

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР «ТОР С ТОРОМ» НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КИНЕМАТИКИ

В данной статье представлено теоретическое исследование кинематических пар, известных как «пары катания», используемых во многих областях машиностроения, в частности в механизмах. Данное исследование касается таких тел (звеньев), как геометрические торы, представляющих собой хорошо известные тела вращения. С точки зрения геометрической кинематики, описаны новые представления механических движений тора в соединении «тор с тором» без связи с причинами, которые вызывают это движение. Проанализированы два варианта соединения двух торов: оси торов параллельны и перпендикулярны. По аналогии анализ кинематических пар данного вида расширяет элементы теории кинематических пар и даёт возможность разрабатывать их новые варианты во многих механизмах, используемых в различных областях машиностроения.

**Ключевые слова:** кинематическая пара, пара катания, тор, подвижность, матрица подвижности, скольжение, катание, верчение.

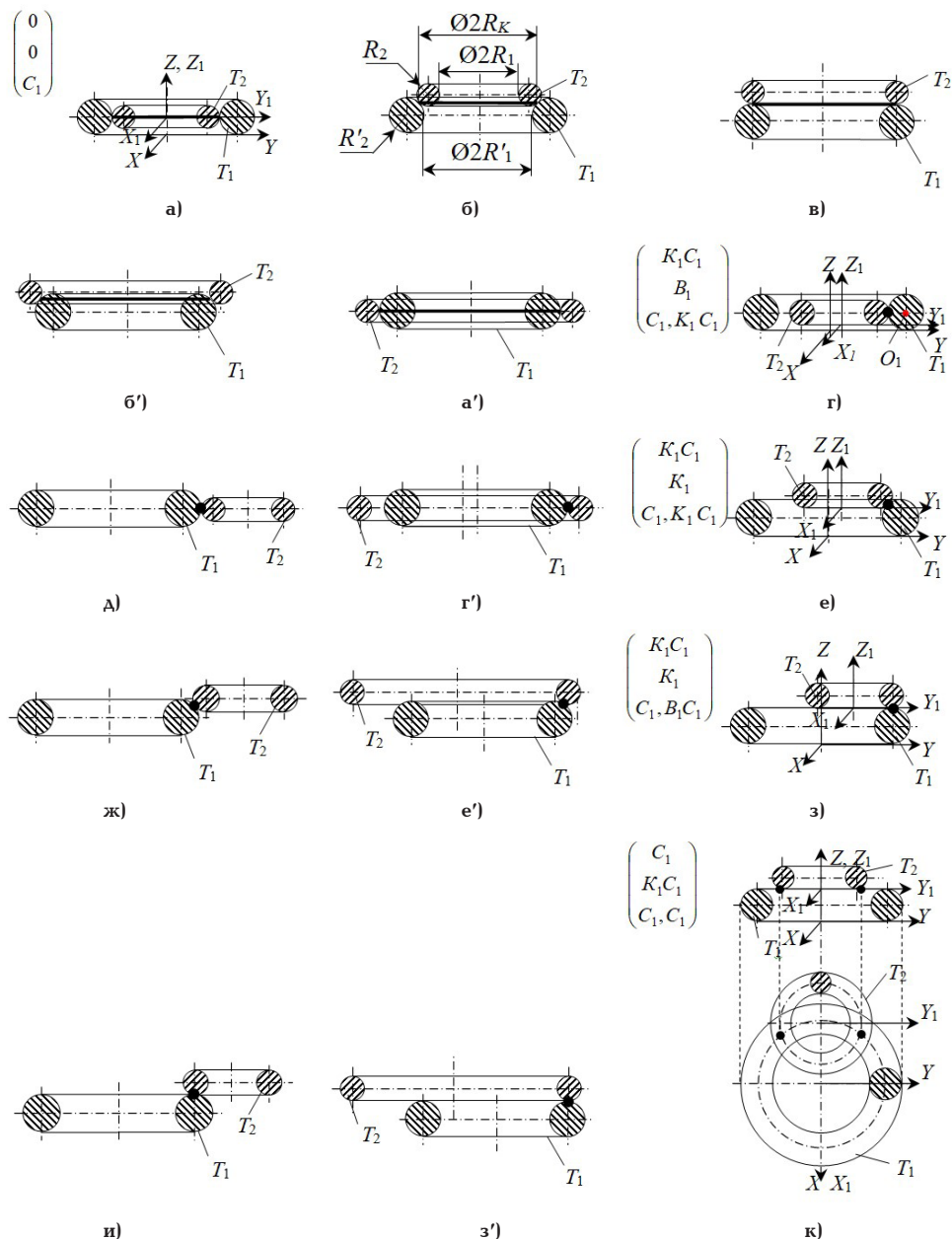
**Введение.** Как известно, тор (в геометрии) — это поверхность вращения, образующаяся при вращении окружности в трёхмерном пространстве вокруг оси, копланарной к окружности (не пересекающей её) [1]. Мы будем рассматривать частный случай, когда ось вращения не касается окружности и поверхность имеет кольцевую форму — тор вращения. Искомое исследование является продолжением анализа специфических кинематических пар (КП), которое было дано в [2], где частным случаем КП типа «цилиндр в цилиндре» был представлен вариант пары узкий тор (кольцо) в цилиндре.

Данный вид КП представляет собой новый вид КП, которые встречаются в виде кинематических соединений: звенья сцепления цепи, кинематические пары третьего класса — сферические в виде колец, которые используются во многих механизмах робототехники, автоматических конвейерах и др. Аналитическое исследование соединений вида «тор с тором» впервые было рассмотрено в [3], где представлены пространственные механизмы с высшими КП. Непосредственное изучение поведения механизмов с этими КП было рассмотрено в [4, 5] Т. Билом (T. Bil), а также [6] Дж. П. Мейярдом (J. P. Meijaard), где была предложена полная классификация высших пар, которая может быть смоделирована из нижних пар с одной степенью свободы. Но эти исследования касались в основном кинематического анализа пространственных механизмов на основе звеньев в виде торов и их геометрического моделирования. Суть данного ис-

следования заключается в рассмотрении некоторых особенностей соединений, или сборок по Т. Билу, «тор с тором» как КП и попытке классифицировать их. Это, прежде всего, необходимо для того, чтобы синтезировать механизмы, имеющие наименьшее число связей, большую подвижность КП и, тем самым, увеличение кинематической мобильности механизма, что является одной из наиболее актуальных задач современного машиностроения.

Данное исследование опирается на исследования [2, 7] и дополняет некоторые аспекты, касающиеся высшей пары в виде торов [4–6]. Целесообразность данной работы — это обобщение закономерностей описания связей подвижного и неподвижного торов, с учетом расположения их осей в пространстве, постоянства вида контакта и на основе этого предложить новый вид КП типа «тор с тором», связанный с разработкой КП нового типа за счёт изменения их формы геометрии. Новизна предлагаемой теории заключается в новом подходе описания классификации КП с точки зрения геометрической кинематики, основанной на исследовании движений двух торов, таких как верчение ( $B$ ), качение ( $K$ ) и скольжение ( $C$ ), что позволит в перспективе описать КП всех известных видов [8–10].

**Постановка задачи.** Задано кинематическое соединение типа «тор с тором» в виде КП: подвижный тор  $T_2$  «внутри» или «снаружи» неподвижного  $T_1$ . Известны геометрические размеры торов  $T_1$  и  $T_2$ , их ограничения по размерам, а также виды расположения осей этих торов между собой: 1) парал-



**Рис. 1. Оси торов параллельны:**  
 а, б, в, б', а' — КП  $(T_1-T_2)_{1\text{пар}}$ ; г, д, г' — КП  $(T_1-T_2)_{2\text{пар}}$ ; е, ж, е' — КП  $(T_1-T_2)_{3\text{пар}}$ ;  
 з, и, з' — КП  $(T_1-T_2)_{4\text{пар}}$ ; к — КП  $(T_1-T_2)_{5\text{пар}}$

лельны (коаксиальны); 2) перпендикулярны. Кроме того, для каждого варианта сборки определяется степень подвижности  $W$  тора  $T_2$  относительно тора  $T_1$  вдоль и вокруг координатных осей, а также сами движения по сути: скольжение ( $C$ ), катание ( $K$ ) и верчение ( $B$ ). Задача: теоретически проанализировать виды (сборки) КП «тор с тором» ( $T_1$  и  $T_2$ ) при условии постоянства вида контакта между собой с точки зрения геометрической кинематики и попытаться их классифицировать.

**Теория.** Под геометрической кинематикой будем понимать движения материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения вне связи с силами, определяющими это движение, т.е. без учёта их массы и действующих на них сил [11, с. 181]. Рассматривая движения торов, как КП, будем учитывать, что контакт (связь) торов не меняется: в нашем случае — это точки и окружность. Данные движения аналогичны описанным в [2],

поэтому описание их подвижностей также соответствует известной формуле Сомова–Малышева [12]:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (1)$$

где  $n$  — количество подвижных звеньев;  $p_i$  — количество пар  $i$ -го класса.

Из формулы (1) видно, что для данного исследования:  $n = 1$  и  $p_i$  — меняются.

Описывать различные виды (сборки) КП «тор с тором» будем по следующим характеристикам:

**1) геометрические параметры торов:**

$R'_1$  — внутренний радиус «первого» неподвижного тора;  $R'_2$  — радиус сечения образующей окружности неподвижного тора;  $R_1$  — внутренний радиус «второго» подвижного тора;  $R_2$  — радиус сечения образующей окружности подвижного тора;  $R'_3 = R'_1 + 2R'_2$  — внешний радиус «первого» не-

подвижного тора;  $R_3 = R_1 + 2R_2$  — внешний радиус «второго» подвижного тора (рис. 1б). В зависимости от геометрических величин размеров этих параметров возможны следующие варианты КП неподвижного  $T_1$  и подвижного  $T_2$  торов:

1)  $R_1 = R'_1, R_2 = R'_2$ ; 2)  $R_1 = R'_1, R_2 < R'_2$ ; 3)  $R_1 = R'_1, R_2 > R'_2$ ; 4)  $R_2 = R'_2, R_1 < R'_1$ ; 5)  $R_2 = R'_2, R_1 > R'_1$ ; 6)  $R_3 = R'_1, R'_2$  — любой в пределах реальных размеров КП; 7)  $R_1 = R'_3, R_2$  — любой в пределах реальных размеров КП.

Оси рассматриваемых торов  $T_1$  и  $T_2$  могут быть:  
 — параллельны (или коаксиальны) между собой;  
 — перпендикулярны, т.е. пересекаются или перекрещиваются под углом  $90^\circ$ ;

**2) степень подвижности  $W$  одного тора относительно другого:**

учитывается количество движений  $W$  подвижного тора внутри неподвижного вдоль и вокруг координатных осей  $X, Y$  и  $Z$ , а также сами движения по сути: верчение ( $B$ ), катание ( $K$ ) и скольжение ( $C$ ) [2, с. 16];

**3) вид контакта (связи) этих торов** — точка или окружность, где  $k$  — число контактов в КП [10–12] и их суммарное количество — « $n_k$ ».

Введём системы отсчета: неподвижная  $OXYZ$  — для неподвижного  $T_1$  и подвижная  $O_1X_1Y_1Z_1$  — для подвижного  $T_2$ .

**I. Оси торов  $T_1$  и  $T_2$  параллельны (коаксиальны).**

Вид связи этих торов — точки или линии (окружность), т.е. данные кинематические пары будут являться высшими [12]. Для обозначения движений в КП будем использовать матрицу движений в виде «матрицы-столбец»:

$$D = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}, K_D = x + y + z, \quad (2)$$

где  $K_D$  — количество движений,  $D_x, D_y, D_z$  — это движения вдоль или вокруг координатных осей  $X, Y$  и  $Z$ , которые могут быть трёх видов:  $B_i$  — количеством  $i$ -верчений, или  $K_j$  — количеством  $j$ -качений, или  $C_k$  — количеством  $k$ -скольжений.

Составляем перечень сборок этих КП, где индекс «пар» обозначает параллельность осей вращения  $T_1$  и  $T_2$ .

**1) КП ( $T_1-T_2$ )<sup>пар</sup>** — см. рис. 1а, б, в, б', а'. Касание торов происходит по окружности, длиной  $l = 2\pi R_K$ , где  $R_K$  — радиус окружности контакта:

$$R'_1 \leq R_K \leq (R'_1 + R'_2) \text{ или } R_1 \leq R_K \leq (R_1 + 2R_2).$$

Анализируя данную КП, по аналогии с [2], и объединяя формулы (2), (3), движения  $T_2$  с тором  $T_1$  можно обозначить следующим образом:

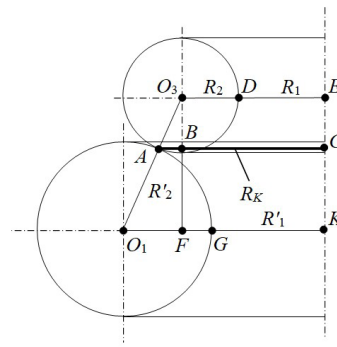
$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \end{pmatrix}, K_D = 1, \quad (3)$$

где движения ( $B_{z1(z)}$ ) =  $C_1$  — скольжение, при вращениях вокруг оси  $Z_1(Z)$ ;  $k = 1$  — одноконтактная КП.

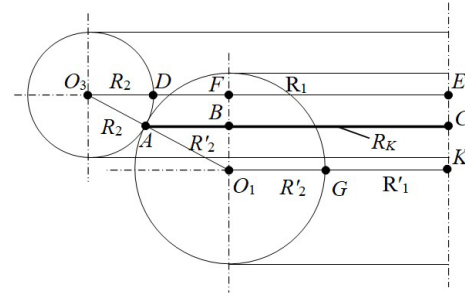
Радиус окружности контакта, величина которого находится из рис. 2:

$$R_K = \frac{R_2(R'_1 + R'_2) + R'_2(R_1 + R_2)}{(R_2 + R'_2)}. \quad (4)$$

По формуле (1):  $W = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1$ .



a)



б)

Рис. 2. Определение радиуса контакта в КП ( $T_1-T_2$ )<sup>пар</sup>. а)  $(R_1 + R_2) \leq (R'_1 + R'_2)$ ; б)  $(R_1 + R_2) \geq (R'_1 + R'_2)$

Обозначения на рис. 2а:  $O_1G = O_1K = R'_2$ ;  $GK = R'_1$ ;  $O_3D = R_2$ ;  $DE = R_1$ .

Искомой величиной является радиус  $R_K$  — радиус окружности контакта:  $R_K = AC = AB + BC = AB + (R_1 + R_2)$ .

Из подобных треугольников  $\Delta O_1O_3F, \Delta AO_3B$  находим:  $\frac{O_1O_3}{O_1F} = \frac{AO_3}{AB} \Rightarrow \frac{R_2 + R'_2}{(R'_1 + R'_2) - (R_1 + R_2)} = \frac{R_2}{AB}$ ,

откуда  $AB = \frac{R_2[(R'_1 + R'_2) - (R_1 + R_2)]}{(R_2 + R'_2)}$ . Тогда

$$R_K = \frac{R_2[(R'_1 + R'_2) - (R_1 + R_2)]}{(R_2 + R'_2)} + (R_1 + R_2) \text{ или, упрощая,}$$

находим:

$$R_K = \frac{R_2(R'_1 + R'_2) + R'_2(R_1 + R_2)}{(R_2 + R'_2)}. \quad (5)$$

Аналогично из рис. 2б находим:

$$R_K = (R'_1 + R'_2) + \frac{R'_2[(R_1 + R_2) - (R'_1 + R'_2)]}{(R_2 + R'_2)}$$

или

$$R_K = \frac{R_2(R'_1 + R'_2) + R'_2(R_1 + R_2)}{(R_2 + R'_2)}. \quad (6)$$

Видно, что формулы (5) и (6) — идентичны.

Таким образом, рис. 1а, б, в, б', а' (сборкам) соответствует одна КП — **КП ( $T_1-T_2$ )<sup>пар</sup>**.

При описании следующих сборок КП будем учитывать, что верчение и катание рассматриваются в таком диапазоне углов поворота, а скольжение — в таких перемещениях, когда возможны сами эти движения и данная сборка КП не сможет перейти в другую.

**2) КП ( $T_1-T_2$ )<sup>пар</sup>** — рис. 1г, д, г'. Касание торов осуществляется по средней линии в точке,  $R_K = (R_1 + 2R_2) = R'_1$  или  $R_K = (R'_1 + 2R'_2) = R_1$ :

$$D = \begin{pmatrix} K_1 C_1 \\ B_1 \\ C_1, K_1 C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (7)$$

где движения  $(B_x) = K_1 C_1$  — качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = B_1$  — верчение при вращении вокруг оси  $Y$ ;  $(B_z) = C_1, K_1 C_1$  — одно скольжение при вращении вокруг оси  $Z_1$  и скольжение и качение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтатная КП,  $W = 3$ .

3) КП  $(T_1 - T_2)_3^{\text{нар}}$ : см. рис. 1е, ж, е'. Касание торов происходит в точке,  $R'_1 < R_k < (R'_1 + R'_2)$  или  $(R'_1 + R'_2) < R_k < (R'_1 + 2R'_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} K_1 C_1 \\ K_1 \\ C_1, K_1 C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (8)$$

где движения  $(B_x) = K_1 C_1$  — качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = K_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Y$ ;  $(B_z) = C_1, K_1 C_1$  — одно скольжение при вращении вокруг оси  $Z_1$  и скольжение и качение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтатная КП,  $W = 3$ .

4) КП  $(T_1 - T_2)_4^{\text{нар}}$  — см. рис. 1з, и, з'. Касание торов осуществляется в верхней точке окружности, когда её радиус равен:  $r = (R'_1 + R'_2)$  или  $r = (R_1 + R_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} K_1 C_1 \\ K_1 \\ C_1, B_1 C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (9)$$

где движения  $(B_x) = K_1 C_1$  — качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = K_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Y$ ;  $(B_z) = C_1, K_1 C_1$  — одно скольжение при вращении вокруг оси  $Z_1$  и скольжение и качение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтатная КП,  $W = 3$ .

5) КП  $(T_1 - T_2)_5^{\text{нар}}$  — см. рис. 1к. Касание торов происходит в двух точках по поверхности:

$$D = \begin{pmatrix} C_1 \\ K_1 C_1 \\ C_1, C_1 \end{pmatrix}, K_D = 5, \quad (10)$$

где движения  $(\Pi_x) = C_1$  — скольжение при перемещении вдоль оси  $X$ ;  $(B_y, \Pi_y) = K_1 C_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Y$  и перемещение вдоль оси  $Y$ ;  $(B_z) = C_1$  — одно скольжение при вращении вокруг оси  $Z_1$  и одно скольжение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 2$  — двухконтатная КП,  $W = 4$ .

Итого получилось 5 КП из 15 сборок (табл. 1).

**II. Оси торов  $T_1$  и  $T_2$  перпендикулярны (перекрещиваются или пересекаются под углом  $90^\circ$ ).** Далее, по аналогии, делаем их анализ, где индекс «пер» обозначает — перпендикулярность осей вращений (перекрещиваются под углом  $90^\circ$ )  $T_1$  и  $T_2$ .

1) КП  $(T_1 - T_2)_1^{\text{нар}}$  — см. рис. 3а, а'. Торы касаются по окружности,  $R_1 = \frac{R'_2}{2}$  или  $R'_1 = \frac{R_2}{2}$ :

$$D = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_1 \end{pmatrix}, K_D = 2, \quad (11)$$

Таблица 1

| Вид сборки в КП, $n_k$  | Подвижность КП, $W$ |   |   | $\Sigma n_k$ |
|-------------------------|---------------------|---|---|--------------|
|                         | 1                   | 3 | 4 |              |
| Одноконтатные КП, $n_1$ | 5                   | 9 |   | 14           |
| Двухконтатные КП, $n_2$ |                     |   | 1 | 1            |
| Итого                   | 5                   | 9 | 1 | 15           |

где движения  $(B_{x1}) = C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $X_1(X)$ ;  $(B_z) = C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтатная КП,  $W = 2$ .

2) КП  $(T_1 - T_2)_2^{\text{нар}}$  — см. рис. 3б, б'. Контакт торов осуществляется в двух точках,  $R'_1 = (R_1 + 2R_2)$  или  $R_1 = (R'_1 + 2R'_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} C_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, K_D = 3, \quad (12)$$

где движения  $(B_{x1(x)}) = C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $X_1(X)$ ;  $(B_{y1(y)}) = B_1$  — верчение при вращении вокруг оси  $Y_1(Y)$ ;  $(B_{z1(z)}) = C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $Z_1(Z)$ ;  $k = 2$  — двухконтатная КП,  $W = 3$ .

3) КП  $(T_1 - T_2)_3^{\text{нар}}$  — см. рис. 3г, г, е. Торы касаются в двух точках, где «радиус окружности» контакта равен  $R_k = \frac{(R_1 + 2R_2)(R'_1 + R'_2)}{R_1 + 2R_2 + R'_2}$ :

$$D = \begin{pmatrix} C_1 \\ K_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, K_D = 3, \quad (13)$$

где движения  $(B_{x1(x)}) = C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $X_1(X)$ ;  $(B_{y1(y)}) = K_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Y_1(Y)$ ;  $(B_{z1(z)}) = C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $Z_1(Z)$ ;  $k = 2$  — двухконтатная КП,  $W = 3$ .

4) КП  $(T_1 - T_2)_4^{\text{нар}}$  — рис. 3ж и рис. 4з, и, к, ж', л. Касание происходит по средней их линии в одной точке:

$$D = \begin{pmatrix} C_1, K_1 C_1 \\ B_1 \\ K_1 C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (14)$$

где движения  $(B_{x1}; B_x; B_x) = C_1, K_1 C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $X_1$  и качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = B_1$  — верчение при вращении вокруг оси  $Y_1(Y)$ ;  $(B_z) = K_1 C_1$  — качение и скольжение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтатная КП,  $W = 3$ .

5) КП  $(T_1 - T_2)_5^{\text{нар}}$  — см. рис. 4м, н, о, п, р. Касание торов осуществляется в одной точке дуги тора  $T_1$  от  $R'$  до  $(R'_1 + R'_2)$  или от  $(R'_1 + R'_2)$  до  $(R'_1 + 2R'_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} C_1, K_1 C_1 \\ K_1 \\ K_1 C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (15)$$



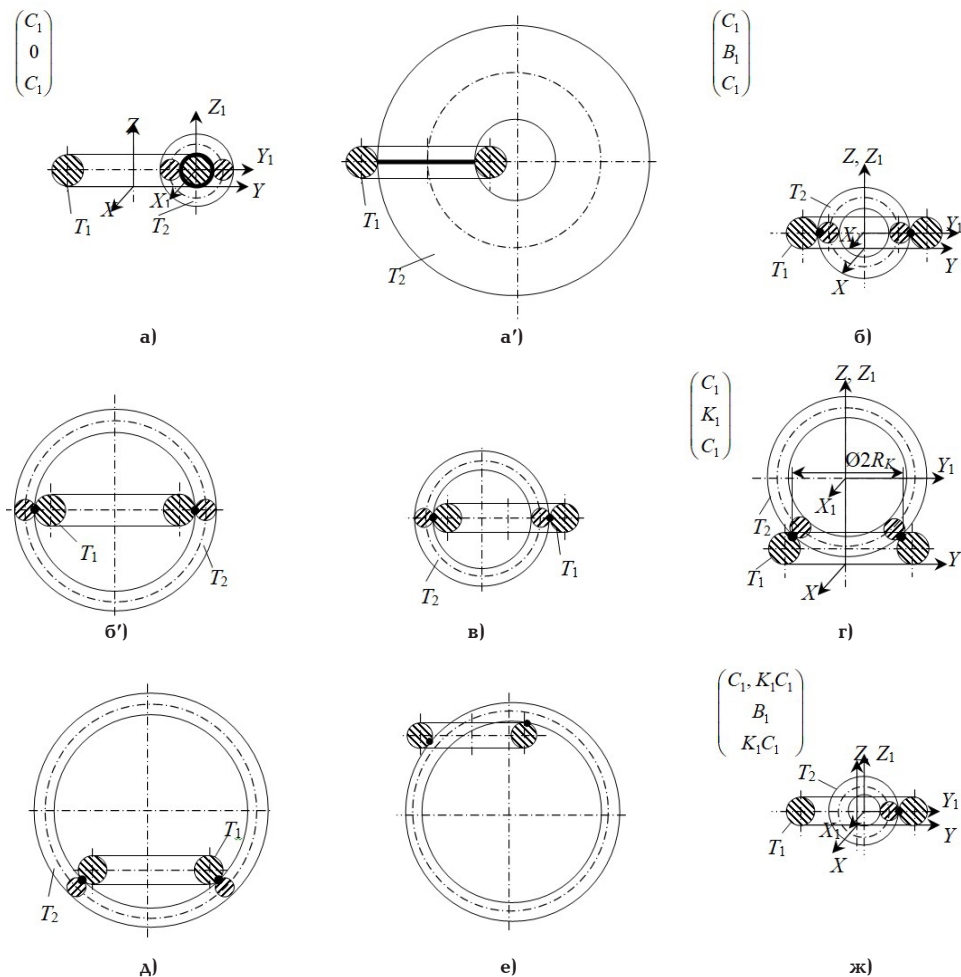


Рис. 3. Оси торов перпендикулярны: а, а' — КП  $(T_1-T_2)_{1\text{пер}}$ ; б, б', в — КП  $(T_1-T_2)_{2\text{пер}}$ ; г, д, е — КП  $(T_1-T_2)_{3\text{пер}}$ ; ж — КП  $(T_1-T_2)_{4\text{пер}}$

где движения  $(B_{x1}; B_x; B_y) = C_1, K_1C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $X_1$  и качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = K_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Y_1(Y)$ ;  $(B_z) = K_1C_1$  — качение и скольжение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтактная КП,  $W = 3$ .

**6) КП  $(T_1-T_2)_{6\text{пер}}$**  — см. рис. 4с, т. Торы касаются в верхней её точке окружности тора  $T_1$ , когда её радиус равен:  $r = (R'_1 + R'_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} C_1, K_1 C_1 \\ K_1 \\ B_1 C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (16)$$

где движения  $(B_{x1}; B_x; B_y) = C_1, K_1C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $X_1$  и качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = K_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Y_1(Y)$ ;  $(B_z) = B_1C_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Z_1$  и скольжение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтактная КП,  $W = 3$ .

**7) КП  $(T_1-T_2)_{7\text{пер}}$**  — см. рис. 4у, ф. Касание торов осуществляется в одной точке дуги тора  $T_1$  от  $R'_1$  до  $(R'_1 + R'_2)$  или от  $(R'_1 + R'_2)$  до  $(R'_1 + 2R'_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} K_1 C_1 \\ C_1, K_1 \\ K_1, C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (17)$$

где движения  $(B_x) = K_1C_1$  — качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = C_1, K_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $Y_1$  и качение при вращении вокруг оси  $Y$ ;  $(B_z) = K_1, C_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Z_1$  и скольжение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтактная КП,  $W = 3$ .

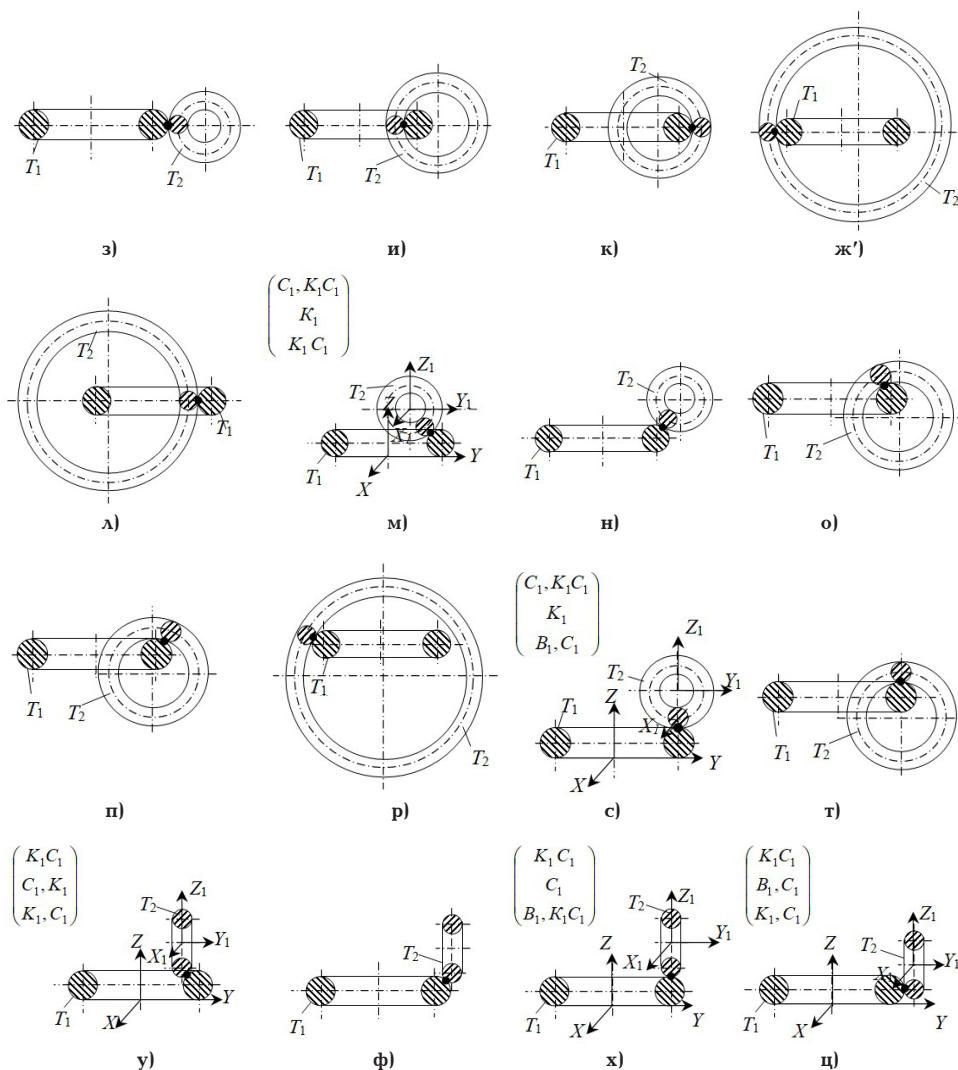
**8) КП  $(T_1-T_2)_{8\text{пер}}$**  — см. рис. 4х. Касание торов происходит в верхней точке окружности тора  $T_1$ , когда её радиус равен  $r = (R'_1 + R'_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} K_1 C_1 \\ C_1 \\ B_1, K_1 C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (18)$$

где движения  $(B_x) = K_1C_1$  — качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = C_1$  — скольжение при вращении вокруг оси  $Y_1$ ;  $(B_z) = B_1, K_1C_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Z_1$  и качение и скольжение при вращении вокруг оси  $Z$ ;  $k = 1$  — одноконтактная КП,  $W = 3$ .

**9) КП  $(T_1-T_2)_{9\text{пер}}$**  — см. рис. 4ц. Касание торов осуществляется в крайней правой точке окружности тора  $T_1$ , когда её радиус равен  $r = (R'_1 + 2R'_2)$ :

$$D = \begin{pmatrix} K_1 C_1 \\ B_1, C_1 \\ K_1, C_1 \end{pmatrix}, K_D = 6, \quad (19)$$



**Рис. 4. Оси торов перпендикулярны:**  
 з, и, к, ж', л — КП  $(T_1-T_2)_4^{пер}$ ; м, н, о, п, р — КП  $(T_1-T_2)_5^{пер}$ ; с, т — КП  $(T_1-T_2)_6^{пер}$ ;  
 у, ф — КП  $(T_1-T_2)_7^{пер}$ ; х — КП  $(T_1-T_2)_8^{пер}$ ; ц — КП  $(T_1-T_2)_9^{пер}$

где движения  $(B_x) = K_1C_1$  — качение и скольжение при вращении вокруг оси  $X$ ;  $(B_y) = B_1, C_1$  — верчение при вращении вокруг оси  $Y_1$  и скольжение при вращении вокруг оси  $Y$ ;  $(B_z) = K_1, C_1$  — качение при вращении вокруг оси  $Z_1$  и скольжение при вращении вокруг оси  $Z$ ,  $k = 1$  — одноконтактная КП,  $W = 3$ .

Итого получилось 9 КП из 25 сборок и сведём их в табл. 2.

Таким образом, получилось 14 КП и 40 сборок типа «тор с тором»: объединяя табл. 1 и табл. 2, получаем табл. 3, в которой объединены все  $k$ -контактные пары вида  $T_1-T_2$ .

**Результаты исследования.**

1. Выделено 14 КП типа  $T_1-T_2$ , которые представлены совокупностью двух видов их кинематического соединения, а именно 15 сборок при параллельном расположении осей торов и 25 сборок при их перпендикулярном положении, что даёт полную классификацию данных КП  $T_1-T_2$ : составлены классификационные таблицы этих КП, которые связывают их подвижности в зависимости от геометрического контакта, от вида, числа движений, а также от количества  $k$ -контактных связей (табл. 1—табл. 3), на основании которых, как базисных КП, можно синтезировать большое разнообразие сборок КП, обладающих своими кинематическими

Таблица 2

| Вид сборки в КП, $n_k$ | Подвижность КП, $W$ |    | $\Sigma n_k$ |
|------------------------|---------------------|----|--------------|
|                        | 2                   | 3  |              |
| Одноконтактные, $n_1$  | 2                   | 17 | 19           |
| Двухконтактные, $n_2$  |                     | 6  | 6            |
| Итого                  | 2                   | 23 | 25           |

Таблица 3

| Вид сборки в КП, $n_k$ | Подвижность КП, $W$ |   |    |   | $\Sigma n_k$ |
|------------------------|---------------------|---|----|---|--------------|
|                        | 1                   | 2 | 3  | 4 |              |
| Одноконтактные, $n_1$  | 5                   | 2 | 26 |   | 33           |
| Двухконтактные, $n_2$  |                     |   | 6  | 1 | 7            |
| Итого                  | 5                   | 2 | 32 | 1 | 40           |

и динамическими свойствами и определяющих назначение механизма.

2. Выявлены новые представления движений в кинематической паре «тор с тором», основан-

ные на кинематической сути таких движений, как скольжение, катание и верчение. С помощью матрицы движений  $D$  были количественно описаны кинематические особенности каждой сборки КП.

**Заключение.** В результате проведенного исследования КП катания типа «тор с тором», были описаны: новые представления движений в кинематической паре «тор с тором», основанные на кинематической сути таких движений, как скольжение, катание и верчение. С помощью матрицы движений  $D$  были количественно описаны кинематические особенности каждой сборки КП; определены новые виды (сборки) КП «тор с тором», которые могут быть использованы в механизмах многих отраслей промышленности: транспортном, дорожном и сельскохозяйственном машиностроении (КП типа  $T_1 - T_2$  в роботостроении, металлорежущих станках — устройствах крепления с кольцами, сопряжения стопорных колец и др.), самолетостроение (КП типа  $T_1 - T_2$  в механизмах шасси — поддерживающие колёса), производство вооружения и военной техники. Именно в этих механизмах наблюдается необходимость изменения подвижности КП типа  $T_1 - T_2$  за счет сочетания движений, таких как качение, скольжение и верчение.

#### Библиографический список

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд. Москва: Наука, 1986. 544 с.
2. Шамутдинов А. Х., Лесняк И. Ю. Анализ кинематических пар катания типа «цилиндр в цилиндре» // Омский научный вестник. 2023. № 3 (187). С. 52–59. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-52-59. EDN: EPSLHO.
3. Zhou Y. B., Buchal R. O., Fenton F. G., Tan F. R. Kinematic analysis of certain spatial mechanisms containing higher pairs // Mechanism and Machine Theory. 1995. Vol. 30, № 5. P. 705–720. DOI: 10.1016/0094-114X(94)00067-U.
4. Bil T. Optymalna synteza mechanizmu z wyzsza para kinematyczna typu torus – torus // Pomiar, Automatyka, Kontrola. 2007. No. 8. P. 7–9. URL: <https://yadda.icm.edu.pl/baztech/element/bwmeta1.element.baztech-article-BSW4-0040-0002> (дата обращения: 12.06.2024).
5. Bil T. Kinematic analysis of a universal spatial mechanism containing a higher pair based on tori // Mechanism and Machine Theory. 2011. Vol. 46, № 4. P. 412–424. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2010.12.002.
6. Meijaard J. P. Modelling of kinematic higher pairs by lower pairs // Mechanism and Machine Theory. 2024. Vol. 191. 105515. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2023.105515.
7. Верховский А. В. Теория пространственных и плоских кинематических пар // Известия Сибирского механико-машиностроительного института. 1933. № 1 (52). С. 15–32.
8. Дворников Л. Т., Живаго Э. Я. Основы теории кинематических пар: моногр. Новокузнецк: Издат. центр СибГИУ, 1999. 102 с.
9. Живаго Э. Я. Теория и систематизация кинематических пар механических систем: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Новосибирск, 2000. 34 с.
10. Дворников Л. Т. Принципиальные уточнения теории кинематических пар // Машиностроение. 2014. № 23. С. 45–73. EDN: TAFWML.
11. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. В 2-х ч. Ч. 1. Статика. Кинематика. Москва: Высшая школа, 1966. 432 с.
12. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука, 1988. 640 с.

**ШАМУТДИНОВ Айдар Харисович**, кандидат технических наук, профессор Российской академии естественных наук, доцент кафедры «Техническая механика» Омского автобронетанкового инженерного института, г. Омск.  
SPIN-код: 4939-6254  
AuthorID (РИНЦ): 688427  
ORCID: 0000-0001-5896-7247  
ResearcherID: HLN-7822-2023  
Адрес для переписки: 1972id@list.ru  
**ЛЕСНЯК Иван Юрьевич**, кандидат технических наук, заведующий, доцент кафедры «Машиноведение» Омского государственного технического университета, г. Омск.  
SPIN-код: 6114-0646  
ORCID: 0000-0002-9481-5985  
ResearcherID: E-6397-2014  
Адрес для переписки: lesnyak.ivan@gmail.com

#### Для цитирования

Шамутдинов А. Х., Лесняк И. Ю. Теоретическое исследование кинематических пар «тор с тором» на основе геометрической кинематики // Омский научный вестник. 2024. № 4 (192). С. 35–43. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-192-35-43.

Статья поступила в редакцию 26.04.2024 г.

© А. Х. Шамутдинов, И. Ю. Лесняк

<sup>1</sup>Omsk Tank-Automotive  
Engineering Institute,  
Omsk, Russia

<sup>2</sup>Omsk State Technical University,  
Omsk, Russia

## THEORETICAL STUDY OF KINEMATIC PAIRS «TORUS WITH TORUS» BASED ON GEOMETRIC KINEMATICS

The article presents a theoretical study of kinematic pairs known as «rolling pairs» used in many areas of mechanical engineering, in particular, mechanisms. The research concerns such bodies (links) as geometric tori, which are well-known bodies of rotation. From the geometric kinematics, new representations of the mechanical motions of a torus in a «torus-torus» connection are described without the reasons that cause this motion. Two options for connecting two tori are analyzed: the axes of the tori are parallel and perpendicular. By analogy, the analysis of kinematic pairs of this type expands the elements of kinematic pairs theory and allows developing their new variants in many mechanisms used in various fields of mechanical engineering.

**Keywords:** kinematic pair, rolling pair, torus, mobility, mobility matrix, sliding, rolling, spinning.

### References

1. Bronshteyn I. N., Semendiyayev K. A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov [Handbook of mathematics for engineers and college students]. 13th. Moscow, 1986. 544 p. (In Russ.).

2. Shamutdinov A. Kh., Lesnyak I. Yu. Analiz kinematicallykh par kataniya, tipa «tsilindr v tsilindre» [The analysis of kinematic rolling pairs such as «cylinder in cylinder»] // Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 3 (187). P. 52–59. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-52-59. EDN: EPSLHO. (In Russ.).

3. Zhou Y. B., Buchal R. O., Fenton F. G., Tan F. R. Kinematic analysis of certain spatial mechanisms containing higher pairs // *Mechanism and Machine Theory*. 1995. Vol. 30, no. 5. P. 705–720. DOI: 10.1016/0094-114X(94)00067-U. (In Engl.).

4. Bil T. Optymalna synteza mechanizmu z wyzsza para kinematyczna typu torus–torus [Optimal synthesis of a mechanism with a higher torus-torus kinematic pair] // *Pomiary, Automatyka, Kontrola. Measurement, Automatics, Control*. 2007. No. 8. P. 7–9. URL: <https://yadda.icm.edu.pl/baztech/element/bwmeta1.element.baztech-article-BSW4-0040-0002> (accessed: 12.06.2024). (In Polish).

5. Bil T. Kinematic analysis of a universal spatial mechanism containing a higher pair based on tori // *Mechanism and Machine Theory*. 2011. Vol. 46, no. 4. P. 412–424. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2010.12.002. (In Engl.).

6. Meijaard J. P. Modelling of kinematic higher pairs by lower pairs // *Mechanism and Machine Theory*. 2024. Vol. 191. 105515. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2023.105515. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X23002860> (In Engl.).

7. Verkhovskiy A. V. Teoriya prostranstvennykh i ploskikh kinematicallykh par [Theory of spatial and plane kinematic pairs] // *Izvestiya Sibirskogo mekhaniko-mashinostroitel'nogo*

instituta. *Proceedings of the Siberian Mechanical Engineering Institute*. 1933. No. 1 (52). P. 15–32. (In Russ.).

8. Dvornikov L. T., Zhivago E. Ya. Osnovy teorii kinematicallykh par [Fundamentals of the theory of kinematic pairs]. Novokuznetsk, 1999. 102 p. (In Russ.).

9. Zhivago E. Ya. Teoriya i sistematizatsiya kinematicallykh par mekhanicheskikh sistem [Theory and systematization of kinematic pairs of mechanical systems]. Novosibirsk, 2000. 34 p. (In Russ.).

10. Dvornikov L. T. Printsipial'nyye utochneniya teorii kinematicallykh par [Principal summation theory of kinematic pairs] // *Mashinostroyeniye. Mechanical Engineering*. 2014. No. 23. P. 45–73. EDN: TAFWML. (In Russ.).

11. Yablonskiy A. A., Nikiforova V. M. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. V 2-kh ch. Ch. 1. Statika. Kinematika [Course of the theoretical mechanics. In 2 parts. Part 1. Statics. Kinematics]. Moscow, 1966. 432 p. (In Russ.).

12. Artobolevskiy I. I. Teoriya mekhanizmov i mashin [The theory of mechanisms and machines]. 4th ed., revised and supplemented. Moscow, 1988. 640 p. (In Russ.).

**SHAMUTDINOV Aydar Kharisovich**, Candidate of Technical Sciences, Professor of RAE (Russian Academy of Natural Sciences), Associate Professor of Technical Mechanics Department, Omsk Tank-Automotive Engineering Institute, Omsk.  
SPIN-code: 4939-6254  
AuthorID (RSCI): 688427  
ORCID: 0000-0001-5896-7247  
ResearcherID: HLH-7822-2023

Correspondence address: 1972id@list.ru  
**LESNYAK Ivan Yuryevich**, Candidate of Technical Sciences, Head, Associate Professor of Machine Engineering Technology Department, Omsk State Technical University, Omsk.  
SPIN-code: 6114-0646  
ResearcherID: E-6397-2014  
ORCID: 0000-0002-9481-5985  
Correspondence address: lesnyak.ivan@gmail.com

**For citations**

Shamutdinov A. Kh., Lesnyak I. Yu. Theoretical study of kinematic pairs «torus with torus» based on geometric kinematics // Omsk Scientific Bulletin. 2024. No. 4 (192). P. 35–43. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-192-35-43.

**Received April 26, 2024.**

© **A. Kh. Shamutdinov, I. Yu. Lesnyak**