

Научная статья

УДК 621.391

<https://doi.org/10.31854/1813-324X-2025-11-1-34-43>

EDN:OIKCAN



Аналитическое описание квазиравномерной последовательности импульсов первого типа

Юрий Александрович Никитин, nikitin.ua@sut.ru

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

Аннотация

В настоящее время системы пассивного цифрового синтеза частот находят все более широкое применение в возбуждателях радиопередающих устройств и в гетеродинах радиоприемных устройств систем радиолокации, радионавигации и радиосвязи. В основе таких систем лежит конечный автомат – устройство или программа, которая может изменять свои состояния в дискретные моменты времени, целократные тактовому интервалу, имеют конечное число устойчивых состояний, т. е. обладают конечной памятью. Поэтому **актуальна** задача аналитического описания состояний таких автоматов в любой наперед заданный момент времени.

Цель настоящей работы заключается в компактном описании функций переходов и функций выходов автоматов, используемых в системах пассивного цифрового синтеза частот. Существенной особенностью анализа и проектирования таких автоматов является требование к минимизации уровня функциональной фазоимпульсной модуляции выходного потока импульсов, т. е. минимизация временной ошибки между потоком формируемых импульсов и идеально равномерным (гипотетическим) потоком импульсов требуемой частоты. Квазипериодическую последовательность импульсов с минимальным временным отклонением от гипотетической последовательности называют квазиравномерной импульсной последовательностью. Кроме того, цель настоящей работы заключается в корректном доказательстве оптимальности квазиравномерной последовательности с точки зрения минимума функциональной фазоимпульсной модуляции выходного потока импульсов.

Методы исследования основываются на использовании теоретико-числовых преобразований основного параметра автомата – его коэффициента деления $N = P/Q$, где P и Q , соответственно, число тактовых и выходных импульсов на периоде неравномерности выходного потока квазиравномерной последовательности.

Результат. Получены **новые** аналитические выражения для описания состояний автомата в любом наперед заданном моменте времени, выражения для мгновенной (текущей) фазы автомата и мгновенной (текущей) частоты следования квазиравномерной импульсной последовательности на его выходе. Такие выражения удобны для анализа и расчета автоматов, используемых в системах пассивного цифрового синтеза частот.


Теоретическая значимость заключается в разработке метода описания состояний оптимального конечного автомата во временной области и получение соответствующих аналитических выражений.

Ключевые слова: синтез частот, конечный автомат, функция переходов, функция выходов, цепная дробь, рациональное число, квазиравномерная последовательность импульсов, функциональная фазоимпульсная модуляция

Ссылка для цитирования: Никитин Ю.А. Аналитическое описание квазиравномерной последовательности импульсов первого типа // Труды учебных заведений связи. 2025. Т. 11. № 1. С. 34–43. DOI:10.31854/1813-324X-2025-11-1-34-43. EDN:OIKCAN

Original research
<https://doi.org/10.31854/1813-324X-2025-11-1-34-43>
EDN:OIKCAN

Quasi-Uniform Sequence Analytical Description of the First Type Pulses

 Yury A. Nikitin, nikitin.ua@sut.ru

The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

Annotation

At present, passive digital frequency synthesis systems are increasingly used in exciters of radio transmitting devices and in heterodynes of radio receiving devices of radar, radio navigation and radio communication systems. Such systems are based on a finite state machine - a device or program that can change its states at discrete moments of time, integer multiples of the clock interval, have a finite number of stable states, i.e. have a finite memory. Therefore, the problem of analytical description of the states of such machines at any predetermined moment of time is **relevant**.

The purpose of this work is to compactly describe the transition functions and output functions of machines used in passive digital frequency synthesis systems. An essential feature of the analysis and design of such machines is the requirement to minimize the level of functional phase-pulse modulation of the output pulse flow, i.e. minimization of the time error between the flow of generated pulses and the ideally uniform (hypothetical) flow of pulses of the required frequency. A quasi-periodic pulse sequence with a minimum time deviation from the hypothetical sequence is called a quasi-uniform pulse sequence. In addition, the purpose of this work is to correctly prove the optimality of a quasi-uniform sequence from the point of view of the minimum functional phase-pulse modulation of the output pulse flow.

The research methods are based on the use of number-theoretical transformations of the main parameter of the machine - its division coefficient $N = P / Q$, where P and Q , respectively, are the number of clock and output pulses in the period of non-uniformity of the output flow of the quasi-uniform sequence.

Result. New analytical expressions for describing the states of the machine at any predetermined moment of time, expressions for the instantaneous (current) phase of the machine and the instantaneous (current) frequency of the quasi-uniform pulse sequence at its output are obtained. Such expressions are convenient for analyzing and calculating machines used in passive digital frequency synthesis systems.

The theoretical significance lies in the development of a method for describing the states of an optimal finite state machine in the time domain and obtaining the corresponding analytical expressions.

Keywords: frequency synthesis, finite state machine, transition function, output function, continued fraction, rational number, quasi-uniform pulse sequence, functional phase-pulse modulation

For citation: Nikitin Yu.A. Quasi-Uniform Sequence Analytical Description of the First Type Pulses. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2025;11(1):34–43. (in Russ.) DOI:10.31854/1813-324X-2025-11-1-34-43. EDN:OIKCAN

Конечным автоматом (КА) в теории алгоритмов называется математическая абстракция, позволяющая описывать пути изменения состояния объекта в зависимости от его текущего состояния и входных данных при условии, что общее возможное количество состояний конечно [1–5].

Наибольший интерес для синтеза частот представляют оптимальные автоматы в том смысле, что временная ошибка между одноименными пере-

падами (точками на числовой оси) на выходе автомата и ближайшими к ним перепадами идеально равномерной последовательности (ИРП) той же требуемой частоты не превышает длительности тактового интервала и является минимально возможной величиной для класса цифровых структур. Такие автоматы назовем *оптимальными*. На их выходе формируется квазиравномерная последовательность (КРП) импульсов (одноименных перепа-

дов), которую также можно рассматривать в виде точек на числовой оси.

В технике синтеза частот КА реализуют с помощью простейших элементов – триггеров, счетчиков импульсов, накапливающих сумматоров, поглотителей импульсов, регистров и т. д. [6]. В цифровых синтезаторах частоты в области тактовых частот $f_{опВЧ}$ до единиц–десятков мегагерц КА можно выполнить программно, до сотен мегагерц – с помощью программируемых логических матриц, а на еще более высоких тактовых частотах – только аппаратно на сверхбыстродействующей логике.

Заметим, что одноименные перепады на выходе автомата появляются в дискретные моменты времени, кратные его тактовому интервалу $T_{опВЧ}$. Но синтезируемая частота $f_{выхНЧ} = 1/T_{выхНЧ}$ с номером Q в общем случае не целократна тактовой частоте $f_{опВЧ}$ с номером $P > Q$, т. е. коэффициент деления автомата $N = P/Q$ есть рациональное число в виде неправильной дроби. Например, для случая $P = 16$, $Q = 7$ и $N = 16/7 = 2 + 2/7$ на рисунке 1 показаны временные ошибки КРП относительно импульсов ИРП, что приводит к появлению функциональной фазоимпульсной модуляции.

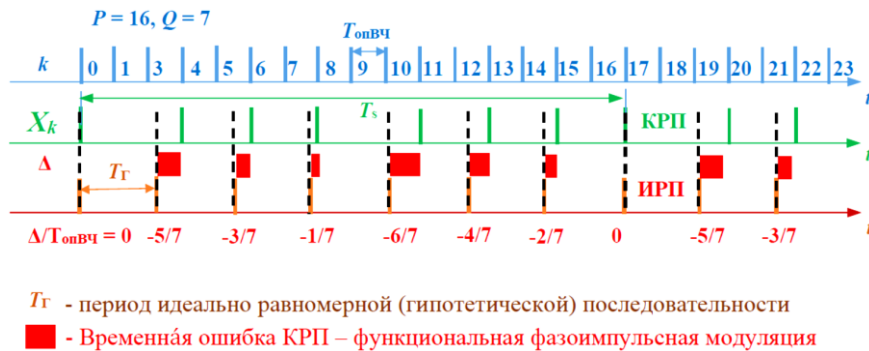


Рис. 1. Функциональная фазоимпульсная модуляция КРП на выходе КА

Fig. 1. Functional Phase-Pulse Modulation of the Quasi-Uniform Pulse (QUS) at the Output of the Finite State Machine (FSM)

КА могут иметь несколько выходов, например, выход переполнения ρ_k и выход текущей суммы S_k (рисунок 2), и по своим разным выходам соответствовать автоматам разных типов.

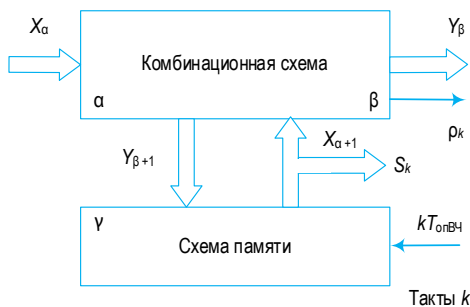


Рис. 2. Формальная структура КА

Fig. 2. Formal Structure of the FSM

При описании автомата полагаем, что он функционирует в дискретные равноотстоящие моменты времени, которые занумерованы целыми положительными числами, и других меток времени не имеет. Интервал времени $T_{опВЧ} = 1/f_{опВЧ}$ назовем тактом автомата, формальная структура последнего приведена на рисунке 2. Длительность такта автомата должна превышать интервал времени $T_{КА}$ между соседними моментами достижения автоматом устойчивых состояний.

Таким образом, для текущего дискретного времени T_k на входе КА можно записать в следующем виде:

$$T_k = 0, 1, \dots, \lfloor k \left(\frac{t}{T_{опВЧ}} \right) \rfloor, \dots, T_k \geq T_{КА},$$

где t – текущее время; $\lfloor * \rfloor$ – оператор выделения целой части числа, меньшей или равной ему; $k = 0, 1, 2, \dots$ – натуральное число.

Автомат с X_α входами и X_β выходами можно представить в виде соединения комбинационной схемы или логического преобразователя с размерностью по входу и выходу α и β , соответственно, и схемы (элемента) памяти в цепи обратной связи размерности γ . При этом состояния входа и выхода комбинационной схемы – суть состояния входа и выхода КА, а его внутренними состояниями и, возможно, состояниями выхода являются состояния схемы памяти, поскольку выходами КА, наряду с выходами комбинационной схемы, также могут служить и выходы схемы памяти.

Важным параметром автомата является его коэффициент деления $N = f_{опВЧ}/f_{выхНЧ} = P/Q$ (рациональное число), разложение которого в цепную дробь по алгоритму Евклида имеет вид:

$$N = \frac{P}{Q} = N_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_r}}},$$

где $N_0 \in \mathbb{Z}$; $q, q_2, \dots, q_{r-1}, q_r \in \mathbb{N}$; r – длина цепной дроби; \mathbb{Z} – подгруппа целых чисел, \mathbb{N} – множество натуральных чисел.

Любое рациональное число $N = P/Q$ представимо в виде цепной дроби *единственным* образом. Коэффициенты этой дроби являются неполными частными в алгоритме Евклида [7–10].

Решение уравнения с целочисленными коэффициентами (диофантова уравнения):

$$nP + mQ + d = 0$$

с помощью теоретико-числовых преобразований записывается в виде:

$$\begin{cases} n = (-1)^{r-1}dQ_{r-1} - Qz, \\ m = (-1)^r dP_{r-1} + Pz, \end{cases}$$

где $z \in \mathbb{Z}$; P_{r-1}, Q_{r-1} – соответственно, числитель и знаменатель предпоследнего частного при разложении рационального числа N в цепную дробь по алгоритму Евклида.

В устройствах цифрового синтеза частот КА можно представить в виде дискретной параметрической цепи – черного ящика, функционирующего по определенному, но жесткому и наперед заданному алгоритму, задаваемому пользователем. Существенная особенность автоматов, используемых для синтеза частот – периодичность процессов на их выходах. Поэтому количество повторяющихся состояний автомата не будет превышать числа P , где P – количество тактовых интервалов на периоде неравномерности структуры потока выходных импульсов Q (точек на числовой оси). Другими словами, P – это емкость автомата (число его устойчивых состояний).

Заметим, что описание формируемых КА колебаний – его функций выходов ρ_k и переходов S_k , – как во временной области, так и с точки зрения их спектрального состава, представляет значительный теоретический и практический интерес, позволяет понимать закономерности работы КА и строить его математические модели, ориентированные на решение задач цифрового – пассивного или активного – синтеза частот [6, 11, 12].

Квазирегулярные последовательности и их описание

Описать работу автомата в интересах синтеза частот можно с помощью КРП импульсов или точек на числовой оси. Покажем, что коэффициент деления N оптимального КА можно реализовать с помощью двух ближайших к N целочисленных значений.

Теорема 1. Для получения на выходе оптимального КА минимальной временной ошибки между импульсами синтезируемой последовательности относительно ближайших к ним импульсов ИРП требуемой частоты, не превышающей длительности единичного периода, достаточно двух ближайших к N целочисленных коэффициентов.

Действительно, если предположить, что коэффициент деления автомата $N = P/Q$ реализуется двумя ближайшими целочисленными значениями:

$$N \in ([N], [N]), \tag{1}$$

можно записать:

$$[N] \leq N < [N], \tag{2}$$

где $[N] = [N] + 1$; $N = [N] + \{N\}$; $0 \leq \{N\} < 1$.

Однако $[N] \leq [N] + \{N\} < [N] + 1$, значит:

$$0 \leq \{N\} < 1. \tag{3}$$

Следовательно, формула (1) справедлива, и теорема 1 доказана.

Представить КРП точек на выходе оптимального автомата можно двумя способами. При первом способе описания автомата выходная КРП логических перепадов или точек на числовой оси представляется в виде парциальных целочисленных коэффициентов деления автомата $[iN] = [iP/Q]$, усреднение которых на периоде неравномерности T_s дает требуемое значение выходного периода $T_{\text{выхНЧ}}$, выраженного в долях тактового периода $T_{\text{опВЧ}}$:

$$N = \frac{T_{\text{выхНЧ}}}{T_{\text{опВЧ}}}, \quad T_s = PT_{\text{опВЧ}} = QT_{\text{выхНЧ}},$$

$$\frac{1}{T_{\text{выхНЧ}}} = \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{Q-1} \left\lfloor i \frac{P}{Q} \right\rfloor T_{\text{опВЧ}}.$$

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

КРП первого типа

КРП точек первого типа на выходе математической модели КА может быть получена следующим образом [13, 14]. Расположим на оси безразмерного времени, на которой за единицу принят интервал $T_{\text{опВЧ}}$, равномерную последовательность точек с целочисленными номерами $n \in (-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty)$ в моменты времени:

$$\frac{t}{T_{\text{опВЧ}}} = \Psi_n = n \frac{P}{Q}.$$

Назовем ее порождающей последовательностью точек для искомой КРП первого типа. Выделим по обе стороны каждой из точек порождающей последовательности область значений ϑ (назовем ее интервалом захвата), удовлетворяющую одному из условий:

$$\begin{cases} \Psi_n + \varepsilon - 1 \leq \vartheta < \Psi_n + \varepsilon, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \Psi_n + \varepsilon - 1 < \vartheta \leq \Psi_n + \varepsilon, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \Psi_n + \varepsilon \leq \vartheta < \Psi_n + \varepsilon + 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \Psi_n + \varepsilon < \vartheta \leq \Psi_n + \varepsilon + 1, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $\varepsilon = 0,5$; Ψ_n – текущая (мгновенная) фаза ИРП точек; ϑ – текущая (мгновенная) фаза КРП точек.

В выражениях (4.1) и (4.3) интервал захвата замкнут слева, а в выражениях (4.2) и (4.4.) интервал захвата замкнут справа, и во всех случаях в нем все-

гда окажется одно и только одно целочисленное значение $\vartheta = \vartheta_n$. Точка оси, соответствующая этому целочисленному значению, и будет точкой формируемой КРП, имеющей номер n .

Теорема 2. КРП точек первого типа, сформированные в соответствии с (4) и, более того, при любых значениях ε , идентичны по структуре и отличаются друг от друга лишь сдвигом во времени на целое число номеров n .

Для доказательства этого утверждения напомним аналитические выражения для ϑ_n , попадающих в интервал захвата и соответствующие всем четырем строкам формулы (4):

$$\begin{cases} \vartheta_n = \lfloor \Psi_n + \varepsilon \rfloor, & (5.1) \\ \vartheta_n = \lceil \Psi_n + \varepsilon \rceil, & (5.2) \\ \vartheta_n = \lfloor \Psi_n + \varepsilon \rfloor, & (5.3) \\ \vartheta_n = \lceil \Psi_n + \varepsilon \rceil. & (5.4) \end{cases}$$

где $\lfloor * \rfloor$ – операция выделения целой части рационального числа X , строго меньшей этого числа; например:

$$\lfloor 3,7 \rfloor = 3; \lfloor -3,7 \rfloor = -4; \lfloor 3,0 \rfloor = 3; \lfloor -3,0 \rfloor = -3;$$

однако:

$$\lfloor \lfloor 3,0 \rfloor \rfloor = 2 \text{ и } \lfloor \lfloor -3,0 \rfloor \rfloor = -4;$$

$\lceil * \rceil$ – целая часть рационального числа X , большая или равная ему; $\lceil \lceil * \rceil \rceil$ – целая часть числа X , строго превышающая его не более, чем на единицу.

При дробных значениях X имеют место равенства: $\lfloor \lfloor X \rfloor \rfloor = \lfloor X \rfloor$; $\lceil \lceil X \rceil \rceil = \lceil X \rceil$. При целочисленных значениях X соотношения иные: $\lfloor X \rfloor = X$; $\lfloor \lfloor X \rfloor \rfloor = X - 1$; $\lceil X \rceil = X$; $\lceil \lceil X \rceil \rceil = X + 1$. Нетрудно установить, что каждая из четырех рассматриваемых функций (5) может быть выражена через любую из трех других в соответствии с таблицей 1.

ТАБЛИЦА 1. Способы выделения целой части аргумента X
TABLE 1. Methods for Extracting the Integer Part of the Argument X

-	$\lfloor X \rfloor$	$\lceil X \rceil$	$\lfloor \lfloor X \rfloor \rfloor$	$\lceil \lceil X \rceil \rceil$
$\lfloor X \rfloor$	-	$-\lceil -X \rceil$	$-\lfloor \lceil -X \rceil \rceil - 1$	$\lceil \lfloor X \rfloor \rceil - 1$
$\lceil X \rceil$	$\lfloor -X \rfloor$	-	$\lfloor \lfloor X \rfloor \rfloor + 1$	$-\lceil \lceil -X \rceil \rceil + 1$
$\lfloor \lfloor X \rfloor \rfloor$	$-\lfloor \lceil -X \rceil \rceil - 1$	$\lfloor X \rfloor - 1$	-	$-\lceil \lceil -X \rceil \rceil$
$\lceil \lceil X \rceil \rceil$	$\lfloor X \rfloor + 1$	$-\lceil \lceil -X \rceil \rceil - 1$	$-\lfloor \lceil -X \rceil \rceil$	-

С учетом сказанного примем за исходные формулы:

$$\vartheta_n = \left\lfloor \left\lfloor n \frac{P}{Q} + \varepsilon \right\rfloor \right\rfloor, \quad (6.1)$$

$$\vartheta_n = \left\lceil \left\lceil n \frac{P}{Q} + \varepsilon \right\rceil \right\rceil, \quad (6.2)$$

$$\vartheta_n = \left\lfloor \left\lfloor n \frac{P}{Q} + \varepsilon \right\rfloor \right\rfloor, \quad (6.3)$$

$$\vartheta_n = \left\lceil \left\lceil n \frac{P}{Q} + \varepsilon \right\rceil \right\rceil. \quad (6.4)$$

Поскольку значения ϑ_n в (6) отличаются, в соответствии с таблицей 1, на целое число – единицу, теорема 2 доказана.

Теорема 3. КРП точек первого типа, сформированные в соответствии с (5) и описываемые формулами (6), инвариантны начальному сдвигу (начальной фазе) и могут быть приведены к общему виду:

$$\vartheta_n = \left\lfloor \left\lfloor \frac{nP - R}{Q} \right\rfloor \right\rfloor, \quad (7)$$

где $R = \lfloor \lfloor Q\varepsilon \rfloor \rfloor$ в случаях (4.2 и 4.4) и $R = \lceil \lceil Q\varepsilon \rceil \rceil$ в случаях (4.1 и 4.3).

Предварительно докажем следующие равенства:

$$\left\lfloor \frac{\lfloor xN \rfloor}{N} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor, \quad (8)$$

$$\left\lceil \left\lceil \frac{\lfloor xN \rfloor}{N} \right\rceil \right\rceil = \lfloor x \rfloor, \quad (9)$$

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{M+1}{N} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{M}{N} \right\rfloor, \quad (10)$$

где $N \geq 2$ – произвольное натуральное число; M – произвольное целое число.

И в дополнение пара очевидных равенств:

$$\begin{cases} \lfloor \lfloor N \rfloor \pm \lfloor M \rfloor \rfloor = \lfloor N \rfloor \pm \lfloor M \rfloor, \\ \lceil \lceil N \rceil \pm \lceil M \rceil \rceil = \lceil N \rceil \pm \lceil M \rceil. \end{cases} \quad (11)$$

Известно [7–9], что любое рациональное число можно представить в виде выражения:

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor - 1 + \{x\},$$

где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть x , меньшая или равная ему; $0 \leq \{x\} < 1$ – дробная часть x ; $\lceil x \rceil$ – целая часть x , большая или равная ему; $0 < 1 - \{x\} \leq 1$ – дробная часть x .

Так как $x \times N = \lfloor x \rfloor N + \{x\}N$, то $\lfloor xN \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor N \rfloor + \lfloor \{x\}N \rfloor$,

$$\frac{\lfloor xN \rfloor}{N} = \frac{x \lfloor xN \rfloor}{xN} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor \{x\}N \rfloor}{xN},$$

причем $\lfloor \{x\}N \rfloor < xN$.

Следовательно:

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor xN + \lfloor \{x\}N \rfloor}{xN} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \left\lfloor \left\lfloor \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{xN} + \frac{\lfloor x \rfloor}{xN} - \frac{\lfloor xN \rfloor}{xN} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor,$$

и равенство (8) справедливо.

В соответствии с таблицей 1 возможны различные варианты разбиения рационального числа на целую и дробную части.

Согласно таблице 1 справедливы соотношения:

$$\lfloor \lfloor xN \rfloor + 1 \rfloor = -\lfloor -xN \rfloor \text{ и } \lfloor \lfloor -\lfloor -xN \rfloor / N \rfloor \rfloor = -\lfloor \lfloor -xN \rfloor / N \rfloor - 1.$$

Последнее выражение, в соответствии с (8), и таблицей 1 равно $\lfloor -x \rfloor - 1$ или $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor$, поэтому равенство (9) справедливо.

Таким образом, очевидно, что:

$$\frac{M + 1}{N} = \frac{M}{N} + \frac{1}{N} = \left\lfloor \frac{M}{N} \right\rfloor + \left\{ \frac{M}{N} \right\} + \frac{1}{N}.$$

При целом M выражение можно записать как:

$$\frac{1}{N} \leq \left\{ \frac{M}{N} \right\} \leq \frac{N - 1}{N}.$$

Следовательно:

$$\frac{2}{N} \leq \left\{ \frac{M}{N} \right\} + \frac{1}{N} \leq 1.$$

Однако:

$$\frac{1}{N} \leq \left\{ \frac{M}{N} \right\} < 1 \text{ или } 0 \leq \left\{ \frac{M}{N} \right\} < 1 - \frac{1}{N},$$

т. е. при $N \geq 2$:

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{M + 1}{N} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{M}{N} \right\rfloor,$$

и справедлива формула (10).

После сказанного выражение можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left\lfloor n \frac{P}{Q} + \varepsilon \right\rfloor &= \left\lfloor \left\lfloor \frac{(n \frac{P}{Q} + \varepsilon) Q}{Q} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nP + \lfloor Q(+\varepsilon) \rfloor}{Q} \right\rfloor = \\ &= \left\lfloor \frac{(nP + \lfloor Q\varepsilon \rfloor + 1)}{Q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nP - \lfloor \lfloor Q\varepsilon \rfloor \rfloor}{Q} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{nP - R}{Q} \right\rfloor \right\rfloor, \end{aligned}$$

где $\lfloor \lfloor Q\varepsilon \rfloor \rfloor = R$.

Аналогично нетрудно показать, что:

$$\left\lfloor n \frac{P}{Q} + \varepsilon \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{nP - R}{Q} \right\rfloor \right\rfloor.$$

Осталось доказать следующее. Если даны две пары КРП первого типа с одинаковыми P и Q , но с различными значениями временного сдвига ε , т. е. R и различными способами получения по (6), то всегда можно найти такую постоянную разность номеров $n = n_2 - n_1$, при которой разность моментов времени $\vartheta = \vartheta_{n_2} - \vartheta_{n_1}$ (выраженная в единичных интервалах), которые были найдены для КРП 2 и КРП 1 по формуле (7), будет также постоянной величиной (12).

$$\begin{aligned} \vartheta &= \left\lfloor \left\lfloor \frac{n_2 P - R_2}{Q} \right\rfloor \right\rfloor - \left\lfloor \left\lfloor \frac{(n_1 + n) P - R_2}{Q} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{n_1 P - (R_2 - nP)}{Q} \right\rfloor \right\rfloor = \varphi_{n_1} + \varphi = \\ &= \left\lfloor \left\lfloor \frac{n_1 P - R_1}{Q} \right\rfloor \right\rfloor + \varphi = \left\lfloor \left\lfloor \frac{n_1 P - R_1}{Q} + \varphi \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{n_1 P - (R_1 - Q\varphi)}{Q} \right\rfloor \right\rfloor. \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, что последнее равенство имеет место, если $R_2 - nP = R_1 - Q\vartheta_n$, т. е. при $R = R_2 - R_1 = nP - Q\vartheta_n$. Последнее выражение представляет собой диофантово уравнение (уравнение в целых числах) первой степени, которое при взаимно простых P и Q всегда разрешимо в целых n и ϑ_n [9].

Решения этого диофантова уравнения записываются в виде:

$$\begin{cases} \vartheta = |S + 1| + R_z, \\ S = (-1)^{r-1}(\pm x)R_{r-1}, \\ n = |V + 1| - Q_z, \\ V = (-1)^{r-1}(\pm x)Q_{r-1}, \end{cases}$$

где $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $R = \lfloor L \pm x \rfloor$; $x = 0, 1, 2, \dots, L - 1$; r - число членов разложения числа $N = P/Q$ в цепную дробь по алгоритму Евклида.

Таким образом, КРП точек первого типа инвариантна начальному сдвигу - теорема 3 доказана.

Каноническая форма записи КРП точек первого типа

Доказанная независимость структуры КРП точек первого типа от значений ε делает выражение (7) предельно общей и, вместе с тем, наиболее простой формой задания КРП точек первого типа и поэтому может быть названа *канонической*. Два целых взаимно простых числа P и Q , т. е. $(P, Q) = 1$, полностью определяют структуру КРП точек первого типа, а целое число R определяет смещение этой последовательности на оси времени. Согласно (7), момент времени ϑ_n является целочисленной (дискретной) функцией своего номера n . Представляет интерес выяснение и другой зависимости - определение номера n точки ϑ_n , ближайшей слева от заданного момента времени (предшествующей ему). Иными словами, представляет интерес смена аргумента и функции в (7).

Теорема 4. Номер точки n , соответствующий значению дискретной функции ϑ_n из (7), определяется формулой:

$$n = \left\lfloor \frac{\vartheta_n Q + R}{P} \right\rfloor. \quad (13)$$

Для доказательства данного утверждения рассмотрим график, приведенный на рисунке 3, линейной непрерывной функции ϑ непрерывного аргумента, который, очевидно, является графиком обратной функции n от непрерывного аргумента ϑ :

$$n = \frac{\vartheta Q + R}{P}.$$

Чтобы найти целочисленные значения ϑ_{n1} , соответствующие, согласно (7), некоторому целочисленному значению n_1 , необходимо из точки n_1 на оси ординат восстановить перпендикуляр к этой оси до пересечения с наклонной прямой (точки a , b , c на рисунке 3). Целочисленное значение ϑ , ближайшее к ординате точки a снизу, будет, согласно (7) точкой ϑ_{n1} .

Поскольку в (7)

$$\frac{d\vartheta}{dn} = \frac{P}{Q} > 1,$$

то исключено, чтобы двум соседним целочисленным значениям n соответствовало одно и то же целочисленное значение ϑ_n .

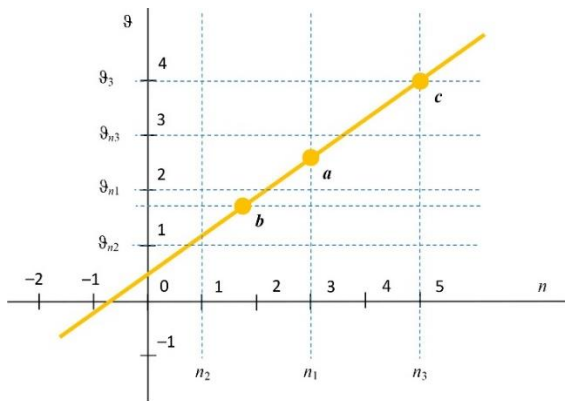


Рис. 3. График функции ϑ

Fig. 3. Graph of the Function ϑ

Ввиду вышеизложенного выберем произвольное значение ϑ и проведем из соответствующей точки оси ординат горизонтальную прямую до пересечения с наклонной прямой (точка b на рисунке 3). Очевидно, что значение n_2 , ближайшее слева от абсциссы точки b , определяет момент времени ϑ_{n2} , ближайший слева от выбранного времени ϑ , все значения которого соответствуют, согласно (13), целочисленным n .

Особого рассмотрения требует случай, когда ϑ имеет целочисленное значение ϑ_3 , а точка пересечения c имеет целочисленную же абсциссу n_3 . Дело в том, что, согласно (7), точке n соответствует не ϑ_3 ,

а ϑ_{n3} . Следовательно, n_3 действительно является номером точки, предшествующей ϑ_3 . Таким образом, теорема 4 доказана.

Логическая КРП первого типа

На основе информации, полученной в предыдущем разделе, целесообразно отказаться от оси непрерывного времени и вместо целочисленных значений $t = \vartheta_n$ рассматривать номера границ между единичными интервалами тактовой частоты. Будем обозначать эти номера k , появление точки, принадлежащей КРП первого типа, – единицей, а ее отсутствие – нулем. В результате КРП точек первого типа преобразуется в логическую КРП.

Очевидно, что логическая КРП первого типа представляет собой двухзначную функцию $X_k = X(k)$ целочисленного аргумента k . Чтобы написать аналитическое выражение этой функции, обратим внимание на следующее обстоятельство.

Если на оси времени двум следующим друг за другом целочисленным значениям ϑ_k и ϑ_{k+1} соответствует, согласно (5), один и тот же номер n , то ϑ_k не является одной из точек КРП первого типа. Напротив, если моменту времени ϑ_k соответствует номер n , а моменту времени ϑ_{k+1} – номер $n + 1$, то ϑ_k является n -й точкой рассматриваемой последовательности. Поэтому для логической КРП первого типа должна быть справедлива формула:

$$X_k = \left\lfloor \frac{(k+1)Q + R}{P} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{kQ + R}{P} \right\rfloor. \quad (14)$$

Выражение (14) является конечной разностью первого порядка функции (13), в которой ϑ_n заменена своим номером k , т. е. выражение (14) является дискретным аналогом первой производной функции непрерывного аргумента. Оно позволяет предсказать мгновенную частоту X_k на выходе прямо частотного автомата, выраженную через мгновенный период, в любой наперед заданный момент времени. Эта формула полезна для описания работы прямо частотного КА, но неудобна тем, что в нее, кроме одного аргумента k , входит и второй аргумент $k + 1$. Чтобы разрешить эту коллизию, введем в рассмотрение функцию:

$$Y_k = kQ + R - P \left\lfloor \frac{kQ + R}{P} \right\rfloor,$$

которую удобнее записать в следующем виде:

$$\frac{Y_k}{P} = \frac{kQ + R}{P} - \left\lfloor \frac{kQ + R}{P} \right\rfloor. \quad (15)$$

Назовем эту функцию фазой X_k на периоде неравномерности P .

Из (15) следует:

$$kQ + R = Y_k + P \left\lfloor \frac{kQ + R}{P} \right\rfloor.$$

Теорема 5. Фаза Y_k логической КРП первого типа может принимать любое из целочисленных значений от 0 до $P - 1$ и на главном периоде частоты следования однозначно определяется выражением:

$$Y_k = P \left\{ \frac{kQ + R}{P} \right\}. \quad (16)$$

Для доказательства этого утверждения напомним очевидное равенство:

$$(k + 1)Q + R = kQ + R + Q. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что:

$$(k + 1)Q + R = Y_k + P \left\lfloor \frac{kQ + R}{P} \right\rfloor + Q. \quad (18)$$

Поделим обе части (18) на P и возьмем из полученного выражения функцию $\lfloor * \rfloor$, т. е. выделим целую часть:

$$\left\lfloor \frac{(k + 1)Q + R}{P} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{Y_k + Q}{P} + \left\lfloor \frac{kQ + R}{P} \right\rfloor \right\rfloor. \quad (19)$$

Но $\lfloor (kQ + R)/P \rfloor$ в (19) – целое число, поэтому его можно вынести за знак $\lfloor * \rfloor$, что приводит к выражению:

$$\left\lfloor \frac{(k + 1)Q + R}{P} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{kQ + R}{P} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y_k + Q}{P} \right\rfloor. \quad (20)$$

Сопоставив формулы (20) и (13), можно сделать вывод, что:

$$X_k = \left\lfloor \frac{Y_k + Q}{P} \right\rfloor. \quad (21)$$

Перепишем теперь (14) в виде:

$$Y_k = P \left(\frac{kQ + R}{P} - \left\lfloor \frac{kQ + R}{P} \right\rfloor \right). \quad (22)$$

По определению функции $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, если $(kQ + R)/P$ – не целое число, то Y_k в (22) определяется выражением (16), если же $(kQ + R)/P$ – целое число, то $Y_k = 0$.

Рассмотрим подробнее выражение (16). Поскольку $kQ + R$ – число целое, то можно утверждать, что дробь $\{(kQ + R)/P\}$ может иметь лишь одно из P значений i/P , где $i \in \{0, 1, 2, \dots, P - 1\}$. Соответственно, функция Y_k может принимать любое из целочисленных значений от 0 до $P - 1$. Теорема 5 доказана.

Таким образом, выражение (16) однозначно определяет функцию мгновенной (текущей) фазы $Y(k)$ на периоде P , выражение (14) однозначно определяет функцию мгновенной (текущей) частоты $X(k)$, выражение (7) позволяет определить состояние функции ϑ_n в любой наперед заданный момент времени, а выражение (13) позволяет найти номер точки n , соответствующий заданному состоянию функции ϑ_n .

Теорема 6. Временная ошибка КРП точек на выходе оптимального КА относительно ИРП точек той же частоты инвариантна начальному сдвигу, по модулю не превышает половины периода тактового интервала и является минимально возможной величиной для класса цифровых структур.

Перепишем формулу (7):

$$\vartheta_n = \left\lfloor \left\lfloor \frac{nP - R}{Q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(nP - \lfloor Q(-\varepsilon) \rfloor)}{Q} \right\rfloor \right\rfloor,$$

$$\vartheta_n = \left\lfloor \left\lfloor \frac{nP + \lfloor Q\varepsilon \rfloor}{Q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{nP}{Q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor Q\varepsilon \rfloor}{Q} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{nP}{Q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor Q\varepsilon \rfloor}{Q} \right\rfloor,$$

$$\vartheta_n = \left\lfloor \frac{nP}{Q} \right\rfloor + \varepsilon - 1,$$

$$\vartheta = \frac{nP}{Q} + \varepsilon - 1.$$

Тогда временная разность ИРП и КРП точек может быть представлена в виде выражения:

$$\begin{aligned} \vartheta - \vartheta_n &\equiv \Delta = \frac{nP}{Q} + \varepsilon - 1 - \left\lfloor \frac{nP}{Q} \right\rfloor - \varepsilon + 1 = \\ &= \left\{ \frac{nP}{Q} \right\} < 1. \end{aligned} \quad (23)$$

При этом:

$$0 \leq \left\{ \frac{nP}{Q} \right\} < 1, \quad (24)$$

и модуль разности ИРП и КРП:

$$\left| \left\{ \frac{nP}{Q} \right\} \right| < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, теорема 6 доказана.

В таблицах 2 и 3 приведены примеры формирования КРП с параметрами $P = 8, Q = 3, \varepsilon = 0$, в соответствии с формулами (16) и (14) – таблица 2, и в соответствии с формулами (7) и (24) – таблица 3. Желтым цветом выделен главный период повторения функций переходов Y_k и Δ ; красным цветом выделены импульсы функции выхода X_k .

ТАБЛИЦА 2. КРП в соответствии с формулами (16) и (14)

TABLE 2. QUS in Accordance with Formulas (16) and (14)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Y_k	0	3	6	1	4	7	2	5	8=0	3	6	1	4	7
X_k	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0

ТАБЛИЦА 3. КРП в соответствии с формулами (7) и (24)

TABLE 3. QUS in Accordance with Formulas (7) and (24)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ϑ_n	0	2	5	8	10	13	16	18	21	24
Δ	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0

Фазовая окружность первого типа

Построим окружность произвольного радиуса (рисунок 4) и расположим на ней равномерно P точек. Пронумеруем их последовательно против часовой стрелки от 0 до $P - 1$. Полученный график целесообразно назвать фазовой окружностью логической КРП, т. к. с его помощью нетрудно вычислить значения мгновенной фазы (а по ней и значения X) для точки логической КРП с любым номером m , если известна фаза точки с номером n .

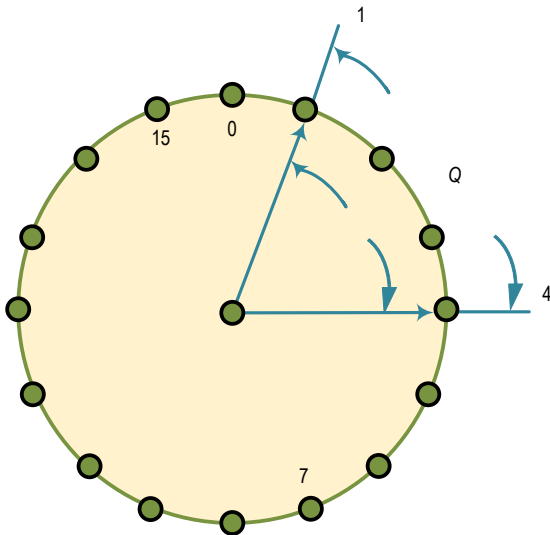


Рис. 4. Фазовая окружность для $P = 16$, $Q = 3$, $R = 1$

Fig. 4. Phase Circle for $P = 16$, $Q = 3$, $R = 1$

Действительно, пусть, например, $Y_k = 4$ (см. рисунок 4). Согласно (19), для получения Y_{k+1} следует пройти по окружности по часовой стрелке Q интервалов, поскольку при переходе от Y_k к Y_{k+1} первый член правой части (19) должен вырасти на Q единиц. Далее возможны три случая.

В первом случае мы не дойдем до точки с номером $P - 1$, во втором случае попадем в эту точку, а в третьем – перейдем через точку с номером $P - 1$.

В первых двух случаях третий член правой части (15) сохраняет свое значение неизменным. Следовательно, номер точки, в которую мы пришли, есть искомое значение Y_{k+1} . В третьем случае третий член правой части (15) вырастет на P единиц, и мы будем должны вычесть число P из полученной суммы. Поэтому в номерах, превышающих $P - 1$, нет надобности и для нахождения любого значения Y_{k+1} достаточно фазовой окружности, поделенной на P интервалов и формулы (16).

Выводы

Получена аналитическая запись КРП точек на выходе математической модели КА, что позволяет осознанно подходить к проектированию автоматов, используемых в пассивных цифровых синтезаторах частоты.

Показано, что КРП точек на выходе КА инвариантны моменту времени начала отсчета, идентичны по структуре и отличаются лишь сдвигом во времени на целое число тактов КА.

Предложены 4 функции выделения целой части рационального числа N и показано, что каждая из них может быть выражена через любую из трех других. Использование таких функций позволяет эффективно анализировать работу автоматов разной структуры.

С помощью логических КРП первого типа можно анализировать поведение прямочастотных КА (например, построенных на основе накапливающих сумматоров), используемых для синтеза частот и получать аналитические выражения для функций переходов (функций текущей фазы) и функций выходов (функций текущей частоты), подобных КА [6]. Компактная запись таких функций помогает в дальнейшем перейти к спектральному анализу КРП импульсов и получить выражения для спектра на выходе автомата в свернутом виде, т. е. без обращения к рядам.

Список источников

1. Аperiodические автоматы / под ред. В. И. Варшавского. М.: Наука, 1976. 424 с.
2. Карцев М.А., Брик В.А. Вычислительные системы и синхронная арифметика. М.: Радио и связь, 1981. 360 с.
3. Филиппов А.Г., Белкин О.С. Проектирование логических узлов ЭВМ. М.: Советское Радио, 1974. 344 с.
4. Захаров Н.Г., Рогов Н.Г. Синтез цифровых автоматов. Ульяновск: УлГТУ, 2003. 135 с.
5. Поспелов Д.А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. М.: Высшая школа, 1970. 308 с.
6. Никитин Ю.А. Теория цифроаналогового синтеза частот с помощью конечных автоматов. СПб.: СПбГУТ, 2024. 342 с.
7. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М. – Л.: ГИТТЛ, 1940. 112 с.
8. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 112 с.
9. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. М.: Наука, 1978. 63 с.
10. Фомин С.В. Системы счисления. М.: Наука. ГИФМЛ, 1975. 48 с.
11. Иванов В.А. Прямой синтез частот на основе цифровых структур // Радиотехника и электроника. 1983. № 9. С. 1765–1771.
12. Vankka J. Direct Digital Synthesizers: Theory, Design and Applications. D.Sc Thesis. Helsinki: Helsinki University of Technology, 2000. 193 p.

13. Никитин Ю.А. Анализ конечного автомата для синтеза частот с помощью функций целочисленного аргумента // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2010. Т. 53. № 5. С. 25–29. EDN:LSOURJ
14. Никитин Ю.А. Математическая модель формирования колебаний с использованием методов пассивного цифрового синтеза // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2011. Т. 54. № 9. С. 52–57. EDN:OCFXEB

References

1. Varshavsky V.I. (ed.) *Aperiodic Automata*. Moscow. Nauka Publ.; 1976. 424 p. (in Russ.)
2. Kartsev M.A., Brik V.A. *Computing Systems and Synchronous Arithmetic*. Moscow: Radio i svyaz Publ.; 1981. 360 p. (in Russ.)
3. Filippov A.G., Belkin O.S. *Design of Logical Units of Computers*. Moscow: Sovetskoe Radio Publ.; 1974. 344 p. (in Russ.)
4. Zakharov N.G., Rogov V.N. *Synthesis of Digital Automata*. Ulyanovsk: UISTU Publ.; 2003. 135 p. (in Russ.)
5. Pospelov D.A. *Arithmetic Foundations of Discrete-Action Computers*. Moscow: Vysshaya shkola Publ.; 1970. 308 p. (in Russ.)
6. Nikitin Yu.A. *Theory of Digital-to-Analog Frequency Synthesis Using Finite Automata*. St. Petersburg: SPbSUT Publ.; 2024. 342 p. (in Russ.)
7. Vinogradov I.M. *Fundamentals of Number Theory*. Moscow – Leningrad: GITTL Publ.; 1940. 112 p. (in Russ.)
8. Khinchin A.Ya. *Continued Fractions*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. 112 p. (in Russ.)
9. Gelfond A.O. *Solution of Equations in Integers*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. 63 p. (in Russ.)
10. Fomin S.V. *Number Systems*. Moscow: Nauka. GIFML Publ.; 1975. 48 p. (in Russ.)
11. Ivanov V.A. Direct frequency synthesis based on digital structures. *Radio engineering and electronics*. 1983;9:1765–1771. (in Russ.)
12. Vankka J. *Direct Digital Synthesizers: Theory, Design and Applications*. D.Sc Thesis. Helsinki: Helsinki University of Technology Publ.; 2000. 193 p.
13. Nikitin Yu.A. Analysis of Finite Automaton for Frequency Synthesis with the Use of Functions of Integer-Valued Argument. *Journal of Instrument Engineering*. 2010;53(5):25–29. (in Russ.) EDN:LSOURJ
14. Nikitin Yu.A. Mathematical Model of Oscillation Formation with the Use of Passive Digital Synthesis. *Journal of Instrument Engineering*. 2011;54(9):52–57. (in Russ.) EDN:OCFXEB

Статья поступила в редакцию 11.09.2024; одобрена после рецензирования 17.12.2024; принята к публикации 07.02.2025.

The article was submitted 11.09.2024; approved after reviewing 17.12.2024; accepted for publication 07.02.2025.

Информация об авторе:

НИКИТИН
Юрий Александрович

кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры электроники Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича
<https://orcid.org/0000-0002-0749-9751>

Автор сообщает об отсутствии конфликтов интересов.

The author declares no conflicts of interests.