

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Научная статья

УДК 517.925.42:574.34

ОПТИМИЗАЦИЯ ДОБЫЧИ ТРУДНОВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ РЕСУРСОВ

Е.В. Курилова, М.П. Кулаков

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН,
ул. Шолом-Алейхема 4, г. Биробиджан, 679016,

e-mail: katurilova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9104-1032>;

e-mail: k_matvey@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7060-2731>

На основе математической модели взаимодействующих популяций типа «хищник–жертва» проведено исследование потребления природных ресурсов из системы с медленным восстановлением добываемого ресурса. Предложенная модель учитывает насыщение численности хищника, воспроизводство которого ограничивается объемом доступной кормовой базы и способом ее потребления. Рассматривается задача оптимизации добычи хищника и жертвы. Показано, что существует оптимальная доля изъятия, которая обеспечивает максимальный доход при устойчивом развитии сообщества.

Ключевые слова: ресурсы, хищник–жертва, миграция, изъятие, оптимизация промысла.

Образец цитирования: Курилова Е.В., Кулаков М.П. Оптимизация добычи трудно возобновляемых ресурсов // Региональные проблемы. 2025. Т. 28, № 2. С. 24–28. DOI: 10.31433/2618-9593-2025-28-2-24-28.

В настоящее время одной из основных причин ухудшения состояния окружающей среды является нерациональное использование природных ресурсов. Как известно, многие виды ресурсов способны к восстановлению своей численности (плотности), но время восстановления их биомассы исчисляется разным сроком: от нескольких лет (животные и травянистые растения) до нескольких десятков или сотен (лесные массивы), а порой и тысяч (гумус) лет, причем скорость восполнения ресурса в значительной степени зависит от его текущего объема. Однако в связи с увеличением потребностей человечества скорость изъятия трудно возобновляемых ресурсов значительно превышает скорость восстановления, что приводит к их истощению. Таким образом, поиск оптимальных объемов потребления природных ресурсов в таких условиях является важным шагом к разработке стратегий рационального природопользования [2]. Одним из основных методов исследования таких процессов является математическое моделирование, позволяющее определить

оптимальный объем изъятия потребляемого ресурса, который сохраняет численность на устойчивом ненулевом уровне и не приводит в обозримой перспективе к исчерпанию ресурсов [5, 6, 8]. Кроме того, интересно оценить, как меняется объем добычи, в том числе оптимальный, в зависимости от характера взаимодействий в сообществе, способов потребления жертв хищниками, а также различных стратегий промысла.

Настоящая работа посвящена исследованию модели динамики потребления трудно возобновляемых природных ресурсов [4], основанной на принципах и подходах математического моделирования популяционных взаимодействий по типу «хищник–жертва» [1, 3]. Рассматривается локальное сообщество хищник–жертва, в котором восполнение биомассы жертвы происходит за счет постоянного притока особей с сопредельных территорий (или характерного для растений естественного восстановления) и не зависит от их текущей численности (рис. 1а) [5]. Темп восполнения кормовой базы значительно ниже скорости

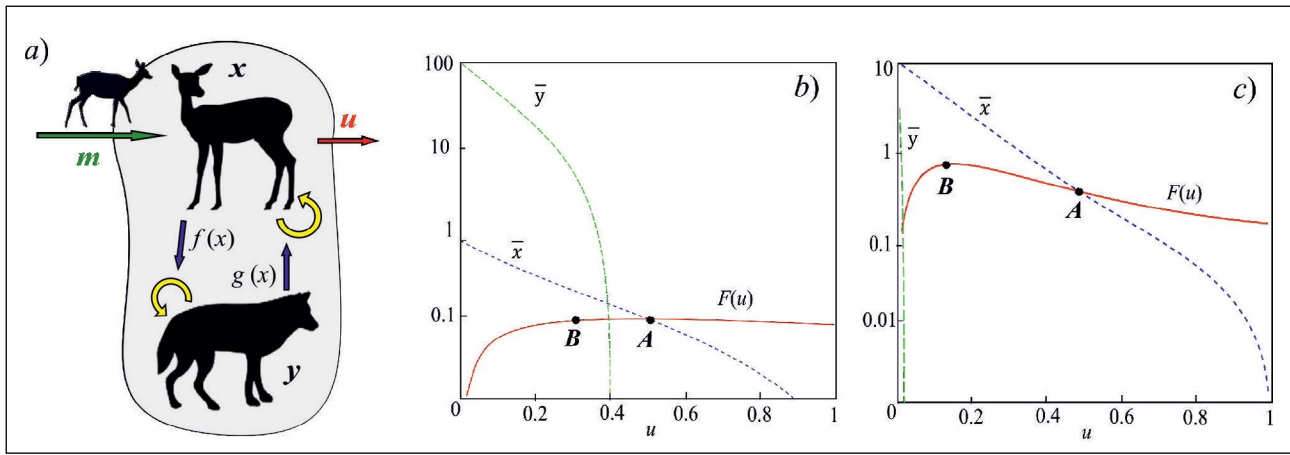


Рис. 1. а) Схематическое изображение модели локального сообщества «хищник–жертва» с постоянной скоростью восполнения добываемого ресурса; б)-с) объем изъятия $F(u) = ux$, стационарная численность хищника $\bar{y}$ и жертвы $\bar{x}$ в зависимости от доли изъятия u при $b = 0.003$, $\alpha = 0.002$, $\beta = 0.01$, $m = 0.2$; б) численность хищника превышает объем кормовой базы при $c_0 = 0.05$, $c_1 = 0.1$, в) численность хищника ниже численности жертв при $c_0 = 0.1$, $c_1 = 0.01$ (в обоих случаях на оси ординат использован логарифмический масштаб)

Fig. 1. а) Schematic diagram for a model of a local predator-prey community with a constant rate of the harvested resource replenishment; б)-с) withdrawal volume $F(u) = ux$, steady-state abundance of predator $\bar{y}$ and prey $\bar{x}$ as a function of the removals proportion u at $b = 0.003$, $\alpha = 0.002$, $\beta = 0.01$, $m = 0.2$; б) the predator outnumbers the prey at $c_0 = 0.05$, $c_1 = 0.1$, в) predator numbers are lower than prey numbers (logarithmic scale is used on the ordinate axis) at $c_0 = 0.1$, $c_1 = 0.01$

воспроизводства численности хищника. При этом процесс потребления происходит с насыщением, когда увеличение биомассы хищников не приводит к существенному возрастанию объемов потребления жертв, т.е. независимо от численности хищников даже при достаточно высоком объеме кормовой базы потребляется ограниченное количество добычи. Популяция хищников в свою очередь также имеет предел своего роста, ограниченного как численностью жертвы, так и границами ареала обитания. В результате без промыслового воздействия оба вида способны на устойчивое сосуществование [4].

Модель динамики численностей локального сообщества «хищник–жертва» с изъятием особей из популяции с медленным восстановлением добываемого ресурса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{bxy}{1+\beta y} + m - u x, \\ \frac{dy}{dt} = -c_0 y + \frac{c_1 x y}{1+\alpha y}, \end{cases} \quad (1)$$

где x – плотность популяции жертв (добываемого ресурса), y – плотность популяции хищников, b – коэффициент, отражающий зависимость скорости

потребления жертв от численности хищников, m – постоянная скорость восполнения численности жертв, c_0 – постоянная, характеризующая скорость снижения численности хищников в условиях отсутствия ресурсов (при $x = 0$), c_1 – коэффициент, отражающий зависимость прироста численности хищников от количества и доступности жертв, параметры α и β характеризуют процессы насыщения численности хищника и потребления жертв соответственно, u – относительная скорость изъятия (промысла) жертвы.

В работе [4] было показано, что в модели (1) постоянное устойчивое потребление ($b > 0$) хищниками жертв в условиях отсутствия промысла (при $u = 0$), которое обеспечивает их сосуществование, возможно при выполнении следующих условий:

- умеренный прирост численности хищников за счет потребления жертв ($c_0 < c_1$);
- постоянная скорость восстановления численности жертв ($m > 0$).

Модель (1) при $u=0$ описывает устойчивое потребление жертв хищником при всех положительных значениях коэффициентов, которые соот-

ветствуют двум типам динамического поведения: «монотонное» – устойчивый узел или «колебательное» – устойчивый фокус либо устойчивый предельный цикл. Монотонный вариант потребления кормовой базы хищником предполагает постоянную скорость восстановления и потребления ее биомассы, колебательный – отражает повторяющиеся спады и подъемы потребления.

В случае отсутствия промысла при сравнении значений коэффициентов b/β и c_1/α модели (1) можно сделать вывод об эффективности потребления хищником биомассы жертвы или ее перевода в собственную биомассу. Когда $c_1/\alpha \geq b/\beta$, способ потребления жертв хищником является эффективным, то есть небольшое увеличение скорости потребления кормовой базы приводит к быстрому росту численности хищников, когда $c_1/\alpha \leq b/\beta$, можно говорить о неэффективном потреблении жертв. Такой способ потребления приводит к снижению численности хищников при увеличении скорости поглощения биомассы жертв [4, 5].

Кроме того, обнаружено, что рассматриваемая модель при $u=0$ содержит в себе как простые устойчивые режимы, так и быстро-медленную колебательную динамику, соответствующую максимальному предельному циклу, состоящему из резких скачков и более плавного падения численности. Появление подобных режимов соответствует чередованию периодов активного истребления жертвы, сопровождаемого ростом численности хищников, и периодов длительного восстановления численности жертв, в течение которого их добыча практически не осуществляется.

В системе (1) изъятие осуществляется из популяции жертв с долей u от текущей численности $x(t)$. В результате объем изъятия за единицу времени равен (между моментами τ и $\tau+1$):

$$F(u) = \int_{\tau}^{\tau+1} u x(u, t) dt.$$

В данной работе рассматривается промысел в стационарном (равновесном) состоянии популяции. Тогда объем изъятия равен величине:

$$F(u) = u\bar{x}.$$

В случае изъятия особей ($u > 0$) из популяции с медленным восстановлением численности возможны два варианта развития рассматриваемого сообщества, отличающиеся соотношением параметров естественной смертности и восполнения (рис. 1б-с).

Первый случай (рис. 1б) отражает ситуацию, при которой на рассматриваемой территории существует популяция крупной жертвы (напри-

мер, северный олень, изюбр и т.д.), масса тела которых превосходит массу тела хищника (например, волка). В этом случае хищнику требуется относительно небольшой объем жертв, а устойчивое развитие сообщества возможно даже при небольшом превышении численности хищника над численностью жертв. Очевидно, в системе (1) это возможно из-за постоянного притока новых особей с сопредельных территорий (медленного восстановления). Благодаря этому даже существенная доля промыслового изъятия ($u < 0.5$) жертвы не способна дестабилизировать общую динамику сообщества. В этом случае существует доля изъятия (точка B на рис. 1б), обеспечивающая максимальный доход от промысла при сосуществовании обоих видов. В результате промысла текущая стационарная численность жертвы плавно снижается, так как восполнение ее биомассы происходит очень медленно. Хищник при этом быстро реагирует на изменение численности жертв, что приводит к резкому уменьшению его численности. Увеличение объема промысла (превосходящего долю оптимального изъятия (точка B)) способствует уменьшению биомассы жертв ниже уровня, необходимого для пропитания хищников, что приводит к вырождению их популяции. Другими словами, кривая объема изъятия $F(u)$ имеет насыщение в точке B , после которой увеличение доли изымаемых особей не приводит к увеличению объемов промысла (доход), однако приводит к резкому падению численностей обеих популяций. Если же доля изъятия не превышает этого значения, то промысел будет стабилизировать общую динамику системы (1). При значительном превышении доли изъятия сверх оптимального значения численность жертв падает до труднодоступного уровня, что, в свою очередь, ведет к вырождению популяции хищника.

Во втором случае на рассматриваемой территории обитает мелкий, но многочисленный вид жертвы (например, популяции криля, морских рыб), превосходящий своей биомассой численность хищника (китообразных, тюленей, морских котиков) (рис. 1с). В этом случае для хищника необходим большой объем кормовой базы, которая оказывается для него труднодоступной, но критически важной для выживания. В этом случае промысловик жестко «конкурирует» с хищником за жертву. В результате хищник будет остро реагировать даже на небольшое изъятие жертв, снижая численность вплоть до полного вырождения популяции. Вместе с тем для лишенной «естественного» хищника жертвы улучшаются условия

существования и небольшой промысел (не превосходящий оптимальной доли изъятия (точка B на рис. 1с)) выступает как лимитирующий фактор, сдерживающий рост ее численности. Объем изъятия $F(u)$ достигает максимума в точке B (рис. 1с), соответствующей оптимальной доле изъятия, при пересечении которой рентабельность (доход) промысла существенно снижается.

В каждом из двух случаев при доле изъятия $u = 0.5$ в популяции жертв остается ровно половина изъятых особей (точка A на рис. 1б-с). В результате при столь интенсивном промысле (и некотором превышении доли $u = 0.5$) медленно-восстанавливающая популяция жертв может быстро достичь низких численностей и будет быстро истреблена при некотором превышении доли $u > 0.5$. Вместе с тем, поскольку она существует лишь за счет притока с сопредельных территорий, то после прекращения промысла она все же медленно восстановится. Однако это не приведет к самостоятельному восстановлению хищника.

В результате исследования показано, что небольшая доля изъятия особей из популяции крупной жертвы с медленной скоростью восстановления в целом стабилизирует общую динамику рассматриваемого сообщества «хищник–жертва», однако превышение этой доли сверх оптимального значения приводит к вымиранию хищников на данной территории и падению численности жертвы до труднодоступного уровня (рис. 1б). При этом даже небольшой промысел многочисленных особей мелкой жертвы из кормовой базы хищников дестабилизирует динамику взаимодействующих популяций и приводит к полному исчезновению популяции хищников.

Таким образом, сравнительно простая модель позволяет провести качественное исследование эффектов промысла из системы «хищник–жертва» с медленным восстановлением жертв, получить оценки эффективности промысла, а также описать возможные сценарии развития рассматриваемого сообщества для разного объема изымаемого ресурса.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М.: Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. 368 с.
2. Волдеаб М.С., Родина Л.И. О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 137. С. 16–26. DOI: 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26.

3. Кириллов А.Н., Иванова А.С. Метод касательного управления системой «хищник–жертва» // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2025. Т. 18, № 1. С. 15–34. DOI: 10.14529/mmp250102.
4. Курилова Е.В., Кулаков М.П., Фрисман Е.Я. Моделирование динамики потребления трудно возобновляемых ресурсов // Информатика и системы управления. 2023. Т. 2, № 76. С. 18–32. DOI: 10.22250/18142400_2023_76_2_18.
5. Курилова Е.В., Фрисман Е.Я. Моделирование динамики взаимодействующих популяций типа «хищник–жертва» при постоянной миграции особей с сопредельных территорий // Региональные проблемы. 2024. Т. 27, № 1. С. 62–77. DOI: 10.31433/2618-9593-2024-27-1-62-77.
6. Неверова Г.П., Абакумов А.И., Фрисман Е.Я. Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования // Математическая биология и биоинформатика. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–13. DOI: 10.17537/2016.11.1.
7. Ревуцкая О.Л., Неверова Г.П., Фрисман Е.Я. Влияние промыслового изъятия на динамику популяций с возрастной и половой структурой // Математическая биология и биоинформатика. 2018. Т. 13, № 1. С. 270–289. DOI: 10.17537/2018.13.270.
8. Фрисман Е.Я., Ласт Е.В. Нелинейные эффекты в популяционной динамике, связанные с возрастной структурой и влиянием промысла // Известия Российской академии наук. Серия биологическая. 2005. № 5. С. 517–530. EDN: HTAIGJ.

REFERENCES:

1. Bazykin A.D. *Nelineinaya dinamika vzaimodeistvuyushchikh populyatsii* (Nonlinear dynamics of interacting populations). Moscow: Izhevsk: Institute of Computer Research, 2003. 368 p. (In Russ.).
2. Woldeab M.S., Rodina L.I. About the methods of renewable resource extraction from the structured population. *Vestnik rossiiskikh universitetov. Matematika*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 16–26. (In Russ.). DOI: 10.20310/2686-9667-2022-27-137-16-26.
3. Kirillov A.N., Ivanova A.S. Method of Tangential Control of “Predator-Prey” System. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i pro-*

- grammirovanie*», 2025, vol. 18, no. 1, pp. 15–34. (In Russ.). DOI: 10.14529/mmp250102.
4. Kurilova E.V., Kulakov M.P., Frisman E.Ya. Modeling the Dynamics of Hard-To-Renew Resources Consumption. *Informatika i sistemy upravleniya*, 2023, vol. 2, no. 76, pp. 18–32. (In Russ.). DOI: 10.22250/18142400_2023_76_2_18.
 5. Kurilova E.V., Frisman E.Ya. Modeling the Dynamics of Interacting Predator-Prey Populations with Constant Migration of Individuals from Adjacent Territories. *Regional'nye problemy*, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 62–77. (In Russ.). DOI: 10.31433/2618-9593-2024-27-1-62-77.
 6. Neverova G.P., Abakumov A.I., Frisman E.Ya. Dynamic Modes of Exploited Limited Population: Results of Modeling and Numerical Study. *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika*, 2016, vol. 11, no. 1, pp. 1–13. (In Russ.). DOI: 10.17537/2016.11.1.
 7. Revutskaya O.L., Neverova G.P., Frisman E.Ya. Influence of Harvest on the Dynamics of Populations with Age and Sex Structures. *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika*, 2018, vol. 13, no. 1, pp. 270–289. (In Russ.). DOI: 10.17537/2018.13.270.
 8. Frisman E.Ya., Last E.V. Nonlinear Effects on Population Dynamics Related to Age Structure and Fishery Impact. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Seriya biologicheskaya*, 2005, no. 5, pp. 517–530. (In Russ.). EDN: HTAIGJ.

OPTIMIZATION OF HARD-TO-RENEW RESOURCES EXTRACTION

E.V. Kurilova, M.P. Kulakov

Based on a mathematical model of the predator-prey type interacting populations, we have investigated consumption of natural resources in a system with slow recovery of harvested resource. The proposed model incorporates the saturation effect in the predator population, whose reproduction is limited by the volume of available food and the way of its consumption. The focus of the study is on the problem of optimizing predator and prey production. It is shown that there is an optimal withdrawal rate that ensures maximum income with the sustainable development of the community.

Keywords: resources, predator-prey, migration, removals, optimization of harvesting.

Reference: Kurilova E.V., Kulakov M.P. Optimization of hard-to-renew resources extraction. *Regional'nye problemy*, 2025, vol. 28, no. 2, pp. 24–28. (In Russ.). DOI: 10.31433/2618-9593-2025-28-2-24-28.

Поступила в редакцию 17.05.2025

Принята к публикации 17.06.2025