

Долгоживущие перепутанные состояния в двойной модели Джейнса – Каммингса с прямым диполь-дипольным взаимодействием кубитов

Е.К. Башкиров 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
443086, Россия, г. Самара,
Московское шоссе, 34

Аннотация – Обоснование. Исследование перепутанных состояний модели Джейнса – Каммингса и ее многокубитных обобщений и расширений по-прежнему остается важной и актуальной темой современной квантовой оптики, квантовой информатики и физики твердого тела. Это связано с тем, что такие модели естественным образом описывают динамику взаимодействия логических элементов квантовых устройств (кубитов), таких как квантовые компьютеры или квантовые сети с микроволновыми полями резонаторов, используемыми для управления состояниями кубитов. В этой связи представляется весьма актуальной задача поиска наиболее эффективных схем генерации, управления и контроля перепутанных состояний кубитов в рамках моделей типа Джейнса – Каммингса. **Цель.** Исследовать особенности динамики перепутывания пары кубитов, каждый из которых заперт в одномодовом резонаторе и нерезонансно взаимодействует с модой вакуумного поля, при наличии расстройек частот переходов в кубитах и частот резонаторных мод и диполь-дипольного взаимодействия кубитов. **Методы.** Для анализа динамики рассматриваемой системы исследовано решение временного квантового уравнения Шредингера. Найдено точное решение указанного уравнения в случае начальных перепутанных состояний кубитов белловского типа. Точное решение уравнения эволюции использовано для вычисления критерия перепутывания пары кубитов – отрицательности. Проведено численное моделирование временной зависимости отрицательности для различных значений параметров рассматриваемой модели. **Результаты.** Показано, что наличие расстройек, разницы в константах кубит-фотонной связи и диполь-дипольного взаимодействия существенно влияет на максимальную степень перепутывания подсистемы кубитов в процессе их эволюции. Найдено, что для определенных параметров рассматриваемой модели начальные белловские перепутанные состояния кубитов могут рассматриваться в качестве долгоживущих устойчивых состояний. **Заключение.** Установлена возможность реализации долгоживущих устойчивых двухкубитных перепутанных состояний в рассматриваемой системе. Полученные результаты могут быть использованы для эффективного контроля и управления степенью перепутывания кубитов, взаимодействующих с микроволновыми полями резонаторов.

Ключевые слова – неидентичные сверхпроводящие кубиты; двойная модель Джейнса – Каммингса; резонатор; квантовое вакуумное поле; перепутанные состояния; расстройка; диполь-дипольное взаимодействие; отрицательность; долгоживущие перепутанные состояния.

Введение

Квантовые перепутанные состояния имеют фундаментальное значение в квантовой физике как для понимания нелокальности квантовой механики, так и для практических применений в квантовых вычислениях и коммуникациях [1]. В связи с этим в последние годы предприняты большие усилия по исследованию свойств перепутанных состояний, механизмов их генерации и контроля в различных системах. Хорошо известно, что модель Джейнса – Каммингса (МДК) является простейшей физической моделью, описывающей взаимодействие естественного или искусственного двухуровневого атома (кубита) с полем одномодового резонатора [2]. Указанная модель была использована для описания широкого спектра явлений в квантовой оптике и конденсированных системах, таких как захваченные ионы, квантовые точки,

сверхпроводящие цепи др. [3]. Для изучения более широкого круга явлений, обусловленных взаимодействием систем кубитов с квантовыми полями резонаторов, в последние годы были исследованы многочисленные обобщения МДК. Так, в работе [4] была предложена так называемая двойная модель Джейнса – Каммингса (ДМДК), состоящая из двух двухуровневых атомов (кубитов) и двух мод двух индивидуальных резонаторов, при условии, что каждый атом взаимодействует только с полем одного резонатора. Исследовав динамику парного перепутывания кубитов в этой модели, авторы обнаружили, что для малофотонных полей перепутывание кубитов не является стационарным и в системе могут проявляться периодические флуктуации в виде мгновенной смерти перепутывания (МСП). В последнее время появилось большое число работ, посвященных изучению перепутывания кубитов в рамках модели ДМДК и ее обобщений.

В работе [5] изучено влияние динамического сдвига Штарка на перепутывание кубитов в рамках ДМДК и показано, что при больших значениях параметра штарковского сдвига два кубита могут оставаться в стационарном перепутанном состоянии. В работе [6] была рассмотрена ДМДК при наличии расстройки частот переходов в кубитах и полей резонаторов в случае различных значений констант связи кубитов с полями резонаторов и показано, что долгоживущие перепутанные состояния кубитов могут быть получены, когда один кубит нерезонансно взаимодействует с полем резонатора, а другой – полностью отстроен от частоты своего резонаторного поля. В работе [7] обсуждалось влияние различных начальных состояний кубитов на их перепутывание в процессе эволюции. Исследование динамики перепутывания кубитов в двухфотонной ДМДК в случае, когда поля резонаторов предварительно максимально перепутаны, проведено в работе [8]. Авторы также показали, что наличие когерентности начальных состояний кубитов уменьшает степень их перепутывания в процессе эволюции и приводит к возникновению МСП. Рассмотрение ДМДК с керровской средой показало, что с помощью керровской нелинейности можно контролировать динамику перепутывания и подавлять явление МСП [9–11]. Немарковская релаксация в рамках ДМДК рассматривалась в [12]. Динамика перепутывания кубитов в рамках ДМДК вне приближения вращающейся волны изучалась в [13]. Авторы показали, что исчезновение перепутывания кубитов может быть индуцировано противовращательными членами. Перепутывание кубитов в рамках ДМДК с тепловыми полями резонаторов исследовалось в работах [14; 15]. Динамика перепутывания двух идентичных кубитов в рамках двухфотонной ДМДК с учетом расстройки между частотами переходов в кубитах и двойной частотой мод поля резонаторов, а также керровской среды в обоих резонаторах анализировалась в работе [16].

Исследованию динамики перепутывания различных подсистем, таких как кубит – кубит, кубит – поле и поле – поле для ДМДК с полями резонаторов в сжатых когерентных тепловых состояниях посвящена недавняя работа [17].

Для сверхпроводящих колец с джозефсоновскими переходами удалось экспериментально реализовать условия, при которых прямое диполь-дипольное взаимодействие кубитов может существенно превосходить константу кубит-по-

левого взаимодействия [18; 19]. В этой связи в нашей работе [20] исследовалось влияние прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов на их перепутывание в рамках нерезонансной ДМДК [20]. При этом была рассмотрена модель с одинаковыми константами взаимодействия кубитов с полями индивидуальных резонаторов и одинаковыми расстройками частот кубитов и полей резонаторов. Однако за счет флуктуаций положения кубитов в полях стоячих волн индивидуальных резонаторов практически невозможно добиться равенства констант кубит-полевого взаимодействия. Для макроскопических объектов – сверхпроводящих колец – невозможно также добиться равенства расстроек. Поэтому представляет существенный интерес обобщить результаты работы [20] на случай неидентичных кубитов.

В данной работе мы рассматриваем динамику нерезонансный ДМДК с учетом прямого диполь-дипольного взаимодействия между неидентичными кубитами. В качестве начальных состояний полей резонаторов выбраны вакуумные состояния, а в качестве начальных состояний кубитов – перепутанные состояния белловского типа. С использованием критерия перепутывания кубитов – отрицательности, мы исследовали зависимость степени перепутывания от начальных состояний кубитов и параметров рассматриваемой модели, таких как соотношение констант кубит-полевого взаимодействия, интенсивности дипольного взаимодействия и расстроек между частотами перехода в кубитах и частотами полей резонаторов.

1. Модель и ее точное решение

Мы рассматриваем два неидентичных сверхпроводящих кубита Q_1 и Q_2 с частотами энергетических щелей ω_{01} и ω_{02} соответственно, взаимодействующих нерезонансно каждый со своим индивидуальным резонатором, которые мы будем обозначать как «a» и «b» (кубит Q_1 взаимодействует с модой резонатора «a», а кубит Q_2 с модой «b»). Из-за возможности случайных отклонений в положении кубитов относительно пучностей стоячих волн в резонаторах будем полагать, что константы связи между кубитами и полями резонаторов не равны. Учет также прямое диполь-дипольное взаимодействие кубитов. Тогда в системе отсчета, вращающейся с частотой моды резонаторов, гамильтониан этой системы можно записать в виде

$$H = (1/2)\hbar(\delta_1\sigma_1^z + \delta_2\sigma_2^z) + \hbar\gamma_a(\sigma_1^+a + a^+\sigma_1^-) + \hbar\gamma_b(\sigma_2^+b + b^+\sigma_2^-) + \hbar J(\sigma_1^+\sigma_2^- + \sigma_1^-\sigma_2^+), \quad (1)$$

где $(1/2)\sigma_i^z$ – оператор инверсии населенности в i -м кубите ($i=1,2$); $\sigma_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle-|$, $\sigma_i^- = |-\rangle_{ii}\langle+|$ – операторы переходов между возбужденным $|+\rangle_i$ и основным $|-\rangle_i$ состояниями в i -м кубите; a^+ и a – операторы рождения и уничтожения фотонов в резонаторной моде «а»; b^+ и b – операторы рождения и уничтожения фотонов в резонаторной моде «b»; γ_a – константа связи кубита Q_1 с резонаторной модой «а»; γ_b – константа связи кубита Q_2 с резонаторной модой «b»; $\delta_a = \omega_{01} - \omega$ и $\delta_b = \omega_{02} - \omega$ – расстройки частот кубитов Q_1 и Q_2 и мод полей «а» и «b» соответственно и J – константа прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов.

Выберем в качестве начальных состояний кубитов перепутанные состояния белловского типа:

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = \cos\theta |+, -\rangle + \sin\theta |-, +\rangle, \quad (2)$$

и

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = \cos\theta |+, +\rangle + \sin\theta |-, -\rangle, \quad (3)$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$. Для полей резонаторов выберем вакуумные начальные состояния так, что полевая волновая функция двух мод имеет вид

$$|\Psi(0)\rangle_F = |0\rangle_a \otimes |0\rangle_b = |0, 0\rangle.$$

Эволюция рассматриваемой системы для начальных состояний кубитов (2) происходит в четырехмерном гильбертовом пространстве с базисными векторами

$$|-, -, 0, 1\rangle, |-, -, 1, 0\rangle, |-, +, 0, 0\rangle, |+, -, 0, 0\rangle.$$

Для нахождения временной волновой функции воспользуемся представлением «одетых» состояний, т. е. собственных функций гамильтониана (1). В общем случае «одетые» состояния имеют чрезвычайно громоздкий вид. Поэтому «одетые» состояния для произвольных соотношений между параметрами модели в настоящей работе не приводятся. Ниже показаны явные выражения для «одетых» состояний в двух специальных случаях.

1. Пусть $\delta_a = \delta_b = 0$ и $\gamma_a \neq \gamma_b$. В этом случае собственные функции гамильтониана (1) могут быть записаны как

$$|\Phi_i\rangle = \xi_i (X_{i1} |-, -, 0, 1\rangle + X_{i2} |-, -, 1, 0\rangle + X_{i3} |-, +, 0, 0\rangle + X_{i4} |+, -, 0, 0\rangle) \quad (4)$$

($i=1, 2, 3, 4$),

где

$$\xi_i = 1 / \sqrt{|X_{i1}|^2 + |X_{i2}|^2 + |X_{i3}|^2 + |X_{i4}|^2}$$

и

$$X_{11} = X_{21} = -\frac{2g\alpha}{-1+g^2-\alpha^2+B},$$

$$X_{12} = -X_{22} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+g^2+\alpha^2-B}},$$

$$X_{13} = -X_{23} = \frac{\sqrt{2}\alpha\sqrt{1+g^2+\alpha^2-B}}{-1+g^2-\alpha^2+B},$$

$$X_{14} = X_{24} = X_{34} = X_{44} = 1,$$

$$X_{31} = X_{41} = \frac{2g\alpha}{1-g^2+\alpha^2+B},$$

$$X_{32} = -X_{42} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+g^2+\alpha^2+B}},$$

$$X_{33} = -X_{43} = -\frac{\sqrt{2}\alpha\sqrt{1+g^2+\alpha^2+A}}{1-g^2+\alpha^2+B}.$$

Здесь

$$\Delta = \delta / \gamma, \quad \alpha = J / \gamma, \quad g = \gamma_b / \gamma_a$$

$$\text{и } B = \sqrt{(g^2 - 1)^2 + 2(g^2 + 1)\alpha^2 + \alpha^4}.$$

Соответствующие собственные значения энергии есть

$$E_1 = -\gamma_a \frac{\sqrt{1+g^2+\alpha^2-B}}{2},$$

$$E_2 = \gamma_a \frac{\sqrt{1+g^2+\alpha^2-B}}{2},$$

$$E_3 = -\gamma_a \frac{\sqrt{1+g^2+\alpha^2+B}}{2},$$

$$E_4 = \gamma_a \frac{\sqrt{1+g^2+\alpha^2+B}}{2}.$$

2. Пусть $\delta_a = \delta_b = \delta$ и $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$. В рассматриваемом случае собственные функции гамильтониана (1) также могут быть представлены в виде (4) с коэффициентами

$$X_{11} = X_{12} = \frac{1}{2} \left(-\alpha - \sqrt{4 + (\alpha - \Delta)^2} + \Delta \right),$$

$$X_{13} = 1, \quad X_{14} = 1;$$

$$X_{21} = X_{22} = \frac{1}{2} \left(-\alpha + \sqrt{4 + (\alpha - \Delta)^2} + \Delta \right),$$

$$X_{23} = 1, \quad X_{24} = 1;$$

$$X_{31} = \frac{1}{2} \left(-\alpha - \Delta + \sqrt{4 + (\alpha + \Delta)^2} \right),$$

$$X_{32} = \frac{1}{2} \left(\alpha + \Delta - \sqrt{4 + (\alpha + \Delta)^2} \right),$$

$$X_{33} = -1, \quad X_{34} = 1;$$

$$X_{41} = \frac{1}{2} \left(-\alpha - \Delta - \sqrt{4 + (\alpha + \Delta)^2} \right),$$

$$X_{42} = \frac{1}{2} \left(\alpha + \Delta + \sqrt{4 + (\alpha + \Delta)^2} \right),$$

$$X_{43} = -1, \quad X_{44} = 1.$$

Соответствующие собственные значения энергии есть

$$E_1 = -\gamma \frac{1}{2} \left(\alpha + \Delta - \sqrt{4 + \alpha^2 - 2\alpha\Delta + \Delta^2} \right),$$

$$E_2 = \gamma \frac{1}{2} \left(\alpha + \Delta + \sqrt{4 + \alpha^2 - 2\alpha\Delta + \Delta^2} \right),$$

$$E_3 = -\gamma \frac{1}{2} \left(-\alpha + \Delta - \sqrt{4 + \alpha^2 + 2\alpha\Delta + \Delta^2} \right),$$

$$E_4 = \gamma \frac{1}{2} \left(-\alpha + \Delta + \sqrt{4 + \alpha^2 + 2\alpha\Delta + \Delta^2} \right).$$

Временная волновая функция рассматриваемой модели может быть найдена с использованием оператора эволюции следующим образом:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle.$$

Для того чтобы найти явный вид временной волновой функции $|\Psi(t)\rangle$ для начального состояния кубитов (2) и вакуумного состояния поля резонатора, достаточно начальную волновую функцию $|\Psi(0)\rangle$ представить в виде комбинации собственных функций (4). В результате временная волновая функция системы примет вид

$$|\Psi(t)\rangle = C_1(t) |-, -, 0, 1\rangle + C_2(t) |-, -, 1, 0\rangle + C_3(t) |-, +, 0, 0\rangle + C_4(t) |+, +, n\rangle. \quad (5)$$

Мы нашли явный вид коэффициентов $C_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) для обоих специальных случаев и выбранного начального состояния кубитов. Однако из-за чрезмерно громоздкого вида указанные выражения в настоящей работе опущены.

Для начального состояния кубитов (3) эволюция вектора состояния происходит в 5-мерном гильбертовом пространстве с базисом

$$|+, +, 0, 0\rangle, |+, -, 0, 1\rangle, |-, +, 1, 0\rangle, |-, -, 1, 1\rangle, |-, -, 0, 0\rangle.$$

Временная волновая функция системы в этом случае имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = C_1^{(1)}(t) |+, +, 0, 0\rangle + C_2^{(1)}(t) |+, -, 0, 1\rangle + C_3^{(1)}(t) |-, +, 1, 0\rangle + C_4^{(1)}(t) |-, -, 1, 1\rangle + C_5^{(1)}(t) |-, -, 0, 0\rangle. \quad (6)$$

«Одетые» состояния и коэффициенты $C_i^{(1)}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) даже для рассмотренных выше специальных случаев для начальных состояний (2) имеют слишком громоздкий вид, чтобы представить их в настоящей работе.

2. Вычисление отрицательности

В настоящей работе нами в качестве количественного критерия перепутывания кубитов выбран параметр Переса – Хородецких, или отрицательность. Отрицательность определяется стандартным образом в виде следующего выражения:

$$\varepsilon = -2 \sum \mu_i^-,$$

где μ_i^- – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита двухкубитной матрицы плотности.

Используя явные выражения для временных волновых функций системы (5) и (6), нетрудно получить матрицу плотности изучаемой системы в виде

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|. \quad (7)$$

Усредняя полную матрицу плотности (7) по переменным поля, можно получить матрицу плотности подсистемы кубитов

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = \text{Tr}_{\text{Field}} |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|. \quad (8)$$

В двухкубитном базисе $|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle$ матрица плотности подсистемы кубитов в случае их начального состояния (2) принимает вид

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V(t) & H(t) & 0 \\ 0 & H(t)^* & W(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R(t) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Матричные элементы (9) есть

$$V(t) = |C_4(t)|^2, \quad W(t) = |C_3(t)|^2, \\ R(t) = |C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2, \quad H(t) = C_4(t)C_3(t)^*.$$

Частично транспонированная по переменным одного кубита по отношению к (9) двухкубитная матрица плотности есть

$$\rho_{Q_1 Q_2}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H(t)^* \\ 0 & V(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W(t) & 0 \\ H(t) & 0 & 0 & R(t) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матрица (10) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате отрицательность для рассматриваемого начального состояния кубитов может быть представлена в виде

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(U(t) - R(t))^2 + 4 |H(t)|^2} - U(t) - R(t). \quad (11)$$

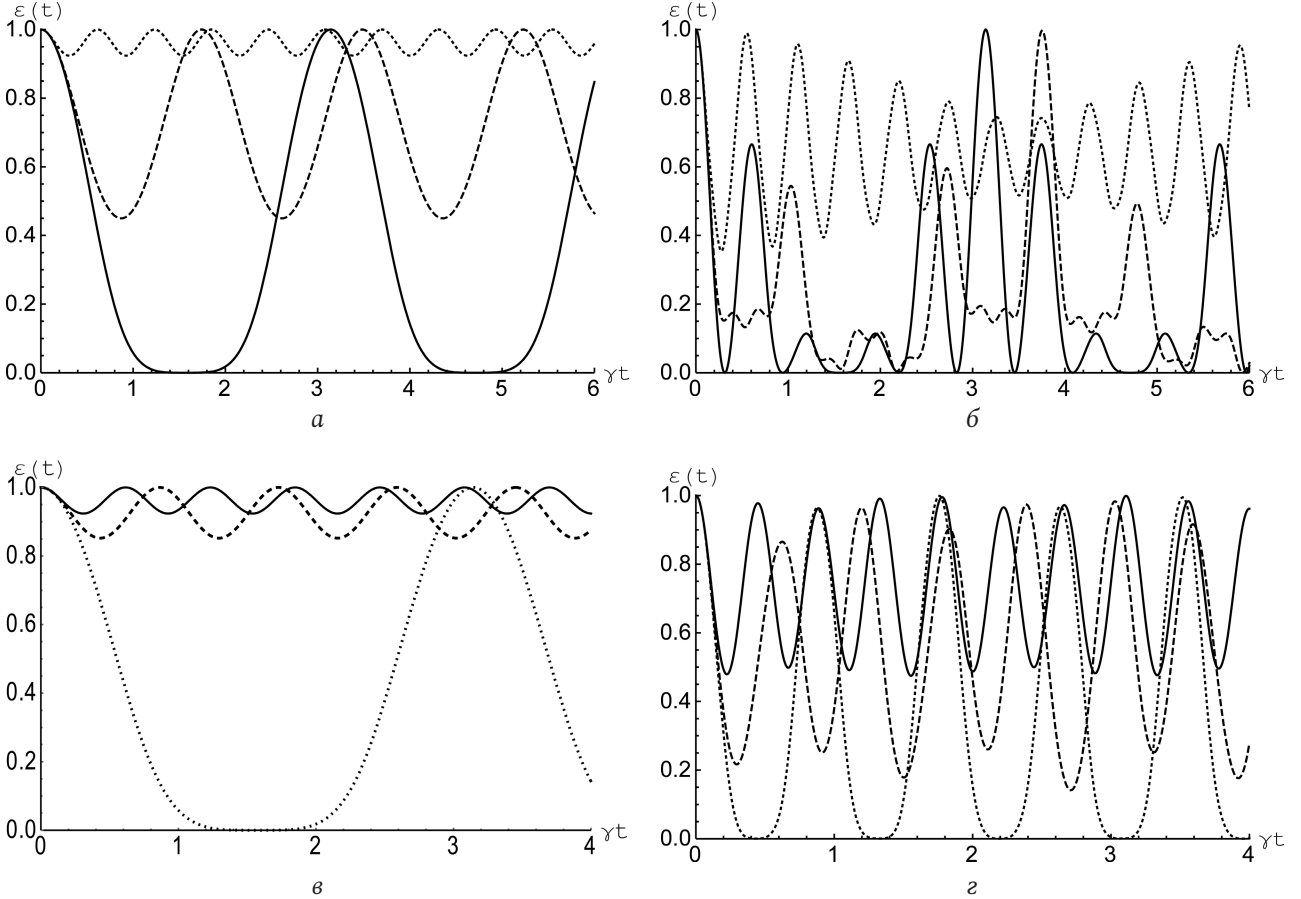


Рис. 1. Отрицательность как функция безразмерного времени $\gamma t (\gamma \equiv \gamma_a)$ для начального состояния кубитов (2) при $\theta = \pi/4$ и $\delta_a = \delta_b = 0$, $\gamma_b = \gamma_a$ (а); $\delta_a = \delta_b = 0$, $\gamma_b = 5\gamma_a$ (б); $\delta_b = \delta_a = 10$, $\gamma_b = \gamma_a$ (в) и $\delta_b = \delta_a = 10$, $\gamma_b = 5\gamma_a$ (г). Безразмерная константа диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0$ (сплошная линия), $\alpha = 3$ (штриховая линия) и $\alpha = 10$ (точечная линия)
Fig. 1. Negativity vs scaled time $\gamma t (\gamma \equiv \gamma_a)$ for initial qubits state (2) with $\theta = \pi/4$ and $\delta_a = \delta_b = 0$, $\gamma_b = \gamma_a$ (a); $\delta_a = \delta_b = 0$, $\gamma_b = 5\gamma_a$ (b), $\delta_b = \delta_a = 10$, $\gamma_b = \gamma_a$ (c) and $\delta_b = \delta_a = 10$, $\gamma_b = 5\gamma_a$ (d). Scaled dipole-dipole coupling $\alpha = 0$ (solid), $\alpha = 3$ (dashed) and $\alpha = 10$ (dotted)

Для начального состояния кубитов (3) редуцированная двухкубитная матрица плотности имеет вид

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) & 0 & 0 & H_1(t) \\ 0 & V_1(t) & H_2(t) & 0 \\ 0 & H_2(t)^* & W_1(t) & 0 \\ H_1(t)^* & 0 & 0 & R_1(t) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(t) &= |C_1^{(1)}(t)|^2, & H_1(t) &= C_1^{(1)}(t)C_5^{(1)*}(t), \\ H_2(t) &= C_2^{(1)}(t)C_3^{(1)*}(t), \\ V_1(t) &= |C_2^{(1)}(t)|^2, & W_1(t) &= |C_3^{(1)}(t)|^2, \\ R_1(t) &= |C_4^{(1)}(t)|^2 + |C_5^{(1)}(t)|^2. \end{aligned}$$

Соответствующая (12) частично транспонированная по переменным одного кубита матрица есть

$$\rho_{Q_1 Q_2}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) & 0 & 0 & H_2(t)^* \\ 0 & V_1(t) & H_1(t)^* & 0 \\ 0 & H_1(t) & W_1(t) & 0 \\ H_2(t) & 0 & 0 & R_1(t) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матрица (13) имеет два собственных значения, которые могут принимать отрицательные значения. В результате для начального состояния (3) отрицательность принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \sqrt{(U_1(t) - R_1(t))^2 + 4|H_2(t)|^2} - U_1(t) - R_1(t) + \\ &+ \sqrt{(V_1(t) - W_1(t))^2 + 4|H_1(t)|^2} - V_1(t) - W_1(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Результаты численных расчетов временной зависимости отрицательностей (11) и (14) для различных значений параметров модели представлены на рис. 1–2.

3. Результаты и обсуждения

Результаты расчетов временной зависимости отрицательности для начального состояния кубитов (2) приведены на рис. 1, а для начального состояния кубитов (3) – на рис. 2. Значениям безразмерной константы диполь-дипольного взаимодействия кубитов соответствуют кривые: $\alpha = 0$ (сплошные линии), $\alpha = 3$ (штриховые линии)

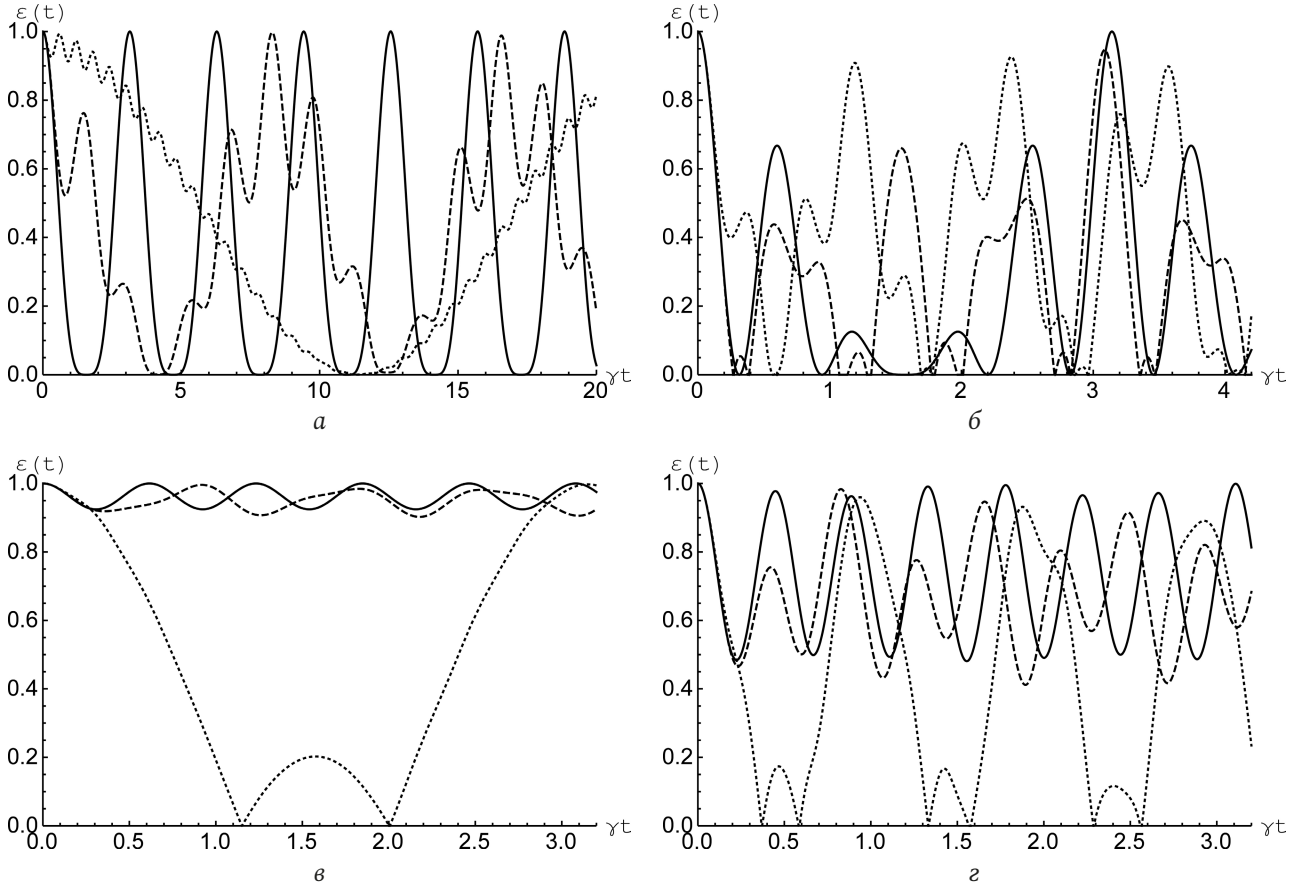


Рис. 2. Отрицательность как функция безразмерного времени $\gamma t (\gamma \equiv \gamma_a)$ для начального состояния кубитов (3) при $\theta = \pi/4$ и $\delta_a = \delta_b = 0$, $\gamma_b = \gamma_a$ (а); $\delta_a = \delta_b = 0$, $\gamma_b = 5\gamma_a$ (б), $\delta_b = \delta_a = 10$, $\gamma_b = \gamma_a$ (в) и $\delta_b = \delta_a = 10$, $\gamma_b = 5\gamma_a$ (г). Безразмерная константа диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0$ (сплошная линия), $\alpha = 3$ (штриховая линия) и $\alpha = 10$ (точечная линия)

Fig. 2. Negativity vs scaled time $\gamma t (\gamma \equiv \gamma_a)$ for initial qubits state (3) with $\theta = \pi/4$ and $\delta_a = \delta_b = 0$, $\gamma_b = \gamma_a$ (a); $\delta_a = \delta_b = 0$, $\gamma_b = 5\gamma_a$ (b), $\delta_b = \delta_a = 10$, $\gamma_b = \gamma_a$ (c) and $\delta_b = \delta_a = 10$, $\gamma_b = 5\gamma_a$ (d). Scaled dipole-dipole coupling $\alpha = 0$ (solid), $\alpha = 3$ (dashed) and $\alpha = 10$ (dotted)

и $\alpha = 10$ (точечные линии). На рис. 1, а и б представлена отрицательность как функция безразмерного времени γt для модели с резонансным взаимодействием кубитов и поля в случае начального состояния кубитов вида (2). Из рис. 1, а видно, что для случая, когда константы взаимодействия кубитов с полем резонатора одинаковы, включение диполь-дипольного взаимодействия приводит к существенному уменьшению амплитуд осцилляций Раби отрицательности и, соответственно, к стабилизации начального перепутывания кубитов. На рис. 1, б представлены аналогичные зависимости для модели с различными константами кубит-фотонного взаимодействия. Из рисунка видно, что в рассматриваемом случае влияние диполь-дипольного взаимодействия на степень перепутывания кубитов намного уменьшается, так что существенной стабилизации начального перепутывания кубитов удастся достичь лишь при значительно больших интенсивностях прямого взаимодействия кубитов. На рис. 1, в и г представлена отрицательность как функция безразмерного

времени γt для нерезонансного взаимодействия кубитов и поля и начального состояния кубитов (2). Рис. 1, в соответствует одинаковым константам кубит-фотонного взаимодействия, а рис. 1, г – различным. Из рисунков хорошо видно, что включение прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов для случая нерезонансного взаимодействия кубитов и поля приводит к обратному эффекту, т. е. к увеличению амплитуд осцилляций отрицательности и, соответственно, к невозможности реализовать в системе долгоживущие стабильные перепутанные состояния кубитов.

На рис. 2, а и г представлена отрицательность как функция безразмерного времени γt для модели с резонансным взаимодействием кубитов и поля и начального состояния кубитов (3). Для кубитов с одинаковыми константами кубит-полевого взаимодействия (рис. 2, а) включение диполь-дипольного взаимодействия приводит к увеличению периода осцилляций отрицательности, но не влияет на максимальную степень перепутывания кубитов, возникающую в процессе их эволюции. Для куби-

тов с разными константами кубит-полевого связи (рис. 2, б) ситуация принципиально иная. Включение прямого взаимодействия кубитов увеличивает максимальную степень их перепутывания в процессе эволюции. На рис. 2, в и г представлена отрицательность как функция безразмерного времени γt для модели с нерезонансным взаимодействием кубитов и поля и начального состояния кубитов (3). В рассматриваемом случае влияние прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов на степень их перепутывания аналогично влиянию указанного параметра для начального состояния кубитов вида (3).

Заключение

В данной работе в рамках двойной модели Джейнса – Каммингса рассмотрена динамика перепутывания двух дипольно связанных сверхпроводящих кубитов с различными значениями констант кубит-фотонной связи и расстройек частот переходов в кубитах и частот резонаторных полей. В качестве критерия степени перепутывания кубитов выбрана отрицательность, а в качестве начальных состояний кубитов – максимально перепутанные двухкубитные состояния. Началь-

ные состояния полей резонаторов – вакуумные поля. Исследована зависимость максимальной степени перепутывания кубитов от интенсивности диполь-дипольного взаимодействия, а также расстройек и соотношения констант кубит-фотонных связей. Результаты расчетов выявили, что эти параметры оказывают существенное влияние на периоды и амплитуды осцилляций Раби отрицательности. Показано, что начальные состояния кубитов вида (2) в случае резонансного взаимодействия кубитов с полями резонаторов могут рассматриваться при наличии интенсивного диполь-дипольного взаимодействия в качестве долгоживущих стабильных перепутанных состояний для любых соотношений констант кубит-фотонной связи. В нерезонансном случае такие состояния могут быть реализованы только для системы с одинаковыми константами кубит-полевого взаимодействия. При этом начальные состояния кубитов вида (3) при наличии интенсивного диполь-дипольного взаимодействия могут быть долгоживущими стабильными состояниями только в случае резонансного взаимодействия кубитов с полями резонаторов и одинаковыми константами кубит-фотонного взаимодействия.

Список литературы

1. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. 10th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 702 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667>
2. Larson J., Mavrogordatos T. The Jaynes–Cummings Model and Its Descendants. 2nd ed. Bristol: IOP Publishing, 2024. 562 p. DOI: <https://doi.org/10.1088/978-0-7503-6452-2>
3. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // Reports on Progress in Physics. 2011. Vol. 74. P. 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>
4. Yöncü M.Y., Yu T., Eberly J.H. Sudden death of entanglement of two Jaynes–Cummings atoms // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2006. Vol. 39. P. S621. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/39/15/S09>
5. Effect of the Stark shift on entanglement in a double two-photon JC model / Y.-H. Hu [et al.] // Journal of Modern Optics. 2008. Vol. 55, no. 21. P. 3551–3562. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500340802337382>
6. Sudden death and long-lived entanglement between two atoms in a double JC model system / Y.-H. Hu [et al.] // International Journal of Theoretical Physics. 2008. Vol. 47. P. 2554–2565. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-008-9689-y>
7. Du M., Fang M.-F., Liu X. Sudden birth of entanglement between two atoms in a double JC model // Chinese Optics Letters. 2009. Vol. 7, no. 5. P. 443–445. DOI: <https://doi.org/10.3788/COL20090705.0443>
8. The entanglement dynamics of two atoms in a double two-photon Jaynes–Cummings model / Q. Liao [et al.] // Chinese Journal of Physics. 2013. Vol. 51, no. 2. P. 404–411. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/3/030309>
9. Xie Q., Fang M.-F. Entanglement dynamics of atoms in double Jaynes–Cummings models with Kerr medium // Communications in Theoretical Physics. 2010. Vol. 54, no. 5. P. 840–844. DOI: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/5/12>
10. Entanglement dynamics of a double two-photon Jaynes–Cummings model with Kerr-like medium / X.-C. Ouyang [et al.] // Chinese Physics B. 2010. Vol. 19, no. 3. P. 030309. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/3/030309>
11. Baghshahi H.R., Tavassoly M.K., Faghihi M.J. Entanglement criteria of two two-level atoms interacting with two coupled modes // International Journal of Theoretical Physics. 2015. Vol. 54, no. 8. P. 2839–2854. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-015-2520-7>
12. Zou H.-M., Fang M.-F. Analytical solution and entanglement swapping of a double Jaynes–Cummings model in non-Markovian environments // Quantum Information Processing. 2015. Vol. 14. P. 2673–2686. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11128-015-1006-0>
13. Entanglement dynamics of two qubits coupled independently to cavities in the ultrastrong coupling regime: Analytical results / W.-T. Zhu [et al.] // Chinese Physics Letters. 2016. Vol. 33, no. 5. P. 050302. DOI: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/33/5/050302>
14. Bashkurov E.K. Thermal entanglement in a double Jaynes–Cummings model // Proceedings of SPIE. 2020. Vol. 11458. P. 114580L. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2563272>

15. Башкиров Е.К., Гусляникова М.О. Тепловое перепутывание в двойной модели Джейнса – Каммингса // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 2. С. 7–13. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.2.7-13>
16. Захаров Р.К., Башкиров Е.К. Влияние расстройки и керровской нелинейности на атом-атомное перепутывание в двойной двухфотонной модели Джейнса – Каммингса // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2021. Т. 24, № 1. С. 9–14. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.9-14>
17. Mandal K. Entanglement dynamics in double Jaynes–Cummings model and intensity-dependent double Jaynes–Cummings model for squeezed coherent thermal states // *arXiv:2405.10564[quant-physics]*. 2024. 24 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.10564>
18. Evidence for entangled states of two coupled flux qubits / A. Izmailkov [et al.] // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93. P. 037003. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.037003>
19. Direct Josephson coupling between superconducting flux qubits / M. Grajcar [et al.] // *Physical Review B*. 2005. Vol. 72. P. 020503(R). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.72.020503>
20. Bashkirov E.K. Entanglement between two dipole-coupled qubits interacting with two independent slightly detuned cavity modes // *International Journal of Theoretical Physics*. 2019. Vol. 58, no. 7. P. 2346–2356. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04126-3>

Информация об авторе

Башкиров Евгений Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 1978 г. окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 г. – аспирантуру при Московском государственном университете. Автор более 360 научных работ.

Область научных интересов: квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2025, vol. 28, no. 3, pp. 7–15

DOI [10.18469/1810-3189.2025.28.3.7-15](https://doi.org/10.18469/1810-3189.2025.28.3.7-15)

UDC 537.86:530.145

Original Research

Received 25 March 2025

Accepted 28 April 2025

Published 30 September 2025

Long-lived entangled states in the double Jaynes–Cummings model taking into account the qubits direct dipole-dipole interaction

Evgenii K. Bashkirov 

Samara National Research University
 34, Moskovskoye shosse,
 Samara, 443086, Russia

Abstract – Background. The study of entangled states in Jaynes–Cummings models and its multiqubit generalizations and extensions remains an important and relevant topic in modern quantum optics, quantum information science and solid state physics. This is due to the fact that such models naturally describe the dynamics of interaction of logical elements of quantum devices, such as quantum computers or quantum networks (qubits) with microwave fields of resonators used to control the states of qubits. In this regard, it is very important to search for the most efficient schemes of generation, control and monitoring of entangled qubit states within the framework of Jaynes–Cummings type models. **Aim.** To investigate the entanglement dynamics of a pair of qubits, each of which is locked in a single-mode resonator and interacts non-resonantly with the vacuum field mode, in the presence of detuning between frequencies of transitions in the qubits and frequencies of resonator modes and dipole-dipole interaction of the qubits. **Methods.** To analyze the dynamics of the considered system, the solution of the time-dependent quantum Schrödinger equation is investigated. The exact solution of the above equation in the case of entangled Bell-type initial qubits states is found. This is used to calculate the criterion of entanglement of a pair of qubits – negativity. Numerical modeling of the time dependence of negativity for different values of the parameters of the considered model has been carried out. **Results.** It is shown that the presence of detuning, the difference in the qubit-photon couplings and the intensity of the dipole-dipole interaction significantly affect the maximum degree of entanglement of the qubit subsystem during its evolution. It is found that for certain parameters of the model under consideration, the initial Bell entangled states of qubits can be considered as long-lived stable states. **Conclusion.** The possibility of realization of long-lived and robust two-qubit entangled states in the system under consideration has been established. The obtained results can be used for effective control and manipulation of the degree of entanglement of qubits interacting with microwave fields of resonators.

Keywords – non-identical superconducting qubits; double Jaynes–Cummings model; resonator; quantum vacuum field; entangled states; detuning; dipole-dipole interaction; negativity; long-lived entangled states.

References

1. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, doi: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667>.
2. J. Larson and T. Mavrogordatos, *The Jaynes–Cummings Model and Its Descendants*, 2nd ed. Bristol: IOP Publishing, 2024, doi: <https://doi.org/10.1088/978-0-7503-6452-2>.
3. I. Buluta, S. Ashhab, and F. Nori, “Natural and artificial atoms for quantum computation,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 74, p. 104401, 2011, doi: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
4. M. Y. Yöncü, T. Yu, and J. H. Eberly, “Sudden death of entanglement of two Jaynes–Cummings atoms,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 39, p. S621, 2006, doi: <https://doi.org/10.1088/0953-4075/39/15/S09>.
5. Y.-H. Hu et al., “Effect of the Stark shift on entanglement in a double two-photon JC model,” *Journal of Modern Optics*, vol. 55, no. 21, pp. 3551–3562, 2008, doi: <https://doi.org/10.1080/09500340802337382>.
6. Y.-H. Hu et al., “Sudden death and long-lived entanglement between two atoms in a double JC model system,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 47, pp. 2554–2565, 2008, doi: <https://doi.org/10.1007/s10773-008-9689-y>.
7. M. Du, M.-F. Fang, and X. Liu, “Sudden birth of entanglement between two atoms in a double JC model,” *Chinese Optics Letters*, vol. 7, no. 5, pp. 443–445, 2009, doi: <https://doi.org/10.3788/COL20090705.0443>.
8. Q. Liao et al., “The entanglement dynamics of two atoms in a double two-photon Jaynes–Cummings model,” *Chinese Journal of Physics*, vol. 51, no. 2, pp. 404–411, 2013, doi: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/3/030309>.
9. Q. Xie and M.-F. Fang, “Entanglement dynamics of atoms in double Jaynes–Cummings models with Kerr medium,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 54, no. 5, pp. 840–844, 2010, doi: <https://doi.org/10.1088/0253-6102/54/5/12>.
10. X.-C. Ouyang et al., “Entanglement dynamics of a double two-photon Jaynes–Cummings model with Kerr-like medium,” *Chinese Physics B*, vol. 19, no. 3, p. 030309, 2010, doi: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/3/030309>.
11. H. R. Baghshahi, M. K. Tavassoly, and M. J. Faghihi, “Entanglement criteria of two two-level atoms interacting with two coupled modes,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 54, no. 8, pp. 2839–2854, 2015, doi: <https://doi.org/10.1007/s10773-015-2520-7>.
12. H.-M. Zou and M.-F. Fang, “Analytical solution and entanglement swapping of a double Jaynes–Cummings model in non-Markovian environments,” *Quantum Information Processing*, vol. 14, pp. 2673–2686, 2015, doi: <https://doi.org/10.1007/s11128-015-1006-0>.
13. W.-T. Zhu et al., “Entanglement dynamics of two qubits coupled independently to cavities in the ultrastrong coupling regime: Analytical results,” *Chinese Physics Letters*, vol. 33, no. 5, p. 050302, 2016, doi: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/33/5/050302>.
14. E. K. Bashkirov, “Thermal entanglement in a double Jaynes–Cummings model,” *Proceedings of SPIE*, vol. 11458, p. 114580L, 2020, doi: <https://doi.org/10.1117/12.2563272>.
15. E. K. Bashkirov and M. O. Guslyannikova, “Thermal entanglement in a double Jaynes–Cummings model,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 2, pp. 7–13, 2020, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.2.7-13>. (In Russ.)
16. R. K. Zakharov and E. K. Bashkirov, “Influence of detuning and Kerr nonlinearity on atom-atom entanglement in the double two-photon Jaynes–Cummings model,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 24, no. 1, pp. 9–14, 2021, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.9-14>. (In Russ.)
17. K. Mandal, “Entanglement dynamics in double Jaynes–Cummings model and intensity-dependent double Jaynes–Cummings model for squeezed coherent thermal states,” *arXiv:2405.10564[quant-physics]*, 2024, doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.10564>.
18. A. Izmailkov et al., “Evidence for entangled states of two coupled flux qubits,” *Physical Review Letters*, vol. 93, p. 037003, 2004, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.037003>.
19. M. Grajcar et al., “Direct Josephson coupling between superconducting flux qubits,” *Physical Review B*, vol. 72, p. 020503(R), 2005, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.72.020503>.
20. E. K. Bashkirov, “Entanglement between two dipole-coupled qubits interacting with two independent slightly detuned cavity modes,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 58, no. 7, pp. 2346–2356, 2019, doi: <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04126-3>.

Information about the Author

Evgenii K. Bashkirov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 1978 he graduated from the Faculty of Physics of the Kuibyshev State University and in 1984 – postgraduate studies at the Moscow State University. Author of more than 360 scientific papers.

Research interests: quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena.

E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>