Научная статья
УДК 621.3.011.1
DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-6-6-23

Математическая модель несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания. Часть 3. Коэффициент усиления

Олег Вениаминович Попов[1]✉, ov.popov@mail.ru
Андрей Витальевич Тумашов[1], ice47reg@yandex.ru
Георгий Николаевич Борисов[1], georgiiborisov@gmail.com
Константин Олегович Коровин[2], korovin.ko@sut.ru

[1]ООО «Специальный Технологический Центр»,
Санкт-Петербург, 195220, Российская Федерация
[2]Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича,
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

Аннотация: *Конкретизирован интегро-дифференциальный оператор, определяющий продольную составляющую напряженности электрического поля на поверхности проводника излучателя несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания (НВВТП), создаваемую базовым током (БТ). Получены аналитические выражения, определяющие параметры эквивалентного восьмиполюсника, являющегося внутренним сопротивлением эквивалентных генераторов БТ. Исследовано влияние длины проводников противовесов и верхней нагрузки НВВТП на коэффициент полезного действия и коэффициент усиления.*

Ключевые слова: *коэффициент трансформации, комплексная емкость, сопротивление излучения, входное сопротивление антенны, несимметричный вибратор, коэффициент усиления*

Ссылка для цитирования: Попов О.В., Тумашов А.В., Борисов Г.Н., Коровин К.О. Математическая модель несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания. Часть 3. Коэффициент усиления // Труды учебных заведений связи. 2023. Т. 9. № 6. С. 6–23. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-6-6-23

Mathematical Model of the Unbalanced Monopole Feed. Part 3. Gain

Oleg Popov[1]✉, ov.popov@mail.ru
Andrey Tumashov[1], ice47reg@yandex.ru
Georgy Borisov[1], georgiiborisov@gmail.com
Konstantin Korovin[2], korovin.ko@sut.ru

[1]Special Technology Center LLC,
St. Petersburg, 195220, Russian Federation
[2]The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

Abstract: *An integro-differential operator is specified that determines the longitudinal component of the electric field strength on the surface of the emitter conductor of an Unbalanced Monopole with Shunt Feed, created by the Base Current (BC). Analytical expressions are obtained that determine the parameters of an equivalent eight pole, which is the internal resistance of equivalent BC generators. The influence of the length of the counterweight conductors and the upper load of the high-voltage transformer on the efficiency and gain was studied.*

Keywords: *transformation ratio, complex capacitance, radiation resistance, antenna input impedance, unbalanced monopole, gain*

For citation: Popov O., Tumashov A., Borisov G., Korovin K. Mathematical Model of the Unbalanced Monopole Feed. Part 3. Gain. *Proceedings of Telecommun. Univ.* 2023;9(6):6–23. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-6-6-23

Введение

Сложность энергетического расчета радиолиний поверхностных волн заключается в трудности определения коэффициентов усиления антенн, устанавливаемых, как правило, непосредственно на полупроводящей поверхности [1]. Токи, наводимые в почве ближними полями, существенно снижают коэффициент полезного действия (КПД) антенны и, следовательно, ее коэффициент усиления (КУ). При этом, если дополнительное затухание сигнала, вызванное взаимодействием электромагнитных волн (ЭМВ) с подстилающей поверхностью при распространении в непосредственной близости от нее, хорошо описано в литературе [2–4] и представлено в виде формул и графиков, оценка КУ антенн, работающих поверхностной волной, производится приблизительно, без определения аналитической связи между электрическими параметрами почвы и КПД антенны [2, 5].

Как известно [2, 3, 6], под КПД антенны обычно понимают произведение коэффициента согласования по сопротивлению на КПД согласованной антенны. Таким образом, для определения КПД необходимо найти входное сопротивление антенны, представив при этом его вещественную составляющую в виде суммы сопротивления излучения и сопротивления тепловых потерь.

В первой части этой работы [7] построена развернутая эквивалентная схема несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания (НВВТП), изображенная на рисунке 1. При построении схемы предполагалось, что все входящие в конструкцию НВВТП проводники можно разделить на две группы:

– проводники, непосредственно участвующие в процессе излучения (приема) ЭМВ;

– проводники неизлучающие (не принимающие) ЭМВ, но влияющие на распределение токов по излучающим (принимающим) ЭМВ и, таким образом, влияющие на характеристики антенны.

К проводникам первой группы относятся вертикальные соосные проводники, непосредственно примыкающие к узлу питания. Они названы излучателем НВВТП.

Эквивалентная схема представляет собой иллюстрацию формул, полученных с учетом допущений, принятых в методе наводимых электродвижущих сил (ЭДС):

– ток, протекающий по проводникам антенны, сосредоточен в осях проводников;

– распределение токов вдоль проводников описывается соотношениями теории линий.

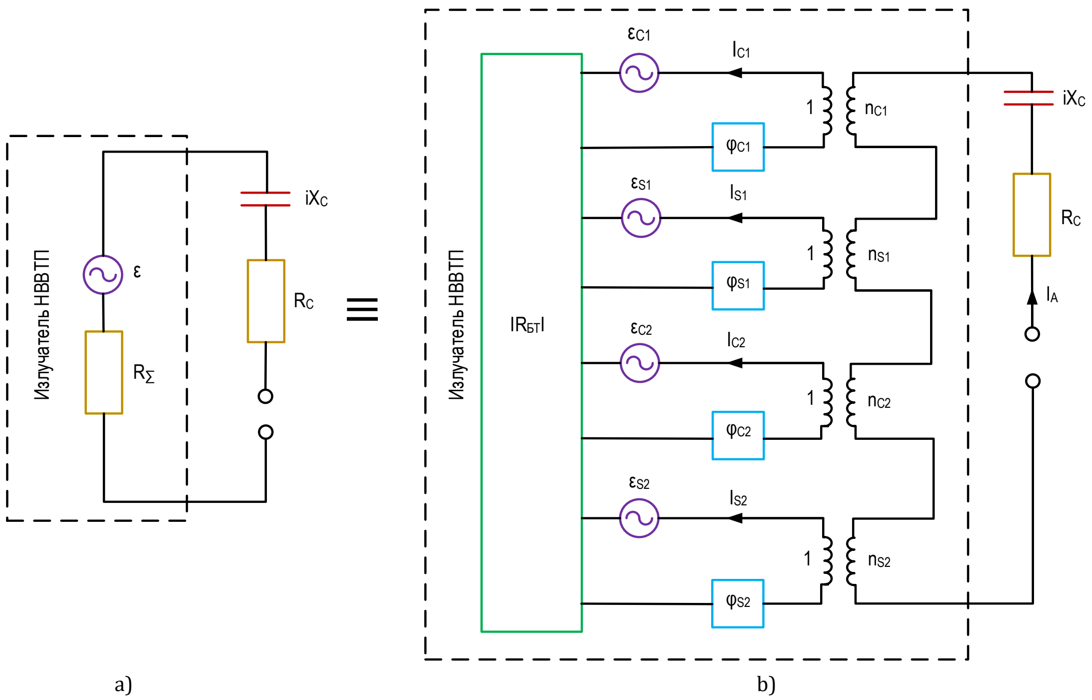


Рис. 1. Эквивалентные схемы НВВТП [7]

Fig. 1. Equivalent Circuits of UMSF [7]

Исходя из этих допущений, распределение тока по каждому из проводников излучателя описывается двумя вещественными гармоническими функциями, которые предложено называть базовыми, а ток, распределенный по закону базовой функции – базовым током (БТ). В связи с изложенным, распределение тока по проводникам излучателя в обобщенном виде будет [7]:

$$I_i(z_k) = I_{\text{a}}[n_{Ci} j^0_{Ci}(z_k) + n_{Si} j^0_{Si}(z_k)], \quad (1)$$

где

$$j^0_{C1}(z_k) = \begin{cases} 0 & 0 \le z_k \le l_{k2} \\ \cos(L_k - z_k) & l_{k2} \le z_k \le L_k \end{cases}, \quad (2)$$

$$j^0_{S1}(z_k) = \begin{cases} 0 & 0 \le z_k \le l_{k2} \\ \sin(L_k - z_k) & l_{k2} \le z_k \le L_k \end{cases}, \quad (3)$$

$$j^0_{C2}(z_k) = \begin{cases} \cos(z_k) & 0 \le z_k \le l_{k2} \\ 0 & l_{k2} \le z_k \le L_k \end{cases}, \quad (4)$$

$$j^0_{S2}(z_k) = \begin{cases} \sin(z_k) & 0 \le z_k \le l_{k2} \\ 0 & l_{k2} \le z_k \le L_k \end{cases}, \quad (5)$$

$I_i(z_k)$ – распределение тока по i–му проводнику излучателя, причем i = 1 соответствует верхнему проводнику, а i = 2 – нижнему; I_a – амплитуда тока на входных зажимах НВВТП; n_{Ci} – коэффициент трансформации тока на зажимах антенны (КТТЗА) к пучности косинусного базового тока (ПКБТ) i-го проводника излучателя; n_{Si} – КТТЗА к пучности синусного базового тока (ПСБТ) i-го проводника излучателя; $j^0_{C1}(z_k), j^0_{S1}(z_k), j^0_{C2}(z_k), j^0_{S2}(z_k)$ – базовые функции; $z_{\text{к}} = kz$ – электрическая координата точки на оси проводника излучателя; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; z – координата точки на оси излучателя; $l_{ki} = kl_i$ – электрическая длина i-го проводника излучателя; l_i – длина i-го проводника излучателя; $L_{\text{к}} = l_{\text{к}1} + l_{\text{к}2}$ – электрическая длина излучателя.

Как показано в [7], КТТЗА к пучностям базовых токов (ПБТ) являются комплексными величинами. На развернутой эквивалентной схеме они изображены в виде соединений идеальных трансформаторов с фазовращателями. Аналитические выражения, определяющие КТТЗА к ПБТ, также приведены в [7]. Входящие в них значения комплексных емкостей НВВТП получены в [8], что позволяет считать КТТЗА к ПБТ известными.

Из рисунка 1 видно, что развернутая эквивалентная схема НВВТП содержит четыре генератора ЭДС БТ, подключенных ко входам восьмиполюсника внутренних сопротивлений. Взаимные сопротивления этого восьмиполюсника определяются соотношениями [7]:

$$r_{PP'} = \text{Re}\left[\frac{1}{k}\int\limits_{l_{ki}} j^0_P(z_k)\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0 dz_k\right] = \frac{1}{k}\int\limits_{l_{ki}} j^0_P(z_k)\text{Re}(\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0)dz_k, \quad (6)$$

где $\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$ – линейный интегро-дифференциальный оператор, определяющий продольную напряженность электрического поля на поверхности i-го проводника в точке z_k, создаваемую единичным БТ P'; $P = C1, S1, C2, S2$ – обобщенный индекс базовой функции; $\int_{l_{ki}}$ – означает интегрирование по длине i-го проводника излучателя при:

$$i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad P = C1, S1 \\ 2 & \text{при} \quad P = C2, S2 \end{cases}.$$

В (6) учтено, что функция $j^0_P(z_k)$ – вещественная.

Сопротивление излучения НВВТП, как видно из эквивалентной схемы и следует из преобразований, приведенных в [7], будет:

$$R_\Sigma = \sum_P\sum_{P'} n^*_P n_{P'} r_{PP'}. \quad (7)$$

Легко заметить, что сопротивление излучения не описывается аналитическими выражениями, поскольку соотношение (6) таковым не является. Для его приведения к аналитическому виду требуется, прежде всего, конкретизировать интегро-дифференциальный оператор $\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$.

Продольные составляющие напряженности электрического поля на поверхности излучателя, создаваемого базовыми токами

Поскольку излучатель НВВТП состоит из соосных вертикальных проводников, а электрическое поле на поверхности каждого из них создается совокупным воздействием четырех БТ, конкретизация оператора $\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$ состоит в определении вертикальных составляющих поля, создаваемых каждым из этих токов. Для достижения этой цели можно воспользоваться известным решением задачи о распределении вектора Герца поля элементарного вертикального диполя, размещенного на высоте ξ над полупроводящей поверхностью. Как известно [6, 9], вектор Герца такого диполя имеет только одну продольную составляющую, которая осесимметрично распределена в пространстве над полупроводящей поверхностью следующим образом:

$$d\Pi_z = \frac{30 I_d dl_k}{ik}\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k), \quad (8)$$

где

$$\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k) = V(r_k;\xi_k - z_k) - W(r_k;\xi_k + z_k), \quad (9)$$

$$V(r_k,x_k) = \frac{e^{-i\sqrt{{r_k}^2+{x_k}^2}}}{\sqrt{{r_k}^2+{x_k}^2}}, \quad (10)$$

$$W(r_k,x_k) = V(r_k,x_k) - \Omega(r_k,x_k), \quad (11)$$

$$\Omega(r_k,x_k) = 2\varepsilon_k\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\nu r_k)e^{-x_k\sqrt{\nu^2-1}}}{\sqrt{\nu^2-\varepsilon_k}+\varepsilon_k\sqrt{\nu^2-1}}\nu d\nu, \quad (12)$$

$I_d dl_k = I_d kdl$ – электрический момент диполя; $r_k = kr$ – электрическое расстояние от оси диполя до точки наблюдения; $\xi_k = k\xi$ – электрическая высота диполя над полупроводящей поверхностью; $z_k = kz$ – электрическая высота точки наблюдения; z – координата точки наблюдения; $\varepsilon_k = \varepsilon - i60\sigma\lambda$ – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость подстилающей поверхности; ε – относительная диэлектрическая проницаемость подстилающей поверхности; σ – удельная проводимость подстилающей поверхности.

Можно видеть, что функции $\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)$, $V(r_k;x_k)$, $W(r_k,x_k)$ и $\Omega(r_k,x_k)$ также, как и входящие в них параметры, являются безразмерными.

Для проведения дальнейших вычислений целесообразно определить значения функции $\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)$ при отсутствии границы раздела сред. В этом случае $\varepsilon_k = 1$, а соотношение (12) преобразуется к виду [9]:

$$\Omega(r_k,x_k) = \int_0^\infty \frac{J_0(\nu r_k)e^{-x_k\sqrt{\nu^2-1}}}{\sqrt{\nu^2-1}}\,\nu d\nu = V(r_k,x_k). \quad (13)$$

Тогда из соотношений (9) и (11) следует:

$$\left.\begin{array}{l} W(r_k,x_k) = 0 \\ \Phi^-(r_k;\xi_k,z_k) = V(r_k;\xi_k - z_k) \end{array}\right\}. \quad (14)$$

Каждый БТ с единичной амплитудой в пучности можно представить бесконечным множеством элементарных вертикальных диполей, моменты которых зависят от высоты их размещения следующим образом:

$$I_d dl_k = j^0_{P'}(\xi_k)d\xi_k \text{ при } 0 \le \xi_k \le L_k. \quad (15)$$

Вертикальная составляющая напряженности электрического поля связана с вектором Герца вертикального электрического диполя, соотношением [6]:

$$dE_z = \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)d\Pi_z = k^2\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial {z_k}^2}\right)d\Pi_z. \quad (16)$$

Таким образом, электрическое поле, созданное единичным БТ, т. е. совокупным воздействием бесконечного числа диполей (15), будет:

$$E_z = \int_0^L \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)d\Pi_z = k^2\int_0^{L_k}\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial {z_k}^2}\right)d\Pi_z. \quad (17)$$

Выражение (17) с учетом (8) и (15) преобразуется к виду:

$$E_z = -30ik\int_0^{L_k} j^0_{P'}(\xi_k)\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial {z_k}^2}\right)\times \\ \times \Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)d\xi_k. \quad (18)$$

С помощью соотношений (9–12) легко убедиться в справедливости равенства:

$$\frac{\partial^2}{\partial {z_k}^2}\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k) = \frac{\partial^2}{\partial {\xi_k}^2}\ \Phi^-(r_k;\xi_k,z_k). \quad (19)$$

Выражение (19) преобразовывает (18) к виду:

$$E_z = -30ik\int_0^{L_k} j^0_{P'}(\xi_k)\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial {\xi_k}^2}\right)\times \\ \times \Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)d\xi_k. \quad (20)$$

В соответствии с (2–5), вычисляя вторую производную по ξ от $j^0_{P'}(\xi)$, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial {\xi_k}^2}j^0_{P'}(\xi_k) = -\ j^0_{P'}(\xi_k). \quad (21)$$

Из правила интегрирования по частям, следует:

$$\int U d^2V = \ UdV - \int dVdU = \\ = UdV - VdU + \int Vd^2U. \quad (22)$$

Применение (21) и (22) к интегралу (20) позволяет вычислить его путем следующих преобразований (23).

$$E_z = -30ik\left\{\int_0^{L_k} j^0_{P'}(\xi_k)\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)d\xi_k + j^0_{P'}(\xi_k)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)\Big|_0^{L_k} - \Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)\frac{\partial}{\partial\xi_k}j^0_{P'}(\xi_k)\Big|_0^{L_k} - \right. \\ \left. - \int_0^{L_k} j^0_{P'}(\xi_k)\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)\,\partial\xi_k\right\} = -30ik\left[j^0_{P'}(\xi_k)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k) - \Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)\frac{\partial}{\partial\xi_k}j^0_{P'}(\xi_k)\right]\Big|_0^{L_k}. \quad (23)$$

Дифференцируя функции $V(r_k;\xi_k,z_k)$ и $W(r_k;\xi_k,z_k)$ по ξ_k и по z_k, с помощью соотношений (10–12), легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}V(r_k;\xi_k - z_k) = -\frac{\partial}{\partial z_k}V(r_k;\xi_k - z_k), \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\ W(r_k;\xi_k + z_k) = \frac{\partial}{\partial z_k}W(r_k;\xi_k + z_k). \quad (25)$$

Из соотношений (9, 24 и 25) следует, что производная от функции $\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k)$ по ξ_k может быть выражена через производные от функций $V(r_k;\xi_k - z_k)$ и $W(r_k;\xi_k + z_k)$ по z_k:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\Phi^-(r_k;\xi_k,z_k) = -\frac{\partial}{\partial z_k}V(r_k;\xi_k - z_k) - -\frac{\partial}{\partial z_k}W(r_k;\xi_k + z_k) = -\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(r_k;\xi_k,z_k), \quad (26)$$

где

$$\Phi^+(r_k;\xi_k,z_k) = V(r_k;\xi_k - z_k) + W(r_k;\xi_k + z_k). \quad (27)$$

Соотношения (23 и 26) позволяют легко получить выражение для вертикальной составляющей напряженности электрического поля, создаваемого БТ P', на поверхностях проводников.

Подставляя в (23) соответствующие базовые функции из соотношений (2–5) и учитывая области их задания, получим выражения (28–31), где $a_{ki} = ka_i$ – электрический радиус i-го проводника; a_i – радиус i-го проводника.

Подставляя в (28–31) пределы изменения переменной ξ_k, получим выражения (32–35).

$$\bar{E}_i\{j^0_{C1};z_k\}\bar{z}^0 = 30ik\left[\cos(L_k-\xi_k)\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};\xi_k,z_k) + \sin(L_k-\xi_k)\Phi^-(a_{ki};\xi_k,z_k)\right]\Bigg|_{l_{k2}}^{L_k}, \quad (28)$$

$$\bar{E}_i\{j^0_{S1};z_k\}\bar{z}^0 = 30ik\left[\sin(L_k-\xi_k)\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};\xi_k,z_k) - \cos(L_k-\xi_k)\Phi^-(a_{ki};\xi_k,z_k)\right]\Bigg|_{l_{k2}}^{L_k} \quad (29)$$

$$\bar{E}_i\{j^0_{C2};z_k\}\bar{z}^0 = 30ik\left[\cos\xi_k\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};\xi_k,z_k) - \sin\xi_k\,\Phi^-(a_{ki};\xi_k,z_k)\right]\Bigg|_{0}^{l_{k2}}, \quad (30)$$

$$\bar{E}_i\{j^0_{S2};z_k\}\bar{z}^0 = 30ik\left[\sin\xi_k\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};\xi_k,z_k) + \cos\xi_k\,\Phi^-(a_{ki};\xi_k,z_k)\right]\Bigg|_{0}^{l_{k2}}. \quad (31)$$

$$\bar{E}_i\{j^0_{C1};z_k\}\bar{z}^0 = 30ik\left[\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};L_k,z_k) - \cos l_{k1}\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};l_{k2},z_k) - \sin l_{k1}\Phi^-(a_{ki};l_{k2},z_k)\right], \quad (32)$$

$$\bar{E}_i\{j^0_{S1};z_k\}\bar{z}^0 = 30ik\left[\cos l_{k1}\Phi^-(a_{ki};l_{k2},z_k) - \sin l_{k1}\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};l_{k2},z_k) - \Phi^-(a_{ki};L_k,z_k)\right], \quad (33)$$

$$\bar{E}_i\{j^0_{C2};z_k\}\bar{z}^0 = 30ik\left[\cos l_{k2}\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};l_{k2},z_k) - \frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};0,z_k) - \sin l_{k2}\Phi^-(a_{ki};l_{k2},z_k)\right], \quad (34)$$

$$\bar{E}_i\{j^0_{S2};z_k\}\bar{z}^0 = 30ik\left[\sin l_{k2}\frac{\partial}{\partial z_k}\Phi^+(a_{ki};l_{k2},z_k) + \cos l_{k2}\Phi^-(a_{ki};l_{k2},z_k) - \Phi^-(a_{ki};0,z_k)\right] \quad (35)$$

Можно видеть, что интегро-дифференциальный оператор $\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$ состоит из трех слагаемых, каждое из которых содержит функцию $\Phi^+(a_{ki};A_k,z_k)$, либо $\Phi^-(a_{ki};A_k,z_k)$, либо их производную по z_k, где параметром A_k обозначена некоторая постоянная, принимающая значения 0, l_{k2} или L_k. В свою очередь упомянутые функции, согласно (9, 11, 27) состоят также из трех слагаемых, каждому из которых можно поставить в соответствие конкретный физический процесс.

При размещении антенны в однородной воздушной среде ($\varepsilon_k = 1$), как следует из (14 и 27):

$$\Phi^+(a_{ki};A_k,z_k) = \Phi^-(a_{ki};A_k,z_k) = = V(a_{ki};A_k - z_k). \quad (36)$$

Это соотношение позволяет рассматривать интегро-дифференциальный оператор $\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$, как сумму двух интегро-дифференциальных операторов, определяющих напряженности падающей и отраженной волн, соответственно:

$$\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0 = \bar{E}^+{}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0 + \bar{E}^-_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0, \quad (37)$$

где $\bar{E}^+_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$ – интегро-дифференциальный оператор, определяющий вертикальную составляющую напряженности электрического поля, создаваемую БТ P' на поверхности i-го проводника, при отсутствии границы раздела сред (падающая волна); $\bar{E}^-_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$ – интегро-дифференциальный оператор, определяющий вертикальную составляющую напряженности отраженного от границы раздела электрического поля, создаваемого БТ P' на поверхности i-го проводника (отраженная волна).

Учитывая, что в выражение (6) входит вещественная составляющая оператора $\bar{E}_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$, представляют интерес вещественные составляющие операторов $\bar{E}^+_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$ и $\bar{E}^-_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0$. Определить $\mathrm{Re}(\bar{E}^+_i\{j^0_{P'};z_k\}\bar{z}^0)$ можно подставляя (36) в (32–35) и выделяя вещественные составляющие в полученных выражениях. Окончательным результатом являются соотношения (38–40), где $n = 1, 2$ – номер проводника с БТ, а $i = 1, 2$ – номер проводника, на поверхности которого определяется напряженность поля.

В (40) учтено, что $V(a_{ki},x_k)$ задается соотношением (10), а также, что $a_{ki} << x_k$.

$$\mathrm{Re}[\bar{E}^{+}{}_{i}\{j^{0}_{Cn};z_k\}\bar{z}^{0}] = 30k\left\{(-1)^{n}\frac{\partial}{\partial z_k}[\cos l_{kn} Riv(a_{ki}, l_{k2}-z_k) - Riv(a_{ki}, \delta^{1}_{n}\, L_k - z_k)] - \sin l_{kn}\, Riv(a_{ki}, l_{k2}-z_k)\right\}. \quad (38)$$

$$\mathrm{Re}[\bar{E}^{+}{}_{i}\{j^{0}_{Sn};z_k\}\bar{z}^{0}] = 30k\left\{\cos l_{kn} Riv(a_{ki}, l_{k2}-z_k) - Riv(a_{ki}, \delta^{1}_{n}\, L_k - z_k) + (-1)^{n}\sin l_{kn}\frac{\partial}{\partial z_k} Riv(a_{ki}, l_{k2}-z_k)\right\}, \quad (39)$$

где

$$Riv(a_{ki}, x_k) = \mathrm{Re}[iV(a_{ki}, x_k)] = \frac{\sin\sqrt{{a_{ki}}^{2}+{x_k}^{2}}}{\sqrt{{a_{ki}}^{2}+{x_k}^{2}}} \approx \frac{\sin x_k}{x_k}, \quad (40)$$

$x_k = -z_k,\ l_{k2}-z_k,\ L_k - z_k,\ \delta^{1}_{n} = \begin{cases}1 & \text{при } n = 1\\ 0 & \text{при } n \neq 1\end{cases}$ – символ Кронекера [10].

Подставляя в (32–35) соотношения (9 и 27) без первого слагаемого и выделяя вещественные составляющие, получим выражения (41–44), определяющие оператор $\mathrm{Re}(\bar{E}^{-}_{i}\{j^{0}_{P},;z_k\}\bar{z}^{0})$. В (41, 42), также, как и в (38, 39) n = 1, 2 – номер проводника с БТ, а i = 1, 2 – номер проводника, на поверхности которого определяется напряженность поля отраженного от полупроводящей земли.

Можно видеть, что вещественные составляющие напряженности поля отраженной волны определяются мнимой составляющей функции $\Omega(a_{ki}, x_k)$ и ее производными по x_k. Сама функция $\Omega(a_{ki}, x_k)$ представляет собой несобственный интеграл (12), сходимость которого зависит от координат точки наблюдения и параметров почвы. Т. е. возникает задача выделения из $\Omega(a_{ki}, x_k)$ мнимой составляющей, исследования скорости ее сходимости и получения аналитических выражений, пригодных для инженерных расчетов.

Преобразование функции $\mathrm{Im}[\Omega(a_{ki}, x_k)]$ к виду, пригодному для инженерных расчетов

Для разделения несобственного интеграла (12) на вещественную и мнимую составляющие, представим его в виде суммы двух интегралов, предварительно сделав в нем замену переменной $t = \nu a_{ki}$. Получим выражение (44).

$$\mathrm{Re}[\bar{E}^{-}_{i}\{j^{0}_{Cn};z_k\}\bar{z}^{0}] = 30k\left\{(-1)^{n}\frac{\partial}{\partial z_k}[\cos l_{kn} Riw(a_{ki}, l_{k2}+z_k) - Riw(a_{ki}, \delta^{1}_{n}\, L_k + z_k)] + \sin l_{kn} Riw(a_{ki}, l_{k2}+z_k)\right\}, \quad (41)$$

$$\mathrm{Re}[\bar{E}^{-}_{i}\{j^{0}_{Sn};z_k\}\bar{z}^{0}] = 30k\left\{(-1)^{n}\sin l_{kn}\frac{\partial}{\partial z_k} Riw(a_{ki}, l_{k2}+z_k) - \cos l_{kn} Riw(a_{ki}, l_{k2}+z_k) + Riw(a_{ki}, \delta^{1}_{n}\, L_k + z_k)\right\}, \quad (42)$$

где

$$Riw(a_{ki}, x_k) = \mathrm{Re}[iW(a_{ki}, x_k)] = Riv(x_k) + \mathrm{Im}[\Omega(a_{ki}, x_k)], \quad (43)$$

$$x_k = z_k, l_{k2}+z_k, L_k + z_k.$$

$$\Omega(a_{ki}, x_k) = \frac{2\varepsilon_k}{a_{ki}}\int_{0}^{\infty}\frac{J_0(t)e^{-x_k t_{ai}}}{\sqrt{t^2 - {a_{ki}}^{2}\varepsilon_k} + \varepsilon_k t_{ai} a_{ki}}tdt = \frac{2}{a_{ki}}\left[\int_{0}^{a_{ki}}\frac{e^{-i\,x_k t_{mai}}}{\frac{\sqrt{t^2 - {a_{ki}}^{2}\varepsilon_k}}{\varepsilon_k} + it_{mai}\, a_{ki}}tdt + \int_{a_{ki}}^{\infty}\frac{J_0(t)e^{-x_k t_{ai}}}{\frac{\sqrt{t^2 - {a_{ki}}^{2}\varepsilon_k}}{\varepsilon_k} + t_{ai} a_{ki}}tdt\right], \quad (44)$$

где

$$t_{ai} = \sqrt{t^2 - {a_{ki}}^{2}}/a_{ki},\ t_{mai} = |t_{ai}| = \sqrt{{a_{ki}}^{2} - t^2}/a_{ki} \text{ при } t \le a_{ki}$$

В (44) учтено, что при $t \le a_{ki}$ $J_0(t) \approx 1$, поскольку $a_{ki} << 1$. Легко показать, что:

$$\left(\sqrt{t^2 - {a_{ki}}^{2}\varepsilon_k}\right)/\varepsilon_k = Te^{i(\phi_1 - \phi_2)}, \quad (45)$$

где

$$T = \frac{\sqrt[4]{(t^2 - {a_{ki}}^{2}\varepsilon)^2 + (60\sigma\lambda)^2 {a_{ki}}^{4}}}{\sqrt{\varepsilon^2 + (60\sigma\lambda)^2}} = \frac{1}{|\varepsilon_k|}\sqrt[4]{t^4 - 2t^2 {a_{ki}}^{2}\varepsilon + {a_{ki}}^{4}|\varepsilon_k|^2}, \quad (46)$$

$$|\varepsilon_k|^2 = \varepsilon^2 + (60\sigma\lambda)^2, \quad (47)$$

$$\phi_1 = 0{,}5\mathrm{arctg}(60\sigma\lambda a_{ki}{}^2/(t^2 - a_{ki}{}^2\varepsilon)), \quad (48)$$

$$\phi_2 = \mathrm{arctg}(-60\sigma\lambda/\varepsilon). \quad (49)$$

В (46, 47) $|\varepsilon_k|$ – модуль комплексной диэлектрической проницаемости земли.

Подставляя (45–49) в (44), можно выделить (50) вещественную и мнимую составляющие $\Omega(a_i, x_k)$.

$$\Omega(a_i, x_k) = \frac{2}{a_{ki}}\left\{\int_0^{a_{ki}} \frac{\cos(x_k t_{mai} + \psi_1)}{F_1} tdt + \int_{a_{ki}}^{\infty} \frac{J_0(t)e^{-x_k t_{ai}}\cos\psi_2}{F_2} tdt - \right.$$
$$\left. -i\left[\int_0^{a_{ki}} \frac{\sin(x_k t_{mai} + \psi_1)}{F_1} tdt + \int_{a_{ki}}^{\infty} \frac{J_0(t)e^{-x_k t_{ai}}\sin\psi_2}{F_2} tdt\right]\right\}. \quad (50)$$

В выражении (50):

$$F_1 = \sqrt{T^2 + 2T\sqrt{a_{ki}{}^2 - t^2}\sin\Delta\phi + a_{ki}{}^2 - t^2}, \quad (51)$$

$$F_2 = \sqrt{T^2 + 2T\sqrt{t^2 - a_{ki}{}^2}\cos\Delta\phi - a_{ki}{}^2 + t^2}, \quad (52)$$

$$\psi_1 = \mathrm{arctg}[(T\sin\Delta\phi + t_{mai}a_{ki})/(T\cos\Delta\phi)], \quad (53)$$

$$\psi_2 = \mathrm{arctg}[(T\sin\Delta\phi)/(T\cos\Delta\phi + t_{ai}a_{ki})], \quad (54)$$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2. \quad (55)$$

Из соотношения (50) следует соотношение (56).

$$\mathrm{Im}[\,\Omega(a_{ki}, x_k)] = -\frac{2}{a_{ki}}\left[\int_0^{a_{ki}} \Phi_1(a_{ki}, x_k; t)dt + \int_{a_{ki}}^{\infty} \Phi_2(a_{ki}, x_k; t)dt\right], \quad (56)$$

где

$$\Phi_1(a_{ki}, x_k; t) = \frac{t}{F_1}\sin(x_k t_{mai} + \psi_1) = \frac{t}{F_1}[\sin(x_k t_{mai})\cos\psi_1 + \sin\psi_1\cos(x_k t_{mai})], \quad (57)$$

$$\Phi_2(a_{ki}, x_k; t) = J_0(t)\frac{t}{F_2}\ \exp(-x_k t_{ai})\sin\psi_2. \quad (58)$$

Легко показать, что из (53 и 54) следует:

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi_1 &= \left(T\sin\Delta\phi + \sqrt{a_{ki}{}^2 - t^2}\right)/F_1 \\ \cos\psi_1 &= T\cos\Delta\phi/F_1 \\ \sin\psi_2 &= T\sin\Delta\phi/F_2 \end{aligned}\right\}. \quad (59)$$

Соотношения (59) позволяют преобразовать (57 и 58) к следующему виду:

$$\Phi_1(a_{ki}, x_k; t) = \frac{t}{F_1{}^2}\times$$
$$\times [T\sin(x_k t_{mai} + \Delta\phi) + t_{mai}a_{ki}\cos(x_k t_{mai})], \quad (60)$$

$$\Phi_2(a_{ki}, x_k; t) = J_0(t)\frac{tT}{F_2{}^2}\ \exp(-x_k t_{ai})\sin\Delta\phi. \quad (61)$$

Для вычисления $\mathrm{Im}[\Omega(a_{ki}, x_k)]$, несобственный интеграл в выражении (56) удобно представить в виде суммы бесконечного знакопеременного ряда, состоящего из определенных интегралов, пределы интегрирования которых совпадают с нулями функции Бесселя. Поскольку $\Phi_2(a_{ki}, x_k; t)$ при неограниченном возрастании t стремится к нулю, этот ряд будет сходящимся. Как известно [11], погрешность вычисления суммы такого ряда не превышает первого отброшенного члена, что позволяет легко определить, при каком x/a_i будет обеспечиваться приемлемая для инженерных расчетов точность вычисления, если верхний предел несобственного интеграла ограничить первым нулем функции $J_0(t)$.

Пусть:

$$\mathrm{Im}[\Omega(a_{ki}, x_k)] \approx -\frac{2}{a_{ki}}\times$$
$$\times\left[\int_0^{a_{ki}} \Phi_1(a_{ki}, x_k; t)dt + \int_{a_{ki}}^{j_{01}} \Phi_2(a_{ki}, x_k; t)dt\right], \quad (62)$$

где $j_{01} = 2{,}4048$ – первый ноль функции Бесселя нулевого порядка [12].

Относительная погрешность вычисления в этом случае будет:

$$\zeta = \frac{\left|\int_{j_{01}}^{j_{02}} \Phi_2(a_{ki}, x_k; t)dt\right|}{\left|\int_0^{a_{ki}} \Phi_1(a_{ki}, x_k; t)dt + \int_{a_{ki}}^{j_{01}} \Phi_2(a_{ki}, x_k; t)dt\right|},$$

где $j_{02} = 5{,}5201$ – второй ноль функции Бесселя нулевого порядка.

На рисунке 2а представлено семейство кривых, характеризующих зависимость относительной погрешности вычислений от x/a_i, для различных частот и удельных проводимостей почвы. Видно, что при $x/a_i > 2$ относительная погрешность не превышает 0,01.

На рисунке 2b – те же зависимости для случая, когда верхний предел несобственного интеграла уменьшен до одной десятой j_{01}. Видно, что даже такое существенное ограничение верхнего предела является целесообразным при $x/a_i > 20$, поскольку позволяет, сохраняя точность вычислений, значительно сократить их объем. Это объясняется не только сокращением интервала интегрирования, а и возможностью упростить подынтегральную функцию. Действительно, при $0 \le t \le 0{,}24$ значения функции Бесселя нулевого порядка лежат в пределах $1 \ge J_0(t) \ge 0{,}986$, что позволяет исключить ее из подынтегрального выражения. Пусть:

$$\Phi_2^{(0)}(a_{ki}, x_k; t) = \frac{tT}{F_2^{\,2}}\ \exp(-x_k t_{ai}) \sin\Delta\phi. \qquad (63)$$

Тогда, при $t \le 0{,}24$ справедливо приближение:

$$\int_{a_{ki}}^{0{,}24} \Phi_2(a_{ki}, x_k; t)dt \approx \int_{a_{ki}}^{0{,}24} \Phi_2^{(0)}(a_{ki}, x_k; t)\ dt. \qquad (63a)$$

Относительная погрешность вычислений, представленная на рисунке 2b, определялась следующим образом:

$$\zeta' = \frac{\left|\int_{0{,}24}^{2{,}4} \Phi_2(a_{ki}, x_k; t)dt\right|}{\left|\int_0^{a_{ki}} \Phi_1(a_{ki}, x_k; t)dt + \int_{a_{ki}}^{0{,}24} \Phi_2^{(0)}(a_{ki}, x_k; t)dt\right|}.$$

Таким образом, соотношение (43) с учетом (40, 56, 62 и 63) можно представить в виде (64). Как видно из (61), с уменьшением x_k скорость сходимости несобственного интеграла в (56) уменьшается, что и нашло отражение в (64а). Очевидно, что самой низкой будет сходимость при $x_k = 0$. В этом случае (56) удобно представить в виде суммы трех интегралов (65), где $\Phi_2^{(a)}(a_{ki}, 0; t)$ – асимптотическое приближение функции $\Phi_2(a_{ki}, 0; t)$ при $t >> 1$.

Как известно [12], функцию Бесселя нулевого порядка при больших значениях аргумента можно представить в виде (66).

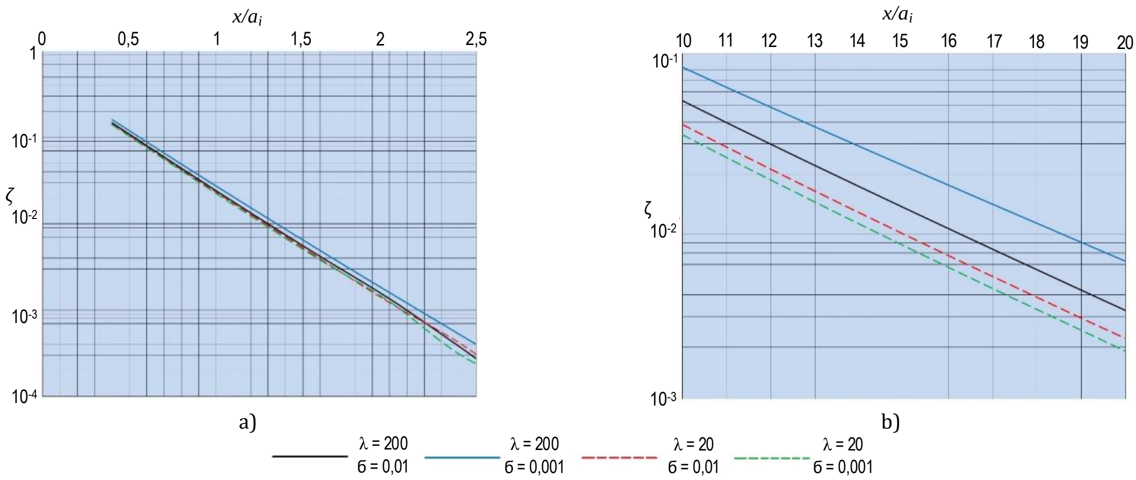


Рис. 2. Зависимость относительной погрешности вычисления $\mathrm{Im}[\Omega(a_{ki}, x_k)]$ от x/a_i при верхнем пределе интегрирования: а) 2,4; b) 0,24

Fig. 2. Dependence of the Relative Calculation Error on $Im[\Omega(a_{ki}, x_k)]$ at the Upper Limit of Integration: a) 2.4; b) 0.24

$$Riw(a_{ki}, x_k) = \frac{\sin x_k}{x_k} - \frac{2}{a_{ki}}\left[\int_0^{a_{ki}} \Phi_1(a_{ki}, x_k; t)dt + F(a_{ki}, x_k)\right], \qquad (64)$$

где

$$F(a_{ki}, x_k) = \int_{a_{ki}}^{\infty} \Phi_2(a_{ki}, x_k; t)dt = \begin{cases} \int_{a_{ki}}^{2{,}4} \Phi_2(a_{ki}, x_k; t)dt & \text{при } x/a_i > 2 \\ \int_{a_{ki}}^{0{,}24} \Phi_2^{(0)}(a_{ki}, x_k; t)dt & \text{при } x/a_i > 20 \end{cases}, \qquad (64a)$$

$$\mathrm{Re}[i\Omega(a_{ki}, 0)] \approx \frac{2}{a_{ki}}\left[\int_0^{a_{ki}} \Phi_1(a_{ki}, 0; t)dt + \int_{a_{ki}}^{t_m} \Phi_2(a_{ki}, 0; t)dt + \int_{t_m}^{\infty} \Phi_2^{(a)}(a_{ki}, 0; t)dt\right]. \qquad (65)$$

$$J_0(t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (66)$$

Из соотношений (46, 48 и 52) при $t >> t_m$ и $a_{ki} \ll \ll 1$, следует:

$$T \approx \frac{t}{|\varepsilon_k|}, \phi_1 \approx 0, \sin\Delta\phi \approx \frac{60\sigma\lambda}{|\varepsilon_k|}, \cos\Delta\phi \approx \frac{\varepsilon}{|\varepsilon_k|},$$
$$F_2 \approx \frac{t}{|\varepsilon_k|}\sqrt{1 + 2\varepsilon + |\varepsilon_k|^2}. \quad (67)$$

Подставив (66 и 67) в (61), получим асимптотическое приближение функции $\Phi_2(a_{ki}, 0; t)$ при $t >> 1$:

$$\Phi_2^{(a)}(a_{ki}, 0; t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{60\sigma\lambda}{1 + 2\varepsilon + |\varepsilon_k|^2} \frac{\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t}} =$$
$$= \frac{Q}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right], \quad (68)$$

где $Q = 60\sigma\lambda/(1 + 2\varepsilon + |\varepsilon_k|^2)$.

Соотношение (68) преобразует последнее слагаемое в правой части (65) к виду:

$$\int_{t_m}^{\infty} \Phi_2(a_{ki}, 0; t)dt = \int_{t_m}^{\infty} \Phi_2^{(a)}(a_{ki}, 0; t)dt =$$
$$\frac{Q}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{t_m}^{\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\, dt + \int_{t_m}^{\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt\right]. \quad (69)$$

Учитывая, что [13]:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (70)$$

соотношение (69) легко свести к совокупности интегралов Френеля [12]:

$$\int_{t_m}^{\infty} \Phi_2^{(a)}(a_{ki}, 0; t)dt = \sqrt{2}Q[1 - \mathrm{C}(t_m) - S(t_m)], \quad (71)$$

где $\mathrm{C}(t_m)$ и $S(t_m)$ – интегралы Френеля:

$$\mathrm{C}(t_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t_m} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\, dt,$$
$$S(t_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t_m} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\, dt. \quad (72)$$

Выбор рационального значения параметра t_m в (65) можно сделать на основе анализа среднеквадратического отклонения на интервале 2π асимптотического приближения подынтегральной функции (68) от своего точного значения при различных значениях t_m [14].

Обозначим:

$$S(t_m) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{t_m}^{t_m+2\pi} \left[\frac{\Phi_2(a_{ki}, 0; t) - \Phi_2^{(a)}(a_{ki}, 0; t)}{M}\right]^2 dt}, \quad (73)$$

где M – максимальное значение $|\Phi_2(a_{ki}, 0; t)|$ на интервале интегрирования.

Графически зависимость $S(t_m)$ представлена на рисунке 3. Видно, что при $t_m > 6$ среднеквадратическое отклонение не превышает 0,01, что позволяет считать совпадение исходной функции с приближенной (69) достаточным для инженерных расчетов.

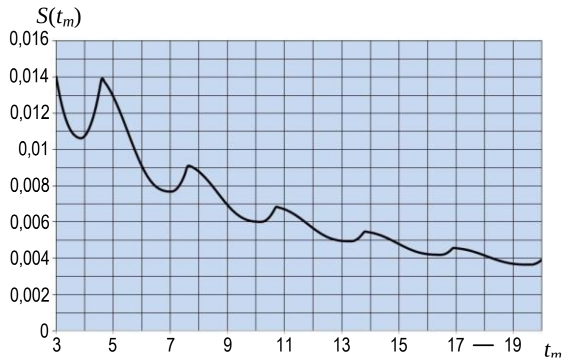


Рис. 3. Среднеквадратическое отклонение $\Phi_2^{(a)}(a_{ki}, 0; t)/M$ от $\Phi_2(a_{ki}, 0; t)/M$

Fig. 3. Standard Deviation $\Phi_2^{(a)}(a_{ki}, 0; t)/M$ from $\Phi_2(a_{ki}, 0; t)/M$

Соотношения (65 и 71) позволяют представить (43) при $x_{ai} = 0$ в виде (74), где учтено, что $\mathrm{C}(6) = 0,4433$, $S(6) = 0,3499$ [12]. Таким образом, функцию $Riw(a_{ki}, x_k)$, содержащую несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом, удалось представить в виде соотношений (64 и 74), содержащих простые определенные интегралы, легко поддающиеся численному интегрированию.

$$Riw(a_{ki}, 0) \approx 1 - \frac{2}{a_{ki}}\left[\int_{0}^{a_{ki}} \Phi_1(a_{ki}, 0; t)dt + \int_{a_{ki}}^{6} \Phi_2(a_{ki}, 0; t)dt + 0{,}29Q\right]. \quad (74)$$

Эти формулы будут весьма полезны при определении взаимных сопротивлений нагрузочного восьмиполюсника эквивалентных генераторов БТ (рисунок 1b). Подставляя (37) в (6), получим:

$$r_{PP'} = r_{PP'}^{+} + r_{PP'}^{-}, \quad (75)$$

где

$$r_{PP'}^{+} = \frac{1}{k} \int_{l_{ki}} j_P^0(z_k)\mathrm{Re}[\bar{E}_i^{+}\{j_{P'}^0; z_k\}\bar{z}^0]dz_k, \quad (76)$$

$$r_{PP'}^{-} = \frac{1}{k} \int_{l_{ki}} j_P^0(z_k)\mathrm{Re}[\bar{E}_i^{-}\{j_{P'}^0; z_k\}\bar{z}^0]dz_k, \quad (77)$$

$r_{PP'}^{+}$ – взаимное сопротивление восьмиполюсника внутренних сопротивлений БТ при отсутствии подстилающей поверхности; $r_{PP'}^{-}$ – поправка к взаимному сопротивлению восьмиполюсника внутренних сопротивлений БТ, вносимая границей раздела сред.

Легко заметить, что при отсутствии подстилающей поверхности НВВТП представляет собой несимметричный диполь с оконечными нагрузками (НДОН), сопротивление излучения которого будет определяться соотношением (7) с учетом того, что в однородной среде $r_{PP'} = r^{+}_{PP'}$. Таким образом, решение задачи о сопротивлении излучения НДОН можно рассматривать как первый этап определения сопротивления излучения НВВТП.

Сопротивление излучения

Соотношение (38) определяет вещественную составляющую вертикальной компоненты напряженности электрического поля, создаваемого косинусным БТ, протекающим по n-му проводнику, в точке с координатой z_k, лежащей на поверхности i-го проводника излучателя. Подставляя (38) в (76), получим взаимное сопротивление P-го БТ i-го проводника и косинусного БТ n-го проводника. Поскольку $Riv(a_{ki}, z_k) = Riv(z_k)$, как следует из (40), получим (78).

Подставляя в (76) соотношение (39), можно определить взаимное сопротивление P-го БТ i-го проводника и синусного БТ, протекающего по n-му проводнику (79).

Применив к первым интегралам соотношений (78 и 79) правило интегрирования по частям и опустив несложные, но громоздкие преобразования, с учетом обозначений (2–5) и соотношения (40), получим (80–89).

Для определения поправок к вещественным составляющим взаимных сопротивлений, вносимых границей раздела сред, следует воспользоваться соотношениями (41, 42 и 77). Подставив в (77) интегро-дифференциальный оператор (41), получим поправку к вещественной составляющей взаимного сопротивления между P-м БТ i-го проводника и косинусным БТ n-го проводника. Считая, что проводники излучателя НВВТП имеют одинаковое сечение, получим (91).

Подставив в (77) дифференциальный оператор (42), определим поправку к вещественной составляющей взаимного сопротивления P-го БТ i-го проводника и синусного БТ, протекающего по n-му проводнику (92).

Применив к первым интегралам соотношений (91 и 92) правило интегрирования по частям и опустив несложные, но громоздкие преобразования, с учетом обозначений (2–5) и соотношений (43 и 56), получим (93–102).

$$r^{+}_{PCn} = 30\left\{(-1)^n \int\limits_{l_{ki}} j^0_P\,(z_k)\frac{\partial}{\partial z_k}\left[Riv(\delta^1_n\, L_k - z_k) - \cos l_{kn} Riv(l_{k2} - z_k)\right]dz_k + \right.$$
$$\left. + \sin l_{kn} \int\limits_{l_{ki}} j^0_P(z_k) Riv(l_{k2} - z_k)\, dz_k\right\}. \quad (78)$$

$$r^{+}_{PSn} = 30\left\{(-1)^n \sin l_{kn} \int\limits_{l_{ki}} j^0_P\,(z_k)\frac{\partial}{\partial z_k} Riv(l_{k2} - z_k)dz_k + \right.$$
$$\left. + \cos l_{kn} \int\limits_{l_{ki}} j^0_P(z_k) Riv(l_{k2} - z_k)\, dz_k - \int\limits_{l_{ki}} j^0_P(z_k) Riv(\,\delta^1_n\, L_k - z_k)\, dz_k\right\}. \quad (79)$$

$$r^{+}_{C1C1} = 20 l^2_{k1}\left[1 - \frac{3}{8} l^2_{k1}\right], \quad (80)$$

$$r^{+}_{C1S1} = r^{+}_{S1C1} = 10 l^3_{k1}\left[1 - \frac{4}{15} l^2_{k1}\right], \quad (81)$$

$$r^{+}_{C1C2} = r^{+}_{C2C1} = 30\left[IN1 - \frac{l_{k1} l_{k2}}{3} + \frac{{l_{k1}}^2 {l_{k2}}^2}{6} + \frac{{l_{k1}}^4 + {l_{k2}}^4}{30}\right], \quad (82)$$

$$r^{+}_{C1S2} = r^{+}_{S2C1} = 30\left[IN2 - \frac{l^2_{k1} l_{k2}}{3}\left(1 - \frac{{l_{k1}}^2}{10} - \frac{{l_{k2}}^2}{6}\right)\right], \quad (83)$$

$$r^{+}_{S1S1} = 5 l^4_{k1}\left[1 - \frac{1}{6} l^2_{k1}\right], \quad (84)$$

$$r^{+}_{S1C2} = r^{+}_{C2S1} = 30\left[IN2 - \frac{l_{k1} l^2_{k2}}{3}\left(1 - \frac{{l_{k1}}^2}{6} - \frac{{l_{k2}}^2}{10}\right)\right], \quad (85)$$

$$r^{+}_{S1S2} = r^{+}_{S2S1} = 30\left[l_{k1}\, l_{k2}\left(1 - \frac{{l_{k1}}^2 + {l_{k2}}^2}{6}\right) - IN1\right], \tag{86}$$

$$r^{+}_{C2C2} = 20 l_{k2}^2\left[1 - \frac{3}{8} l_{k2}^2\right], \tag{87}$$

$$r^{+}_{C2S2} = r^{+}_{S2C2} = 10 l_{k2}^3\left[1 - \frac{4 l_{k2}^2}{15}\right], \tag{88}$$

$$r^{+}_{S2S2} = 5\ l_{k2}^4\left[1 - \frac{l_{k2}^2}{6}\right], \tag{89}$$

где

$$\left.\begin{aligned} IN1 &= \cos L_k IN3 - \sin L_k IN4 \\ IN2 &= \cos L_k IN4 + \sin L_k IN3 \\ IN3 &= \frac{1}{2}\left({L_k}^2 - {l_{k1}}^2 - {l_{k2}}^2\right) - \frac{1}{12}\left({L_k}^4 - {l_{k1}}^4 - {l_{k2}}^4\right) + \frac{1}{240}\left({L_k}^6 - {l_{k1}}^6 - {l_{k2}}^6\right) \\ IN4 &= -\frac{2}{9}\left({L_k}^3 - {l_{k1}}^3 - {l_{k2}}^3\right) + \frac{1}{36}\left({L_k}^5 - {l_{k1}}^5 - {l_{k2}}^5\right) \end{aligned}\right\}. \tag{90}$$

$$\begin{gathered} r^{-}_{PCn} = 30\left\{(-1)^n \int\limits_{l_{ki}} j_P^0(z_k)\frac{\partial}{\partial z_k}\left[\cos l_{kn} Riw\ \ (a_k, l_{k2} + z_k) - Riw(a_k, \delta_n^1\, L_k + z_k)\right]dz_k + \right. \\ \left. + \sin l_{kn} \int\limits_{l_{k\,i}} j_P^0(z_k) Riw(a_k, l_{k2} - z_k)\, dz_k \right\}. \end{gathered} \tag{91}$$

$$\begin{gathered} r^{-}_{PSn} = 30\left\{(-1)^n \sin l_{kn} \int\limits_{l_{ki}} j_P^0(z_k)\frac{\partial}{\partial z_k} Riw(a_k, l_{k2} + z_k) dz_k - \right. \\ \left. - \cos l_{kn} \int\limits_{l_{ki}} j_P^0(z_k) Riw(a_k, l_{k2} + z_k)\, dz_k + \int\limits_{l_{ki}} j_P^0(z_k) Riw(a_k, \delta_n^1\, L_k + z_k)\, dz_k \right\}. \end{gathered} \tag{92}$$

$$r^{-}_{C1C1} = -30i[Riw(a_k, 2L_k) - \cos l_{k1} Riw(a_k, L_k + l_{k2}) - \cos l_{k1}\, A3 + \cos 2L_k\, IN5 - \sin 2L_k\, IN6], \tag{93}$$

$$r^{-}_{C1S1} = r^{-}_{S1C1} = -30i[-\sin l_{k1}\, A3 + \sin 2L_k\, IN5 + \cos 2L_k\, IN6], \tag{94}$$

$$r^{-}_{C1C2} = r^{-}_{C2C1} = -30i[\cos l_{k2}\, A3 - A4 + \cos L_k\, IN7 - \sin L_k\, IN8], \tag{95}$$

$$r^{-}_{C1S2} = r^{-}_{S2C1} = -30i[\sin l_{k2}\, A3 - \sin L_k\, IN7 - \cos L_k\, IN8], \tag{96}$$

$$r^{-}_{S1S1} = -30i[\sin^2 l_{k1}\, Riw(a_k, 2l_{k2}) - \cos 2L_k\, IN5 + \sin 2L_k\, IN6], \tag{97}$$

$$r^{-}_{S1C2} = r^{-}_{C2S1} = -30i[\sin l_{k1}\, A5 + \sin L_k\, IN7 + \cos L_k\, IN8], \tag{98}$$

$$r^{-}_{S1S2} = r^{-}_{S2S1} = -30i[-\sin l_{k1} \sin l_{k2}\, Riw(a_k, 2l_{k2}) + \cos L_k\, IN7 - \sin L_k\, IN8] \tag{99}$$

$$r^{-}_{C2C2} = -30i\{Riw(a_k, 0) - \cos l_{k2}[A5 + Riw(a_k, l_{k2})] + IN9\}, \tag{100}$$

$$r^{-}_{C2S2} = r^{-}_{S2C2} = -30i[\sin l_{k2}\, A5 + IN10], \tag{101}$$

$$r^{-}_{S2S2} = -30i[\sin^2 l_{k2}\, Riw(a_k, 2l_{k2}) - IN9]. \tag{102}$$

В соотношениях (93–102) использованы следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} A3 &= Riw(a_k, L_k + l_{k2}) - \cos l_{k1}\, Riw(a_k, 2l_{k2}) \\ A4 &= Riw(a_k, L_k) - \cos l_{k1}\, Riw(a_k, l_{k2}) \\ A5 &= Riw(a_k, l_{k2}) - \cos l_{k2}\, Riw(a_k, 2l_{k2}) \end{aligned}\right\}, \tag{103}$$

$$\left.\begin{aligned} IN5 &= Iws(L_k + l_{k2}, 2L_k) - Iws(2l_{k2}, L_k + l_{k2}) \\ IN6 &= Iwc(L_k + l_{k2}, 2L_k) - Iwc(2l_{k2}, L_k + l_{k2}) \\ IN7 &= Iws(2l_{k2}, L_k + l_{k2}) - Iws(l_{k2}, L_k) \\ IN8 &= Iwc(2l_{k2}, L_k + l_{k2}) - Iwc(l_{k2}, L_k) \\ IN9 &= Iws(l_{k2}, 2l_{k2}) - Iws(0, l_{k2}) \\ IN10 &= Iwc(l_{k2}, 2l_{k2}) - Iwc(0, l_{k2}). \end{aligned}\right\}, \tag{104}$$

$$\left.\begin{aligned} Iwc(\alpha,\beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} \cos x_k \, Riw(a_k, x_k) dx_k \\ Iws(\alpha,\beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sin x_k \, Riw(a_k, x_k) dx_k \end{aligned}\right\}. \quad (105)$$

Легко заметить, что функция $Riw(a_{ki}, x_k)$ входит во все соотношения (93–102) как в явном виде, так и в качестве сомножителя подынтегральных выражений определенных интегралов, превращая их таким образом в двойные интегралы. Поскольку численное интегрирование двойных интегралов требует существенно больших вычислительных ресурсов, преобразование их к простым является весьма полезным при разработке математических моделей, пригодных для решения оптимизационных задач.

Преобразование функций $Iwc(\alpha, \beta)$и $Iws(\alpha, \beta)$ к простым определенным интегралам

Из соотношений (104) видно, что нижний предел в интегралах (105) может принимать четыре значения: l_{k2}, $2l_{k2}$, $L_k + l_{k2}$ и 0. В использованных ранее при разработке математической модели НВВТП методе наводимых ЭДС и методе среднего потенциала [7, 8] предполагалось, что длины всех проводников во много раз больше их радиусов. Придерживаясь и далее принятого ограничения, можно утверждать, что в интегралах с первыми тремя значениями нижнего предела функцию $Riw(a_k, x_k)$ можно задавать соотношением (64). Подставив (64) в (105) и выполнив интегрирование по dx_k, получим (106).

$$Iwc(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}[Si(2\beta) - Si(2\alpha)] - \frac{1}{a_k}\int_0^{a_k} \Phi_{1c}(\alpha,\beta,t)dt - F_c(\alpha,\beta), \quad (106)$$

$$Iwc(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left[ln\frac{\alpha}{\beta} - Ci(2\beta) - \mathrm{Ci}(2\alpha)\right] - \frac{1}{a_k}\int_0^{a_k} \Phi_{1s}(\alpha,\beta,t)dt - F_s(\alpha,\beta), \quad (107)$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},$$

$\mathrm{C}i(x)$ – интегральный косинус:

$$\mathrm{Ci}(x) = \gamma + \ln x - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\, dt = \gamma + \ln x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n)!},$$

$\gamma = 0{,}5772$ – постоянная Эйлера – Маскерони:

$$\Phi_{1q}(\alpha,\beta,t) = \frac{t}{F_1^{\,2}}[TSq(\alpha,\beta,t) + t_{ma}Cq(\alpha,\beta,t)], \quad (108)$$

$q = c, s$ – обобщенный индекс,

$$F_q(\alpha,\beta) = \frac{1}{a_k}\begin{cases} \displaystyle\int_{a_k}^{0,24} \Phi_2^{(0)}(a_k, 0; t)Eq(\alpha,\beta,t)dt, & \alpha > 20a_k \\ \displaystyle\int_{a_k}^{2,4} \Phi_2(a_k, 0; t)Eq(\alpha,\beta,t)dt, & \alpha > 2a_k \end{cases}, \quad (109)$$

$$\begin{Bmatrix} Sc(\alpha,\beta,t) \\ Ss(\alpha,\beta,t) \end{Bmatrix} = 2\int_{\alpha}^{\beta} \sin(x_k t_{ma} + \Delta\phi)\begin{Bmatrix} \cos x_k \\ \sin x_k \end{Bmatrix} dx_k = \begin{Bmatrix} Ac(t_{ma}^{+}; \Delta\phi) + Ac(t_{ma}^{-}; \Delta\phi) \\ As(t_{ma}^{-}; \Delta\phi) - As(t_{ma}^{+}; \Delta\phi) \end{Bmatrix}, \quad (110)$$

$$\begin{Bmatrix} Cc(\alpha,\beta,t) \\ Cs(\alpha,\beta,t) \end{Bmatrix} = 2\int_{\alpha}^{\beta} \cos(x_k t_{ma})\begin{Bmatrix} \cos x_k \\ \sin x_k \end{Bmatrix} dx_k = \begin{Bmatrix} As(t_{ma}^{-}; 0) + As(t_{ma}^{+}; 0) \\ Ac(t_{ma}^{+}; 0) - Ac(t_{ma}^{-}; 0) \end{Bmatrix}, \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Ec(\alpha,\beta,t) \\ Es(\alpha,\beta,t) \end{Bmatrix} &= 2\int_{\alpha}^{\beta} \exp(-x_k t_a)\begin{Bmatrix} \cos x_k \\ \sin x_k \end{Bmatrix} dx_k = \\ &= \pm\frac{2}{t_a^{\,2}+1}\left[\exp(-t_a\beta)\begin{Bmatrix} \sin\beta - t_a\cos\beta \\ \cos\beta + t_a\sin\beta \end{Bmatrix} - \exp(-t_a\alpha)\begin{Bmatrix} \sin\alpha - t_a\cos\alpha \\ \cos\alpha + t_a\sin\alpha \end{Bmatrix}\right], \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{Bmatrix} Ac(b; \Delta\phi) \\ As(b; \Delta\phi) \end{Bmatrix} = \frac{1}{b}\begin{Bmatrix} \cos(b\alpha + \Delta\phi) - \cos(b\beta + \Delta\phi) \\ \sin(b\beta + \Delta\phi) - \sin(b\alpha + \Delta\phi) \end{Bmatrix}, \quad (113)$$

$$t_{ma}=\frac{\sqrt{a_k{}^2-t^2}}{a_k},\ \ t_a=\frac{\sqrt{t^2-a_k{}^2}}{a_k},t_{ma}^{+}=\frac{\sqrt{a_k{}^2-t^2}+a_k}{a_k},\ t_{ma}^{-}=\frac{\sqrt{a_k{}^2-t^2}-a_k}{a_k}.$$

При интегрировании (108–111) использованы известные формулы произведений двух гармонических функций. Определенные интегралы (112, 113) получены из неопределенных, приведенных в [13]:

$$\int e^{-ax}\cos x dx=\frac{1}{a^2+1}e^{-ax}\,(\sin x-a\cos x),$$
$$\int e^{-ax}\sin x dx=-\frac{1}{a^2+1}e^{-ax}\,(\cos x-a\sin x).$$

Легко заметить, что в (104) содержатся интегралы $Iwc(0,l_{k2})$ и $Iws(0,l_{k2})$, в которых нижний предел интегрирования равен нулю. В этом случае одним из сомножителей подынтегрального выражения (105) будет $Riw(a_k\,,0)$, для описания которого следует воспользоваться соотношениями (40, 43 и 65). Получим (114, 115).

Из соотношений (112) при $\alpha = 0$ учитывая, что $t > 1$, а $a_k << 1$, получим (116, 117).

$$Iwc(0,l_{k2})=\frac{1}{2}Si(2l_{k2})-\frac{2}{a_k}\int\limits_0^{a_k}\Phi_{1c}\,(0,l_{k2},t)dt-\frac{1}{a_k}\left[\int\limits_{a_k}^{t_{mc}}\Phi_{2c}(t)dt+\int\limits_{t_{mc}}^{\infty}\Phi_{2c}^{(a)}(t)dt\right],\tag{114}$$

$$Iws(0,l_{k2})=\frac{1}{2}[\gamma+\ln(2l_{k2})-Ci(2l_{k2})]-\frac{2}{a_k}\int\limits_0^{a_k}\Phi_{1s}(0,l_{k2},t)\,dt-\frac{1}{a_k}\left[\int\limits_{a_k}^{t_{ms}}\Phi_{2s}(t)dt+\int\limits_{t_{ms}}^{\infty}\Phi_{2s}^{(a)}(t)\,dt\right],\tag{115}$$

где

$$\Phi_{2q}(t)=\Phi_2(a_k,0;t)Eq(0,l_{k2},t),\quad \Phi_{2q}^{(a)}(t)=\Phi_2^{(a)}(a_k,0;t)Eq(0,l_{k2},t).$$

Можно видеть, что если $t > 1$, а $a_k << 1$, то $t_a \approx \frac{t}{a_k}$. Тогда из соотношений (112) при $\alpha = 0$, получим:

$$Ec(0,l_{k2},t)\approx\frac{2a_k{}^2}{t^2+a_k{}^2}\left[\exp\left(-t\frac{l_2}{a}\right)\times\left(\sin l_{k2}-\frac{t}{a_k}\cos l_{k2}\right)+\frac{t}{a_k}\right].\tag{116}$$

$$Es(0,l_{k2},t)\approx\frac{2a_k{}^2}{t^2+a_k{}^2}\left[1-\exp\left(-t\frac{l_2}{a}\right)\times\left(\cos l_{k2}-\frac{t}{a_k}\sin l_{k2}\right)\right].\tag{117}$$

Поскольку $l_2/a >> 1$, соотношения (116 и 117) при $t > 1$ преобразуются к виду:

$$Ec(0,l_{k2},t)\approx 2a_k/t,\tag{118}$$
$$Es(0,l_{k2},t)\approx 2a_k{}^2/t^2.\tag{119}$$

Соотношения (118 и 119) совместно с (68) позволяют представить несобственные интегралы в (114 и 115) следующим образом:

$$\int\limits_{t_{mc}}^{\infty}\Phi_{2c}^{(a)}(t)dt\approx\frac{2Qa_k{}^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_{mc}}^{\infty}\frac{\cos t+\sin t}{t\sqrt{t}}dt,\tag{120}$$

$$\int\limits_{t_{ms}}^{\infty}\Phi_{2s}^{(a)}(t)dt\approx\frac{2Qa_k{}^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_{ms}}^{\infty}\frac{\cos t+\sin t}{t^2\sqrt{t}}dt.\tag{121}$$

Для определения рациональных значений t_{mc} и t_{ms} в соотношениях (114 и 115), соответственно, исследованы среднеквадратические отклонения асимптотических приближений функций $\Phi_{2c}(t)$ и $\Phi_{2s}(t)$ на интервале 2π от своих точных значений, выполненных по формуле, аналогичной (74):

$$S_{2q}(t_m)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{t_m}^{t_m+2\pi}\left[\frac{\Phi_{2q}(a_{ki},0;t)-\Phi_{2q}^{(a)}(a_{ki},0;t)}{M}\right]^2dt},$$

где $q = c, s$.

Результаты вычислений представлены на рисунке 4. Видно, что для обеспечения среднеквадратического отклонения 0,01 следует выбрать $t_{mc} = t_{ms} = t_m \geq 6$.

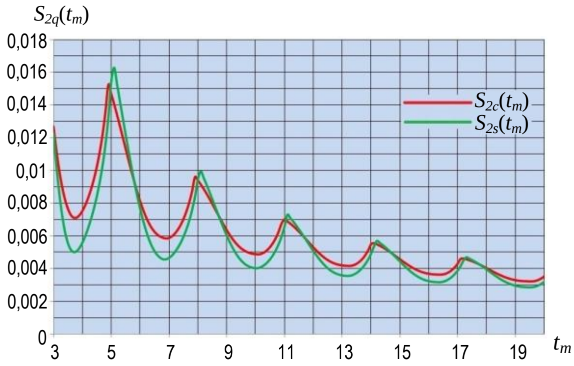


Рис. 4. Среднеквадратическое отклонение функций $\Phi_{2c}^{(a)}(t)/M$ и $\Phi_{2s}^{(a)}(t)/M$ от своих точных значений $\Phi_{2c}(t)/M$ и $\Phi_{2s}(t)/M$ на интервале $t_m \leq t \leq t_m + 2\pi$

Fig. 4. Standard Deviation of Functions $\Phi_{2c}^{(a)}(t)/M$ and $\Phi_{2s}^{(a)}(t)/M$ from Their Exact Values $\Phi_{2c}(t)/M$ and $\Phi_{2s}(t)/M$ on the Interval $t_m \leq t \leq t_m + 2\pi$

Соотношение (120) можно представить, как сумму двух несобственных интегралов, вычислить которые можно, применив к каждому из них правило интегрирования по частям и воспользовавшись затем соотношением (70) и определением интегралов Френеля (72):

$$\int_{t_m}^{\infty} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt = 2\frac{\cos t_m}{\sqrt{t_m}} - \sqrt{2\pi}[1 - 2S(t_m)], \quad (122)$$

$$\int_{t_m}^{\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt = 2\frac{\sin t_m}{\sqrt{t_m}} + \sqrt{2\pi}[1 - 2C(t_m)]. \quad (123)$$

Аналогичным образом можно представить соотношение (121). Полученные несобственные интегралы также могут быть выражены через интегралы Френеля (124, 125). Для этого к ним следует применить правило интегрирования по частям дважды, а затем также соотношения (70 и 72).

Асимптотические приближения интегралов Френеля для больших аргументов имеют вид (126, 127) [12]. Выражение (126, 127) позволяют найти асимптотические приближения для интегралов (122– 125). Получим (128, 129).

Выбирая $t_m = 6$ и ограничиваясь в (128) и (129) первым членом ряда, преобразуем (120) и (121) к следующему виду:

$$\int_{t_{mc}}^{\infty} \Phi_{2c}^{(a)}(t)dt \approx 6{,}55 \times 10^{-2} Q a_k,$$

$$\int_{t_{ms}}^{\infty} \Phi_{2s}^{(a)}(t)dt \approx 1{,}95 \times 10^{-2} Q {a_k}^2.$$

Подставляя эти значения в (114 и 115), получим (130–131).

$$\int_{t_m}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3}\frac{\cos t_m}{t_m\sqrt{t_m}} - \frac{4}{3}\frac{\sin t_m}{\sqrt{t_m}} - \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}[1 - 2C(t_m)], \quad (124)$$

$$\int_{t_m}^{\infty} \frac{\sin t}{t^2\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3}\frac{\sin t_m}{t_m\sqrt{t_m}} + \frac{4}{3}\frac{\cos t_m}{\sqrt{t_m}} - \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}[1 - 2S(t_m)]. \quad (125)$$

$$\mathrm{C}(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{n=0}^{[x/2]} (-1)^n \frac{(4n-1)!!}{(2x)^{2n}} \left[\sin x - \frac{(4n+1)}{2x}\cos x\right], \quad (126)$$

$$S(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{n=0}^{[x/2]} (-1)^n \frac{(4n-1)!!}{(2x)^{2n}} \left[\cos x + \frac{(4n+1)}{2x}\sin x\right], \quad (127)$$

где $[a]$ – целая часть числа a [13]; $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, причем $(-1)!! = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_m}^{\infty} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt &\approx -\frac{\sin t_m}{t_m\sqrt{t_m}} + \frac{2}{\sqrt{t_m}} \sum_{n=1}^{[t_m/2]} (-1)^n \frac{(4n-1)!!}{(2t_m)^{2n}} \left[\cos t_m + \frac{(4n+1)}{2t_m}\sin t_m\right] \\ \int_{t_m}^{\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt &\approx \frac{\cos t_m}{t_m\sqrt{t_m}} - \frac{2}{\sqrt{t_m}} \sum_{n=1}^{[t_m/2]} (-1)^n \frac{(4n-1)!!}{(2t_m)^{2n}} \left[\sin t_m - \frac{(4n+1)}{2t_m}\cos t_m\right] \end{aligned}\right\}, \quad (128)$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_m}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2\sqrt{t}} dt &\approx \frac{4}{3\sqrt{t_m}} \sum_{n=1}^{[t_m/2]} (-1)^n \frac{(4n-1)!!}{(2t_m)^{2n}} \left[\sin t_m - \frac{(4n+1)}{2t_m}\cos t_m\right] \\ \int_{t_m}^{\infty} \frac{\sin t}{t^2\sqrt{t}} dt &\approx -\frac{4}{3\sqrt{t_m}} \sum_{n=1}^{[t_m/2]} (-1)^n \frac{(4n-1)!!}{(2t_m)^{2n}} \left[\cos t_m + \frac{(4n+1)}{2t_m}\sin t_m\right] \end{aligned}\right\}. \quad (129)$$

$$Iwc(0, l_{k2}) = \frac{1}{2}Si(2l_{k2}) - \frac{2}{a_k}\int_0^{a_k} \Phi_{1c}(0, l_{k2}, t)\, dt - \frac{1}{a_k}\int_{a_k}^{6} \Phi_{2c}(t)dt - 6{,}55 \times 10^{-2} Q, \quad (130)$$

$$Iws(0, l_{k2}) = \frac{1}{2}[\gamma + \ln(2l_{k2}) - Ci(2l_{k2})] - \frac{2}{a_k}\int_0^{a_k} \Phi_{1s}(0, l_{k2}, t)\ dt - \frac{1}{a_k}\int_{a_k}^{6} \Phi_{2s}(t)dt - 1{,}95 \times 10^{-2} Q a_k. \quad (131)$$

Формулы (130 и 13) совместно с (106 и 107) преобразуют двойные интегралы (105) в простые, что позволяет существенно сократить время вычислений соотношений (104). Учитывая, что (64 и 74) также делают пригодными для инженерных расчетов соотношения (103), вычисление взаимных сопротивлений нагрузочного восьмиполюсника БТ становится простой инженерной задачей.

Входное сопротивление, коэффициент полезного действия и коэффициент усиления НВВТП

Входное сопротивление НВВТП, как следует из эквивалентной схемы (см. рисунок 1), будет:

$$Z_{\text{вх}} = R_{\Sigma} + R_{\text{пот}} + iX, \tag{132}$$

где $R_{\Sigma} = \sum_p \sum_{P'} n_P^* n_{P'} r_{PP'}$ – сопротивление излучения (133); $R_{\text{пот}} = -\left(I_m(\tilde{C})\right)/\left(\omega|\tilde{C}|^2\right)$ – сопротивление потерь в подстилающей поверхности (134); $X = -\left(\mathrm{Re}(\tilde{C})\right)/\left(\omega|\tilde{C}|^2\right)$ – емкостное сопротивление НВВТП (135).

Как видно из (133), сопротивление излучения НВВТП зависит не только от параметров восьмиполюсника внутренних сопротивлений, а и от КТТЗА к ПБТ. В первой части этой работы [1] получены аналитические выражения, устанавливающие связь этих величин с геометрическими размерами и комплексной емкостью НВВТП:

$$|n_{c1}| = \frac{\sin l_{k1}}{\rho_1}\sqrt{(R_c - R_c^0)^2 + (X_c - X_c^0)^2}, \tag{136}$$

$$\phi_{c1} = \mathrm{arctg}[(R_c^0 - R_c)/(X_c - X_c^0)], \tag{137}$$

$$|n_{c2}| = \frac{\sin l_{k2}}{\rho_2}\sqrt{(\rho_1 \mathrm{ctg} l_{k1} + \rho_2 \mathrm{ctg} l_{k2} + X_c^0)^2 + (R_c^0)^2}, \tag{138}$$

$$\phi_{c2} = \mathrm{arctg}[-R_c^0/(\rho_1 \mathrm{ctg} l_{k1} + \rho_2 \mathrm{ctg} l_{k2} + X_c^0)], \tag{139}$$

$$n_{c1} = (1 - n_{ci}\cos l_{ki})/\sin l_{ki}, \tag{140}$$

$$\rho_1 = 60\left(\ln\frac{l_{k1}}{a_{k1}} - 1 - \frac{L_k + l_{k2}}{l_{k2}}\ln\frac{L_k}{L_k + l_{k2}}\right) \tag{141}$$

$$\rho_2 = 60\left\{\ln\frac{l_{k1}}{a_{k1}} - 1 - \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{l_{k2}}{l_{k1}}\right)\ln\frac{L_k}{L_k + l_{k2}} - \right.\right. \left.\left. - \frac{l_{k2}}{l_{k1}}\ln\frac{4l_{k2}}{L_k + l_{k2}}\right\}\right., \tag{142}$$

$$R_c^0 + iX_c^0 = 1/i\omega\,\tilde{C}_0, \tag{143}$$

$$R_c + iX_c = 1/i\omega\tilde{C}, \tag{144}$$

где $\tilde{C}_0$ – комплексная емкость НВВТП без верхней нагрузки; $\tilde{C}$ – комплексная емкость НВВТП.

Соотношения, определяющие комплексную емкость НВВТП произвольного вида, а также сопротивление тепловых потерь в подстилающей поверхности и реактивную составляющую входного сопротивления, получены во второй части этой работы [8]. Раздельный учет сопротивления потерь и сопротивления излучения позволяет легко определить КПД НВВТП относительно поглощаемой мощности [2, 3]:

$$\eta = R_{\Sigma}/\left(R_{\Sigma} + R_{\text{пот}}\right). \tag{145}$$

Коэффициент согласования по сопротивлению НВВТП с 50-омным фидерным трактом [2, 3, 6]:

$$\eta_{\text{сс}} = \frac{4 \cdot 50 \cdot \left(R_{\Sigma} + R_{\text{пот}}\right)}{\left(R_{\Sigma} + R_{\text{пот}} + 50\right)^2 + X^2}. \tag{146}$$

Соотношения (145 и 146) позволяют определить КПД НВВТП относительно подводимой мощности [2]:

$$\eta_{\Sigma} = \eta\eta_{\text{сс}} = \frac{200 \cdot R_{\Sigma}}{\left(R_{\Sigma} + R_{\text{пот}} + 50\right)^2 + X^2}. \tag{147}$$

Поскольку высота излучателя (суммарная высота вертикальных проводников) НВВТП ВЧ-диапазона, как правило, существенно меньше длины волны, его коэффициент направленного действия можно считать равным 3 [2, 3, 15 и др.]. Следовательно, КУ НВВТП полностью определяется его КПД и равен [2, 3, 6]:

$$G = 3\eta_{\Sigma}. \tag{148}$$

Таким образом, полученные в работе соотношения устанавливают связь основных электрических характеристик НВВТП с его геометрическими размерами и проводимостью подстилающей поверхности. Это позволяет считать представленную совокупность формул математической моделью НВВТП.

Экспериментальная проверка полученных результатов и рекомендации по повышению КУ ШТ4Н81

Для проверки адекватности разработанной математической модели было осуществлено сравнение расчетной и экспериментально полученной зависимости КУ НВВТП ШТ4Н81 от частоты. Основные размеры антенны ШТ4Н81: высота $L = 2$ м; верхнее плечо излучателя $l_1 = 1$ м; нижнее плечо излучателя $l_2 = 1$ м; длина заземлителя $l_3 = 0{,}4$ м; радиусы проводников излучателя и заземлителя $a = 0{,}025$ м. Верхней оконечной нагрузки и противовесов исследуемая антенна не содержит.

Экспериментальное определение КУ осуществлялось путем измерения напряженности электрического поля, создаваемого ШТ4Н81 на удалении $r = 140$ м, при подводимой к антенне мощности $P = 5 \cdot 10^{-3}$ Вт.

Как известно [3], напряженность поля ЭМВ с вертикальной поляризацией, распространяющейся вдоль плоской полупроводящей поверхности, определяется по формуле Шулейкина – Ван дер Поля:

$$E = \frac{\sqrt{30PG}}{r}|F|, \tag{149}$$

где

$$|F| = \frac{2 + 0{,}3x}{2 + x + 0{,}6x^2} - \sqrt{\frac{x}{2}}e^{-\frac{5x}{8}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + (60\sigma\lambda)^2}} \tag{150}$$

$$x = \frac{\pi r}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (60\sigma\lambda)^2}}, \tag{151}$$

$|F|$ – модуль множителя ослабления трассы; x – приведенное расстояние.

Из соотношения (149) следует:

$$G = \frac{E^2 r^2}{30P|F|^2}. \tag{152}$$

Измерение напряженности электрического поля проводилась на частотах от 1,5 до 15 МГц, после чего все величины, входящие в правую часть соотношения (152), становились известными, за исключением параметров подстилающей поверхности. Задавая одинаковые параметры почвы в математической модели ШТ4Н81 и в соотношении (152), было установлено, что частотные зависимости расчетного значения КУ и КУ, полученного из (152), наилучшим образом совпадают при ε = 4 и σ = = 0,04 (см/м). На рисунке 5 представлены эти зависимости.

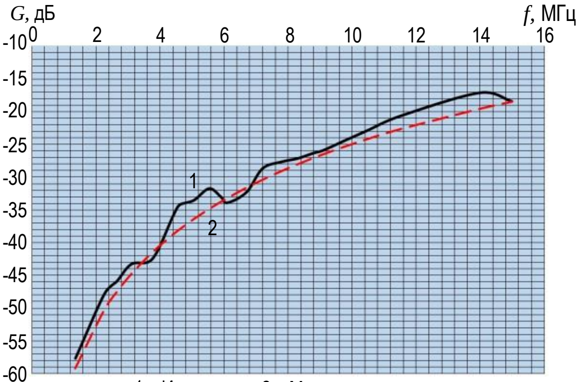


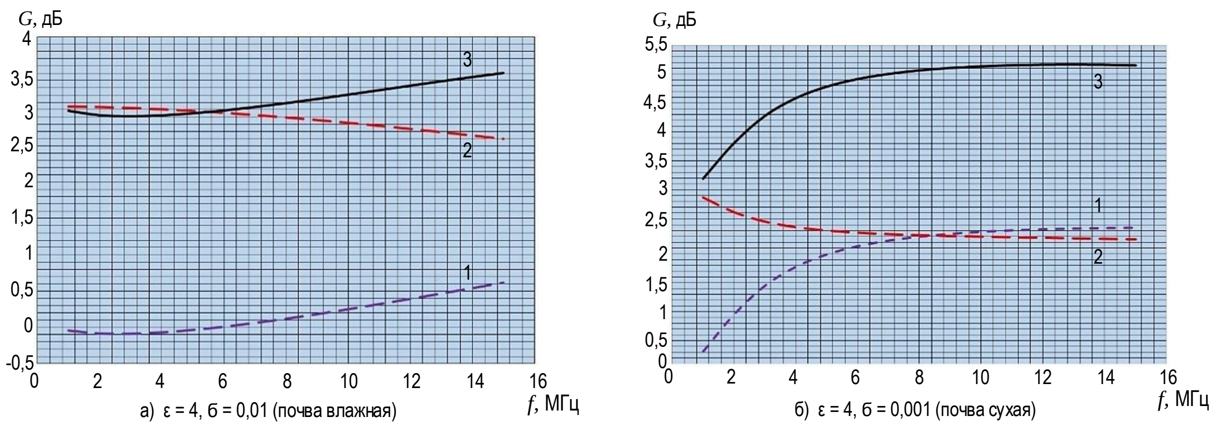
Рис. 5. Частотная зависимость КУ НВВТП ШТ4Н81

Fig. 5. Frequency Dependence of Gain USMF ShT4N81

Легко заметить, что их расхождение в большей части исследуемого диапазона лежит в пределах точности измерения напряженности поля. Такое совпадение свидетельствует о возможности применения представленной модели для оценки оптимальности конструкции ШТ4Н81. КУ существенно меньше единицы, что объясняется малыми электрическими размерами антенны и установкой ее непосредственно на полупроводящей поверхности. Поскольку конструкция ШТ4Н81, с целью обеспечения минимального времени развертывания, выбрана предельно простой, целесообразно оценить возможность повышения КУ включением в ее состав таких дополнительных элементов, как противовесы и верхняя оконечная нагрузка.

На рисунке 6 представлены частотные зависимости ожидаемого прироста КУ от введения каждого из этих элементов и от их совместного действия. Расчеты сделаны как для влажной, так и для сухой почвы. Верхняя оконечная нагрузка предполагалась состоящей из восьми, радиально расходящихся в горизонтальной плоскости проводников, длиной по 0,5 м. Система противовесов также состояла из восьми, радиально расходящихся по поверхности почвы, проводников по 2 м.

Легко заметить, что эффект от противовесов на влажной почве практически отсутствует, что было подтверждено экспериментально. В процессе измерения напряженности поля на удалении 140 м от ШТ4Н81, подключение противовесов никак не сказалось на уровне сигнала на входе измерительного приемника. Ожидаемый эффект от подключения нагрузки (см. рисунок 6) составляет (2 ÷ 3) дБ. Совместное использование противовесов и верхней нагрузки позволяет рассчитывать на увеличение КУ на сухой почве на (3 ÷ 5) дБ. Однако следует учесть, что подобная доработка антенны приведет к заметному увеличению времени ее развертывания, поэтому решение на доработку должно приниматься только после анализа особенностей эксплуатации комплекса, в которой данная антенна входит.



a) b)

Рис. 6. Частотная зависимость прироста КУ от введения в конструкцию НВВТП ШТ4Н81 противовесов (1), верхней нагрузки (2), а также противовесов и верхней нагрузки (3): a) почва влажная; b) почва сухая

Fig. 6. Frequency Dependence of the Gain in Gain on the Introduction of USMF into the Design ShT4N81: 1 – Counterweights; 2 – Top Load; 3 – Counterweights and Top Load (3): a) the Wet Soil; b) the Dry Soil

Заключение

Соотношения (75, 80–89, 93–102, 132–148) совместно с описанными в [8] выражениями, определяющие комплексную емкость НВВТП, представляют собой математическую модель электрически малого НВВТП ВЧ-диапазона, развернутого на полупроводящей поверхности и предназначенного для работы поверхностной волной. Данная модель связывает важнейшие характеристики НВВТП с его геометрическими размерами и электрическими параметрами почвы. Все входящие в математическую модель соотношения доведены до аналитического вида, за исключением нескольких определенных интегралов, вычисление которых не требует сколько-нибудь серьезного вычислительного ресурса и может выполняться с помощью среднего персонального компьютера. Экспериментальные исследования, выполненные в рамках этой работы, подтвердили связь как коэффициента усиления антенны, так и множителя ослабления трассы с электрическими характеристиками подстилающей поверхности. Показано, что подбором двух параметров комплексной относительной диэлектрической проницаемости земли можно обеспечить совпадение измеренной и расчетной напряженности поля на заданной трассе во всем исследуемом диапазоне частот с точностью до погрешности измерения. Этот факт является свидетельством адекватности предлагаемой модели и позволяет рассчитывать на ее полезность при решении большого числа прикладных задач. К числу таких задач можно отнести частотно-территориальное планирование ВЧ радиосвязи, планирование мероприятий по местоопределению несанкционированных источников излучения, оптимизацию конструкции НВВТП и некоторые другие.

Однако, как известно [4, 6], параметры подстилающей поверхности не являются стабильной величиной и могут существенно изменяться в зависимости от интенсивности осадков и времени года. В связи с этим предлагаемая математическая модель может оказаться полезной для оперативной коррекции их усредненных значений. Коррекция параметров трассы в реальном масштабе времени путем контроля уровня тестовых сигналов позволит повысить точность определения радиусов зон электромагнитной доступности источников ЭМВ, с учетом их энергетического потенциала и расположения на местности.

Список источников

1. Попов О.В., Тумашов А.В., Борисов Г.Н., Коровин К.О. Методика расчета радиуса зоны электромагнитной доступности источника поверхностных волн с заданной плотностью спектра изотропно излучаемого сигнала // Труды учебных заведений связи. 2022. Т. 8. № 3. С. 72–79. DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-3-72-79
2. Гавеля Н.П., Истрашкин А.Д., Муравьев Ю.К., Серков В.П. Антенны. Ч. I. Л.: ВКАС, 1963. 633 с.
3. Серков В.П. Распространение радиоволн и антенные устройства. Л.: ВАС, 1981.
4. Калинин А.И., Черенкова Е.Л. Распространение радиоволн и работа радиолиний. М.: Связь, 1971. 439 с.
5. Бесчастнов Н.С., Конторович М.И. О потерях в земле при использовании корпуса передатчика в качестве противовеса // Труды ВКАС. 1944. № 3.
6. Муравьев Ю.К. Справочник по расчету проволочных антенн. Л.: ВАС, 1978.
7. Попов О.В., Тумашов А.В., Борисов Г.Н., Коровин К.О. Математическая модель несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания. Часть 1. Общий подход к построению математической модели // Труды учебных заведений связи. 2023. Т. 9. № 1. С. 24–33. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-1-24-33
8. Попов О.В., Тумашов А.В., Борисов Г.Н., Коровин К.О. Математическая модель несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания. Часть 2. Определение комплексной емкости малых, по сравнению с длиной волны, нормально разомкнутых проволочных антенн // Труды учебных заведений связи. 2023. Т. 9. № 2. С. 6–21. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-2-6-21
9. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. Пер. с англ. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. с англ. СПб.: Лань, 2003. 831 с.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 1.
12. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Пер. с нем. М.: Наука, 1977. 342 с.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
14. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967.
15. Вершков М.В. Судовые антенны. Л.: Судостроение, 1972. 424 с.

References

1. Popov O., Tumashov A., Borisov G., Korovin K. Method for Calculating the Radius of an Electromagnetic Availability Zone based on a Surface Wave Source with a Given Spectrum Density of an Isotropically Emitted Signal. *Proceedings of Telecommun. Univ.* 2022;8(3):72–79. DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-3-72-79
2. Gavelya N.P., Istrashkin A.D., Muravyov Yu.K. *Antennas. Part I.* Leningrad: Military Academy of Communications Publ.; 1963. 633 p.
3. Serkov V.P. *Radio Wave Propagation and Antenna Devices*. Leningrad: Military Academy of Telecommunications Publ.; 1981.

4. Kalinin A.I., Cherenkova E.L. *Propagation of Radio Waves and the Operation of Radio Links*. Moscow: Sviaz Publ.; 1971. 439 p.
5. Beschastnov N.S., Kontorovich M.I. On Loss in the Ground when Assembling the Mechanism as a Counterweight. *Trudy VKAS*. 1944;3.
6. Muravyov Yu.K. *Handbook for the Calculation of Wire Antennas*. Leningrad: Military Academy of Telecommunications Publ.; 1978.
7. Popov O., Tumashov A., Borisov G., Korovin K. Mathematical Model of the Unbalanced Monopole Feed. Part 1. General Approach to Building a Mathematical Model. *Proceedings of Telecommun. Univ.* 2023;9(1):24–33. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-1-24-33
8. Popov O., Tumashov A., Borisov G., Korovin K. Mathematical Model of the Unbalanced Monopole Feed. Part 2. Determination of Complex Capacitance of Normally Open Wire Antennas, Small with Respect to the Wavelength. *Proceedings of Telecommun. Univ.* 2023;9(2):6–21. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-2-6-21
9. Stratton J. *Electromagnetic Theory*. NY: Mcgraw – Hill; 1941.
10. Korn A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. NY: Mcgraw – Hill; 1961. 943 p.
11. Smirnov V.I. Higher Mathematics Course, vol.1. Moscow: Nauka Publ.; 1974.
12. Janke, Emde, Lösch. *Tafel Höherer Funktionen*. Stuttgart; 1960. DOI:10.1002/zamm.19610410619
13. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integrals and Series. Elementary Functions*. Moscow: Nauka Glavnaia redaktsiia fiziko-matematicheskoi literatury Publ.; 1981.
14. Ango A. *Mathematics for Electrical and Radio Engineers.* Moscow: Nauka Publ.; 1967.
15. Vershkov M.V. *Ship Antennas*. Leningrad: Sudostroenie Publ.; 1972. 424 p.

Статья поступила в редакцию 08.11.2023; одобрена после рецензирования 13.11.2023; принята к публикации 22.11.2023.
The article was submitted 08.11.2023; approved after reviewing 13.11.2023; accepted for publication 22.11.2023.

Информация об авторах:

ПОПОВ Олег Вениаминович — кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник ООО «Специальный технологический центр»
https://orcid.org/0000-0002-5315-2679

ТУМАШОВ Андрей Витальевич — инженер-конструктор ООО «Специальный технологический центр»
https://orcid.org/0000-0003-2656-0463

БОРИСОВ Георгий Николаевич — инженер ООО «Специальный технологический центр»
https://orcid.org/0000-0002-3275-251X

КОРОВИН Константин Олегович — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиосистем и обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича
https://orcid.org/0000-0001-7979-3725