

УДК 537.531.3

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СГУСТКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

© 2024 г. В. В. Сыщенко<sup>а,\*</sup>, А. И. Тарновский<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, 308015 Россия

\*e-mail: syshch@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.09.2023 г.

После доработки 25.11.2023 г.

Принята к публикации 25.11.2023 г.

Дифракционное излучение широко используется для неразрушающей диагностики пучков заряженных частиц. В серии предшествующих работ был разработан метод описания дифракционного излучения нерелятивистской частицы на идеально проводящей сфере, основанный на известном из электростатики методе изображений. Этот метод позволяет получить аналитические выражения для двух основных характеристик излучения — спектрально-угловой плотности и поляризации. Характерные особенности этих величин допускают возможность разработки на их основе новых методов мониторинга параметров траектории движущейся частицы по отношению к сфере. В работе получены формулы, описывающие поляризацию когерентного дифракционного излучения, создаваемого на металлической сфере коротким сгустком частиц (pancake-bunch). Показано, что регистрация поляризации излучения позволяет оценить положения краев пролетающего сгустка относительно центра сферы. Это можно использовать для неразрушающего определения характерных размеров сгустка.

**Ключевые слова:** дифракционное излучение, проводящая сфера, метод изображений, поляризация, мониторинг частиц, диагностика пучков.

**DOI:** 10.31857/S1028096024070095, **EDN:** EUXZHW

### ВВЕДЕНИЕ

Дифракционное излучение возникает при равномерном движении заряженной частицы вблизи неоднородности электромагнитных свойств среды, в простейшем случае — вблизи проводящей полуплоскости в вакууме [1, 2]. Это явление может быть использовано для неразрушающей диагностики пучков заряженных частиц (например, монографии [3, 4]). В [5, 6] был предложен подход к описанию дифракционного излучения нерелятивистской заряженной частицы на идеально проводящей сфере, основанный на известном из электростатики методе изображений (например, [7, 8]). В [9, 10] этот подход был использован для нахождения поляризации излучения, порождаемого отдельной пролетающей мимо сферы частицей. В настоящей работе рассмотрены поляризационные характеристики когерентного дифракционного излучения, порождаемого на сфере коротким сгустком (pancake-bunch) нерелятивистских заряженных частиц, и про-

демонстрировано, как измерение поляризации излучения позволяет диагностировать положение краев сгустка.

Отметим, что диагностика сгустков нерелятивистских частиц с использованием порождаемого ими длинноволнового переходного и дифракционного излучения на различных мишенях достаточно широко обсуждается в современной литературе (например, [11, 12]).

### МЕТОДИКА

Метод изображений заключается в воспроизведении поля, создаваемого заряженной частицей в присутствии проводящих тел, введением наряду с реальным точечным зарядом  $e_0$  одного или нескольких фиктивных зарядов (“изображений” реального заряда). В случае прямолинейного и равномерного движения реального заряда (со скоростью  $v_0$ ) вблизи проводящей сферы его

изображение будет описывать окружность (рис. 1), т.е. заряд будет двигаться с ускорением, что и приводит к возникновению излучения.

Амплитуда расходящейся волны векторного потенциала поля излучения пропорциональна величине (например, [13–15]):

$$\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) \mathbf{v}(t) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}(t))] dt, \quad (1)$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор излучения,  $|\mathbf{k}| = \omega/c$ ,  $e(t)$ ,  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$  — величина, положение и скорость “изображения” заряда. Спектрально-угловая плотность излучения с определенной поляризацией будет описываться следующей формулой:

$$\left( \frac{dE}{d\omega d\Omega} \right)_{\alpha} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} |\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{I}|^2, \quad (2)$$

где  $\mathbf{e}_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — два вектора поляризации, ортогональных волновому вектору  $\mathbf{k}$  и друг другу:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{v}_0}{|\mathbf{k} \times \mathbf{v}_0|} = \mathbf{e}_x \sin \varphi - \mathbf{e}_y \cos \varphi, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_1}{k} = \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \varphi - \\ &\quad - \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{e}_z \sin \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}_0$  — вектор скорости налетающей частицы.

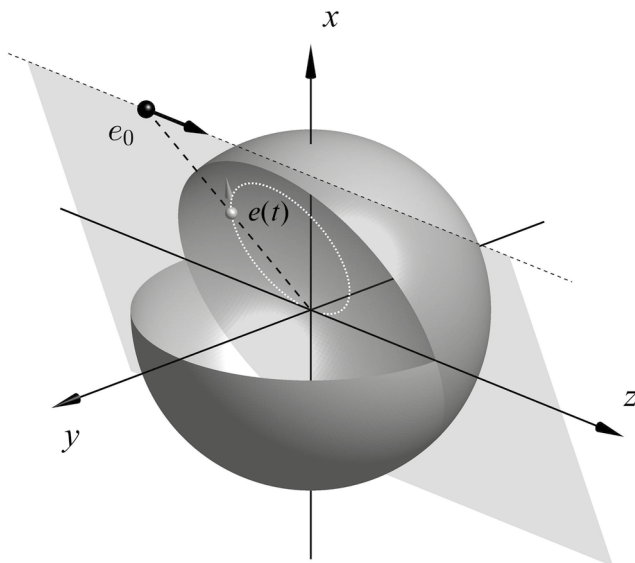


Рис. 1. Круговая траектория (пунктирная линия) “изображения”  $e(t)$  заряда  $e_0$  при движении заряженной частицы вблизи проводящей сферы.

Максимум интенсивности излучения нерелятивистской частицы приходится на область больших длин волн:

$$\lambda \gg 2\pi R^2/b, \quad \omega \ll cb/R^2, \quad (4)$$

где  $R$  — радиус сферы,  $b = \sqrt{x^2 + y^2}$  — прицельный параметр налетающей частицы. В этом случае компоненты вектора  $\mathbf{I}$  будут равны [5, 6]:

$$\begin{aligned} I_x^{(1)} &= \frac{4}{3} e_0 R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} i \frac{x}{b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right), \\ I_y^{(1)} &= \frac{4}{3} e_0 R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} i \frac{y}{b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$I_z^{(1)} = -\frac{4}{3} e_0 R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} \left[ K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) + \frac{v_0}{2\omega b} K_1 \left( \frac{\omega}{v_0} b \right) \right],$$

где  $e_0$  — заряд налетающей частицы,  $K_0(x)$  и  $K_1(x)$  — модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдональда). Безразмерная величина  $(4\pi^2 c/e_0^2) \sum_{\alpha} (dE/d\omega d\Omega)_{\alpha}$ , характеризующая спектрально-угловую плотность излучения, просуммированную по векторам поляризации, представлена на рис. 2 в виде диаграммы направленности для случая, когда траектории налетающей частицы и ее изображения лежат в плоскости  $(x, z)$ . Максимум спектральной плотности излучения приходится на комбинации значений параметров  $\omega b/v_0 \approx 2.34$  [5, 9, 10].

Поляризационный тензор [16] с учетом (2) будет равен:

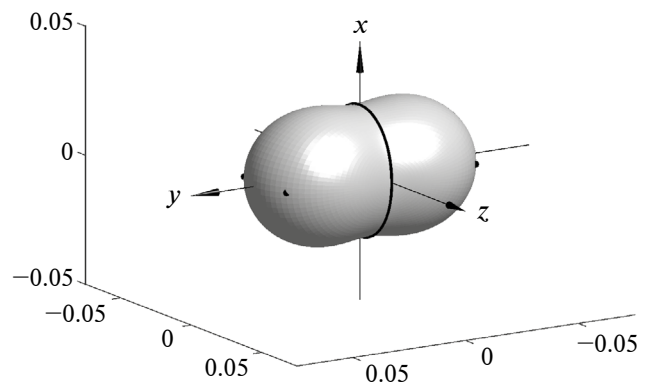


Рис. 2. Диаграмма направленности дифракционного излучения на сфере при  $b = R + 0$ ,  $v_0 = 0.1c$ , и  $R\omega/v_0 = 2.34$ : сплошная линия — направления излучения с линейной поляризацией (100%); точки — круговая поляризация (100%).

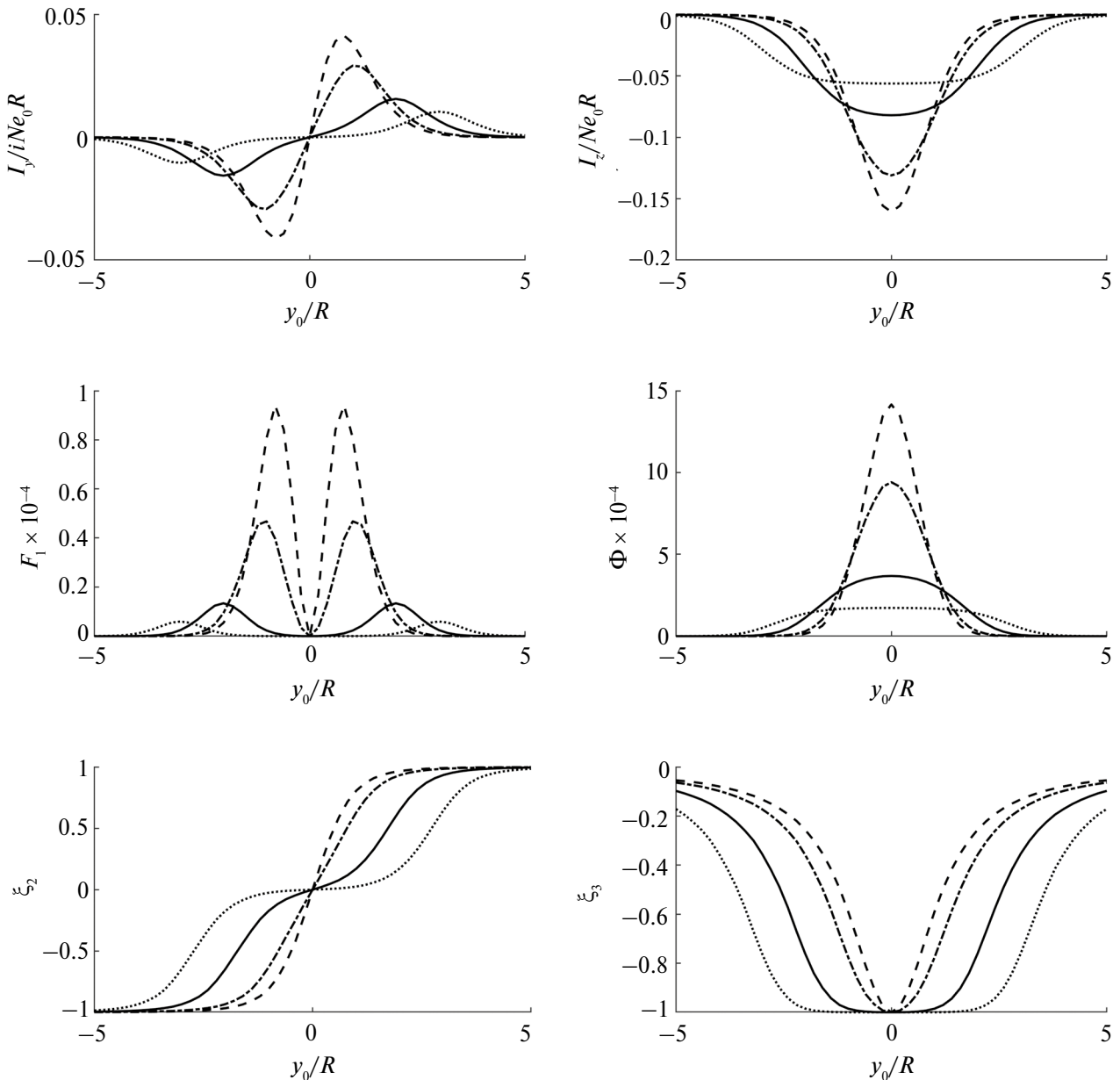
$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{I})(\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{I})^*}{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{I})(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{I})^* + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{I})(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{I})^*}. \quad (6)$$

Выражение его компонент через параметры Стокса [16] позволяет извлекать информацию о степени поляризации излучения:

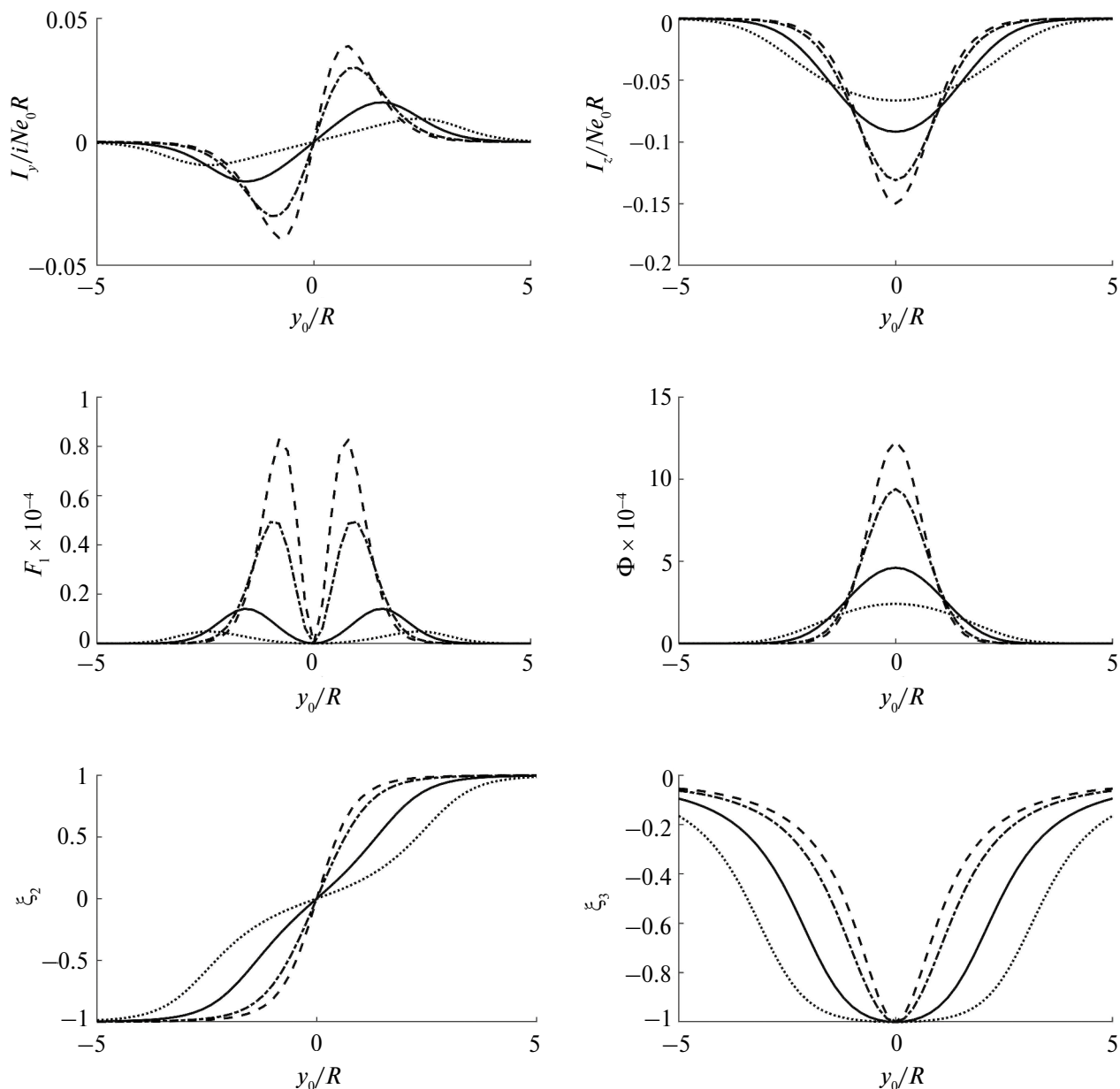
$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $\xi_1 = l \sin 2\phi$ ,  $\xi_2 = A$ ,  $\xi_3 = l \cos 2\phi$ ,  $l$  — степень максимальной линейной поляризации,  $\phi$  — угол между направлением максимальной линейной поляризации и вектором  $\mathbf{e}_1$ ,  $A$  — степень круговой поляризации.

В случае отдельной налетающей частицы подстановка (5) в (6) показывает, что  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ , т.е. излучение полностью поляризовано, в общем случае эллиптически, и линейно в плоскости, содержащей центр сферы и траекто-



**Рис. 3.** Характеристики дифракционного излучения прямоугольного однородного сгустка частиц на сфере в направлении  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = 0$  с размерами  $2a_x = R$ ,  $2a_y = 6R$  (пунктирная линия),  $4R$  (сплошная линия),  $2R$  (штрихпунктирная линия),  $R$  (штриховая линия). Прицельный параметр центра сгустка в направлении оси  $x$  равен  $x_0 = 1.6R$ , прицельный параметр центра сгустка в направлении оси  $y$  изображен на оси абсцисс, прочие параметры совпадают с параметрами на рис. 2.



**Рис. 4.** То же, что и на рис. 3, но для эллиптического однородного сгустка частиц, длины осей которого равны сторонам прямоугольного сгустка.

рию налетающей частицы (плоскость на рис. 1). С другой стороны, для направлений излучения, перпендикулярных этой плоскости и близких к ним (в весьма широких пределах), поляризация излучения будет близка к круговой (правой для  $y < 0$  и левой для  $y > 0$ , в зависимости от знака  $\xi_2$ ). Это создает принципиальную возможность для мониторинга траектории пролетающей частицы, подробно обсуждаемую в [9, 10, 17].

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим теперь когерентное излучение сгустка заряженных частиц, продольный размер

которого пренебрежимо мал по сравнению с поперечным (pancake-bunch), с функцией распределения плотности заряда  $Nn(x, y)$ , где  $N$  — полное число частиц в сгустке, а  $n(x, y)$  — нормированная на единицу функция:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(x, y) dx dy = 1.$$

В случае, когда размеры сгустка много меньше длины волны излучения, компоненты  $\mathbf{I}$ , описыва-

ющие когерентное излучение сгустка, могут быть найдены интегрированием (5) с функцией распределения:

$$I_j = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} I_i^{(j)}(x, y) n(x, y) dx dy.$$

В частности, для компоненты  $I_y$  после интегрирования по частям получим:

$$I_y = N \frac{4}{3} e_0 R^3 \frac{\omega^2}{v_0^2} i \frac{v_0}{\omega} \int K_0 \left( \frac{\omega}{v_0} \sqrt{x^2 + y^2} \right) \times \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} dx dy. \quad (8)$$

Подстановка компонент  $\mathbf{I}$  в (2) приводит к формулам для спектрально-угловой плотности когерентного излучения сгустка с определенной поляризацией:

$$\left( \frac{dE}{d\omega d\Omega} \right)_{\alpha} = \frac{\omega^2 N^2}{4\pi^2 c^3} |\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{I}|^2 \equiv \frac{e_0^2 N^2}{4\pi^2 c} F_{\alpha}, \quad (9)$$

и просуммированной по векторам поляризации:

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2 N^2}{4\pi^2 c^3} \sum_{\alpha=1}^2 |\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{I}|^2 \equiv \frac{e_0^2 N^2}{4\pi^2 c} \Phi, \quad (10)$$

где для удобства представления графиков выделены безразмерная функция  $F_{\alpha}$  и  $\Phi$ .

Из формулы (8) следует, что излучение, поляризованное в направлении оси  $y$ , будет максимальным, когда над верхней точкой сферы проходит максимум изменения плотности сгустка частиц вдоль этой оси (левая или правая граница сгустка). Это обстоятельство делает возможным детектирование краев сгустка.

В случае, когда детектор излучения располагается над верхней точкой сферы ( $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ ), единичные векторы поляризации будут равны  $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_z$ , а характеристики излучения, возникающего в этом направлении, для однородного сгустка прямоугольной и эллиптической форм представлены на рис. 3 и 4 соответственно. Видно, что максимум излучения, поляризованного в направлении оси  $y$ , будет наблюдаться при прохождении правого или левого краев сгустка над верхней точкой сферы, как это следует из (8). Таким образом, перемещая сферу и детектор и регистрируя

интенсивность поляризованного в направлении оси  $y$  излучения, можно неразрушающим образом найти положения левого и правого краев сгустка, а значит, определить его размер в этом направлении. Кроме того, появление значительной доли круговой поляризации излучения или существенное снижение величины линейной поляризации свидетельствует о близости края сгустка к верхней точке сферы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено когерентное дифракционное излучение короткого сгустка нерелятивистских заряженных частиц, пролетающего мимо проводящей сферы. Установлено, что в формулы, описывающие поляризационные характеристики такого излучения, входят производные по координатам от функции распределения плотности частиц в сгустке.

Таким образом, поляризация излучения сгустка оказывается чувствительной к положению его краев относительно плоскости, содержащей скорость частиц пучка, центр сферы и направление на детектор излучения. Это создает возможности для неразрушающей сгусток оценки его размеров и положения его краев.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотовский Б.М., Воскресенский Г.В.* // УФН. 1960. Т. 88. Вып. 2. С. 209. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0088.196602a.0209>
2. *Болотовский Б.М., Галстян Е.А.* // УФН. 2000. Т. 170. Вып. 8. С. 809. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0170.200008a.0809>
3. *Potylitsyn A.P., Ryazanov M.I., Strikhanov M.N., Tishchenko A.A.* Diffraction Radiation from Relativistic Particles (Springer Tracts in Modern Physics. Vol. 239). Berlin–Heidelberg: Springer, 2011. 278 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-12513-3>
4. *Potylitsyn A.P.* Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures (Springer Tracts in Modern Physics. Vol. 243). Berlin–Heidelberg: Springer, 2011. 213 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-19248-7>
5. *Shul'ga N.F., Syshchenko V.V., Larikova E.A.* // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B. 2017. V. 402. P. 167. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2017.03.013>

6. *Syshchenko V.V., Larikova E.A., Gladkikh Yu.P.* // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B*. 2017. V. 12. P. C12057. <https://doi.org/10.1088/1748-0221/12/12/C12057>
7. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 томах. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
9. *Shul'ga N.F., Syshchenko V.V.* // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B*. 2019. V. 452. P. 55. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2019.05.066>
10. *Сыщенко В.В., Ларикина Э.А.* // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2019. № 10. С. 108. <https://doi.org/10.1134/S0207352819100196>
11. *Singh R., Reichert T.* // *Phys. Rev. Accel. Beams*. 2022. V. 25. P. 032801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.032801>
12. *Singh R., Reichert T., Walasek-Hoehne B.* // *Phys. Rev. Accel. Beams*. 2022. V. 25. P. 072801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.072801>
13. *Аббасов И.И., Болотовский Б.М., Давыдов В.А.* // УФН. 1986. Т. 149. Вып. 4. С. 709. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198608f.0709>
14. *Базылев В.А., Жеваго Н.К.* Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. М.: Наука, 1987. 272 с.
15. *Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф.* Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: Наука, 1993. 344 с.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 томах. Т. 2. Теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022. 508 с.
17. *Сыщенко В.В., Тарновский А.И.* // Поверхность. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. 2023. № 3. С. 59. <https://doi.org/10.31857/S1028096023030160>

## Polarization of Diffraction Radiation of a Bunch of Charged Particles on a Metal Sphere

V. V. Syshchenko<sup>1,\*</sup>, A. I. Tarnovsky<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Belgorod National Research University, Belgorod, 308015 Russia*

*\*e-mail: syshch@yandex.ru*

Diffraction radiation is widely used for non-destructive diagnostics of charged particle beams. In the series of the previous works, a method was developed for describing the diffraction radiation of a non-relativistic particle on a perfectly conducting sphere, based on the method of images well-known from electrostatics. This method allows one to derive the analytic formulae for two main radiation characteristics, i.e. spectral angular density and polarization. The characteristic features of these values allow the possibility of developing, on their basis, new methods for monitoring the parameters of the trajectory of a moving particle in relation to the sphere center. In this work, formulae are obtained that describe the polarization of the coherent diffraction radiation on a metal sphere from a pancake-bunch of charged particles. It is shown that the polarization of the radiation in this case makes it possible to estimate the positions of the bunch edges relative to the center of the sphere. This can be used for the non-destructive measurement of the characteristic bunch dimensions.

**Keywords:** diffraction radiation, conducting sphere, method of images, polarization, particles monitoring, beam diagnostics.