

УДК 372.851
<https://doi.org/10.23951/1609-624X-2023-5-137-145>

Управление пониманием математических феноменов в условиях цифровизации

Юрий Борисович Мельников¹, Тимур Дилишодович Ахматов², Тимофей Дмитриевич Данилов³

¹⁻³ *Уральский государственный экономический университет, Екатеринбург, Россия*

¹ *yu.b.melnikov@yandex.ru*

² *t.akhmatovya@yandex.ru*

³ *t.danilov2.0@list.ru*

Аннотация

Учебно-математическая деятельность обычно не требует сложных в использовании инструментов, труднодоступных ресурсов и т. п. Поэтому обучение математической деятельности практически полностью сводится к обучению управлению обработкой информации.

Автором выделены три уровня обработки математической информации: уровень типовых алгоритмов (например, вычисление значения арифметической операции), уровень типовых стратегий математической деятельности (например, решение уравнений) и уровень методологии (например, самостоятельный выбор математического языка, на котором осуществляется решение или будет формулироваться ответ к задаче). Работа на уровне типовых алгоритмов и простейших стратегий деятельности может проводиться без глубокого понимания рассматриваемых и используемых феноменов. Но работа на уровне стратегий, а тем более на уровне методологии уже требует понимания. На основе анализа литературы и анализа опыта обучения математике, понимаемого как обучение реализации стратегий деятельности, термин «понимание» предлагается трактовать как систему ассоциаций с математическим феноменом, т. е. понятием, теоремой, стратегией, решением и т. д. При формально-конструктивной интерпретации модели рассмотренная трактовка понимания включает в себя «создание смыслов» и другие составляющие понимания.

Для контроля полноты системы ассоциаций предложено применить классификацию ассоциаций: 1) ассоциации с феноменом как с предметом или продуктом деятельности моделирования (с прототипом, с образом, с интерфейсом, т. е. системой обмена информацией между прототипом и образом); 2) ассоциации с феноменом как с инструментом или операциями (содержит несколько подпунктов); 3) ассоциации с феноменом как с системой управления деятельностью и ее компонентами (с мотивом деятельности, с типовыми целями, с типовыми стратегиями и, в частности, алгоритмами, с системами оценивания адекватности модели). Указаны условия успешности формирования у обучаемых (учащихся, студентов, слушателей курсов и т. д.) приоритетных ассоциаций: 1) корректировка учебно-методического обеспечения; 2) корректировка контрольно-измерительных материалов; 3) целенаправленное формирование базовых ассоциаций и, в частности, обучение переводу информации на разные математические языки; 4) многоаспектное и многоплановое позиционирование изучаемых феноменов относительно уже усвоенной информации (изучаемые математические феномены ввиду их абстрактности можно трактовать как информацию).

Ключевые слова: *понимание, модель, математический феномен, ассоциация с математическим феноменом, классификация ассоциаций*

Для цитирования: Мельников Ю. Б., Ахматов Т. Д., Данилов Т. Д. Управление пониманием математических феноменов в условиях цифровизации // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2023. Вып. 5 (229). С. 138–146. <https://doi.org/10.23951/1609-624X-2023-5-138-146>

Managing the understanding of mathematical phenomena in the context of digitalization

Yuri B. Melnikov¹, Timur D. Akhmatov², Timofey D. Danilov³

¹⁻³ *Ural State University of Economics, Yekaterinburg, Russian Federation*

¹ *yu.b.melnikov@yandex.ru*

² *t.akhmatovya@yandex.ru*

³ *t.danilov2.0@list.ru*

© Ю. Б. Мельников, Т. Д. Ахматов, Т. Д. Данилов, 2023

Abstract

Teaching mathematical activity is almost completely reduced to learning how to manage information processing. The author identifies three levels of mathematical information processing: the level of typical algorithms (for example, calculating the value of an arithmetic operation), the level of typical strategies (for example, solving equations) and the level of methodology (for example, the choice of a mathematical language for solving a task). Work at the level of typical algorithms and the simplest strategies of activity can be carried out without a deep understanding of the phenomena involved. But work at the level of strategies, and even more so, at the level of methodology, already requires understanding. We propose to interpret the term “understanding” as a system of associations with a mathematical phenomenon, i.e., concept, theorem, strategy, decision, etc. With a formal-constructive interpretation of the model, the considered interpretation of understanding includes the “creation of meanings” and other components of understanding. To control the completeness of the system of associations, it is proposed to apply the classification of associations with a phenomenon: 1) as an object or product of modeling activity (prototype, image and an interface, i.e. a system of information exchange between a prototype and an image); 2) as with a tool or operations; 3) as the management system and its components (with the motive of activity, with typical goals, with typical strategies and, in particular, algorithms, with systems for evaluating the adequacy of the model). The conditions for the success of the formation of priority associations among students are indicated: 1) adjustment of educational and methodological support; 2) adjustment of control and measuring materials; 3) purposeful formation of basic associations and, in particular, learning to translate information into different mathematical languages; 4) multi-aspect positioning of the studied phenomena relative to the information already learned by the student.

Keywords: *understanding, model, mathematical phenomenon, association with a mathematical phenomenon, classification of associations*

For citation: Melnikov Yu. B., Akhmatov T. D., Danilov T. D. Upravleniye ponimaniyem matematicheskikh fenomenov v usloviyakh tsifrovizatsii [Managing the understanding of mathematical phenomena in the context of digitalization]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Tomsk State Pedagogical University Bulletin*, 2023, vol. 5 (229), pp. 137–145 (in Russ.). <https://doi.org/10.23951/1609-624X-2023-5-137-145>

Введение

Цифровизация практически всех областей деятельности, и в частности внедрение цифровых систем управления и систем поддержки управленческих (и педагогических) решений, требует пересмотра трактовки многих привычных понятий, конкретизации их определений, приспособления к использованию в цифровой среде. В данной работе мы рассмотрим трактовку термина «понимание», адаптированную к использованию в информационных системах.

Цель работы – формализовать понятие «понимание» таким образом, чтобы его можно было эффективно использовать в цифровой среде для контроля качества понимания учебного материала и использования знаний для работы с учебным материалом не только на уровне алгоритмов, но и на уровне типовых стратегий и, в перспективе, на уровне методологии.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

- 1) проанализировать традиционные трактовки понятия «понимание»;
- 2) на основе анализа литературы и практики обучения математике сформировать трактовку термина «понимание», адаптированную к использованию в цифровой среде;
- 3) разработать механизм контроля полноты понимания феномена;
- 4) определить условия для продуктивного применения предложенной трактовки в учебном процессе.

Как в условиях цифровизации система поддержки принятия педагогических решений будет оценивать уровень и качество понимания изучаемого материала? Например, на наш взгляд, «классификация Блума» не очень хорошо приспособлена к применению в информационных системах. Требование «сказать то же самое другими словами», во-первых, не позволяет оценить «глубину понимания», во-вторых, практически неприменимо к работе в цифровой среде (вариант «отметить в данном списке утверждение, равносильное исходному» нам представляется явно недостаточным).

Можно ли считать, что ученик понял, что такое обыкновенная дробь, если он не может изобразить на числовой оси число $9/4$? Или если он не знает, что это число можно записать как $18/8$ и как $2\frac{1}{4}$? А если он не умеет вычислять сумму и произведение дробей, представлять число в виде суммы целого числа и правильной дроби? А если он не знает, что $2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$ и т. д.? Поэтому процесс усвоения понятия обыкновенной дроби можно трактовать как процесс формирования разнообразных связей этого понятия с другими феноменами, включая усвоение необходимых алгоритмов, свойств, отношений.

Феномен «понимание» исследуется средствами философии [1, 2], педагогической науки [3, 4], психологии [5, 6], филологии [7–9].

В филологических науках особое внимание уделяется процессу понимания иностранных текстов [10]. В психологических исследованиях отмечается многозначность понимания: «Любое понимание

многовариантно, оно потенциально содержит в себе несколько возможных интерпретаций одних и тех же событий и ситуаций» [6].

Отметим, что словом «понимание» называют как процесс (преподаватель организует понимание студентами учебного материала), так и результат этого процесса (мы добились понимания определения тензора). Например, «понимание» как процесс трактуется в философском энциклопедическом словаре [11]: «Понимание – универсальная операция мышления, представляющая собой оценку объекта (текста, поведения, явления природы) на основе некоторого образца, стандарта, нормы, принципа и т. п.». К этой же интерпретации относится «акт понимания», рассматриваемый как компонент процесса обучения [4, с. 131].

Результаты и обсуждение

Созданная Ю. Б. Мельниковым теория основана на алгебраическом подходе к построению модели, по нашему мнению [12], представляющем систему из трех компонентов: 1) системы базовых моделей; 2) совокупности типовых преобразований и типовых комбинаций моделей; 3) механизма аппроксимирования, предназначенного для представления модели в виде результата (вообще говоря, приближенного) применения типовых преобразований и типовых комбинаций базовых моделей. Как реализацию алгебраического подхода к моделированию можно трактовать работы по выражению понимания предложения в целом через понимание его составных частей [13]. Реализация алгебраического подхода к моделированию основана на предложенной Ю. Б. Мельниковым [14] формально-конструктивной трактовке модели как системы из двух компонентов: интерфейсного (его формирование изучается герменевтикой [15]) и модельно-содержательного, представленной на рис. 1.

Математическая деятельность обычно не требует специального сырья и инструментов (кроме простейших). Поэтому обучение математике – это обучение управлению деятельностью. Одна из построенных нами моделей управления позволила выделить три уровня управления математической

деятельностью: 1) уровень типовых алгоритмов (например, вычисление производной функции); 2) уровень типовых стратегий математической деятельности (например, вычисление интеграла); 3) уровень методологии (например, самостоятельное формирование понятия или субъективно нового метода). На уровне типовых алгоритмов глубокое понимание обычно не требуется, как и в случае сравнительно несложных реализаций стратегий, известных субъекту деятельности, но без понимания недостижим более высокий уровень управления деятельностью. Отметим, что эти уровни управления применимы и к управлению пониманием, что согласуется с результатами психологических и филологических исследований [16].

Работа с информацией на уровне стратегий, а тем более на уровне методологии требует высокого уровня понимания, т. е. достаточно развитой системы ассоциаций. Например, рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A в два раза меньше, чем до точки B , находящейся на расстоянии 3 от A .

Приоритетными ассоциациями с требованием задачи 1 являются (учитывая, что рассматривается фигура в плоскости), во-первых, варианты языка, на котором может быть сформулирован ответ: язык классической евклидовой геометрии, язык аналитической геометрии; во-вторых, допустимые шаблоны ответа: представление искомой фигуры в виде комбинации классических фигур школьного курса планиметрии (частей прямых, дуг окружностей и частей плоскости, ограниченных замкнутыми линиями указанного вида), результатом преобразования тел, поверхностей и линий в пространстве (сечения их плоскостями, проекциями на плоскости, разверткой поверхностей), в виде уравнения или системы параметрических уравнений в некоторой системе координат (не обязательно прямоугольной декартовой, ответ может быть представлен, например, в полярной системе координат), в виде координатной линии некоторой криволинейной системы координат.

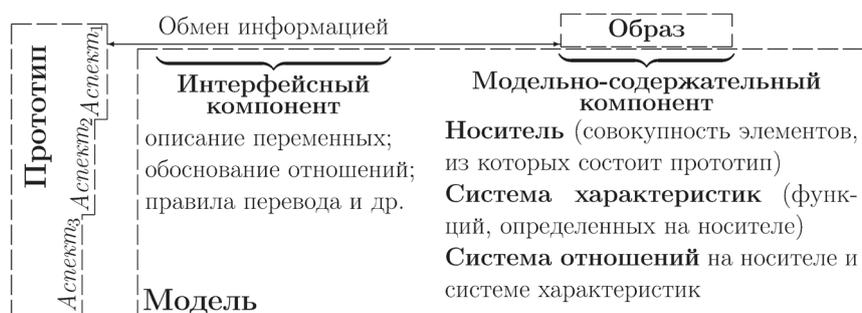


Рис. 1. Формально-конструктивная трактовка модели

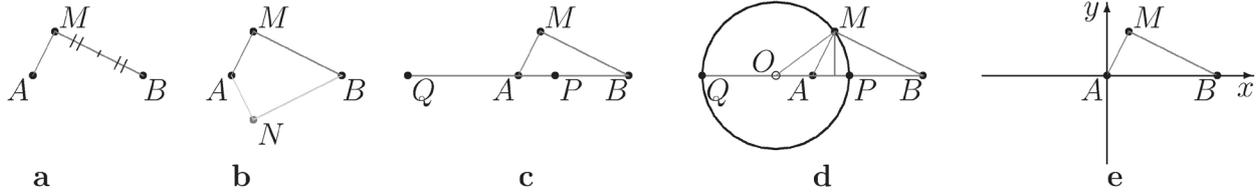


Рис. 2. Иллюстрация к задаче

Отметим, что условие задачи может быть представлено с использованием языка геометрических чертежей.

В рассматриваемом случае ответ будет сформулирован на языке планиметрии, т. е. шаблон ответа будет представлять описание искомой линии в виде комбинации традиционных линий школьного курса геометрии, т. е. частей прямой и дуг окружностей. Ясно, что искомая линия не является прямой, поэтому можно предположить, что искомая линия может оказаться окружностью. Для того чтобы шаблон ответа преобразовать в конкретную линию, учтем, что окружность определяется ее центром и радиусом (или диаметром). Большую роль в описании фигур играют соображения симметрии. В данном случае очевидна симметричность искомой фигуры относительно оси AB (см. рис. 2, b). Поэтому центр предполагаемой окружности находится на этой оси. Для нахождения центра окружности можно применить стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций [12], например, рассмотреть точку P , расстояние от которой до A и B минимально, и точку Q , расстояние от которой до A и B максимально (см. рис. 2, c). Отсюда нетрудно вычислить, что радиус окружности должен быть равным 2, а ее центр находится на прямой AB на расстоянии 1 от A и расстоянии 3 от B . Наконец, остается доказать, что точки данной окружности, и только они, удовлетворяют требованию задачи (см. рис. 2, d).

Если же обучаемый владеет основами векторной алгебры, решение представляет собой применение несложной стратегии. На первом этапе следует ввести систему координат (см. рис. 2, e). На втором этапе – взять произвольную точку искомой фигуры и обозначить ее координаты, например через x и y . На третьем этапе составить уравнение, переписав в координатной форме, например, равенство $MB = 2AM$. В итоге после несложных выкладок получаем $(x + 1)^2 + y^2 = 4$. Ответ можно оставить в таком виде, но можно и привести геометрическую интерпретацию.

Мы будем считать, что процесс понимания феномена состоит в формировании разнообразных ассоциаций с этим феноменом. Эта трактовка позволяет управлять процессом понимания посредством целенаправленного формирования необходимых ассоциаций и диагностирования уровня

сформированности соответствующих ассоциаций. В случае когда в роли феномена выступает понятие, то данная трактовка понимания согласуется с ассоциативной теорией формирования понятий (Дж. Локк, Ф. Гальтон).

С одной стороны, данная трактовка понимания согласуется с ассоциативно-рефлекторной теорией обучения (Ю. А. Самарин, Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская, П. А. Шеварев) теориями усвоения знаний [17]. С другой стороны, на первый взгляд, эта трактовка возвращает нас к позиции отечественной психологии 1940–50-х гг., когда понимание воспринималось как отражение связей, отношение предметов и явлений реального мира. В настоящее время компонент «понимания» считается, в частности, усвоение смысла феномена. Но на самом деле «способность понять смысл» означает либо формирование системы моделей данного феномена в формально-конструктивной трактовке этого термина (см. рис. 1), в частности формирование интерфейсного компонента, либо позиционирование рассматриваемого феномена в системе феноменов, например вариантов использования этого феномена в качестве инструмента, предмета деятельности, возможного продукта деятельности и т. д. Еще В. Дильтей (1833–1911) отмечал связь понимания с оценкой, что может означать либо формирование отношения частичного порядка на некоторой совокупности феноменов (т. е. построение иерархии феноменов), либо создание системы функций, сопоставляющих данному феномену некоторое значение – отметку на некоторой шкале. В последнем случае эта шкала формируется путем сравнения феноменов с некоторыми феноменами, которые принимаются за эталон, что в большинстве случаев можно трактовать как формирование системы характеристик адекватности [14]. Поэтому формирование оценок феномена тоже следует считать ассоциацией с исходным феноменом. Таким образом, в случае использования теории моделирования, основанной на формально-конструктивном определении модели, трактовка понимания как системы ассоциаций с феноменом (понятием, теоремой, методом и др.) фактически включает в себя другие интерпретации термина «понимание».

Для того чтобы управлять процессом формирования ассоциаций, преподаватель и разработчик

учебников должен знать достаточно полный список ассоциаций. Один из вариантов формирования такого списка для каждого из рассматриваемых феноменов состоит в использовании различных классификаций связей между феноменами. Например, Ю. А. Самарин в теории ассоциативных связей в основу классификации положил уровень системности. Он выделил четыре уровня ассоциаций и систем, в которых проявляется системно-динамический характер ассоциированных между собой психических процессов: 1) локальные ассоциации (практически несистематизированные); 2) ограниченно-системные, или частно-системные; 3) внутрисистемные, или внутрипредметные (пространственные, временные, отношение последовательности, причинно-следственные); 4) межсистемные или межпредметные [18, с. 382]. Предлагаются и другие варианты оценивания уровня понимания. «Анализ различных подходов к понятию „уровень понимания“ позволил построить и обосновать шкалу понимания. При оценке уровня понимания нами используется порядковая шкала, которая содержит следующие ступени (или уровни): нулевой (уровень непонимания), первый (поверхностный, или уровень узнавания), второй (индуктивный, или уровень воспроизведения), третий (уровень осмысленного понимания), четвертый (уровень внутреннего понимания)» [19, с. 87]. Рассматриваются инструменты оценивания уровня понимания, например опросник «Понимание научного текста» [20]. В филологии обычно рассматривается бинарная оценка уровня понимания: «понимает – не понимает» [21].

С этой точки зрения теорию поэтапного формирования умственных действий (П. Я. Гальперин) можно рассматривать как один из механизмов формирования отношений между ассоциациями и превращения ассоциаций в компонент системы управления деятельностью. Важным элементом этой деятельности является выделение приоритетных ассоциаций. Например, для успешного поиска решения геометрических задач на вычисление важно, чтобы, скажем, с прямоугольным треугольником приоритетными были следующие ассоциации: 1) теорема Пифагора; 2) прямой угол; 3) тригонометрия (тригонометрические функции имеют естественную геометрическую интерпретацию в прямоугольном треугольнике); 4) описанная окружность (ее центр совпадает с центром гипотенузы); 5) площадь треугольника (это половина произведения длин катетов).

В теории и практике обучения важную роль играет выделение объективных и субъективных ассоциаций. Мы будем считать ассоциацию объективной, если эта ассоциация является общепринятой в обществе (или некотором сообществе: профессио-

нальном, сообществе членов некоторого клуба и т. д.). Например, у всех выпускников школ с понятием «параллельные прямые» должны ассоциироваться, в частности, феномены «параллелограмм», «трапеция», «равенство накрест лежащих углов», т. е. перечисленные ассоциации являются объективными. Ассоциацию назовем субъективной, если она не характерна для определенного общества в целом и распространена только в некоторой его части или она возникла у отдельного субъекта. Например, если у кого-то равнобедренный треугольник ассоциируется с «любовным треугольником», то эта ассоциация является субъективной.

Предлагаемая нами классификация ассоциаций основана на теории деятельности (А. Н. Леонтьев и соавт.) с учетом формально-конструктивной трактовки модели (см. рис. 1) и нашей теории адекватности [14].

1. Ассоциации с феноменом как с предметом или продуктом деятельности моделирования:

1.1) ассоциация с прототипом некоторой модели (ассоциации с определенными аспектами прототипа, с прямым¹ и косвенным² заданием прототипа и т. д.);

1.2) ассоциация с образом некоторого прототипа (эндоструктурным³ и экзоструктурным⁴ представлением прототипа, априорными, актуальными и апостериорными моделями и т. д.);

1.3) ассоциация с интерфейсом или его компонентом (например, ассоциация с правилом перевода с одного математического языка на другой [22]).

2. Ассоциации с феноменом как с инструментом или операциями деятельности моделирования:

2.1) ассоциация с феноменом как инструментом, например, представление линии в виде тонкой нити, которую можно использовать для приближенного измерения длины линии и даже для измерения величины угла (измеряемого в радианах);

2.2) ассоциация с феноменом как основой для операции над объектом, его преобразования (например, теорема Пифагора и обратная к ней ассоциируется с методом вычисления длины отрезка или доказательства, что данный угол является прямым);

¹ Представление с описанием его устройства, взаимодействия составных частей или конструктивное его выражение через другие феномены (в некотором смысле соразмерные исходному).

² Представление феномена как компонента или элемента других феноменов, через описание его свойств в терминах, в которых представлены эти другие феномены.

³ Представление прототипа как комбинации его составных частей (компонентов, элементов), причем взаимодействие с другими феноменами либо игнорируется, либо предельно формализуется.

⁴ Такое представление прототипа, при котором раскрываются его связи с другими феноменами.

2.3) ассоциации с феноменом в рамках рассмотренного выше алгебраического подхода к моделированию:

2.3.1) с элементом или подсистемой системы базовых элементов;

2.3.2) либо с типовым преобразованием или типовой комбинацией феноменов, либо подсистемой преобразований и комбинаций;

2.3.3) с частью механизма аппроксимирования.

3. Ассоциации с феноменом как с системой управления деятельностью и ее компонентами:

3.1) ассоциации с мотивами деятельности (например, наличие «экстремальности» у рассматриваемого феномена как повод для углубленного его изучения (см. стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций [12]));

3.2) ассоциации с типовыми целями деятельности;

3.3) ассоциации с типовыми стратегиями и, в частности, алгоритмами деятельности;

3.4) ассоциации с системами оценивания адекватности.

Применение предложенной трактовки термина «понимание» в учебном процессе позволило сделать ряд предварительных выводов об условиях успешности формирования необходимых ассоциаций.

Во-первых, требуется корректировка учебно-методического обеспечения. В нем следует уделить значительно больше внимания переводу с одного математического языка на другой, формированию разнообразных ассоциаций, например в соответствии с приведенной выше классификацией ассоциаций. К сожалению, сегодня не редкость пособия, авторы которых в основном ограничиваются описанием понятий и алгоритмов. Но ассоциацию с формулой для вычисления скалярного произведения с помощью координат, т. е. с формулой $\vec{u}\vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v$, проще сформировать посредством одной из базовых ассоциаций с понятием «координаты вектора» $u(x_u; y_u) = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}$ и с линейностью скалярного произведения. В результате достаточно буквально один-два раза самостоятельно воспроизвести выкладки

$$\begin{aligned} \vec{u}\vec{v} &= (x_u\vec{i} + y_u\vec{j})(x_v\vec{i} + y_v\vec{j}) = \\ &= x_u \cdot x_v\vec{i}\vec{i} + x_u \cdot y_v\vec{i}\vec{j} + y_u \cdot x_v\vec{j}\vec{i} + y_u \cdot y_v\vec{j}\vec{j} \end{aligned}$$

и воспользоваться ортонормированностью базиса.

Во-вторых, следует внести существенные изменения в контрольно-измерительные материалы. Неплохо зарекомендовали себя интерактивные домашние задания, значительная часть заданий в которых ориентирована на формирование необходимых ассоциаций и регулярно проводимые контрольные мероприятия в тестовой форме, проводимые в начале или конце занятия, также преимуще-

ственно ориентированные на контроль уровня сформированности необходимых ассоциаций. Например, операции матричной алгебры формулируются на трех принципиально разных языках: 1) на языке элементов матриц, например, $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; 2) на языке «матриц в целом» или фрагментов матриц, например, операция «симметрирование квадратной матрицы» вводится формулой $S(M) = \frac{1}{2}(M + M^t)$, где M^t – матрица, транспонированная к матрице M ; 3) на языке описания алгоритмов без использования буквенных идентификаторов, например, «для того чтобы найти сумму матриц A и B , надо каждый элемент матрицы A сложить с находящимся на том же месте элементом матрицы B ». Пример задания на использование соответствующих ассоциаций и правил перевода: «если $c_{pq} = \sum_{k=1}^n a_{kj}b_{ki}$, то $C = \dots$ » (ожидаемый ответ $C = B^t \cdot A$).

В-третьих, в содержательном плане на занятиях и при организации самостоятельной работы следует обращать внимание на ситуации, когда в ходе поиска и оформления решения используются приоритетные ассоциации и, в частности, переход к другому математическому языку. Например, в процессе решения задач по векторной алгебре часто приходится переходить от языка «школьной геометрии» к языку, который мы назвали векторно-символическим (в рамках которого мы работаем с выражениями вида

$$\vec{AB} = \vec{OB} + (-1)\vec{OA}, \vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$$

и т. д.) и, наконец, «языке координат».

В-четвертых, при изучении новых математических феноменов (понятий, методов, алгоритмов, теорем и т. д.) следует больше внимания уделять позиционированию этих феноменов относительно других математических конструкций. Например, график функции «синус» можно иллюстрировать рис. 3 (в нашей презентации к занятию этот рисунок является динамическим).

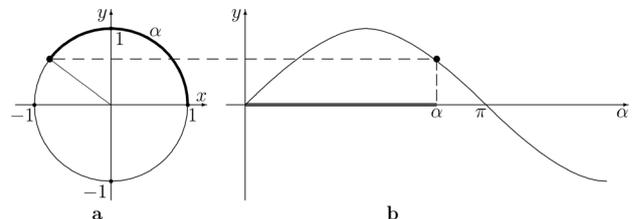


Рис. 3. Иллюстрация к графику синуса

Для того чтобы процесс построения графика синуса с использованием единичного круга был эффективным, необходимо, чтобы у обучаемых (учеников, студентов, магистрантов и т. д.) были сформированы ассоциации с понятием «график функции», в частности, было усвоено определение

графика функции f как множества точек с координатами $(x, f(x))$ и понятие об измерении угла в радианах.

Как мы уже отмечали, на первый взгляд, интерпретация термина «понимание» как системы ассоциаций выглядит как откат к прежним представлениям. Но формально-конструктивная трактовка модели позволяет интерпретировать такие понятия, как «смысл феномена», «оценка феномена» и др. как построение модели феномена (см. рис. 1) и оценку его адекватности [14]. Трактовку термина «понимание» как системы ассоциаций мы считаем конструктивной и перспективной. Можно предложить несколько направлений развития данного исследования. Во-первых, следует создать «атлас ассоциаций» для всех наиболее важных математических феноменов. Во-вторых, следует проанализировать опыт целенаправленного формирования ассоциаций, сравнить эффективность используемых для этого инструментов. В-третьих, представленная нами система рекомендаций по формированию необходимых ассоциаций во многом имеет эмпирический, интуитивный характер, нам представля-

ется, что необходимо развить соответствующую теорию и совершенствовать рекомендации на ее основе. В-четвертых, мы не считаем предложенную нами классификацию ассоциаций исчерпывающей, было бы полезно рассмотреть классификации ассоциаций на других основаниях.

Заключение

1. Проанализированы традиционные трактовки понятия «понимание».
2. На основе анализа литературы, практики обучения математике и формально-конструктивной трактовки модели предложена трактовка термина «понимание» (т. е. понимание определенного феномена) как системы ассоциаций с этим феноменом.
3. Для контроля полноты системы ассоциаций с феноменом предложено использовать механизмы, основанные на классификации системы ассоциаций.
4. Выделены и описаны условия продуктивного применения предложенной трактовки в учебном процессе.

Список источников

1. Павлов-Пинус К. А. Теоретизирование о сознании: эпистемические пролегомены. Часть I // *Философский журнал*. 2018. Т. 11, № 2. С. 40–57.
2. Павлов-Пинус К. А. Теоретизирование о сознании: эпистемические пролегомены. Часть II // *Философский журнал*. 2018. Т. 11, № 3. С. 47–55.
3. Епишева О. Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: кн. для учителя. М.: Просвещение, 2003. 223 с.
4. Лобанова Н. И. Понимание как проблема образования // *Высшее образование в России*. 2015. № 8–9. С. 129–134.
5. Станислас Деан. Сознание и мозг. Как мозг кодирует мысли / пер. с англ. И. Ющенко. М.: Карьера Пресс, 2018. 415 с.
6. Знаков В. В. Понимание как психология возможного // *Сибирский психологический журнал*. 2019. № 72. С. 6–20.
7. Белоногова А. А. Синонимия «текстов-компактов» как фактор адекватности понимания текста в условиях межкультурной коммуникации: дис. ... канд. филол. наук. Ульяновск, 2003. 122 с.
8. Анохина Н. В. Имплицитность как компонент структуры содержания текста и составляющая процессов его понимания (на материале научно-популярного текста): дис. ... канд. филол. наук. Уфа: Башкирский гос. ун-т, 2010. 195 с.
9. Пашина Е. В. Формирование стратегий понимания нового текста с выделением главной и избыточной информации, темы и подтемы текста // *Национальная ассоциация ученых*. 2015. № 2-11 (7). С. 64–66.
10. Massey G. Applied translation studies and transdisciplinary action research: understanding, learning and transforming translation in professional contexts // *Russian Journal of Linguistics*. 2021. Т. 25, № 2. С. 443–461.
11. *Философский энциклопедический словарь* / гл. ред. Л. Ф. Ильичев и др. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 839 с.
12. Мельников Ю. Б., Поторочина К. С. Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и «предматематической» деятельности // *Ярославский педагогический вестник*. 2010. № 3: Физико-математические и естественные науки. С. 19–24.
13. Новикова М. Г. Функциональная зависимость понимания предложения от меры понимания его составных компонентов // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Русская филология*. 2011. № 5. С. 16–21.
14. Melnikov Yu. B. Modeling Theory Based on the Formal-Constructive Interpretation of the Model // Silhavy R., Silhavy P., Prokopova Z. (eds) *Data Science and Intelligent Systems. CoMeSySo 2021. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2021. Vol. 231. Springer, Cham. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-90321-3_51 (дата обращения: 31.01.2023).
15. Барковский П. В. Феномен понимания. Минск: Экономпресс, 2008. 176 с.
16. Гнедых Д. С., Сухоруков И. С. О связи индивидуальных стратегий понимания студентами учебных текстов с качеством их понимания // *Письма в Эмиссия. Оффлайн (The Emissia. Offline Letters): электронный научный журнал*. 2020. № 6 (июнь). ART 2856. URL: <http://emissia.org/offline/2020/2856.htm> (дата обращения: 15.01.2023).

17. Далингер В. А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрисредственных связей. Омск: ОМИПКРО, 1993. 323 с.
18. Самарин Ю. А. Очерки психологии ума. М.: АПН РСФСР, 1962. 504 с.
19. Серёгин Г. М. Понятия «понимание» и «уровень понимания»: психолого-педагогические аспекты // Ученые записки Российского государственного социального университета. 2009. № 11 (74). С. 86–88.
20. Борзова Т. В. Опросник «понимание научного текста»: поиски путей диагностики понимания в обучении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Социальные, гуманитарные, медико-биологические науки. 2020. Т. 22, № 72. С. 15–26.
21. Борисова Е. Г. Управление пониманием. Языковые единицы, регулирующие понимание сообщения // Вестник Московского университета. Серия 9: Филология. 2018. № 6. С. 34–50.
22. Мельников Ю. Б., Соловьянов В. Б., Ширпужев С. В. Стратегия перевода с одного математического языка на другой // Известия Российского государственного педагогического университета имени А.И. Герцена. 2017. № 184. С. 74–82.

References

1. Pavlov-Pinus K. A. Teoretizirovaniye o soznanii: epistemicheskiye prolegomeny. Chast I [Theorized about consciousness: epistemic prolegomena. Part I]. *Filosofskiy zhurnal – Philosophy Journal*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 40–57 (in Russian).
2. Pavlov-Pinus K. A. Teoretizirovaniye o soznanii: epistemicheskiye prolegomeny. Chast II [Theorized about consciousness: epistemic prolegomena. Part II]. *Filosofskiy zhurnal – Philosophy Journal*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 47–55 (in Russian).
3. Yepisheva O. B. *Tekhnologiya obucheniya matematike na osnove deyatel'nostnogo podkhoda: kniga dlya uchitelya* [Technology of teaching mathematics based on the activity approach: Book for the teacher]. Moscow, Prosveshcheniye Publ., 2003. 223 p. (in Russian).
4. Lobanova N. I. Ponimaniye kak problema obrazovaniya [Understanding as a problem of education]. *Vysseye obrazovaniye v Rossii – Higher Education in Russia*, 2015, no. 8-9, pp. 129–134 (in Russian).
5. Stanislas Dean. *Soznaniye i mozg. Kak mozg kodiruyet mysli* [Consciousness and the brain. How the brain encodes thoughts]. Translation from English I. Yushchenko. Moscow, Kar'yera Press Publ., 2018. 415 p. (in Russian).
6. Znakov V. V. Ponimaniye kak psikhologiya vozmozhnogo [Understanding as a psychology of the possible]. *Sibirskiy psikhologicheskij zhurnal – Siberian Journal of Psychology*, 2019, no. 72, pp. 6–20 (in Russian).
7. Belonogova A. A. *Sinonimiya “tekstov-kompaktov” kak faktor adekvatnosti ponimaniya teksta v usloviyakh mezhkul'turnoy kommunikatsii. Diss. kand. filol. nauk* [Synonymy of “texts-compacts” as a factor of adequacy of text understanding in conditions of intercultural communication. Diss. cand. philol. sci.]. Ulyanovsk, 2003. 122 p. (in Russian).
8. Anokhina N. V. *Implitsitnost' kak component struktury sodержaniya teksta i sostavlyayushchaya protsessov yego ponimaniya (na materiale nauchno-populyarnogo teksta). Diss. cand. filol. nauk* [Implicitness as a Component of the Text Content Structure and a Component of its Understanding Processes (Based on a Popular Science Text). Diss. cand. philol. sci.]. Ufa, 2010. 195 p. (in Russian).
9. Pashina Ye. V. Formirovaniye strategiy ponimaniya novogo teksta s vydeleniyem glavnoy i izbytochnoy informatsii, temy i podtemy teksta [Formation of strategies for understanding a new text with the allocation of main and redundant information, topics and subtopics of the text]. *Natsional'naya Assotsiatsiya Uchenykh*, 2015, no. 2-11 (7), pp. 64–66 (in Russian).
10. Massey G. Applied translation studies and transdisciplinary action research: understanding, learning and transforming translation in professional contexts. *Russian Journal of Linguistics*, 2021, vol. 25, no. 2, pp. 443–461.
11. *Filosofskiy entsiklopedicheskiy slovar'* [Philosophical Encyclopedic Dictionary]. Ed. L. F. Il'ichev et al. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1983. 839 p. (in Russian).
12. Melnikov Yu. B., Potorochina K. S. Algebraicheskiy podkhod k matematicheskomu modelirovaniyu i obucheniyu matematicheskoy i “predmatematicheskoy” deyatel'nosti [Algebraic approach to mathematical modeling and teaching of mathematical and “pre-mathematical” activities]. *Yaroslavskiy pedagogicheskij vestnik – Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 2010, no. 3: Fiziko-matematicheskiye i yestestvennyye nauki, pp. 19–24 (in Russian).
13. Novikova M. G. Funktsional'naya zavisimost' ponimaniya predlozheniya ot mery ponimaniya yego sostavnykh komponentov [Functional dependence of the understanding of the proposal on the measure of understanding of its constituent components]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Seriya: Russkaya filologiya – Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Russian Philology*, 2011, no. 5, pp. 16–21 (in Russian).
14. Melnikov Yu. B. Modeling Theory Based on the Formal-Constructive Interpretation of the Model. In: Silhavy R., Silhavy P., Prokopova Z. (eds) *Data Science and Intelligent Systems. CoMeSySo 2021. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol. 231. Springer, Cham. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-90321-3_51 (accessed 31 January 2023).
15. Barkovskiy P. V. *Fenomen ponimaniya* [The phenomenon of understanding]. Minsk, Ekonompress Publ., 2008. 176 p. (in Russian).
16. Gnedykh D. S., Sukhorukov I. S. O svyazi individual'nykh strategiy ponimaniya studentami uchebnykh tekstov s kachestvom ikh ponimaniya [On the connection between individual strategies for students' understanding of educational texts and the quality of their understanding]. *Pis'ma v Emissiya. Offlayn – The Emissia. Offline Letters*, 2020, no. 6. ART 2856 (in Russian). URL: <http://emissia.org/offline/2020/2856.htm> (accessed 15 January 2023).

17. Dalinger V. A. *Sovershenstvovaniye protsessa obucheniya matematike na osnove tselenapravlennoy realizatsii vnutripredmetnykh svyazey* [Improving the process of teaching mathematics based on the targeted implementation of intra-subject communications]. Omsk, OmIPKRO Publ., 1993. 323 p. (in Russian).
18. Samarin Yu. A. *Ocherki psikhologii uma* [Essays on the psychology of the mind]. Moscow, APN RSFSR Publ., 1962. 504 p. (in Russian).
19. Serogin G. M. Ponyatiya “ponimaniye” i “uroven’ ponimaniya”: psikhologo-pedagogicheskiye aspekty [The concepts of “understanding” and “level of understanding”: psychological and pedagogical aspects]. *Uchenyye zapiski Rossiyskogo gosudarstvennogo sotsial’nogo universiteta*, 2009, no. 11 (74), pp. 86–88 (in Russian).
20. Borzova T. V. Oprosnik “ponimaniye nauchnogo teksta”: poiski putey diagnostiki ponimaniya v obuchenii [Questionnaire “understanding the scientific text”: the search for ways to diagnose understanding in teaching]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk. Sotsial’nyye, gumanitarnyye, mediko-biologicheskiye nauki – The Proceedings of the Samara Academy of Sciences, Russian Academy of Sciences Social Sciences, Humanities, biomedical sciences*, 2020, vol. 22, no. 72, pp. 15–26 (in Russian).
21. Borisova Ye. G. Upravleniye ponimaniyem. Yazykovyye yedynitsy, reguliruyushchiye ponimaniye soobshcheniya [Management of understanding. Linguistic units that regulate the understanding of the message]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 9: Filologiya – Lomonosov Philology Journal*, 2018, no. 6, pp. 34–50 (in Russian).
22. Mel’nikov Yu. B., Solovyanov V. B., Shirpuzhev S. V. Strategiya perevoda s odnogo matematicheskogo yazyka na drugoy [The strategy of translation from one mathematical language to another]. *Izvestiya Rossiyskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni A.I. Gertsena – Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Sciences*, 2017, no. 184, pp. 74–82 (in Russian).

Информация об авторах

Мельников Ю. Б., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Уральский государственный экономический университет (ул. 8 Марта, 62, Екатеринбург, Россия, 620144).

Ахматов Т. Д., студент, Уральский государственный экономический университет (ул. 8 Марта, 62, Екатеринбург, Россия, 620144).

Данилов Т. Д., студент, Уральский государственный экономический университет (ул. 8 Марта, 62, Екатеринбург, Россия, 620144).

Information about the authors

Melnikov Yu. B., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Ural State University of Economics (ul. 8 Marta, 62, Yekaterinburg, Russian Federation, 620144).

Akhmatov T. D., undergraduate student, Ural State University of Economics (ul. 8 Marta, 62, Yekaterinburg, Russian Federation, 620144).

Danilov T. D., undergraduate student, Ural State University of Economics (ul. 8 Marta, 62, Yekaterinburg, Russian Federation, 620144).

Статья поступила в редакцию 08.01.2023; принята к публикации 01.08.2023

The article was submitted 08.01.2023; accepted for publication 01.08.2023