogo aktyuatora [Manufacturing method of piezoelectric actuator] / Pan'kov A.A., Opubl.: 11.01.2024 Byul. № 2, zayavka № 2023127236 ot 24.10.2023 g. (in Russian)
10. Patent RU № 2811455. P'ezoelektricheskij aktyuator [Piezoelectric actuator] / Pan'kov A.A., Opubl.: 11.01.2024 Byul. № 2, zayavka № 2023113448 ot 24.05.2023 g. (in Russian)
11. *Emad D., Fanni M.A., Mohamed A.M., Yoshida S.* Low-Computational-Cost Technique for Modeling Macro Fiber Composite Piezoelectric Actuators Using Finite Element Method // Materials (Basel). 2021. № 14(15). P. 4316.
12. *Park J.-S., Kim J.-H.* Analytical development of single crystal Macro Fiber Composite actuators for active twist rotor blades // Smart Mater. Struct. 2005. № 14. P. 745–753. doi:10.1088/0964-1726/14/4/033
13. Sertifikat RU № 2018666421. Komp'yuternaya programma “MFC PROPERTIES” (MFCP) [Computer program “MFC PROPERTIES” (MFCP)] / Pisarev P.V., Anoshkin A.N., Pan'kov A.A., Opubl.: 17.12.2018. zayavka № 2018663978 ot 05.12.2018. (in Russian)
14. *Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Bayandin S.R.* Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. V. 1093. P. 012023.
15. Patent RU № 2811455. P'ezoelektricheskij aktyuator [Piezoelectric actuator] / Pan'kov A.A., Opubl.: 11.01.2024 Byul. № 2, zayavka № 2023113448 ot 24.05.2023 g. (in Russian)
16. Patent RU № 2811499. P'ezoelektricheskij aktyuator [Piezoelectric actuator] / Pan'kov A.A., Opubl.: 12.01.2024 Byul. № 2, zayavka № 2023114457 ot 01.06.2023 g. (in Russian)

17. *Pan'kov A.A.* Membrane piezoelectric MDS-actuator with a flat double helix of interacting electrodes // *Mechanics of Solids*. — 2024. V. 59, № 2. P. 664–678.
18. Patent RU № 2793564. P'ezoelektricheskij bimorf izgibnogo tipa [Bending-type piezoelectric bimorph] / Pan'kov A.A., Opubl.: 04.04.2023 Byul. № 10, zayavka № 2022129727 ot 16.11.2022 g. (in Russian)
19. Patent RU № 2827058. P'ezoelektricheskij FibrCD-aktyuator [Piezoelectric FibrCD-actuator] / Pan'kov A.A., Opubl.: 23.09.2024 Byul. № 27, zayavka № 2024102307 ot 30.01.2024 g. (in Russian)
20. Patent US № 4629925. Piezoelectric coaxial cable / M. Booth, R.J. Penneck, Application Date: 20.11.1984. Publication Date: 16.12.1986. 8 p. <https://patents.google.com/patent/US4629925A/en>
21. Patent US № 4609845. Stretched piezoelectric polymer coaxial cable / P.L. Soni, N.R. Farrar. Application Date: 06.07.1984. Publication Date: 02.09.1986. 7 p. <https://insight.rpxcorp.com/patent/US4609845A>
22. *Pan'kov A.A.* P'ezokompozity i datchiki: monografiya v 3-h chastyah / CHast' 1. Statisticheskaya mekhanika p'ezokompozitov [Piezocomposites and sensors: monograph in 3 parts / Part 1. Statistical mechanics of piezocomposites]. — Perm': Izd-vo Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta, 2022. — 234 p. (in Russian)
23. *Pan'kov A.A.* P'ezokompozity i datchiki: monografiya v 3-h chastyah / CHast' 2. Piroelektromagnitnye efekty kompozitov [Piezocomposites and sensors: monograph in 3 parts / Part 2. Pyroelectromagnetic effects of composites]. — Perm': Izd-vo Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta, 2023. — 211 p. (in Russian)
24. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F., SHul'ga N.A.* Mekhanika svyazannyh polej v elementah konstrukcij [Mechanics of connected fields in structural elements]. — Kiev: Nauk. dumka, 1989. 279 p. (in Russian)
25. *Vatul'yan A.O., Kiryutenko A.YU., Nasedkin A.V.* Ploskie volny i fundamental'nye resheniya v lineijnoj termoelektrouprugosti [Plane waves and fundamental solutions in linear thermoelectroelasticity] // PMTF. 1996. T. 37. № 5. P. 135–142. <https://doi.org/10.1007/BF02369312> (in Russian)
26. *SHul'ga N.A.* Radial'nye elektromekhanicheskie nestacionarnye kolebaniya pologo p'ezokeramicheskogo cilindra pri elektricheskom vozbuзhdenii [Radial electromechanical non-stationary oscillations of a hollow piezoceramic cylinder under electric excitation] // *Prikladnaya mekhanika*. 2009. T. 45. № 2. P. 30–35. (in Russian)
27. *Grigorenko A.A., Loza I.A.* O svobodnyh neosesimmetrichnyh kolebaniyah polyh p'ezokeramicheskikh cilindrov konechnoj dliny s radial'noj polarizaciej [On free non-symmetric oscillations of hollow piezoceramic cylinders of finite length with radial polarization] // *Prikladnaya mekhanika*. 2010. T. 46. № 11. P. 20–30. (in Russian)
28. *Shlyahin D.A.* Nestacionarnaya osesimmetrichnaya zadacha elektrouprugosti dlya anizotropnogo p'ezokeramicheskogo radial'no polarizovannogo cilindra [Non-stationary axisymmetric electroelasticity problem for an anisotropic piezoceramic radially polarized cylinder] // *Izv. RAN. MTT*. 2009. № 1. P. 73–81. (in Russian)
29. *He T., Tian X., Shen Y.* A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2005. V. 24. № 2. P. 349–359. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.001>

30. *Vatul'yan A.O., Nesterov S.A.* Dinamicheskaya zadacha termoelektrouprugostidlya funktsional'no-gradientnogo sloya [Dynamic problem of thermoelectroelastic properties of the functional gradient layer] // *Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred*. 2017. T. 10. № 2. P. 117–126. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10> (in Russian)
31. *Shlyahin D.A., Kal'mova M.A.* Svyazannaya nestacionarnaya zadacha termoelektrouprugosti dlya dlinnogo pologo cilindra [Coupled transient thermoelectroelasticity problem for a long hollow cylinder] // *Vestn. Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2020. T. 24. № 4. P. 677–691. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781> (in Russian)
32. *Belokon' A.V., Skaliuh A.S.* Matematicheskoe modelirovanie neobratimyh processov polyarizatsii [Mathematical modeling of irreversible polarization processes]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 328 p. (in Russian)
33. *Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Nassar M.E.* Homogenization of porous piezocomposites with extreme properties at pore boundaries by effective moduli method // *Mech.Solids*, 2020. V. 55. P. 827–836. <https://doi.org/10.3103/S0025654420050131>
34. *Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Rybyanets A.N.* Numerical analysis of effective properties of heterogeneously polarized porous piezoceramic materials with local alloying pore surfaces // *Materials Physics & Mechanics*. 2018. V. 40. № 1. P. 12–21. http://dx.doi.org/10.18720/MPM.4012018_3
35. *Pan'kov A.A., Pisarev P.V.* Numerical modeling in ANSYS of electroelastic fields in a piezo-electroluminescent fiber optic sensor for diagnosing the volumetric deformed state of the composite // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017. № 3. P. 153–166. (in Russian)
36. *Pobedrya B.E.* Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow: Izd–vo Mosk. universiteta, 1984. 336 p. (in Russian)
37. *Getman I.P., Mol'kov V.A.* Ob effektivnykh harakteristikah p'ezoaktivnykh kompozitov s cilindricheskimi vklyucheniymi [On the effective characteristics of piezoactive composites with cylindrical inclusions] // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1992. T. 35. № 3. P. 501–509. (in Russian)
38. *Kristensen R.* Vvedenie v mekhaniku kompozitov [Introduction to composites mechanics]. M.: Mir, 1982. 334 p. (in Russian)
39. *Dong X.-J., Meng G.* Dynamic analysis of structures with piezoelectric actuators based on thermal analogy method // *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2006. V. 27. P. 841–844. <https://doi.org/10.1007/s00170-004-2290-5>

УДК 539.376

О ВЛИЯНИИ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА НА ДЛИТЕЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ СОСТАВНОГО РАСТЯГИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ В ПРОЦЕССЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2024 г. Л. В. Фомин^{a, *}, А. А. Далинкевич^{a, b, **},
Ю. Г. Басалов^{a, ***}

^aНИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bИнститут физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН,
Москва, Россия

*e-mail: fleonid1975@mail.ru, **e-mail: dalinkeovich@yandex.ru,

***e-mail: basalov@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.02.2024 г.

После доработки 22.03.2024 г.

Принята к публикации 24.04.2024 г.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние и определяется время до разрушения составного растягиваемого стержня при ползучести в активной среде. Влияние активной среды определяется неклассическим диффузионным процессом, при этом проникшее в материал активное вещество находится в двух состояниях: свободном и связанном. Процесс такой диффузии описывается модифицированным уравнением диффузии, учитывающим двухфазное состояние активного вещества в материале. Получена система уравнений, моделирующая ползучесть составного стержня, в котором его части жестко без проскальзывания связаны между собой, а также включающая в себя кинетические уравнения накопления поврежденности в частях стержня. Учет влияния активной среды производится путем введения в указанные кинетические уравнения функции влияния активной среды – функции от интегрально средней концентрации. Анализируются распределения напряжений и процессы накопления повреждений во времени в различных частях составного стержня. Проведены расчеты в двух случаях, а именно, рассматривается классический и неклассический диффузионный процесс. Задания данных различий обусловлено выбором соответствующих параметров в рассматриваемой диффузионной модели. Получены зависимости накопления поврежденности и распределения напряжений в частях стержня во времени. В результате определено, что разрушение составного стержня в классическом случае происходит раньше, чем в случае рассматриваемого неклассического диффузионного процесса

Ключевые слова: составной растягиваемый стержень, активная среда, неклассическая диффузия, ползучесть, кинетическая теория Ю.Н. Работнова, поврежденность, длительное разрушение, время до разрушения

DOI: 10.31857/S1026351924050088, EDN: UAQGWB

1. Введение. Актуальность исследований высокотемпературной прочности материалов и конструкций [1], в том числе, находящихся в условии воздействия активных сред [2, 3], не подлежит сомнению. Современные материалы и элементы конструкций должны обеспечивать надежность и работоспособность изделий, выполненных из них, в течение всего срока службы в рабочих условиях с учетом их взаимодействия с внешними и/или рабочими средами. Наиболее часто для дополнительной защиты элементов конструкций от деструктивного воздействия внешней активной среды применяются типовые элементы составного типа. Внешний слой такой составной конструкции, как правило, контактирует с агрессивным веществом и защищает основные элементы конструкции от его разрушительного воздействия.

Предлагаемая вниманию читателей настоящая статья является продолжением проводимых авторами исследований, но с учетом неклассического диффузионного процесса. В статье [4] авторами рассмотрено напряженно-деформированное состояние, кинетика накопления повреждений в процессе ползучести и определены времена до разрушения составного стержня без учета влияния активной среды при различных значениях материальных констант в законах ползучести и длительного разрушения его частей. Рассмотренная задача являлась предварительным опорным исследованием перспективной задачи о защитном эффекте внешних частей составного стержня при его контакте с рабочей активной средой в условиях длительного действия нагрузки и повышенных температур.

В последующей своей работе авторами для анализа диффузионного проникновения активной среды в материалы частей составного стержня используется приближенный метод решения классического уравнения диффузии, который основан на введении диффузионного фронта, подробно описанный в [2, 3, 5]. Такой подход позволяет разделить весь материал стержня на возмущенную (где среда уже проникла в материал) и невозмущенную области (где еще нет проникновения среды) и затем определять движение границы между этими областями во времени. Решение (распределение концентрации по координатам и времени) ищется в виде полинома, коэффициенты которого в общем виде являются функциями пространственных координат и времени. При этом граничные и начальные условия выполняются точно, а уравнение диффузии удовлетворяется интегрально во всем объеме стержня. Относительная погрешность рассматриваемого приближенного метода по сравнению с точным решением в рядах составляет единицы процентов и уменьшается с ростом степени применяемого полинома. С учетом того факта, что кривые ползучести имеют значительный статистический разброс применение приближенного метода решения уравнения диффузии для решения рассматриваемых задач, вполне допустимо.

Кроме того, в процессе своих исследований авторами проведен обзор работ по ползучести и длительному разрушению составных конструкций [4], в том числе находящихся в активной среде, выявлены основные тенденции, применяемые модели при решении такого рода задач, а также меры по коррозионной защите поверхностей элементов конструкций.

В настоящем исследовании (в данной статье) влияние активной среды определяется неклассическим диффузионным процессом. В данном случае

рассматривается диффузия, при этом проникшее в материал активное вещество находится в двух состояниях: свободном и связанном. Процесс диффузии в этом случае описывается модифицированным уравнением диффузии, учитывающим двухфазное состояние активного вещества в материале.

В данной работе авторами исследуется напряженно-деформированное состояние и проводится моделирование процессов разрушения такой типовой конструкции, как составной стержень, находящийся в условии ползучести [1] при растяжении и воздействии на части стержня активной среды, причем влияние активной среды определяется неклассическим диффузионным процессом.

2. Постановка задачи. Рассматривается составной стержень, находящийся в состоянии установившейся ползучести под действием постоянной растягивающей силы P , приложенной к его торцам. Стержень имеет прямоугольное поперечное сечение, длина стержня L , ширина стержня H и толщина b удовлетворяют двойному неравенству $L \gg H \gg b$. Расположение частей симметрично относительно срединной плоскости, проходящей через геометрическую середину ширины H . Центральная часть стержня выполнена из материала, обладающего одними свойствами ползучести, две крайних одинаковых части выполнены из другого материала, который обладает другими свойствами ползучести. Дополнительно примем следующее условие: все части составного стержня жестко, без проскальзывания соединены между собой. Расположение частей в стержне представлено на рис. 1.

На рис. 1 обозначение h_1 соответствует ординате границы первой и второй частей в системе координат xOy . При этом толщина первой части равна $2h_1$.

Рассмотрим ползучесть данного составного стержня, который дополнительно к действию растягивающей силы находится в активной среде, действие которой определяется неклассическим диффузионным процессом. При этом рассматривается процесс, описываемый модифицированным уравнением диффузии следующего вида:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad c(z, 0) = S(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \beta c - \alpha S, \quad (2.1)$$

где c — концентрация свободной (мобильной) формы активной среды в единице объема (или на единицу массы) образца; S — концентрация связанной

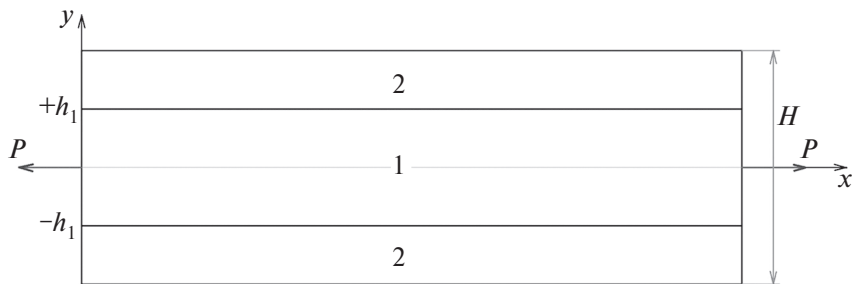


Рис. 1. Схема расположения частей в стержне.

формы активной среды в единице объема (или на единицу массы) образца; α – вероятность перехода в единицу времени связанной формы молекул активной среды в свободную форму ($\alpha \rightarrow (S \rightarrow c)$); β – вероятность перехода в единицу времени свободной формы молекул активной среды в связанную форму ($\beta \rightarrow (c \rightarrow S)$); $D = \text{const}$ – коэффициент диффузии; t – время; z – декартова координата.

Здесь предполагается, что диффузия мобильных молекул соответствует простой теории диффузии, дополненной источниками и стоками, как в теории цепных нейтронных реакций [6].

По мнению авторов статьи рассматриваемая диффузионная модель может также моделировать некоторые физико-химические механизмы диффузии в оксидах металлов с учетом особенностей их структуры и свойств [7, 8].

Исследуется длительная прочность растягиваемого длинного составного стержня с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника в активной среде, диффузионное влияние которой описывается уравнением (2.1). Поскольку ширина H поперечного сечения значительно превосходит его толщину b , то влиянием диффузии со стороны узких сторон прямоугольного сечения можно пренебречь. Длина стержня во много раз превосходит характерные размеры его поперечного сечения, поэтому влиянием продольной координаты стержня на диффузионный процесс можно также пренебречь. Таким образом, процесс диффузии является одномерным и проходит по толщине b вдоль поперечной координаты z . Принимаются одинаковые граничные условия диффузионного процесса на широких сторонах прямоугольного поперечного сечения, в связи с этим процесс диффузии является симметричным относительно оси y , проходящей через центр поперечного сечения стержня. Примем одинаковые характеристики диффузионного процесса для центральной части и двух крайних частей стержня. А именно, пусть активная среда проникает в центральную и крайние части с коэффициентом диффузии $D = \text{const}$. Вероятности перехода α связанной формы молекул активной среды в свободную и обратный процесс β примем одинаковыми для всех частей стержня. Схема воздействия активной среды на составной стержень представлена на рис. 2.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{z} = \frac{2z}{b}, \quad \tilde{t} = \frac{D}{b^2}t, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}, \quad \bar{S} = \frac{S}{c_0}, \quad \bar{\beta} = \frac{b^2}{D}\beta, \quad \bar{\alpha} = \frac{b^2}{D}\alpha, \quad (2.2)$$

где c_0 – равновесная концентрация свободного вещества.

С учетом принятых безразмерных переменных (2.2) уравнение (2.1) преобразуется, в результате распределение концентрации элементов активной среды в каждой части составного стержня подчиняется одномерному модифицированному уравнению диффузии

$$4 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}} + \bar{\beta} \bar{c} - \bar{\alpha} \bar{S} \quad (2.3)$$

с начальным условием $\bar{c}(\bar{z}, 0) = \bar{S}(\bar{z}, 0) = 0$ для $|\bar{z}| < 1$, и с граничными условиями $\bar{c}(1, \tilde{t}) = \bar{c}(-1, \tilde{t}) = 1$.

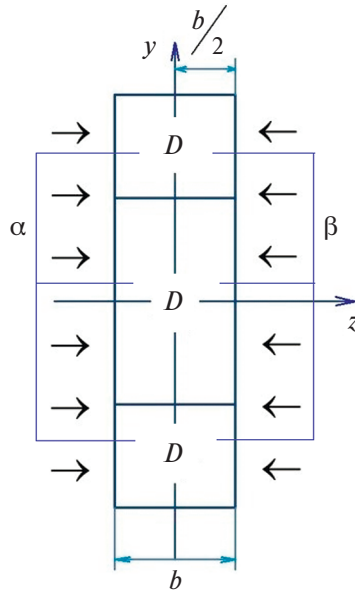


Рис. 2. Схема воздействия активной среды на составной стержень.

Решение уравнения (2.3) рассматривается в статье [9], в которой методом преобразования Лапласа [10] получены зависимости $\bar{c}(\bar{z}, \tilde{t})$ и $\bar{S}(\bar{z}, \tilde{t})$.

Интегрирование указанных зависимостей по толщине $\bar{z}$ дает следующее выражение для относительной массы поглощенного вещества $\bar{m} = \bar{m}(\tilde{t})$, которая есть средняя концентрация $\bar{c}_m(\tilde{t}) \equiv \bar{m}(\tilde{t})$, зависящая только от времени $\tilde{t}$:

$$\begin{aligned} \bar{c}_m(\tilde{t}) = \bar{m}(\tilde{t}) = 1 - \left(\frac{8}{\pi^2} \right) & \left(\sum_l^{(\text{odd})} \frac{[(r_l^+) (\exp(-r_l^- \tilde{t})) - (r_l^-) (\exp(-r_l^+ \tilde{t}))]}{(l^2)(r_l^+ - r_l^-)} \right) + \\ & + \left(\frac{8}{\pi^2} \right) \left(\frac{\kappa \bar{\alpha}}{\bar{\beta} + \bar{\alpha}} \right) \left(\sum_l^{(\text{odd})} \frac{[\exp(-r_l^- \tilde{t}) - \exp(-r_l^+ \tilde{t})]}{(r_l^+ - r_l^-)} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\sum_l^{(\text{odd})}$ — сумма по нечетным индексам l . В соотношении (2.4) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\pi^2 4}{(2\bar{\delta})^2}, \quad \bar{\delta} = 1, \quad r_l^+ = \frac{1}{2} \left[(\kappa l^2 + \bar{\beta} + \bar{\alpha}) + \sqrt{(\kappa l^2 + \bar{\beta} + \bar{\alpha})^2 - 4\kappa \bar{\alpha} l^2} \right], \\ r_l^- &= \frac{1}{2} \left[(\kappa l^2 + \bar{\beta} + \bar{\alpha}) - \sqrt{(\kappa l^2 + \bar{\beta} + \bar{\alpha})^2 - 4\kappa \bar{\alpha} l^2} \right], \end{aligned}$$

где $2\bar{\delta}$ – безразмерная толщина, $\bar{m} = m/m_0$, m – масса поглощенного вещества, m_0 – значение равновесной массы поглощенного вещества.

В настоящем исследовании, учитывая постановку задачи, а именно, малость поперечных размеров составного стержня по сравнению с его длиной и с дополнительным условием симметричности диффузионного процесса относительно центральной плоскости симметрии, принимается одномерный характер напряженного состояния. В процессе решения используется гипотеза плоских сечений и обобщение принципа Сен-Венана для рассматриваемой задачи, что позволяет считать напряженное состояние однородным вдали от мест соединения частей составного стержня.

3. Определяющие и кинетические соотношения. Учет влияния активной среды в уравнениях модели. Пусть соотношения (3.1) описывают скорость деформации ползучести соответственно первой (центральной) части и двух крайних частей.

$$\dot{p}_1 = B_1 \left(\frac{\sigma_1}{1 - \omega_1} \right)^n, \quad \dot{p}_2 = B_2 \left(\frac{\sigma_2}{1 - \omega_2} \right)^n, \quad (3.1)$$

где σ_1 – напряжение в первой (центральной) части стержня, σ_2 – напряжение в двух крайних частях стержня, ω_1 – параметр поврежденности для центральной части стержня, ω_2 – параметр поврежденности одинаковый для двух крайних частей стержня, B_1, B_2, n – материальные константы, точка над символами p_1 и p_2 означает производную по времени t .

В соотношении (3.1) на основе кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова [1] в уравнения, описывающие ползучесть каждой части составного стержня, введены структурные параметры – параметры поврежденности ω_1 и ω_2 , которые описывает накопление повреждений в процессе ползучести.

Введем дополнительные безразмерные переменные:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}, \quad \bar{t} = B_1 \sigma_0^n t, \quad (3.2)$$

где σ_0 – некоторое характерное напряжение размерности МПа, например, половина предела кратковременной прочности σ_b ($\sigma_0 = 0.5\sigma_b$) при соответствующей температуре.

Тогда определяющие соотношения (3.1) для центральной и двух крайних частей составного стержня соответственно будут иметь следующий вид:

$$\frac{dp_1}{d\bar{t}} = \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n}, \quad \frac{dp_2}{d\bar{t}} = \frac{k \bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n},$$

где $k = B_2/B_1$.

Большинство экспериментальных данных показывают, что активная среда destructively влияет на материал, уменьшает время до разрушения по сравнению с эксплуатацией материалов и элементов конструкций в нейтральных условиях.

Процессы разрушения инициируются ростом повреждений в материале. Учет влияния активной среды в кинетических уравнениях накопления поврежденности:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = A \left(\frac{\sigma_1}{1 - \omega_1} \right)^m f(\bar{c}_m), \quad \omega_1 = \omega_1(t), \quad \omega_1(0) = 0, \quad \omega_1^* \equiv \omega_1(t = t_1^*) = 1, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = A \left(\frac{\sigma_2}{1 - \omega_2} \right)^m f(\bar{c}_m), \quad \omega_2 = \omega_2(t), \quad \omega_2(0) = 0, \quad \omega_2^* \equiv \omega_2(t = t_2^*) = 1, \quad (3.4)$$

где t_1^* — время до разрушения центральной части стержня, t_2^* — время до разрушения крайних частей стержня. A , m — материальные константы, которые определяются на основе опытов на длительную прочность без активной среды в нейтральных условиях (при этом $f(\bar{c}_m) \equiv 1$). Для этих опытов используются стандартные образцы, которые изготовлены из материалов соответствующих частей составного стержня.

В уравнениях (3.3) и (3.4) введена некоторая возрастающая функция от интегрально средней концентрации $f(\bar{c}_m)$ соответственно, такая, что $f(\bar{c}_m = 0) = 1$.

С учетом единого для определяющих и кинетических уравнений безразмерного времени $\bar{t}$ уравнения (3.3) и (3.4) примут следующий вид:

$$\frac{d\omega_1}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_1^m}{(1 - \omega_1)^m} f(\bar{c}_m), \quad \frac{d\omega_2}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_2^m}{(1 - \omega_2)^m} f(\bar{c}_m), \quad (3.5)$$

где $C_1 = \frac{A}{B_1} \sigma_0^{m-n}$.

Начальные условия: $\omega_1(0) = 0$, $\omega_2(0) = 0$. Первое уравнение в (3.5) отвечает за рост параметра ω_1 в центральной части составного стержня, находящейся под действием напряжения $\bar{\sigma}_1$. Второе уравнение в (3.5) отвечает за рост параметра ω_2 в двух крайних частях составного стержня, находящихся под действием напряжения $\bar{\sigma}_2$. Средняя концентрация $\bar{c}_m$ определяется уравнением (2.4).

Примем линейный вид функции $f(\bar{c}_m)$ [11]:

$$f(\bar{c}_m) = 1 + a\bar{c}_m$$

где a — материальная константа. Способ определения константы a из экспериментов на длительную прочность подробно изложен в [11].

Поскольку кинетические соотношения (3.5) и соотношение (2.4) для средней концентрации $\bar{c}_m$ записаны в различных безразмерных временах $\bar{t}$ и $\bar{t}$ соответственно, то для дальнейших расчетов необходимо перейти к одному единому безразмерному времени для задачи $\bar{t}$. Напомним читателю статьи, что в соответствии с (2.4) выражения для безразмерного времени, характеризующих диффузионными процессами в частях стержня, имеют следующий вид:

$$\bar{t} = \frac{D}{b^2} t.$$

Связь безразмерного времени $\bar{t}$ с реальным временем t определяется в соответствии с (3.2).

Последовательно выражая сначала время $\tilde{t}$ через время $\bar{t}$, приведем (3.5) к виду, записанному в едином безразмерном времени $\bar{t}$.

Проведя соответствующие выкладки, получим, что связь безразмерных времен определяется как $\tilde{t} = K\bar{t}$, где $K = D/(b_2 B_1 \sigma_0^n)$. Таким образом, используя решение $\bar{c}_m(\tilde{t}) = \bar{m}(\tilde{t})$ (2.4), учитывая $\tilde{t} = K\bar{t}$, находим зависимость $\bar{c}_m(\tilde{t}) = \bar{m}(\tilde{t})$.

В результате кинетические соотношения для первой (центральной) и двух вторых (крайних) частей составного стержня в едином безразмерном времени $\bar{t}$ примут следующий вид:

$$\frac{d\omega_1}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_1^m}{(1 - \omega_1)^m} f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad \frac{d\omega_2}{d\bar{t}} = C_1 \frac{\bar{\sigma}_2^m}{(1 - \omega_2)^m} f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad (3.6)$$

где $C_1 = (A/B_1)\sigma_0^{m-n}$. Начальные условия: $\omega_1(0) = 0$, $\omega_2(0) = 0$.

Факт наличия жесткого соединения без проскальзывания частей стержня приводит к равенству деформаций на их границе. Далее применяется гипотеза, что деформации не зависят от поперечной координаты y , что согласно гипотезе плоских сечений выполняется наряду с утверждением о неизменности исходных плоских и нормальных к оси стержня сечений до и после деформации.

Данное обоснование дает возможность принять условие равенства деформаций ползучести $p_1(\bar{t}) = p_2(\bar{t})$. С учетом заданного начального условия $p(0) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\bar{t}} &= \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n}, \quad dp_1 = \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t}, \\ \int_0^{p_1} dp_1 &= \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t}, \quad p_1 = \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t}. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\frac{dp_2}{d\bar{t}} = \frac{k\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n}, \quad p_2 = k \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n} d\bar{t}.$$

Из условия равенства деформаций ползучести $p_1 = p_2$ следует:

$$\int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_1^n}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t} = k \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\sigma}_2^n}{(1 - \omega_2)^n} d\bar{t}. \quad (3.7)$$

Запишем уравнение равновесия

$$P = 2 \left[\int_0^{h_1} b\sigma_1 dy + \int_{h_1}^{H/2} b\sigma_2 dy \right] = 2b \left[h_1\sigma_1 + \left(\frac{H}{2} - h_1 \right) \sigma_2 \right] \quad (3.8)$$

Введем величину $\Sigma \equiv \frac{P}{bH}$, тогда

$$\Sigma = [\xi \sigma_1 + (1 - \xi) \sigma_2], \quad \xi = \frac{2h_1}{H}.$$

С учетом выражений для безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ уравнение равновесия (3.8) будет иметь вид:

$$\Sigma_0 = [\xi \bar{\sigma}_1 + (1 - \xi) \bar{\sigma}_2], \quad (3.9)$$

где $\Sigma_0 = \frac{\Sigma}{\sigma_0} = \frac{P}{bH\sigma_0}$.

Выразим из (3.9) $\bar{\sigma}_2$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{[\Sigma_0 - \xi \bar{\sigma}_1]}{(1 - \xi)}. \quad (3.10)$$

С учетом уравнений (3.6), (3.7) и (3.10) замкнутая система уравнений будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{d\bar{t}} &= C_1 \frac{\bar{\sigma}_1^m}{(1 - \omega_1)^m} f(\bar{c}_m(\bar{t})), \\ \frac{d\omega_2}{d\bar{t}} &= C_1 \frac{([\Sigma_0 - \xi \bar{\sigma}_1])^m}{((1 - \xi)(1 - \omega_2))^m} f(\bar{c}_m(\bar{t})), \\ \int_0^{\bar{t}} \bar{\sigma}_1^n \frac{1}{(1 - \omega_1)^n} d\bar{t} &= k \int_0^{\bar{t}} \left(\frac{[\Sigma_0 - \xi \bar{\sigma}_1]}{(1 - \xi)(1 - \omega_2)} \right)^n d\bar{t}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В уравнениях (3.10), в системе (3.11), а также учитывая $\bar{c}_m(\bar{t}) = \bar{c}_m(K\bar{t})$ по (2.4), использованы константы

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{b^2}{D} \alpha, \quad \bar{\beta} = \frac{b^2}{D} \beta, \quad C_1 = \frac{A}{B_1} \sigma_0^{m-n}, \quad K = \frac{D}{b^2 B_1 \sigma_0^n}, \\ k &= \frac{B_2}{B_1}, \quad \xi = \frac{2h_1}{H}, \quad \Sigma_0 = \frac{P}{bH\sigma_0}. \end{aligned}$$

В системе (3.11) из трех уравнений тремя неизвестными являются поврежденность $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$ – в центральной части стержня, поврежденность $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$ – в двух крайних частях составного стержня, напряжение $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$. Напряжение $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$ определяется в соответствии с соотношением (3.10). Указанные характеристики напряженного и поврежденного состояния являются зависимыми от времени.

Принимаются начальные условия для поврежденностей: $\omega_1(0) = 0, \omega_2(0) = 0$.

Используем принятый ранее в статье линейный вид функции

$$f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a_c \cdot \bar{c}_m(\bar{t}),$$

где a_c — константа, определяемая из эксперимента на длительную прочность образцов материала, находящихся в активной среде.

В работе [11] было определено значение данной константы $a_c = 9,5$ для опытов по длительной прочности образцов углеродистой стали, находящихся в высокотемпературной воздушной среде [12].

Необходимо отметить, что материальные параметры A, B_1, B_2, m, n , входящие в соотношения (3.1), (3.3), (3.4) и в систему уравнений (3.11), в общем случае можно определить на основе обработки экспериментальных данных по ползучести и длительной прочности стандартных образцов из материалов, из которых изготовлены рассматриваемые части составного стержня.

Критерием разрушения каждой части стержня является условие достижения параметром поврежденности для соответствующей части стержня значения, равного единице $\omega_1^* \equiv \omega_1(\bar{t} = \bar{t}_1^*) = 1$ и $\omega_2^* \equiv \omega_2(\bar{t} = \bar{t}_2^*) = 1$. Общее время до разрушения всего составного стержня $\bar{t}^*$ будем считать минимальной из полученных времен до разрушения отдельных частей стержня: $\bar{t}^* = \min\{\bar{t}_1^*, \bar{t}_2^*\}$.

Результатом решения задачи будут являться рассчитанные зависимости $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$, $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$, $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$, $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$ от безразмерного времени $\bar{t}$.

4. Результаты расчета. Цель проведенного расчета данной модельной задачи было выявление влияния параметров неклассического диффузионного процесса на время до разрушения составного стержня. Следует отметить, что в ранее проведенном исследовании [4] показано, что на характер распределения напряжений и процессы накопления поврежденности (а следовательно, на очередность разрушения частей стержня) в аналогичном составном стержне, деформируемом при ползучести в нейтральных условиях (без учета влияния активной среды), влияет отношение материальных констант $k = B_2/B_1$ в определяющих соотношениях. Причем с ростом показателей $n = m$ при неизменных других материальных параметрах время до разрушения $\bar{t}^*$ увеличивается.

Проведем расчет для двух вариантов набора констант, отличающихся только значениями параметров $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$:

- 1) $\bar{\alpha} = 1$, $\bar{\beta} = 1$, $m = n = 3$, $k = 2$, $C_1 = 2$, $K = 1$, $\xi = 0.5$, $\Sigma_0 = 0.5$,
- 2) $\bar{\alpha} = 1$, $\bar{\beta} = 0$, $m = n = 3$, $k = 2$, $C_1 = 2$, $K = 1$, $\xi = 0.5$, $\Sigma_0 = 0.5$.

Набор параметров 2) соответствует классическому диффузионному процессу, поскольку вероятность перехода в единицу времени свободной формы молекул активной среды в связанную форму $\bar{\beta} = 0$, следовательно, концентрация связанной формы активной среды в единице объема (или на единицу массы) образца $S = 0$.

Результаты расчетов представлены на рисунках 3–6. На рисунках приняты следующие обозначения:

- 1 — зависимости $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$, $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$ для 1) варианта набора констант;
- 2 — зависимости $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$, $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$ для 1) варианта набора констант;
- 3 — зависимости $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$, $\omega_1 = \omega_1(\bar{t})$ для 2) варианта набора констант;
- 4 — зависимости $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$, $\omega_2 = \omega_2(\bar{t})$ для 2) варианта набора констант;
- I — зависимость $\bar{c}_m(\bar{t})$ для $\bar{\alpha} = 1$, $\bar{\beta} = 1$;
- II — зависимость $\bar{c}_m(\bar{t})$ для $\bar{\alpha} = 1$, $\bar{\beta} = 0$.

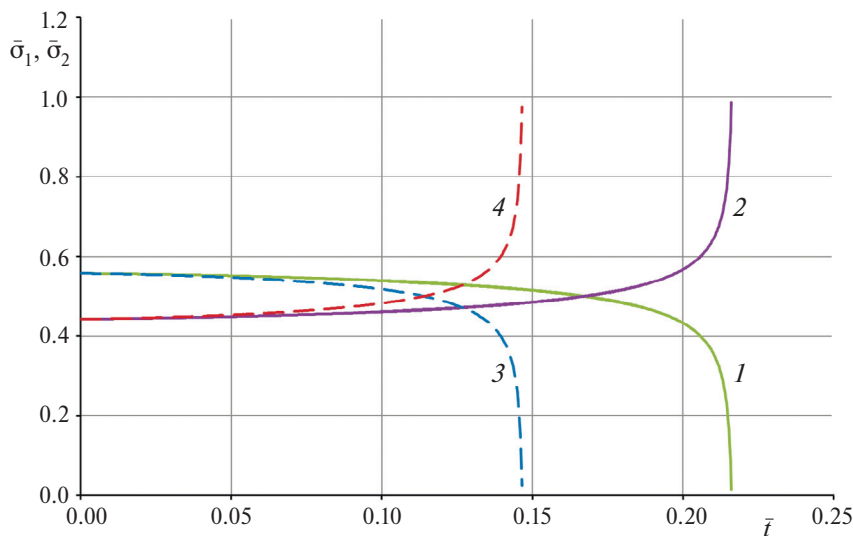


Рис. 3. Зависимости безразмерных напряжений от безразмерного времени в частях составного стержня при учете неклассического (обозначения: 1, 2) и классического (обозначения: 3, 4) диффузионных процессов.

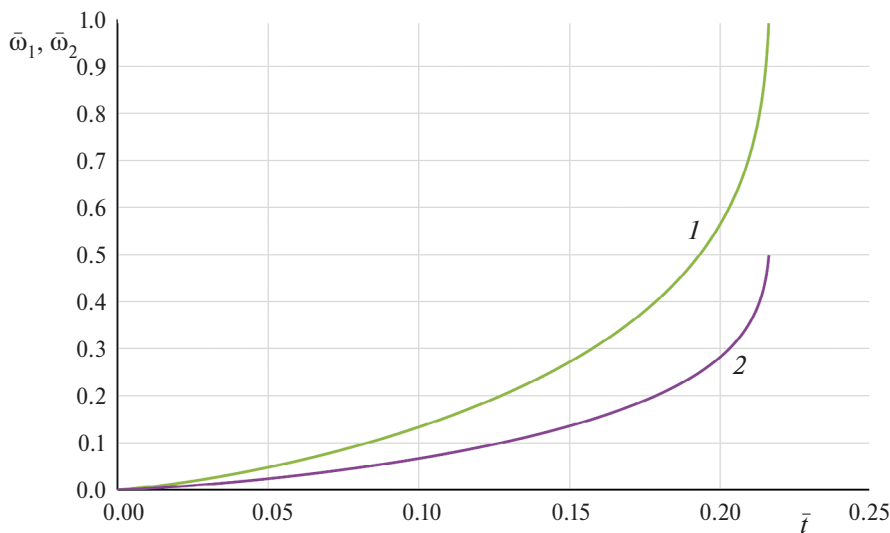


Рис. 4. Зависимости параметров повреждения от безразмерного времени в частях составного стержня при учете неклассического (обозначения: 1, 2) диффузионного процесса.

Проанализируем полученные результаты. В начальный момент времени (когда еще нет влияния среды) соответствующие графики $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(\bar{t})$ и $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(\bar{t})$ выходят из одной точки для рассматриваемых случаев.

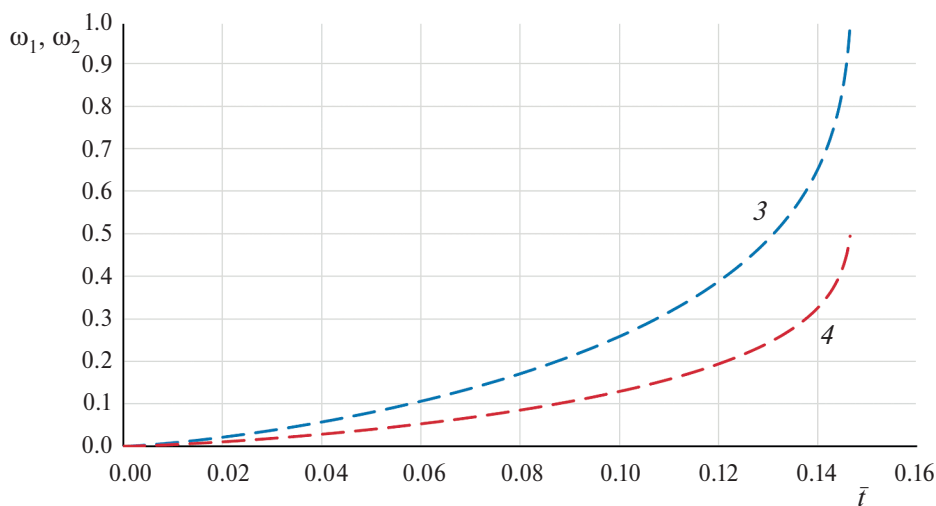


Рис. 5. Зависимости параметров поврежденности от безразмерного времени в частях составного стержня при учете классического (обозначения: 3, 4) диффузионного процесса.

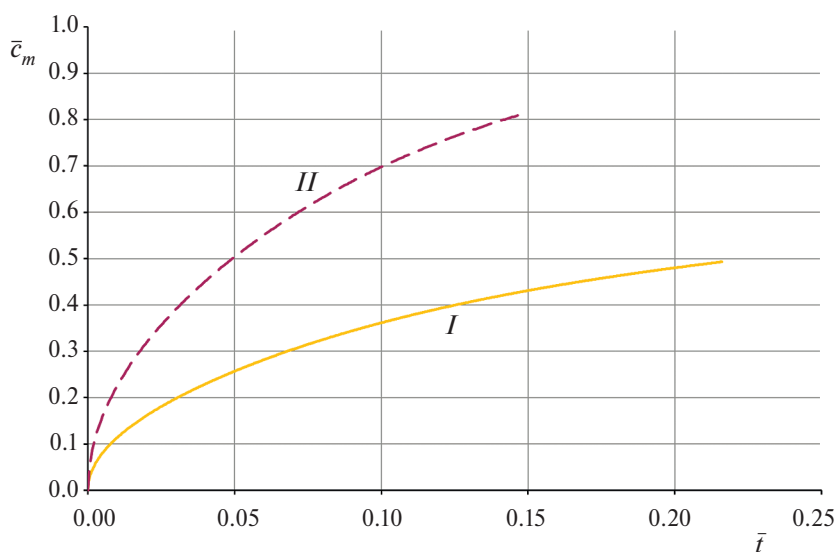


Рис. 6. Зависимости интегрально средней концентрации от безразмерного времени в частях составного стержня при учете неклассического (обозначения: I) и классического (обозначения: II) диффузионных процессов.

Разрушение определяется критериально предельным значением поврежденности $\omega^* \equiv 1$. Разрушение в классическом случае происходит раньше (при $\bar{t}^* = 0.147$), чем в случае рассматриваемого неклассического диффузионного процесса (при $\bar{t}^* = 0.216$). Этот факт дополнительно подтверждают зависимости интегрально средней концентрации $\bar{c}_m(\bar{t})$ от безразмерного

времени (рис. 6). Для случая классической диффузии график соответствующей зависимости $\bar{c}_m(\bar{t})$ проходит выше, чем аналогичный график для случая неклассического диффузионного процесса. То есть, в последнем случае меньше концентрация свободной (диффузионной) составляющей, чем в классическом случае. Это происходит по причине дополнительного расхода вещества на образование связанной формы.

4. Заключение. На основе кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова получены зависимости напряжений и накопления поврежденности от времени в центральной и двух крайних частях составного стержня при учете неклассического диффузионного процесса. При этом учитывается, что части составного стержня жестко без проскальзывания соединены между собой. При таком процессе проникшее в материал активное вещество находится в двух состояниях: свободном и связанном. Процесс диффузии в этом случае описывается модифицированным уравнением диффузии, учитывающим двухфазное состояние активного вещества в материале.

В результате получена система уравнений, моделирующая ползучесть составного стержня, а также включающая в себя кинетические уравнения накопления поврежденности в частях стержня. Учет влияния активной среды производится путем введения в указанные кинетические уравнения функции влияния активной среды — функции от интегрально средней концентрации.

Проведены расчеты в двух случаях, а именно, рассматривается классический и неклассический диффузионный процесс. Задания данных различий обусловлено выбором соответствующих параметров в рассматриваемой диффузионной модели. Построены зависимости накопления поврежденности и распределения напряжений в частях стержня во времени.

Определено, что разрушение составного стержня в классическом случае происходит раньше, чем в случае рассматриваемого неклассического диффузионного процесса.

Проведенное исследование имеет фундаментальный характер в развитии теории определяющих соотношений ползучести и кинетических уравнениях, моделирующих длительное разрушение материалов и элементов конструкций в активной среде. В качестве прикладного применения разработанный подход и полученные результаты могут быть применены в энергетическом, химическом машиностроении, судостроении и авиакосмической отрасли.

Работа выполнена при поддержке госбюджетного финансирования, номер проекта ЦИТИС АААА-А19-119012990120-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
3. Alexander Lokoshchenko and Leonid Fomin. Kinetic theory of creep and long-term strength of metals. in Kinetic Theory, George Z. Kyzas and Athanasios C. Mitropoulos, IntechOpen, (December 20th 2017). <https://doi.org/10.5772/intechopen.70768>

4. Фомин Л.В., Басалов Ю.Г. О длительном разрушении составного растягиваемого стержня в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. 2023. №1. С. 28–40.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922100087>
5. Lokoshchenko A.M., Fomin L.V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // App. Math. Model. 2018. V. 60. P. 478–489.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031>
6. Weinberg A.M., Wigner E.P. The physical theory of neutron chain reactors. Chapter VIII. The University of Chicago Press, 1958.
7. Чувильдеев В.Н., Смирнова Е.С. Феноменологическая теория объемной диффузии // Физика твердого тела. 2016. Т. 58. Вып. 7. С. 1436–1447.
8. Кофстад П. Отклонение от стехиометрии, диффузия и электропроводность в пористых окислах металлов / Перевод с англ. под ред. Н.Н. Семенова. М.: Мир, 1975. 398 с.
9. Harris G. Carter, Kenneth G. Kibler. Langmuir-type model for anomalous moisture diffusion in composite resins // J. Compos. Mater. 1978. V. 12. № 2. P. 118–131.
<https://doi.org/10.1177/002199837801200201>
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
11. Фомин Л.В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. №3(32). С. 87–97.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1228>
12. Одинг И. А., Фридман З. Г. Роль поверхностных слоев при длительном разрушении металлов в условиях ползучести // Завод. лаб. 1959. Т. 25. № 3. С. 329–332.

ON THE INFLUENCE OF A NON-CLASSICAL DIFFUSION PROCESS ON THE LONG-TERM FRACTURE OF A COMPOSITE TENSILE ROD DURING CREEP

L. V. Fomin^{a,*}, A.A. Dalinkevich^{a,b,**}, Yu. G. Basalov^{a,***}

^aResearch Institute of mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^bFrumkin Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

*e-mail: leonid1975@mail.ru, **e-mail: dalinkevich@yandex.ru,

***e-mail: basalov@yandex.ru

Abstract. The stress-strain state is considered and the time to fracture of a composite tensile rod during creep in an active medium is determined. The influence of the active medium is determined by a non-classical diffusion process, with the active substance penetrating into the material in two states: free and bound. The process of such diffusion is described by a modified diffusion equation that takes into account the two-phase state of the active substance in the material. A system of equations has been obtained that models the creep of a composite rod, in which its parts are rigidly connected to each other without slipping, and

also includes kinetic equations for the accumulation of damage in parts of the rod. The influence of the active medium is taken into account by introducing into the indicated kinetic equations the function of the influence of the active medium - a function of the integral average concentration. Stress distributions and damage accumulation processes over time in various parts of the composite rod are analyzed. Calculations were carried out in two cases, namely, classical and non-classical diffusion processes are considered. The setting of these differences is determined by the choice of appropriate parameters in the diffusion model under consideration. Dependences of damage accumulation and stress distribution in parts of the rod over time were obtained. As a result, it was determined that the destruction of a composite rod in the classical case occurs earlier than in the case of the considered non-classical diffusion process.

Keywords: composite tensile rod, active medium, non-classical diffusion, creep, kinetic theory of Yu.N. Rabotnov, damage, long-term fracture, time to fracture

REFERENCES.

1. *Rabotnov Yu.N.* Creep of structural elements. Moscow: Nauka, 1966. 752 p.
2. *Lokoshchenko A.M.* Creep and long-term strength of metals. Moscow: Fizmatlit, 2016. 504 p. (in Russian) = Lokoshchenko A.M. Creep and Long-Term Strength of Metals. CISP. CRC Press. Taylor & Francis Group. Boca. Raton. London. New York. 2017. 546 p.
<https://doi.org/10.1201/b22242>.
3. *Alexander Lokoshchenko and Leonid Fomin.* Kinetic Theory of Creep and Long-Term Strength of Metals, in Kinetic Theory, George Z. Kyzas and Athanasios C. Mitropoulos, IntechOpen, (December 20th 2017).
<https://doi.org/10.5772/intechopen.70768>.
4. *Fomin L.V., Basalov Yu.G.* On the long-term fracture of a composite tensile rod under creep conditions // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids. 2023, No. 1. P. 28–40. (in Russian)
5. *Lokoshchenko A.M., Fomin L.V.* Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 60. P. 478–489.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031>.
6. *Weinberg A.M., Wigner E.P.* The physical theory of neutron chain reactors, Chapter VIII, The University of Chicago Press. 1958.
7. *Chuvildeev V.N., Smirnova E.S.* Phenomenological theory of volume diffusion // Physics of the Solid State. 2016. Vol. 58. Issue. 7. Pp. 1436–1447. (in Russian).
8. *Kofstad P.* Deviation from stoichiometry, diffusion, and electrical conductivity in porous metal oxides / Translation from English edited by N.N. Semenov. Moscow: Mir. 1975. 398 p. (in Russian)
9. *Harris G. Carter, Kenneth G. Kibler.* Langmuir-tipe model for anomalous moisture diffusion in composite resins // J. Composite Materials. 1978. Vol. 12. P. 118–131.
10. *Lavrentiev M.A., Shabat B.V.* Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow: Main Editorial Board of Physical and Mathematical Literature, Nauka Publishing House, 1973, 736 p. (in Russian)

11. *Fomin L.V.* Description of the Long-Term Strength of Tensile Rods of Rectangular and Circular Cross-Sections in a High-Temperature Air Medium // Bulletin of the Samara State Tech. University. Series: Phys. and Mathematics. Sciences. 2013. No. 3 (32). P. 87–97. (in Russian)
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1228>
12. *Oding I.A., Friedman Z.G.* The Role of Surface Layers in Long-Term Fracture of Metals under Creep Conditions // Plant. Lab. 1959. 25:3. P. 329–332. (in Russian)

УДК 535.374

ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЯ УМЕНЬШЕНИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ С УВЕЛИЧЕНИЕМ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ПОЛИКРИСТАЛЛА

© 2024 г. В. Ю. Марина^а, *

^аТехнический Университет Молдовы, Кишинев, Молдова

*e-mail: vasilemarina21@yahoo.com.

Поступила в редакцию 22.03.2024 г.

После доработки 29.04.2024 г.

Принята к публикации 03.05.2024 г.

С использованием трехуровневой конститутивной модели исследуется влияние фактора анизотропии кристаллов, коэффициента упрочнения, микроскопического предела упругости и функции плотности распределения предельных упругих деформаций подэлементов на формы диаграмм деформирования и условия разрушения поликристалла. Исходя на локальном уровне из теории максимальных нормальных напряжений на макроскопическом уровне установлен критерий разрушения, в котором фигурируют все параметры задачи. Исследуется влияние вида напряженного состояния и геометрической формы диаграммы нагружения на величину необратимой деформации, предшествующей начальному процессу разрушения. Из установленного критерия прочности следует эффект падения пластичности материала с ростом предела текучести. Обсуждается вопрос о критическом значении веса разрушенных подэлементов, при котором происходит образование макротрещины приводящее к полному разрушению элемента тела.

Ключевые слова: структура, напряжение, деформация, разрушение, пластичность, поликристалл, упрочнение, осредненные связи, несоответствия мер, подэлемент.

DOI: 10.31857/S1026351924050091, EDN: UAPTCL

Введение. Из анализа работ по теории необратимого деформирования и разрушения видно, что для описания новых эффектов наблюдаемых при деформировании твердых тел, работающих в усложненных термосиловых условиях, предлагаются все более сложные феноменологические определяющие уравнения [1–3]. Наибольшие успехи при описании сложных явлений, на основе минимальной информации о свойствах материала достигнуты в рамках многоуровневых моделей [4–6]. В настоящее время широкое применение получили двухуровневые модели [7–10]. Ключевым классификационным признаком моделей предложенным различными авторами является гипотеза связей микроскопических напряжений и

деформаций $-\tilde{t}_{ij}$, $\tilde{d}_{ij}$ и макроскопическими напряжениями и деформациями $-t_{ij}$, d_{ij} . Большинство авторов ограничиваются допущением об однородном деформированном состоянии элементов структуры $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$ или об однородном напряженном состоянии $\tilde{t}_{ij} = t_{ij}$.

Впервые модель, учитывающую влияние неоднородностей полей деформаций и напряжений на поведение поликристалла, разработал Кренер [11]. В основе модели лежит так называемая «самосогласованная схема», относящаяся к проблеме включения в бесконечную матрицу. Согласно этой схемы каждое зерно поликристалла последовательно рассматривается как включение в «матрицы» всех других зерен. Поведение поликристалла затем рассчитывается интегрированием по фактору ориентации зерен. В результате установлена линейная зависимость между флуктуациями тензоров напряжений и деформаций. К основным недостаткам моделей, основанных на подходе Кренера [11–13], следует отнести несогласованность с первым законом термодинамики (макроскопическая мера энергии деформирования больше осредненного значения микромеры) и завышенные внутренние напряжения в необратимой области деформирования¹.

Экспериментальные исследования при пропорциональном циклическом и сложном нагружении [14] выявили комплекс деформационных свойств, которые не могут быть объяснены в рамках классических подходов, связанных с наличием поверхности текучести в многоэлементных моделях. В частности, установлено, что интенсивность упрочнения по круговым траекториям на 30–40% больше, чем при пропорциональном циклическом нагружении (многоэлементные модели, основанные на поверхности текучести, предсказывают противоположный эффект); после перехода к нагружению вдоль траектории, расположенной под углом 90° к предварительному циклическому пропорциональному деформированию до стабилизации происходит скачкообразный рост интенсивности размаха напряжения; последующее пропорциональное нагружение после кругового нагружения приводит к разупрочнению. Статистические теории, за исключением [15–18], предсказывают противоположные эффекты. Это связано с разориентацией векторов напряжений в подэлементах многоэлементной модели при сложном нагружении. На самом деле под действием направленного распределения макроскопических напряжений во всем конгломерате и в ближайших материальных частицах происходят самосогласованные процессы необратимых деформаций. Сложная картина внешне не связанных между собой особенностей необратимого деформирования материалов, проявляемых при различных программах изменения нагрузки и температуры, становится обозримой и взаимосвязанной при использовании для её интерпретации принципы термодинамики необратимых процессов, осредненных связей, экстремума несоответствия мер и постулат об ортогональности флуктуаций тензоров напряжений и деформаций [15–19]. Установленные в [19] явления, протекающие при необратимом нагружении поликристалла: циклическое изменение объёмных и максимальных растягивающих

¹ Марина В. Ю. Многоэлементная модель среды, описывающая переменные сложные неизотермические процессы нагружения. Дисс. д-ра физ.-мат. наук. Киев, 1991. — 361с.

напряжений в часть элементов структуры при макроскопическом пропорциональном монотонном нагружении; наибольшие растягивающие напряжения возникают в элементе структуры в момент наступления текучести и др., раскрывают новые возможности при описании сложной картины деформирования и разрушения.

Хотя на основе перечисленных принципов возможности модели значительно расширились, в рамках двухуровневой модели среды не удастся описать в обычных для механики твердого тела терминах явления, связанные с площадкой и зубом текучести; влияние фактора анизотропии кристаллов на текучести и разрушения поликристалла. В данной работе рассмотрим трехуровневую модель, описывающую с единых позиций как процесс описываемые двухуровневых моделей среды [15–19], так и явления, связанные с нарушением монотонности диаграмм деформирования, уменьшения пластичности с увеличением предела текучести и другие эффекты.

1. Общие уравнения трехуровневой конститутивной модели. Фундаментальные понятия напряжения и деформации вводятся на трёх уровнях структуры: материальной анизотропной частицы – $\tilde{t}_{ij}$, $\tilde{d}_{ij}$, подэлемента – $\bar{t}_{ij}$, $\bar{d}_{ij}$ представительного объема – t_{ij} , d_{ij} . Подэлемент отождествляется со множеством всех материальных частиц внутри представительного объема ΔV_0 , имеющих одинаковый девиатор необратимых деформаций. Частицы, принадлежащие одному и тому же подэлементу, могут иметь различные положения и ориентации кристаллической решётки в представительном объёме ΔV_0 . Количество всех частиц с одинаковым девиатором необратимых деформаций определяет вес одного подэлемента, который не меняется в процессе нагружения.

На основе уравнений равновесия и геометрических соотношений Коши в работе [20] получены соотношения

$$t_{ij} = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \tilde{t}_{ij} dV, \quad d_{ij} = \langle \tilde{d}_{ij} \rangle, \quad \langle \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} \rangle = t_{pq} d_{pq}, \quad (1.1)$$

где $\tilde{t}_{ij}$, $\tilde{d}_{ij}$ – тензоры напряжений и деформаций в каждой точке области ΔV_0 соответственно, $\langle \cdot \rangle$ – знак осреднения по объёму ΔV_0 .

Для учета явления когерентности локальных процессов деформирования в [16] сформулирован принцип: все виды взаимодействия между материальными частицами в представительном объеме формируются под влиянием лишь одних осредненных связей. Согласно этому принципу, каждый подэлемент непосредственно взаимодействует со средой, наделенной осредненными свойствами, а согласованность непрерывной модели с первым законом термодинамики обеспечивается на основе постулата об ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций [16, 21]

$$(\tilde{t}_{ij} - t_{ij})(\tilde{d}_{ij} - d_{ij}) = 0. \quad (1.2)$$

Разложив компоненты тензоров напряжений и деформаций на девиаторные σ_{ij} , ε_{ij} и шаровые составляющие $\sigma_0 \delta_{ij}$, $\varepsilon_0 \delta_{ij}$

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \tilde{t}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_0 \delta_{ij}, \quad \bar{t}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_0 \delta_{ij}, \\ \bar{d}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\varepsilon}_0 \delta_{ij}, \quad \tilde{d}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_0 \delta_{ij}$$

на основе (1.2) установим первый тип уравнений связи макро и микросостояний

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}) = 3(\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0)(\tilde{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0). \quad (1.3)$$

Для флуктуаций девиаторных составляющих примем линейные зависимости

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = B(\bar{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}), \quad (1.4)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B'(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}), \quad (1.5)$$

где B, B' — внутренние параметры, содержащие информацию о характеристиках материальных частиц, которые отражают различие между флуктуациями напряжений и флуктуациями деформации на исследованных структурных уровнях.

Микроскопические переменные делятся на переменные, усреднение значений которых зависят единственным образом от данных на поверхности представительного объёма, и переменные, зависящие и от элементов структуры материала. В [18, 21] предложен принцип: в реальных взаимодействиях несоответствие между макроскопической меры с подходящим средним значением микроскопического аналога, принимает экстремальное значение. В частности

$$\Delta = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle - \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = \text{Extr}, \quad \langle \tilde{\sigma}_0 \tilde{\varepsilon}_0 \rangle - \langle \tilde{\sigma}_0 \rangle \langle \tilde{\varepsilon}_0 \rangle = \text{Extr}. \quad (1.6)$$

При описании необратимых процессов компоненты девиаторов тензоров деформаций $\tilde{\varepsilon}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и элемента тела ε_{ij} представляются в виде суммы обратимых $\tilde{\varepsilon}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, e_{ij}$ и необратимых компонент — $\tilde{p}_{ij}, \bar{p}_{ij}, p_{ij}$: $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{e}_{ij} + \tilde{p}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{p}_{ij}$, $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$. С учетом принятого определения понятия под-элемента $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}$ соотношение (1.4), можно представить в виде

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = B(\bar{e}_{ij} - \tilde{e}_{ij}). \quad (1.7)$$

Выражение для экстремума несоответствия между макроскопической меры с подходящим средним значением микроскопического аналога (1.6) примем в виде

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' = \text{Extr}. \quad (1.8)$$

$$\Delta' = \left\langle \left\langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{e}_{ij} \right\rangle_{\Omega} - \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij} \right\rangle_{\Psi}, \quad \Delta'' = \left\langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle_{\Psi} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (1.9)$$

В формулах (1.9) $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$ — знак осреднения по фактору ориентации кристаллической решетки Ω

$$\bar{t}_{ij} = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle_{\Omega}, \bar{d}_{ij} = \langle \tilde{d}_{ij} \rangle_{\Omega}, \bar{\sigma}_{ij} = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{\Omega}, \dots \quad (1.10)$$

а $\langle \cdot \rangle_{\Psi}$ — по параметру разброса z

$$t_{ij} = \int_0^{\infty} \bar{t}_{ij} y(z) dz, \sigma_{ij} = \int_0^{\infty} \bar{\sigma}_{ij} y(z) dz, d_{ij} = \int_0^{\infty} \bar{d}_{ij} y(z) dz, \varepsilon_{ij} = \int_0^{\infty} \bar{\varepsilon}_{ij} y(z) dz, \quad (1.11)$$

где $y(z)$ – плотность распределения предельных упругих деформаций $\tau = \tau_0 + \theta \cdot z$. Различающий параметр z позволяет проследить за изменением предела упругости одного и того же подэлемента при различных условиях испытания (τ_0, θ – зависят от температуры, скорости нагружения и др.).

Выражения (1.1), (1.3), (1.5), (1.7)–(1.11) не содержат ссылки на свойства материала, поэтому справедливы как для описания обратимых, так и необратимых процессов деформирования. На их основе можно построить определяющие уравнения на макроскопическом уровне, если известны определяющие уравнения на микроскопическом уровне.

2. Определяющие уравнения на микроскопическом уровне. В обратимой области деформирования физические уравнения имеют наиболее простой вид

$$\tilde{t}_{ij} = \tilde{C}_{ijnm} \tilde{d}_{nm}, t_{ij} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) d_{nn} \delta_{ij} + 2G d_{ij}. \quad (2.1)$$

На основе системы (1.1), (1.3) и (1.5), (1.12) можно вычислить макроскопические константы упругости G, K на основе констант $\tilde{C}_{ijnm}$ элементов структуры. Для однофазных поликристаллических материалов получены простые соотношения [21]

$$\Delta' = \frac{-6(A-1)^2 b \sigma_{ij} e_{ij}}{(3+2A+5Ab)[5+(2+3A)b]} = \text{Extr}, \quad G = C_{44} \frac{5+(2+3A)b}{3+2A+5Ab}, \quad b = \frac{B}{2C_{44}}. \quad (2.2)$$

Из (2.2) следуют формулы для модуля сдвига G и параметра неоднородности B [21]

$$G = G_M = \sqrt{G_V G_R}, \quad G_V = C_{44} \frac{3A+2}{5A}, \\ G_V = C_{44} \frac{5}{2A+3}, \quad b = \frac{B}{2C_{44}} = \sqrt{\frac{2A+3}{A(3A+2)}}, \quad (2.3)$$

где G_V – модуль сдвига, полученный Войгтом [22] в 1928 году в рамках приближения $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$; G_R – модуль сдвига, полученный Рейсом [23] в 1929 году в рамках приближения $\tilde{t}_{ij} = t_{ij}$.

В необратимой области деформирования физические уравнения имеют более комплексную структуру. Локальные законы необратимого деформирования статистического типа, предложенные другими авторами, связываются между собой только соотношениями типа (1.5). На самом деле под действием направленного распределения макроскопических напряжений во всем конгломерате и в ближайших материальных частицах происходит некоторая потеря индивидуальности локального элемента. Принципа осредненных связей распространяется не только на кинематические уравнения связей флуктуаций напряжений и деформаций (1.3)–(1.5), но и на параметры состояния [16,18]. Подэлементы в конгломерате не могут деформироваться сами по себе, а согласованным образом. Явление самосогласования процессов необратимого деформирования в рамках принципа осредненных связей представляется

в виде закона об одинаковой направленности процессов необратимого деформирования подэлементов в конгломерате [18]

$$\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{p}} = \frac{dp_{ij}}{dp}, \quad \bar{p} = \sqrt{\bar{p}_{ij}\bar{p}_{ij}}, \quad p_{ij} = \langle \bar{p}_{ij} \rangle \quad (2.4)$$

и условием работы подэлементов за пределами упругости (условия текучести) [18]

$$\bar{e}_{ij} \frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} = \tau(z, \gamma, T, s) + \bar{r} \frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}}, \quad d\bar{\lambda} = \sqrt{d\bar{p}_{ij}d\bar{p}_{ij}},$$

$$\gamma = \frac{1}{\Psi'} \int_0^{\Psi'} \sqrt{\dot{\bar{p}}_{ij}\dot{\bar{p}}_{ij}} d\Psi, s = \langle \bar{s} \rangle, \quad (2.5)$$

где Ψ' — текущий вес необратимо деформированных подэлементов, $\bar{r}$ — трансляционное упрочнение подэлемента, γ — осредненная скорость необратимой деформации в подмножестве подэлементов деформируемых за пределами упругости, T — температура, $s = \langle \bar{s} \rangle$ — структурный параметр, характеризующий осредненное изотропное упрочнение подэлементов. Таким образом, влияние процесса самосогласования процессов необратимого деформирования на отклик подэлементов в конгломерате отражается путем простой замены локальных параметров состояния в физических законах подэлементов на их средние значения.

Закон об одинаковой направленности процессов необратимого деформирования подэлементов в конгломерате (2.4) и условие текучести (2.5) дополнены постулатом [18], согласно которому в подмножестве необратимо деформированных подэлементов в каждый момент времени существует хотя бы один подэлемент $z = z^*$, в котором

$$\bar{e}_{ij}(z^*, \dots) = \tau(z^*, \dots) \frac{dp_{ij}}{d\bar{\lambda}} + a\bar{p}_{ij}(z^*). \quad (2.6)$$

Равенства (2.4) следует рассматривать как условие о допустимых формах траекторий необратимых деформаций подэлементов в конгломерате. Это принципиальный новый закон движения локальных деформаций резко отличается от классических подходов, связанных с наличием поверхности текучести [15, 18]. В связи с этим изменяется понятие критерия текучести (2.5). На основе (2.4)–(2.6) и диаграмм деформирования при пропорциональном нагружении, перечисленные в водной части эффекты деформирования при сложном нагружении описываются естественным образом.

При построении модели следует выполнить и требование единственности решения задачи представления реального материала в модели. Для этого необходимо установить структуру зависимости $\tau(z, \gamma, T, s)$. В работе [16] был сформулирован закон центрального приращения, согласно которому предельные упругие деформации подэлементов можно представить в виде суммы двух независимых частей

$$\tau(z, \gamma, T, s) = \tau_*(z, \gamma, T) + s, \quad (2.7)$$

где $\tau_{\bullet}(z, \gamma, T)$ – предельные упругие деформации подэлементов в структурно стабильном состоянии; s – приращение предельных упругих деформаций подэлементов в результате изменения структуры при необратимом деформировании. Следуя рекомендациям [9, 16] предельные упругие деформации подэлементов в структурно стабильном состоянии представим в виде

$$\tau_{\bullet}(z, \gamma, T) = \tau_0(\gamma, T) + \theta(\gamma, T)z, \quad (2.8)$$

где $\tau_0(\gamma, T)$ – наименьший предел упругости в системе подэлементов, $\theta(\gamma, T)$ – параметр, влияющий на форму диаграммы деформирования материала.

Для более полного понимания сути исследуемой в работе трехуровневой конститутивной модели ограничимся случаем пропорционального нагружения

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon} = \frac{p_{ij}}{p}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}, \quad p = \sqrt{p_{ij}p_{ij}}. \quad (2.9)$$

Если к (20) добавить допущение об упругой изотропии подэлементов, выражение (5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}}{2G} - \frac{\sigma}{2G} &= \bar{e} - e = \frac{b'}{1+b'}(p - \bar{p}), \\ e &= \sqrt{e_{ij}e_{ij}}, \quad \bar{e} = \sqrt{\bar{e}_{ij}\bar{e}_{ij}}, \quad b' = B'/2G. \end{aligned} \quad (2.10)$$

На основе (16) (18)–(20), на участке линейного упрочнения подэлементов, получим следующие формулы для модулей обратимых и необратимых деформаций

$$\begin{aligned} \bar{e}(z, z', b) &= \frac{\bar{\sigma}(z, z', b)}{2G} = \begin{cases} \theta \frac{(1-\chi)bz' + \chi(1+b)z'}{b+\chi} + \tau_0, & z \leq z', \\ \theta z + \tau_0, & z > z', \end{cases} \\ \bar{p}(z, z', b') &= \begin{cases} \theta \frac{(1-\chi)(1+b')(z'-z)}{b'+\chi}, & z \leq z', \\ 0, & z > z', \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где χ – коэффициент линейного упрочнения подэлементов. Параметр z' разделяет зоны обратимо и необратимо деформированных подэлементов. Согласно (2.8), (2.10) параметр z' выражается через наблюдаемые макроскопические величины

$$\theta z' + \tau_0 = e + \frac{b'}{1+b'}p. \quad (2.12)$$

При пропорциональном нагружении слагаемое, связанное с изотропным упрочнением, не влияет на макроскопические процессы деформирования, поэтому при записи формул (2.11) пренебрегли.

Подставляя (2.11) в (1.12) и интегрируя полученные выражения, установим зависимость между макроскопическими модулями девиаторов обратимых и необратимых деформаций в следующем параметрическом виде

$$p(z', b') = \frac{(1 - \chi)(1 + b')\theta}{b' + \chi} \varphi(z'), \quad \varphi(z') = \int_0^{z'} (z' - z) y(z) dz, \quad (2.13)$$

$$e(z', b') = \theta \left(z' - \frac{(1 - \chi)b'}{b' + \chi} \varphi(z') \right) + \tau_0. \quad (2.14)$$

3. Определение параметров неоднородности полей напряжений и деформаций. В формулах (1.5), (1.7), (2.12)–(2.14) фигурируют неизвестные параметры $B, B' = 2Gb'$, которые отражают неоднородности распределения напряжений и деформаций. Для определения этих параметров в связанной подстановке необходимо построить выражение для несоответствия мер (1.8), которая согласно (1.9) складывается из двух составляющих. Как и в работе [21] будем полагать, что выражение для несоответствия (2.2) остается справедливой и в необратимую область деформирования. Для составляющей несоответствия Δ'' (1.9) с учетом (21) получим

$$\Delta'' = 2G \frac{b'}{(1 + b')^2} \left[\langle \bar{p} \rangle^2 - \langle \bar{p}^2 \rangle \right], \quad \bar{p}^2 = \bar{p}_{ij} \bar{p}_{ij}. \quad (3.1)$$

Если экстремум несоответствия мер рассматривать не в связанной подстановке, полагая

$$\Delta' = \left\langle \langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{e}_{ij} \rangle_{\Omega} - \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij} \right\rangle_{\Psi} = \text{Extr}, \quad \Delta'' = \langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij} \rangle_{\Psi} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \text{Extr},$$

тогда параметр B можно вычислить на основе (2.3). Для несоответствия Δ'' из (3.1) с учетом (2.11), (2.13) получим выражение [17, 18]

$$\Delta'' = -2 \frac{(1 - \chi)b' u_p}{(b' + \chi)(1 + b')} = \text{Extr}, \quad u_p = \int p d\sigma - \frac{G\chi}{1 - \chi} p^2. \quad (3.2)$$

Так как величина u_p определяется на основе экспериментальных диаграмм материала, при нахождении экстремального значения несоответствия Δ'' , предполагается $u_p = \text{const}$. В этом случае из (3.2) следует формула, полученная в [17, 18]

$$b' = \sqrt{\chi}, \quad B' = 2G\sqrt{\chi} = \sqrt{2G \cdot 2G_0}, \quad (3.3)$$

где константа $\chi = G_0/G$ определяется на основе диаграмм деформирования элемента тела на линейных участках упрочнения.

Рассмотрим метод определения параметров b' и b в предположении $b' = k \cdot b$, $k = \text{const}$. Подставляя (2.2) и (3.2) в (1.8), получим

$$\frac{-6(A - 1)^2 b u_e}{(3 + 2A + 5Ab)[5 + (2 + 3A)b]} - 2 \frac{(1 - \chi) k b u_p}{(k b + \chi)(1 + k b)} = \text{Extr}, \quad (3.4)$$

где

$$u_e = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2Ge^2 = 2G \left[\tau_o + \theta \int_0^{z'} zy(z)dz + \theta z' \left(1 - \int_{z'}^{\infty} zy(z)dz \right) \right]^2, \quad (3.5)$$

$$u_p = 2G \frac{(1-\chi)(1+kb)\theta^2}{kb+\chi} \left[\int_0^{z'} (z'-z)^2 y(z)dz - \left(\int_0^{z'} (z'-z)y(z)dz \right)^2 \right]. \quad (3.6)$$

Дифференцируя (3.4) по параметру b при условии $u_e = \text{const}$, $u_p = \text{const}$, установим уравнение связующая неоднородности деформирования и нагружения в представительном объеме с физическими характеристиками материальных частиц и подэлементов

$$Z(b, A, \chi) = V(z', z_o), \quad z_o = \tau_o / \theta, \quad (3.7)$$

где

$$Z(b, A, \chi) = \frac{(\chi + kb)^{1.5} (1 + kb)^{0.5}}{(5Ab + 3 + 2A)[5 + (2 + 3A)b]} \sqrt{\frac{30(A-1)^2 (3 + 2A - A(2 + 3A)b^2)}{(1-\chi) \cdot k \cdot ((kb)^2 - \chi)}}, \quad (3.8)$$

$$V(z', z_o) = \frac{\sqrt{\int_0^{z'} (z'-z)^2 y(z)dz - \left(\int_0^{z'} (z'-z)y(z)dz \right)^2}}{z_o + \int_0^{z'} zy(z)dz + z'(1 - \int_0^{z'} y(z)dz)}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\sqrt{\chi}}{k} \leq b \leq \sqrt{\frac{3 + 2A}{A(2 + 3A)}}, \quad z_o = \frac{\tau_o}{\theta}. \quad (3.10)$$

В дальнейшем выражение (3.7) назовём уравнением связанности масштабных уровней, а параметр k — коэффициент связанности. Отметим, что в левой части уравнения связи масштабных уровней (3.7) фигурируют механические характеристики материальных частиц (функция $Z(A, \chi, b)$): параметр анизотропии A и коэффициент упрочнения χ , а в правой части — характеристики системы подэлементов (функция $V(z', \tau_o, \theta)$). Из (3.7)–(3.10) следует, что параметр неоднородности b в связанной подстановке экстремума несоответствия мер на уровнях материальных частиц и систем подэлементов изменяется в процессе необратимого деформирования. Если плотность распределения случайного параметра z известна, тогда для заданных A, χ из (3.7)–(3.10) определим z' для каждого значения параметра b , а затем из (2.13) установим зависимость между макроскопическими напряжениями и деформациями. Если в качестве функции плотности распределения предельных упругих деформаций $y(z)$ ($\tau = \tau_o + \theta \cdot z$) примем выражение

$$y(z) = \Theta^2 z e^{-\Theta \cdot z}, \quad (3.11)$$

то после интегрирования в (3.5) получим для функции $\varphi(z')$ формулу

$$\varphi(z') = \frac{\Theta z' - 2 + (2 + \Theta z') e^{-\Theta \cdot z'}}{\Theta}, \quad (3.12)$$

где Θ — константа материала, независящая от условий испытания.

Численный анализ соотношений (3.7) с учетом (3.9) и (3.11) показывает, что $V(z', z_0)$ можно с достаточной точностью аппроксимировать выражением

$$V(z, z_0) \approx V'(z, z_0) = \frac{c(z_0)z^n}{1 + d(z_0)z^n}, \quad (3.13)$$

$$c(z_0) = \frac{V(z_1, z_0)V(z_2, z_0)(z_1^n - z_2^n)}{[V(z_1, z_0) - V(z_2, z_0)](z_1 z_2)^n}, \quad d(z_0) = \frac{V(z_2, z_0)z_1^n - V(z_1, z_0)z_2^n}{[V(z_1, z_0) - V(z_2, z_0)](z_1 z_2)^n}. \quad (3.14)$$

Сопоставление функций $V(z, z_0)$ и $V'(z, z_0)$ проводилось при $n = 1.5$, $z_1 = 10^{-3}$, $z_2 = 7 \cdot 10^{-3}$, $z_0 = 5 \cdot 10^{-4}$, $z_0 = 10^{-3}$. Подставляя (3.13) в (3.7), установим простую аналитическую зависимость для переменной z'

$$z'(b, z_0) = \left[\frac{Z(b, A, \chi)}{c(z_0) - d(z_0)Z(b, A, \chi)} \right]^{2/3}. \quad (3.15)$$

Для упрощения записей, аргументы A, χ при функции $z'(b, z_0)$ $z'(b, z_0, A, \chi)$ не указаны.

Из анализа (3.8) следует весьма сложный вид функции $M(A, \chi, b)$. На рис. 1 представлены диаграммы $Z(b, A, \chi) \rightarrow Z(b, A)$ при двух значениях параметра анизотропии A и четырёх значениях коэффициента упрочнения χ . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\Theta = 800$, $\tau_0 = 10^{-3}$, $k = 0.7$; $\chi_1 = 4 \cdot 10^{-3}$, $\chi_2 = 10^{-3}$, $\chi_3 = 10^{-3}$ — $A = 1.5$ (штрих пунктирные линии); $\chi_1 = 4 \cdot 10^{-3}$, $\chi_2 = 6.6 \cdot 10^{-4}$, $\chi_3 = 10^{-3}$ — $A = 3$ (сплошные линии). Согласно представленным на рис. 1 диаграмм, коэффициент упрочнения оказывает не только количественное, но и качественное влияние на поведение модели. Функция $Z(A, \chi, b)$ в интервале $\chi_2 < \chi \leq \chi_1$ имеет только одну точку перегиба, а в интервале $\chi_3 \leq \chi < \chi_2$ — две точки перегиба. При двух точках перегиба на графике обнаруживаются два экстремума. Кроме того, существует и критическое состояние ($\chi = \chi_2$), в котором

$$\frac{\partial Z(b, A, \chi)}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z(b, A, \chi)}{\partial b^2} = 0. \quad (3.16)$$

На основе (3.16) можно установить границу раздела качественных изменений свойств модели $\chi_* = \chi(A)$. Если коэффициент упрочнения $\chi > \chi_*$ тогда диаграмма деформирования, построенная на основе (2.13), (3.12) имеет монотонный вид. При $\chi < \chi_*$ на диаграмме деформирования появляется зуб текучести, а при $\chi = \chi_*$ — площадка текучести.

Анализ (3.15) с учетом (3.8), (3.14) показывает резкое уменьшение параметра b' , при переходе от обратимого деформирования к необратимому деформированию. Относительные флуктуации деформаций увеличиваются с ростом p , а относительные флуктуации напряжений уменьшаются. При $\chi \leq \chi_*$ падение b' на начальном этапе течения настолько резкое, что макроскопическая деформация растет при постоянном или даже при снижении напряжения. На

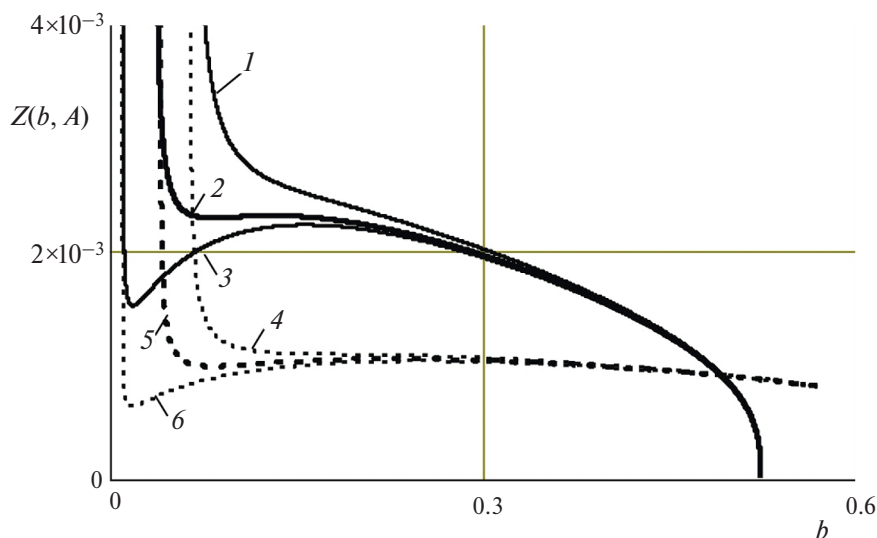


Рис. 1. Влияние коэффициента упрочнения на взаимосвязь масштабных уровней.

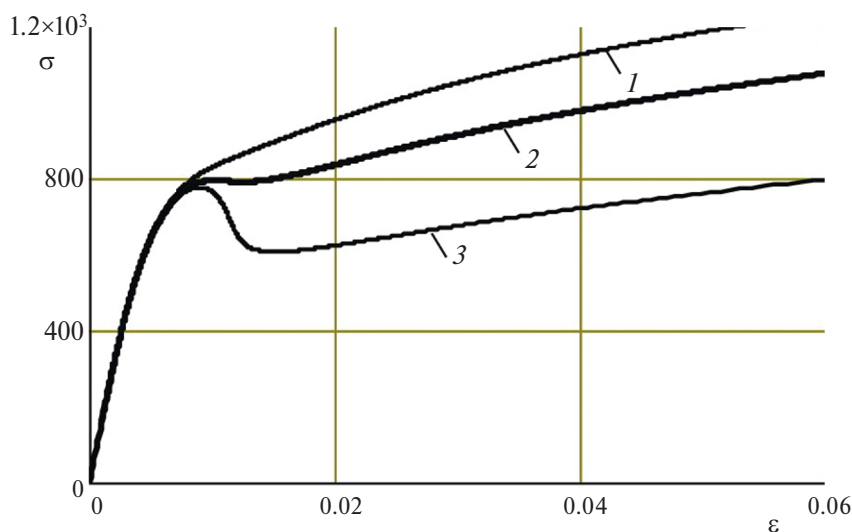


Рис. 2. Влияние коэффициента упрочнения на вид диаграмм деформирования, σ [МПа].

рис. 2 представлены диаграммы деформирования, рассчитанные на основе (2.13), (2.14) с учетом (3.15), для трех значений коэффициента упрочнения: $\chi_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ (кривая – 1), $\chi_2 = 10^{-3}$ (кривая – 2), $\chi_3 = 10^{-4}$ (кривая – 3). Остальные параметры имеют следующие значения: $\tau_0 = 10^{-3}$, $\Theta = 500$, $A = 3$, $k = 1$, $C_{44} = 11.6 \cdot 10^4$ МПа, $z_0 = 10^{-3}$. Заметим, что при замене переменную z' в (2.13), (2.14) на $z'(b, z_0)$ (3.15), имеем: $p(z', b') \rightarrow p(b')$, $e(z', b') \rightarrow e(b')$, $\varphi(z') \rightarrow \varphi(b')$.

4. Анализ общей зависимости для максимальных нормальных напряжений в системе подэлементов. Представляя шаровые тензоры деформаций в виде обратимых $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\sigma}_0/3K$ и необратимых частей $\bar{p}_0$, постулат об ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций (2) примет вид

$$(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)^2 + K(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)(\bar{p}_0 - p_0) = \frac{K}{3B}(\bar{\sigma} - \sigma)^2, \quad \bar{\varepsilon}_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{K} + \bar{p}_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{K} + p_0. \quad (4.1)$$

Предполагая в (4.1), что необратимое изменение объема пропорционально длине траектории необратимой деформации: $\bar{p}_0 = k_0 \bar{p}$, $\bar{p}_0 = \langle \bar{p}_0 \rangle = k_0 p$, получим [19]

$$\bar{\sigma}_0 - \sigma_0 = M(\bar{\sigma} - \sigma), \quad (4.2)$$

$$M = \frac{(1+b)(1+\mu)}{2b(1-2\mu)} \left(-k_0 \pm \sqrt{k_0^2 + \frac{4(1-2\mu)b}{3(1+\mu)(1+b)^2}} \right), \quad (4.3)$$

где μ — коэффициент Пуассона, k_0 — константа материала. Согласно [19] выбор знака в (4.3) имеет принципиальное значение. При знаке „+” подэлементы с малыми значениями пределов текучести необратимо деформируются в условиях действия высоких растягивающих объемных напряжений, а подэлементы с большими значениями пределов текучести подвергаются действиям сжимающих объемных напряжений. При отрицательном знаке в (4.3) наблюдается обратная картина.

Известно, что объемные необратимые деформации металла малы и являются эффектами второго порядка по сравнению с упругим и поэтому выражение для параметра M можно упростить

$$M = \pm \sqrt{\frac{(1+\mu)}{3(1-2\mu)b}}. \quad (4.4)$$

Флуктуации объемных напряжений в системе подэлементов (4.1) с учетом (4.4) можно ещё выразить через флуктуации модулей девиаторов необратимых деформаций

$$\bar{\sigma}_0(b, z, z', \tau_o, z_o) = \sigma_0 \pm \frac{\sqrt{2GKb}}{1+b} [p(b, z', \tau_o, z_o) - \bar{p}(b, z, z', \tau_o, z_o)]. \quad (4.5)$$

Согласно (4.5) объемные напряжения в упруго деформированных подэлементах ($\bar{p}(z', z', b, \tau_o, z_o) = 0$) линейно зависят от макроскопической необратимой деформации $p = p(z', b, \tau_o, z_o)$. Коэффициент пропорциональности аннулируется только в предельных вариантах $b = \infty$ (однородное деформированное состояние), $b = 0$ (однородное напряженное состояние) и принимает наибольшее значение при $b = 1$. Как следует из (2.3) значение $b = 1$ соответствует чисто упругому поведению изотропного тела.

Главные значения девиаторов напряжений $\bar{\sigma}_1$ в подэлементах можно выразить через модули $\bar{\sigma}$ и параметром вида девиатора d

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}_1, \quad \bar{\sigma}_1 = D(d)\bar{\sigma}, \quad D(d) = 1/\sqrt{2(1+d+d^2)}, \quad d = \bar{\sigma}_3/\bar{\sigma}_1 = \sigma_3/\sigma_1. \quad (4.6)$$

Отметим, что виды девиаторов в подэлементах и элементе тела совпадают, поэтому параметр d принимает одинаковые значения для всего множества подэлементов и выражается через макроскопические величины. На основе (4.5), (4.6) в работе [19] получено общее выражение для максимальных нормальных напряжений $\bar{\tau}_1$ в системе подэлементов.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1(b, z, z', \tau_o, z_o) = & \sigma_0 + D(d)\bar{\sigma}(b, z, z', \tau_o, z_o) \pm \\ & \pm \frac{\sqrt{2GKb}}{1+b} [p(b, z', \tau_o, z_o) - \bar{p}(b, z, z', \tau_o, z_o)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Формулы (4.1)–(4.7) были установлены и исследованы (при допущении $b = \text{const}$) в [19]. В рамках трехуровневой конститутивной модели, согласно (3.15) параметр b становится зависящим от z' и характеристик материала. При этом z' выражается через b и системы констант материала A, χ, τ_o, z_o в явном виде. Тогда формулы для необратимых деформаций и модуля девиатора тензора напряжений можно представить в удобном для анализа виде

$$\begin{aligned} p(b, \tau_o, z_o) = & \frac{\tau_o}{z_o} \frac{(1-\chi)(b+1)}{b+\chi} \varphi(b, z_o), \\ \varphi(b, z_o) = & \frac{\Theta z'(b, z_o) - 2 + (2 + \Theta z'(b, z_o))e^{-\Theta z'(b, z_o)}}{\Theta}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\sigma(b, \tau_o, z_o) = 2G\tau_o \left[1 + \frac{z'(b, z_o)}{z_o} - \frac{(1-\chi)b\varphi(b, z_o)}{(b+\chi)z_o} \right], \quad (4.9)$$

$$z'(b, z_o) = \left[\frac{Z(b, A, \chi)}{c(z_o) - d(z_o)Z(b, A, \chi)} \right]^{2/3}. \quad (4.10)$$

Функция $Z(b, A, \chi)$ при заданных значениях параметров A, χ определяется на основе формулы (3.8), а коэффициенты $c(z_o), d(z_o)$ из (3.14). Задавая различные значения параметра b в интервале неравенства (4.4) из (4.10) находим переменную $z'(b, z_o)$, а затем из (4.8)–(4.10) устанавливаем зависимость $\sigma \sim p$.

Детальное исследование формулы (4.7) в предположении $b = \text{const}$ проводилось в работе [19]. Анализ (4.7) с учетом формул (3.3), (4.8), (4.9) показывает, что качественные закономерности изменения наибольших нормальных напряжений $\bar{\tau}_1$ в системе подэлементов, установленные в [19] сохраняются и при $b \neq \text{const}$. В зависимости от знака корня уравнения ортогональности (4.4) возможны два варианта: наибольшее растягивающее напряжение возникает в граничащем подэлементе, разделяющем текущую зону необратимо деформированных подэлементов от обратимой зоны ($M > 0$) или в подэлементе с наименьшим пределом упругости ($M < 0$). Показано, что в случае $M > 0$ в каждом подэлементе наибольшее нормальное напряжение возникает в момент наступления текучести, затем наблюдается уменьшение с ростом

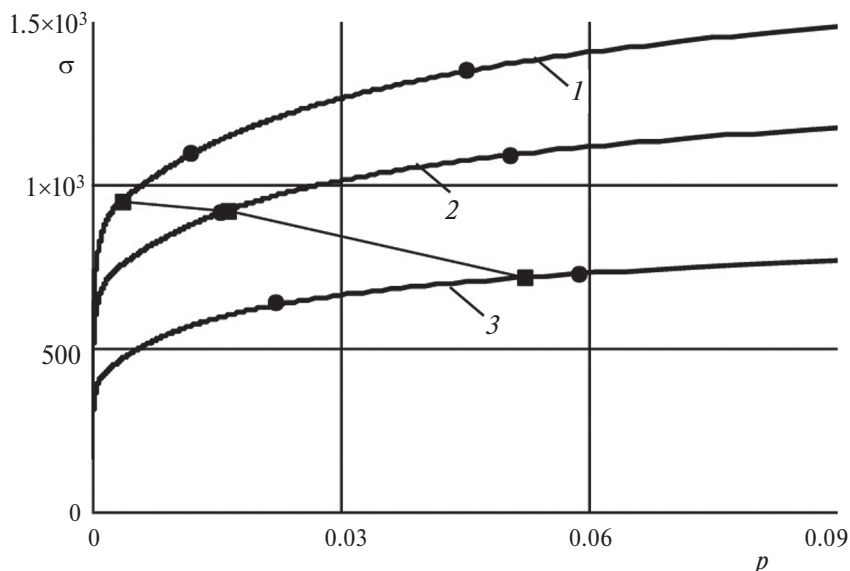


Рис. 3. Диаграммы деформирования при различных условиях испытания, σ [МПа].

необратимой деформации. В данном варианте опасность разрушения подэлемента минует после наступления текучести. В зависимости от прочностных характеристик подэлементов при $M > 0$ возможны все варианты разрушения. Если $M < 0$, возможно только вязкое разрушение.

Численные исследования поведения модели проведем для гипотетического материала, диаграммы деформирования которого при трех условиях испытания (трех разных: скоростей деформирования, температур, размеров зерна). На рис. 3 представлены (сплошные линии) диаграммы деформирования, построенные на основе (4.6)–(4.10) при следующих характеристиках материала: на уровне кристалла – $A = 2.6$, $K = 17.3 \cdot 10^4$ МПа, $C_{44} = 11.6 \cdot 10^4$ МПа и на уровне систем подэлементов – $\Theta = 500$, $\tau_0 = 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-3}$, $2.5 \cdot 10^{-3}$; $z_\infty = 1 \cdot 10^{-3}$, $0.67 \cdot 10^{-3}$, $0.5 \cdot 10^{-3}$, $\chi = 4 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 4 представлены диаграммы предельных растягивающих напряжений в системе подэлементов для материала диаграмма деформирования, у которого совпадает с диаграммой – 3 на рис. 3. Сплошные диаграммы соответствуют положительному корню уравнения ортогональности, а прерывистые – отрицательному. Предельная диаграмма изменения $\bar{\tau}_1(z, z')$ совпадает с диаграммами нагружения обратимо деформированных подэлементов $z = z'$ если $M > 0$ (кривая – 1) и с диаграммой нагружения подэлемента с наименьшим пределом текучести $z = 0$, если $M < 0$ (кривая – 5). Как уже было отмечено при $M > 0$ наибольшее нормальное напряжение в подэлементе возникает в момент наступления текучести. Диаграммы деформирования подэлементов с исходными пределами текучести: $\tau = \tau_0(1 + z/z_\infty) = 0.0025, 0.0041, 0.0085$ для варианта $M > 0$ на рис. 4 обозначены соответственно цифрами 2, 3, 4, а для $M < 0$ – 6, 7, 8. Наибольшие нормальные напряжения в подэлементах

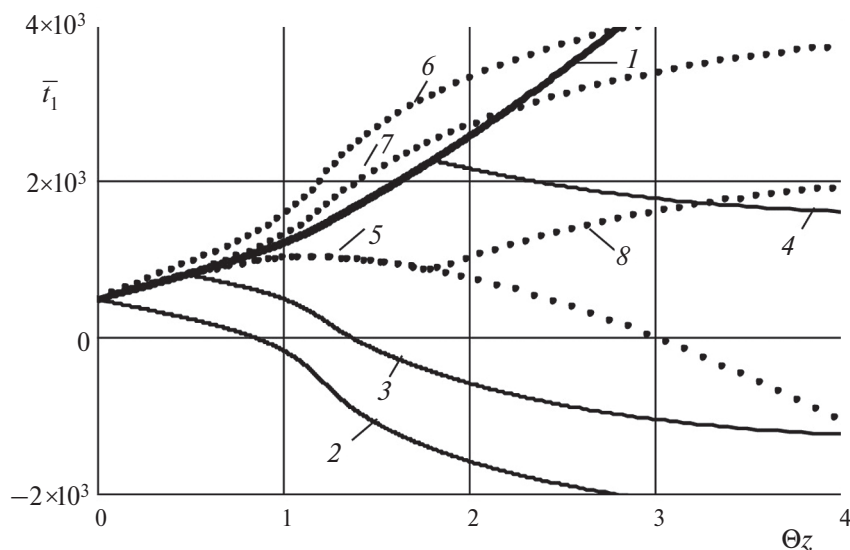


Рис. 4. Предельные растягивающее напряжение в системе подэлементов, $\bar{\tau}_1$ [МПа].

с малыми значениями пределов текучести изменяются по более сложным законам (кривые — 2, 3 при $M > 0$ и 6, 7 при $M < 0$), чем в подэлементах с большими значениями пределов текучести (кривая — 4 при $M > 0$ и кривая — 8 при $M < 0$). С ростом необратимой деформации уменьшение наибольшего нормального напряжения в часть подэлементов сопровождается изменением знака. Эффект циклического деформирования, в часть подэлементов, при монотонном макроскопическом нагружения, открытый в работе [19] демонстрирует с одной стороны степень сложности взаимодействий в представительном объеме, а с другой — сложные явления и процессы описываются на основе простых и ясных принципов. При $M < 0$ напряжения в обратимо деформированных подэлементах совпадают с текущим напряжением в подэлементе с минимальным пределом текучести. После наступления текучести в данном подэлементе нормальное напряжение $\bar{\tau}_1(z, z')$ растет. Интенсивность роста $\bar{\tau}_1(z, z')$ с увеличением необратимой деформации затухает, стремясь к постоянному значению. Следовательно, поведение модели в случаях $M > 0$ и $M < 0$ качественно различаются. В силу этого спектр возможности исследуемой модели значительно шире, чем у других многоэлементных моделей.

5. Описание эффекта снижения пластичности с увеличением прочностных характеристик материала. Предельные диаграммы изменения наибольшего нормального напряжения в системе подэлементов определяются на основе (4.7) при условии $z = z'$. В этом случае согласно (2.11)

$$\bar{\sigma}(z', z') = 2G\tau_0 \left(1 + \frac{z'}{z_0} \right) = \sigma + \frac{2Gb}{1+b} p, \quad \bar{p}(z', z') = 0,$$

и формула (4.7) для варианта модели $M > 0$ принимает вид

$$\bar{\tau}_1(b, \tau_0, z_0) = (A + D(d))\sigma(b, \tau_0, z_0) + \frac{2G}{1+b} \left(bD(d) + \sqrt{\frac{Kb}{2G}} \right) p(b, \tau_0, z_0). \quad (5.1)$$

Диаграммы $\bar{\tau}_1(b, \tau_0, z_0)$ при одноосном растяжении для трех значений системы параметров τ_0, z_0 (соответствуют характеристикам диаграмм, представленных на рис. 3) показаны на рис. 5. Кривые, обозначенные одинаковыми цифрами на рис. 3 и 5, соответствуют одинаковым механическим характеристикам материала. Согласно рис. 5 на диаграммах изменения наибольшего нормального напряжения в системе подэлементов выделяются три участка. На начальном этапе необратимого деформирования диаграмма $\bar{\tau}_1(b, \tau_0, z_0)$ близка к линейной. При значениях $\bar{\tau}_1(b, \tau_0, z_0) > 2000$ МПа зависимость $\bar{\tau}_1(b, \tau_0, z_0)$ также близка к линейной. Нелинейный переход от одного участка к другому характеризуется резким падением параметра кинематической связи как на уровне материальных частиц, так и на уровне подэлементов. Если в обратной области деформирования относительные флуктуации напряжений мало отличаются от относительных флуктуаций деформаций, то на начальном участке необратимого течения происходит быстрое уменьшение параметра b . Вследствие этого относительная неоднородность распределения деформаций сильно увеличивается по сравнению с относительной неоднородностью распределения напряжений.

На втором линейном участке роста наибольшего нормального напряжения $\bar{\tau}_1(b, \tau_0, z_0)$ наклон $d\bar{\tau}_1/dz'$ уменьшается с ростом пологости диаграммы деформирования, связанный с параметром θ . Если диаграммы деформирования отличаются только начальным пределом текучести τ_0 , то диаграммы $\bar{\tau}_1(b, \tau_0, z_0)$ при различных значениях τ_0 параллельны на третьем участке.

Для выявления характера изменения наибольшего нормального напряжения $\bar{\tau}_1(b, \tau_0, z_0)$ в материале, диаграммы деформирования которого представлены на рис. 3, рассмотрим два состояния $\bar{\tau}_1 = 2000$ МПа, $\bar{\tau}_1 = 4000$ МПа, отмеченные кружочками на рис. 5. При данном значении $\bar{\tau}_1$ определим соответствующие значения переменной $z'(b, z_0)$, а затем из (4.8)–(4.10) найдем координат (σ, p) . Соответствующие значения координат на диаграммах деформирования, представленных на рис. 3, отмечены кружочками. Первые точки на диаграммах деформирования соответствуют состоянию, при котором наибольшее нормальное напряжение в системе подэлементов принимает значение $\bar{\tau}_1 = 2000$ МПа, а второе напряжению — $\bar{\tau}_1 = 4000$ МПа. Численные результаты показывают, что точки состояния с одинаковым значением наибольшего нормального напряжения в системе подэлементов на диаграммах $\sigma \sim p$ ложатся на одной прямой. Положение точки состояния на диаграмме деформирования (при заданном $\max \bar{\tau}_1$) с уменьшением предела текучести смещается в сторону роста необратимой деформации. Выявленный эффект согласуется с установленной в опытах закономерность: с увеличением прочностных характеристик материала пластичность уменьшается.

Факт достижения критического значения $\max \bar{\tau}_1$ в одном подэлементе или в группе подэлементов предельного состояния ещё не означает разрушение элемента тела. Разрушение каждого подэлемента следует отождествлять с появлением новой микротрещины в представительном объеме. Для разрушения

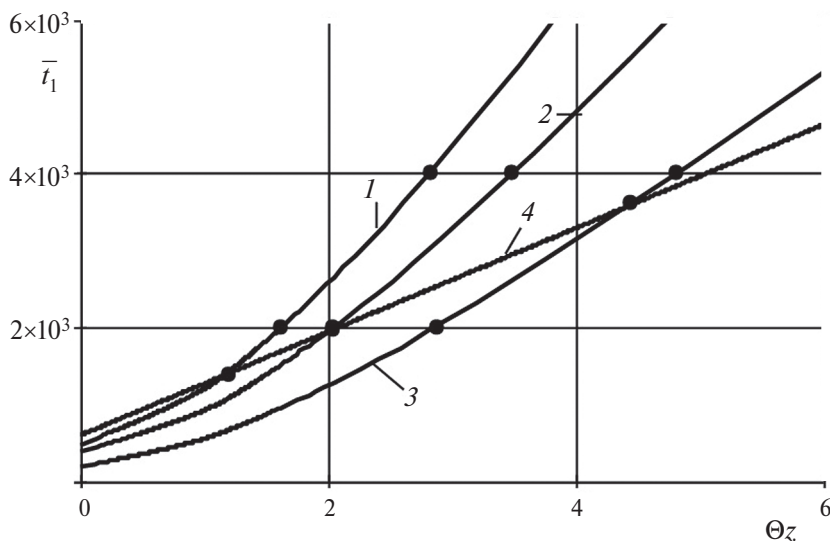


Рис. 5. Диаграммы наибольших растягивающих напряжений в подэлементах, $\bar{\tau}_1$ [МПа].

элемента тела количество микротрещин должно достичь некоторую критическую величину, необходимую для слияния и образования макроскопической трещины, которое приводит к разрушению. Критическую плотность трещин будем связать с весом разрушенных подэлементов. Оценка критического веса разрушенных подэлементов выходит за рамки данной работы. Будем предполагать, что полное разрушение элемента тела происходит при уменьшении веса в пределах: $\Delta\Psi = 0.05 \div 0.1$. Если предполагать, что предельное значение $\max \bar{\tau}_1 = r$ одинаково для всего множества подэлементов, тогда условие разрушения элемента тела можно представить в виде

$$\Psi_5 = 1 - \Psi = \int_{z'(b_0, z_0)}^{\infty} y dz = e^{-\Theta z'(b_0, z_0)} + \Theta z'(b_0, z_0) e^{-\Theta z'(b_0, z_0)} \geq \Delta\Psi \quad (5.2)$$

где b_0 — значение параметра b в момент достижения $\max \bar{\tau}_1$ значения r . Для диаграмм, представленных на рис. 3, при достижении наибольшего нормального напряжения значения $\max \bar{\tau}_1 = 2000$ МПа текущий вес обратимо деформированных подэлементов принимают значения (диаграмма 1 — 0.218, 2 — 0.395, 3 — 0.518). При $\max \bar{\tau}_1 = 4000$ МПа текущий вес обратимо деформированных подэлементов принимают соответствующие значения: 0.048, 0.138, 0.228. Если значение $\max \bar{\tau}_1 = 4000$ МПа совпадает с напряжением отрыва, тогда полное хрупкое разрушение произойдет при достижении на диаграмме — 1 состояния: $\sigma = 1340$ МПа, $p = 0.045$, а на диаграмме — 2 состоянии: $\sigma = 1082$ МПа, $p = 0.051$. Когда нагружение элемента тела соответствует условиям диаграммы — 3, в состоянии $\max \bar{\tau}_1 = 4000$ МПа перестанут воспринимать внешнюю нагрузку только группа подэлементов с общим весом 0.048 (4.8%). В результате модуль девиатора тензора напряжения (на диаграмме — 3) сначала упадет с $\sigma = 721$ МПа

до $\sigma = 689$ МПа, а затем процесс деформирования будет продолжаться с новым ростом напряжений.

Рассмотрим более общее предположение относительно критического значения напряжения отрыва подэлементов. Согласно рекомендации [19] критическое значение напряжения отрыва в отдельном подэлементе следует коррелировать с его пределом текучести. В линейном приближении условие разрушения подэлемента можно представить в виде

$$2G(r + hz) \geq R(z), \quad (5.3)$$

где параметры r и h зависят от накоплений повреждений в подэлементе. Влияние повреждаемости на r и h в данной работе не рассматривается.

В случае, когда предел прочности подэлемента увеличивается с ростом его предела текучести, картина разрушения элемента тела претерпевает существенные изменения. При $h \neq 0$ внезапное хрупкое разрушение подэлементов невозможно. В рассматриваемом варианте ($M > 0$) происходит последовательное хрупкое разрушение подэлементов (предельное состояние достигается в упругом состоянии подэлемента). Разрушение элемента тела развивается как процесс накопления разрушенных подэлементов.

Пусть при $z' = z_*$ выполняется условие разрушения в подэлементе $z = z_*$. В силу непрерывности функции (5.3) дальнейший рост макроскопической деформации приводит к выполнению условия разрушения в новых подэлементах. Обозначим через z'_* текущее значение z в подэлементе, разделяющим зону разрушенных подэлементов от упруго деформированных подэлементов. Тогда при расчете напряжений и деформаций подмножество подэлементов $z_* \leq z \leq z'_*$ следует исключить из анализа. Учитывая это при интегрировании выражений (2.11) по фактору разброса z получим

$$p(z', b) = \begin{cases} \int_0^{z'_*} \bar{p}(z, z', b) y(z) dz, & z' \leq z_*, \\ \int_0^{z_*} \bar{p}(z, z', b) y(z) dz, & z' > z_*, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\sigma(z', b) = 2G \begin{cases} \int_0^{z'_*} \bar{e}(z, z', b) y(z) dz + \bar{e}(z', z', b) \int_{z'_*}^{\infty} y(z) dz, & z' \leq z_*, \\ \int_0^{z_*} \bar{e}(z, z', b) y(z) dz + \bar{e}(z', z', b) \int_{z'_*}^{\infty} y(z) dz, & z' > z_*, \end{cases} \quad (5.5)$$

Взаимосвязь между переменными z'_* и z' получено в виде

$$z'_* = z_* + \frac{1}{2Gh} (\bar{t}_1(b, z') - \bar{t}_1(b, z_*)). \quad (5.6)$$

На рис. 6 представлены численные результаты полученные на основе (5.4)–(5.6) для пяти условий испытания гипотетического материала: $\Theta = 800$, $\chi = 0.01$, $A = 2.6$, $G = 8.1 \cdot 10^4$ МПа, $K = 1.8 \cdot 10^5$ МПа; $\tau_0 = 10^{-3}(1), 1.4 \cdot 10^{-3}(2), 1.7 \cdot 10^{-3}(3), 2.3 \cdot 10^{-3}(4), 3 \cdot 10^{-3}(5)$; $\theta = 1(1), 1.2(2), 1.5(3), 1.7(4), 2(5)$. Диаграммы на рис. 6 различаются только числовыми значениями параметров τ_0 , $\theta =$

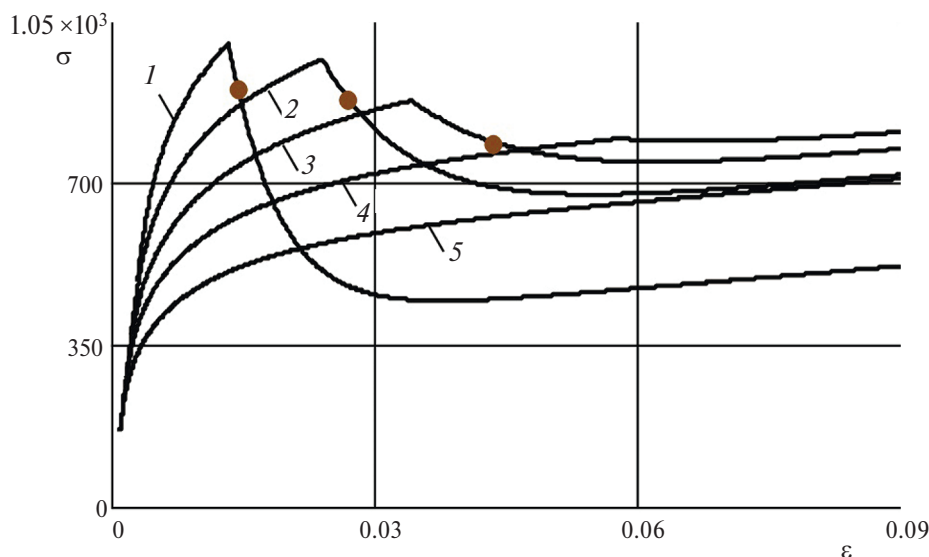


Рис. 6. Влияние условий разрушения подэлементов на диаграммы деформирования, σ [МПа].

$= \tau_0/z_0$. К причинам изменения этих параметров могут относиться скорость деформирования, температура испытания, размер зерна. В скобках указан номер диаграммы, рассчитанный при соответствующих значениях параметров τ_0 , θ . Точками на рис. 6 отмечены состояния, в которых количество разрушенных подэлементов достигло значение $\Delta\psi = 0.1$. Предполагается, что при таком весе (10%) образуется макротрещина, которая приводит к разрушению элемента тела. Диаграммы деформирования, представленные на рис. 6, рассчитаны в предположении отсутствия эффекта слияния и образования макротрещин. При абстрагировании от свойств трещин процесс разрушения подэлементов приводит к падению напряжения до определенного уровня, а затем наблюдается новый рост σ .

На основе (3.4), (5.1) и (5.3) установим критерий начала процесса разрушения. Параметр разброса z в формуле (5.3) можно выразить (в граничащем подэлементе) с помощи (3.4) через макровеличины

$$R = 2G \left(r - z_0 h + \frac{hz_0}{\tau_0} e + \frac{bhz_0 \cdot p}{(1+b)\tau_0} \right). \quad (5.7)$$

Учитывая (5.7) в (5.1) после несложных преобразований, установим условие начала процесса квазихрупкого разрушения

$$\begin{aligned} & \left(c + D(d) - \frac{hz_0}{\tau_0} \right) e(b, \tau_0, z_0) + \\ & + \left(bD(d) - \frac{hz_0}{\tau_0} b + \sqrt{\frac{(1+\mu)b}{3(1-2\mu)}} \right) \frac{p(b, \tau_0, z_0)}{1+b} \geq r - z_0 h. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Представление физических формул в безразмерном виде имеет ряд достоинств. Если, например, сравнить диаграммы деформирования с ГЦК и ОЦК-решетками с учетом поправок на модуль сдвига и температуру плавления, то окажется, что диаграммы для большинства металлов с ОЦК-решеткой лежат ниже, чем диаграммы для металлов с ГЦК-решеткой, причем степень упрочнения также существенно ниже. Можно перечислить много других преимуществ.

В условии начала разрушения (5.8) (в дальнейшем назовём критерий прочности) фигурируют три вида параметров: τ_0, z_0 — характеризуют формы диаграмм деформирования (без разрушения); c, d — влияние вида напряженного состояния; h, r — прочность материала. В соответствии с (5.8) критерий прочности представляет линейную функцию модулей тензоров напряжений и необратимых деформаций. Коэффициенты при модулях девиаторов тензоров обратимых e и необратимых деформаций p зависят от вида напряженного состояния и свойства материала. Учитывая, что необратимая деформация определяется на основе равенства $p = \varepsilon - \sigma/2G$, критерий прочности (5.8) можно представить ещё в виде линейной функции модулей девиаторов тензоров напряжений σ и деформации ε . Таким образом, исходя на локальном уровне из критерия наибольшего нормального напряжения, на макроскопическом уровне установили критерий прочности, в котором фигурируют как параметры, отражающие влияние вида напряженного состояния, так и реологические свойства материала (параметры τ_0, z_0 предполагаются зависящими от условий внешнего воздействия). Важно отметить, что в установленном критерием прочности фигурируют только механические характеристики, полученные в опытах на одноосное растяжение.

На основе полученного критерия прочности в виде линейной зависимости между обратимых и необратимых деформаций или напряжений и необратимых деформаций установим следующее фундаментальное свойство: увеличение прочности неминуемо приводит к снижению пластичности. Заметим, что для установления причин снижения пластичности с увеличением предела текучести, нарушения монотонности диаграмм деформирования на начальном этапе необратимого течения, положения о совпадении среднегеометрических значений величин найденные в предельных вариантах с величинами полученных на основе исследуемой модели, априори не закладывают в модель какие-то предпосылки. Подобные эффекты естественным образом вытекают из принципов осредненных связей, ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций и экстремума несоответствия меры.

Влияние вида напряженного состояния на критерий прочности материала (диаграммы деформирования при трех условиях испытания представлены на рис. 3, $r = 0.0038$, $h = 2.56$) исследовалось на примере четырех напряженных состояний: одноосное растяжение ($A = 1/6^{1/2}$, $d = -0.5$); двухосное растяжение ($A = (2/3)^{1/2}$, $d = -2$); одноосное сжатие ($A = -1/(6)^{1/2}$, $d = -2$); двухосное сжатие ($A = -(2/3)^{1/2}$, $d = -2$). Результаты расчетов, выполненные на основе критерия (5.8) с учетом формул (4.8), для материала диаграммы деформирования которого при трех условиях испытания показаны на рис. 3, представлены на рис. 7. Диаграммы $\sigma \sim \varepsilon, -\varepsilon$, отмеченные одинаковыми номерами на рис. 7 и

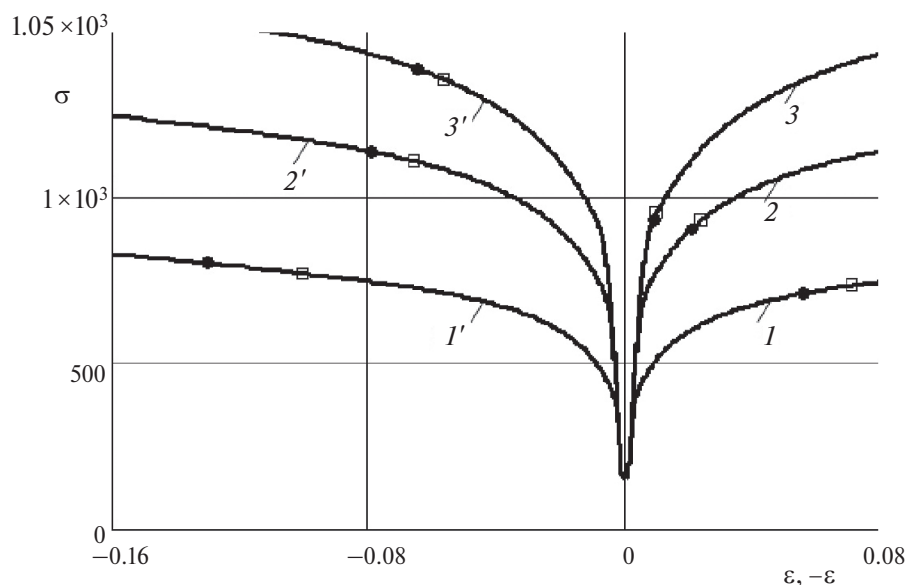


Рис. 7. Влияние вида напряженного состояния на начальный момент разрушения, σ [МПа].

рис. 3 соответствуют одним и тем же значениям параметров состояния τ_0, z_0 . Кружочками на диаграммах $\sigma \sim \epsilon, -\epsilon$ обозначены начальные моменты разрушения (для принятых характеристик прочности материала: $r = 0.0038, h = 2.56$) при одноосном растяжении и сжатии. Квадратиками на рис. 7 обозначены соответствующие состояния при двухосном растяжении и сжатии. На момент начала разрушения оказывают влияние первый инвариант напряжений (параметр $A = \sigma_0/\sigma$) и вид девиатора тензора напряжений ($d = \sigma_3/\sigma_1$). Данные параметры оказывают противоположные эффекты на пластичность материала. В силу этого из рис. 7 видно, что при двухосном растяжении пластичность несколько больше, чем при одноосном растяжении, а при двухосном и одноосном сжатии наблюдается обратная картина.

Сопоставляя численные значения пластических деформаций, отмеченные кружками на рис. 7 (при чистом растяжении), установим, что в условиях нагружения характерных для диаграммы — 1 пластическая деформация в момент начала процесса разрушения в 3.4 раза больше, чем в условиях диаграммы — 2 и в 17 раз больше в условиях, соответствующих диаграммы — 3. Это указывает на сильное снижение пластичности с ростом условного предела текучести. При переходе от одноосного растяжения к одноосному сжатию пластичность материала растет. Сравнение значений пластических деформаций в момент начала разрушения при одних и тех же значениях τ_0, z_0 при растяжении и сжатии показывает, что для условий диаграммы — 1 больше в 2.45 раз, для диаграммы — 2 в — 4.8 и для диаграммы — 3 в 18.7 раз. Согласно приведенным результатам пластичность при сжатии особенно сильно растет в состояниях с большими значениями предела текучести. Хрупкий материал при растяжении деформируется, как пластичный при сжатии.

Важнейшей характеристикой состояния в момент разрушения первого подэлемента является текущий вес упруго деформированных подэлементов ψ_e (вычисляется на основе формулы (5.2)). При весе $\psi_e \geq \Delta\psi \sim 0.1 \div 0.05$ происходит квазихрупкое разрушение. Если $\psi_e < \Delta\psi$ появление небольшого количества трещин в элементе тела не приводит к его разрушению. Приведем данные для состояний отмеченные кружочками на рис. 7) при растяжении и сжатии. Если процесс деформирования происходит по диаграмме — 1, тогда $\psi_e = 0.064$ при растяжении и $\psi_e = 0.003$ при сжатии. Для диаграммы — 2, $\psi_e = 0.409; 0.076$, а для третьей диаграммы $\psi_e = 0.672; 0.174$. Первые цифры относятся к испытанию материала на растяжении, а вторые — при сжатии. Согласно приведенным значениям веса упругодеформированных подэлементов в момент возникновения первой микротрещины можно сделать следующие выводы. Если исходить из допущения, что слияние микротрещин и образование макротрещины происходит при $\psi_e \geq 0.1$, тогда квазихрупкое разрушение произойдет при испытании на растяжении в случаях диаграмм 2 и 3. Разрушение в условии испытания на сжатии возможно только в случае диаграммы — 3. При допуске $\psi_e \geq 0.05$ квазихрупкое разрушение возможно для диаграмм — 2, 3 как в испытаниях на растяжении, так и на сжатии, а для диаграммы — 1 возможно только квазихрупкое разрушение при растяжении.

Таким образом, в рамках исследуемой модели удастся описать сложную картину влияния вида напряженного состояния на процесс разрушения материала на основе диаграмм деформирования, полученных в опытах на растяжение или кручение тонкостенных образцов и значений фактора анизотропии и коэффициента упрочнения кристаллов. Эффект снижения пластичности материала с увеличением предела текучести получает естественное описание.

Заключение. Исследована трехуровневая конститутивная модель, описывающая с единых позиций поведение материалов с монотонными и немонотонными диаграммами деформирования. Получено уравнение связанности масштабных уровней, в котором фигурируют механические характеристики материальных частиц (константы упругости и коэффициент упрочнения кристаллов) и термомеханических характеристик системы подэлементов (плотность распределения предельных упругих деформаций подэлементов). Установлено, что при переходе от обратимого состояния к необратимому состоянию, неоднородность распределения деформаций сильно увеличивается по сравнению с неоднородностью распределения напряжений. При значении коэффициента упрочнения, характерного для стадии легкого скольжения, падение параметра неоднородности на начальном этапе необратимого течения настолько резкое, что макроскопическая деформация может расти при постоянном или даже при снижении напряжения (создаются условия разгрузки в части необратимо деформированных подэлементов).

Проанализирована общая зависимость для растягивающих напряжений $\max \dot{\epsilon}_1$ в системе подэлементов. Выражение для наибольшего растягивающего напряжения (при $M > 0$ возникает в подмножестве обратимо деформированных подэлементов) представлено в виде линейной комбинации модулей девиаторов напряжений σ и необратимых деформаций p . Коэффициент при модуле σ зависит только от вида напряженного состояния, а при модуле p

зависит еще от количества необратимо деформированных подэлементов. Данный коэффициент на начальной стадии необратимого деформирования уменьшается более, чем в два раза, а затем асимптотически приближается к постоянному значению. При $p > 1\%$ наибольшее растягивающее напряжение линейно зависит от σ и p . Положение точки состояния на диаграмме деформирования (при заданном $\max \bar{\epsilon}_1$) с увеличением предела текучести смещается в сторону уменьшения необратимой деформации.

Исходя на локальном уровне из критерия наибольшего нормального напряжения, на макроскопическом уровне установлен критерий прочности, в котором фигурируют как механические характеристики материала, полученные в простых опытах на растяжение, так и параметры вида напряженного состояния и девиатора тензора напряжений. Исследовано влияние параметров, характеризующие вид напряженного состояния на величину необратимой деформации в начальный момент разрушения. Установлены уравнения, описывающие зависимость между напряжениями и деформациями на этапе роста количества разрушенных подэлементов. Обсуждается вопрос о критическом значении веса разрушенных подэлементов, при котором происходит образование макротрещины, приводящее к полному разрушению элемента тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
2. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
3. *Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г.* Физические уравнения термовязкопластичности. Киев: Наукова думка, 1982. 238 с.
4. *Макаров В.П.* Моделирование процессов деформации и разрушения на мезоуровне // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 109–130.
5. *Трусов П.В.* Классические и многоуровневые конститутивные модели для описания поведения металлов и сплавов: проблемы и перспективы (в порядке обсуждения) // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 69–82.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921010128>
6. *Marina V.Yu. and Marina V.I.* Single approach to the description of the relation between micro-and macrostates in reversible and irreversible deformation of polycrystals // Int. Appl. Mech. 2021. V. 57. № 6. P. 707–719.
<https://doi.org/10.1007/s10778-022-01120-x>
7. *Besseling J. F.* Theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery and secondary creep // J. Appl. Mech. 1958. № 4. P. 529–536.
8. *Гохфельд Д.А., Садаков О.С.* Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
9. *Марина В.Ю.* Уравнения упругопластического тела при пропорциональном неизо-термическом нагружении // Прикладная механика. 1997. № 6. С. 9–17.
10. *Марина В.Ю., Марина В.И.* Анализ соотношений между локальными и общими механическими параметрами, применяемыми для описания поведения поликристаллических материалов // Металлофизика и новейшие технологии. 2020. Т. 42. № 3. С. 415–431.
<https://doi.org/10.15407/mfint.42.03.0415>

11. *Kroner E.* On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics // *Inst. J. Eng. Sci.* 1963. V. 1. № 2. P. 261–278. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90037-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90037-5)
12. *Шермогор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
13. *Flipona B., Kellera C., Queyb R., Barbea F.* A full-field crystal – plasticity analysis of bimodal polycrystals // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 184. P. 178–192. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.02.005>
14. *Tanaka E., Murakami S., Ooka M.* Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 1985. V. 33. № 6. P. 559–575. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(85\)90003-1](https://doi.org/10.1016/0022-5096(85)90003-1)
15. *Кадашевич Ю. И., Марина В. Ю., Помыткин С. П.* Об одной тенденции в развитии статической теории неупругости, учитывающей микронапряжения // *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 1. С. 13–18.
16. *Марина В. Ю.* Нелокальный подход к проблеме необратимого деформирования неоднородного тела. Численные исследования в механике сплошных сред. Кишинёв: Штиинца, 1987. С. 47–53
17. *Марина В. Ю.* Единый подход к описанию реологических свойств стабильных и нестабильных материалов. Численные методы решения задач волновой динамики. Кишинёв: Штиинца, 1990. С. 76–85.
18. *Марина В. Ю.* Определяющие уравнения микронеоднородной среды при сложном монотонном нагружении // *Изв. АН Молдовы. Серия математика.* 1997. № 2. С. 26–36.
19. *Марина В. Ю.* Закономерности изменения предельных значений инвариантов напряжений и деформаций в микронеоднородных средах // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 3. С. 73–98. <https://doi.org/10.31857/S0572329922700015>
20. *Hill R.* The elastic behavior of a crystalline aggregate // *Proceedings of the Physical Society. Section A.* 1952. V. 65. № 5. P. 349–354. <https://doi.org/10.1088/0370-1298/65/5/307>
21. *Марина В. Ю.* Принципы перехода от микро к макро напряжённо-деформированному состоянию. // *Изв. АН Молдовы. Серия математика.* 1998. № 2. С. 16–24.
22. *Voigt W.* *Lehrbuch der Kristallphysik.* Leipzig und Berlin: Teubner, 1928. 978 p.
23. *Reuss A.* Berechnung der Fliesgrenze von Misch-Kristallen auf Grund der Plastizitäts-Bedingung für Einkristalle // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 1929. № 9. P. 49–58. <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19290090104>

DESCRIPTION OF THE PHENOMENON OF DECREASING PLASTICITY WITH INCREASING YIELD STRENGTH OF POLYCRYSTAL

V. Yu. Marina^{a, *}

^a *Technical University of Moldova, Chisinau, Moldova*

^{*} *e-mail: vasilemarina21@yahoo.com*

Abstract. Using a three-level constitutive model, the influence of the crystal anisotropy factor, the hardening coefficient, the microscopic elastic limit and the

distribution density function of the limiting elastic deformations of subelements on the shape of the deformation diagrams and the fracture conditions of a polycrystal is studied. Based on the theory of maximum normal stresses at the local level, a failure criterion was established at the macroscopic level, which includes all the parameters of the problem. The influence of the type of stress state and the geometric shape of the loading diagram on the magnitude of irreversible deformation preceding the initial process of destruction is investigated. From the established strength criterion follows the effect of a decrease in the plasticity of the material with increasing yield strength. The question of the critical value of the weight of destroyed subelements is discussed, at which a macrocrack forms, leading to the complete destruction of the body element.

Keywords: structure, stress, deformation, fracture, plasticity, polycrystal, hardening, averaged connections, inconsistencies of measures, subelement

REFERENCES

1. *Ilyushin A.A.* Continuum mechanics. M.: Moscow State University Publishing House, 1990. 310 p.
2. *Novozhilov V.V., Kadashevich Yu.I.* Microstresses in structural materials. L.: Mechanical Engineering, 1990. 223 p.
3. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G.* Physical equations of thermoviscoplasticity. Kyiv: Naukova Dumka, 1982. 238 p.
4. *Makarov V.P.* Modeling of deformation and fracture processes at the mesolevel // *Izv. ANR. MTT.* 1999. No. 5, P. 109–130.
5. *Trusov P.V.* Classical and multi-level constitutive models for describing the behavior of metals and alloys: problems and prospects (in order of discussion) // *Izv. ANR. MTT.* 2021. No. 1. P. 69–82.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921010128>.
6. *Marina V.Yu. and Marina V.I.* Single Approach to the Description of the Relation Between Micro-and Macrostates in Reversible and Irreversible Deformation of Polycrystals. *International Applied Mechanics*, Vol. 57, No. 6, P. 707–719. 2021.
<https://doi.org/10.1007/s10778-022-01120-x>.
7. *Besseling J.F.* Theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery and secondary creep // *Journal of Applied Mechanics*. 1958. No. 4. P. 529–536.
8. *Gokhfeld D. A., Sadakov O. S.* Plasticity and creep of structural elements under repeated loading. M.: Mechanical Engineering, 1984. 256 p.
9. *Marina V.Yu.*, Equations of an elastoplastic body under proportional non-isothermal loading // *Applied mechanics*. 1997. No. 6. P. 9–17.
10. *Marina V.Yu., Marina V.I.*, Analysis of the relationships between local and general mechanical parameters used to describe the behavior of polycrystalline materials. // *Metallophysics. Newest Technologies*. 2020. V. 42. No. 3. P. 415–431.
<https://doi.org/10.15407/mfint.42.03>.
11. *Kroner E.* On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics Gauge theory with dislocations. – *Inst. I.Engng. Sci* 1. 1963. P. 261–278.
12. *Shermogor T.D.*, Theory of elasticity of micro-inhomogeneous media. M.: Nauka, 1977. 400 p.

13. *Flipona B., Kellera C., Queyb R., Barbea F.* A Full-field Crystal – Plasticity Analysis of Bimodal Polycrystals // International Journal of Solids and Structures 184, 2020. P. 178–192.
14. *Tanaka E., Murakami S., Ooka M.* Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity//J. Mech. Phys. Solids. 1985. Vol. 33. No. 6. P. 559–575.
15. *Kadashevich Yu.I., Marina V.Yu., Pomytkin S.P.* On one trend in the development of the static theory of inelasticity, taking into account microstresses // Izv. ANR. MTT. 1998. No. 1, P. 13–18.
16. *Marina V.Yu.* Nonlocal approach to the problem of irreversible deformation of an inhomogeneous body. Numerical studies in continuum mechanics. Chisinau: Shtiintsa, 1987. P. 47–53
17. *Marina V.Yu.* A unified approach to describing the rheological properties of stable and unstable materials. Numerical methods for solving problems of wave dynamics. Chisinau: Shtiintsa, 1990. P. 76–85.
18. *Marina V.Yu.* Constitutive equations of a micro-inhomogeneous medium under complex monotonic loading//Proceedings of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics series. 1997. No. 2. P. 26–36.
19. *Marina V.Yu.* Patterns of changes in the limiting values of stress and strain invariants in micro-inhomogeneous media // Izv. ANR. MTT. 2023. No. 3, P. 127–152. <https://doi.org/10.31857/S0572329922700015>.
20. *Hill R.* The elastic behavior of a crystalline aggregate. Proc. Soc. 1952. A 65, no. 389. P. 349–354.
21. *Marina V.Yu.* Principles of transition from micro to macro stress-strain state//News of the Academy of Sciences of Moldova. Series mathematics, 1998. No. 2. P. 16–24.
22. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. – Leipzig und Berlin: Teubner, 1928. 978 s.
23. *Reuss A.* Berechnung der Fliesgrenze von Misch-Kristallen auf Grund der Plastizitäts-Bedinnung für Einkristalle // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 9. – H. 1. 1929. P. 49–58.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ НЕИНКРЕМЕНТАЛЬНОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАСЧЕТА БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕНЗОРНО-МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

© 2024 г. В. В. Чехов^{а,*}

^аКрымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Россия

^{*}*e-mail*: chekhovvv@cfuv.ru

Поступила в редакцию 27.01.2024 г.

После доработки 26.03.2024 г.

Принята к публикации 08.05.2024 г.

Для решения осесимметричных задач получено развитие тензорно-матричной системы уравнений МКЭ, описывающей финальное состояние больших деформаций несжимаемого упругого тела, получены аналитические выражения компонент матрицы частных производных этой системы. Приведены примеры вычисления инвертированного состояния кругового цилиндра, а также расчета уплотнительных колец.

Ключевые слова: уравнение МКЭ, тензорно-блочные матрицы, большие деформации, статический расчет, позиционная формулировка, осесимметричное состояние, мера деформации Фингера, несжимаемый материал, материал Муни–Ривлина

DOI: 10.31857/S1026351924050106, **EDN:** UANKNH

1. Введение. В настоящее время при решении задач геометрически нелинейного деформирования твердых тел при больших деформациях методом конечных элементов (МКЭ) наиболее распространен инкрементальный подход (метод последовательных нагружений) с возможным итерационным уточнением [1–18]. Он является наиболее универсальным, однако в ряде случаев возможно применение чисто итерационного подхода без отслеживания всего пути нагружения: например, когда возможна линеаризация либо полиномиальное приближение каких-то этапов решения [19–21], либо когда решаемая задача независима от истории нагружения и пути деформирования [22–25]. Это позволяет обойти некоторые проблемы инкрементального подхода [1, 26–31], обусловленные линеаризацией уравнений, трудностями прохождения особых точек, вырождением формы конечных элементов (КЭ) и др.

Геометрически нелинейные соотношения МКЭ могут базироваться на различных формах уравнения состояния и разных определениях меры деформации: например, Грина [2, 3, 8, 14, 17, 18, 30], логарифмической [10,

18, 25], Фингера [3, 12]. В качестве неизвестного может рассматриваться вектор перемещения [2, 3, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 30] либо радиус-вектор деформированного состояния [3, 7, 9, 11, 17, 25]. Последнее позволяет упростить формулировки для существенно нелинейных задач, не подчиняющихся гипотезе неизменности начальных размеров. Проблему роста уровня громоздкости геометрически нелинейных соотношений механики при комбинировании их с концепцией МКЭ, позволяет облегчить использование объектно-ориентированного подхода [32–38]. В рамках этого подхода становится возможной реализация МКЭ непосредственно в тензорной форме [2], естественной для геометрически нелинейных соотношений, без преобразования к чисто матричному виду на базе нотации Фойгта [18], часто используемому в реализациях МКЭ. При такой реализации может быть удобно использовать концепцию тензорно-блочной матрицы [39, 40], компонентами которой могут быть не только числа, но и тензоры произвольных рангов. Благодаря такой структуре сложность объектов распределяется по уровням абстракции, что должно облегчить работу с соотношениями, а также их реализацию. В представляемой здесь работе соотношения геометрически нелинейного МКЭ используют матрицы, компонентами которых являются тензоры в безиндексной форме, применяется подход на базе уравнения состояния в форме Фингера [41], меры деформации Фингера [41], а в качестве неизвестного используется радиус-вектор деформированной конфигурации. Для решения системы использована реализация итерационных методов из библиотеки GNU Scientific Library [42].

2. Используемая формулировка МКЭ. Для решения задачи статического нагружения тел из изотропных несжимаемых материалов с учетом больших деформаций используется конечноэлементная формулировка [23] на базе вариационного принципа Лагранжа, отнесенного к начальной конфигурации, и уравнения состояния в форме Фингера [41]. Несжимаемость материала реализована в виде требования неизменности объема каждого конечного элемента. Соответствующая система уравнений, записанная с использованием аппарата тензорно-блочных матриц, имеет следующий вид [23]:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}(\{\mathbf{R}\}, \{p\})\} &= \{\mathbf{K}(\{\mathbf{R}\}, \{p\})\} + 2([L] + ({}^{[4]}[M]\{\mathbf{R}\}) \cdot \{\mathbf{R}\})\{\mathbf{R}\} - \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{0}\}, \\ \{B(\{\mathbf{R}\})\} &= \{0\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\{\mathbf{f}\}$ — столбец узловых нагрузок, $\{\mathbf{R}\}$ и $\{p\}$ — неизвестные (соответственно, столбец узловых радиус-векторов деформированной конфигурации и вспомогательный столбец взвешенно усредненных величин давления в конечных элементах, обусловленного условием несжимаемости), $\{\mathbf{K}\}$, $[L]$, ${}^{[4]}[M]$ и $\{B\}$ — векторные и матричные величины (здесь ${}^{[4]}[M]$ — четырехмерная матрица, т.е. массив с 4 индексами), имеющие следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{[\alpha i]} &= -p_{[\alpha]} \iiint_{v_{[\alpha]}} ({}^0\nabla \mathbf{r})_{[\alpha]}^{-1} \cdot {}^0\nabla N_{[\alpha i]} dv, \quad L_{[\alpha ij]} = \iiint_{v_{[\alpha]}} {}^0\Psi_{[\alpha]} {}^0\nabla N_{[\alpha i]} \cdot {}^0\nabla N_{[\alpha j]} dv \\ M_{[\alpha ijk]} &= \iiint_{v_{[\alpha]}} {}^0\Psi_{[\alpha]} \left({}^0\nabla N_{[\alpha i]} \cdot {}^0\nabla N_{[\alpha j]} \right) \left({}^0\nabla N_{[\alpha k]} \cdot {}^0\nabla N_{[\alpha l]} \right) dv \end{aligned}$$

$$B_{[\alpha]} = \iiint_{V_{[\alpha]}} (III((\overset{0}{\nabla}\mathbf{r})_{[\alpha]}) - 1) dV, \quad (2.2)$$

где нуликом сверху обозначены величины, относящиеся к отсчетной недеформированной конфигурации тела, α — номер КЭ, i, j, k, l — номера узлов конечноэлементной сетки, $\overset{0}{\nabla}\mathbf{r}$ — градиент места [41], $N_{[\alpha i]}$ — функция формы, принадлежащая α -му КЭ и i -му узлу, III — кубический инвариант тензора 2-го ранга, ${}_1\Psi$ и ${}_2\Psi$ — функции от инвариантов меры деформации Фингера из уравнения состояния несжимаемого материала a -го КЭ в форме Фингера [41]:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2{}_1\Psi\mathbf{b} + 2{}_2\Psi\mathbf{b}^2. \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор истинных напряжений Коши, $\mathbf{b} = (\overset{0}{\nabla}\mathbf{r})^T \cdot (\overset{0}{\nabla}\mathbf{r})$ — мера деформации Фингера, $\mathbf{1}$ — метрический (единичный) тензор.

Система уравнений (2.1) описывает финальное деформированное состояние конечноэлементной модели без использования инкрементального подхода и линеаризаций, и может быть решена непосредственно численными методами. Для повышения эффективности методы решения требуют задать матрицу частных производных этой системы. Система содержит достаточно сложные вложенные соотношения, поэтому для упрощения выведения компонентов матрицы производных использование безиндексной формы тензорных объектов является удобным. Аппарат дифференцирования по тензорному аргументу в безиндексной форме развивается и используется в механике твердого тела [41, 43–45]. Соотношения в этой области «можно трактовать как обобщение правила математического анализа о дифференцировании сложной функции» [45]. С использованием этой технологии для системы (2.1) получена матрица частных производных [24], применимая к общему трехмерному случаю, а также к случаю плоской деформации.

Целью данной работы является модификация и проверка практического применения системы (2.1) и матрицы ее частных производных для случая решения осесимметричных задач. Для этого у всех объектов системы требуется произвести переход от общего случая безиндексной тензорной нотации к частному случаю использования цилиндрической системы координат. Для проверки адекватности полученных результатов рассмотрено численное решение тестовых примеров.

3. Градиент места для осесимметричного случая. Рассмотрим описание задачи деформирования, когда в качестве материальных координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ рассматриваются цилиндрические координаты $\overset{0}{\rho}, \overset{0}{\varphi}, \overset{0}{z}$. В этом случае радиус-вектор $\overset{0}{\mathbf{r}}$ и базисные векторы $\overset{0}{\mathbf{e}}_i = (\partial\overset{0}{\mathbf{r}})/(\partial q^i)$ отсчетной конфигурации приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) &= \overset{0}{\mathbf{i}}_1 \overset{0}{\rho} \cos \varphi + \overset{0}{\mathbf{i}}_2 \overset{0}{\rho} \sin \varphi + \overset{0}{\mathbf{i}}_3 \overset{0}{z}, \\ \overset{0}{\mathbf{e}}_\rho &= \overset{0}{\mathbf{i}}_1 \cos \varphi + \overset{0}{\mathbf{i}}_2 \sin \varphi, \quad \overset{0}{\mathbf{e}}_\varphi = \overset{0}{\rho}(-\overset{0}{\mathbf{i}}_1 \sin \varphi + \overset{0}{\mathbf{i}}_2 \cos \varphi), \quad \overset{0}{\mathbf{e}}_z = \overset{0}{\mathbf{i}}_3, \end{aligned}$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты вспомогательной декартовой системы координат, которые отсюда можно выразить так:

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{e}_\rho \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_\rho \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \frac{\cos \varphi}{\rho}, \quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_z. \quad (3.1)$$

Взаимный базис в цилиндрической системе: $\mathbf{e}^\rho = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}^\varphi = \mathbf{e}_\varphi / \rho$, $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}_z$.

Радиус-вектор деформированной конфигурации выразим с учетом того, что в случае осевой симметрии перемещение не зависит от угловой координаты:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\rho, \varphi, z, t) = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z) + \mathbf{u}(\rho, z, t) = & \left(\rho + u(\rho, z, t) \right) \mathbf{i}_1 \cos \left(\varphi + v(\rho, z, t) \right) + \\ & + \left(\rho + u(\rho, z, t) \right) \mathbf{i}_2 \sin \left(\varphi + v(\rho, z, t) \right) + \left(z + w(\rho, z, t) \right) \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где u, v и w — компоненты перемещения $\mathbf{u}$ в цилиндрических координатах, t — параметр времени. Отсюда, с подстановкой (3.1), получаются выражения для базисных векторов деформированной конфигурации $\mathbf{e}_i = (\partial \mathbf{r}) / (\partial q_i)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\rho \sin v \mathbf{e}_\rho + \frac{\rho}{\rho} \cos v \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{e}_z &= \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial z} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Построенные соотношения позволяют определить градиент места:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{r} = \mathbf{e}^s \mathbf{e}_s &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho^2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z = \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z - \frac{\rho}{\rho^2} \sin v \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho + \frac{\rho}{\rho^3} \cos v \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Сведем задачу к двумерной, для чего зададим соответствие координат $q^1 \equiv \rho$, $q^2 \equiv z$, $q^3 \equiv \varphi$ и исключим из рассмотрения деформацию кручения, зафиксировав угловую координату:

$$\left. \nabla \mathbf{r} \right|_{\varphi = \varphi = \text{const}} = F^{st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t = F_t^s \mathbf{e}_s \mathbf{e}^t,$$

$$F^{st} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \rho/\rho^3 \end{bmatrix}, \quad F_t^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \rho/\rho \end{bmatrix}.$$

Отметим, что если бы для радиус-вектора деформированной конфигурации в цилиндрических координатах вместо (3.2) использовалась зависимость общего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\rho, \varphi, z, t) = & \mathbf{i}_1 \rho(\rho, \varphi, z, t) \cos \varphi(\rho, \varphi, z, t) + \\ & + \mathbf{i}_2 \rho(\rho, \varphi, z, t) \sin \varphi(\rho, \varphi, z, t) + \mathbf{i}_3 z(\rho, \varphi, z, t), \end{aligned}$$

то это привело бы к выражению для градиента места

$$\nabla \mathbf{r} = F^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

$$F^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cos(\varphi - \varphi) \right) & \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \sin(\varphi - \varphi) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \cos(\varphi - \varphi) \right) & \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \sin(\varphi - \varphi) \right) \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho \cos(\varphi - \varphi) \right) & \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho \sin(\varphi - \varphi) \right) \end{bmatrix},$$

имеющего при $\varphi = \varphi = \text{const}$ вырожденную матрицу компонент.

При переходе к конечноэлементной аппроксимации, в плоскости двумерного КЭ компоненты деформированного радиус-вектора выражаются при помощи базисных функций через свои узловые значения:

$$\mathbf{r}_{[\alpha]} = \sum_i N_{[\alpha i]} \mathbf{R}_{[i]},$$

где α — номер КЭ, $\mathbf{R}_{[i]}$ — радиус-вектор деформированного состояния i -го узла конечноэлементной сетки, суммирование производится по всем узловым точкам расчетной модели. Отсюда, МКЭ-аппроксимация градиента места имеет следующий вид:

$$(\nabla \mathbf{r})_{[\alpha]} = \sum_i \nabla N_{[\alpha i]} \mathbf{R}_{[i]} + \frac{\rho}{\rho} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^3. \quad (3.3)$$

4. Другие особенности осесимметричного случая. Градиент места в явной либо неявной форме входит во все соотношения (2.2), поэтому применение полученного выражения (3.3) позволяет использовать систему уравнений МКЭ (2.1) для осесимметричных расчетов. Заметим, что за исключением подчеркнутого множителя выражение (3.3) совпадает с аналогичным для случая плоской деформации [24]. Укажем также и другие моменты, которые следует учитывать при применении системы (2.1) в осесимметричном случае — тоже с подчеркиванием слагаемых и множителей, отсутствующих в случае плоской деформации, что удобно для совместной реализации обоих этих случаев в одном общем приложении.

При вычислении всех компонентов (2.2) в осесимметричном случае интегрирование по объему конечного элемента сводится к интегрированию по его площади сечения s в локальных координатах элемента:

$$\iiint_{v_{[\alpha]}} \dots d^0 v = \underline{\underline{2\pi}} \int \dots \underline{\underline{\rho}} d^0 s = \underline{\underline{2\pi}} \int \dots \underline{\underline{\rho}} \frac{d^0 s}{ds} ds^\alpha.$$

Мера деформации Фингера и ее первый инвариант:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{[\alpha]} &= (\nabla \mathbf{r})_{[\alpha]}^T \cdot (\nabla \mathbf{r})_{[\alpha]} = \sum_i \sum_k (\nabla N_{[\alpha i]} \cdot \nabla N_{[\alpha k]}) \mathbf{R}_{[i]} \mathbf{R}_{[k]} + \underbrace{\left(\frac{\rho}{0} \right)^2 \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_3^0}, \\ I(\mathbf{b}_{[\alpha]}) &= 1 \cdots \mathbf{b}_{[\alpha]} = \sum_i \sum_k (\nabla N_{[\alpha i]} \cdot \nabla N_{[\alpha k]}) (\mathbf{R}_{[i]} \cdot \mathbf{R}_{[k]}) + \underbrace{\left(\frac{\rho}{0} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

5. Матрица частных производных для осесимметричного случая. Поскольку в соотношениях осесимметричного случая, в сравнении со случаем плоской деформации, появляются дополнительные члены, то следует заново построить также и компоненты матрицы частных производных, необходимой для эффективного решения системы (2.1). Дифференцирование дополнительного слагаемого $(\rho/0) \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_3^0$, имеющегося в выражении (3.3) для градиента места, проведем с учетом аппроксимации МКЭ

$$\rho_{[\alpha]} = \sum_i N_{[\alpha i]} \rho_{[i]},$$

где $\rho_{[i]}$ — узловые ρ -компоненты радиус-вектора:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = \sum_i N_{[\alpha i]} \frac{\partial \rho_{[i]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = N_{[\alpha n]} \frac{\partial \rho_{[n]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = N_{[\alpha n]} \mathbf{e}_s^0 \frac{\partial \rho_{[n]}}{\partial R_{[n]}^s} = N_{[\alpha n]} \mathbf{e}_s^0 \delta_s^1 = N_{[\alpha n]} \mathbf{e}_1^0.$$

Отсюда, согласно правилам дифференцирования сложных функций,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} \begin{pmatrix} \rho^0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}^3 \\ \rho & & \end{pmatrix} &= \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_3 & \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} + \rho \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}^s & \mathbf{e}^3 & \mathbf{e}_s \end{pmatrix} + \frac{\rho^0}{\rho} \mathbf{e}_3 \frac{\partial \mathbf{e}^3}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = \\
&= \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_3 & N_{[\alpha n]} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^s \mathbf{e}^3 \mathbf{e}_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} N_{[\alpha n]} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_3 & g^{1s} \mathbf{e}^3 \mathbf{e}_s \end{pmatrix} = \frac{N_{[\alpha n]}}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}^3 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Матрица частных производных системы (2.1) состоит из четырех блоков [24]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{A}, B)}{\partial(\mathbf{R}, p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

где для общего трехмерного расчета и случая плоской деформации блок $[\partial \mathbf{A} / \partial p]$ имеет компонентами

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \right)_{[\alpha]} = - \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \mathbf{r} \end{pmatrix}_{[\alpha]}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} d\mathbf{v},$$

а слагаемые, составляющие блок $[\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{R}]$, если их обозначить следующим образом [24]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{R}} \end{bmatrix} = \sum_{\alpha} \left([\mathbf{D}\mathbf{K}]_{[\alpha]} + 2([\mathbf{D}\mathbf{L}]_{[\alpha]} + [\mathbf{D}\mathbf{M}]_{[\alpha]}) \right)$$

имеют такие компоненты:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\mathbf{K}_{[\alpha in]} &= \rho_{[\alpha]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \mathbf{r} \end{pmatrix}_{[\alpha]}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha n]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \mathbf{r} \end{pmatrix}_{[\alpha]}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} d\mathbf{v}, \\
\mathbf{D}\mathbf{L}_{[\alpha in]} &= \sum_j \mathbf{R}_{[j]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha j]} \end{pmatrix} \frac{\partial {}_1\Psi_{[\alpha]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} d\mathbf{v} + {}_1L_{[\alpha in]}, \\
\mathbf{D}\mathbf{M}_{[\alpha in]} &= \\
&= \sum_k \sum_j \left((\mathbf{R}_{[k]} \cdot \mathbf{R}_{[j]}) \left(\left\langle \sum_l \mathbf{R}_{[l]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha j]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha k]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha l]} \end{pmatrix} \frac{\partial {}_2\Psi_{[\alpha]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} d\mathbf{v} \right\rangle + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 1 \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} {}_2\Psi_{[\alpha]} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha j]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha k]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha n]} \end{pmatrix} d\mathbf{v} \right) + \right)
\end{aligned}$$

$$+ \mathbf{R}_{[k]} \mathbf{R}_{[j]} \int \int \int_{\mathbf{v}_{[\alpha]}} {}^0_2 \Psi_{[\alpha]} \left(\left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \right) + \right. \\ \left. + \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \right) \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \right) + d\mathbf{v} \Bigg\}.$$

При получении компонент матрицы (5.2) для осесимметричного расчета, с учетом (5.1), выражения для $(\partial A / \partial p)_{[\alpha]}$ и $\mathbf{DK}_{[\alpha n]}$ останутся без изменений. Члены $\mathbf{DL}_{[\alpha n]}$ и $\mathbf{DM}_{[\alpha n]}$ получим для осесимметричного случая на примере материала Муни-Ривлина [41], у которого

$${}_1\Psi = {}_1C + {}_2C I(\mathbf{b}), \quad {}_2\Psi = -{}_2C. \quad (5.3)$$

Для этого, продифференцировав 1-й инвариант меры деформации Фингера (4.1):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} I(\mathbf{b}_{[\alpha]}) = 2 \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \cdot \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} \right)_{[\alpha]} + \frac{\frac{\rho}{0} N_{[\alpha n]} \overset{0}{\mathbf{e}}^1}{\frac{\rho}{\rho}} \right)$$

и, определив $\frac{\partial {}_1\Psi_{[\alpha]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = {}_2C_{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} I(\mathbf{b}_{[\alpha]})$, в результате получаем

$$\mathbf{DL}_{[\alpha n]} = {}_2C_{[\alpha]} \sum_j \mathbf{R}_{[j]} \int \int \int_{\mathbf{v}_{[\alpha]}} \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \cdot \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} \right)_{[\alpha]} + \frac{\frac{\rho}{0} N_{[\alpha n]} \overset{0}{\mathbf{e}}^1}{\frac{\rho}{\rho}} \right) d\mathbf{v} + {}_1L_{[\alpha n]},$$

а в выражении для $\mathbf{DM}_{[\alpha n]}$, очевидно исчезнет слагаемое, обозначенное угловыми скобками, поскольку для модели Муни-Ривлина $(\partial {}_2\Psi_{[\alpha]}) / (\partial \mathbf{R}_{[n]}) = 0$.

Чтобы получить компоненты блока $[\partial B / \partial \mathbf{R}]$, перепишем (3.3) в виде

$$\left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} \right)_{[\alpha]} = S_{\bar{p}}^{\bar{q}} \overset{0}{\mathbf{e}}^{\bar{p}} \overset{0}{\mathbf{e}}_{\bar{q}} + \frac{\frac{\rho}{0} \overset{0}{\mathbf{e}}^3 \overset{0}{\mathbf{e}}_3}{\frac{\rho}{\rho}}$$

(по индексам с верхней чертой суммировать до 2), где обозначено

$$S_p^q = \sum_i \overset{0}{\nabla}_p N_{[\alpha i]} R_{[i]}^q.$$

Отсюда

$$III \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} \right)_{[\alpha]} = \frac{\frac{\rho}{0}}{\frac{\rho}{\rho}} (S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1).$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial S_p^q}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = \overset{0}{\nabla}_p N_{[\alpha n]} \overset{0}{\mathbf{e}}^q,$$

получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} III(\nabla \mathbf{r})_{[\alpha]} = \frac{\rho}{0} \sum_i \left(\nabla_1^0 N_{[\alpha n]} \nabla_2^0 N_{[\alpha i]} - \nabla_2^0 N_{[\alpha n]} \nabla_1^0 N_{[\alpha i]} \right) * \\ * \left(R_{[i]}^2 \mathbf{e}^1 - R_{[i]}^1 \mathbf{e}^2 \right) + \frac{N_{[\alpha n]}^0}{\rho} \mathbf{e}^1 (S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1).$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \mathbf{R}} \right)_{[\alpha n]} = \frac{\partial B_{[\alpha]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = \sum_i \iiint_{\mathcal{V}_{[\alpha]}} \frac{\rho}{0} \left(\nabla N_{[\alpha n]}^0 \times \nabla N_{[\alpha i]}^0 \right)^3 dv \left(R_{[i]}^2 \mathbf{e}^1 - R_{[i]}^1 \mathbf{e}^2 \right) + \\ + \mathbf{e}^1 \iiint_{\mathcal{V}_{[\alpha]}} \frac{N_{[\alpha n]}^0}{\rho} (S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1) dv.$$

Таким образом, для осесимметричного случая получены аналитические выражения для всех компонент матрицы частных производных.

6. Численные исследования. Описанные выше теоретические результаты были реализованы в виде прототипа приложения, предназначенного для решения задач небольшой размерности (без учета и использования разреженности матриц). Были проведены расчеты больших деформаций для некоторых задач, позволяющие оценить адекватность соотношений, возможности метода, а также выявить особенности его практического применения. В расчетах использовались изопараметрические четырехугольные сирендиповы КЭ первого порядка с четырьмя узлами. Во всех расчетах для решения использовались процедуры из библиотеки GNU Scientific Library [42]. Среди представленных в ней методов численного решения систем нелинейных уравнений, использующих аналитически задаваемую матрицу частных производных (варианты метода Ньютона и гибридного метода Пауэлла), наилучшие свойства по захвату решения и сходимости на рассмотренных здесь примерах показал решатель `gsl_multirroot_fdfsolver_gnewton`, реализующий модификацию метода Ньютона с улучшением глобальной сходимости путем дополнительно выполняемой оптимизации размера шага в касательном направлении, минимизирующей евклидову норму невязки [46]. Форма начального приближения задавалась из инженерных соображений с точки зрения максимальной близости к предполагаемому решению. Начальное приближение для величин $\{p\}$ задавалось соответствующим исходному ненагруженному состоянию. В этом случае в уравнении состояния (2.3) тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ является нулевым, а мера деформации Фингера $\mathbf{b}$ — единичным тензором, и уравнение состояния принимает вид

$$\mathbf{0} = (-p + 2 {}_1\Psi + 2 {}_2\Psi) \mathbf{1}$$

откуда для модели материала Муни—Ривлина (5.3) начальное значение величины давления в элементах равно

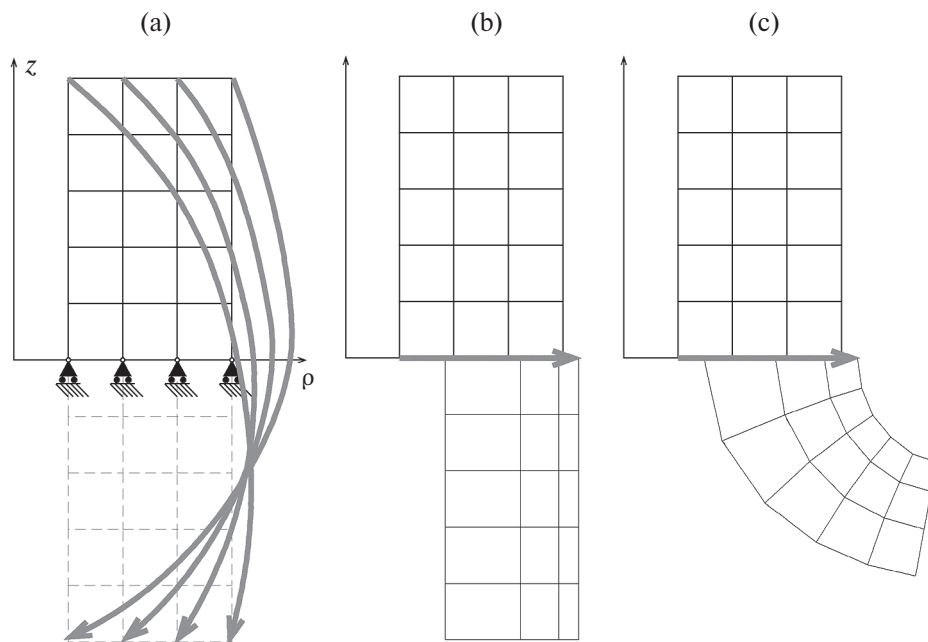


Рис. 1. Расчетная модель с формой начального приближения и варианты деформированного состояния задачи о выверачивании кругового цилиндра.

$$p = 2_1C + 4_2C.$$

Следует отметить, что такой подход в задании начального приближения оказался достаточно результативным: в большинстве случаев решатель уверенно сходится к ожидаемому решению.

Определение состояния вывернутого наизнанку кругового цилиндра относится к непростым задачам нелинейной упругости [10]. В [23] был рассмотрен пример вычисления этого состояния как задача плоской деформации, а теперь аналогичный расчет этой же модели был проведен в сечении другой координатной плоскости, уже как осесимметричная задача. Расчетная схема МКЭ для этой задачи, а также начальное приближение, показаны на рис. 1, а. У исходной формы цилиндра внутренний и внешний радиусы равны соответственно 3 и 12 см, высота 15 см. Константы материала: $_1C = 0.15$ МПа, $_2C = 0.094$ МПа. Граничные условия в перемещениях задавались с точки зрения обеспечения плоской деформации: узлы конечноэлементной сетки, находящиеся на нижнем торце исходной конфигурации цилиндра, зафиксированы в направлении оси z , а для узлов, находившихся до деформирования на верхнем торце, задано в виде ограничения значение z -координаты в деформированном состоянии, обеспечивающее сохранение начальной высоты цилиндра. Фиксация узлов вдоль радиальной координаты поначалу не производилась, поскольку ожидалось, что ее значения будут получены в процессе расчета. Однако при этом выявились проблемы со сходимостью, которая не была достигнута даже после 5000 итераций (этот же эффект наблюдался и в другой задаче,

см. ниже). Эти проблемы могут быть связаны с возможной неединственностью решения нелинейной задачи (например, здесь с точки зрения механики возможны решения, когда вывернут не весь цилиндр, а только некоторая его часть). Когда же в одном из узлов было в качестве ограничения задано перемещение по оси z , величина которого взята из решения соответствующей задачи плоской деформации [23], то процесс сошелся за 6 итераций. Результат расчета показан на рис. 1, б. Значения радиальных координат $\rho_{[i]}$ слоев узловых точек в полученном решении в сравнении с аналогичными величинами из решения, вычисленного ранее по теории плоской деформации, приведены в таблице:

Таблица. 1. Результаты расчета координат узлов сетки для задачи выворачивания цилиндра

осесимметричный расчет	5.521	9.668	11.770	12.864
плоская деформация [23]	5.532	9.674	11.770	12.864

Очевидно, что по величинам перемещений полученное решение совпадает с результатом решения задачи плоской деформации. Аналогично, решения совпадают также и при вычислении компонент девиаторов напряжений Коши. При вычислении же самих напряжений точность расчетов оказалась ниже из-за различия в величинах элементарных давлений $\{p\}$, которые оказались заметно меньше (около 30%) полученных по теории плоской деформации. Можно предположить, что это отличие обусловлено различным пониманием смысла этих давлений, являющихся взвешенно усредненными по площади КЭ.

Следует заметить, что рассмотренная задача по существу является одномерной: значения всех величин постоянны по координате z , поэтому в расчетной схеме можно было бы для высоты цилиндра ограничиться минимальным значением, достаточным для моделирования посредством одного слоя КЭ. Однако, если отменить ограничения, обеспечивающие состояние плоской деформации, и попытаться рассмотреть ее для случая плоского напряженного состояния (т.е. не задавать ограничений по оси z на исходном верхнем крае цилиндра), то задача станет уже двумерной. Результат соответствующего расчета показан на рис. 1, с. Здесь можно видеть, что имеет место эффект расширения свободного конца инвертированного цилиндра (явление, достаточно проблематичное для теоретического рассмотрения [10]). Поэтому, для получения плоского напряженного состояния высоту цилиндра следует увеличить и рассматривать участок сечения, достаточно удаленный от свободного конца.

Еще два численных примера связаны с расчетом уплотнительных колец различных типов поперечного сечения. Расчеты подобных деталей актуальны [47, 48] ввиду их широкого промышленного использования. В рассматриваемых примерах стенки гнезда, в которое помещается уплотнительное кольцо, полагались абсолютно жесткими и задавались в виде граничных условий «в перемещениях» (т.е. путем фиксации соответствующего значения координаты у узлов поверхности кольца, контактирующих со стенкой). Поскольку

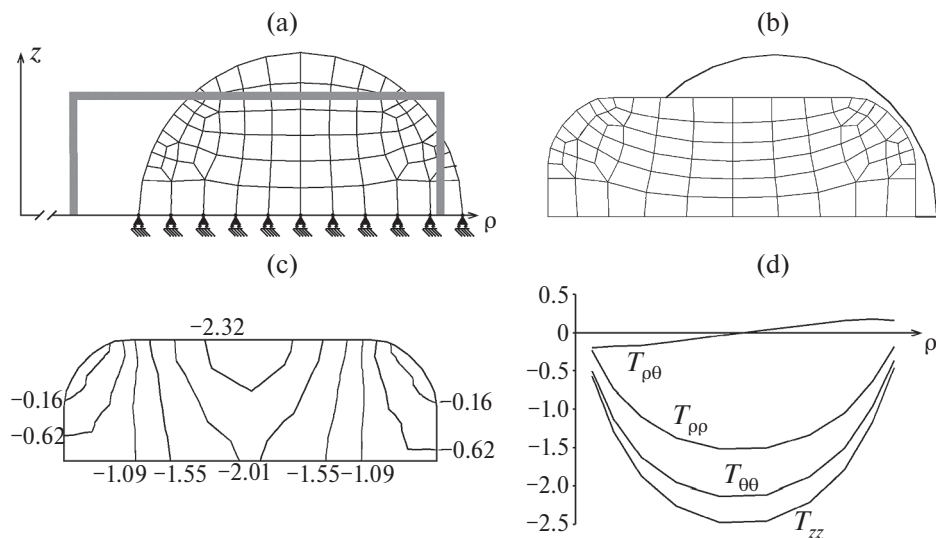


Рис. 2. Расчетная модель и результаты расчетов уплотнительного кольца круглого сечения.

используемый в данной работе неинкрементальный подход не подходит для задач, зависящих от пути нагружения, то наличие сил трения в модели не учитывалось, таким образом предполагается использование смазки.

При задании граничных условий при расчете уплотнительных колец заранее точно не известны границы зон контакта кольца со стенками гнезда. Для решения этой проблемы в процессе расчетов сформировался следующий эвристический алгоритм:

1. Узлы внешней границы недеформированного кольца, выходящие за пределы габаритов гнезда, включаются в зону контакта, т.е. их ортогональная к поверхности стенки гнезда компонента радиус-вектора исключается из числа неизвестных и фиксируется значением соответствующей координаты стенки;

2. Производится расчет напряженно-деформированного состояния при данном варианте граничных условий. По результатам этого расчета анализируется состояние и корректируется принадлежность узлов внешней границы кольца к зоне контакта;

- если среди граничных узлов, не включенных в зону контакта, появились узлы, выходящие за габариты гнезда, то они включаются в зону контакта путём фиксации соответствующей компоненты радиус-вектора значением координаты стенки;

- если среди узлов, включенных в зону контакта, обнаруживается узел, имеющий в прилегающих конечных элементах положительную (т.е. растягивающую) нормальную компоненту напряжений, ортогональную стенке (т.е. «пытающийся отделиться от стенки» вовнутрь гнезда), то он исключается из зоны контакта путём освобождения соответствующей компоненты радиус-вектора и возврата ее в число неизвестных.

3. Если среди узлов границы кольца не нашлось таких, которые перечислены в п. 2, то расчет завершается и полученный результат считается

окончательным. Если же имела место коррекция таких узлов, то снова выполняется переход к п. 2.

Использование такого подхода в приводимых ниже примерах успешно завершалось (за исключением одного упомянутого ниже эксперимента с граничными условиями), потребовав около пяти шагов коррекции граничных условий.

Рассмотрим пример расчета уплотнительного кольца круглого сечения для герметизации фланцевого соединения трубопровода [49]. Кольцо внутренним диаметром 6 см и диаметром сечения 3 мм, изготовленное из резины НО-68-1 с модулем упругости $E = 4$ МПа, требуется поместить в гнездо с внутренним диаметром 58.8 мм, шириной 3.4 мм и высотой 2.2 мм. Ввиду симметрии задачи рассматривается только ее верхняя половина. Поскольку у материала Муни модуль упругости закона Гука соответствует величина $6({}_1C + {}_2C)$ [50], то для расчетов была выбрана неогуксовская модель (${}_2C = 0$) с константой ${}_1C = E/6 = 0.667$ МПа. На рис. 2, а показана конечноэлементная модель, у которой полужирным прямоугольником показаны габариты гнезда. В качестве начального приближения использовался результат линейно-упругого расчета (вспомогательный осесимметричный линейно-упругий расчет выполнялся при помощи студенческой версии пакета ELCUT, использующего треугольные КЭ [51]). Последовательно проведенные шаги расчета по описанному выше алгоритму с коррекцией узлов, входящих в область контакта, требовали, соответственно, 13, 4, 4, 5 и 5 итераций. Получившееся в результате деформированное состояние можно видеть на рис. 2, б. На рис. 2, с показано поле компоненты напряжений T_{zz} . Единицы измерения напряжения на этом и других рисунках — МПа. Как известно [49], в деформированном кольце распределение контактных напряжений по ширине контакта приближенно описывается параболическим законом с максимальным напряжением в точке наибольшей деформации, равным

$$\frac{5}{6} E \left(\sqrt{\frac{d}{h}} - \frac{h}{d} \right) = 1.45 \text{ МПа},$$

где d — диаметр сечения кольца, h — высота гнезда. На рис. 2, д можно увидеть соответствующее распределение zz -компоненты, а также других компонент тензора напряжений Коши, по радиальной координате верхней поверхности контакта, полученное в проведенном расчете. Его действительно можно считать параболой, имеющей максимум, равный 2.4 МПа, что качественно согласуется с приближенной формулой, с учетом того, что значения напряжений в МКЭ-приложениях, основанных на вариационном принципе Лагранжа, вычисляются более грубо, чем значения перемещений.

Для рассматриваемого уплотнительного кольца был также проведен тестовый расчет, в котором граничные условия были заданы только в осевом направлении (ограничение на высоту то же — 2.2 мм), а в радиальном направлении ограничения не ставились. При этом проявились проблемы со сходимостью, аналогичные наблюдавшимся в описываемой выше задаче об инвертировании цилиндра, когда у него тоже не фиксировались перемещения в радиальном направлении: невязка в течение итераций убывает чрезвычайно

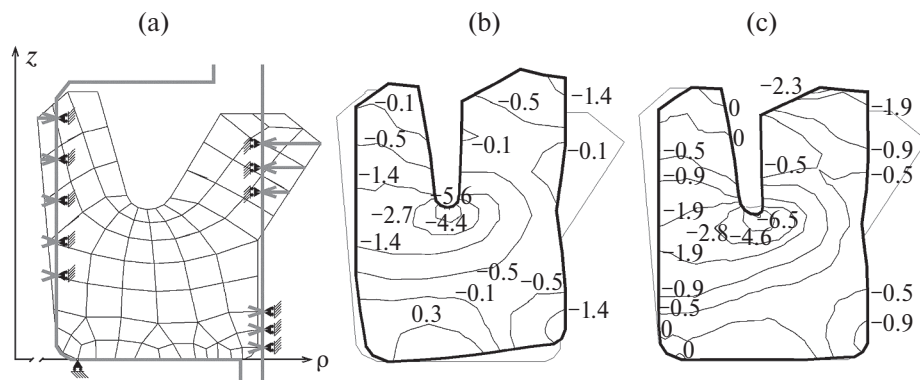


Рис. 3. Расчетная модель и результаты расчетов манжетного уплотнительного кольца.

медленно, и при этом текущие приближения принимают непропорционально большое значение ρ -координаты (в частности, для рассматриваемого уплотнительного кольца внутренний радиус достигал 48.5 мм). Эти проблемы можно связать с тем, что у данной двумерной расчетной схемы, если ее рассчитывать как задачу плоской деформации, очевидно не должно быть сходимости, поскольку без поперечного закрепления становятся допустимыми перемещения модели как твердого тела вдоль горизонтальной оси, т.е. отсутствует единственность решения. По-видимому, наличия подчеркнутых членов в формулах, отличающих этот случай от плоской деформации, оказывается недостаточно для появления сходимости. Таким образом, при решении осесимметричных задач предлагаемым способом следует задавать новую ρ -координату хотя бы в одной узловой точке модели (в частности, в телах, не имеющих сквозных осевых отверстий, это условие выполняется автоматически).

Еще один пример осесимметричного расчета — анализ напряженно-деформированного состояния манжетного уплотнителя поршня [52]. В качестве материала использован полиуретан СКУ-ПФЛ с константами ${}_1C = 0.83$ МПа, ${}_2C = 2.5$ МПа. Рассматривается расчетный случай [48], соответствующий номинальному размещению уплотнителя в корпусе цилиндра либо обратному ходу поршня [47]. Расчетная схема МКЭ и граничные условия в перемещениях показаны на рис. 3, а. Размеры гнезда, в котором требуется разместить: диаметр внутренний 20 см, внешний 30 см, высота 13 см. В результате применения описанного выше алгоритма окончательный расчет для получения решения потребовал 6 итераций. Деформированное состояние уплотнителя, полученное в результате расчета, а также картина распределения радиальной составляющей тензора напряжения Коши, показаны: без задания ограничения на высоту гнезда на рис. 3, б, и со всеми ограничениями на рис. 3, с. По рисунку можно судить о распределении напряжения вблизи поверхностей контакта. Рассматриваемый уплотнитель имеет кромки разного вида: внешнюю практически постоянной толщины и внутреннюю, сужающуюся к концу и имеющую малый угол наклона относительно центральной оси. Можно видеть, что максимум сжимающего напряжения по внешней кромке достигается на ее конце. У внутренней же кромки напряжение на конце близко к нулю,

а максимальное значение достигается у ее основания. Такое распределение контактных напряжений соответствует известным [53] результатам, когда при толщине кромки, уменьшающейся к концу, максимум эпюры находится вдали от конца кромки, а при толщине, близкой к постоянной, максимум напряжения смещен к концу кромки.

7. Заключение. Выполненное исследование позволяет сделать следующие выводы:

- использование тензорно-матричной формы для нелинейного уравнения МКЭ позволило относительно легко выполнить аналитические преобразования (в частности, получение матрицы частных производных) для осесимметричного случая, благодаря инкапсуляции тензорных операций внутри матричных компонент;

- реализация неинкрементального подхода с использованием глобально сходящейся модификации метода Ньютона дает путь к отысканию финального состояния существенно нелинейных задач на основе приближенного задания формы предполагаемого решения из физических соображений;

- в рамках неинкрементального подхода возможно создание специализированного приложения для расчета уплотнительных колец с использованием последовательной коррекции зоны контакта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Souza Neto E.A., Feng Y.T.* On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs' // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1999. V. 179. № 1–2. P. 81–89. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00042-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00042-0)
2. *Arciniega R.A., Reddy J.N.* Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2007. V. 196. № 4-6. P. 1048–1073. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.08.014>
3. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций упругих тел. III. Постановка задачи и алгоритмы решения // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки.* 2009. Т. 151. № 3. С. 108–120.
4. *Bauer S., Schäfer M., Grammenoudis P., Tsakmakis Ch.* Three-dimensional finite elements for large deformation micropolar elasticity // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2010. V. 199. № 41–44. P. 2643–2654. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.05.002>
5. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Процедура восполнения напряжений при решении геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов // *ПММ.* 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 992–1008.
6. *Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim.* Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures // *Finite Elem. Anal. Des.* 2011. V. 47. № 3. P. 237–246. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.10.005>
7. *Cavalieri F.J., Cardona A.* An augmented Lagrangian technique combined with a mortar algorithm for modelling mechanical contact problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2013. V. 93. № 4. P. 420–442. <https://doi.org/10.1002/nme.4391>

8. Галанин М.П., Крылов М.К., Лотоцкий А.П., Родин А.С. Учет больших пластических деформаций в задаче высокоскоростного нагружения алюминиевой ленты // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 66–79.
9. Kan Z., Peng H., Chen B. Complementarity framework for nonlinear analysis of tensegrity structures with slack cables // AIAA J. 2018. V. 56. № 12. P. 5013–5027.
<https://doi.org/10.2514/1.J057149>
10. Nedjar B., Baaser H., Martin R., Neff P. A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of elastic tubes // Comput. Mech. 2018. V. 62. P. 635–654.
<https://doi.org/10.1007/s00466-017-1518-9>
11. Rabelo J.M.G., Becho J.S., Greco M., Cimini C.A.J. Modeling the creep behavior of GRFP truss structures with positional finite element method // Latin American J. Solids Structures. 2018. V. 15. № 2. e17.
<https://doi.org/10.1590/1679-78254432>
12. Fakhrutdinov L.R., Abdrakhmanova A.I., Garifullin I.R., Sultanov L.U. Numerical investigation of large strains of incompressible solids // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1158. № 2. 022041.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022041>
13. Sultanov L. U. Computational algorithm for investigation large elastoplastic deformations with contact interaction // Lobachevskii J Math. 2021. V. 42. P. 2056–2063.
<https://doi.org/10.1134/S199508022108031X>
14. Liu Zh., McBride A., Ghosh A., Heltai L., Huang W., Yu T., Steinmann P., Saxena P. Computational instability analysis of inflated hyperelastic thin shells using subdivision surfaces // Comput. Mech. 2024. V. 73. P. 257–276.
<https://doi.org/10.1007/s00466-023-02366-z>
15. Таубин А.Г., Румянцев К.А., Комендантов А.В. Особенности деформирования изделий из высокоэластичных материалов, содержащих внутренние полости // Труды Крыловского государственного научного центра. 2020. № S1. С. 108–114.
<https://doi.org/10.24937/2542-2324-2020-1-S-I-108-114>
16. Bich Quyen, Ngoc Tien. Penalty function method for geometrically nonlinear buckling analysis of imperfect truss with multi-freedom constraints based on mixed FEM. // E3S Web of Conf. 2023. V. 410.
<https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341003028>
17. Сагдатуллин М.К. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 130–148.
<https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148>
18. De Borst R., Crisfield M., Remmers J., Verhoosel C. Non-linear finite element analysis of solids and structures: second edition. John Wiley, Sons Ltd, 2012. 516 p.
<https://doi.org/10.1002/9781118375938>
19. Ladevèze P. Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. NY: Springer-Verlag, 1999. 220 p.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1432-8>
20. Gotsulyak E.A., Luk'yanchenko O.K., Kostina E.V., Garan I.G. Geometrically nonlinear finite-element models for thin shells with geometric imperfections // Int. Appl. Mech. 2011. V. 47. P. 302–312.
<https://doi.org/10.1007/s10778-011-0461-2>

21. *Tolle K., Marheineke N.* Extended group finite element method // *Appl. Numer. Math.* 2021. V. 162. P. 1–19.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.12.008>
22. *Korelc J.* Semi-analytical solution of path-independent nonlinear finite element models // *Finite Elem. Anal. Des.* 2011. V. 47. № 3. P. 281–287.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.10.006>
23. *Chekhov V.V.* Matrix FEM equation describing the large-strain deformation of an incompressible material // *Int. Appl. Mech.* 2011. V. 46. P. 1147–1153.
<https://doi.org/10.1007/s10778-011-0407-8>
24. *Chekhov V.V.* Modification of the finite-element method to apply to problems of the equilibrium of bodies subject to large deformations // *Int. Appl. Mech.* 2013. V. 49. P. 658–664.
<https://doi.org/10.1007/s10778-013-0599-1>
25. *Boy Vasconcellos D, Greco M.* Logarithmic strain tensor in the positional formulation of FEM // XLIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2023).
26. *Шапиро А.А.* Задачи с конечными деформациями в пакетах ANSYS и LS-DYNA. Верификация использующихся численных методов // *Электронный научный журнал Нефтегазовое дело.* 2004. № 1. С. 20.
27. *Гетман И.П., Карякин М.И., Устинов Ю.А.* Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу // *ПММ.* 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 917–927.
28. *Щербакова А.О.* Применение метода конечных элементов к расчету больших перемещений плоской линейно-упругой конструкции // *Вестник ЮУрГУ Сер. Матем. Мех. Физ.* 2011. № 5. С. 83–91.
29. *Azikri H.P., Ávila C.R., Belo I.M., Beck A.T.* The Tikhonov regularization method in elastoplasticity // *Appl. Math. Model.* 2012. V. 36. № 10. P. 4687–4707.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.086>
30. *Léger S., Fortin A., Tibirna C., Fortin M.* An updated Lagrangian method with error estimation and adaptive remeshing for very large deformation elasticity problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2014. V. 100. № 13. P. 1006–1030.
<https://doi.org/10.1002/nme.4786>
31. *Léger S., Haché J., Traoré S.* Improved algorithm for the detection of bifurcation points in nonlinear finite element problems // *Comput. Struct.* 2017. V. 191. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.06.002>
32. *Бакулин В.Н., Каледин В.О., Каледин Вл.О., Кузнецова Е.В., Репинский В.В.* Объектно-ориентированная реализация метода конечных элементов // *Матем. Моделирование.* 2003. Т. 15. № 2. С. 77–82.
33. *Kumar S.* Object-oriented finite element analysis of metal working processes // *J. Softw. Engineering & Applications.* 2010. V. 3. № 6. P. 572–579.
<https://doi.org/10.4236/jsea.2010.36066>
34. *Копысов С.П., Кузьмин И.М., Недождогин Н.С., Новиков А.К., Рычков В.Н., Сагдеева Ю.А., Тонков Л.Е.* Параллельная реализация конечно-элементных алгоритмов на графических ускорителях в программном комплексе FESstudio // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2014. Т. 6 № 1. С. 79–97.
<https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-1-79-97>

35. *Kanber B., Yavuz M.M.* Object-oriented programming in meshfree analysis of elastostatic problems // *Int. J. of Eng. Applied Sciences (IJEAS)*. 2015. V. 7. № 2. P. 1–18.
<https://doi.org/10.24107/ijeas.251244>
36. *Добромыслов В.В., Александров А.Е., Востриков А.А.* Разработка инструментальных средств конечноэлементного анализа на основе компонентной технологии // *Инновации и инвестиции*. 2015. № 8. С. 135–139.
37. *Eyheramendy D., Saad R., Zhang L.* An object-oriented symbolic approach for the automated derivation of Finite Element contributions // *Adv. Eng. Softw.* 2016. V. 94. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.01.010>
38. *Badia S, Martín AF, Principe J.* FEMPAR: an object-oriented parallel finite element framework // *Arch. Comput. Methods Eng.* 2018. V. 25. P. 195–271.
<https://doi.org/10.1007/s11831-017-9244-1>
39. *Chekhov V.V.* Tensor-based matrices in geometrically non-linear FEM // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2005. V. 63. № 15. P. 2086–2101.
<https://doi.org/10.1002/nme.1343>
40. *Никабадзе М.У.* Задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы с некоторыми приложениями к механике // *Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* 2018. Т. 150. С. 40–77.
41. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
42. *GSL Reference Manual.* URL: <https://www.gnu.org/software/gsl/doc/latex/gsl-ref.pdf> (дата обращения: 20.08.2024)
43. *Лурье А.И.* Дифференцирование по тензорному аргументу // *Вопросы математической физики*. Л.: Наука, 1976. С. 48–57.
44. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление: Учеб. Пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
45. *Роговой А.А.* Формализованный подход к построению моделей механики деформированного твердого тела. Часть 1. Основные соотношения механики сплошных сред. Пермь: УрО РАН, 2020. 288 с.
46. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику: Учебное пособие для вузов. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 504 с.
47. *Yang B., Salant R.F.* Numerical analysis compares the lubrication of U seal and step seal // *Sealing Technology*. 2009. V. 2009. № 3. P. 7–11.
[https://doi.org/10.1016/S1350-4789\(09\)70132-1](https://doi.org/10.1016/S1350-4789(09)70132-1)
48. *Belforte G., Conte M., Manuello Bertetto A., Mazza L., Visconte C.* Experimental and numerical evaluation of contact pressure in pneumatic seals // *Tribol. Int.* 2009. V. 42. № 1. P. 169–175.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.04.010>
49. *Аврущенко Б.Х.* Резиновые уплотнители. Л.: Химия, 1978. 136 с.
50. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. Prentice Hall, 1996. 1037 с.
51. *ELCUT* Новый подход к моделированию полей. URL: <https://elcut.ru> (дата обращения: 20.08.2024)
52. *KD piston seal with asymmetric lips.* URL: <https://astonseals.com/pdf/prodotti/gb/KD.pdf> (дата обращения: 20.08.2024)
53. *Кондаков Л.А., Голубев А.И., Овандер В.Б. и др.* Уплотнения и уплотнительная техника: Справочник. М.: Машиностроение, 1986. 464 с.

APPLICATION OF THE NON-INCREMENTAL APPROACH TO AXISYMMETRIC FEM ANALYSIS OF LARGE STRAIN IN TENSOR-BASED MATRIX FORM

Vladimir V. Chekhov^{a, *}

^a*V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia*

^{*}*e-mail: chekhovvv@cfov.ru*

Abstract. For the tensor-matrix FEM system of equations describing the final state of large deformations of an incompressible elastic body, a development to solve axisymmetric problems is obtained. Also, analytical expressions for the components of the partial derivatives matrix of the system are obtained. Examples of calculating the everted state of a circular cylinder, as well as analysis of sealing rings are described.

Keywords: FEM equation, tensor-block matrices, large strain, static analysis, positional formulation, axisymmetric state, Finger strain measure, incompressible material, Mooney-Rivlin material

REFERENCES

1. *De Souza Neto E.A., Feng Y.T.* On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs' // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1999. 179 (1-2). P. 81–89.
[https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00042-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00042-0)
2. *Arciniega R.A., Reddy J.N.* Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 196 (4-6). 2007. P. 1048–1073.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.08.014>
3. *Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Sultanov L.U.* Numerical Investigation of Large Deformations of Hyperelastic Solids. III. Statements of Problem and Solution Algorithms // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki.* 2009. 151 (3). P. 108–120. (in Russian)
4. *Bauer S., Schäfer M., Grammenoudis P., Tsakmakis Ch.* Three-dimensional finite elements for large deformation micropolar elasticity // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2010. 199 (41-44). P. 2643–2654.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.05.002>
5. *Rogovoi A.A., Stolbova O.S.* A stress recovery procedure for solving geometrically non-linear problems in the mechanics of a deformable solid by the finite element method // *J. Appl. Math. Mech.* 2010. 74 (6). P. 710–720.
6. *Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim.* Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures // *Finite Elements in Analysis and Design.* 2011. 47 (3). P. 237–246.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.10.005>
7. *Cavaleri F.J., Cardona A.* An augmented Lagrangian technique combined with a mortar algorithm for modelling mechanical contact problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2013. 93 (4). P. 420–442.
<https://doi.org/10.1002/nme.4391>

8. *Galanin M.P., Krylov M.K., Lototskii A.P., Rodin A.S.* Large Plastic Strains in the Problem of High-Speed Loading of an Aluminum Ribbon // *Mech. Solids*. 2017. 52 (2). P. 172–183.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417020078>
9. *Kan Z., Peng H., Chen B.* Complementarity Framework for Nonlinear Analysis of Tensegrity Structures with Slack Cables // *AIAA Journal*. 2018. 56 (12). P. 5013–5027.
<https://doi.org/10.2514/1.J057149>
10. *Nedjar B., Baaser H., Martin R., Neff P.* A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of elastic tubes // *Computational Mechanics*. 2018. 62. P. 635–654. doi:10.1007/s00466-017-1518-9
11. *Rabelo J.M.G., Becho J.S., Greco M., Cimini C.A.J.* Modeling the creep behavior of GFRP truss structures with Positional Finite Element Method // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2018. 15 (2): e17.
<https://doi.org/10.1590/1679-78254432>
12. *Fakhrutdinov L.R., Abdrakhmanova A.I., Garifullin I.R., Sultanov L.U.* Numerical investigation of large strains of incompressible solids // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. 1158 (2). 022041.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022041>
13. *Sultanov L.U.* Computational Algorithm for Investigation Large Elastoplastic Deformations with Contact Interaction // *Lobachevskii J Math.* 2021. 42. P. 2056–2063.
<https://doi.org/10.1134/S199508022108031X>
14. *Liu Zh., McBride A., Ghosh A., Heltai L., Huang W., Yu T., Steinmann P., Saxena P.* Computational instability analysis of inflated hyperelastic thin shells using subdivision surfaces // *Comput. Mech.* 2024. 73. P. 257–276.
<https://doi.org/10.1007/s00466-023-02366-z>
15. *Taubin A.G., Rumiantsev K.A., Komendantov A.V.* Specifics of deformation of articles from highly elastic materials with inner cavities // *Transactions of the Krylov State Research Centre*. 2020. 1(S-I). P. 108–114. (in Russian)
<https://doi.org/10.24937/2542-2324-2020-1-S-I-108-114>.
16. *Bich Quyen, Ngoc Tien.* Penalty function method for geometrically nonlinear buckling analysis of imperfect truss with multi-freedom constraints based on mixed FEM. // *E3S Web of Conferences*. 2023. 410.
<https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341003028>
17. *Sagdatullin M.K.* Numerical modeling of nonlinear deformation processes for shells of medium thickness // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023. Vol. 19, No 2. P. 130–148. (in Russian)
<https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148>
18. *De Borst R., Crisfield M., Remmers J., Verhoosel C.* Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition. John Wiley & Sons Ltd, 2012. 516 pp.
<https://doi.org/10.1002/9781118375938>
19. *Ladevèze P.* Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. NY: Springer-Verlag, 1999. 220 pp.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1432-8>
20. *Gotsulyak E.A., Luk'yanchenko O.K., Kostina E.V., Garan I.G.* Geometrically nonlinear finite-element models for thin shells with geometric imperfections // *Int. Appl. Mech.* 2011. 47. P. 302–312.
<https://doi.org/10.1007/s10778-011-0461-2>

21. *Tolle K., Marheineke N.* Extended group finite element method // *Applied Numerical Mathematics*, 2021. 162, P. 1–19.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.12.008>
22. *Korelc J.* Semi-analytical solution of path-independent nonlinear finite element models // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2011. 47 (3). P. 281–287.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.10.006>
23. *Chekhov V.V.* Matrix FEM equation describing the large-strain deformation of an incompressible material // *Int. Appl. Mech.* 2011. 46. P. 1147–1153.
<https://doi.org/10.1007/s10778-011-0407-8>
24. *Chekhov V.V.* Modification of the finite-element method to apply to problems of the equilibrium of bodies subject to large deformations // *Int. Appl. Mech.* 2013. 49. P. 658–664.
<https://doi.org/10.1007/s10778-013-0599-1>
25. *Boy Vasconcellos D, Greco M.* Logarithmic strain tensor in the positional formulation of FEM // *XLIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2023)*.
26. *Shapiro A.A.* Finite strain problems in ANSYS and LS-DYNA. Applied numerical methods verification // *Network journal «Oil and Gas Business»*. 2004. 1. P. 20. (in Russian)
URL: <https://ogbus.ru/article/view/zadachi-s-konechnymi-deformatsiyami-v-paketax-ansys-i-ls-dyna-v/23357> (accessed on 20 August 2024)
27. *Getman I.P., Karyakin M.I., Ustinov Yu.A.* Analysis of the non-linear behaviour of circular membranes with an arbitrary radial profile // *J. Appl. Math. Mech.* 2010. 74 (6). P. 654–662.
28. *Scherbakova A.O.* The finite element method use for large displacements calculations of plane linear-elastic structures // *Vestnik YuUrGU. Serija «Matematika. Mehanika. Fizika»*. 2011. № 32 (249), Issue 5. P. 83–91. (in Russian)
URL: <https://vestnik.susu.ru/mmph/issue/viewIssue/47/23> (accessed on 20 August 2024)
29. *Aziki H.P., Ávila C.R., Belo I.M., Beck A.T.* The Tikhonov regularization method in elastoplasticity // *Applied Mathematical Modelling*. 2012. 36 (10). P. 4687–4707. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.086>
30. *Léger S., Fortin A., Tibirna C., Fortin M.* An updated Lagrangian method with error estimation and adaptive remeshing for very large deformation elasticity problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2014. 100 (13). P. 1006–1030.
<https://doi.org/10.1002/nme.4786>
31. *Léger S., Haché J., Traoré S.* Improved algorithm for the detection of bifurcation points in nonlinear finite element problems // *Computers & Structures*. 2017. 191. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.06.002>
32. *Bakulin V.N., Kaledin V.O., Kaledin V.I., Kuznetsova E.V., Repinsky V.V.* Object-oriented realization of finite element method // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2003. 15 (2); P. 77–82. (in Russian)
33. *Kumar S.* Object-Oriented Finite Element Analysis of Metal Working Processes // *J. Software Engineering & Applications*. 2010. 3. P. 572–579.
<https://doi.org/10.4236/jsea.2010.36066>
34. *Kopysov S.P., Kuzmin I.M., Nedožogin N.S., Novikov A.K., Rychkov V.N., Sagdeeva Y.A., Tonkov L.E.* Parallel implementation of a finite-element algorithms on a graphics accelerator in the software package FESstudio // *Computer Research and Modeling*. 2014. 6 (1). P. 79–97. (in Russian)
<https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-1-79-97>

35. *Kanber B., Yavuz M.M.* Object-oriented programming in meshfree analysis of elastostatic problems // International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS). 2015. 7 (2). P. 1–18.
<https://doi.org/10.24107/ijeas.251244>
36. *Dobromyslov V.V., Alexandrov A.E., Vostrikov A.A.* Development of instrumental tools finite element analysis based on component technology // Innovatsii i investitsii. 2015. 8, P. 135–139. (in Russian)
37. *Eyheramendy D., Saad R., Zhang L.* An object-oriented symbolic approach for the automated derivation of Finite Element contributions // Advances in Engineering Software. 2016. 94. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.01.010>
38. *Badia S, Martín AF, Principe J.* FEMPAR: An Object-Oriented Parallel Finite Element Framework // Arch Comput Methods Eng. 2018. 25. P. 195–271.
<https://doi.org/10.1007/s11831-017-9244-1>
39. *Chekhov V.V.* Tensor-based matrices in geometrically non-linear FEM // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2005. 63 (15). P. 2086–2101.
<https://doi.org/10.1002/nme.1343>
40. *Nikabadze M.U.* Eigenvalue Problems for Tensor-Block Matrices and Their Applications to Mechanics // J. Math. Sci. (N.Y.) 2020. 250. P. 895–931.
<https://doi.org/10.1007/s10958-020-05053-z>
41. *Lurie A.I.* Non-Linear Theory of Elasticity. North-Holland: Amsterdam, 1990. 618 pp.
42. GSL Reference Manual. URL: <https://www.gnu.org/software/gsl/doc/latex/gsl-ref.pdf> (accessed on 20 August 2024)
43. *Lurie A.I.* Differentiation with Respect to Tensor Argument.// Problems of Mathematical Physics. Nauka: Leningrad, 1976. P. 48–57. (in Russian)
44. *Dimitrienko Yu.I.* Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions. — Springer Dordrecht, 2002. 662 pp.
<https://doi.org/10.1007/978-94-017-3221-5>
45. *Rogovoy A.A.* A Formalized Approach to the Construction of Models of Deformable Solid Mechanics. Part I. Basic Relations of Continuum Mechanics. — Perm, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences: Yekaterinburg, Russia, 2020. 288 pp. (in Russian) URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44190094> (accessed on 20 August 2024)
46. *Fedorenko R.P.* Introduction to Computational Physics — MFTI, Moscow, 1994. 528 pp. (in Russian)
47. *Bo Yang, Salant R.F.* Numerical analysis compares the lubrication of U seal and step seal // Sealing Technology. 2009. 2009 (3). P. 7–11.
[https://doi.org/10.1016/S1350-4789\(09\)70132-1](https://doi.org/10.1016/S1350-4789(09)70132-1)
48. *Belforte G., Conte M., Manuello Bertetto A., Mazza L., Visconte C.* Experimental and numerical evaluation of contact pressure in pneumatic seals // Tribology International. 2009. 42 (1). P. 169–175.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.04.010>
49. *Avrushchenko B.Kh.* Rubber Seals. Khimiya, Leningrad, 1978. 136 pp. (in Russian)
50. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. Prentice Hall, 1996. 1037 pp.
51. ELCUT A New Approach to Field Modeling. (in Russian)
URL: <https://elcut.ru> (accessed on 20 August 2024)
52. KD piston seal with asymmetric lips.
URL: <https://astonseals.com/pdf/prodotti/gb/KD.pdf> (accessed on 20 August 2024)

53. *Kondakov L.A., Golubev A.I., Ovander V.B., et al.* Uplotneniya i uplotnitel'naya tekhnika: spravochnik (Seals and Sealing Machines: Handbook), Eds.: Golubev A.I. and Kondakov L.A. Moscow: Mashinostroenie, 1986. 464 pp. (in Russian)

УДК 539.37

ОРИЕНТАЦИЯ ЗОНЫ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ В ХРУПКОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ИСТИННОМ ТРЕХОСНОМ СЖАТИИ

© 2024 г. И. А. Пантелеев^{а,*}, Д. В. Ложкин^{а,**}, В. А. Ляховский^{б,***}

^аИнститут механики сплошных сред УрО РАН, ПФИЦ УрО РАН, Пермь, Россия

^бГеологическая служба Израиля, Иерусалим, Израиль

* e-mail: pia@icmm.ru, ** e-mail: lozhkin.d@icmm.ru,

*** e-mail: vladimir.lyakhovsky@gmail.com

Поступила в редакцию 30.07.2024 г.

После доработки 08.08.2024 г.

Принята к публикации 09.08.2024 г.

В приближении тонкого ослабленного слоя рассматривается задача поиска оптимальной ориентации зоны локализованной поврежденности в хрупком теле при трехосном сжатии с промежуточным напряжением, меняющимся от минимального (схема Кармана) до максимального (схема Беккера) главных напряжений. Неповрежденный материал описывается соотношениями линейно-упругого изотропного тела, ослабленная зона описывается моделью нелинейной упругости академика РАН В.П. Мясникова с упругими модулями, линейно зависящими от скалярного параметра поврежденности. Ориентация ослабленной зоны задается двумя углами относительно направления действия двух главных напряжений, степень ослабления — величиной параметра поврежденности. Поиск оптимальной ориентации зоны для фиксированных значений управляющих параметров заключается в максимизации функционала, определяющего скорость роста поврежденности в этой зоне. В результате решения задачи установлены оптимальные ориентации зоны локализованной поврежденности при различных соотношениях главных напряжений и степени поврежденности. Показано, что с ростом промежуточного напряжения наблюдается уменьшение угла наклона зоны относительно направления действия максимального главного напряжения, а также сужение интервала возможной ориентации зоны относительно направления действия промежуточного главного напряжения. На основе анализа соотношения величин сдвиговых компонент тензора напряжений в плоскости зоны локализованной поврежденности установлены возможные направления сдвига по этой зоне.

Ключевые слова: истинное трехосное сжатие, зона локализации разрушения, нелинейная упругость, промежуточное главное напряжение, ориентационные эффекты

DOI: 10.31857/S1026351924050116, EDN: TZQULV

1. Введение. Ориентация и величина главных напряжений существенно влияют на прочностные свойства и в целом деформационное поведение горных массивов в процессе подземного строительства и разработки полезных ископаемых. В естественных условиях залегания горные породы осадочной толщи и кристаллического фундамента находятся в трехмерном напряженно-деформированном состоянии под действием главных напряжений $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, где σ_1 , σ_2 , σ_3 — максимальное, промежуточное и минимальное главные напряжения. При решении практических задач, как правило, используют двумерные критерии прочности (например, критерий Кулона—Мора), предполагая равенство двух из трех главных напряжений, и, таким образом, игнорируя влияние на деформационное поведение горных пород промежуточного главного напряжения.

Условие нагружения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ в отечественной и зарубежной литературе носит название истинного трехосного сжатия и представляет особый интерес в геомеханике, так как именно истинное трехосное сжатие приводит к избирательному характеру активизации и развития трещиноватости в нагруженной породе, что, в свою очередь, приводит к существенным вариациям ее деформационного отклика [1–9]. Величина и ориентация главных напряжений при истинном трехосном сжатии может меняться как при вариациях регионального геодинамического режима, так и антропогенного воздействия, вызванного бурением, прокладкой туннелей и добычей полезных ископаемых [10–15]. В инженерной практике многие явления разрушения горных пород, такие как расслоение, скалывание, горные удары, зональная дезинтеграция, контролируются истинно трехосным напряженным состоянием, действующим на породе [16–19].

Начиная с пионерских работ Моги [20, 21], усилия научных коллективов по всему миру направлены на теоретико-экспериментальные исследования поведения горных пород различных литотипов в условиях истинного трехосного сжатия. При этом можно выделить несколько магистральных направлений исследований: экспериментальное исследование влияния величины промежуточного главного напряжения σ_2 на деформационное поведение горных пород [3, 6, 22, 23], разработка новых и обобщение известных критериев прочности пород на случай истинного трехосного сжатия [24–28], исследование влияния неравнокомпонентного трехосного напряженного состояния на проницаемость, фильтрацию и ползучесть горных пород [29–31], определение условий проявления эффекта памяти (Кайзера) при циклическом непропорциональном трехосном сжатии горных пород [32–35]. Необходимо отметить, что вопросу ориентации плоскости разрушения (зоны локализованной поврежденности) в условиях истинного трехосного сжатия при различном соотношении главных напряжений уделяется недостаточно внимания [36]. Хотя именно информация о совокупности ориентации плоскостей сдвига/скола в полевых условиях может быть использована для оценки действующего регионального поля напряжений (наравне с моделями Кулона—Андерсона [37] и Риделя [38] для обстановок чистого и простого сдвига).

В случае традиционного трехосного сжатия согласно критерию Кулона—Мора, когда $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, разрушение материала происходит вдоль плоскости,

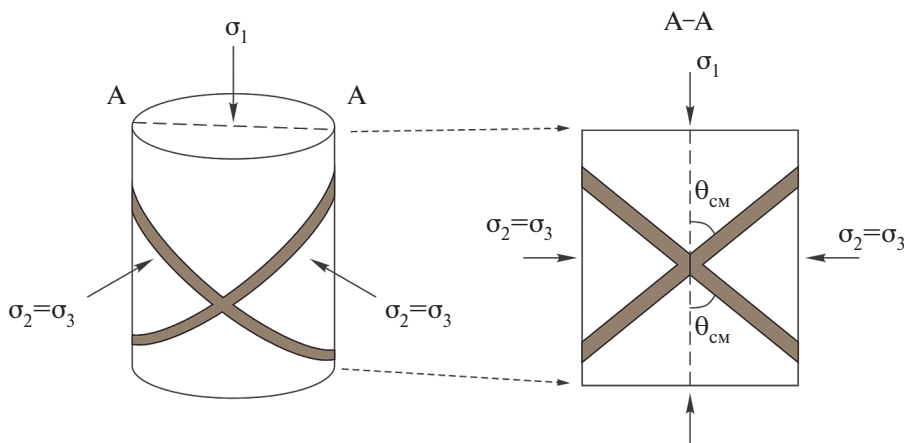


Рис. 1. Ориентация зон локализованной поврежденности при традиционном трехосном сжатии ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$).

на которой действующее касательное напряжение превышает эффективное нормальное напряжение, складывающееся из сцепления C и произведения давления на коэффициент трения χ :

$$|\tau| = \chi \sigma_n + C. \quad (1.1)$$

Сцепление C является собственной прочностью материала на сдвиг, а коэффициент трения определяется углом внутреннего трения $\varphi = \text{tg}^{-1}(\chi)$. Ориентация плоскости, по которой происходит разрушение материала, определяется максимумом кулоновских напряжений $|\tau| - \chi \sigma_n$ и задается углом Кулона–Мора относительно направления действия максимального главного сжимающего напряжения (рис. 1):

$$\theta_{CM} = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1.2)$$

Ранее в работе авторов [39] для случая традиционного трехосного сжатия было показано, что использование нелинейной реологической модели деформирования хрупкого материала позволяет получить оптимальный с точки зрения скорости роста поврежденности угол наклона зоны локализованного разрушения близкий к углу Кулона–Мора θ_{CM} . При этом степень близости определяется величиной параметра поврежденности в зоне локализованного разрушения. Настоящая работа является продолжением этих исследований и посвящена теоретической оценке ориентации зоны локализованной поврежденности в хрупком теле при истинном трехосном сжатии при различных соотношениях между главными напряжениями.

2. Нелинейная реологическая модель деформирования хрупкого тела. Базовыми особенностями деформационного поведения хрупких материалов со структурными неоднородностями различного типа в поле приложенных напряжений являются зависимость упругих свойств от вида

напряженного-деформированного состояния и взаимосвязь процессов сдвигового и объемного деформирования, приводящая, в частности, к дилатансии такого класса материалов в условиях сдвиговых нагрузок. Начиная с пионерской работы Ю.Н. Работнова [40], в которой была предложена модель упругой среды с модулями упругости, зависящими от напряжений, активно начали развиваться разномодульные модели деформирования материалов [41–50].

Данная работа базируется на неклассической модели нелинейной упругости, предложенной во второй половине прошлого века академиком РАН В.П. Мясниковым [51] и получившей свое развитие в работах отечественных и зарубежных ученых [52–55]. Согласно данной модели энергия упругой деформации имеет вид

$$U = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1 \sqrt{I_2} \right), \quad (2.1)$$

где λ, μ – параметр Ламе, γ – дополнительный упругий модуль, определяющий степень нелинейности материала, $I_1 = \varepsilon_{ii}$, $I_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$ – первый и второй инварианты тензора деформации соответственно. В отличие от традиционных моделей нелинейной упругости, которые базируются на включении в выражение для упругой энергии слагаемых более высоких порядков по деформации [56], в этой модели дополнительное слагаемое имеет также второй порядок, как и гуковские члены.

Дифференцирование энергии упругой деформации (2.1) по компонентам тензора деформации приводит к определяющему соотношению

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda - \frac{\gamma}{\xi} \right) I_1 \delta_{ij} + 2 \left(\mu - \frac{\gamma \xi}{2} \right) \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

с упругими модулями $\lambda_{eff} = \lambda - \gamma/\xi$, $\mu_{eff} = \mu - \gamma\xi/2$, зависящими от вида напряженно-деформированного состояния, определяемого параметром $\xi = I_1/\sqrt{I_2}$. Параметр ξ меняется от $-\sqrt{3}$ для всестороннего сжатия до $\sqrt{3}$ при всестороннем растяжении; $\xi = \pm 1$ соответствует одноосному сжатию/растяжению, а $\xi = 0$ – чистому сдвигу. Таким образом, дополнительное нелинейное слагаемое в выражении (2.1) позволяет описывать разномодульность, т.е. скачкообразное изменение упругих модулей при переходе от растяжения к сжатию и дилатансию материала при чистом сдвиге [46, 47].

В работах [53, 57] предложена линейная зависимость упругих свойств от скалярного параметра поврежденности α , описывающего плотность микротрещин, в виде $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0 + \mu_1 \alpha$, $\gamma = \gamma_0 \alpha$, где μ_1, γ_0 – материальные параметры. С использованием принципов линейной термодинамики необратимых процессов получено кинетическое уравнение для роста поврежденности в виде

$$\frac{d\alpha}{dt} = C_d I_2 (\xi - \xi_0), \quad (2.3)$$

где $C_d > 0$ описывает скорость роста поврежденности при заданном уровне деформации, ξ_0 – материальный параметр, контролирующий переход от заживления микротрещин к их росту (критическая величина параметра вида

напряженно-деформированного состояния). Условие $\xi = \xi_0$ является аналогом критерия Кулона–Мора в пространстве деформаций, величина параметра ξ_0 связана с упругими модулями и углом внутреннего трения соотношением:

$$\xi_0 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{9 + 2\left(\frac{\sin \varphi}{1 - \frac{\sin \varphi}{3}}\right)^2 \left(2 + 3\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)}} \quad (2.4)$$

и определяется по результатам традиционных испытаний материала по схеме Кармана (одноосное сжатие с боковым подпором). Необходимо отметить, что условие начала роста поврежденности $\xi \geq \xi_0$, следующее из (2.3), неоднократно подтверждалось в экспериментах по деформированию горных пород различных литотипов [58–60].

В отличие от традиционных моделей континуальной механики, согласно которым разрушение материала наступает при $\alpha = 1$, в нелинейных моделях максимальная поврежденность, характеризующая макроразрушение материала, определяется условием выпуклости потенциала U . Из условия выпуклости потенциала также следует минимально допустимое значение дополнительно упругого модуля γ_0 :

$$\gamma_0 = \frac{\xi_0 \left((\xi_0^2 - 6)\lambda_0 - 2\mu_0 \right) - \sqrt{(6\xi_0\lambda_0 - \xi_0^3\lambda_0 + 2\xi_0\mu_0)^2 - 8\mu_0(3\lambda_0 + 2\mu_0)(\xi_0^2 - 3)}}{2(\xi_0^2 - 3)}. \quad (2.5)$$

Вывод необходимых и достаточных условий локальной строгой выпуклости потенциала (2.1), а также зависимости максимального возможного значения параметра поврежденности от параметра вида напряженно-деформированного состояния представлены в работе [61]. В следующем разделе кинетическое уравнение (2.3) будет использовано для определения оптимальной ориентации зоны локализованной поврежденности в хрупком материале в условиях истинного трехосного сжатия.

3. Ориентация зоны локализованной поврежденности при истинном трехосном сжатии. *3.1. Постановка задачи.* Рассмотрим представительный объем хрупкого материала с зоной локализованной поврежденности, находящийся в общем случае в условиях истинного трехосного сжатия с $(\sigma_{zz} = \sigma_1) > (\sigma_{yy} = \sigma_2) > (\sigma_{xx} = \sigma_3)$. Ориентация зоны локализованной поврежденности определяется двумя углами: углом θ между зоной и направлением действия максимального главного напряжения σ_1 , и углом β между зоной и направлением действия промежуточного главного напряжения σ_2 (рис. 2).

В случае упругого изотропного неповрежденного тела компоненты тензора деформации определяются согласно закону Гука для линейно-упругого материала как

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 = \frac{1}{2\mu_0} \left[\sigma_1 - \frac{\lambda_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right],$$

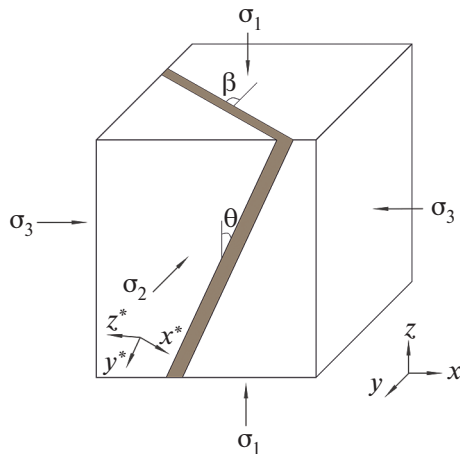


Рис. 2. Геометрия представительного объема с зоной локализованной поврежденности в условиях истинного трехосного сжатия (XYZ – глобальная система координат, $X^*Y^*Z^*$ – система координат зоны локализованной поврежденности).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} = \varepsilon_2 &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\sigma_2 - \frac{\lambda_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_3 &= \frac{1}{2\mu_0} \left[\sigma_3 - \frac{\lambda_0}{3\lambda_0 + 2\mu_0} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right].\end{aligned}\quad (3.1)$$

Зона представляет собой сплошной материал с заниженными из-за поврежденности упругими свойствами. В приближении тонкого слоя, условие непрерывности перемещений и усилий на границах зоны приводит к следующей системе равенств для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^*(\alpha) &= \sigma_{zz}^{*el}, \\ \sigma_{xz}^*(\alpha) &= \sigma_{xz}^{*el}, \\ \sigma_{yz}^*(\alpha) &= \sigma_{yz}^{*el}, \\ \sigma_{xx}^* &= \sigma_{xx}^{*el}, \\ \sigma_{yy}^* &= \sigma_{yy}^{*el}, \\ \sigma_{xy}^* &= \sigma_{xy}^{*el},\end{aligned}\quad (3.2)$$

где σ_{ij}^* – компоненты тензора напряжений в зоне локализованной поврежденности, σ_{ij}^{*el} – компоненты тензора напряжений в окружающей зону неповрежденном материале в системе координат зоны. С использованием трех первых равенств в (3.2) для заданного уровня поврежденности α будем искать ε_{zz}^* , ε_{xz}^* , ε_{xy}^* , остальные компоненты тензора деформации совпадают с компонентами для окружающего неповрежденного материала.

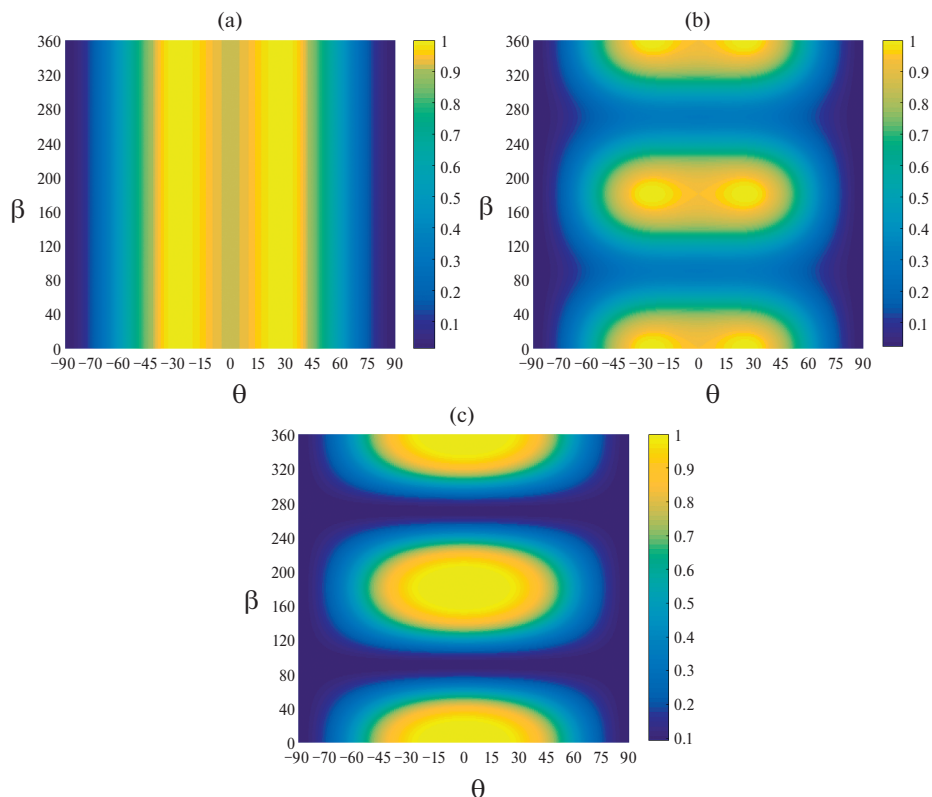


Рис. 3. Зависимость функционала $f(k, \theta, \beta)$ от углов ориентации зоны локализованной поврежденности θ, β для параметра $k=0$ (а), $k=0.5$ (б), $k=1$ (с).

Оптимальный с точки зрения эффективности диссипации энергии угол наклона зоны локализованной поврежденности определяется в результате решения задачи максимизации функционала $f(k, \theta, \beta)$

$$f(k, \theta, \beta) = I_2(\xi - \xi_0) \rightarrow \max, \quad (3.3)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi,$$

представляющего собой правую часть кинетического уравнения для параметра поврежденности α .

3.2. Результаты решения задачи оптимизации. Зафиксируем величину минимального главного напряжения σ_3 , а величину промежуточного главного напряжения будем искать как $\sigma_2 = \sigma_3 + k(\sigma_1 - \sigma_3)$. Таким образом, параметр k определяет степень отклонения действующего напряженного состояния от традиционного одноосного сжатия с боковым подпором. При $k=0$ представляет собой объем подвергается одноосному сжатию с боковым подпором ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, схема Кармана), при $k=1$ — обобщенному трехосному сжатию ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$, схема Беккера), при $k \in (0, 1)$ — непропорциональному трехосному сжатию.

Таблица 1. Материальные параметры и параметры нагружения

Упругие модули, ГПа			Угол внутреннего трения, град.	Критический параметр	Минимальное главное напряжение, МПа
λ_0	μ_0	γ_0	φ	ξ_0	σ_3
30.0	30.0	33.95	36	-0.87	-50

В табл. 1 представлены материалы параметры и параметры нагружения, использованные для расчета деформаций и решения задачи оптимизации (3.3). Критический параметр ξ_0 , отвечающий за рост поврежденности, для заданного угла внутреннего трения и упругих свойств в соответствии с (2.4) равен $\xi_0 = -0.87$. Будем искать оптимальные углы наклона зоны локализованной поврежденности для минимального главного напряжения $\sigma_3 = 50$ МПа, а максимальное главное напряжение σ_1 для фиксированной величины параметра k найдем из условия начала роста поврежденности $\xi = \xi_0$. Для принятых материальных параметров угол Кулона–Мора, определяющий ориентацию зоны локализованной поврежденности в случае $k=0$, составляет $\theta_{\text{CM}} = \pm 27^\circ$.

На рис. 3 представлены зависимости функционала $f(k, \theta, \beta)$ от углов ориентации зоны локализованной поврежденности θ, β при $\alpha = 0.1$ для различных значений параметра k . Приведенные зависимости нормированы на свое максимальное значение, так как нас интересует положение локальных максимумов на плоскости (θ, β) , а не их абсолютная величина.

Видно, что в случае традиционного трехосного сжатия ($k=0$) величина функционала $f(k, \theta, \beta)$ в общем, и его максимальное значение в частности, не зависят от угла β (рис. 3, а). Этот результат закономерен и вызван цилиндрической симметрией приложенных к представительному объему напряжений. При $k > 0$ имеет место периодическое изменение величины $f(k, \theta, \beta)$ с ростом угла β (рис. 3, б, в). Для всех значений $k > 0$ период составляет πn , $n=0, 1, \dots$. Таким образом, в случае истинного трехосного сжатия зона локализованной поврежденности ориентирована квазинормально к направлению действия минимального главного напряжения σ_3 . Необходимо отметить, что для любой величины параметра k функционал $f(k, \theta, \beta)$ имеет локальные максимумы, расположенные симметрично относительно линии $\theta=0$ (соответствующей плоскости нормальной к направлению действия минимального главного напряжения σ_3). Поэтому далее будем рассматривать только интервал $\theta \in [0, \pi/2]$, подразумевая наличие симметричного решения.

Ориентация зоны локализованной поврежденности в плоскости XZ определяется углом θ , который при $k=0$ близок в углу Кулона–Мора, а при $k > 0$ смещается в сторону вертикально ориентированной зоны ($\theta=0^\circ$). Это тенденция отчетливо видна на зависимости нормированного на свое максимальное значение функционала $f(k, \theta, 0)$ при $\beta=0^\circ$ от угла θ для различных значений параметра k (рис. 4). Если для кривой $k=0.5$ смещение максимума зависимости относительно кривой $k=0$ незначительное, то для кривой $k=0$ угол θ , доставляющий функционалу $f(k, \theta, 0)$ максимальное значение, почти в 2 раза меньше угла θ для кривой $k=0$.

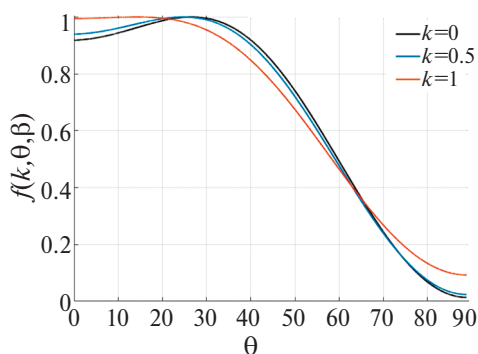


Рис. 4. Зависимость нормированного функционала $f(k, \theta, \beta)$ при $\beta = 0^\circ$ от угла θ для различных значений параметра k .

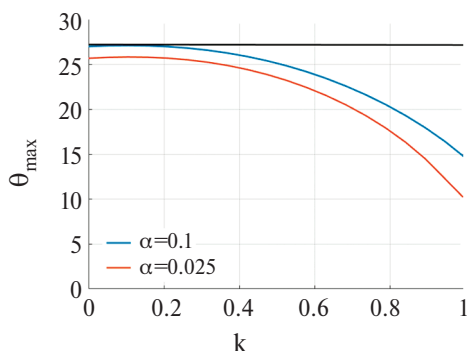


Рис. 5. Зависимость угла $\theta_{\max}$, доставляющего максимальное значение функционалу $f(k, \theta, 0)$, от параметра k для двух значений параметра поврежденности α (черная линия соответствует углу Кулона–Мора).

На рис. 5 представлены зависимости угла θ , доставляющего максимальное значение функционалу $f(k, \theta, 0)$, от параметра k для различного уровня поврежденности в зоне. При $\alpha = 0.1$ в случае $k = 0$, как было указано ранее, оптимальный угол наклона θ зоны локализованной поврежденности в плоскости XZ , совпадает с углом Кулона–Мора и уменьшается с ростом параметра k вплоть до 15° (55% от угла Кулона–Мора).

С уменьшением величины поврежденности в тонком слое наблюдается смещение при $k = 0$ оптимального угла его наклона $\theta_{\max}$ в область меньших значений и более существенная (по сравнению с $\alpha = 0.1$) его деградация с ростом параметра k . Так при $\alpha = 0.025$ в случае одноосного сжатия с боковым подпором ($k = 0$) оптимальный угол $\theta_{\max}$ доставляющий максимум функционалу $f(k, \theta, 0)$ равен 25.5° , а при $k = 1$ эта величина равна $\theta_{\max} = 10^\circ$.

3.3. Обсуждение результатов. В результате решения задачи максимизации (3.3) найдены оптимальные углы θ и β наклона зоны локализованной

поврежденности для различных значений параметра k , определяющих вариацию промежуточного главного напряжения от минимального до максимального главного напряжения. Важно отметить, что значения функционала $f(k, \theta, \beta)$ близкие к его максимуму имеют место для некоторого интервала изменения каждого из углов. С точки зрения максимальной скорости поврежденности это означает, что в лабораторных экспериментах по деформированию горных пород может наблюдаться вариация в некоторых пределах ориентации зоны локализованной поврежденности. При этом конкретная ориентация зоны разрушения будет определяться, помимо соотношений главных напряжений, минеральным строением и имеющимися в образцах дефектами сплошности.

Для учета этого обстоятельства примем за возможные оптимальные углы ориентации зоны локализованной поврежденности интервалы их изменения, для которых значение функционала $f(k, \theta, \beta)$ варьируется относительно глобального максимума в пределах $\pm 1\%$. Оптимальное решение для двух предельных случаев $\sigma_2 = \sigma_3$ и $\sigma_1 = \sigma_2$ представлено на рис. 6. В случае одноосного сжатия с боковым подпором ($k = 0$) зона локализованной поврежденности ориентирована в плоскости XZ (относительно направления действия максимального главного напряжения) под углом Кулона—Мора $\theta_{\text{см}} \pm 5^\circ$ и произвольным углом ориентации β относительно направления действия промежуточного главного напряжения (ввиду цилиндрической симметрии) (рис. 6, а). В случае, когда максимальное и промежуточное главные напряжения совпадают ($k = 1$) оптимальными ориентациями зоны локализованной поврежденности являются $\theta \in [0^\circ, 25^\circ]$ и $\beta = 0^\circ \pm 20^\circ$. Необходимо отметить, что полученное для $k > 1$ решение для углов θ и β соответствует экспериментально наблюдаемому данным. Так в экспериментах по истинному трехосному сжатию песчаника Darley Dale было показано, что в процессе деформирования происходит формирование зоны повышенной трещиноватости, ориентированной перпендикулярно направлению оси минимального главного напряжения (угол β) с отклонением не более $\pm 18^\circ$ [8].

В результате решения задачи поиска оптимальной ориентации зоны поврежденности в хрупком твердом теле при истинном трехосном сжатии показано, что с ростом величины промежуточного напряжения σ_2 наблюдается уменьшение угла ее наклона относительно направления действия максимального главного напряжения (рис. 5). Другими словами, с ростом промежуточного главного напряжения зона локализованной поврежденности стремится к вертикальной ориентации, субнормальной к направлению действия минимального главного напряжения. При этом амплитуда изменения угла θ_{max} при вариации промежуточного напряжения σ_2 от σ_3 к σ_1 зависит от величины поврежденности в зоне, но не превышает 15° — 20° . Данные результаты качественно и количественно совпадают с результатами экспериментов по истинному трехосному сжатию горных пород. Так, в работе [62] при испытаниях кубических образцов гранита при различных вариациях величины промежуточного главного напряжения показано, что разброс значений между минимальным и максимальным углом разрушения не превышает 22° , при его уменьшении с ростом величины σ_2 .

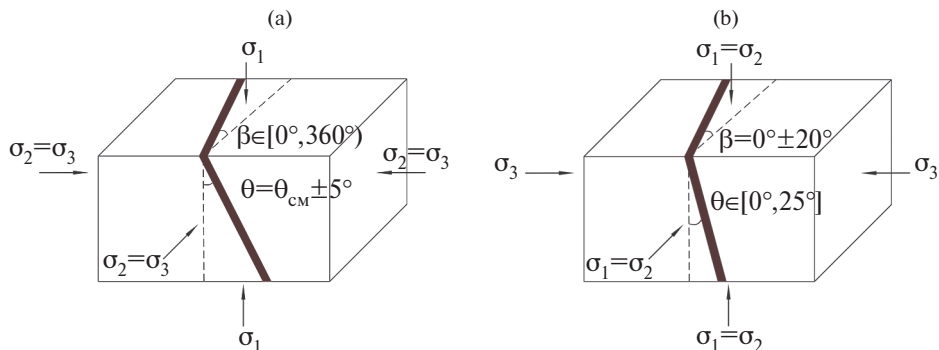


Рис. 6. Схематическое изображение оптимальных углов ориентации зоны локализованной поврежденности для случая $k=0$, $\sigma_2 = \sigma_3$ (а), $k=1$, $\sigma_1 = \sigma_2$ (б).

Соотношение сдвиговых компонент тензора напряжений в плоскости зоны локализованной поврежденности определяет направление действия сдвигового усилия, что в свою очередь позволяет определить направление возможной сдвиговой подвижки и охарактеризовать кинематический тип этой зоны. Для выбранной геометрии направление сдвига будет определяться значением и знаком компонент σ_{xz} и σ_{yz} . На рис. 7 представлены карты направлений сдвига в плоскости зоны локализованной поврежденности в диапазоне допустимых углов ориентации θ и β для двух значений параметра k . Видно, что для большого диапазона изменения углов θ и β зона локализованной поврежденности характеризуется сбросовым характером смещения блоков рассматриваемого представительного объема, которые она разделяет. Для больших значений угла β возможна реализация горизонтального сдвига блоков, и сбросо-сдвиговых смещений, как промежуточного режима сдвига блоков относительно друг друга. При этом интервал изменения углов θ и β , соответствующих горизонтальному сдвигу, с ростом величины k также увеличивается (рис. 7, а, б).

На рис. 8 представлены схемы смещений блоков для предельного случая равенства максимального и промежуточного главных напряжений ($k=1$) для трех пар углов θ и β , отмеченных на рис. 7 как A_1 , A_2 и A_3 .

Направление подвижки в этом случае зависит от соотношения величины углов θ и β . Так при $\beta < 0.94\theta + 0.106$ имеет место сбросовый режим смещения блоков по плоскости зоны локализованной поврежденности, характеризующийся вертикальным сдвигом одного блока относительно другого (рис. 8, A_1). В случае $\beta \approx 0.94\theta + 0.106$, характеризующимся, с одной стороны, малыми значениями угла θ (квазивертикальная ориентация зоны в плоскости XZ), а с другой стороны, большими значениями угла β (выход зоны из плоскости YZ), будет наблюдаться горизонтальный сдвиг одного блока относительно другого (рис. 8, A_3). В свою очередь, при $\beta \approx 0.94\theta + 0.106$ будет иметь место промежуточный смешанный сбросово-сдвиговой режим смещения блоков относительно друг друга (рис. 8, A_2). В случаях A_2 и A_3 направление горизонтального сдвига (правый или левый сдвиг) будет определяться взаимной ориентацией зоны локализованной поврежденности и направлением действия промежуточного

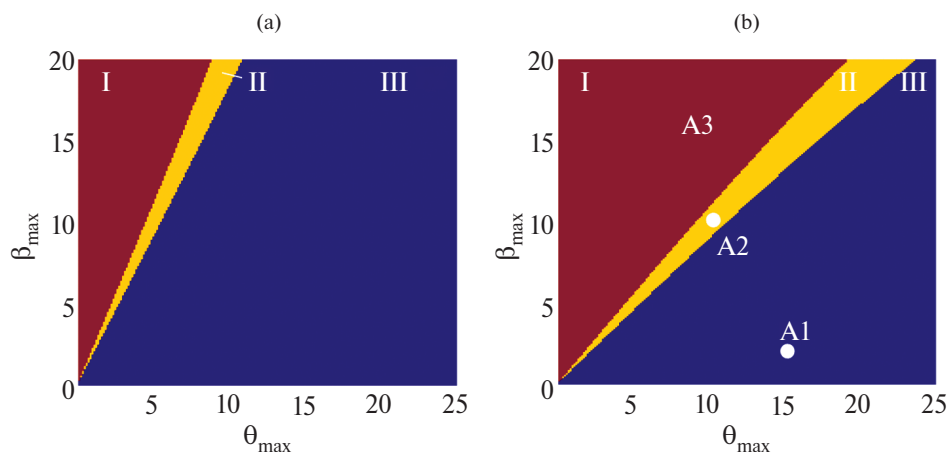


Рис. 7. Карты направления сдвига (I – сдвиг, II – сбросо-сдвиг, III – сброс) в плоскости зоны локализованной поврежденности для различных углов ее ориентации при $k=0.5$ (a) и $k=1$ (b) (точками указаны рассматриваемые случаи ориентации зоны локализованной поврежденности).

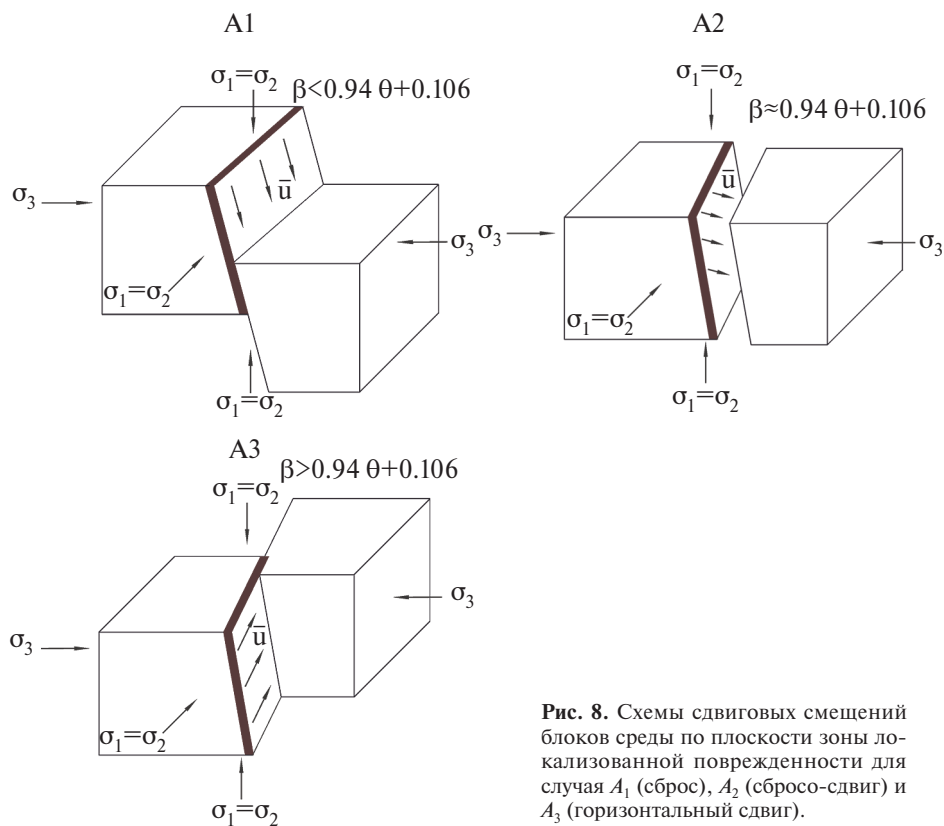


Рис. 8. Схемы сдвиговых смещений блоков среды по плоскости зоны локализованной поврежденности для случая A_1 (сброс), A_2 (сбросо-сдвиг) и A_3 (горизонтальный сдвиг).

главного напряжения σ_2 ($\beta > 0$ — левый сдвиг, $\beta < 0$ — правый сдвиг). Соответственно, на рис. 8 (случай A_3) представлен левый сдвиг.

4. Заключение. В работе представлено решение задачи определения оптимальной ориентации зоны локализованной поврежденности в хрупком твердом теле при истинном трехосном сжатии. Близость промежуточного главного напряжения к максимальному главному напряжению определяется скалярным параметром k , меняющимся от 0 (схема Кармана, минимальное и промежуточные главные напряжения равны) до 1 (схема Беккера, промежуточное и максимальное главные напряжения равны). Предполагается, что зона локализованной поврежденности представляет собой тонкий слой ослабленного материала, деградация упругих свойств которого описывается скалярным параметром поврежденности. Напряженно-деформированное состояние ослабленной зоны описывается моделью нелинейной упругости академика РАН В.П. Мясникова с модулями упругости, линейно зависящими от скалярного параметра поврежденности, тогда как окружающий зону материал принимается линейно-упругим изотропным.

Согласно модели В.П. Мясникова упругие свойства ослабленной зоны зависят от вида напряженно-деформированного состояния, а рост параметра поврежденности контролируется параметром вида напряженно-деформированного состояния, представляющего собой отношение двух инвариантов тензора деформации. Ориентация зоны локализованной поврежденности описывается двумя углами: между зоной и направлением действия максимального главного напряжения, между зоной и направлением действия промежуточного главного напряжения. Под оптимальной ориентацией зоны локализованной поврежденности понимается пара углов, доставляющая локальный максимум правой части кинетического уравнения для параметра поврежденности. Решение задачи максимизации осуществлялось при варьировании управляющих параметров: параметра k , характеризующего близость промежуточного главного напряжения к максимальному главному напряжению, величины поврежденности в ослабленной зоне.

В результате решения поставленной задачи установлено, что, с одной стороны, в независимости от величины k решение симметрично относительно линии, соответствующей плоскости нормальной к направлению действия минимального главного напряжения. С другой стороны, при $k > 0$ локальные максимумы имеют периодическое по второму углу расположение с периодом πn , $n = 0, 1, \dots$. При $k = 0$ зона локализованной поврежденности ориентирована в плоскости XZ под углом близким к углу Кулона—Мора. Степень близости определяется величиной параметра поврежденности. При этом в плоскости XU ее ориентация может быть произвольной в виду цилиндрической симметрии приложенных напряжений. С ростом параметра k зона локализованной поврежденности стремится к вертикальному положению, ортогональному к направлению действия минимального главного напряжения.

Принимая во внимание обстоятельство, что в природе конкретная ориентация зоны разрушения хрупкого материала будет определяться, помимо соотношений главных напряжений, минеральным строением и имеющимися априори дефектами сплошности, были определены интервалы изменения

углов ориентации зоны, обеспечивающих близкую (отличие не превосходит 1%) максимальную скорость роста поврежденности. На основе анализа соотношения величин сдвиговых компонент тензора напряжений в плоскости зоны локализованной поврежденности показано, что в зависимости от величины параметра k , и соотношения углов ориентации зоны, может быть реализован один из трех типов смещений: сброс, горизонтальный сдвиг и сбросо-сдвиг. Полученные теоретические решения качественно и количественно совпадают с результатами экспериментов по истинному трехосному сжатию горных пород, опубликованных в российской и зарубежной литературе.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта (№19-77-30008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feng X.T., Kong R., Zhang X.W., Yang C.X.* Experimental study of failure differences in hard rock under true triaxial compression // *Rock Mech. Rock Eng.* 2019. V. 52. P. 2109–2122.
<https://doi.org/10.1007/s00603-018-1700-1>
2. *Mogi K.* Effect of the intermediate principal stress on rock failure // *J. Geophys. Res.* 1967. V. 72. P. 5117–5131.
<https://doi.org/10.1029/jz072i020p05117>
3. *Haimson B.C., Chang C.* A new true triaxial cell for testing mechanical properties of rock, and its use to determine rock strength and deformability of Westerly granite // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2000. V. 37. № 1–2. P. 285–296.
[https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(99\)00106-9](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(99)00106-9)
4. *Haimson B.C.* True triaxial stresses and the brittle fracture of rock // *Pure Appl. Geophys.* 2006. V. 163. P. 1101–1113.
<https://doi.org/10.1007/s00024-006-0065-7>
5. *Nasseri M.H.B., Goodfellow S.D., Lombos L., Young R.P.* 3-D transport and acoustic properties of Fontainebleau sandstone during true-triaxial deformation experiments // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2014. V. 69. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2014.02.014>
6. *Feng X.T., Zhang X.W., Kong R., Wang G.* A novel Mogi type true triaxial testing apparatus and its use to obtain complete stress-strain curves of hard rocks // *Rock Mech. Rock Eng.* 2016. V. 49. P. 1649–1662.
<https://doi.org/10.1007/s00603-015-0875-y>
7. *Wang S., Li X., Du K., Wang S., Tao M.* Experimental study of the triaxial strength properties of hollow cylindrical granite specimens under coupled external and internal confining stresses // *Rock Mech. Rock Eng.* 2018. V. 51. P. 2015–2031.
<https://doi.org/10.1007/s00603-018-1452-y>
8. *Browning J., Meredith P.G., Stuart C.E., Healy D., Harland S. and Mitchell T.M.* Acoustic characterization of crack damage evolution in sandstone deformed under conventional and true triaxial loading // *J. Geophys. Res.* 2017. V. 122. № 6. P. 4395–4412.
<https://doi.org/10.1002/2016jb013646>
9. *Browning J., Meredith P.G., Stuart C., Harland S., Healy D. and Mitchell T.M.* A directional crack damage memory effect in sandstone under true triaxial loading // *Geophys. Res. Lett.* 2018. V. 45. № 14. P. 6878–6886.
<https://doi.org/10.1029/2018GL078207>

10. Zhang Q.B., Zhao J. A review of dynamic experimental techniques and mechanical behavior of rock materials // *Rock Mech. Rock Eng.* 2014. V. 47. P. 1411–1478.
<https://doi.org/10.1007/s00603-013-0463-y>
11. Cai X., Zhou Z.L., Liu K., Du X.M., Zang H.Z. Water-weakening effects on the mechanical behavior of different rock types: phenomena and mechanisms // *Appl Sci.* 2019. V. 9. № 20. P. 4450.
<https://doi.org/10.3390/app9204450>
12. Zhou Z.L., Cai X., Li X.B., Cao W.Z., Du X.M. Dynamic response and energy evolution of sandstone under coupled static–dynamic compression: insights from experimental study into deep rock engineering applications // *Rock Mech. Rock Eng.* 2020. V. 53. P. 1305–1331.
<https://doi.org/10.1007/S00603-019-01980-9>
13. Wang Y.T., Zhou X.P., Kou M.M. Three-dimensional numerical study on the failure characteristics of intermittent fissures under compressive-shear loads // *Acta. Geotech.* 2019. V. 14. P. 1161–1193.
<https://doi.org/10.1007/s11440-018-0709-7>
14. Dang W., Konietzky H., Frühwirth T., Herbst M. Cyclic frictional responses of planar joints under cyclic normal load conditions: laboratory tests and numerical simulations // *Rock Mech. Rock Eng.* 2020. V. 53. P. 337–364.
<https://doi.org/10.1007/s00603-019-01910-9>
15. Peng K., Liu Z., Zou Q., Wu Q., Zhou J. Mechanical property of granite from different buried depths under uniaxial compression and dynamic impact: an energy-based investigation // *Powder. Technol.* 2020. V. 362. P. 729–744.
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2019.11.101>
16. Qian Q.H., Zhou X.P., Yang H.Q., Zhang Y.X., Li X.H. Zonal disintegration of surrounding rock mass around the diversion tunnels in Jinping II Hydropower Station, Southwestern China // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2009. V. 51. № 2. P. 129–138.
<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2009.04.006>
17. Wang S., Huang L., Li X. Analysis of rockburst triggered by hard rock fragmentation using a conical pick under high uniaxial stress // *Tunnelling and Underground Space Technology.* 2020. V. 96. P. 103195.
<https://doi.org/10.1016/j.tust.2019.103195>
18. Циху Ц., Чжу К., Кси Е. Влияние горизонтальных напряжений на явление зональной дезинтеграции горных пород в массиве с выработкой круглого сечения // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых.* 2012. № 2. С. 88–97.
19. Кви Ч., Ли К., Бай Д. и др. Градиентная модель зональной дезинтеграции массива пород вокруг выработок глубокого залегания // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых.* 2017. № 1. С. 25–37.
20. Mogi K. Effect of the intermediate principal stress on rock failure // *J. Geophys. Res.* 1967. V. 72. № 20. P. 5117–5131.
<https://doi.org/10.1029/jz072i020p05117>
21. Mogi K. Fracture and flow of rocks under high triaxial compression // *J. Geophys. Res.* 1971. V. 76. № 5. P. 1255–1269.
<https://doi.org/10.1029/jb076i005p01255>
22. Chang C., Haimson B.C. True triaxial strength and deformability of the German Continental Deep Drilling Program (KTB) deep hole amphibolite // *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.* 2000. V. 105. № B8. P. 18999–19013.
<https://doi.org/10.1029/2000jb900184>

23. *Ma X.D., Haimson B.C.* Failure characteristics of two porous sandstones subjected to true triaxial stresses // *J. Geophys. Res-Sol. Ea.* 2016. V. 121. № 9. P. 6477–6498.
<https://doi.org/10.1002/2016jb012979>
24. *Mingqing You.* True-triaxial strength criteria for rock // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2009. V. 46. № 1. P. 115–127.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2008.05.008>
25. *Colmenares L.B., Zoback M.D.* A statistical evaluation of intact rock failure criteria constrained by polyaxial test data for five different rocks // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2002. V. 39. № 6. P. 695–729.
[https://doi.org/10.1016/s1365-1609\(02\)00048-5](https://doi.org/10.1016/s1365-1609(02)00048-5)
26. *Zhang, Q., Li, C., Quan, X. et al.* New true-triaxial rock strength criteria considering intrinsic material characteristics // *Acta. Mech. Sin.* 2018. V. 34. P. 130–142.
<https://doi.org/10.1007/S10409-017-0723-2>
27. *Singh M., Raj A., Singh B.* Modified Mohr–Coulomb criterion for non-linear triaxial and polyaxial strength of intact rocks // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2011. V. 48. № 4. P. 546–555.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2011.02.004>
28. *Zhang Q., Zhu H.H., Zhang L.Y.* Modification of a generalized three-dimensional Hoek–Brown strength criterion // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2013. V. 59. P. 80–96.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2012.12.009>
29. *Климов Д.М., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф.* Экспериментальное исследование влияния неравнокомпонентного трехосного напряженного состояния на проницаемость горных пород // *Изв. РАН. МТТ.* 2015. № 6. С. 39–48.
30. *Карев В.И., Климов Д.М., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б.* Экспериментальное исследование ползучести горных пород при истинно трехосном нагружении // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 6. С. 30–37.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919060084>
31. *Карев В.И., Химуля В.В., Шевцов Н.И.* Экспериментальные исследования процессов деформирования, разрушения и фильтрации в горных породах // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 5. С. 3–26.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921050056>
32. *Пантелеев И.А., Мубассарова В.А., Зайцев А.В., Шевцов Н.И., Коваленко Ю.Ф., Карев В.И.* Эффект кайзера при трехосном сжатии песчаника с последовательным вращением эллипсоида заданных напряжений // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых.* 2020. № 3. С. 47–55.
<https://doi.org/10.15372/FTPRPI20200305>
33. *Пантелеев И.А., Мубассарова В.А., Зайцев А.В., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б., Шевцов Н.И.* Эффект кайзера при многоосном непропорциональном сжатии песчаника // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки.* 2020. Т. 495. № 1. С. 63–67.
<https://doi.org/10.31857/S2686740020060152>
34. *Пантелеев И.А., Мубассарова В.А., Зайцев А.В. и др.* Особенности проявления эффекта Кайзера при трехосном непропорциональном сжатии песчаника с переориентацией приложенных напряжений // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* 2023. Т. 10. № 1. С. 69–76.
<https://doi.org/10.15372/FPVGN2023100110>
35. *Пантелеев И.А., Зайцев А.В., К.Б. Устинов и др.* Ориентационная природа эффекта деформационной памяти при трехосном циклическом неравнокомпонентном

- сжатии песчаника // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2022. Т. 26. № 2. С. 293–310.
<https://doi.org/10.14498/VSGTU1890>
36. *Heping Xie, Jun Lu, Cunbao Li, Minghui Li, Mingzhong Gao*. Experimental study on the mechanical and failure behaviors of deep rock subjected to true triaxial stress: A review // *Int. J. Min. Sci. Technol.* 2022. V. 32. № 5. P. 915–950.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2022.05.006>
37. *Anderson E.M.* The dynamics of faulting // *Trans. Edinburgh Geol. Soc.* 1905. V. 8. P. 387–402.
38. *Hills E.S.* Elements of structural geology. London: Methuen, 1972. 502 p.
<https://doi.org/10.1007/978-94-009-5843-2>
39. *Пантелеев И.А., Ляховский В.А.* Ориентация трещиноватости в хрупком твердом теле при традиционном трехосном сжатии // *Изв. РАН. МТТ.* 2022. № 5. С. 70–92.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922040092>
40. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
41. *Ломакин Е.В.* Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1980. № 4. С. 92–99.
42. *Ломакин Е.В.* Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния. I. Экспериментальные зависимости и определяющие соотношения // *Механика композитных материалов.* 1988. № 1. С. 3–9.
43. *Ломакин Е.В.* Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Физическая мезомеханика.* 2007. Т. 10. № 5. С. 41–52.
44. *Lomakin E.V., Shchendrigna O.P.* Stresses and strains in a disk of physically nonlinear material with stress state dependent properties // *Mechanics of Solids.* 2020. V. 55. P. 475–481.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420040081>
45. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
46. *Chaboche J.* Damage induced anisotropy: on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition // *Int. J. Damage Mech.* 1992. V. 1. № 2. P. 148–171.
<https://doi.org/10.1177/105678959200100201>
47. *Lemaitre J., Desmorat R.* Engineering damage mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 380 p.
<https://doi.org/10.1007/b138882>
48. *Цвелодуб И.Ю.* О простейшей разномодульной теории упругости изотропных материалов // Вестник Самарского государственного университета. Естественнаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 366–371.
49. *Цвелодуб И.Ю.* О разномодульной теории упругости // *Прикладная механика и техническая физика.* 2008. Т. 49. № 1 (287). С. 157–164.
50. *Садовский В.М.* Реологические модели разномодульных и сыпучих сред // *Дальневост. матем. журн.* 2003. Т. 4. № 2. С. 252–263.
51. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* О поведении упругой среды с микронарушениями // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1984. № 10. С. 71–75.
52. *Hamiel Y., Lyakhovsky V., Ben-Zion Y.* The elastic strain energy of damaged solids with applications to nonlinear deformation of crystalline rocks // *Pure Appl. Geophys.* 2011. V. 168. P. 2199–2210.
<https://doi.org/10.1007/S00024-011-0265-7>

53. *Lyakhovsky V., Ben-Zion Y., Agnon A.* Distributed damage, faulting, and friction // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102. № B12. P. 27635–27649.
<https://doi.org/10.1029/97jb01896>
54. *Ляховский В.А., Мясников В.П.* Поведение вязкоупругой среды с микронарушениями при растяжении и сдвиге // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1985. №. 4. С. 28–35.
55. *Lyakhovsky V., Reches Z., Weinberger R., Scott T.* Non-linear elastic behavior of damaged rocks // *Geophys. J. Int.* 1997. V. 130. № 1. P. 157–166.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb00995.x>
56. *Murnaghan F.D.* Finite Deformation of an Elastic Solid. New York: John Wiley, Chapman, 1951. 140 p.
<https://doi.org/10.2307/2371405>
57. *Agnon A., Lyakhovsky V.* Damage distribution and localization during dyke intrusion // *The physics and chemistry of dykes.* / Eds. Baer G., Heimann A. Rotterdam: Balkema, 1995. P. 65–78.
58. *Shalev E., Lyakhovsky V.* The role of the intermediate principal stress on the direction of damage zone during hydraulic stimulation // *Int. J. of Rock Mech. Min. Sci.* 2018. V. 107. P. 86–93.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2018.05.001>
59. *Panteleev I., Lyakhovsky V., Browning J., Meredith P.G., Healy D., Mitchell T.* Non-linear anisotropic damage rheology model: theory and experimental verification // *Eur. J. Mech. A- Solid.* 2021. V. 85. P. 104085.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104085>
60. *Xu Li, Guangyao Si, Anye Cao, Changbin Wang, Joung Oh, Zhengyu Zhang, Ismet Canbulat.* Rock anisotropic damage characterization and its evolution model by integrating acoustic emission tomography and ultrasonic monitoring // *Int. J. Rock Mech. Min.Sci.* 2024. V. 180. P. 105817.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2024.105817>
61. *Пантелеев И.А., Ляховский В.* О выпуклости потенциала модели нелинейной упругой среды с тензорным параметром поврежденности // *Вестник ПНИПУ. Механика.* 2022. № 1. С. 89–101.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.1.08>
62. *Kun Du, Chengzhi Yang, Rui Su, Ming Tao, Shaofeng Wang.* Failure properties of cubic granite, marble, and sandstone specimens under true triaxial stress // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2020. V. 130. P. 104309.
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2020.104309>

ORIENTATION OF THE LOCALIZED DAMAGE ZONE IN BRITTLE SOLID UNDER TRUE TRIAXIAL COMPRESSION

I. A. Panteleev^{a, *}, D. V. Lozhkin^{a, **}, V. Lyakhovsky^{b, *}**

^a*Institute of Continuous media Mechanics UR RAS, Perm, Russia*

^b*Institute of Continuous media Mechanics UR RAS, Perm, Russia*

^c*Geological Survey of Israel, Jerusalem, Israel*

* e-mail: pia@icmm.ru, ** e-mail: lozhkin.d@icmm.ru,

*** e-mail: vladimir.lyakhovsky@gmail.com

Abstract. The problem of finding the optimal orientation of the localized damage zone in a brittle body under triaxial compression with intermediate stress varying from the minimum (Karman scheme) to the maximum (Becker scheme) principal stress is considered in the thin weakened layer approximation. The undamaged material is described by the relations of the linear-elastic isotropic body, the weakened zone is described by the model of nonlinear elasticity of Academician of the Russian Academy of Sciences V.P. Myasnikov with elastic moduli linearly dependent on the scalar parameter of the damage. The orientation of the weakened zone is given by two angles relative to the direction of action of the two main stresses, and the degree of weakening is given by the value of the damage parameter. The search for the optimal orientation of the zone for fixed values of the control parameters consists in maximizing the function that determines the rate of damage growth in this zone. As a result of the solution of the problem, the optimal orientations of the localized damage zone have been established for different ratios of principal stresses and damage level. It is shown that as the intermediate stress increases, there is a decrease in the angle of inclination of the zone relative to the direction of action of the maximum principal stress, as well as a narrowing of the interval of possible orientations of the zone relative to the direction of action of the intermediate principal stress. Based on the analysis of the ratio of the values of the shear components of the stress tensor in the plane of the localized damage zone, the possible shear directions along this zone are determined.

Keywords: true triaxial compression, damage localization zone, nonlinear elasticity, intermediate principal stress, orientation effects

REFERENCES

1. *X.T. Feng, R. Kong, X.W. Zhang and C.X. Yang*, “Experimental study of failure differences in hard rock under true triaxial compression”, *Rock Mech. Rock Eng.* **52**, 2109–2122 (2019).
<https://doi.org/10.1007/s00603-018-1700-1>
2. *K. Mogi*, “Effect of the intermediate principal stress on rock failure”, *J. Geophys. R.* **72**, 5117–5131 (1967).
<https://doi.org/10.1029/jz072i020p05117>
3. *B.C. Haimson and C. Chang*, “A new true triaxial cell for testing mechanical properties of rock, and its use to determine rock strength and deformability of Westerly granite”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **37**, 285–296 (2000).
[https://doi.org/10.1016/s1365-1609\(99\)00106-9](https://doi.org/10.1016/s1365-1609(99)00106-9)
4. *B.C. Haimson*, “True triaxial stresses and the brittle fracture of rock”, *Pure Appl. Geophys.* **163**, 1101–1130 (2006).
<https://doi.org/10.1007/s00024-006-0065-7>
5. *M.H.B. Nasser, S.D. Goodfellow, L. Lombos and R.P. Young*, “3-D transport and acoustic properties of Fontainebleau sandstone during true-triaxial deformation experiments”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **69**, 1–18 (2014).
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2014.02.014>
6. *X.T. Feng, X.W. Zhang, R. Kong and G. Wang*, “A novel mogi type true triaxial testing apparatus and its use to obtain complete stress-strain curves of hard rocks”, *Rock Mech. Rock Eng.* **49**, 1649–1662 (2016).
<https://doi.org/10.1007/s00603-015-0875-y>

7. *S. Wang, X. Li, K. Du, S. Wang and M. Tao*, “Experimental study of the triaxial strength properties of hollow cylindrical granite specimens under coupled external and internal confining stresses”, *Rock Mech. Rock Eng.* **51**, 2015–2031 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s00603-018-1452-y>
8. *J. Browning, P.G. Meredith, C.E. Stuart, D. Healy, S. Harland and T. M. Mitchell*, “Acoustic characterization of crack damage evolution in sandstone deformed under conventional and true triaxial loading”, *J. Geophys. Res.* **122**, 4395–4412 (2017).
<https://doi.org/10.1002/2016jb013646>
9. *J. Browning, P.G. Meredith, C. Stuart, S. Harland, D. Healy and T. M. Mitchell*, “A directional crack damage memory effect in sandstone under true triaxial loading”, *Geophys. Res. Lett.* **45**, 6878–6886 (2018).
<https://doi.org/10.1029/2018GL078207>
10. *Q.B. Zhang and J. Zhao*, “A review of dynamic experimental techniques and mechanical behavior of rock materials”, *Rock Mech. Rock Eng.* **47**, 1411–1478 (2014).
<https://doi.org/10.1007/s00603-013-0463-y>
11. *X. Cai, Z.L. Zhou, K. Liu, X.M. Du and H.Z. Zang*, “Water-weakening effects on the mechanical behavior of different rock types: phenomena and mechanisms”, *Appl. Sci.* **9** (20), 4450 (2019).
<https://doi.org/10.3390/app9204450>
12. *Z.L. Zhou, X. Cai, X.B. Li, W.Z. Cao and X.M. Du*, “Dynamic response and energy evolution of sandstone under coupled static–dynamic compression: insights from experimental study into deep rock engineering applications”, *Rock Mech. Rock Eng.* **53** (3), 1305–1331 (2019).
<https://doi.org/10.1007/S00603-019-01980-9>
13. *Y.T. Wang, X.P. Zhou and M.M. Kou*, “Three-dimensional numerical study on the failure characteristics of intermittent fissures under compressive-shear loads”, *Acta. Geotech.* **14** (4), 1161–1193 (2019).
<https://doi.org/10.1007/s11440-018-0709-7>
14. *W. Dang, H. Konietzky, T. Frühwirth and M. Herbst*, “Cyclic frictional responses of planar joints under cyclic normal load conditions: laboratory tests and numerical simulations”, *Rock Mech. Rock Eng.* **53**, 337–364 (2020).
<https://doi.org/10.1007/s00603-019-01910-9>
15. *K. Peng, Z. Liu, Q. Zou, Q. Wu and J. Zhou*, “Mechanical property of granite from different buried depths under uniaxial compression and dynamic impact: an energy-based investigation”, *Powder. Technol.* **362**, 729–744 (2020).
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2019.11.101>
16. *Q.H. Qian, X.P. Zhou, H.Q. Yang, Y.X. Zhang and X.H. Li*, “Zonal disintegration of surrounding rock mass around the diversion tunnels in Jinping II Hydropower Station, Southwestern China”, *Theor. Appl. Fract. Mech.* **51**, 129–138 (2009).
<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2009.04.006>
17. *S. Wang, L. Huang and X. Li*, “Analysis of rockburst triggered by hard rock fragmentation using a conical pick under high uniaxial stress”, *Tunn. Undergr. Space Tech.* **96**, 103195 (2020).
<https://doi.org/10.1016/j.tust.2019.103195>
18. *Q. Qian, X. Zhou and E. Xia*, “Effects of the axial in situ stresses on the zonal disintegration phenomenon in the surrounding rock masses around a deep circular tunnel”, *Physical and technical problems of mineral resources development*, No. 2, 88–97 (2012) [in Russian].

19. *C. Qi, K. Li, J. Bai, A.I. Chanyshv and P. Liu*, “Strain gradient model of zonal disintegration of rock mass near deep-level tunnels”, *Physical and technical problems of mineral resources development*, № 1, 25–37 (2017) [in Russian].
20. *K. Mogi*, “Effect of the intermediate principal stress on rock failure”, *J. Geophys. Res.* **72**, 5117–5131 (1967).
<https://doi.org/10.1029/jz072i020p05117>
21. *K. Mogi*, “Fracture and flow of rocks under high triaxial compression”, *J. Geophys. Res.* **76**, 1255–1269 (1971).
<https://doi.org/10.1029/jb076i005p01255>
22. *C. Chang and B.C. Haimson*, “True triaxial strength and deformability of the German Continental Deep Drilling Program (KTB) deep hole amphibolite”, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.* **105**, 18999–19013 (2000).
<https://doi.org/10.1029/2000jb900184>
23. *X.D. Ma and B.C. Haimson*, “Failure characteristics of two porous sandstones subjected to true triaxial stresses”, *J. Geophys. Res.-Sol. Ea.* **121**, 6477–6498 (2016).
<https://doi.org/10.1002/2016jb012979>
24. *You Mingqing*, “True-triaxial strength criteria for rock”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* **46** (1), 115–127 (2009).
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2008.05.008>
25. *L.B. Colmenares and M.D. Zoback*, “A statistical evaluation of intact rock failure criteria constrained by polyaxial test data for five different rocks”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* **39** (6), 695–729 (2002).
[https://doi.org/10.1016/s1365-1609\(02\)00048-5](https://doi.org/10.1016/s1365-1609(02)00048-5)
26. *Q. Zhang, C. Li, X. Quan, et al.*, “New true-triaxial rock strength criteria considering intrinsic material characteristics”, *Acta. Mech. Sin.* **34**, 130–142 (2018).
<https://doi.org/10.1007/S10409-017-0723-2>
27. *M. Singh, A. Raj and B. Singh*, “Modified Mohr–Coulomb criterion for non-linear triaxial and polyaxial strength of intact rocks”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **48**, 546–555 (2011).
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2011.02.004>
28. *Q. Zhang, H.H. Zhu and L. Y. Zhang*, “Modification of a generalized three-dimensional Hoek–Brown strength criterion”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **59**, 80–96 (2013).
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2012.12.009>
29. *D.M. Klimov, V.I. Karev and Y.F. Kovalenko*, “Experimental study of the influence of a triaxial stress state with unequal components on rock permeability”, *Mechanics of Solids* **50**, 633–640 (2015).
<https://doi.org/10.3103/S0025654415060047>
30. *V.I. Karev, D.M. Klimov, Y.F. Kovalenko and KB. Ustinov*, “Experimental study of rock creep under true triaxial loading”, *Mechanics of Solids* **54**, 1151–1156 (2019).
<https://doi.org/10.3103/S0025654419080041>
31. *V.I. Karev, V.V. Khimulia and N.I. Shevtsov*, “Experimental studies of the deformation, destruction and filtration in rocks: a review”, *Mechanics of Solids* **56**, 613–630 (2021).
<https://doi.org/10.3103/S0025654421050125>
32. *I.A. Pantelev, V.A. Mubassarova, A.V. Zaitsev, et al.*, “Kaiser effect in sandstone in polyaxial compression with multistage rotation of an assigned stress ellipsoid”, *Journal of Mining Science* **56**, 370–377 (2020).
<https://doi.org/10.1134/S1062739120036653>
33. *I.A. Pantelev, V.A. Mubassarova, A.V. Zaitsev, et al.*, “The Kaiser effect under multiaxial nonproportional compression of sandstone”, *Doklady Physics* **65**, 396–399 (2020).
<https://doi.org/10.1134/S1028335820110075>

34. *I.A. Panteleev, V.A. Mubassarova, A.V. Zaitsev, et al.*, “Features of Kaiser effect manifestation under triaxial disproportional compression of sandstone with reorientation of applied stresses”, *Fundamental and applied issues of mining sciences* **10** (1), 69–76 (2023) [in Russian].
<https://doi.org/10.15372/FPVGN2023100110>
35. *I.A. Panteleev, A.V. Zaitsev, K.B. Ustinov, et al.*, “Orientation nature of the damage-memory effect under triaxial cyclic nonproportional compression of a sandstone”, *Vestnik of Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences* **26** (2), 293–310 (2022) [in Russian].
<https://doi.org/10.14498/VSGTU1890>
36. *Xie Heping, Lu Jun, Li Cunbao, Li Minghui and Gao Mingzhong*, “Experimental study on the mechanical and failure behaviors of deep rock subjected to true triaxial stress: A review”, *International Journal of Mining Science and Technology* **32** (5), 915–950 (2022).
<https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2022.05.006>
37. *E.M. Anderson*, “The dynamics of faulting”, *Trans. Edinburgh Geol. Soc.* **8**, 387–402 (1905).
<https://doi.org/10.1144/SP367.1>
38. *E.S. Hills*, *Elements of Structural Geology* (Methuen, London, 1972).
<https://doi.org/10.1007/978-94-009-5843-2>
39. *I.A. Panteleev and V. A. Lyakhovsky*, “Orientation of Fracture in a Brittle Solid under Conventional Triaxial Compression”, *Mechanics of Solids* **5**, 70–92 (2022).
<https://doi.org/10.3103/S0025654422050107>
40. *Yu.N. Rabotnov*, *Creep of structural elements* (Nauka, Moscow, 1966) [in Russian].
41. *E.V. Lomakin*, “Nonlinear strain of materials whose resistance depends on the type of stressed state”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, No. 4, 92–99 (1980).
42. *E.V. Lomakin*, “Dependence of the limit state of composite and polymeric materials on the type of stress state. I. Experimental dependences and defining relations”, *Mech. Compos. Mater.* No. 1, 3–9 (1988).
43. *E.V. Lomakin*, “Mechanics of media with type-dependent stress state properties”, *Phys. Mesomech.* **10** (5), 41–52 (2007).
44. *E.V. Lomakin and O.P. Shchendrigna*, “Stresses and strains in a disk of physically nonlinear material with stress state dependent properties”, *Mechanics of Solids* **55** (4), 475–481 (2020).
<https://doi.org/10.3103/S0025654420040081>
45. *S.A. Ambartsumyan*, *Different-Modulus Elasticity Theory* (Nauka, Moscow, 1982) [in Russian].
46. *J. Chaboche*, “Damage induced anisotropy: on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition”, *Int. J. Damage Mech.* **1**, 148–171 (1992).
<https://doi.org/10.1177/105678959200100201>
47. *J. Lemaitre and R. Desmorat*, *Engineering damage mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 2005).
<https://doi.org/10.1007/b138882>
48. *I.Yu. Tselodub*, “On the simplest different-modular theory of elasticity of isotropic materials”, *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series.* No. 4 (54), 366–371 (2007) [in Russian].
49. *I.Yu. Tselodub*, “Multimodulus elasticity theory”, *Journal of applied mechanics and technical physics* **49** (1), 129–135 (2008).
<https://doi.org/10.1007/s10808-008-0019-1>

-
50. *V.M. Sadovsky*, “Rheological models of hetero-modular and granular media”, // *Far Eastern Mathematical Journal* **4** (2), 252–263 (2003).
 51. *V.A. Lyakhovsky and V. P. Myasnikov*, “Behavior of an elastic medium with microfractures”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Zemli*, No. 10, 71–75 (1984).
 52. *Y. Hamiel, V. Lyakhovsky and Y. Ben-Zion*, “The elastic strain energy of damaged solids with applications to nonlinear deformation of crystalline rocks”, *Pure Appl. Geophys.* **168**, 2199–2210 (2011).
<https://doi.org/10.1007/S00024-011-0265-7>
 53. *V. Lyakhovsky, Y. Ben-Zion and A. Agnon*, “Distributed damage, faulting, and friction”, *J. Geophys. Res.* **102** (B12), 27635–27649 (1997b).
<https://doi.org/10.1029/97jb01896>
 54. *V.A. Lyakhovsky and V.P. Myasnikov*, “On the behavior of visco-elastic cracked solid”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Zemli*, No. 4, 28–35 (1985).
 55. *V. Lyakhovsky, Z. Reches, R. Weinberger and T. Scott*, “Non-linear elastic behavior of damaged rocks”, *Geophys. J. Int.* **130**, 157–166 (1997).
<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1997.tb00995.x>
 56. *F.D. Murnaghan*, *Finite Deformation of an Elastic Solid* (John Wiley, Chapman, New York, 1951).
<https://doi.org/10.2307/2371405>
 57. *A. Agnon, V. Lyakhovsky, G. Baer, et al.*, “Damage distribution and localization during dyke intrusion”, *The physics and chemistry of dykes*, 65–78 (1995).
 58. *E. Shalev and V. Lyakhovsky*, “The role of the intermediate principal stress on the direction of damage zone during hydraulic stimulation”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* **107**, 86–93 (2018).
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2018.05.001>
 59. *I. Panteleev, V. Lyakhovsky, J. Browning, et al.*, “Non-linear anisotropic damage rheology model: theory and experimental verification”, *European journal of mechanics: A. Solids* **85**, 104085 (2021).
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104085>
 60. *Li Xu, Si Guangyao, Cao Anye, et al.*, “Rock anisotropic damage characterization and its evolution model by integrating acoustic emission tomography and ultrasonic monitoring”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* **180**, 105817 (2024).
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2024.105817>
 61. *I.A. Panteleev and V. Lyakhovsky*, “On the convexity of potential of nonlinear elastic media model with tensor damage parameter”, *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, No. 1, 89–101 (2022).
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.1.08>
 62. *Du Kun, Yang Chengzhi, Su Ru, et al.*, “Failure properties of cubic granite, marble, and sandstone specimens under true triaxial stress”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* **130**, 104309 (2020).
<https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2020.104309>

УДК 531.3

УСТАЛОСТНАЯ ПРОЧНОСТЬ ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ НАГРУЖЕНИИ МАТЕРИАЛОВ, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ПЛАВЛЕНИЯ

© 2024 г. И. С. Никитин^{a,*}, Н. Г. Бурого^{a,b},
А. Д. Никитин^a, Б. А. Стратула^a

^aИнститут автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

^bИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: i_nikitin@list.ru

Поступила в редакцию 23.07.2024 г.

После доработки 24.07.2024 г.

Принята к публикации 24.07.2024 г.

На основе энтальпийной формулировки трехмерной нестационарной нелинейной задачи теплопроводности для многофазной системы проведено математическое моделирование процесса селективного лазерного плавления порошков титановых и алюминиевых сплавов для построения металлических изделий. Определены параметры геометрии единичного трека, а также однослойной и многослойной систем перекрывающихся треков в зависимости от мощности и скорости лазерного луча, что позволило оценить структуру и типы дефектов, возникающих при послойной печати образцов. Для исследования влияния одиночных и множественных дефектов на усталостную прочность напечатанных образцов при высокочастотном нагружении использована предложенная ранее мультирежимная модель циклической повреждаемости. Показано, что внутренняя неоднородность микроструктуры материалов, напечатанных методом селективного лазерного плавления, может приводить к более раннему подповерхностному зарождению усталостных трещин и существенно снижать усталостную прочность и долговечность. Этот эффект сильнее проявляется для систем множественных дефектов. Предложенные модели и алгоритмы расчета позволяют рассчитать усталостную прочность и долговечность образцов для различных систем дефектов микроструктуры, соответствующих заданным характеристикам подвижного лазерного луча, а также определить диапазон параметров процесса селективного лазерного плавления, при котором будут достигаться наилучшие показатели усталостной прочности при высокочастотном нагружении.

Ключевые слова: аддитивные технологии, селективное лазерное плавление, структура дефектов, высокочастотное нагружение, модель циклической повреждаемости

DOI: 10.31857/S1026351924050122, EDN: TZNYFY

1. Введение. Технология селективного лазерного плавления (СЛП) используется в авиационной промышленности для производства некоторых реальных конструктивных элементов из алюминиевых и титановых сплавов. Прогресс в этой технологии позволил повысить квазистатические свойства СЛП материалов до уровня традиционных технологий, таких как экструзия, штамповка и т.д. Однако проблемой является относительно низкая циклическая прочность таких материалов, связанная с их сложной микроструктурой, на которую влияют стратегия лазерного сканирования, параметры лазерного луча, энергия, теплоотдача из зоны плавки, параметры среды в камере и т.д. Для улучшения усталостных свойств СЛП материалов необходимо исследовать механизмы их усталостного разрушения с учетом особенностей микроструктуры.

В первых разделах данной работы исследуется процесс селективного лазерного плавления порошковых титановых и алюминиевых сплавов путем его численного моделирования и сравнения результатов с данными экспериментов. Результатом численного моделирования является построение геометрии различных треков — следов отвержденных ванн расплава после прохождения лазерного луча в зависимости от его мощности и скорости, а также иных параметров процесса — толщины порошкового слоя, его пористости и характеристик теплопроводности, теплоемкости, плотности всех фаз материала — жидкой, твердой, порошковой. Геометрия единичного трека определяется формой его сечения, в частности, шириной и глубиной его следа, глубиной проникновения в подложку, необходимой для сцепления слоев. Кроме того, необходимо получить результаты расчета линейной (однослойной) цепочки перекрывающихся треков, а также двух-, трех- и более многослойных цепочек наложенных треков. Эту картину, наблюдаемую в экспериментах по нанесению треков на пластинку при различных параметрах лазерного луча, необходимо иметь для представления о структуре возможных дефектов в напечатанном изделии [1].

Этими дефектами могут являться как недоплавы между треками и подложкой, возникающие по причине недостаточной глубины треков для связи с подложкой в случае недостаточной мощности или при слишком быстром движении луча, так и недоплавы из-за недостаточного перекрытия соседних по горизонтали и вертикали треков, создающих системы пор в материале.

При определенном увеличении мощности луча или его замедлении и при достаточном перекрытии соседних по горизонтали и вертикали треков возникают периодические системы зон переплавов. Такая структура, несмотря на отсутствие пор, также является в какой-то мере дефектной, поскольку при дополнительном переплавлении отвержденных зон меняется строение кристаллической решетки сплава. Исходная альфа-фаза титанового сплава при переплавлении переходит в бета-фазу, а при дополнительном переплавлении в альфа+бета [2]. Эти состояния имеют отличающиеся механические характеристики, по измерениям микротвёрдости — до 20%. Упругие характеристики также могут отличаться на 5–10% [2,3]. Таким образом, материал, полученный с использованием СЛП технологии, в самом благоприятном случае имеет слабо неоднородную периодическую структуру, определяемую расположением зон многократных переплавов.

Дальнейшее избыточное увеличение мощности и/или уменьшение скорости его движения будет приводить к расплескиванию и испарению ванны расплава, нарушать регулярность структуры и создавать более хаотическую систему дефектов из недо- и переплавов. Эти эффекты также можно учесть в исходной постановке задачи, введя в рассмотрение процесс испарения с поверхности жидкой ванны расплава в случае превышения температуры парообразования и учета соответствующие энергетические затраты в виде удельной теплоты парообразования.

Следует отметить, что диапазон параметров мощности-скорости лазерного луча для создания относительно благоприятной структуры СЛП материала является достаточно узким и его определение расчетным образом представляет собой отдельную серьезную задачу.

Дальнейшие разделы данной работы посвящены исследованию влияния геометрических особенностей и типа дефектов структуры материала, зависящих от параметров процесса СЛП, на усталостные характеристики напечатанных образцов при высокочастотном нагружении. Обзор работ этого направления в области малоциклового и многоциклового усталости дан в [4].

Статические прочностные испытания образцов из СЛП сплавов показывают, что их упругие модули и статический предел прочности мало отличаются от макроскопических механических характеристик образцов, полученных традиционными технологиями [5]. Однако высокочастотные (20 кГц) циклические испытания на пьезоэлектрической установке Lazur [6,7] показали, что в режиме сверхмногоциклового усталостного разрушения (СВМУ) [8] долговечность СЛП образцов может падать на один-два порядка для материалов с сильно развитой системой дефектов типа недоплавленных пор. Но даже для образцов со слабо неоднородной структурой, возникающей за счет периодической системы переплавленных зон, долговечность при таких испытаниях уменьшается в 2–3 раза [6,7]. Этот эффект можно объяснить более быстрым зарождением начальных повреждений на внутренних структурных границах за счет повышенной концентрации напряжений, а также повышенной чувствительностью количества циклов до разрушения к уровню амплитуды напряжений в высокочастотном цикле в режиме СВМУ за счет более пологого ниспадания правой ветви бимодальной усталостной S-N кривой [8,9].

Для исследования усталостной прочности СЛП образцов в режиме СВМУ при длительных высокочастотных нагрузках будет использована предложенная ранее мультирежимная модель циклической повреждаемости [9,10]. Разработанные на ее основе вычислительные алгоритмы позволяют рассчитать долговечность образцов для различных систем дефектов микроструктуры, соответствующих заданным характеристикам подвижного лазерного луча, а также определить диапазон параметров процесса СЛП, при котором будут достигаться наилучшие показатели усталостной прочности и долговечности.

2. Моделирование процесса селективного лазерного плавления. Графическая схема постановки задачи о подвижном тепловом потоке от лазерного луча при его воздействии на слой порошка с образованием ванны расплава представлена на рис. 1.

Для математической постановки задачи селективного лазерного плавления будем использовать энтальпийную формулировку многофазной нелинейной

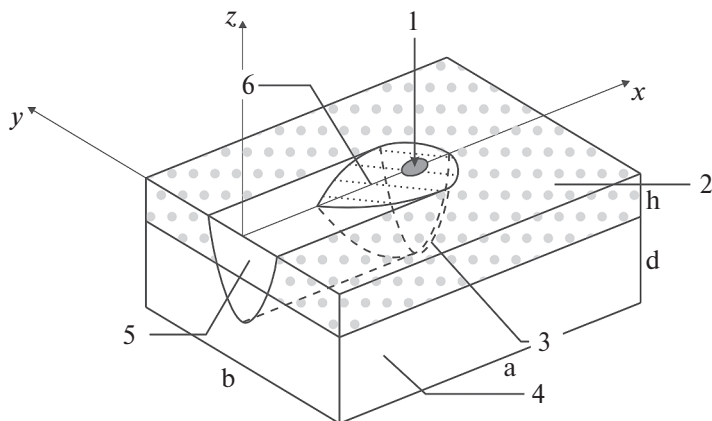


Рис. 1. Графическая схема задачи о подвижном тепловом потоке от лазерного луча 1 при его воздействии на слой порошка 2 с образованием ванны расплава 6. Цифрой 3 обозначена подвижная фазовая граница, 4 – подложка из материала в твердой фазе, 5 – остывший след лазера в виде материала в твердой фазе.

задачи теплопроводности, не требующую явного выделения неизвестных межфазных границ [11,12], и в последние годы используемую различными авторами [13–16].

Эта формулировка выглядит следующим образом.

Уравнение для энтальпии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial z} \right). \quad (2.1)$$

Граничные условия на гранях параллелепипеда имеют следующий вид.

Верхняя грань $z=0$:

$$\begin{aligned} k(E) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -b(T_{z=0} - T_{ext}) + q(x - vt, y) / (pR^2), \\ q(x - vt, y) &= q_0 H(R - r), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где R – радиус пятна лазерного луча, q_0 – полная мощность лазерного луча, $r(x - vt, y) = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2}$ – расстояние до центра лазерного пятна, который движется со скоростью v вдоль оси x , $H(x)$ – функция Хэвисайда.

На остальных гранях:

$$\begin{aligned} x=0, \quad x=a \quad k(E) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0,a} &= -b(T_{x=0,a} - T_{ext}) \\ y=-b/2, \quad y=b/2 \quad k(E) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-b/2,b/2} &= -b(T_{y=-b/2,b/2} - T_{ext}) \\ z=-(h+d) \quad k(E) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-(h+d)} &= -b(T_{z=-(h+d)} - T_{ext}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Начальные условия:

$$E(x, y, z, t)|_{t=0} = E(T_0) = \rho_0(x, y, z)c_0(x, y, z)T_0,$$

где $\rho_0(z)$, $c_0(z)$, $k_0(z)$ — начальные характеристики плотности, теплоемкости и теплопроводности порошковой и твердой фазы, определяемые вертикальной координатой точки расположения, T_{ext} — температура внешней среды, b — коэффициент теплопередачи «металл — внешняя среда», например: при $z < -h$, $\rho_0(z) = \rho_S$, при $z > -h$, $\rho_0(z) = \rho_P$. Здесь и далее индексами S и P помечены значения параметров порошковой и твердой фаз.

Принимается следующая зависимость температуры от энтальпии, учитывающая возможные фазовые переходы:

$$T = \begin{cases} \frac{E}{r_0(z)c_0(z)}, & E < E_{m-}, \\ T_m, & E_{m-} \leq E < E_{m+}, \\ T_m + \frac{(E - E_{m+})}{r_L c_L}, & E_{m+} \leq E < E_{v-}, \\ T_v, & E_{v-} \leq E < E_{v+}, \\ T_v + \frac{(E - E_{v+})}{r_V c_V}, & E_{v+} \leq E, \end{cases} \quad (2.4)$$

$E_{m-} = \rho_0(z)c_0(z)T_m$, $E_{m+} = E_{m-} + \rho_0(z)l$, $E_{v-} = \rho_L c_L(T_v - T_m) + E_{m+}$, $E_{v+} = E_{v-} + \rho_V L$, где ρ_L , c_L и k_L — характеристики (плотность, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности) жидкой фазы, T_m — температура плавления, λ — удельная теплота плавления, ρ_L , c_L , k_L — характеристики (плотность, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности) газообразной фазы, T_v — температура парообразования, Λ — удельная теплота парообразования.

Зависимость теплопроводности от энтальпии с учетом фазовых переходов имеет вид:

$$k(E) = \begin{cases} k_0(z), & E < E_{m-}, \\ k_0(z) + [k_L - k_0(z)] \frac{(E - E_{m-})}{(E_{m+} - E_{m-})}, & E_{m-} \leq E < E_{m+}, \\ k_L, & E_{m+} \leq E < E_{v-}, \\ k_L + [k_V - k_L] \frac{(E - E_{v-})}{(E_{v+} - E_{v-})}, & E_{v-} \leq E < E_{v+}, \\ k_V, & E_{v+} \leq E, \end{cases} \quad (2.5)$$

В принятые нелинейные зависимости, по сравнению со стандартными формулировками, учитывающими только фазовый переход «твердое тело — жидкость», аналогичным образом введены дополнительные ветви, учитывающие фазовый переход «жидкость—пар» при достижении и превышении температуры парообразования под воздействием достаточно мощного лазерного теплового потока.

3. Численное моделирование процесса СЛП.

3.1. Численная схема решения многофазной задачи о формировании ванны расплава и отвержденного трека. Для аппроксимации энтальпийного уравнения (2.1) с заданными граничными и начальными условиями используется явная разностная схема в варианте метода конечных объемов [17]. Аппроксимация во внутренних точках основана на интегрировании уравнения (2.1) по объему ячейки с центральной точкой определения неизвестных сеточных функций E_{ijk}^{n+1} , T_{ijk}^{n+1} на слое $n+1$ по времени и имеет вид:

$$\iiint_V \frac{\partial E}{\partial t} dv = \oint_S (Q_x n_x + Q_y n_y + Q_z n_z) ds,$$

$$Q_x = k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial x}, \quad Q_y = k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial y}, \quad Q_z = k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial z},$$

$$\frac{E_{ijk}^{n+1} - E_{ijk}^n}{\Delta t} \Delta v_{ijk} = \sum_l (Q_x n_x + Q_y n_y + Q_z n_z)_{ijk}^l \Delta s_{ijk}^l,$$

где l – нумерация граней ячейки, x_i, y_j, z_k – координаты центров ячеек, на которые разбивается область решения, $i = 1..IM, j = 1..JM, k = 1..KM$.

В рассматриваемом случае внутренних ячеек-параллелепипедов с гранями, параллельными осям декартовой системы координат, тепловые потоки через грани ячейки равны:

$$(Q_x n_x)_{ijk} = (Q_x^+)_{ijk} - (Q_x^-)_{ijk},$$

$$(Q_x^+)_{ijk} = \frac{(k_{i+1,jk}^n + k_{ijk}^n)}{2} \frac{(T_{i+1,jk}^n - T_{ijk}^n)}{(x_{i+1,jk} - x_{ijk})}, \quad (3.1)$$

$$(Q_x^-)_{ijk} = \frac{(k_{i-1,jk}^n + k_{ijk}^n)}{2} \frac{(T_{i,jk}^n - T_{i-1,jk}^n)}{(x_{ijk} - x_{i-1,jk})},$$

и аналогичные выражения для направлений по осям x и y .

Формулы для значений энтальпии во внутренних ячейках в итоге имеют вид:

$$E_{ijk}^{n+1} = E_{ijk}^n + \sum_l (Q_x n_x + Q_y n_y + Q_z n_z)_{ijk}^l \Delta s_{ijk}^l \Delta t / \Delta v_{ijk}, \quad (3.2)$$

$$i = 2..IM - 1, \quad j = 2..JM - 1, \quad k = 2..KM - 1.$$

При этом учитываются принятые зависимости (2.4 – 2.5) для $T_{ijk}^n(E_{ijk}^n)$, $k_{ijk}^n(E_{ijk}^n)$.

Аппроксимация граничных ячеек на примере верхней грани по форме совпадает с (3.2) с учетом значения $k = KM$ для граничной ячейки на верхней грани, но значение потока вычисляется с учетом его граничного значения:

$$Q_z^+ = -\beta(T_{ijk}^b - T_{ext}) + q(x - vt, y).$$

Шаг по времени выбирается из условия устойчивости для выбранной явной аппроксимации трехмерного нестационарного параболического уравнения и имеет стандартный вид:

$$\Delta t = \min_{ijk}(h^2) / \max_{ijk}(k / (\rho c)) / 8.$$

3.2. Результаты расчетов для единичного трека и сравнение с экспериментом. Были проведены расчеты единичного затвердевшего трека и ванны расплава в порошковом слое на подложке из титанового сплава Ti-6Al-4V для подвижного лазерного луча с мощностью $q_0 = 100$ Вт, скоростью движения $v = 800$ мм/с, радиусом пятна $R = 40$ мкм. Расчеты проводились на сетке со сгущением в окрестности ванны расплава и минимальным пространственным шагом 2.5 мкм. Физические свойства трёх состояний, представленных в задаче и использованных при расчете – твёрдого титанового сплава, порошка из него и расплава – представлены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики Ti-6Al-4V и AlSi10Mg

Характеристика			Величина	
Название	Обозначение	Размерность	Ti-6Al-4V	AlSi10Mg
Плотность твёрдой фазы	ρ_S	кг/м ³	4400	2670
Насыпная плотность порошка	ρ_P	кг/м ³	3750	2100
Плотность жидкой фазы	ρ_L	кг/м ³	3900	2460
Температура плавления	T_m	К	1920	870
Температура испарения	T_v	К	3530	2600
Удельная теплота плавления	λ	кДж/кг	286	440
Удельная теплота парообразования	L	МДж/кг	4.0	8.0
Теплопроводность твёрдой фазы, $T = 300$ К	k_S	Вт/(м·К)	3.9	148.3
Теплопроводность твёрдой фазы, $T = T_m$	k_S	Вт/(м·К)	28.1	136.5
Теплопроводность жидкой фазы, $T = T_m$	k_L	Вт/(м·К)	28.6	77.4
Теплопроводность жидкой фазы, $T = T_v$	k_L	Вт/(м·К)	57.7	118.0
Теплопроводность газа, $T = T_v$	k_v	Вт/(м·К)	60.0	120.0
Теплопроводность порошка	k_P	—	0.95	0.90
Теплоёмкость твёрдой фазы	C_S	Дж/кг/К	760	990
Теплоёмкость порошка	C_P	Дж/кг/К	760	990
Теплоёмкость жидкой фазы	C_L	Дж/кг/К	1150	1470
Коэффициент теплопередачи металл-воздух	β	Вт/м ² /К	10–100	10–100

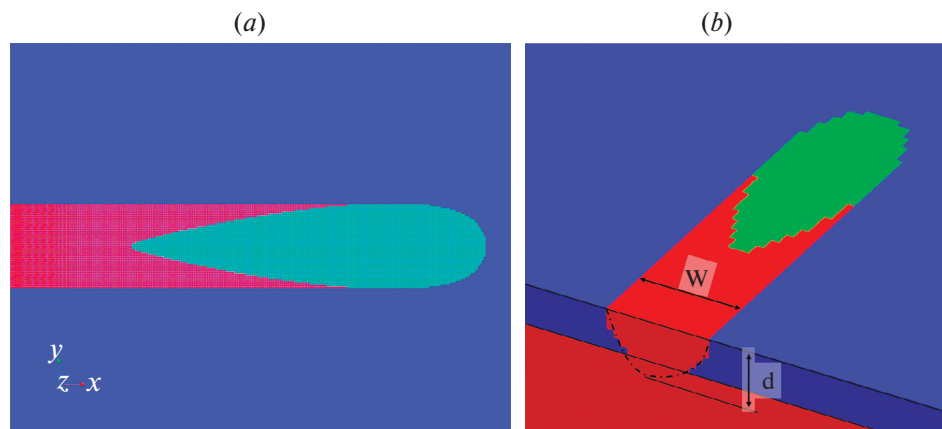


Рис. 2. Одиночный трек СЛП в титановом сплаве, $q_0 = 100$ Вт, $v = 800$ мм/с, вид сверху — а), вид на сечение трека и его сплавление с подложкой — б), где w — ширина трека, d — глубина.

На рис. 2 представлены результаты расчета формы ванны расплава и единичного затвердевшего трека. Различным цветом выделены фазовые состояния материала (синим — порошок, зелёным — расплав, красным — твёрдый сплав). Хорошо видно, что при данных параметрах процесса происходит желаемое сплавление трека с подложкой, но с достаточно малой зоной сцепления, составляющей примерно 20% от общей глубины трека.

На основе серии расчетов были получены данные о ширине и глубине сечений сформировавшихся треков и построены их зависимости от скорости сканирования лазерного луча в диапазоне 500–1200 мм/с и для различных значений мощности из достаточно широкого диапазона 50–200 Вт (рис. 3, закрашенные точки). Эти зависимости сравнивались с результатами экспериментов из [1] (рис. 3, полые точки). Для получения этих результатов в зависимостях (2.4)–(2.5) для $T(E)$ и $k(E)$ был учтен фазовый переход жидкость–пар при температуре парообразования T_v . При этом учитывались дополнительные энергозатраты на удельную теплоту парообразования Λ . В зонах превышения температуры T_v , которые возникали при высоких значениях мощности лазерного луча, применялись дополнительные коэффициенты теплопроводности k_v и теплоемкости при значениях $\Lambda = 4$ МДж, $k_v = 1200$ Вт/(м·°С), $c_v = 1150$ Дж/кг/°С. Без учета этого фактора расхождение численных и экспериментальных результатов было существенно выше.

3.3. Результаты для линейной и многослойной системы треков.

3.3.1. Результаты расчетов для алюминиевого сплава. Микроскопическая структура напечатанного материала видна на снимках поверхности (выделенный трек, рис. 4, а) и среза сечения (система перекрывающихся треков, рис. 4, б), полученных с помощью электронного и оптического микроскопов при различных сочетаниях мощности и скорости движения лазерного луча.

Результаты численных расчетов многократного и многослойного прохождения лазерного луча, дающие представление о структуре формирующейся системы дефектов при перекрывающихся треках, показаны на рис. 5.

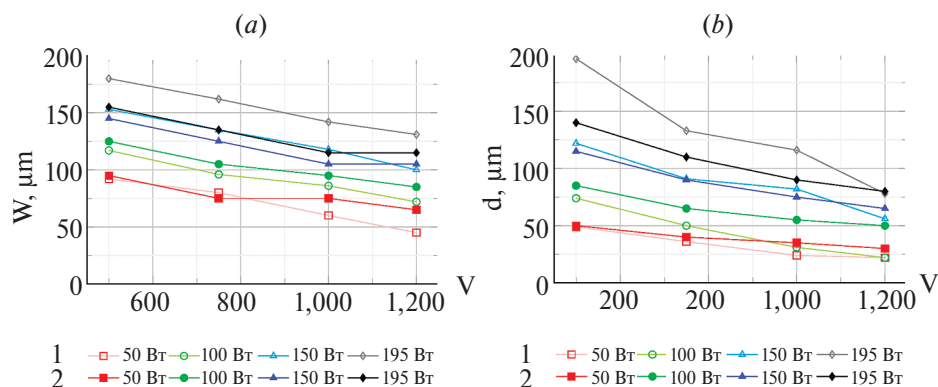


Рис. 3. Результаты расчётов ширины w – *a*) и глубины d – *b*) трека при различных скоростях движения лазерного луча v (мм/с) с учетом испарения с поверхности ванны расплава. Экспериментальные данные «1» из работы [1] сравнены с результатами расчета «2».

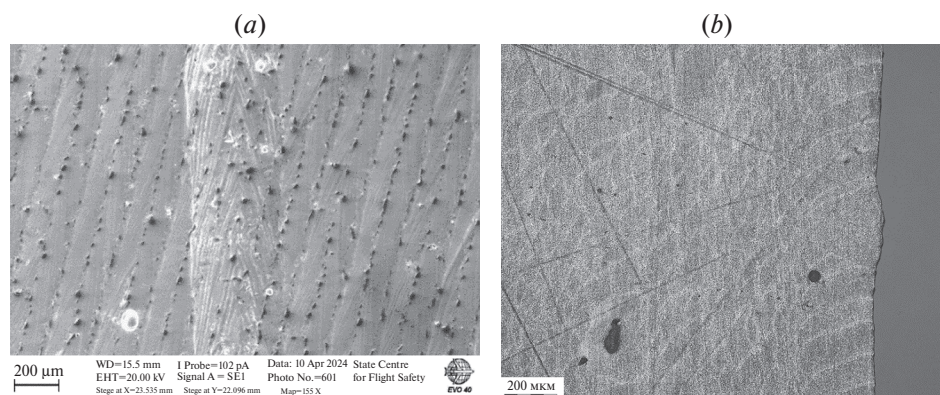


Рис. 4. Наблюдаемая в электронный микроскоп структура напечатанного алюминиевого сплава, *a*) – вид сверху, $q_0 = 370$ Вт, $v = 650$ мм/с, электронный микроскоп, *b*) – сечение приповерхностного слоя, $q_0 = 370$ Вт, $v = 450$ мм/с, оптический микроскоп.

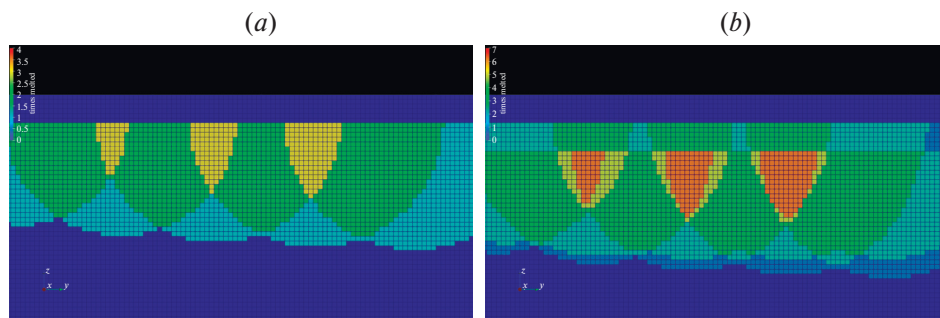


Рис. 5. Зоны переплавов (синий цвет – 0 переходов, жёлтый – 3 перехода, оранжевый – 4 перехода) для трехслойной печати – *a*), четырехслойной печати – *b*).

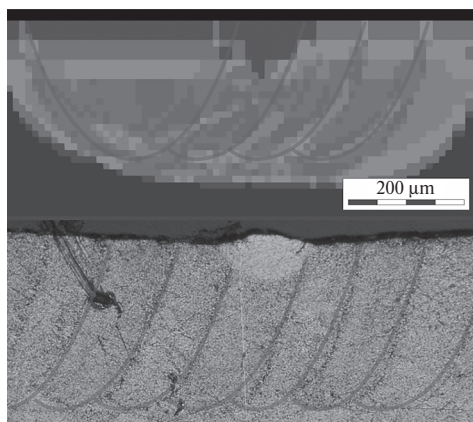


Рис. 6. Геометрическая структура перекрывающихся треков. Верхняя часть — расчет, нижняя часть — эксперимент, оптический микроскоп.

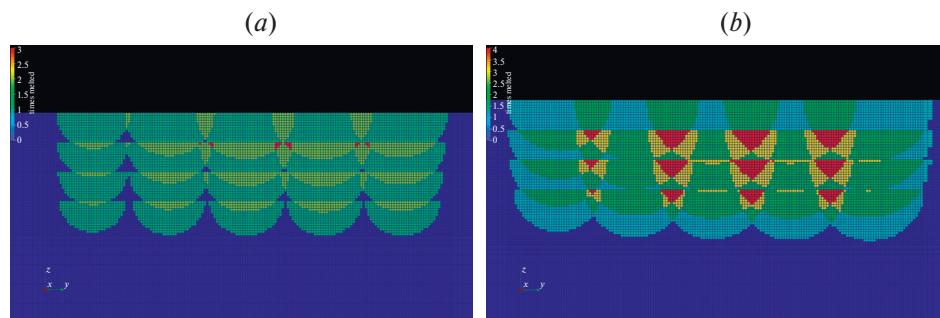


Рис. 7. Результаты расчета структуры дефектов для титанового сплава, *a*) — $q_0 = 50$ Вт, $v = 1000$ мм/с, недоплавы, *b*) — $q_0 = 50$ Вт, $v = 500$ мм/с, множественные переплавы, недоплавы отсутствуют.

Для трехслойной (рис. 5, а) и четырехслойной (рис. 5, б) печати разным цветом показаны области с многократным переходом из жидкого в твердое состояние (переплавы, синий цвет — 0 переходов, жёлтый — 3 перехода, оранжевый — 4 перехода).

Было проведено прямое численное моделирование процесса создания подложки в алюминиевом порошке и сравнение с реально напечатанной подложкой (рис. 6). Для создания подложки использовалось селективное лазерное плавление со следующими параметрами процесса: диаметр пятна 80 мкм, мощность 320 Вт, скорость сканирования 1500 мм/с, шаг луча 105 мкм. Можно сказать, что геометрическая структура перекрывающихся треков воспроизводится достаточно хорошо.

3.3.2. Результаты расчетов для титанового сплава. Аналогичные расчеты для определения структуры дефектов различного типа были проведены для титанового сплава. На рис. 7, *a* показана смешанная структура дефектов, возникающая при определенных параметрах процесса СЛП, $q_0 = 50$ Вт,

$v = 1000$ мм/с. В начале процесса видны недоплавы (дефекты в виде пор, синий цвет), которые постепенно уходят при многократном многослойном прохождении лазерного луча и трансформируются в периодическую структуру неоднородностей (переплавов, желтый и оранжевый цвет). На рис. 7, *b* при параметрах $q_0 = 50$ Вт, $v = 500$ мм/с, с уменьшением скорости движения луча, видны множественные переплавы (желтый и оранжевый цвет), недоплавы (поры) отсутствуют.

Таким образом, послойное переплавление перекрывающихся треков создает регулярную, квазипериодическую неоднородную структуру с характерными размерами, по порядку величины совпадающую с поперечными размерами треков, т.е. 100–500 мкм в зависимости от параметров процесса СЛП. Размеры дефектов при этом составляют 30–40 мкм.

Эти данные использованы для дальнейшей оценки наблюдаемого эффекта падения усталостной прочности СЛП образцов [6, 7] с помощью модели циклической повреждаемости при длительных высокочастотных испытаниях [9, 10].

4. Модель циклической повреждаемости образцов при высокочастотном нагружении.

4.1. Формулировка мультирежимной двухкритериальной модели. Развитие представлений об усталостном разрушении материалов [18] связано с экспериментальными исследованиями процессов циклического деформирования с характерной долговечностью в диапазоне $10^3 - 10^5$ циклов (режим малоциклового усталости – МЦУ), и циклическом нагружении, приводящем к разрушению в диапазоне $10^5 - 10^7$ циклов (многоцикловая усталость – МНЦУ). Ранее считалось, что эти два диапазона составляют полную кривую усталости с выходом на «предел усталости», ниже которого усталостного разрушения не происходит. С развитием средств управления нагружающими машинами стало возможно проводить высокочастотные усталостные испытания при значительно больших долговечностях (порядка $10^8 - 10^{10}$ циклов) [19]. Оказалось, что при таких наработках материалы могут разрушаться при уровнях амплитуд напряжений существенно ниже классического «предела усталости» (режим сверхмногоциклового усталости – СВМУ) [20]. Зарождение трещины в этом режиме связано с микроскопическими особенностями строения материала или наличием внутренних дефектов и происходит под поверхностью образца. Результаты испытаний в МЦУ и МНЦУ режимах усталостного разрушения в основном отражают макромасштабные свойства сплавов, тогда как высокочастотные испытания в СВМУ режиме отражают микромасштабное усталостное поведение. Поскольку при процедуре 3Д-печати по технологии селективного лазерного плавления в образце создается довольно сложная микроструктура с различными особенностями, СВМУ испытания дают хорошую возможность исследования микромасштабного усталостного поведения СЛП материалов.

Сформулируем связанную задачу о высокочастотном нагружении образца, в котором могут развиваться процессы циклической повреждаемости, описываемые функцией повреждаемости ψ [10], для случая стационарных гармонических колебаний: $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$.

Уравнения движения и закона Гука для стационарных колебаний неоднородного образца имеют вид:

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} &= 0, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda(\psi)(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu(\psi)\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T)/2.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Система уравнений в каждой точке границы дополняется либо кинематическими граничными условиями:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha \big|_{\mathbf{x} \in \partial V_{\alpha\alpha}} &= u_\alpha^*(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \big|_{\mathbf{x} \in \partial V_{\alpha n}} &= u_n^*(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (4.2)$$

либо динамическими граничными условиями:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau}_\alpha \big|_{\mathbf{x} \in \partial V_{\alpha\alpha} = \partial V / \partial V_{\alpha\alpha}} &= p_\alpha^*(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \big|_{\mathbf{x} \in \partial V_n = \partial V / \partial V_{\alpha n}} &= -p_n^*(\mathbf{x}, t),\end{aligned}$$

где $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}_a (a=1, 2)$ — орты нормали и касательных к границе. Заданные на границе функции отмечены звездочками. Модули упругости Ламе уменьшаются в зависимости от накопленной распределенной повреждаемости.

Изменение функции повреждаемости ψ с ростом циклов нагружения N описывается кинетическим уравнением, предложенным в [9, 10]:

$$d\psi/dN = B(\sigma, \Delta\sigma)\psi^\gamma/(1 - \psi^{1-\gamma}), \quad (4.3)$$

где $B(\sigma, \Delta\sigma)$ — коэффициент, зависящий от напряженно-деформированного состояния в цикле нагружения, $\Delta\sigma$ — размах циклической нагрузки, γ — параметр, определяющий скорость накопления повреждаемости.

Выражения для коэффициентов имеют вид [9]:

$$B = \begin{cases} B_L = \frac{[\langle \sigma_{eq} - \sigma_u \rangle / (\sigma_B - \sigma_u)]^{1/\beta_L}}{2(1-\gamma)10^3} & \text{при } \sigma_u + \Delta\sigma_u < \sigma_{eq} < \sigma_B, \\ B_V = \frac{[\langle \sigma_{eq} - \tilde{\sigma}_u \rangle / (\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)]^{1/\beta_V}}{2(1-\gamma)10^8} & \text{при } \tilde{\sigma}_u < \sigma_{eq} \leq \sigma_u + \Delta\sigma_u, \end{cases}$$

где $\Delta\sigma_u = 10^{-5\beta_L}(\sigma_B - \sigma_u)$ — ширина области бифуркации [9]. Выражения, стоящие в треугольных скобках, указывают на соответствующую ветвь усталостной кривой и определяются как $\langle f \rangle = f H(f)$, где $H(f)$ — функция Хэвисайда. Величина γ лежит в диапазоне $0 < \gamma < 1$.

Разрушение по механизмам отрыва связано с растягивающими компонентами напряжений и отражается в критерии SWT [21]:

$$\sigma_{eq} = \sigma^n = \sqrt{\langle \sigma_{1\max} \rangle \Delta \sigma_1 / 2},$$

где $\langle \sigma_{1\max} \rangle$ — величина максимального главного растягивающего напряжения и где $\Delta \sigma_1 / 2$ — амплитуда главного циклического напряжения.

Для описания развития микротрещин сдвигового типа используется критерий CSV [22], учитывающий особенности их формирования:

$$\sigma_{eq} = \sigma^\tau = \sqrt{(\langle \Delta \sigma_n \rangle / 2)^2 + 3(\Delta \tau_n / 2)^2},$$

где $\Delta \tau_n / 2$ — амплитуда максимального касательного напряжения, действующей на некоторой площадке с нормалью $\mathbf{n}$, $\langle \Delta \sigma_n / 2 \rangle$ — амплитуда циклического напряжения в фазе растяжения $\langle \Delta \sigma_n \rangle = \sigma_{n\max} H(\sigma_{n\max}) - \sigma_{n\min} H(\sigma_{n\min})$, действующего на этой же площадке.

Развитие повреждаемости в материальной частице приводит к эффективному уменьшению модулей упругости. В предложенном варианте модели — по кусочно-линейному закону следующего вида:

$$\lambda, \mu(\psi) = \begin{cases} \lambda_0, \mu_0 (1 - \kappa \psi) & \text{при } \psi < \psi^*, \\ 0 & \text{при } \psi_* \leq \psi \leq 1, \end{cases} \quad (4.4)$$

где $\psi^* < 1$ — критическое значение повреждаемости, при котором наступает состояние полного разрушения.

Таким образом, с ростом повреждаемости происходит деградация механических характеристик материала, влияющая на напряженно-деформированное состояние в следующих циклах. Возникающие при этом узкие протяженные зоны полного разрушения рассматриваются как «квазитрещины» различного типа — нормального отрыва или сдвига, скорость их развития определяет длительность циклического процесса до макроразрушения образца или элемента конструкции.

4.1.1. Нелокальная повреждаемость. При численном решении задач усталостного разрушения в континуальной постановке с использованием функций циклической повреждаемости включение выбранных критериев *SWT* или *CSV* определяется классическим пределом усталости σ_u и СВМУ пределом усталости $\tilde{\sigma}_u$. При этом, как отмечено во многих работах по континуальному разрушению [23–25], возникают проблемы обеспечения сходимости интегральных критических нагрузок и долговечности образцов до разрушения при измельчении сетки. Поэтому приведенная выше модель усталостного разрушения была дополнена уравнениями, которые при численном расчете расширенной системы обеспечивают сходимость расчетных критических нагрузок и числа циклов до разрушения при измельчении сетки. Такое расширение достигается с помощью введения так называемой нелокальной повреждаемости, основанной на осреднении функции повреждаемости в пространственной области с заданным малым линейным размером [24–26]. Его величина определяется линейным параметром структуры материала, который можно принять равным размеру зерна r_0 .

Локальная модель повреждаемости регуляризуется в нелокальный вариант дополнительным осреднением. Для этого вводится нормированный оператор делокализации, который применяется либо к самой функции повреждаемости ψ , либо к некоторой связанной с ней функции $f=f(\psi)$. Этот оператор может иметь различные представления, в частности форму [26]:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \int_{r \in \mathbb{R}} f(x) \bar{L}(x, y) dy, \quad \bar{L}(x, y) = L_0(x, y) / \int_{r \in \mathbb{R}} L_0(x, z) dz, \\ L_0(x, y) &= \left(1 - r^m(x, y)\right)^2, \quad r^2(x, y) = |x - y|^2 / r_0^2.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Делокализация сводится к процедуре осреднения внутри «колокола» с основанием $2r_0$ и эффективной шириной, определяемой степенным параметром m .

Корректировка модулей упругости (4.4) в этом варианте модели происходит уже в зависимости от осредненной повреждаемости $\tilde{\psi}$, т.е. $\lambda = \lambda(\tilde{\psi})$, $\mu = \mu(\tilde{\psi})$.

При численной реализации такой процедуры существенную роль играет расстояние между узлами ячеек сетки h . Если $h > r_0$, то значение повреждаемости не меняется. Если же $h < r_0$, то происходит осреднение повреждаемости по узлам, попадающим в «колокол». Такое осреднение приводит к стабилизации ширины квазитрещины на уровне порядка r_0 и обеспечивает сходимость долговечности даже при значительном измельчении сетки.

4.1.2. Численный метод решения связанной системы уравнений. Численный метод расчета зон повреждаемости состоит в расчете упругого напряженно-деформированного состояния образца по циклам нагружения, численного решения нелинейного уравнения (4.3) для повреждаемости ψ и вычисления модулей упругости среды в зависимости (4.4) от ψ .

Разностная аппроксимация уравнения (4.3) выполняется путем интегрирования на интервале между двумя дискретными значениями циклов N^n и N^{n+1} . Тогда для функции повреждаемости в каждом пространственном узле сетки с заданным шагом по циклам нагружения можно получить аналитическое решение:

$$\psi_k^{n+1} = \left(1 - \sqrt{\left(1 - (\psi_k^n)^{1-\gamma}\right)^2 - 2(1-\gamma) B_k^n \Delta N^n}\right)^{1/(1-\gamma)}, \quad (4.6)$$

где ψ_k^{n+1} — значение функции повреждаемости в пространственном узле k и временном слое $n+1$, и где $\Delta N^n = N^{n+1} - N^n$.

Шаг расчета по числу циклов определен в [9]:

$$\Delta N^n = \min_k \Delta \tilde{N}_k^n / 2, \quad \Delta \tilde{N}_k^n = \left(\frac{\psi_k^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\psi_k^{2(1-\gamma)}}{2(1-\gamma)} \right) / B_k^n \bigg|_{\psi_k^n}^1.$$

Зависимость между значениями упругих характеристик и функции повреждаемости принята в виде (4.4), но с учетом описанного выше расширения

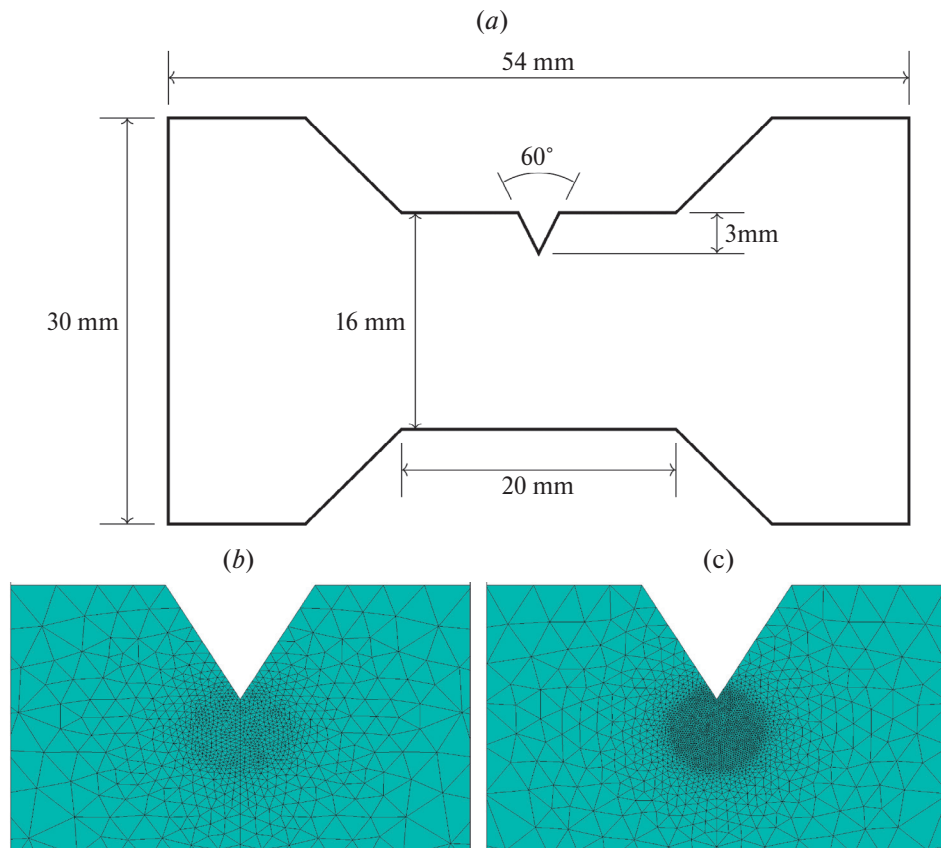


Рис. 8. Образец с острой насечкой без скругления – (а), сетки с характерным размером ячейки в окрестности вершины насечки 0.1 мм – (b), с размером 0.05 мм – (с).

модели (4.5) вычисляется в зависимости от нелокальной повреждаемости $\tilde{\Psi}(\mathbf{x})$:

$$E_k^{n+1} = E_0 \left(1 - \kappa \tilde{\Psi}_k^{n+1} \right) \left[H(\psi_* - \tilde{\Psi}_k^{n+1}) + 0.001 \right], \quad (4.7)$$

где E_k^{n+1} – значение модуля упругости Юнга на новом шаге, E_0 – модуль Юнга неповреждённого материала, κ – коэффициент деградации модуля упругости, определяется в ходе вычислительных экспериментов. В состоянии полного разрушения модуль Юнга принимается равным 0.001 от своего начального значения, что позволяет вести расчет сильно неоднородных упругих задач на каждом шаге по циклам нагружения для фиксированной сетки.

4.2. *Примеры численных расчетов зарождения и развития повреждений для стандартных образцов.* Схема расчета высокочастотных колебаний образцов с использованием модели циклической повреждаемости (4.1)–(4.5) и расчетных формул (4.6)–(4.7), была использована для моделирования их усталостного разрушения. Проверка сходимости численного решения при измельчении

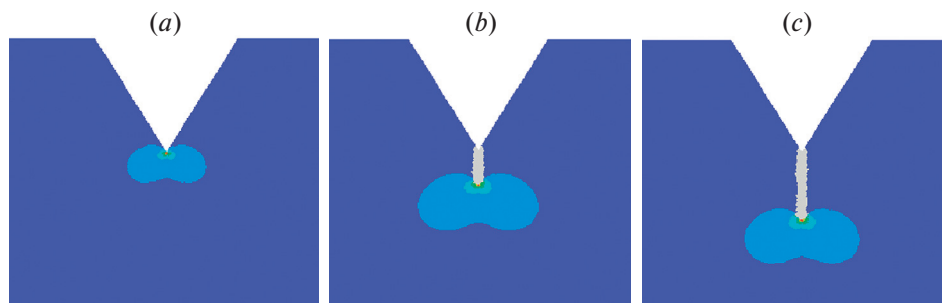


Рис. 9. Примеры расчета зарождения и развития квазитрещин. Зарождение квазитрещины – *a*), ее развитие до длины 1 мм – *b*), ее развитие до длины 2 мм – *c*).

сетки с использованием процедуры делокализации была проведена в [10]. Расчеты проводились при следующих значениях параметров модели циклической повреждаемости, которые в среднем соответствуют характеристикам бимодальной усталостной кривой для стали при коэффициенте асимметрии $R = -1$ (симметричный цикл): $E_0 = 207$ ГПа, $\sigma_B = 1600$ МПа, $\sigma_u = 700$ МПа, $\tilde{\sigma}_u = 400$ МПа, $\beta_L = 0.30$, $\beta_V = 0.27$.

Для параметров кинетического уравнения по опыту тестовых расчетов выбраны значения $\psi_* = 0.98$, $\kappa = 0.05$, $\gamma = 0.5$, $r_0 = 0.1$ мм. На рис. 8, *a* показана геометрия образца с острой насечкой, подверженного циклическому нагружению на растяжение–сжатие. На рис. 8, *b* и *c* показаны использованные при расчете варианты измельчения сетки с характерным размером ячейки в окрестности вершины насечки 0.1 мм, рис. 8, *b*, и с размером 0.05 мм, рис. 8, *c*.

Граничные условия во всех вычислительных экспериментах: циклические смещения прикладываются по продольной оси к торцам образца с амплитудой $\Delta x = 26.5$ мкм, касательные напряжения равны нулю. На рис. 9 показаны картины зарождения квазитрещины в вершине образца с острой насечкой, рис. 9, *a*, и ее развитие до длины 1 мм, рис. 9, *b*, и до длины 2 мм, рис. 9, *c*.

На рис. 10, *a* представлены графики (пунктиром) для количества циклов N_0 до зарождения трещины на образце с остроугольной насечкой (нулевой радиус закругления) при измельчении сетки от размера r_0 до размера $r_0/16$, построенные по результатам расчетов с осреднением повреждаемости. На рис. 10, *b* эти же графики нормализованы – отнесены значению N_0 при $h/r_0 = 1$.

Сплошной линией показаны графики для соответствующего числа циклов, полученные без процедуры осреднения (делокализации) повреждаемости при измельчении сетки. Из графиков видно, что делокализация повреждаемости приводит к стабилизации количества числа циклов до зарождения квазитрещины или их развития до определенных размеров.

4.3. Примеры численных расчетов зарождения и развития повреждений для различных систем дефектов в СЛП образцах. С использованием предложенной модели циклической повреждаемости и численного алгоритма были рассчитаны высокочастотные нагружения образцов с частотой нагружения 20 кГц и амплитудой 25 мкм. На рис. 11 представлена геометрия одной четверти (левой

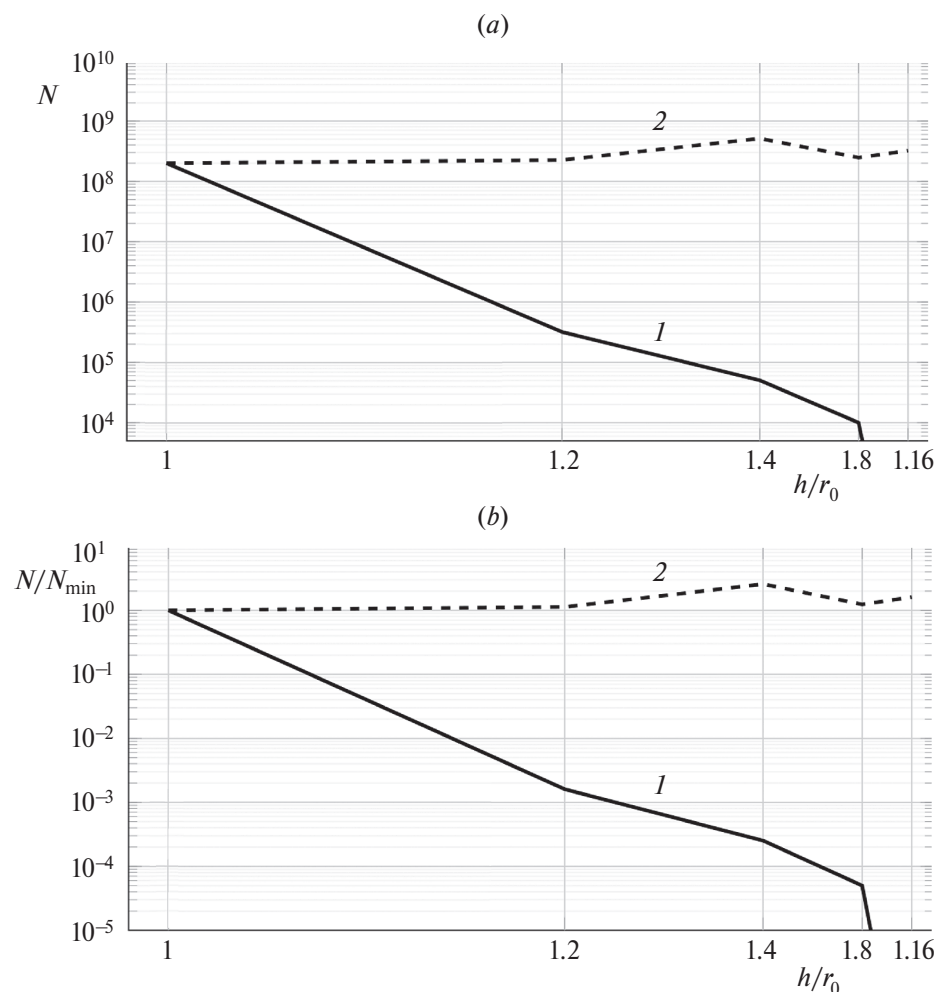


Рис. 10. Количество циклов N до зарождения трещины от острой насечки. Количество циклов в зависимости от размера сетки h — a), нормализованное количество циклов — b). Кривая 1 — без процедуры усреднения, кривая 2 — с усреднением.

верхней) образцов с вертикальными и горизонтальными осями симметрии и системами линейных дефектов на горизонтальной оси, которые проявляются в виде концентраторов напряжений (красные точки), рис. 11, а. Дефектами в данном случае являются «непроплавленные» элементы с характерным размером 30 мкм и расстоянием между ними 100 мкм, которые имеют модуль упругости E , составляющий одну треть от модуля основного материала образца E_0 , $E/E_0=0.33$. На рис. 11, б представлена двухслойная система аналогичных дефектов. На этом рисунке видны две линии дефектов, проявляющих себя

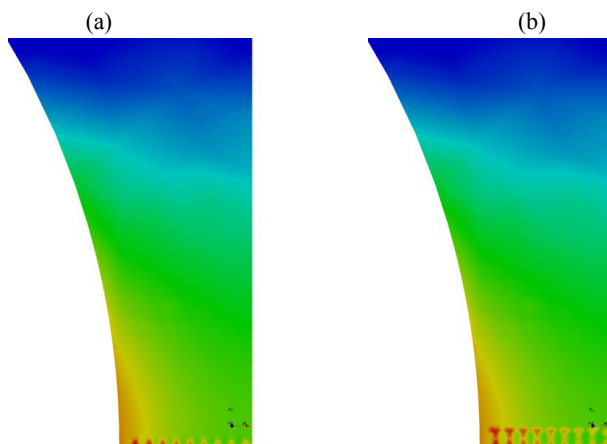


Рис. 11. Системы дефектов в образце. Концентрация напряжений на линейной системе дефектов – а), концентрация напряжений на двухслойной системе дефектов – б).

концентраторами напряжений при заданных параметрах нагружения (красные точки).

На рис. 12 красным цветом изображены зоны полного разрушения (кваситрещины) в момент зарождения при количестве циклов $N = 1.31E+09$, рис. 12, а, и в момент, когда квазитрещина продвинулась почти на половину расстояния до оси образца при $N = 1.33E+09$, рис. 12, б. Эти зоны по расположению и количеству циклов практически идентичны и для линейной, и двухслойной системы дефектов. Число циклов $N = 1.33E+09$ можно считать соответствующим макроразрушению образца, так как дальнейшее продвижение квазитрещины происходит практически без изменения этого значения с шагом $\sim 10^5 - 10^6$ циклов. Большее число слоев с дефектами не рассматривалось, так как более удаленные от горизонтальной оси образца дефекты практически не влияют на процесс развития повреждений, поскольку расположены в более широкой части образца с меньшим уровнем амплитуд напряжений.

Таким образом, описанная вычислительная процедура позволяет по параметрам микроструктуры СЛП материала – заданной геометрии расположения дефектов, их размеров и коэффициентов E/E_0 , отражающих степень их непроплава-переплава, определять долговечность образцов, напечатанных методом селективного лазерного плавления. Поскольку, как показано в начальных разделах, параметры микроструктуры могут быть рассчитаны в соответствии с характеристиками мощности и скорости подвижного лазерного луча, то предложенный комплексный алгоритм позволяет оценить усталостную прочность и долговечность материала с учетом процесса селективного лазерного плавления.

4.4. Оценка количества циклов до разрушения СЛП образцов для различных систем дефектов. Систематические расчеты высокочастотного циклического нагружения образцов при заданной частоте и амплитуде позволили получить

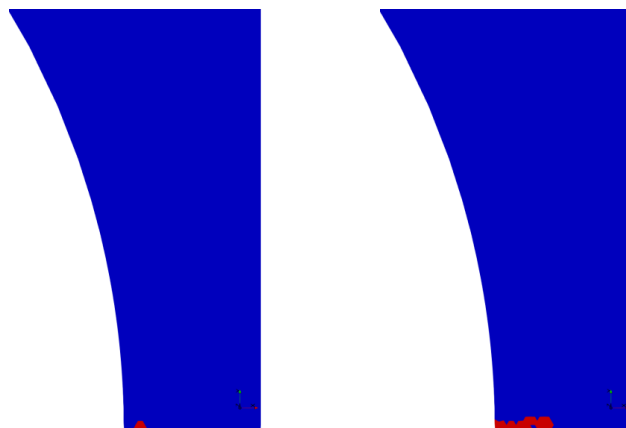


Рис. 12. Зарождение и развитие квазитрещины на двухслойной системе дефектов. Зарождение, $N=1.31E+09$ – а), развитие, $N=1.33E+09$ – б).

значения долговечности до разрушения в зависимости от отношения E/E_0 для системы дефектов, которые представлены в табл. 2.

Значение $E/E_0 = 1$ соответствует однородному материалу без дефектов. Значения $E/E_0 < 1$ соответствуют дефектам в виде непроплавленных зон (примерно, как на рис. 7, а) с различной степенью «недоплава», а значения $E/E_0 > 1$ соответствуют дефектам в виде переплавленных зон (как на рис. 7, б). В этом случае реальные значения E/E_0 не превышают 1.20–1.25. Поэтому можно сказать, как это из физических соображений и ожидалось, что долговечность до разрушения материала с системами непроплавленных дефектов может уменьшаться на порядок и более (сравним значения $3.75E+09$ при $E/E_0=1$ и $3.59E+08$ при $E/E_0=0.01$). Это падение близко к наблюдаемому при усталостных высокочастотных испытаниях алюминиевых сплавов [6, 7]. При появлении системы переплавленных дефектов долговечность материала до разрушения уменьшается в худшем случае в 1.5–2 раза ($3.75E+09$ при $E/E_0=1$, $2.62E+09$ при $E/E_0=1.20$ и $1.93E+09$ при $E/E_0=1.25$).

Диапазон характеристик мощности и скорости лазерного луча и иных параметров процесса селективного лазерного плавления (радиус лазерного луча, толщины слоя порошка, размер перекрытия соседних треков), соответствующий этому, относительно благоприятному сценарию построения материала, находится из решения нелинейной задачи теплопроводности в энтальпийной формулировке с учетом фазовых превращений исходного порошкового слоя.

5. Заключение. На основе энтальпийной формулировки трехмерной нестационарной нелинейной задачи теплопроводности для трехфазной системы проведено математическое моделирование процесса селективного лазерного плавления порошков титановых и алюминиевых сплавов для построения металлических изделий. Численно решена задача формирования ванны расплава и затвердевшего трека в порошковом слое на подложке под действием подвижного лазерного луча.

Таблица 2. Результаты расчета долговечности образца для различных типов дефектов

Дефект E/E_0	Долговечность
0.01	2.11e8
0.10	2.85e8
0.25	4.72e8
0.50	1.08e9
1.00	4.36e9
1.05	4.31e9
1.10	2.78e9
1.15	1.87e9
1.20	1.33e9

Определены параметры геометрии единичного трека, а также однослойной и многослойной систем перекрывающихся треков в зависимости от мощности и скорости лазерного луча, что позволило оценить структуру и типы дефектов, возникающих при послойной СЛП печати образца. Результаты этих расчетов были сопоставлены с данными экспериментов для титанового и алюминиевого сплава.

Для исследования влияния одиночных и множественных СЛП дефектов на усталостную прочность напечатанных образцов при высокочастотном нагружении использована предложенная ранее мультимодальная модель циклической повреждаемости. Эта модель способна достоверно прогнозировать области зарождения усталостных квазитрещин, определять их тип, оценивать усталостную долговечность и длительность стадии роста трещины, а также позволяет получить хорошие качественные и количественные совпадения с экспериментальными данными для сложных режимов нагружения.

Показано, что внутренняя неоднородность СЛП материалов может приводить к подповерхностному зарождению усталостных трещин и существенно снижать долговечность. Множественные дефекты снижают долговечность материала более значительно. Различия в усталостной долговечности материалов с одним и двумя рядами дефектов незначительно, что говорит о высокой локализации плоскости максимальных напряжений при СВМУ испытаниях.

Предложенные модели и алгоритмы расчета позволяют рассчитать усталостную прочность и долговечность образцов, напечатанных методом селективного лазерного плавления, для различных систем дефектов микроструктуры, соответствующих заданным характеристикам подвижного лазерного луча, а также определить диапазон параметров процесса СЛП, при котором будут достигаться наилучшие показатели усталостной прочности.

Исследование выполнено в рамках проекта РНФ № 23-19-00640.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dilip J.J.S., Zhang S., Teng C., Zeng K., Robinson C., Pal D., Stucker B.* Influence of processing parameters on the evolution of melt pool, porosity, and microstructures in Ti-6Al-4V alloy parts fabricated by selective laser melting // *Progress in Additive Manufacturing*. 2017. V. 2. № 3. P. 157–167.
<https://doi.org/10.1007/s40964-017-0030-2>
2. *Ali H., Ma L., Ghadbeigi H., Mumtaz K.* In-situ residual stress reduction, martensitic decomposition and mechanical properties enhancement through high temperature powder bed pre-heating of Selective Laser Melted Ti6Al4V // *Mater. Sci. Eng. A*. 2017. V. 695. P. 211–220.
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.04.033>
3. *Kumar C., Das M., Biswas P.* A 3-D Finite Element Analysis of Transient Temperature Profile of Laser Welded Ti-6Al-4V Alloy // *Lasers Based Manufacturing, Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*. S.N. Joshi and U.S. Dixit (Eds.). Springer India, 2015.
https://doi.org/10.1007/978-81-322-2352-8_21
4. *Liu H., Yu H., Guo C. et al.* Review on Fatigue of Additive Manufactured Metallic Alloys: Microstructure, Performance, Enhancement, and Assessment Methods // *Adv. Mater.* 2023. V. 36. № 17. 2306570.
<https://doi.org/10.1002/adma.202306570>
5. *Babaytsev A.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N.* Properties and microstructure of AlSi10Mg samples obtained by selective laser melting // *Nanosci. Techn.* 2020. V. 11. № 3. P. 213–222.
<https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020034207>
6. *Babaytsev A., Nikitin A., Ripetskiy A.* VHCF of the 3D-Printed Aluminum Alloy Al-Si10Mg // *Inventions*. 2023. V. 8. № 1. P. 33.
<https://doi.org/10.3390/inventions8010033>
7. *Никитин А.Д., Стратула Б.А.* Моделирование циклической повреждаемости и усталостной прочности при высокочастотном нагружении 3Д-напечатанных образцов из алюминиевого сплава // *Математическое моделирование и численные методы*. 2024. № 1. С. 18–37.
<https://doi.org/10.18698/2309-3684-2024-1-1837>
8. *Шаняевский А.А., Никитин А.Д., Солдатенков А.П.* Сверхмногоцикловая усталость металлов. М.: Физматлит, 2022. 496 с.
9. *Никитин И.С., Бураго Н.Г., Никитин А.Д.* Повреждаемость и усталостное разрушение элементов конструкций в различных режимах циклического нагружения // *Прикладная математика и механика*. 2022. Т. 86. № 2. С. 276–290.
<https://doi.org/10.31857/S0032823522020084>
10. *Бураго Н.Г., Никитин И.С., Никитин А.Д., Стратула Б.А.* Численное моделирование усталостного разрушения на основе нелокальной теории циклической повреждаемости // *Математическое моделирование*. 2024. Т. 36. №. 3. С. 3–19.
<https://doi.org/10.20948/mm-2024-03-01>
11. *White R.E.* An enthalpy formulation of the Stephan problem // *SIAM J. Num. Anal.* 1982. V. 19. № 6. P. 1129–1157.
<https://www.jstor.org/stable/2157200>
12. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2009. 782 с.

13. Гордеев Г.А., Кривилев М.Д., Анкудинов В.Е. Компьютерное моделирование селективного лазерного плавления высокодисперсных металлических порошков // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. № 3. С. 293–312. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.23>
14. Князева А.Г. Моделирование физических и химических явлений в процессах обработки поверхностей материалов высокоэнергетическими источниками // Математическое моделирование систем и процессов. 2009. № 17. С. 66–84.
15. Агаповичев А.В., Сотов А.В., Смелов В.Г. Математическое моделирование процесса селективного лазерного сплавления порошка титанового сплава ВТ6 // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2020. Т. 19. № 2. С. 53–62. <https://doi.org/10.18287/2541-7533-2020-19-2-53-62>
16. Mirzade F.Kh., Niziev V.G., Panchenko V.Ya. et al. Kinetic approach in numerical modeling of melting and crystallization at laser cladding with powder injection // Physica B: Condensed Matter. 2013. V. 423. P. 69–76. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2013.04.053>
17. Ковеня В.М., Чирков Д.В. Метод конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2013. 86 с.
18. Schütz W. A history of fatigue // Eng. Fract. Mech. 1996. V. 54. № 2. P. 263–300. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(95\)00178-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(95)00178-6)
19. Bathias C., Paris P. Gigacycle fatigue in mechanical practice. Dekker. New York, 2004. P. 328. <https://doi.org/10.1201/9780203020609>
20. Bathias C., Drouillac L., Le François P. How and why the fatigue S–N curve does not approach a horizontal asymptote // Int. J. Fatigue. 2001. V. 23. № 1. P. 143–151. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(01\)00123-2](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(01)00123-2)
21. Smith R.N., Watson P., Topper T.H. A stress-strain function for the fatigue of metals // J. Materials. 1970. V. 5. P. 767–78.
22. Gates N., Fatemi A. Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // Int. J. Fatigue. 2016. V. 91. Part 2. P. 337–351. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.12.011>
23. Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Algorithms for calculation damage processes // Frattura ed Integrità Strutturale. 2019. V. 13. № 49. P. 212–224. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.22>
24. Jirasek M. Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches // Int. J. Solids Struct. 1998. V. 35. P. 4133–4145. [https://doi.org/10.1016/s0020-7683\(97\)00306-5](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(97)00306-5)
25. Bažant Z.P., Jirasek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress // J. Eng. Mech. 2002. V. 128. № 11. P. 1119–1149. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119))
26. Shutov A.V., Klyuchantsev V.S. Large strain integral-based nonlocal simulation of ductile damage with application to mode-I fracture // Int. J. Plast. 2021. V. 144. 103061. <https://doi.org/10.1016/j.iijplas.2021.103061>

FATIGUE BEHAVIOR UNDER HIGH FREQUENCY LOADING OF MATERIALS PRODUCED BY SELECTIVE LASER MELTING

I. S. Nikitin^{a,*}, N. G. Burago^{a,b}, A. D. Nikitin^a, B. A. Stratula^a

^a*Institute for Computer Aided Design of the RAS, Moscow, Russia*

^b*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Москва, Россия*

**i_nikitin@list.ru*

Abstract. Based on the enthalpy formulation of a three-dimensional transient non-linear thermal conductivity problem for a multiphase system, mathematical modeling of the selective laser melting process of titanium and aluminum alloy powders was conducted to produce metallic components. The geometric parameters of a single track, as well as single-layer and multi-layer systems of overlapping tracks, were determined as functions of laser beam power and speed. This enabled the evaluation of the structure and types of defects arising during the layer-by-layer printing of samples. To investigate the influence of single and multiple defects on the fatigue strength of printed samples under high-frequency loading, a previously proposed multi-mode cyclic damage model was used. It was demonstrated that the internal heterogeneity of the microstructure of materials printed using selective laser melting can lead to earlier subsurface initiation of fatigue cracks, significantly reducing fatigue strength and durability. This effect is more pronounced in systems with multiple defects. The proposed models and computational algorithms enable the calculation of the fatigue strength and durability of samples for various defect systems in the microstructure, corresponding to the specified characteristics of the moving laser beam. They also make it possible to identify process parameters for selective laser melting that achieve the best fatigue strength performance under high-frequency loading.

Keywords: additive technologies, selective laser melting, defect structure, high-frequency loading, cyclic damage model

REFERENCES

1. Dilip J.J.S., Zhang S., Teng C., Zeng K., Robinson C., Pal D., Stucker B. Influence of processing parameters on the evolution of melt pool, porosity, and microstructures in Ti-6Al-4V alloy parts fabricated by selective laser melting // *Progress in Additive Manufacturing*. 2017. Vol. 2. No 3. Pp. 157–167.
2. Ali H., Ma L., Ghadbeigi H., Mumtaz K. In-situ residual stress reduction, martensitic decomposition and mechanical properties enhancement through high temperature powder bed pre-heating of Selective Laser Melted Ti6Al4V // *Materials Science & Engineering A*. 2017. Vol. 695. Pp. 211–220.
3. Kumar C., Das M., Biswas P. A 3-D Finite Element Analysis of Transient Temperature Profile of Laser Welded Ti-6Al-4V Alloy // *Lasers Based Manufacturing, Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*. S.N. Joshi and U.S. Dixit (Eds.). Springer India. 2015.

4. *Liu H., Yu H., Guo C. et al.* Review on Fatigue of Additive Manufactured Metallic Alloys: Microstructure, Performance, Enhancement, and Assessment Methods// *Adv. Mater.* 2023. 2306570
5. *Babaytsev A.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N.* Properties and microstructure of AlSi10Mg samples obtained by selective laser melting// *Nanosci. Techn.* 2020. Vol 11. Pp. 213–222.
6. *Babaytsev A., Nikitin A., Ripetskiy A.* VHCF of the 3D-Printed Aluminum Alloy Al-Si10Mg// *Inventions.* 2023. Vol. 8. 33.
7. *Nikitin A.D., Stratula B.A.* Modeling of cyclic damage and fatigue strength under high-frequency loading of 3D-printed aluminum alloy specimens. *Mathematical modeling and numerical methods.* 2024. № 1. Pp. 18–37.
8. *Shanyavskiy A.A., Nikitin A.D., Soldatenkov A.P.* Very-high cycle fatigue of metals. M.: Fizmatlit. 2022. 496 p.
9. *Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D.* Damageability and fatigue failure of structural elements in different modes of cyclic loading// *Applied Mathematics and Mechanics.* 2022. V. 86. № 2. Pp. 276–290.
10. *Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A.* Numerical modeling of fatigue failure on the basis of non-local theory of cyclic damageability// *Mathematical Modeling.* 2024. V. 36. № 3. P. 3–19.
11. *White R.E.* An enthalpy formulation of the Stephan problem // *SIAM J. Num. Anal.* 1982. Vol. 19. № 6. P. 1129–1157.
12. *Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N.* Computational Heat Transfer. – Moscow: Unitorial Urss. 2009. 782 p.
13. *Gordeev G.A., Krivilev M.D., Ankudinov V.E.* Computer modeling of selective laser melting of highly dispersed metal powders // *Computational mechanics of continuous media.* 2017. V. 10. № 3. P. 293–312.
14. *Knyazeva A.G.* Modeling of physical and chemical phenomena in processes of processing of surfaces of materials by high-energy sources// *Mathematical modeling of systems and processes.* 2009. № 17. P. 66–84.
15. *Agapovichev A.V., Sotov A.V., Smelov V.G.* Mathematical modeling of the process of selective laser fusion of titanium alloy powder VT6// *Bulletin of Samara University. Aerospace engineering, technology and mechanical engineering.* 2020. V. 19. № 2. P. 53–62.
16. *Mirzade F.Kh., Niziev V.G., Panchenko V.Ya. et al.* Kinetic approach in numerical modeling of melting and crystallization at laser cladding with powder injection// *Physica B: Condensed Matter.* 2013. Vol. 423. P. 69–76.
17. *Kovenya V.M., Chirkov D.V.* Method of finite differences and finite volumes for solving problems of mathematical physics. Novosibirsk: Pub. NSU, 2013. 86 p.
18. *Schütz W.* A history of fatigue // *Engineering Fracture Mechanics.* 1996. Vol. 54. № 2. P. 263–300.
[https://doi.org/10.1016/0013-7944\(95\)00178-6](https://doi.org/10.1016/0013-7944(95)00178-6)
19. *Bathias C., Paris P.* Gigacycle fatigue in mechanical practice. 2004. Dekker. New York. P. 328.
20. *Bathias C., Drouillac L., Le François P.* How and why the fatigue S–N curve does not approach a horizontal asymptote // *International Journal of Fatigue.* 2001. Vol. 23. № 1. P. 143–151.
21. *Smith R.N., Watson P., Topper T.H.* A stress-strain parameter for the fatigue of metals // *J. of Materials.* 1970. Vol. 5. P. 767–78.

-
22. *Gates N., Fatemi A.* Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // *Int. J. of fatigue*. 2016. Vol. 91. Pp. 337–351.
<https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.12.011>
 23. *Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A.* Algorithms for calculation damage processes // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2019. Vol. 49. P. 212–224.
 24. *Jirasek M.* Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches // *Int. J. Solids Structures*. 1998. Vol. 35. P. 4133–4145.
 25. *Bažant Z.P., Jirásek M.* Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress // *J. Eng. Mech.* 2002. Vol. 128. P. 1119–1149.
 26. *Shutov A.V., Klyuchantsev V.S.* Large strain integral-based nonlocal simulation of ductile damage with application to mode-I fracture// *International Journal of Plasticity*. 2021. Vol. 144. 103061

УДК 531.3

РАССЛОЕНИЕ ПОЛОСЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛУПОЛОС С ОСЯМИ ИЗОТРОПИИ, СИММЕТРИЧНО НАКЛОНЕННЫМИ К ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

© 2024 г. К. Б. Устинов^{а, *}, Н. Л. Борисова^{б, **}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^бВоенный университет имени князя Александра Невского МО РФ, Россия

*e-mail: ustinov@ipmnet.ru, **e-mail: nbolo@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.03.2024 г.

После доработки 11.05.202 г.

Принята к публикации 28.05.2024 г.

Получено точное аналитическое решение двумерной задачи о полосе, составленной из двух полуполос равной толщины из одинакового линейно упругого ортотропного материала с главными осями тензора упругости симметрично наклоненными к границе раздела и центральной полубесконечной трещиной, проходящей по границе раздела. Сбалансированная система нагрузок предполагается приложенной достаточно далеко от вершины трещины. Для четырех независимых активных мод нагружения найдены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в виде комбинаций элементарных функций либо однократных интегралов от комбинаций элементарных функций, зависящих от трех независимых параметров.

Ключевые слова: коэффициенты интенсивности напряжений, интегральные преобразования, метод Винера–Хопфа

DOI: 10.31857/S1026351924050132, EDN: TZNXAB

1. Введение. Задачи, связанные с распространением трещины в полосе имеют большое значение как для многочисленных приложений — вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для стандартных испытаний образцов, таких как трехточечный и четырехточечный изгиб, исследования процессов расслоения и разрушения многослойных структур, так и благодаря их фундаментальному теоретическому значению.

Задача о трещине, параллельной границам полосы (или полуплоскости, в предельном случае) имеет давнюю историю, начиная с работы Обреимова [1], в которой была посчитана скорость высвобождения энергии (СВЭ) для отслаиваемого от полуплоскости слоя слюды, моделируемого балкой в рамках элементарной теории Бернулли—Эйлера, и сравнением с экспериментальными данными вычислена адгезионная прочность слюды. Задача о полубесконечной трещине параллельной границе упругой изотропной полуплоскости была решена в [2], где были получены точные аналитические

выражения для отрывной и сдвиговой мод КИН для трех независимых мод нагружения – продольной и поперечной – силами и изгибающим моментом, прикладываемыми к отделяемому слою вдали от вершины трещины. В работе [3] данное решение было обобщено на случай различных упругих свойств отделяемой полосы и полуплоскости, хотя и при наличии ограничения на сочетание упругих параметров, выражающееся в равенстве нулю второго параметра упругого несоответствия Дундурса [4].

Аналитические решения задачи о центральной полубесконечной трещине в упругой полосе были получены многими авторами. В частности, следует отметить следующие работы. В работе [5] получено решение для случая нормального нагружения берегов трещины парой сил, приложенных на произвольном расстоянии от вершины трещины; однако данное решение нуждается в коррекции. Решение для случая нагружения берегов трещины специально распределенными нормальными усилиями получено в [6]. Наиболее строгое решение для случая нагружения берегов трещины парой нормальных сил получено в [7]. Нагружение парой не только нормальных, но и тангенциальных сил рассмотрено в [8]. В [9] получено решение для случая различных упругих модулей слоев, разделяемых трещиной (хотя и при сохранении равенства нулю второго параметра Дундурса).

Задача о полосе, составленной из двух изотропных слоев произвольной толщины и упругих свойств с полубесконечной интерфейсной трещиной, была рассмотрена в [10] (см. также [11, 12]), где было получено полуаналитическое решение для нагружения осевыми силами и изгибающими моментами, приложенными вдали от вершины трещины. Показано, что произвольная нагрузка данного вида может быть представлена в виде суперпозиции двух базисных мод нагружения, в качестве которых были выбраны нагружение симметрично приложенными моментами и нагружение парой осевых сил и компенсирующим изгибающим моментом, приложенным к одной из ослабляемых полос.

Добавление к рассмотрению нагружения поперечными силами приводит к появлению еще двух независимых мод, в качестве которых может быть выбрано, например, нагружение двумя поперечными силами, приложенными к разделяемым слоям, и нагружение поперечной силой, приложенной только к одному из отделяемых слоев и силой такой же величины и противоположного знака, приложенной к целой части составного слоя [13, 14, 15]. Для обеих из этих мод, добавляются изгибающие моменты, для компенсации моментов, появляющиеся в результате действия поперечных сил. Решения для данных мод нагружения были получены с помощью численных методов, в частности МКЭ.

Аналогичные решения были получены для ортотропной полосы с главными осями тензора упругости, совпадающими с геометрическими осями как численными методами [13, 14, 16–19], так и аналитическими [20, 21]. Так в [20] получено решение для случая нагружения парой сил, приложенных к берегам трещины, и таким образом позволяющее получить решение для нагружения произвольной системой нормальных напряжений, симметрично приложенных к берегам трещины. Аналитические выражения для КИН для всех

четырёх мод нагружения получены в [21]. В работе [22] с помощью решений [3, 9, 21] и процедуры масштабирования были получены решения для составных ортотропных слоёв для некоторых комбинаций упругих констант и отношения толщин, заключающихся в удовлетворении дополнительных условий, связывающих отношения упругих констант и толщин составляющих слоёв.

Другое возможное обобщение состоит в рассмотрении полосы, состоящей из двух полуполос равной толщины и одного ортотропного материала, но с главными осями тензора упругости симметрично наклонёнными к границе раздела. В работе [11] для мод нагружения, соответствующих изгибу моментами и действию продольных сил КИН были получены на основе элементарного балочного решения и соотношения типа ирвиновского для связи КИН и СВЭ [23, 24]. Однако, аналогично изотропному варианту, КИН и СВЭ в данном случае не могут быть получены из элементарных решений для мод нагружения, соответствующих поперечным силам.

Среди работ, в которых рассматриваются межфазные трещины и трещины около границы раздела, следует также отметить такие работы, как [25, 26].

Кроме точных аналитических и численных решений в ряде работ были получены решения с использованием некоторых упрощающих предположений. В ряде случаев такие решения могут быть асимптотически точными для некоторого соотношения параметров. Так существенное упрощение может быть получено при рассмотрении отслоения жёсткого тонкого слоя от упругого основания в приближении одномерной теории (изгиба и растяжения брусев) [27–30], или а priori пренебрегая некоторыми членами в полном наборе уравнений [31–33]. В частности, в [34] было показано, что значения СВЭ полученные на основе теории балок (пластин) асимптотически точны для больших отношений модулей упругости тонкого отслаиваемого слоя и основания.

Методы, используемые для решения задач, включают в себя численные методы, в первую очередь метод конечных элементов (МКЭ) [12–14, 18, 19], численное решение интегральных уравнений [11], использование элементарных решений теории пластин (балок), дающих в ряде случаев точные решения [10, 11, 16], сведение системы к интегральному уравнению (или системе интегральных уравнений) и последующим применением метода Винера–Хопфа [2, 6–9, 21], что позволяет получить выражение для КИН в замкнутой форме. Данный подход будет использован в настоящей работе.

Настоящее исследование посвящено решению плоской задачи теории упругости о полосе, составленной из двух слоёв равной толщины из одинакового ортотропного материала с главными осями тензора упругости, наклонёнными симметрично относительно границы раздела. Для четырёх независимых мод нагружения путем применения двустороннего преобразования Лапласа задача сведена к двум скалярным задачам Винера Хопфа. Получены аналитические выражения для двух мод КИН в терминах элементарных функций и однократных интегралов от комбинаций элементарных функций, зависящие от трех безразмерных параметров: двух комбинаций упругих параметров и угла наклона. Решение может рассматриваться как обобщение решения [21] на случай симметрично наклонённых главных осей анизотропии.

2. Формулировка задачи. Геометрическая конфигурация и система прикладываемых нагрузок. Рассмотрим полосу $-h < y < h$ составленную из двух упругих

ортотропных полос с главными осями тензора упругости направленными симметрично относительно границы раздела под углом ϕ , и центральной полу-бесконечной трещиной $y=0, x<0$ (рис. 1). Здесь введена декартова система координат xu с центром в вершине трещины и осью x , параллельной границам полосы. Механическое поведение системы определяется системой двумерных уравнений теории упругости, включающих

— уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

где $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$, $\sigma_{xy}(x, y)$ — компоненты тензора напряжений;

— соотношения Коши, связывающие компоненты тензора деформации $\varepsilon_{xx}(x, y)$, $\varepsilon_{yy}(x, y)$, $\varepsilon_{xy}(x, y)$ и смещения $u(x, y)$, $v(x, y)$:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (2.2)$$

— закон Гука, записываемый для анизотропного тела в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy} + \beta_{16}\sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{22}\sigma_{yy} + \beta_{26}\sigma_{xy}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= \beta_{16}\sigma_{xx} + \beta_{26}\sigma_{yy} + \beta_{66}\sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь β_{jk} — модифицированные коэффициенты податливости в глобальной системе координат xu , совпадающие для условий плоского напряженного состояния с обычными коэффициентами податливости s_{jk} , а для условий плоской деформации определяемые как

$$\beta_{jk} = s_{jk} - \frac{s_{j3}s_{k3}}{s_{33}}. \quad (2.4)$$

Уравнение совместности деформации получается из (2.2) исключением компонент смещения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon_{yy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon_{xx} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varepsilon_{xy}. \quad (2.5)$$

Границы $y=\pm h$ и $y=0, x<0$ свободны от напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, \pm h) &= \sigma_{xy}(x, \pm h) = 0, \quad |x| < \infty, \\ \sigma_{yy}(x, \pm 0) &= \sigma_{xy}(x, \pm 0) = 0, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Нагрузка в виде трех изгибающих моментов M_1, M_2, M_3 , трех продольных P_1, P_2, P_3 и трех поперечных сил V_1, V_2, V_3 (рис. 1) приложена на достаточно большом расстоянии от вершины трещины ($l_1 \rightarrow \infty, l_2 \rightarrow \infty$) так, чтобы считать его бесконечным. Для компенсации моментов, создаваемых поперечными силами, приложены дополнительные моменты $V_1 l_1, V_2 l_1, V_3 l_2$.

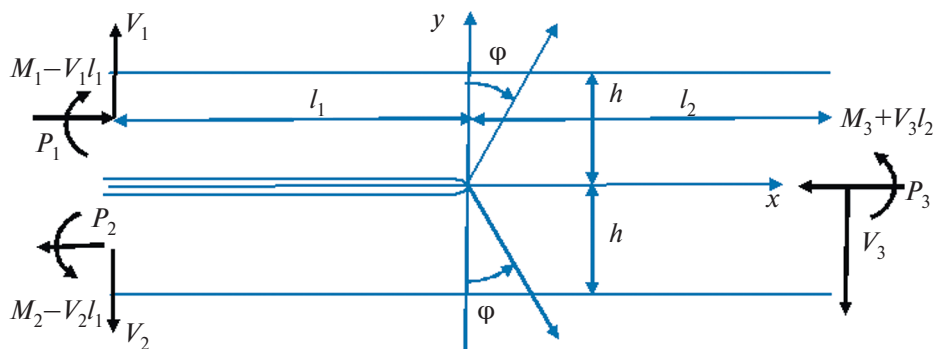


Рис. 1. Конфигурация и система приложенных нагрузок.

Из девяти нагружающих величин только шесть являются независимыми, поскольку должны удовлетворяться три уравнения баланса

$$P_3 = P_1 - P_2, \quad M_3 = M_1 - M_2 + \frac{P_1 + P_2}{2}h, \quad V_3 = V_1 - V_2. \quad (2.7)$$

Более того, напряженное состояние вблизи вершины трещины полностью определяется лишь четырьмя независимыми силовыми параметрами [13, 14, 35], так как существуют две комбинации силовых параметров не вызывающие раскрытие трещины. Следуя [9, 21, 22] в качестве четырех силовых параметров выбраны интегральные значения напряжений, действующих на линии продолжения трещины

$$M = -\int_0^\infty x \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad V = \int_0^\infty \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad (2.8)$$

$$T = \int_0^\infty \sigma_{xy}(x, 0) dx, \quad \tau_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{xy}(x, 0).$$

Данные величины отличаются от обычно используемых [10–13], однако связь между различными наборами параметров находится элементарно из условий баланса [21, 35]. Силовые параметры, входящие в (2.8), могут быть выражены через параметры нагружения следующим образом

$$M = \frac{M_1 + M_2}{2}, \quad T = \frac{(P_1 + P_2)}{8} + \frac{3(M_2 - M_1)}{4h}, \quad V = \frac{V_1 + V_2}{2}, \quad \tau_\infty = \frac{3(V_2 - V_1)}{4h}. \quad (2.9)$$

Здесь первые три соотношения следуют из условий баланса сил и моментов, четвертое соотношение получается из рассмотрения распределения поля напряжений в составной полосе.

Требуется найти поле напряжений вблизи вершины трещины, при условии их интегрируемости

$$\{\sigma_{xy}\} = O(x^{-n}), \quad n < 1, \quad x \rightarrow +0.$$

3. Коэффициенты податливости. Связь со значениями в собственной системе координат. В системе координат, связанной с главными осями тензора упругости и наклоненной к глобальной системе координат xu на угол ϕ (рис. 1), в уравнениях закона Гука остаются четыре константы $\beta_{11}^0, \beta_{22}^0, \beta_{12}^0, \beta_{66}^0$ причем решение задачи в напряжениях определяется двумя безразмерными параметрами [17]

$$\lambda = \beta_{11}^0 / \beta_{22}^0, \quad \rho = (\beta_{66}^0 + 2\beta_{12}^0) / (2\sqrt{\beta_{11}^0 \beta_{22}^0}), \quad (3.1)$$

на которые наложены термодинамические ограничения $0 < \lambda < \infty$, $-1 < \rho \leq \infty$.

Используя стандартные формулы преобразования [36], коэффициенты податливости в глобальной системе координат xu с учетом записываются в виде

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \lambda^{-1} \beta_{11}^0 \left(\lambda \cos^4 \phi + 2\sqrt{\lambda} \rho \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^4 \phi \right), \\ \beta_{22} &= \lambda^{-1} \beta_{11}^0 \left(\cos^4 \phi + 2\sqrt{\lambda} \rho \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \lambda \sin^4 \phi \right), \\ \beta_{12} &= \lambda^{-1} 8^{-1} \beta_{11}^0 \left(1 + \lambda + 6\sqrt{\lambda} \rho - (1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda} \rho) \cos 4\phi \right) - \beta_{66}^0 / 2, \\ \beta_{66} &= \lambda^{-1} \beta_{11}^0 \left(1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda} \rho \right) \sin^2 2\phi + \beta_{66}^0, \\ \beta_{16} &= -\lambda^{-1} 2^{-1} \beta_{11}^0 \left(-1 + \lambda + (1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda} \rho) \cos 2\phi \right) \sin 2\phi, \\ \beta_{26} &= \lambda^{-1} 2^{-1} \beta_{11}^0 \left(1 - \lambda + (1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda} \rho) \cos 2\phi \right) \sin 2\phi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

4. Вспомогательная задача об ортотропной полосе. Рассмотрим на плоскости xu верхнюю полуполосу $0 < y < h$, $|x| < \infty$ при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{yy}(x, h) = \sigma_{xy}(x, h) = 0, \quad \sigma_{xy}(x, 0) = q_x(x), \quad \sigma_{yy}(x, 0) = q_y(x), \quad (4.1)$$

где $q_x(x)$, $q_y(y)$ – заданные функции, и найдем решение упругой задачи при заданных граничных условиях.

Введем функцию напряжений Эри $F(x, y)$, определяемую как

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (4.2)$$

Уравнения при этом тождественно удовлетворяются, а подстановка в (4.2) затем в (2.5) сводит систему уравнений упругости к одному уравнению относительно одного неизвестного – функции напряжений [36]

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (4.3)$$

Общее решение уравнения (4.3) может быть получено путем применения двустороннего преобразования Лапласа, определяемого как

$$\hat{f}(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-px} dx, \quad p \in C. \quad (4.4)$$

Обратное преобразование определяется следующим образом

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(p, y) e^{px} dp, \quad (4.5)$$

где контур интегрирования L соответствует мнимой оси, и направление интегрирования сверху вниз.

Применение преобразования (4.4) к (4.3) приводит к уравнению для образа

$$\begin{aligned} \beta_{22} p^4 \hat{F}(p, y) - 2\beta_{26} p^3 \frac{d\hat{F}(p, y)}{dy} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) p^2 \frac{d^2 \hat{F}(p, y)}{dy^2} - \\ - 2\beta_{16} p \frac{d^3 \hat{F}(p, y)}{dy^3} + \beta_{11} \frac{d^4 \hat{F}(p, y)}{dy^4} = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

общее решение которого может быть записано следующим образом

$$\hat{F}(p, y) = C_1 e^{k_1 py} + C_2 e^{k_2 py} + C_3 e^{k_3 py} + C_4 e^{k_4 py}, \quad (4.7)$$

где C_i ($i=1 \div 4$) – константы, подлежащие определению из граничных условий, а k_i ($i=1 \div 4$) – корни характеристического уравнения (наиболее просто получить данное решение из решения для случая $\phi=0$, а затем преобразовать корни для произвольного ϕ [36])

$$k_{1,2} = \frac{i\lambda^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}} \cos \phi - \sin \phi}{\cos \phi + i\lambda^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}} \sin \phi}, \quad k_{3,4} = \frac{-i\lambda^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}} \cos \phi - \sin \phi}{\cos \phi - i\lambda^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}} \sin \phi}. \quad (4.8)$$

Отделяя в k_i действительную часть от мнимой, корни можно записать в виде:

$$k_{1,3} = A_1 \pm iB_1, \quad k_{2,4} = A_2 \pm iB_2. \quad (4.9)$$

Для $\rho > 1$ коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 принимают вид

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}} (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \sin \phi \cos \phi - \sin \phi \cos \phi}{\cos^2 \phi + \lambda^{-\frac{1}{2}} (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \sin^2 \phi}, \quad B_1 = \frac{\lambda^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}}}{\cos^2 \phi + \lambda^{-\frac{1}{2}} (\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) \sin^2 \phi}, \\ A_2 = \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}} (\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}) \sin \phi \cos \phi - \sin \phi \cos \phi}{\cos^2 \phi + \lambda^{-\frac{1}{2}} (\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}) \sin^2 \phi}, \quad B_2 = \frac{\lambda^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}}}{\cos^2 \phi + \lambda^{-\frac{1}{2}} (\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}) \sin^2 \phi}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для $-1 < \rho < 1$ вид данных коэффициентов достаточно громоздок, однако структура (4.9) сохраняется.

Константы C_i находятся из системы уравнений, определяющих граничные условия (4.1), с учетом (4.2) принимают вид

$$\begin{aligned} p^2 \hat{F}(p, 0) &= p^2 (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = \hat{q}_y(p), \\ -p \frac{\partial \hat{F}(p, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -p^2 (k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3 + k_4 C_4) = \hat{q}_x(p), \\ p^2 \hat{F}(p, h) &= p^2 (C_1 e^{k_1 p h} + C_2 e^{k_2 p h} + C_3 e^{k_3 p h} + C_4 e^{k_4 p h}) = 0, \\ -p \frac{\partial \hat{F}(p, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} &= -p^2 h (C_1 k_1 e^{k_1 p h} + C_2 k_2 e^{k_2 p h} + C_3 k_3 e^{k_3 p h} + C_4 k_4 e^{k_4 p h}) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Подстановка найденных значений C_i в выражение для образа функции напряжений (4.7) дает решение задачи.

Определим связь между образами производных от смещений по координате x с образами напряжений на границе. Производные компонент смещения

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$$

выражаются через функцию $F(x, y)$ с использованием (4.2), (2.2), (2.3) как

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial u}{\partial x} = \beta_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \beta_{16} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ v' &= \frac{\partial v}{\partial x} = \beta_{26} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - (\beta_{66} + \beta_{12}) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + 2\beta_{16} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \beta_{11} \int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Применение к (4.12) преобразования Лапласа (4.4) после подстановки (3.2), (4.7), (4.9) и коэффициентов C_i , полученных из решения системы (4.11) дает искомую связь

$$\begin{aligned} \hat{u}'(p, 0) &= C_{11} \hat{q}_x(p) + C_{12} \hat{q}_y(p), \\ \hat{v}'(p, 0) &= C_{21} \hat{q}_x(p) + C_{22} \hat{q}_y(p). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Выражения для C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} здесь не выписаны, поскольку они слишком громоздки, при дальнейших вычислениях будут использованы некоторые их комбинации.

5. Сведения задачи к системе уравнений Винера–Хопфа. Рассмотрим преобразование Лапласа (4.4) от следующих величин

$$\mathbf{F}_+(p) = \begin{Bmatrix} F_{1+}(p) \\ F_{2+}(p) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix} \sigma_{yy}(x, 0) \\ \sigma_{xy}(x, 0) \end{Bmatrix} e^{-px} dx, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{F}_-(p) = \begin{Bmatrix} F_{1-}(p) \\ F_{2-}(p) \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} v^+(x, 0) - v^-(x, 0) \\ u^+(x, 0) - u^-(x, 0) \end{Bmatrix} e^{-px} dx. \quad (5.2)$$

Здесь интервалы интегрирования сокращены, поскольку для $x < 0$ равны нулю напряжения, а для $x > 0$ разности смещений, а следовательно и их производные по x . Из равенства нулю подынтегральных выражений в (5.2), (5.1) для отрицательных и положительных аргументов следует голоморфность $F_+(p)$, $F_-(p)$ для правой ($\operatorname{Re} p > 0$) и левой ($\operatorname{Re} p < 0$) полуплоскостей комплексного переменного p , соответственно, включая границу, где данные функции могут иметь полюса [8] (см. также [37]). Верхние индексы “+” и “-” в (5.2) относятся к смещениям для верхнего и нижнего берега трещины. Соотношения между образами производных смещений и напряжениями для верхней полуполосы определяются выражениями (4.13), аналогичные выражения для нижней полуполосы определяются из (4.13) заменой h на $-h$ и ϕ на $-\phi$. Подстановка данной разности в (5.2) приводит к векторному уравнению

$$\mathbf{F}_-(p) = \mathbf{K}(p)\mathbf{F}_+(p), \quad p \in L \quad (5.3)$$

причем перекрестные члены, определяемые K_{12} , K_{21} соответствующие влиянию нормальных напряжений на разность тангенциальных смещений и касательных напряжений на разность нормальных смещений сокращаются, что очевидно ввиду симметрии задачи. Здесь контур L соответствует мнимой оси, или может быть трансформирован в соответствие правилам интегрирования по комплексной плоскости. Ненулевые компоненты матрицы $\mathbf{K}(p)$ определяются как

$$K_{11}(p) = -\frac{d_1 \operatorname{sh}(A_1 - A_2)p + d_2 \sin B_1 p \cos B_2 p + d_3 \cos B_1 p \sin B_2 p}{d_5 (2B_1 B_2 \cos B_1 p \cos B_2 p - 2B_1 B_2 \operatorname{ch}(A_1 - A_2)p + d_4 \sin B_1 p \sin B_2 p)}, \quad (5.4)$$

$$K_{22}(p) = -\frac{d_6 \operatorname{sh}(A_1 - A_2)p + d_7 \cos B_2 p \sin B_1 p + d_8 \cos B_1 p \sin B_2 p}{d_9 \cos B_1 p \cos B_2 p - d_9 \operatorname{ch}(A_1 - A_2)p + d_{10} \sin B_1 p \sin B_2 p}, \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= 4B_1 B_2 (A_2(A_1^2 - A_1 A_2 + B_1^2) - A_1 B_2^2), \\ d_2 &= -2B_2 (A_1^4 - 2A_1^3 A_2 - 2A_1 A_2 B_1^2 + B_1^2(-A_2^2 + B_1^2 - B_2^2) + A_1^2(A_2^2 + 2B_1^2 + B_2^2)), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$d_3 = -2B_1 (A_2^2((A_1 - A_2)^2 + B_1^2) - B_2^2(A_1^2 + 2A_1 A_2 - 2A_2^2 + B_1^2) + B_2^4),$$

$$d_4 = (A_1 - A_2)^2 + B_1^2 + B_2^2, \quad d_5 = (A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2).$$

$$d_6 = 4(A_1 - A_2)B_1 B_2, \quad d_7 = -2B_2 ((A_1 - A_2)^2 - B_1^2 + B_2^2), \quad (5.7)$$

$$d_8 = -2B_1 ((A_1 - A_2)^2 + B_1^2 - B_2^2), \quad d_9 = 2B_1 B_2, \quad d_{10} = (A_1 - A_2)^2 + B_1^2 + B_2^2.$$

Кроме того, должны удовлетворяться условия в ключевых точках (нуле и бесконечности)

$$\mathbf{F}_+(p) = \begin{cases} V + Mp + o(p) \\ \tau_\infty p^{-1} + T + o(1) \end{cases}, \quad \operatorname{Re} p \rightarrow 0+, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{F}_+(p) = O(p^{-\nu}), \quad \nu < 1, \quad \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty. \quad (5.9)$$

Первое из условий следует из (2.8), второе — из условия интегрируемости напряжений (2.10).

Уравнения (5.3)–(5.9) определяют матричную задачу Римана (Винера–Хопфа), которая в силу условия $K_{12} = K_{21} = 0$ сводится к двум скалярным задачам: для нормальной и касательной составляющей, в которых положим временно без нарушения общности $h = 1$.

6. Решение для нормальной составляющей. Ключевым моментом решения является факторизация функции $K_{11}(p)$, т.е. ее представление в виде произведения (отношения) двух функций, голоморфных в левой ($\operatorname{Re} p > 0$) и правой ($\operatorname{Re} p < 0$) полуплоскости комплексного переменного p , за исключением, быть может, точки $(0, 0)$,

$$K(p) = \Lambda_-^{-1}(p) \Lambda_+(p). \quad (6.1)$$

По нахождении функций $\Lambda_{\pm}(p)$, решение находится с помощью обобщенной теоремы Лиувилля (напр., [37])

$$F_{\pm}(p) = \Lambda_{\pm}^{-1}(p) \Pi(p). \quad (6.2)$$

Здесь $\Pi(p)$ — функция, возможно имеющая нули и полюса в нуле и на бесконечности, определяемая из условий (5.8), (5.9) в данных точках.

Используя (4.8), (5.4), уравнение (6.1) может быть представлено в виде

$$\Lambda_{1-}^{-1}(p) \Lambda_{1+}(p) = -\operatorname{ctg}^3(p) g_1(\lambda, \rho, \phi) G_1(p), \quad (6.3)$$

$$G_1(p) = \operatorname{tg}^3(p) g_1^{-1}(\lambda, \rho, \phi) K_{11}(p), \quad (6.4)$$

$$g_1 = -\frac{16\sqrt{2}\lambda^{1/4}\sqrt{\rho+1}(\cos^2\phi + \sqrt{\lambda}\sin^2\phi)}{3 + 3\lambda + 2\sqrt{\lambda}\rho - 4(\lambda-1)\cos 2\phi + (1+\lambda-2\sqrt{\lambda}\rho)\cos 4\phi}. \quad (6.5)$$

Здесь коэффициенты $\operatorname{tg}^3(p)$ и $g_1(\lambda, \rho, \phi)$ в (6.3) выбраны так, чтобы функция $G_1(p)$ была голоморфна на всей мнимой оси включая точку $(0, 0)$ и стремилась к единице при $p \rightarrow \pm\infty$.

Для $-1 < \rho < 1$ радикалы $\sqrt{\rho-1}$ в (6.4) и формулах получающихся в дальнейшем становятся чисто мнимыми, однако они появляются в сочетании с другими мнимыми коэффициентами, так что окончательные выражения остаются действительными. Поэтому нет необходимости отдельно рассматривать случай $-1 < \rho < 1$.

Использование интегралов Коши для факторизации $G_1(p)$ и стандартное представление для котангенса через гамма-функцию $\Gamma(p)$ (напр., [37]) позволяет осуществить факторизацию в следующем виде

$$\Lambda_{1+}(p) = \frac{\Gamma^3(1 + p\pi^{-1})}{\Gamma^3(1/2 + p\pi^{-1})} J_{1+}(p), \quad (6.6)$$

$$\Lambda_{1-}(p) = g_1(\lambda, \rho, \phi) \frac{\Gamma^3(1/2 - p\pi^{-1})}{\Gamma^3(-p\pi^{-1})} J_{1-}(p), \quad (6.7)$$

$$J_{1\pm}(p) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{G_1(s)}{is - p} ds\right). \quad (6.8)$$

При этом $\Lambda_{1+}(p)$ в нуле и на бесконечности имеет следующие асимптотические разложения

$$\Lambda_{1+}^{-1}(p) = \pi^{3/2} R_1 [1 - p Y_1(\rho)] + O(p^2), \quad (6.9)$$

$$\Lambda_{1+}^{-1}(p) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{3/2} + O(p^{-1/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty. \quad (6.10)$$

Здесь

$$R_1 = \left[\frac{6\sqrt{2}(\lambda \cos^4 \phi + 2\sqrt{\lambda}\rho \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^4 \phi)}{\lambda^{1/4} \sqrt{1+\rho} (\cos^2 \phi + \sqrt{\lambda} \sin^2 \phi)} \right]^{1/2} \quad (6.11)$$

квадратный корень из отношения асимптотик $G_1(p)$ в нуле и на бесконечности, остальные величины есть

$$Y_1(\lambda, \rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL_1(s)}{ds} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [L_1(s) - L_1(0)] \frac{ds}{s^2},$$

$$L_1(s) = \ln \left[s^3 \frac{d_1 \sin(A_1 - A_2)s + d_2 \operatorname{ch} B_2 s \operatorname{sh} B_1 s + d_3 \operatorname{ch} B_1 s \operatorname{sh} B_2 s}{d_5 (2(\cos(A_1 - A_2)s - \operatorname{ch} B_1 s \operatorname{ch} B_2 s) B_1 B_2 + d_4 \operatorname{sh} B_1 s \operatorname{sh} B_2 s)} \right]. \quad (6.12)$$

Анализ (6.2), (6.9), (6.10) вместе с (5.8), (5.9) приводит к виду функции $\Pi(p)$

$$\Pi(p) = \pi^{-3/2} R_1^{-1} [V + (M + Y_1(\lambda, \rho, \phi)V)p]. \quad (6.13)$$

Появление в (6.13) членов с отрицательными степенями p привело бы к нарушению условия (5.9), в то время как появление членов со степенями больше единицы привело бы к нарушению условия (5.8).

Таким образом (6.2), (6.6)–(6.8), (6.13) дают решение поставленной задачи.

Рассмотрим асимптотику $p \rightarrow +\infty$. Подстановка (6.10), (6.13) в (6.2) дает

$$F_{1+}(p) = R_1^{-1} (M + Y_1(\lambda, \rho, \phi)V) p^{-1/2} + o(p^{-1/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty. \quad (6.14)$$

Использование теоремы абелевого типа [37] дает асимптотику напряжения при $x \rightarrow 0+$:

$$\sigma_{yy} = \pi^{-1/2} R_1^{-1} (M + Y_1(\lambda, \rho, \phi)V) x^{-1/2} + o(x^{-1/2}). \quad (6.15)$$

Откуда, по возвращении к произвольному h , КИН находится как

$$K_I h^{3/2} = \sqrt{2} R_1^{-1} (M + Y_1(\lambda, \rho, \phi) V h). \quad (6.16)$$

Структура выражения (6.16) совпадает со структурой аналогичных выражений [8, 17, 21, 22] для случая ненаклоненных слоев. Для члена, пропорционального моменту, выражение (6.16) совпадает с результатом [10].

7. Решение задачи для сдвиговой моды. Аналогично предыдущему случаю, используя (4.8), (5.5) аналог выражения записывается следующим образом

$$\Lambda_{2-}^{-1}(p) \Lambda_{2+}(p) = -\operatorname{ctg}(p) g_2(\lambda, \rho, \phi) G_2(p), \quad (7.1)$$

$$G_2(p) = -\operatorname{tg}(p) g_2^{-1}(\lambda, \rho, \phi) K_{22}(p), \quad (7.2)$$

$$g_2 = \frac{2\sqrt{2}\lambda^{1/4} \sqrt{1+\rho} (\sqrt{\lambda} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi)}{\lambda \cos^4 \phi + 2\sqrt{\lambda}\rho \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^4 \phi}. \quad (7.3)$$

Факторизация имеет вид

$$\Lambda_{2+}(p) = \frac{\Gamma(1 + p\pi^{-1})}{\Gamma(1/2 + p\pi^{-1})} J_{2+}(p), \quad (7.4)$$

$$\Lambda_{2-}(p) = -\frac{\Gamma(1/2 - p\pi^{-1})}{\Gamma(-p\pi^{-1})} g_1(\lambda, \rho, \phi) J_{2-}(p), \quad (7.5)$$

$$J_{2\pm}(p) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[s \frac{d_6 \sin(A_1 - A_2)t + d_7 \operatorname{ch} B_2 t \operatorname{sh} B_1 t + d_8 \operatorname{ch} B_1 t \operatorname{sh} B_2 t}{d_9 (\cos(A_1 - A_2)t - \operatorname{ch} B_1 t \operatorname{ch} B_2 t) + d_{10} \operatorname{sh} B_1 t \operatorname{sh} B_2 t} \right] \frac{ds}{is - p} \right\}. \quad (7.6)$$

Со следующими асимптотическими представлениями

$$\Lambda_{2+}^{-1}(p) = \pi^{1/2} R_2 [1 - p Y_2(\lambda, \rho, \phi)] + O(p^2), \quad (7.7)$$

$$\Lambda_{2+}^{-1}(p) = \left(\frac{\pi}{p} \right)^{1/2} + O(p^{-1/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty, \quad (7.8)$$

$$R_2 = \frac{2^{3/4}}{\lambda^{1/8} (1+\rho)^{1/4}} \left[\frac{\lambda \cos^4 \phi + 2\sqrt{\lambda}\rho \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^4 \phi}{\sqrt{\lambda} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \right]^{1/2}, \quad (7.9)$$

$$Y_2(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dL_2(s)}{ds} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [L_2(s) - L_2(0)] \frac{ds}{s^2}, \quad (7.10)$$

$$L_2(s) = \ln \left[s \frac{d_6 \sin(A_1 - A_2)s + d_7 \operatorname{ch} B_2 s \operatorname{sh} B_1 s + d_8 \operatorname{ch} B_1 s \operatorname{sh} B_2 s}{d_9 (\cos(A_1 - A_2)s - \operatorname{ch} B_1 s \operatorname{ch} B_2 s) + d_{10} \operatorname{sh} B_1 s \operatorname{sh} B_2 s} \right]. \quad (7.11)$$

Сравнение (6.2), (7.7), (7.8) вместе с (5.8), (5.9) приводит к

$$\Pi(p) = \pi^{-3/2} R_2^{-1} \left[\tau_\infty p^{-1} + (T + Y_2(\lambda, \rho, \phi) \tau_\infty) \right]. \quad (7.12)$$

Появление в (7.12) членов степени p^{-k} , $k > 1$ привело бы к нарушению условия (5.8), в то время как появление членов с положительными степенями p привело бы к нарушению условия (5.9).

Таким образом, формулы (6.2), (7.4)–(7.6), (7.12) дают решение поставленной задачи.

Рассмотрим асимптотику решения при $p \rightarrow +\infty$. Подстановка (7.8), (7.12) в (6.2) дает

$$F_{1+}(p) = R_2^{-1} (T + Y_2(\lambda, \rho, \phi) \tau_\infty) p^{-1/2} + o(p^{-1/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty. \quad (7.13)$$

Используя теорему абелевого типа [37] и возвращаясь к произвольному h , получаем асимптотические формулы для напряжений при $x \rightarrow 0+$

$$\sigma_{xy} = \pi^{-1/2} R_2^{-1} (T + h Y_2(\lambda, \rho, \phi) \tau_\infty) h^{-1/2} x^{-1/2} + o(x^{-1/2}). \quad (7.14)$$

Откуда КИН,

$$K_{II} h^{1/2} = \sqrt{2} R_2^{-1} (T + Y_2(\lambda, \rho, \phi) \tau_\infty h). \quad (7.15)$$

Структура выражения (7.15) совпадает со структурой (6.16).

8. Результаты численных расчетов. Зависимости КИН от изгибающего момента и пары продольных сил с компенсирующими моментами определяются согласно (6.16), (7.15) алгебраическими функциями от трех параметров λ , ρ , ϕ и с точностью до обозначений совпадают с выражениями [11], полученными из анализа элементарных балочных решений с использованием результатов [38, 39]. Зависимости КИН от симметрично и несимметрично приложенных поперечных сил не могут быть найдены из элементарных решений и определяются произведением констант (6.11), (7.9) на функции Y_1 , Y_2 от тех же трех параметров. Их зависимости от ρ для $\phi = \pi/3$ при различных значениях λ представлены на рис. 2 и 4, зависимости от ϕ для различных ρ и λ — на рис. 3 и 5. Отметим, что подобно случаю слоев с главными осями тензоров упругости, расположенных нормально [21], значения функции Y_2 для ρ близких к -1 становятся отрицательными. Аналогично [21], произвольная нагрузка, приложенная достаточно далеко от вершины трещины, может быть представлена как суперпозиция рассмотренных случаев. Существенно, что функции Y_1 , Y_2 являются четными функциями от угла наклона слоев ϕ , что позволяет избежать ошибок при определении направления его отсчета. Для случая отсутствия наклона слоев $\phi = 0$ выражения (6.16), (7.15) сводятся к результату [21], однако в отличие от рассмотренного там случая в рассматриваемой задаче оказалось затруднительным выделить некоторую комбинацию параметров в функции $Y_1(\lambda, \rho, \phi)$, так что подынтегральное выражение осталось зависящим от всех трех параметров. Тем не менее, функции Y_1 , Y_2 обладают некоторой симметрией: благодаря зависимостям (3.2) можно заключить, что $Y_k(\lambda, \rho, \phi) = Y_k(1/\lambda, \rho, \pi/2 - \phi)$, что видно из рис. 3, 5.

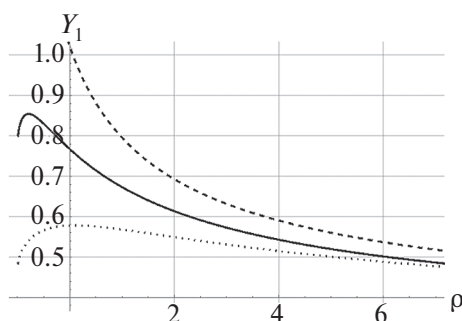


Рис. 2. Зависимость функции Y_1 от ρ для $\phi = \pi/3$; сплошные линии — $\lambda = 1$, пунктирные линии — $\lambda = 4$, точечные линии — $\lambda = 1/4$.

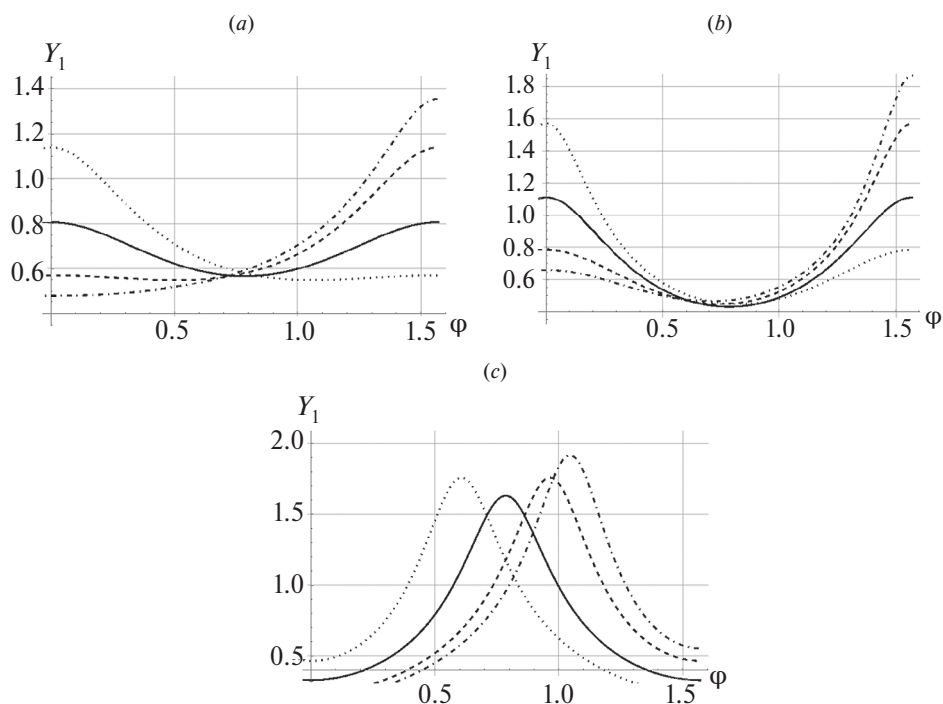


Рис. 3. Зависимость функции Y_1 от ϕ : (a) для $\rho = 2$, (b) для $\rho = 5$, (c) для $\rho = -0.7$; сплошные линии — $\lambda = 1$, пунктирные линии — $\lambda = 4$, штрих-пунктирные линии — $\lambda = 8$, точечные линии — $\lambda = 1/4$.

9. Заключение. Рассмотрена двумерная задача линейной теории упругости о полосе, составленной из двух полуполос равной толщины из одинакового ортотропного материала с главными осями тензора упругости, симметрично наклоненных к границе раздела и центральной полубесконечной трещиной, проходящей по границе раздела. Сбалансированная система нагрузок предполагается приложенной достаточно далеко от вершины трещины, так что

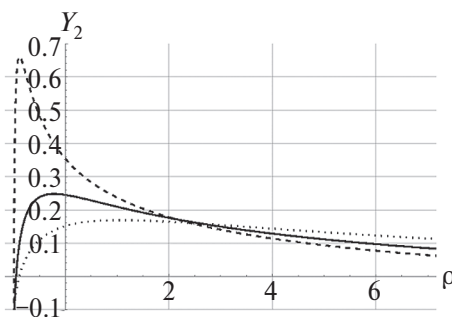


Рис. 4. Зависимость функции Y_2 от ρ для $\phi = \pi/3$; сплошные линии — $\lambda = 1$, пунктирные линии — $\lambda = 4$, точечные линии — $\lambda = 1/4$.

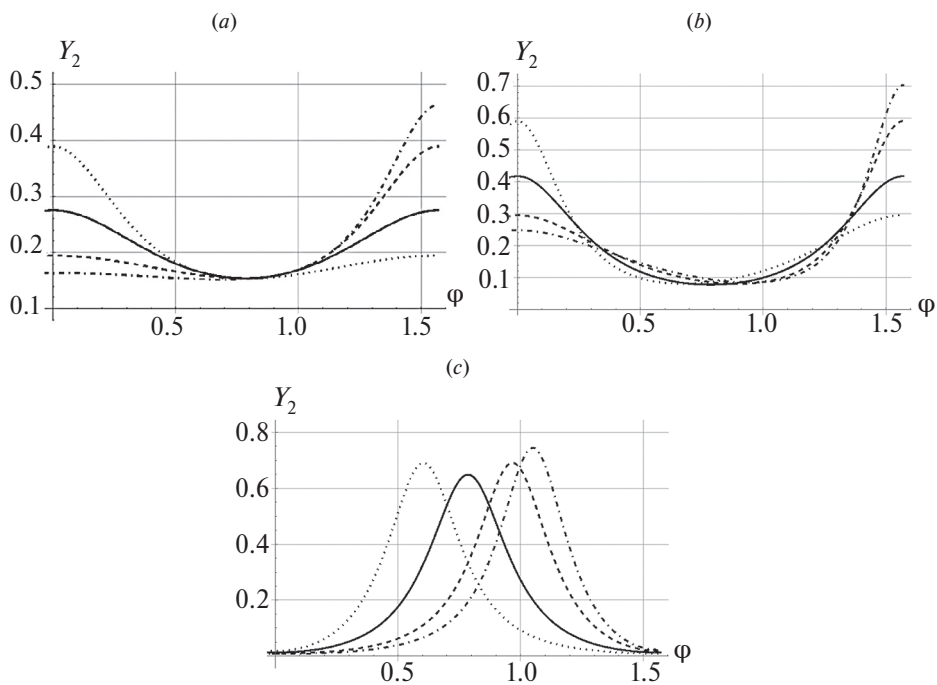


Рис. 5. Зависимость функции Y_2 от ϕ : (a) для $\rho = 2$, (b) для $\rho = 5$, (c) для $\rho = -0.7$; сплошные линии — $\lambda = 1$, пунктирные линии — $\lambda = 4$, штрих-пунктирные линии — $\lambda = 8$, точечные линии — $\lambda = 1/4$.

согласно принципу Сен-Венана ее можно считать приложенной на бесконечности. Система нагрузок характеризуется четырьмя интегральными силовыми параметрами (2.8), зависящими от напряжений на продолжении линии трещины. Каждый из данных параметров соответствует одной из четырех мод нагружения:

1) парой изгибающих моментов, симметрично приложенным к отслаиваемым частям полуполос;

2) противоположно направленными продольными силами, приложенными к отслаиваемым частям полуполос;

3) поперечными силами, симметрично приложенными к отслаиваемым частям полуполос;

4) поперечными силами, приложенными в одном направлении к отслаиваемым частям полуполос, и поперечной силой, приложенной к противоположной части составной полосы в противоположном направлении.

Для случаев 2)–4) также прикладываются компенсирующие моменты, так чтобы суммарный момент относительно вершины трещины был равным нулю.

Произвольная нагрузка может быть получена как суперпозиция данных мод нагружения и двух «неактивных» мод, не вызывающих появления КИН.

Ставится задача нахождения КИН.

Путем применения двустороннего преобразования Лапласа задача сведена к матричной задаче Римана, в силу симметрии распадающейся на две скалярные задачи, для которых получены точные аналитические решения. Полученное решение справедливо для всех термодинамически допустимых значений упругих констант. Для четырех независимых активных мод нагружения найдены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в виде комбинаций элементарных функций либо однократных интегралов от комбинаций элементарных функций, зависящих от трех независимых параметров. Значения КИН от изгибающего момента и пары продольных сил с компенсирующими моментами определяются алгебраическими функциями трех параметров λ , ρ , ϕ и с точностью до обозначений совпадают с выражениями [11], полученными из анализа элементарных решений, в то время как зависимости КИН от симметрично и несимметрично приложенных поперечных сил не могут быть найдены из элементарных решений и определяются произведением комбинации констант (6.11), (7.9) на функции Y_1 , Y_2 , выражающиеся через однократные интегралы от комбинаций алгебраических функций, зависящих от тех же трех параметров λ , ρ , ϕ . Аналогично случаю слоев с главными осями тензоров упругости, расположенных нормально [21], значения функции Y_2 для ρ близких к -1 могут становиться отрицательными. Функции Y_1 , Y_2 являются четными функциями от угла наклона слоев ϕ . Для случая отсутствия наклона слоев $\phi = 0$ выражения (6.16), (7.15), сводятся к результату [21], однако в отличие от рассмотренного там случая, при произвольном угле наклона ϕ оказалось затруднительным выделить некоторую комбинацию параметров в функции $Y_1(\lambda, \rho, \phi)$, так что подынтегральное выражение осталось зависящим от всех трех параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания (№ госрегистрации 124012500441-6) для КБУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Obreimoff J.W.* The splitting strength of mica // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 1930. V. 127. № 805. P. 290–297.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0058>
2. *Златин А. Н., Храпков А.А.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // *Доклады АН СССР.* 1986. Т. 291. № 4. С. 810–813.

3. *Ustinov K.B.* On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // *Mech. Solids*. 2015. 50 (1). P. 62–80.
<https://doi.org/10.3103/S0025654415010070>
4. *Dundurs J.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *J. Appl. Mech. Trans. ASME*. 1969. 36. V. 36. № 3. P. 650–651.
<https://doi.org/10.1115/1.3564739>
5. *Ентов В.М., Салганик П.Л.* О балочном приближении в теории трещин // *Изв. АН СССР. Механика*. 1965. № 5. С. 95–102.
6. *Fichter W.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1983. V. 22 (2). P. 133–143.
<https://doi.org/10.1007/BF00942719>
7. *Foote R., Buchwald V.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1985. V. 29 (3). P. 125–134.
<https://doi.org/10.1007/BF00034313>
8. *Khrapkov A.* Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. B.E. Vedeneev VNIIG Publishing House. 2001. 143 p.
9. *Ustinov K.B.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A- Solid*. 2019. V. 75. № 3. P. 56–69.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
10. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
11. *Hutchinson J.W., Suo Z.* Mixed mode cracking in layered materials // *Adv. Appl. Mech.* 1991. V. 29. P. 63–191.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
12. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* The mechanics and reliability of films, multilayers and coatings. Cambridge University Press, 2017. P. 106–118.
<https://doi.org/10.1017/9781316443606.007>
13. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. of Solids*. 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
14. *Andrews M.G., Massabò R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
15. *Thouless M.D.*, Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials // *Eng. Fract. Mech.* 2018. V. 191. P. 153–167.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.01.033>
16. *Suo Z.* Delamination specimens for orthotropic materials // *J. Appl. Mech.* 1990 V. 57. № 3. P. 627–634. <https://doi.org/10.1115/1.2897068>
17. *Bao G., Ho S., Suo Z., Fan B.* The role of material orthotropy in fracture specimens for composites // *Int. J. Sol. Struct.* 1992. V. 29. № 9. P. 1105–1116.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90138-j](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90138-j)
18. *Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N.* Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
19. *Brandinelli L., Massabò R.* Mode II weight functions for isotropic and orthotropic double cantilever beams // *Int. J. Fract.* 2006. V. 139. P. 1–25.
<https://doi.org/10.1007/s10704-006-6358-0>
20. *Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A.* Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 1990. V. 41. P. 889–899.
<https://doi.org/10.1007/BF00945841>

21. *Ustinov K., Massabò R., Lisovenko D.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Eng. Failure Analysis*. 2020. V. 100. P. 104410.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
22. *Ustinov K.B., Idrisov D.M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2020. V. 101. № 4. P. e202000239.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
23. *Wang T.C., Shih, C.F., Suo Z.* Crack extension and kinking in laminates and bicrystals // *Int. J. Sol. Struct.* 1992. V. 29. № 3. P. 327–344.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90203-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90203-6)
24. *Suo Z., Bao G., Fan B., Wang T.C.* Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites // *Int. J. Sol. Struct.* 1991. V. 28. № 2. P. 235–248.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90208-W](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90208-W)
25. *Grekov M.A.* Two types of interface defects // *J. Appl. Math. Mech.* 2011. V. 75. № 4. P. 476–488.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.09.012>
26. *Grekov M.A., Morozov N.F.* Some modern methods in mechanics of cracks // *Modern analysis and applications*. 2009. V. 191. P. 127–142.
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_8
27. *Koiter W.* On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1955. V. 8. № 2. P. 164–178.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/8.2.164>
28. *Popov, G.* Bending of a semi-infinite plate resting on a linearly deformable foundation // *J. Appl. Math. Mech.* 1961. V. 25. № 2. P. 502–520.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(61\)90082-x](https://doi.org/10.1016/0021-8928(61)90082-x)
29. *Alblas J., Kuypers W.* On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate // *Appl. Sci. Res.* 1966. V.15. P. 429–439.
<https://doi.org/10.1007/BF00411576>
30. *Salganik R., Ustinov K.* Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (plane strain) // *Mech. Solid.* 2012. V. 47(4). P. 415–425.
<https://doi.org/10.3103/s0025654412040061>
31. *Ustinov K.* On shear separation of a thin strip from the half-plane // *Mech. Solid.* 2014. V. 49(6). P. 713–724.
<https://doi.org/10.3103/s0025654414060132>
32. *Устинов К.Б.* О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2015. № 4. С. 226–245.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.13>
33. *Устинов К.Б.* О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 2. Случай сдвиговой трещины // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 2. С. 131–142.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.09>
34. *Massabò R., Ustinov K., Barbieri L., Berggreen C.* Fracture mechanics solutions for interfacial cracks between compressible thin layers and substrates // *Coatings*. 2019. V. 9. № 3. P. 152.
<https://doi.org/10.3390/coatings9030152>
35. *Ustinov K.B., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. Sol. Struct.* 2022. V. 248. P. 111600.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>

36. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
37. *Noble B.*, Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. Physics today. 1959. V. 12. № 9. P. 50.
<https://doi.org/10.1063/1.3060973>
38. *Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fract. Mech. 1965. V. 1(1). P. 189–203.
<https://doi.org/10.1007/bf00186854>
39. *Wang C., Shih C.F., Suo Z.* Crack extension and kinking in laminates and bicrystals // Int. J. Sol. Struct. 1992. V. 29. № 3. P. 327–344.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90203-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90203-6)

SPLITTING OF A STRIP CONSISTING OF TWO IDENTICAL ORTHOTROPIC HALF-STRIPS WITH ISOTROPY AXES SYMMETRICALLY INCLINED TO THE INTERFACE

K. B. Ustinov^{a, *}, N.L. Borisova^{b, **}

^a*A.Yu. Ishlinsky Institute for problem in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b*Federal State Educational Institution of Higher Education "Prince Alexander Nevsky Military University" of the Ministry of Defense of the Russian Federation, Russia*

^{*}*e-mail: ustinov@ipmnet.ru, ^{**}e-mail: nbolo@yandex.ru*

Abstract. An exact analytical solution is obtained for the two-dimensional problem of a strip composed by two half-strips of equal thickness from the same linearly elastic orthotropic material with the main axes of the elasticity tensor symmetrically inclined to the interface and a central semi-infinite crack running along the interface. A self-balanced system of loads is assumed to be applied sufficiently far from the crack tip. For four independent active loading modes, expressions for stress intensity factors are found in the form of combinations of elementary functions or single integrals of combinations of elementary functions depending on three independent parameters.

Keywords: stress intensity factors, integral transforms, Wiener-Hopf method

REFERENCES

1. *Obreimoff J.W.* The splitting strength of mica // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 1930. 127. P. 290–297.
2. *Zlatin A.N., Khrapkov A.A.* A Semi-Infinite Crack Parallel to the Boundary of the Elastic Half-Plane // Sov. Phys. Dokl. 1986. 31, P. 1009–1010.
3. *Ustinov K.B.* On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // Mech. Solids. 2015. 50 (1). P. 62–80.
<https://doi.org/10.3103/S0025654415010070>
4. *Dundurs J.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1969. 36. N. 3. P. 650–651.
<https://doi.org/10.1115/1.3564739>
5. *Entov V., Salganik R.* On beam approximation in crack theory // Izv. AN SSSR. Mekhanika 1965. 5, P. 95–102 (In Russian)

6. *Fichter W.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1983. 22 (2). P. 133–143.
<https://doi.org/10.1007/BF00942719>
7. *Foote R., Buchwald V.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1985. 29 (3). P. 125–134.
<https://doi.org/10.1007/BF00034313>
8. *Khrapkov A.* Winer-Hopf Method in Mixed Elasticity Theory Problems. B.E.Vedeneev VNIIG Publishing House. 2001. 143 p.
9. *Ustinov K.B.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2019. V. 75. N. 3. P. 56–69.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
10. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. 43. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
11. *Hutchinson J.W., Suo Z.* Mixed Mode Cracking in Layered Materials. *Advances in Applied Mechanics* edited by J. W. Hutchinson and T. Y. Wu. 1992. 29. P. 63–191.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
12. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings. Cambridge University Press, 2017. P. 106–118.
<https://doi.org/10.1017/9781316443606.007>
13. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. of Solids*. 2004. 52 (1). P. 193–214.
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
14. *Andrews M.G., Massabò R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. 74. P. 2700–2720.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
15. *Thouless M.D.*, Shear Forces, Root Rotations, Phase Angles and Delamination of Layered Materials // *Eng. Fract. Mech.* 2018. 191. P. 153–167.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.01.033>
16. *Suo Z.* Delamination specimens for orthotropic materials // *J. Appl. Mech.* 1990 V. 57. P. 627–634. <https://doi.org/10.1115/1.2897068>.
17. *Bao G., Ho S., Suo Z., Fan B.* The role of material orthotropy in fracture specimens for composites // *Int. J. Sol. Struct.* 1992. 29 (9). P. 1105–1116.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90138-j](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90138-j)
18. *Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N.* Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. 41. P. 1497–1518.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
19. *Brandinelli L., Massabò R.* Mode II weight functions for isotropic and orthotropic double cantilever beams // *Int. J. Fract.* 2006. 139. P. 1–25.
<https://doi.org/10.1007/s10704-006-6358-0>.
20. *Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A.* Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 1990. 41. P. 889–899.
<https://doi.org/10.1007/BF00945841>
21. *Ustinov K., Massabò R., Lisovenko D.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Eng. Failure Analysis*, 2020. 100. P. 104410.
[doi:10.1016/j.engfailanal.2020.104410](https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410).

22. *Ustinov K.B., Idrisov D.M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2020. 101. Is 4. e202000239.
doi: 10.1002/zamm.20200023
23. *Wang T.C., Shih, C.F. Suo Z.* Crack extension and kinking in laminates and bicrystals // *Int. J. Sol. Struct.* 1992. 29. P. 327–344.
doi:10.1016/0020-7683(92)90203-6
24. *Suo Z., Bao G., Fan B., Wang T.C.* Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites // *Int. J. Sol. Struct.* 1991. 28(2). P. 235–248.
doi 10.1016/0020-7683(91)90208-W
25. *Grekov M.A.* Two types of interface defects // *J. Appl. Math. Mech.* 2011. V. 75. № 4. P. 476–488.
[https://doi.org/ 10.1016/j.jappmathmech.2011.09.012](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.09.012)
26. *Grekov M.A., Morozov N.F.* Some modern methods in mechanics of cracks // *Modern analysis and applications*. 2009. V. 191. P. 127–142.
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_8
27. *Koiter W.* On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1955. V. 8. № 2. P. 164–178.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/8.2.164>
28. *Popov G.* Bending of a semi-infinite plate resting on a linearly deformable foundation // *J. Appl. Math. Mech.* 1961. 25 (2). P. 502–520.
doi: 10.1016/0021-8928(61)90082-x
29. *Alblas J., Kuypers W.* On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate // *Appl. Sci. Res.* 1966. 15 (1). P. 429–439.
doi: 10.1007/BF00411576
30. *Salganik R., Ustinov K.* Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (plane strain) // *Mech. Solid.* 2012. 47(4). P. 415–425.
doi: 10.3103/s0025654412040061
31. *Ustinov K.* On shear separation of a thin strip from the half-plane // *Mech. Solid.* 2014. 49(6). P. 713–724.
doi: 10.3103/s0025654414060132
32. *Ustinov K.* On delamination of a stipe along the boundary between two elastic layers part 1, problem formulation, the case of normal crack // *PNRPU Mech. Bull.* 2015 (4), 226–245.
doi: 10.15593/perm.mech/2015.4.13
33. *Ustinov K.* On delamination of a strip along the boundary between two elastic layers. part 2, case of shear crack // *PNRPU Mech. Bull.* 2016 (2), 131–142.
doi: 10.15593/perm.mech/ 2016.1.09
34. *Massabò R., Ustinov K., Barbieri L., Berggreen, C.* Fracture Mechanics Solutions for Interfacial Cracks between Compressible Thin Layers and Substrates // *Coatings*. 2019. 9(3). P. 152.
doi: 10.3390/coatings9030152
35. *Ustinov K.B., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. Sol. Struct.* 2022. 248. P. 111600.
doi: 10.1016/j.ijsolstr.2022.111600
36. *Lekhnitsky* Theory of elasticity of an anisotropic elastic body 1963.

37. *Noble B.*, Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. *Physics Today*. 12 (9). 1959. P. 50.
doi: 10.1063/1.3060973
38. *Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies \\ *Int. J. Fract. Mech.* 1965. 1(3). P. 189–203.
doi:10.1007/bf00186854
39. *Wang C., Shih C.F., Suo Z.* Crack extension and kinking in laminates and bicrystals. *Int. J. Sol. Struct.* 1992. 29(3). P. 327–344.
doi: 10.1016/0020-7683(92)90203-6