Физика волновых процессов и радиотехнические системы
2024. Т. 27, № 4. С. 29–39

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.29-39
УДК 535.1
Оригинальное исследование

Дата поступления 28 апреля 2024
Дата принятия 29 мая 2024
Дата публикации 28 декабря 2024

Внешние барицентрические координаты для произвольных многоугольников и приближенный метод их вычисления

И.С. Полянский

Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации
302015, Россия, г. Орел,
ул. Приборостроительная, 35

Аннотация – **Обоснование.** В статье для обобщения применимости барицентрического метода в решении внешних краевых и начально краевых задач математической физики введено понятие внешних барицентрических координат. **Цель** работы состоит в формировании простого аналитического соотношения, позволяющего с заданной точностью вычислять барицентрические координаты, внешние относительно заданной произвольной многоугольной области. **Методы.** Соответствующее соотношение сформировано при составлении приближенно аналитического правила вычисления, которое основывается на решении методом Фредгольма внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Основу этого решения составляет разложение ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода по многочленам Лежандра первого и второго рода, формируемое с применением формулы Гейне. **Результаты.** Произведена оценка скорости сходимости полученного приближенно аналитического вычисления внешних барицентрических координат при установлении экспоненциальной сходимости в гильбертовом пространстве и полиномиальной в пространстве непрерывных функций. Уточнены алгоритмические особенности реализации составленного приближенно аналитического решения при структурированном представлении псевдокодов программ вычисления внешних барицентрических координат, сформированных преимущественно для системы компьютерной алгебры MathCad. Работоспособность продемонстрирована на конкретных примерах. **Заключение.** Автор статьи считает, что приведенные подробные результаты алгоритмической реализации вычисления внешних барицентрических координат вызовут интерес и сделают материал публикации доступнее широкому кругу читателей, что приведет к развитию барицентрического метода в решении краевых и начально краевых задач математической физики.

Ключевые слова – внешние барицентрические координаты; внешняя задача Дирихле; уравнение Лапласа; произвольный многоугольник; логарифмический потенциал двойного слоя; уравнение Фредгольма; многочлены Лежандра.

Введение

Теоретическое изучение колебательно-волновых процессов неизбежно связано с исследованием соответствующих краевых и начально краевых задач математической физики [1–4]. Одним из вычислительно эффективных методов их численного решения является барицентрический метод (БМ) [3]. С учетом выделенных в работах [4–9] алгоритмических особенностей реализаций вычислительная эффективность БМ основывается на формировании глобальной системы базисных функций для заданной области анализа Ω, граница $\partial\Omega$ которой параметризуется в кусочно-линейном представлении. Глобальные для Ω базисные функции составляются [6] с применением классических интерполяционных методов [5] в вводимой для Ω барицентрической системы координат [10–13]. Относительно простое аналитическое соотношение, позволяющее с заданной точностью составлять для $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ барицентрическую систему координат, получено в [13].

В целом текущие математические представления БМ [3–13] определяют его вычислительно эффективную применимость относительно численного решения внутренних краевых и начально краевых задач математической физики. Одно из направлений развития БМ состоит в формировании теоретических решений, унифицирующих его относительно исследования внешних краевых и начально краевых задач математической физики. Первичный этап в получении подобных решения состоит в введении понятия внешних барицентрических координат для Ω, задаваемой произвольной многоугольной областью, и формировании простого аналитического соотношения, позволяющего с заданной точностью составлять для $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$ барицентрическую систему координат.

Получение указанных теоретических решений составляет цель настоящей статьи. В основу их формирования положим результаты [13–15].

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2 : 0 \in \Omega$ – односвязная область, ограниченная замкнутой ломаной линией без самопересечений при

✉ van341@mail.ru (*Полянский Иван Сергеевич*)

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^{N-1} \Gamma_i,$$

где

$$\Gamma_i = \left\{ x_i(t) = e_i t + P_i,\ t \in [0,1] \right\};$$

$$e_i = P_{i+1 \bmod N} - P_i,$$

$\{P_0, P_1, \dots, P_{N-1}\}$ – множество неповторяющихся вершин Ω, нумерация которых определена в порядке положительного обхода Ω [16].

Определение 1. *Внешними барицентрическими координатами* $\overline{\zeta}_i$ *для* Ω *назовем набор* $\overline{\overline{\zeta}} = (\overline{\zeta}_i)_N$ *функций* $\overline{\zeta}_i(x) \in [0,1]$ $(x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$, *которые удовлетворяют условиям*:

$$\Delta\overline{\zeta}_i(x),\ \ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}; \tag{1}$$

$$\overline{\zeta}_i(x) = t,\ \ x \in \Gamma_{i-1};$$

$$\overline{\zeta}_i(x) = 1 - t,\ \ x \in \Gamma_i;$$

$$\overline{\zeta}_i(x) = 0,\ \ x \in \partial\Omega \setminus \{\Gamma_{i-1}, \Gamma_i\}.$$

Решение внешней задачи Дирихле (1) по аналогии с [13] выполним известным методом Фредгольма при представлении функции $\overline{\zeta}_i(x)$ в виде логарифмического потенциала двойного слоя [15, с. 93]:

$$\overline{\zeta}_i(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi_i(y) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \nu_y} \right] dl_y, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$; $\partial/\partial\nu_y$ – частная производная по внутренней нормали ν_y к $\partial\Omega$ в точке $y \in \partial\Omega$; dl_y – дифференциал кривой $\partial\Omega$; $\Phi_i(y)$ – неизвестная плотность на границе $\partial\Omega$ области Ω, однозначно определяемая из интегрального уравнения Фредгольма II рода [13, с. 93]:

$$\Phi_i(x) + 2\int_{\partial\Omega} \Phi_i(y) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln|x-y|}{\partial \nu_y} \right] dl_y = 2U_i(x) \tag{3}$$

$$x \in \partial\Omega,\ \ i = \overline{0, N-1}.$$

В выражении (3) через $U_i(x)$ обозначены заданные в (1) значения $\overline{\zeta}_i(x)$ на $\partial\Omega$.

Следуя результатам [13; 14], для удобства представления решения задачи (2), (3) построим $\Omega \subset \mathbb{C} : 0 \in \Omega$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом, с учетом параметризации $\partial\Omega$ и граничных условий из (1), интегральное уравнение (3) запишем в виде

$$\varphi_j^i(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \varphi_k^i(s) K_{jk}(t,s)\, ds = u_j^i(t), \tag{4}$$

где

$$j = \overline{0, N-1};\ \ \varphi_j^i(t) = \Phi_i(x_j(t));$$

$$u_j^i(t) = 2U_i(x_j(t));$$

$K_{jk}(t,s)$ – ядро интегрального уравнения (4), которое с учетом [13; 14] при $t, s \in [0,1]$ определяется соотношением

$$K_{jk}(t,s) = \begin{cases} 2|e_k| - \pi^{-1} \times \\ \times \operatorname{Im}\left[e_k \big/ \left(e_k s + P_k - e_j t - P_j \right) \right],\ \ j \neq k; \\ 2|e_k|,\ \ j = k. \end{cases} \tag{5}$$

Решение интегрального уравнения (4) относительно $\varphi_j^i(t)$ позволяет задать $\overline{\zeta}_i(x)$ при вычислении интеграла:

$$\overline{\zeta}_i(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^1 \varphi_j^i(t) H_j(t,x)\, dt, \tag{6}$$

где

$$H_j(t,x) = |e_j| - \operatorname{Im}\left[e_j \big/ \left(e_j t + P_j - x \right) \right] \big/ 2\pi. \tag{7}$$

2. Приближенно аналитическое определение внешних барицентрических координат

Решение интегрального уравнения (4) по аналогии с [13; 14] предполагается выполнить с применением формулы Гейне [17, с. 169] при разложении ядра $K_{jk}(t,s)$ в виде

$$K_{jk}(t,s) = \lambda_0^{jk}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \lambda_n^{jk}(t) L_n(2s-1); \tag{8}$$

$$\lambda_0^{jk}(t) = 2 \begin{cases} |e_k| + \pi^{-1} \times \\ \times \operatorname{Im}\left[\mathrm{Q}_0\left(2\left(e_j t + R_{jk}\right) \big/ e_k - 1 \right) \right],\ \ j \neq k, \\ |e_k|,\ \ j = k; \end{cases}$$

$$\lambda_n^{jk}(t) = \begin{cases} 2\pi^{-1} \operatorname{Im}\left[\mathrm{Q}_n\left(2\left(e_j t + R_{jk}\right) \big/ e_k - 1 \right) \right],\ \ j \neq k, \\ 0,\ \ j = k; \end{cases}$$

$$n > 0,$$

где $R_{jk} = P_j - P_k$; $L_n(\tau)$ и $\mathrm{Q}_n(z)$ – многочлены Лежандра первого и второго рода соответственно, задаваемые с учетом известных [14; 17; 18] рекуррентных соотношений.

Разложение (8) ядра (5) интегрального уравнения (4) на две системы линейно независимых интегрируемых с квадратом функций $\{\lambda_n^{jk}(t)\}$, $\{L_n(2s-1)\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ и результаты лемм [13] позволяют задать приближенно аналитическое решение внешней задачи Дирихле (1) при введении следующих представлений.

Неизвестную функцию плотности $\varphi_j^i(t)$ в интегральном уравнении (4) формализуем выражением

$$\varphi_j^i(t) = u_j^i(t) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{\infty} S_{kn}^i \sqrt{2n+1}\lambda_n^{jk}(t), \tag{9}$$

где

$$S_{kn}^i = \sqrt{2n+1}\int_0^1 \varphi_k^i(s) L_n(2s-1)\,ds. \tag{10}$$

Определение S_{kn}^i выполним, применив метод PG-ядер [19], в котором при подстановке (9) в (4) задачу нахождения коэффициентов S_{kn}^i сведем к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{S}^i(\mathbf{E}+\mathbf{T}) = \mathbf{U}^i, \tag{11}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица размера $\left[N(M+1)\right]\times\left[N(M+1)\right]$;

$\mathbf{T}$ – блочная матрица, составленная из элементов

$$T_{nm}^{jk} = \sqrt{2n+1}\sqrt{2m+1}\int_0^1 \lambda_m^{jk}(t) L_n(2t-1)\,dt$$

$(n, m = 0, 1, \ldots)$;

$\mathbf{S}^i$ – блочный вектор искомых коэффициентов разложения S_{kn}^i; $\mathbf{U}^i$ – блочный вектор, сформированный элементами [13]:

$$U_{kn}^i = \sqrt{2n+1}\int_0^1 u_k^i(t) L_n(2t-1)\,dt = \tag{12}$$

$$\begin{cases} 1, & (i=k \vee i=k-1)\wedge n=0, \\ -1/\sqrt{3}, & i=k \wedge n=1, \\ 1/\sqrt{3}, & i=k-1\wedge n=1, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Вычисление

$$T_{nm}^{jk} = \sqrt{2n+1}\sqrt{2m+1}\int_0^1 \lambda_m^{jk}(t) L_n(2t-1)\,dt$$

может быть выполнено аналитически с применением результатов лемм [14] или численно по квадратурному методу Гаусса – Лежандра [3].

Перепишем уравнение (4) в операторной форме:

$$\boldsymbol{\varphi}^i + \mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^i = \mathbf{u}^i, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\varphi}^i = (\varphi_j^i)_N$; $\mathbf{u}^i = (u_j^i)_N$; $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{jk})_{N\times N}$ – матричный оператор;

$$\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^i = \left(\sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{K}_{0k}\varphi_k^i; \ldots; \sum_{k=0}^{N-1}\mathcal{K}_{N-1k}\varphi_k^i\right);$$

$$\left(\mathcal{K}_{jk}\varphi_k^i\right)(t) \equiv \int_0^1 K_{jk}(t,s)\varphi_k^i(s)\,ds$$

– линейный ограниченный оператор на пространстве функций из $C([0,1])$ [13; 14].

Следуя [13; 14], введем в рассмотрение линейный ограниченный оператор:

$$\left(\mathcal{K}_{jk}^M\varphi_k^i\right)(t) \equiv \tag{14}$$

$$\sum_{n=0}^{M}(2n+1)\lambda_n^{jk}(t)\int_0^1 \varphi_k^i(s) L_n(2s-1)\,ds,$$

и определим уравнение:

$$\boldsymbol{\varphi}_M^i + \mathcal{K}^M\boldsymbol{\varphi}_M^i = \mathbf{u}^i, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{\varphi}_M^i = (\varphi_{jM}^i)_N$ обозначает приближение функции плотности φ_j^i выражением (9) при замене бесконечной суммы по индексу n конечной с ограничением числа слагаемых до M.

С применением формулы Гейне [17, с. 169] запишем разложение (7) в виде

$$H_j(t,x) = \left|e_j\right| - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left[e_j\left(e_j t + P_j - x\right)^{-1}\right] = \tag{16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\bar{\lambda}_n^j(x) L_n(2t-1);$$

$$\bar{\lambda}_n^j(x) = \begin{cases} \left|e_j\right| + \pi^{-1}\operatorname{Im}\left[Q_n\left(2\left(x-P_j\right)/e_j - 1\right)\right], & n=0; \\ \pi^{-1}\operatorname{Im}\left[Q_n\left(2\left(x-P_j\right)/e_j - 1\right)\right], & n>0, \end{cases}$$

для которого введем в рассмотрение операторы [14]:

$$\left(\mathcal{H}\varphi^i\right)(x) \equiv \sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1 H_j(t,x)\varphi_j^i(t)\,dt; \tag{17}$$

$$\left(\mathcal{H}^M\varphi^i\right)(x) \equiv$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\bar{\lambda}_n^j(x)\int_0^1 L_n(2t-1)\varphi_j^i(t)\,dt\right\}.$$

Обозначим единичный оператор символом $\mathcal{I}$.

Уточним определение норм некоторой векторной функции $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_j)_N$ в пространствах $C([0,1])$ и $L_2([0,1])$ [19]:

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_C = \max_{\substack{t\in[0,1] \\ j\in\{0,N-1\}}}\left|\varphi_j(t)\right|; \quad \left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1\left[\varphi_j(t)\right]^2 dt}. \tag{18}$$

Для введенных представлений сформулируем основной результат настоящей статьи следующим утверждением.

Теорема 1. $\exists\tilde{M}\in\mathbb{N}:\forall M\geq\tilde{M}$ *решение*

$$\bar{\zeta}_i^M(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{M}\sqrt{2n+1}\bar{\lambda}_n^j(x)S_{kn}^i \tag{19}$$

внешней задачи Дирихле (1) существует и единственно, при этом справедливы оценки:

$$\left\|\bar{\zeta}_i^M-\bar{\zeta}_i\right\|_C\le \text{const}\max_{j\in\overline{\{0,N-1\}}}\left\{2\varpi_j^{-1}+\left|e_j\right|\right\}\times \tag{20}$$

$$\times\left[\left(M+0{,}5\right)^{-1}+\left(M+1{,}5\right)^{-1}\right];$$

$$\left\|\bar{\zeta}_i^M-\bar{\zeta}_i\right\|_{L_2}=\text{const}\,M2^{-M}\times \tag{21}$$

$$\times\left(2M+1\right)^{-1}\left(2M+3\right)^{-1/2},$$

где const *– положительна и не зависит от* M.

В выражениях (19)–(21) приняты обозначения [13; 14]:

$$\varpi_j=\min\left\{\Theta_j,\pi\left(\pi+\left|\pi-\alpha_j\right|\right)^{-1}\right\};$$

$$\Theta_j=\begin{cases}\left|\sin\alpha_j\right|, & \alpha_j\in\left(0,\pi/2\right)\cup\left(3\pi/2,2\pi\right),\\ 1, & \alpha_j\in\left[\pi/2,\pi\right)\cup\left(\pi,3\pi/2\right],\end{cases}\quad[20];$$

α_j – внутренний угол Ω при вершине P_j.

Доказательство. Подставив разложение (16) в (6), получим

$$\bar{\zeta}_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sum_{j=0}^{N-1}\bar{\lambda}_n^j(x)\int_0^1\varphi_j^i(t)L_n(2t-1)dt. \tag{22}$$

Принимая во внимание (10), перепишем (22) в виде

$$\bar{\zeta}_i(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2n+1}\bar{\lambda}_n^j(x)S_{kn}^i. \tag{23}$$

Из [21, с. 76] известно, что для интегрального оператора $\mathcal{K}$ существует обратный оператор $(\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}$ ввиду справедливости разложения (8) его ядра. Указанное обеспечивает разрешимость уравнения (13) в виде $\boldsymbol{\varphi}^i=(\mathcal{I}+\mathcal{K})^{-1}\mathbf{u}^i$ и с учетом справедливости (23) определяет существование и единственность решения (19) внешней задачи Дирихле (1) для $M\to\infty$. Принимая во внимание результаты доказательства теоремы 2 в [14], определим следующую оценку в $C([0,1])$:

$$\left\|\bar{\zeta}_i^M-\bar{\zeta}_i\right\|_C\le\left\|\rho\mathcal{H}\right\|_C\left\|\xi_M^i-\xi_i\right\|_C+ \tag{24}$$

$$+\left\|\xi_M^i\right\|_C\left\|\rho\left(\mathcal{H}^M-\mathcal{H}\right)\right\|_C,$$

где $\boldsymbol{\varphi}^i=\xi_i\rho$, $\boldsymbol{\varphi}_M^i=\xi_M^i\rho$, $\rho\equiv\rho(t)=2\sqrt{t-t^2}$ – весовая функция [13].

Учитывая представления (8), (9), (19), результаты [13; 14] для заданной параметризации $\partial\Omega$ и $\bar{\zeta}_i(x)\le 1$ при $x\in\mathbb{R}^2\setminus\bar{\Omega}$, установим справедливость следующих неравенств:

$$\left\|\rho\mathcal{H}\right\|_C= \tag{25}$$

$$=\max_{\substack{t\in[0,1]\\ j\in\overline{\{0,N-1\}}\\ x\in\mathbb{R}^2\setminus\bar{\Omega}}}\left|2\rho(t)\left(\left|e_j\right|-\frac{1}{2\pi}\text{Im}\left[\frac{e_j}{e_jt+P_j-x}\right]\right)\right|\le$$

$$\le\max_{j\in\overline{\{0,N-1\}}}\left|e_j\right|+\frac{1}{\pi}\max_{x\in\mathbb{R}^2\setminus\bar{\Omega}}\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1\left|\frac{e_j\sqrt{t-t^2}}{e_jt+P_j-x}\right|dt\le$$

$$\le\max_{j\in\overline{\{0,N-1\}}}\left|e_j\right|+\min_{j\in\overline{\{0,N-1\}}}\left(\frac{\alpha_j}{2\pi}\right)+1;$$

$$\left\|\xi_M^i\right\|_C=\left\|\left[\rho\left(\mathcal{I}+\mathcal{K}^M\right)\right]^{-1}\mathbf{u}^i\right\|_C\le \tag{26}$$

$$\le 2\left\|\left[\rho\left(\mathcal{I}+\mathcal{K}^M\right)\right]^{-1}\right\|_C=\text{const}\max_{j\in\overline{\{0,N-1\}}}\left\{2\varpi_j^{-1}+\left|e_j\right|\right\};$$

$$\left\|\rho\left(\mathcal{H}^M-\mathcal{H}\right)\right\|_C\le \tag{27}$$

$$\le\max_{x\in\mathbb{R}^2\setminus\bar{\Omega}}\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1\left|\frac{\rho(t)}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n\left(2\frac{x-P_j}{e_j}-1\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times L_n(2t-1)-\frac{e_j}{x-e_jt+P_j}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{\text{const}}{2\pi}\left[\left(M+0{,}5\right)^{-1}+\left(M+1{,}5\right)^{-1}\right].$$

$$\left\|\xi_M^i-\xi_i\right\|_C\le\text{const}\max_{j\in\overline{\{0,N-1\}}}\left\{2\varpi_j^{-1}+\left|e_j\right|\right\}\times \tag{28}$$

$$\times\frac{\left\|\rho\left(\mathcal{K}-\mathcal{K}^M\right)\right\|_C\left\|\rho\left(\mathcal{I}+\mathcal{K}\right)^{-1}\right\|_C^2}{1-\left\|\rho\left(\mathcal{I}+\mathcal{K}\right)^{-1}\right\|_C\left\|\rho\left(\mathcal{K}-\mathcal{K}^M\right)\right\|_C}.$$

Принимая во внимание результаты [13; 14] для (24)–(28), окончательно определим справедливость оценки (20), что и требовалось доказать относительно полиномиальной сходимости в $C([0,1])$ решения (19) внешней задачи Дирихле (1).

С учетом результатов [13; 14] и полученных соотношений (25)–(28) зададим следующие оценки в $L_2([0,1])$:

$$\left\|\bar{\zeta}_i^M-\bar{\zeta}_i\right\|_{L_2}\le\left\|\rho\mathcal{H}\right\|_{L_2}\left\|\xi_M^i-\xi_i\right\|_{L_2}+ \tag{29}$$

$$+\left\|\xi_M^i\right\|_{L_2}\left\|\rho\left(\mathcal{H}^M-\mathcal{H}\right)\right\|_{L_2};$$

$$\left\|\rho\mathcal{H}\right\|_{L_2} \le \text{const}; \tag{30}$$

$$\left\|\xi_M^i\right\|_C \le \text{const}; \tag{31}$$

$$\left\|\rho\left(\mathcal{H}^M - \mathcal{H}\right)\right\|_C \le \frac{\text{const}\, M2^{-M}}{\left(2M+1\right)\sqrt{2M+3}}^{-1}; \tag{32}$$

$$\left\|\xi_M^i - \xi_i\right\|_{L_2} \le \tag{33}$$

$$\le \text{const}\frac{\left\|\rho\left(\mathcal{K}-\mathcal{K}^M\right)\right\|_{L_2}\left\|\rho\left(\mathcal{I}+\mathcal{K}\right)^{-1}\right\|_{L_2}^2}{1-\left\|\rho\left(\mathcal{I}+\mathcal{K}\right)^{-1}\right\|_{L_2}\left\|\rho\left(\mathcal{K}-\mathcal{K}^M\right)\right\|_{L_2}} \le$$

$$\le \frac{\text{const}\, M2^{-M}}{\left(2M+1\right)\sqrt{2M+3}}^{-1}.$$

Принимая во внимание результаты [13; 14] для (29)–(33), окончательно определим справедливость оценки (21), что и требовалось доказать относительно экспоненциальной сходимости в $L_2([0,1])$ решения (19) внешней задачи Дирихле (1). Теорема доказана.

3. Алгоритмическая реализация вычисления внешних барицентрических координат и тестовые примеры

Для наглядной демонстрации предпочтительности, работоспособности предложенного решения, а также с целью выделения общих алгоритмических особенностей практической реализации приведем структурированные псевдокоды программы вычисления внешних барицентрических координат, сформированные с синтаксисом преимущественно для САПР MathCad. Также для наглядности представим результаты работы программы в САПР MathCad на произвольном многоугольнике.

Псевдокоды программы отразим поэтапным решением, взаимосвязанным с материалом пп. 1 и 2.

1. Задание Ω многоугольной областью:

– число вершин и индексы: $N := 32,\quad i := 0..N-1,$ $j := 0..N-1;$

– положение вершин с нумерацией в порядке положительного обхода Ω:

$$P_0 := \begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix},\ P_1 := \begin{pmatrix}10\\2.5\end{pmatrix},\ P_2 := \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix},\ P_3 := \begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix},$$

$$P_4 := \begin{pmatrix}6.5\\8.5\end{pmatrix},\ P_5 := \begin{pmatrix}10.5\\9\end{pmatrix},\ P_6 := \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix},\ P_7 := \begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix},$$

$$P_8 := \begin{pmatrix}11.5\\9.5\end{pmatrix},\ P_9 := \begin{pmatrix}6.5\\10.5\end{pmatrix},\ P_{10} := \begin{pmatrix}6.5\\12\end{pmatrix},\ P_{11} := \begin{pmatrix}8\\13\end{pmatrix},$$

$$P_{12} := \begin{pmatrix}9.5\\15.5\end{pmatrix},\ P_{13} := \begin{pmatrix}9\\16\end{pmatrix},\ P_{14} := \begin{pmatrix}8.5\\17\end{pmatrix},\ P_{15} := \begin{pmatrix}8\\18\end{pmatrix},$$

$$P_{16} := \begin{pmatrix}6.5\\18.5\end{pmatrix},\ P_{17} := \begin{pmatrix}5\\18\end{pmatrix},\ P_{18} := \begin{pmatrix}4.5\\17\end{pmatrix},\ P_{19} := \begin{pmatrix}4\\16\end{pmatrix},$$

$$P_{20} := \begin{pmatrix}3.5\\15.5\end{pmatrix},\ P_{21} := \begin{pmatrix}4.5\\13\end{pmatrix},\ P_{22} := \begin{pmatrix}5.5\\12\end{pmatrix},$$

$$P_{23} := \begin{pmatrix}5.5\\10.5\end{pmatrix},\ P_{24} := \begin{pmatrix}0.5\\7.5\end{pmatrix},\ P_{25} := \begin{pmatrix}1.5\\6\end{pmatrix},$$

$$P_{26} := \begin{pmatrix}5.5\\9.5\end{pmatrix},\ P_{27} := \begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix},\ P_{28} := \begin{pmatrix}3.5\\1\end{pmatrix},$$

$$P_{29} := \begin{pmatrix}4.5\\1\end{pmatrix},\ P_{30} := \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix},\ P_{31} := \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix};$$

– для выполнения условия $\Omega \subset \mathbb{R}^2 : 0 \in \Omega$ осуществляется центрирование точек:

$$\tilde{P} := \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} P_i = \begin{pmatrix}6.515625\\9.546875\end{pmatrix},\ P_j := P_j - \tilde{P};$$

– построение Ω на $\mathbb{C}$ и определение элементов, применяемых для параметризации $\partial\Omega$:

$$Z_j := \left(P_j\right)_0 + i\left(P_j\right)_1,\ e_j := z_{\text{mod}\left(j+1,N\right)} - z_j,$$
$$R_{ij} := z_i - z_j.$$

2. Формирование вспомогательных вычислительных функций:

– рекуррентное вычисление многочленов Лежандра первого и второго рода:

```
L(x,n) := if n = −1
 then return 0
 else if n = 0
  then return 1
  else if n = 1
   then return x
   else
    p0 ← 1
    p1 ← x
    for i ← 1 to n−1 do
      p ← ((2i+1)·x·p1 − i·p0)/(i+1)
      p0 ← p1
      p1 ← p
    return p
```

$Q(x,n) :=$ if $n=-1$
 then return $1-0.5\ln\left(1-x^2\right)$
 else if $n=0$
  then return $\operatorname{arccoth}(x)$
  else if $n=1$
   then return $x\operatorname{arccoth}(x)-1$
   else
    $p0 \leftarrow \operatorname{arccoth}(x)$
    $p1 \leftarrow x\operatorname{arccoth}(x)-1$
    for $i \leftarrow 1$ to $n-1$ do
     $p \leftarrow \dfrac{(2i+1)\cdot x\cdot p1 - i\cdot p0}{i+1}$
     $p0 \leftarrow p1$
     $p1 \leftarrow p$
    return p

– ядро (5) интегрального уравнения (4):

$$K(t,s,j,k) := \begin{cases} 2\left|e_k\right| - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left[\dfrac{e_k}{e_k s + Z_k - e_j t - Z_j}\right], & j \neq k, \\ 2\left|e_k\right|, & j = k; \end{cases}$$

– разложение (8) ядра (5) для заданного M (для примера положим $M := 4$):

$\lambda(t,j,k,n) :=$ if $j=k$
 then if $n=0$
  then return $2\left|e_k\right|$
  else return 0
 else
  $r \leftarrow \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left[Q\left(2\dfrac{e_j t + R_{jk}}{e_k}-1, n\right)\right]$
  if $n=0$
   then $r \leftarrow r + \left|e_k\right|$
  return $2r$

$$\tilde{K}(t,s,j,k) := \sum_{n=0}^{M}\left[(2n+1)\lambda(t,i,j,n)L(2s-1,n)\right],$$

$\tilde{K}(0.2,0.8,1,3) = 7.630364353568128,$

$K(0.2,0.8,1,3) = 7.630398154688569;$

– функция $H_j(t,x)$ в (7):

$$H(j,t,x) := \left|e_j\right| - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left[\frac{e_j}{e_j t + Z_j - x}\right];$$

– разложение (16) функции $H_j(t,x)$:

$\bar{\lambda}(j,n,x) :=$ $r \leftarrow \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left[Q\left(2\dfrac{x-Z_j}{e_j}-1, n\right)\right]$
 if $n=0$
  then $r \leftarrow r + \left|e_j\right|$
 return r

$$\tilde{H}(j,t,x) := \sum_{n=0}^{M}\left[(2n+1)\bar{\lambda}(j,n,x)L(2t-1,n)\right],$$

$\tilde{H}(1,0.2,0.1+0.2i) = 2.1025188715423075,$

$H(1,0.2,0.1+0.2i) = 2.102518880606145;$

– элементы T_{nm}^{jk} блочной матрицы $\mathbf{T}$ в составляемой СЛАУ:

$$T(j,k,n,m) = \sqrt{2n+1}\sqrt{2m+1}\times$$
$$\times\int_0^1 \lambda(t,j,k,m)L(2t-1,n)\,dt;$$

– вспомогательная функция определения индекса в диапазоне от $[0;N-1]$ и элементы U_{kn}^i блочного вектора $\mathbf{U}^i$, вычисляемые по правилу (12):

$U(k,i,n) :=$ if $k=i$
 then if $n=0$
  then return 1
  else if $n=1$ then return $-1/\sqrt{3}$
   else return 0
 else if $k = \operatorname{sp}(i-1,N)$
  then if $n=0$
   then return 1
   else if $n=1$ then return $1/\sqrt{3}$
    else return 0
  else return 0

$$\operatorname{sp}(i,n) = \begin{cases} \operatorname{mod}(i,n), & i>0, \\ \operatorname{mod}(n+i,n), & i \leq 0. \end{cases}$$

3. Составление СЛАУ (11) и ее решение при S_{kn}^i:

– число элементов в блочных векторах и матрицах составляемой СЛАУ:

$NM := N(M+1) = 160;$

– вычисление $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}^i$:

$\mathbf{T} :=$ for $q \leftarrow 0$ to $NM-1$ do
  $j \leftarrow \operatorname{ceil}\left(\dfrac{q+1}{M+1}\right)-1$
  $n \leftarrow \operatorname{mod}(q, M+1)$
 for $g \leftarrow 0$ to $NM-1$ do
  $k \leftarrow \operatorname{ceil}\left(\dfrac{g+1}{M+1}\right)-1$
  $m \leftarrow \operatorname{mod}(g, M+1)$
  $T_{qg} = T(j,k,n,m)$
return T

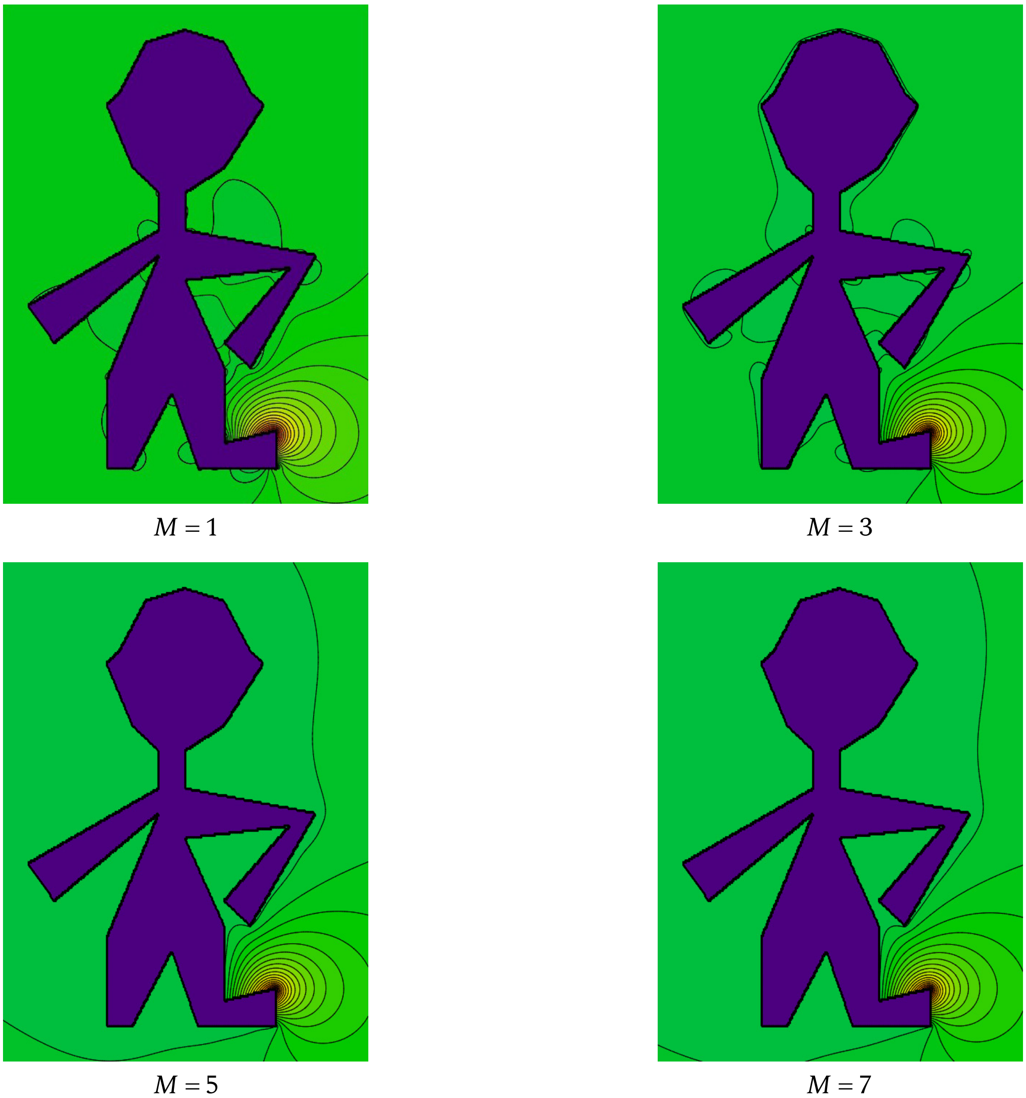

Рис. 1. Результаты расчета $\overline{\zeta}_1(x)$ для Ω
Fig. 1. Calculation results of $\overline{\zeta}_1(x)$ for Ω

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{U}^i := \text{for } q \leftarrow 0 \text{ to } NM-1 \text{ do}\\
&\quad j \leftarrow \operatorname{ceil}\left(\frac{q+1}{M+1}\right)-1\\
&\quad n \leftarrow \operatorname{mod}(q, M+1)\\
&\quad f_q = U(k,i,n)\\
&\text{return } f
\end{aligned}
$$

– формирование единичной матрицы $\mathbf{E}$ и решение СЛАУ (11) при определении S_{kn}^i:

$$\mathbf{E} := \operatorname{diag}(\mathbf{1});\ \ \tilde{\mathbf{S}}^i := (\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}\mathbf{U}^i;$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{S}^i := \text{for } q \leftarrow 0 \text{ to } NM-1 \text{ do}\\
&\quad j \leftarrow \operatorname{ceil}\left(\frac{q+1}{M+1}\right)-1\\
&\quad n \leftarrow \operatorname{mod}(q, M+1)\\
&\quad S_{jn} = \tilde{S}_q^i\\
&\text{return } S
\end{aligned}
$$

4. Вычисленная функция плотности $\varphi_j^i(t)$ по правилу (9):

$$u(i,j,t) := \begin{cases} 2(1-t), & i=j,\\ 2t, & \operatorname{sp}(i-1,N)=j,\\ 0, & \text{otherwise}; \end{cases}$$

$$\varphi(i,j,t) := u(i,j,t) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{M}\left[\sqrt{2n+1}\lambda(t,j,k,n)S_{kn}^i\right];$$

5. Определение внешних барицентрических координат по правилу (19):

$$\overline{\zeta}(i,x) := \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{M}\left[\sqrt{2n+1}\overline{\lambda}(j,n,x)S_{jn}^i\right].$$

На рис. 1 приведены результаты расчета линий уровня внешней барицентрической координаты (БК) $\overline{\zeta}_1(x)$ для рассматриваемого в приведенном листинге Ω при различных M.

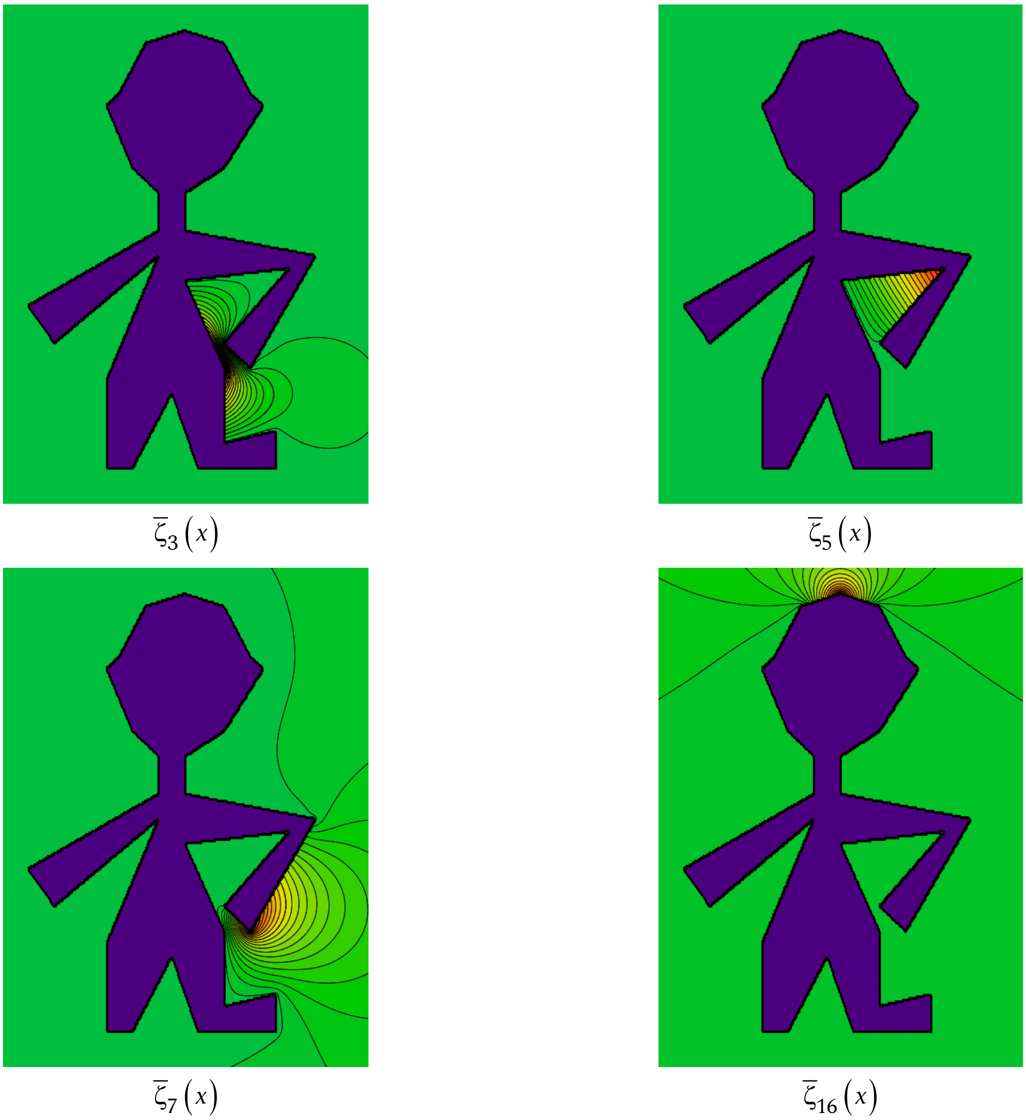

Рис. 2. Результаты расчета $\bar{\zeta}_i(x)$ для Ω при $M=7$
Fig. 2. Calculation results of $\bar{\zeta}_i(x)$ for Ω at $M=7$

На рис. 2 показаны результаты расчета линий уровня различных внешних БК для рассматриваемого в приведенном листинге Ω.

Заключение

Сформированное решение позволяет с экспоненциальной скоростью сходимости и высокой вычислительной устойчивостью определять внешние барицентрические координаты для произвольных многоугольников. Высокая точность полученного приближенно аналитического решения обеспечивает нахождение внешних барицентрических координат для $M \in [5;8]$. Прочие достоинства заданного решения соответствуют выводам [13].

Главный результат настоящей статьи состоит в формировании теоретического решения, составляющего исходную основу для задания глобальных базисных функций в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ при численном решении внешних краевых и начально краевых задач математической физики в приближении барицентрического метода. Автор статьи считает, что приведенные подробные результаты алгоритмической реализации вычисления внешних барицентрических координат вызовут интерес и сделают материал публикации доступнее широкому кругу читателей, позволят просто интерпретировать текущий результат в практическую реализацию решений [13; 14] и приведут к развитию барицентрического метода в направлениях, указанных в настоящей публикации, а также в работах [3; 22].

Список литературы

1. Табаков Д.П., Морозов С.В., Клюев Д.С. Применение тонкопроволочного интегрального представления электромагнитного поля к решению задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих телах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 2. С. 7–14. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14
2. Смирнов Ю.Г., Тихонов С.В. Распространение электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском волноводе, покрытом графеном, с учетом нелинейности // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. Т. 26, № 4. С. 68–77. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.4.68-77
3. Ильинский А.С., Полянский И.С. Барицентрический метод в решении краевых задач математической физики // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 6. С. 834–845. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064122060097
4. Полянский И.С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орел: Академия ФСО России, 2017. 148 с.
5. Полянский И.С. О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, № 3. С. 36–42. URL: https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7016
6. Ильинский А.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. О сходимости барицентрического метода в решении внутренних задач Дирихле и Неймана в R2 для уравнения Гельмгольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, № 1. С. 3–18. DOI: https://doi.org/10.35634/vm210101
7. Электродинамический анализ зеркальных антенн в приближении барицентрического метода / И.С. Полянский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 4. С. 36–47. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47
8. Ilinskiy A.S., Polyansky I.S., Stepanov D.E. Application of the barycentric method to electromagnetic wave diffraction on arbitrarily shaped screens // Computational Mathematics and Modeling. 2021. Vol. 32, no. 1. P. 7–21. DOI: https://doi.org/10.1007/s10598-021-09513-2
9. К вопросу сходимости барицентрического метода в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах / А.С. Ильинский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 3. С. 34–43. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.34-43
10. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области. Часть 1 // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 78, № 1. С. 30–36. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/baritsentricheskie-koordinaty-puassona-dlya-mnogomernoy-approksimatsii-skalyarnogo-potentsiala-vnutri-proizvolnoy-oblasti-chast-1
11. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области. Часть 2 // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 78, № 1. С. 36–42. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/baritsentricheskie-koordinaty-puassona-dlya-mnogomernoy-approksimatsii-skalyarnogo-potentsiala-vnutri-proizvolnoy-oblasti-chast-2
12. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона – Римана // Труды СПИИРАН. 2016. Т. 49, № 6. С. 32–48. DOI: https://doi.org/10.15622/sp.49.2
13. Ильинский А.С., Полянский И.С. Приближенный метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 3. С. 391–408. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919030098
14. Полянский И.С., Логинов К.О. Приближенный метод решения задачи конформного отображения произвольного многоугольника на единичный круг // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 1. С. 107–129. DOI: https://doi.org/10.35634/vm220108
15. Kress R. Linear Integral Equations. New York: Springer, 1999. 367 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0559-3
16. Радыгин В.М., Полянский И.С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. Т. 39, № 1. С. 25–35. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/39/3
17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра / пер. с англ. Н.Я. Виленкина. М.: Наука, 1965. 296 с.
18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
19. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию). М.: Наука, 1979. 408 с.
20. Арушанян И.О. О численном решении граничных интегральных уравнений II рода в областях с угловыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 6. С. 773–782. URL:
21. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / пер. с англ. Б.В. Боярского, И.И. Данилюка; под ред. И.Н. Векуа. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 292 с.
22. Полянский И.С., Касибин С.В. Барицентрический метод в решении задач электродинамического анализа зеркальных и полосковых антенн // Радиотехника, электроника и связь: тезисы докладов VII Международной научно-технической конференции. Омск, 2023. С. 127–128.

Информация об авторе

Полянский Иван Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия.

Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов.
E-mail: van341@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522
SPIN-код (eLibrary): 3238-3737
AuthorID (eLibrary): 651387
ResearcherID (WoS): R-1427-2017

Physics of Wave Processes and Radio Systems
2024, vol. 27, no. 4, pp. 29–39

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.29-39
UDC 535.1
Original Research

Received 28 April 2024
Accepted 29 May 2024
Published 28 December 2024

External barycentric coordinates for arbitrary polygons and an approximate method for calculating them

Ivan S. Polyansky

Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation
35, Priborostroitelnaya Street,
Oryol, 302015, Russia

Abstract – **Background.** In the article, the concept of external barycentric coordinates is introduced to generalize the applicability of the barycentric method in solving external boundary value and initial boundary value problems of mathematical physics. **Aim** of the work is to form a simple analytical relation that allows calculating barycentric coordinates external to a given arbitrary polygonal area with a given accuracy. **Methods.** The corresponding ratio is formed when drawing up an approximate analytical calculation rule, which is based on the solution by the Fredholm method of the external Dirichlet problem for the Laplace equation. The basis of this solution is the decomposition of the kernel of the Fredholm integral equation of the second kind by Legendre polynomials of the first and second kind, formed using the Heine formula. **Results.** The convergence rate of the obtained approximate analytical calculation of the external barycentric coordinates is estimated when establishing exponential convergence in Hilbert space and polynomial convergence in the space of continuous functions. The algorithmic features of the implementation of an approximate analytical solution with a structured representation of pseudocodes of programs for calculating external barycentric coordinates, formed mainly for the MathCad computer algebra system, are clarified. The efficiency is demonstrated by specific examples. **Conclusion.** The author of the article hopes that the detailed results of the algorithmic implementation of the calculation of external barycentric coordinates will arouse interest and make the publication material more accessible to a wide range of readers, which will lead to the development of the barycentric method in solving boundary and initial boundary value problems of mathematical physics.

Keywords – external barycentric coordinates; external Dirichlet problem; Laplace equation; arbitrary polygon; logarithmic potential of the double layer; Fredholm equation; Legendre polynomials.

van341@mail.ru (*Ivan S. Polyansky*)

References

1. D. P. Tabakov, S. V. Morozov, and D. S. Klyuev, “Application of the thin-wire integral representation of the electromagnetic field to solving the problem of diffraction of electromagnetic waves on conducting bodies,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 2, pp. 7–14, 2022, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14. (In Russ.)
2. Yu. G. Smirnov and S. V. Tikhonov, “Electromagnetic TE- and TM-waves propagation in a plane waveguide covered with graphene characterized by nonlinear conductivity,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 26, no. 4, pp. 68–77, 2023, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14. (In Russ.)
3. A. S. Ilinskiy and I. S. Polyansky, “Barycentric method in solving boundary value problems of mathematical physics,” *Differentsial’nye uravneniya*, vol. 58, no. 6, pp. 834–845, 2022, doi: https://doi.org/10.31857/S0374064122060097. (In Russ.)
4. I. S. Polyansky, *Barycentric Method in Computational Electrodynamics*. Oryol: Akademiya FSO Rossii, 2017. (In Russ.)
5. I. S. Polyansky, “About application the barycentric method in the numerical solution of internal problem of electrodynamics,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 36–42, 2018, url: https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7016. (In Russ.)
6. A. S. Ilinskiy, I. S. Polyansky, and D. E. Stepanov, “On the convergence of the barycentric method in solving internal Dirichlet and Neumann problems in R2 for the Helmholtz equation,” *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye nauki*, vol. 31, no. 1, pp. 3–18, 2021, doi: https://doi.org/10.35634/vm210101. (In Russ.)
7. I. S. Polyansky et al., “Electrodynamic analysis of mirror antennas in the approximation of the barycentric method,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 36–47, 2020, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47. (In Russ.)

8. A. S. Ilinskiy, I. S. Polyansky, and D. E. Stepanov, "Application of the barycentric method to electromagnetic wave diffraction on arbitrarily shaped screens," *Computational Mathematics and Modeling*, vol. 32, no. 1, pp. 7–21, 2021, doi: https://doi.org/10.1007/s10598-021-09513-2.

9. A. S. Ilinskiy et al., "On the convergence the barycentric method in solving diffraction problems on conductive thin screens," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 3, pp. 34–43, 2020, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.34-43. (In Russ.)

10. I. S. Polyansky, "Poisson barycentric coordinates for multivariate approximation of scalar potential within an arbitrary area (part 1)," *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 78, no. 1, pp. 30–36, 2015, url: https://cyberleninka.ru/article/n/baritsentricheskie-koordinaty-puassona-dlya-mnogomernoy-approksimatsii-skalyarnogo-potentsiala-vnutri-proizvolnoy-oblasti-chast-1. (In Russ.)

11. I. S. Polyansky, "Poisson barycentric coordinates for multivariate approximation of the scalar potential within an arbitrary area (part 2)," *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 78, no. 1, pp. 36–42, 2015, url: https://cyberleninka.ru/article/n/baritsentricheskie-koordinaty-puassona-dlya-mnogomernoy-approksimatsii-skalyarnogo-potentsiala-vnutri-proizvolnoy-oblasti-chast-2. (In Russ.)

12. I. S. Polyansky, "Barycentric Poisson–Riemann coordinates," *Trudy SPIIRAN*, vol. 49, no. 6, pp. 32–48, 2016, doi: https://doi.org/10.15622/sp.49.2. (In Russ.)

13. A. S. Ilinskiy and I. S. Polyansky, "An approximate method for determining harmonic barycentric coordinates for arbitrary polygons," *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, vol. 59, no. 3, pp. 391–408, 2019, doi: https://doi.org/10.1134/S0044466919030098. (In Russ.)

14. I. S. Polyansky and K. O. Loginov, "An approximate method for solving the problem of conformal mapping of an arbitrary polygon onto a unit circle," *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, vol. 32, no. 1, pp. 107–129, 2022, doi: https://doi.org/10.35634/vm220108. (In Russ.)

15. R. Kress, *Linear Integral Equations*. New York: Springer, 1999, doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0559-3.

16. V. M. Radygin and I. S. Polyansky, "A modified method of sequential conformal mappings of predetermined polygonal regions," *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, vol. 39, no. 1, pp. 25–35, 2016, doi: https://doi.org/10.17223/19988621/39/3. (In Russ.)

17. G. Beytmen and A. Erdeyi, *Higher Transcendental Functions. Hypergeometric Function. Legendre Function*, N. Ya. Vilenkin, Eng. trans., Moscow: Nauka, 1965. (In Russ.)

18. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*. Moscow: Fizmatlit, 1963. (In Russ.)

19. M. L. Krasnov, *Integral Equations. (Introduction to Theory)*. Moscow: Nauka, 1979. (In Russ.)

20. I. O. Arushanyan, "On the numerical solution of boundary integral equations of the second kind in domains with corner points," *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, vol. 36, no. 6, pp. 773–782, 1996. (In Russ.)

21. F. Trikomi, *Integral Equations*, B. V. Boyarsky and I. I. Danilyuk, Eng. trans., I. N. Vekua, Ed., Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1960. (In Russ.)

22. I. S. Polyansky and S. V. Kasibin, "Barycentric method in solving problems of electrodynamic analysis of mirror and strip antennas," Radiotekhnika, elektronika i svyaz': tezisy dokladov VII Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii, Omsk, pp. 127–128, 2023. (In Russ.)

Information about the Author

Ivan S. Polyansky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, employee of the Academy of the Federal Security Service of the Russian Federation, Oryol, Russia.

Research interests: mathematical modeling, dynamic systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mapping, computational electrodynamics, digital signal processing.

E-mail: van341@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522
SPIN-code (eLibrary): 3238-3737
AuthorID (eLibrary): 651387
ResearcherID (WoS): R-1427-2017