

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-117-126

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Численный анализ напряженно-деформированного состояния тонких оболочек на основе совместного конечного элемента треугольной формы

Ю.В. Клочков, А.П. Николаев, О.В. Вахнина*

Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, Волгоград, Университетский пр., 26
*klotchkov@bk.ru

Поступила в редакцию: 05 февраля 2019 г.

Доработана: 13 марта 2019 г.

Принята к публикации: 18 марта 2019 г.

Ключевые слова:

оболочечная конструкция;
узловые неизвестные;
треугольный конечный элемент;
множители Лагранжа

Аннотация

Актуальность. Использование метода конечных элементов для определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов инженерных конструкций предопределяет их дискретизацию на отдельные конечные элементы. Разбиение нерегулярных частей конструкции невозможно без использования треугольных областей. Треугольные элементы оболочечных конструкций являются совместными по перемещениям и по их производным только в узловых точках. Поэтому способы улучшения условий совместности на границах треугольных элементов являются актуальными.

Цели. Целью работы является улучшение условий совместности на границах смежных треугольных элементов на основе приравнивания производных нормальных перемещений в серединах граничных сторон.

Методы. Для улучшения условий совместности на границах треугольных элементов в настоящей работе используется функционал Лагранжа с условием обеспечения равенства в серединах сторон смежных элементов производных от нормальных перемещений в направлениях перпендикуляров, касательных к срединной поверхности оболочки.

Результаты. На примере расчета эллиптической оболочки показана эффективность использования совместного треугольного конечного элемента, матрица жесткости которого формируется в соответствии с алгоритмом, изложенным в статье.

Введение

Конструкции из тонких оболочек находят самое широкое применение в строительстве и архитектуре [1; 2], машиностроении, авиастроении, химической, нефтяной и газовой промышленности и т.д.

При проектировании и реконструкции такого рода объектов в настоящее время используют чис-

ленные методы анализа их напряженно-деформированного состояния (НДС) с применением высокопроизводительной вычислительной техники [3–7]. Одним из наиболее распространенных численных методов анализа НДС тонкостенных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ) в различных формулировках [8–18]. Несмотря на значительное количество публикаций, посвященных данной проблематике, по-прежнему актуальной является задача совершенствования конечно-элементных алгоритмов в плане решения проблем совместности используемых конечных элементов, повышения точности численных решений и других важных аспектов по данному направлению.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 18-41-340007 p_a.

© Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В., 2019



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

1. Геометрические соотношения

Срединная поверхность может быть задана радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x(\theta^1, \theta^2) \vec{i} + y(\theta^1, \theta^2) \vec{j} + z(\theta^1, \theta^2) \vec{k}, \quad (1)$$

где (θ^1, θ^2) – криволинейные координаты поверхности оболочки.

Выражение (1) может быть конкретизировано для оболочек различного типа. Например, для трехосного эллипсоида оно выглядит следующим образом

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x, \theta) \sin\theta \vec{j} + r(x, \theta) \cos\theta \vec{k}, \quad (2)$$

где θ – угловая координата, отсчитываемая против хода часовой стрелки от вертикальной оси в поперечном сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox .

Входящая в (2) функция $r(x, \theta)$ имеет вид

$$r(x, \theta) = \sqrt{(1 - (x/a)^2)bc} / \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}, \quad (3)$$

где a, b и c – параметры трехосного эллипсоида при записи его уравнения в каноническом виде $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1)$.

Если в формуле (3) первый множитель числителя принять равным единице, то можно получить следующее выражение

$$r(\theta) = bc / \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}. \quad (4)$$

Заменяя в (2) функцию $r(x, \theta)$ формулой (4), можно получить выражение для радиус-вектора эллиптического цилиндра:

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(\theta) \sin\theta \vec{j} + r(\theta) \cos\theta \vec{k}. \quad (5)$$

Дифференцированием (2) или (5) по x и θ можно получить касательные векторы локального базиса в произвольной точке M^0 поверхности оболочки:

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0; \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0. \quad (6)$$

Орт нормали в точке M^0 определяется выражением

$$\vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / \sqrt{a^0}, \quad (7)$$

где $a^0 = a_{11}^0 a_{22}^0 - (a_{12}^0)^2$ – детерминант метрического тензора, компоненты которого определяются скалярными произведениями

$$a_{11}^0 = \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0 = 1 + (r_{,x})^2;$$

$$a_{12}^0 = \vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0 = r_{,x} \cdot r_{,\theta};$$

$$a_{22}^0 = \vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0 = (r_{,\theta})^2 + r^2. \quad (8)$$

Здесь под r понимается функция $r(x, \theta)$ или $r(\theta)$, определяемая по (3) или (4).

Производные локального базиса точки M^0 могут быть получены по деривационным формулам [19]

$$\vec{a}_{\alpha,\beta}^0 = \Gamma_{\alpha\beta}^{0\rho} \vec{a}_\rho^0 + b_{\alpha\beta}^0 \vec{a}^0; \quad \vec{a}_{,\alpha}^0 = -b_{\alpha}^{0\rho} \vec{a}_\rho^0, \quad (9)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^{0\rho}$ – символы Кристоффеля второго рода; $b_{\alpha\beta}^0$ и $b_{\alpha}^{0\rho}$ – ковариантные и смешанные компоненты тензора кривизны. Здесь и ниже греческие индексы последовательно принимают значения 1, 2.

В процессе деформирования оболочечной конструкции точка M^0 и отстоящая от нее на расстоянии ζ точка $M^{0\zeta}$ займут новые положения M и M^ζ , определяемые радиус-векторами

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \vec{v}; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R} + \zeta \vec{a}, \quad (10)$$

где $\vec{v} = v^p \vec{a}_p^0 + v \vec{a}^0$ – вектор перемещения точки M^0 .

Входящий во вторую формулу (10) орт нормали \vec{a} точки M определяется векторным произведением

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / \sqrt{a}, \quad (11)$$

где $\vec{a}_\alpha = \vec{R}_{,\alpha}$; $a = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2$ – детерминант метрического тензора деформированного состояния, который может быть представлен в виде

$$a = a^0 (1 + 2\varepsilon_p^p), \quad (12)$$

где ε_p^p – смешанные компоненты тензора деформаций оболочки в точке срединной поверхности.

Дифференцированием (11) можно получить производные орта нормали к деформированной поверхности оболочки

$$\bar{a}_{,\alpha} = (\bar{a}_{1,\alpha} \times \bar{a}_2 + \bar{a}_1 \times \bar{a}_{2,\alpha}) / \sqrt{a} + (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) (1/\sqrt{a})_{,\alpha}, \quad (13)$$

где $1/\sqrt{a} \approx (1 - \varepsilon_p^0) / \sqrt{a^0}$.

Деформации в точке M^ζ определяются известным соотношением механики сплошной среды [20]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta}^\zeta - g_{\alpha\beta}^0) / 2, \quad (14)$$

где

$$g_{\alpha\beta}^\zeta = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_\beta = \bar{R}_{,\alpha}^\zeta \cdot \bar{R}_{,\beta}^\zeta;$$

$$g_{\alpha\beta}^0 = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_\beta^0 = (\bar{R}^0 + \zeta \bar{a}^0)_{,\alpha} \cdot (\bar{R}^0 + \zeta \bar{a}^0)_{,\beta}.$$

Соотношения (14) могут быть представлены суммой

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \mathcal{N}_{\alpha\beta}, \quad (15)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta} = (\bar{a}_\alpha^0 \cdot \bar{v}_{,\beta} + \bar{v}_{,\alpha} \cdot \bar{a}_\beta^0) / 2$;

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = (\bar{a}_\alpha^0 \cdot \bar{a}_{,\beta} + \bar{v}_{,\alpha} \cdot \bar{a}_\beta^0 + \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_{,\beta}^0 + \bar{a}_{,\alpha} \cdot \bar{v}_{,\beta} + \bar{a}_\alpha^0 \cdot b_\beta^{0p} \cdot \bar{a}_p^0 + b_\alpha^{0p} \cdot \bar{a}_p^0 \cdot \bar{a}_\beta^0) / 2.$$

2. Треугольный конечный элемент

В качестве конечного элемента был выбран фрагмент срединной поверхности тонкой оболочки треугольной формы с узлами i, j, k , расположенными в его вершинах. Для реализации процедуры численного интегрирования по площади конечного элемента треугольный фрагмент срединной поверхности отображается на прямоугольный треугольник с локальной системой координат $0 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Глобальные координаты x и θ точки внутренней области конечного элемента выражаются через глобальные координаты узлов зависимостями

$$x = (1 - \xi - \eta)x^i + \xi x^j + \eta x^k;$$

$$\theta = (1 - \xi - \eta)\theta^i + \xi \theta^j + \eta \theta^k. \quad (16)$$

Столбец узловых варьируемых параметров конечного элемента в локальной ξ, η и глобальной x, θ системах координат был выбран в следующем виде:

$$\left\{ U_y^L \right\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1L} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^{2L} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^L \right\}_{1 \times 9}^T \right\}; \quad (17)$$

$$\left\{ U_y^G \right\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1G} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^{2G} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^G \right\}_{1 \times 9}^T \right\}, \quad (18)$$

где $\left\{ q_y^L \right\}^T = \left\{ q^i q^j q^k q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k \right\}$;

$\left\{ q_y^G \right\}^T = \left\{ q^i q^j q^k q_{,x}^i q_{,x}^j q_{,x}^k q_{,\theta}^i q_{,\theta}^j q_{,\theta}^k \right\}$.

Здесь под q понимается компонента вектора перемещения v^1, v^2 или v .

Компоненты вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента выражаются через их узловые значения с помощью интерполяционных зависимостей вида [7–18]

$$q = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ q_y^L \right\}_{9 \times 1}^T, \quad (19)$$

где $\left\{ \varphi \right\}^T$ – матрица-строка функций формы, содержащая двумерные полиномы третьей степени.

Рассматриваемый треугольный конечный элемент является совместным по компонентам вектора перемещения, но несовместным по их производным. Если вычислить производные нормальной компоненты вектора перемещения вдоль нормалей к сторонам конечного элемента в точках 1, 2, 3, соответствующих серединам сторон, то в значениях этих производных в смежных элементах I и II будет наблюдаться различие (рис. 1).

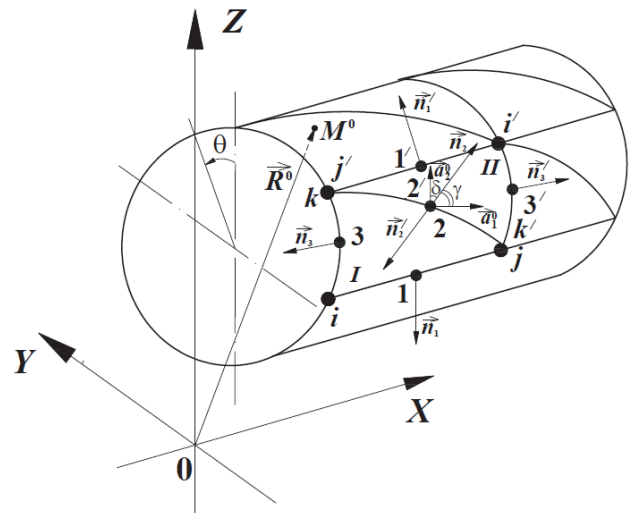


Рис. 1. Векторы нормалей в смежных элементах [Figure 1. Vectors of normals in adjacent elements]

$$\frac{\partial v_m}{\partial \bar{n}_m} \neq \frac{\partial v_{m'}}{\partial \bar{n}'_m}, \quad (20)$$

где индексы m и m' принимают значения дополнительных узлов 1, 2, 3, и 1', 2', 3' (рис. 1) соответственно.

Отмеченное различие обусловлено тем, что при вычислении, например, производных $\partial v_2 / \partial \bar{n}_2$ и $\partial v_2' / \partial \bar{n}_2'$ в точках 2 и 2' смежных элементов I и II используются значения нормальной компоненты вектора перемещения в узлах i и i' , находящихся за пределами общей границы $j-k$ смежных элементов I и II.

Решение отмеченной проблемы совместности треугольных конечных элементов предлагается осуществить за счет использования множителей Лагранжа. Тогда выражение (20) может быть записано в следующем виде:

$$\lambda_m \left(\frac{\partial v_m}{\partial \bar{n}_m} - \frac{\partial v_{m'}}{\partial \bar{n}_{m'}} \right) = 0, \quad (21)$$

где λ_m – множитель Лагранжа в дополнительном узле m .

Входящие в (21) производные нормальной компоненты вектора перемещения вдоль нормалей к серединам сторон \bar{n}_m могут быть выражены через столбцы (17) и (18) узловых неизвестных треугольного конечного элемента:

$$\frac{\partial v_m}{\partial \bar{n}_m} = \{d_m\}^T \{U_y^L\} = \{d_m\}^T [P_R] \{U_y^G\}, \quad (22)$$

где $[P_R]$ – матрица перехода от столбца $\{U_y^L\}$ к столбцу $\{U_y^G\}$.

Структура входящих в (22) матриц-строк $\{d_m\}$ зависит от ориентации треугольных конечных элементов на срединной поверхности оболочки. Если сетку дискретизации сориентировать вдоль линий главных кривизн (рис. 1), то для треугольного элемента I будут справедливы зависимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}_1} &= -\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\left(\{ \varphi_{,\xi} \}^T \cdot \xi_{,\theta} + \{ \varphi_{,\eta} \}^T \cdot \eta_{,\theta} \right) \{ v_y^L \}; \\ \frac{\partial v_3}{\partial \bar{n}_3} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\{ \varphi_{,\xi} \}^T \cdot \xi_{,x} + \{ \varphi_{,\eta} \}^T \cdot \eta_{,x} \right) \{ v_y^L \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для узла 2 на стороне $j-k$ треугольного конечного элемента можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}_2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \delta = \\ &= \left[\left(\{ \varphi_{,\xi} \}^T \cdot \xi_{,x} + \{ \varphi_{,\eta} \}^T \cdot \eta_{,x} \right) \cos \gamma + \right. \\ &\left. + \left(\{ \varphi_{,\xi} \}^T \cdot \xi_{,\theta} + \{ \varphi_{,\eta} \}^T \cdot \eta_{,\theta} \right) \cos \delta \right] \{ v_y^L \}, \end{aligned} \quad (24)$$

где γ и δ – углы между нормалью \bar{n}_2 и векторами локального базиса в данной точке (рис. 1).

Для смежного элемента II соотношения (23) и (24) берутся с противоположным знаком.

Если рассматривать треугольный элемент I в отдельности, то для него можно записать равенство

$$\lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}_1} + \lambda_2 \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}_2} + \lambda_3 \frac{\partial v_3}{\partial \bar{n}_3} = 0. \quad (25)$$

С учетом (22)–(24) соотношение (25) можно представить в матричном виде

$$\{ \lambda \}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{n}_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \bar{n}_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial \bar{n}_3} \end{Bmatrix} = \{ \lambda \}^T \begin{Bmatrix} \{d_1\}^T [P_R] \\ \{d_2\}^T [P_R] \\ \{d_3\}^T [P_R] \end{Bmatrix} \{U_y^G\} = \{ \lambda \}^T [D] \{U_y^G\} = 0, \quad (26)$$

где $\{ \lambda \}^T = \{ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \}$.

Функционал Лагранжа для треугольного элемента с учетом дополнительного условия (26) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \int_V \{ \varepsilon_{\alpha\beta}^s \}^T \{ \sigma^{\alpha\beta} \} dV + \{ \lambda \}^T [D] \{U_y^G\} - \\ &- \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^s \}^T = \{ \varepsilon_{11}^s \ \varepsilon_{22}^s \ 2\varepsilon_{12}^s \}$; $\{ \sigma^{\alpha\beta} \}^T = \{ \sigma^{11} \ \sigma^{22} \ \sigma^{12} \}$ – матрицы-строки деформаций и напряжений в точке M^s ; $\{U\}^T = \{ v^1 \ v^2 \ v \}$ – матрица-строка компонент вектора перемещения точки M ; $\{P\}$ – столбец внешней поверхностной нагрузки.

Столбец $\{ \sigma^{\alpha\beta} \}$ на основании закона Гука [20] может быть представлен матричным произведением

$$\{ \sigma^{\alpha\beta} \} = [C] \{ \varepsilon_{\alpha\beta}^s \}, \quad (28)$$

где $[C]$ – матрица упругости.

Деформации в произвольном слое оболочки, отстоящем на расстоянии ζ от срединной поверхности, с учетом (15) и (19) могут быть представлены в виде произведения матриц:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\} &= [\Gamma] \{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = \\ &= [\Gamma][B] \{U_y^L\} = [\Gamma][B][P_R] \{U_y^G\}. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (28) и (29) функционал (27) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \{U_y^G\}^T [P_R]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV [P_R] \{U_y^G\} + \\ &+ \{\lambda\}^T [D] \{U_y^G\} - \{U_y^G\}^T [P_R]^T \int_F [A]^T \{P\} dF, \end{aligned} \quad (30)$$

где $[A] = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}$ – матрица функ-

ций формы.

Выполняя минимизацию (30) по $\{U_y^G\}^T$ и $\{\lambda\}^T$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_L}{\partial \{U_y^G\}^T} = [K] \{U_y^G\} + [D]^T \{\lambda\} - \{F\} = 0; \\ \frac{\partial \Phi_L}{\partial \{\lambda\}^T} = [D] \{U_y^G\} = 0, \end{cases} \quad (31)$$

где $[K] = [P_R]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV$;

$$\{F\} = [P_R]^T \int_F [A]^T \{P\} dF.$$

Систему (31) можно записать в более компактной форме:

$$[K_{\lambda}] \{U_{y\lambda}^G\} = \{F_{\lambda}\}, \quad (32)$$

где $[K_{\lambda}] = \begin{bmatrix} [K] & [D]^T \\ [D] & [0] \end{bmatrix}$;

$$\{U_{y\lambda}^G\}^T = \left\{ \{U_y^G\}^T \{ \lambda \}^T \right\}; \{F_{\lambda}\}^T = \left\{ \{F\} \{000\} \right\}.$$

3. Пример расчета

Была рассчитана эллипсоидальная оболочка, поверхность которой описывается радиус-вектором (5). Эллиптический цилиндр загружен в середине двумя диаметрально противоположными сосредоточенными силами Q (рис. 2). Приняты следующие исходные данные: $Q = 453,6 \text{ Н}$; длина образующей $L = 26 \text{ см}$; модуль упругости $7,38 \times 10^4 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3125$; толщина стенки $t = 0,24 \text{ см}$; параметры эллиптического поперечного сечения $b = 12,58 \text{ см}$, $c = 11,43 \text{ см}$. В силу наличия плоскостей симметрии рассчитана 1/8 часть эллиптического цилиндра.

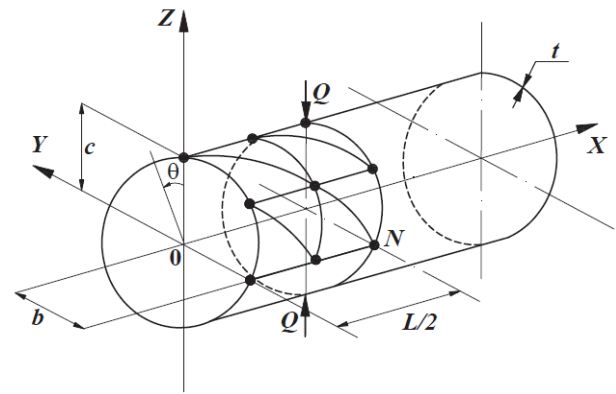


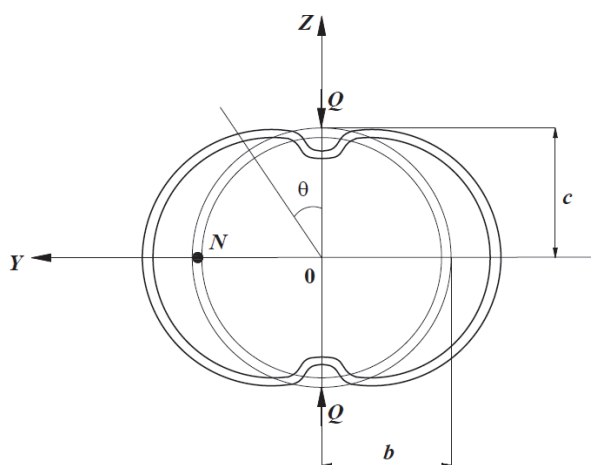
Рис. 2. Расчетная схема эллиптического цилиндра [Figure 2. Elliptical cylinder design]

Расчеты проводились в двух вариантах: в первом варианте использовался треугольный конечный элемент без множителей Лагранжа с матрицей жесткости $[K]$ порядка 27×27 ; во втором варианте применялся совместный элемент с матрицей жесткости $[K_{\lambda}]$ размерностью 30×30 . В качестве контрольного варианта использован четырехугольный конечный элемент также с девятью степенями свободы в узле (17), (18) с порядком матрицы жесткости 36×36 [21]. Результаты повариантных расчетов представлены в таблице, в которой приведены численные значения нормальных напряжений σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$ на внутренней σ^{in} и наружной σ^{out} поверхностях оболочки в точке N с координатами $x = L/2$; $\theta = \pi/2$, а также величины прогиба v под сосредоточенной силой Q в зависимости от густоты сетки дискретизации.

Значения напряжений и прогиба
[Table. Stress and deflection values]

Напряжения (МПа) в точке N с координатами $x = L/2, \theta = \pi/2$ [Stress (MPa) in N point with coordinates $x = L/2, \theta = \pi/2$]	Вариант расчета [Variant of calculation]						Четырех- угольный КЭ [Quadrilateral CE] [21]
	I			II			
	Сетка дискретизации [Sampling grid]						
	6×6	7×7	8×8	6×6	7×7	8×8	7×7
σ_{xx}^{in}	8,67	12,12	14,04	-11,59	-10,87	-10,36	-15,22
σ_{xx}^{out}	-13,23	-15,67	-17,06	10,47	10,56	10,45	12,02
$\sigma_{\theta\theta}^{in}$	-21,15	-17,07	-14,55	-47,01	-46,18	-45,52	-46,95
$\sigma_{\theta\theta}^{out}$	17,31	15,02	13,40	37,05	38,16	38,47	40,68
Прогиб под силой Q [Deflection under force Q] $\nu \cdot 10^{-2}$ м	-0,2997	-0,2985	-0,2968	-0,2651	-0,2662	-0,2666	-0,2771

Как видно из таблицы, численные значения нормальных напряжений кардинально различаются между собой в зависимости от варианта расчета. Так, в первом варианте расчета σ_{xx}^{in} на внутренней поверхности оказались растягивающими, а на наружной – сжатыми. В действительности же, если проанализировать деформированное состояние оболочки в сечении, перпендикулярном оси Ox , проходящем через точки приложения сил Q (рис. 3), можно отметить, что внутренняя поверхность эллиптического цилиндра в точке N сжата, а наружная – растянута, что и наблюдается во втором варианте расчета.

Рис. 3. Деформация цилиндра
[Figure 3. Cylinder deformation]

Значения прогиба под сосредоточенными силами в первом варианте расчета оказались завышенными примерно на 12 % по сравнению со вторым вариантом расчета.

В крайней правой колонке таблицы представлены численные значения нормальных напряжений и прогиба, полученные при использовании четырехугольного конечного элемента 36×36 при сетке дискретизации 7×7 . Сопоставляя результаты повариантных расчетов со значениями крайней правой колонки, можно отметить следующее. Напряжения σ_{xx} , полученные при использовании четырехугольного элемента 36×36 , имеют такие же знаки, что и напряжения второго варианта расчета. Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, которые существенно больше, чем σ_{xx} во втором варианте расчета, практически совпали или достаточно близки по своим значениям, полученным при применении четырехугольного элемента. Значения σ_{xx} в первом варианте можно признать неприемлемыми из-за несоответствия картине деформирования оболочки, а значения $\sigma_{\theta\theta}$ оказались в 4 раза заниженными по сравнению со вторым и контрольным вариантами расчета.

Заключение

На основании выполненного анализа НДС тонкой оболочки в виде эллиптического цилиндра, за-

груженного системой двух сосредоточенных сил, можно заключить, что использование несовместных треугольных элементов приводит к существенным погрешностям расчета, вплоть до неприемлемых. Для корректного анализа НДС тонких оболочек необходимо использовать совместный треугольный элемент, матрица жесткости которого формируется в соответствии с алгоритмом, изложенным в настоящей статье.

Список литературы

1. *Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L.* Geometry, static, vibration and buckling analysis and applications to thin elliptic paraboloid shells // *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2016. Vol. 10. Pp. 3–28.

2. *Кривошапко С.Н., Галишиникова В.В.* Архитектурно-строительные конструкции: учебник для академического бакалавриата. М.: Юрайт, 2015. 476 с.

3. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V.* Stress-Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section // *International Applied Mechanics*. 2018. Т. 54. № 5. Pp. 559–567.

4. *Пятикрестовский К.П., Травуш В.И.* О программировании нелинейного метода расчета деревянных конструкций // *Academia. Архитектура и строительство*. 2015. № 2. С. 115–119.

5. *Ким А.Ю., Полников С.В.* Сравнение экспериментального и численного исследования большепролетного пневматического линзообразного сооружения // *Научное обозрение*. 2016. № 15. С. 36–41.

6. *Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М.* Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2016. № 1. С. 36–42.

7. *Каюмов Р.А.* Большие прогибы балок, арок и панелей в упругой среде с учетом деформаций сдвига // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXII Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова / Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*. 2016. С. 111–113.

8. *Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Гамзатова Е.А.* Расчет тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2018. № 3 (711). С. 5–13.

9. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 392 с.

10. *Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В.* Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно подкрепленных эллиптических цилиндрических ком-

позитных оболочек при кручении и внутреннем давлении // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2018. № 2. С. 27–34.

11. *Шеиенин С.В., Бахметьев С.Г.* Модель эффективного слоя для резинокордного материала // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2014. № 5. С. 41–45.

12. *Аганов В.П., Айдемиров К.Р.* Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // *Промышленное и гражданское строительство*. 2016. № 11. С. 4–7.

13. *Nguyen N., Waas A.M.* Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // *Z. Angew. Math. Phys*. 2016. Vol. 67. No. 9. Pp. 35/1-35/24.

14. *Lei Z., Gillot F., Jezeguel L.* Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // *Int. J. Mech*. 2015. Vol. 54. Pp. 105–119.

15. *Hanslo P., Larson M.G., Larson F.* Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // *Comput. Mech*. 2015. Vol. 56. No. 1. Pp. 87–95.

16. *Yamashita H., Valkeapaa A.I., Jayakumar P., Syqiyama H.* Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn*. 2015. Vol. 10 No. 5. Pp. 051012/1-051012/9.

17. *Ren Hui.* Fast and robust full quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations // *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn*. 2015. Vol. 10. No. 5. Pp. 051018/1-051018/13.

18. *Sartorato M., de Medeiros R., Tita V.* A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation // *Compos. Struct*. 2015. 127. Pp. 185–198.

19. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.

20. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. 574 с.

21. *Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A., Marchenko S.S.* Comparative analysis of the results of finite element calculations based on an ellipsoidal shell // *Journal of machinery manufacture and reliability*. 2016. Vol. 45. No. 4. Pp. 328–336.

Об авторах

Клочков Юрий Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет. Опубликовал 165 научных статей, 4 монографии, 4 наименования учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693. Author ID: 161677. *Область научных интересов:* механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, геометрия поверхностей, вы-

числительные алгоритмы, программирование. *Контактная информация*: e-mail – klotchkov@bk.ru

Николаев Анатолий Петрович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, Волгоградский государственный аграрный университет. Опубликовал 149 научных статей, 6 монографий, 5 наименований учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484. Author ID: 161676. *Область научных интересов*: механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, геометрия поверхностей, вычислительные алгоритмы, программирование. *Контактная информация*: e-mail – anpetr40@yandex.ru

Вахнина Ольга Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Волгоградский государственный аграрный универси-

тет. Опубликовала 47 научных статей, 1 монографию, 8 наименований учебно-методической литературы. eLIBRARY SPIN-код: 3593-0159. Author ID: 573151. *Область научных интересов*: механика оболочек, механика деформируемого твердого тела, численные методы расчета, расчет оболочек на основе метода конечных элементов с использованием множителей Лагранжа. *Контактная информация*: e-mail – ovahnina@bk.ru

Для цитирования

Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В. Численный анализ напряженно-деформированного состояния тонких оболочек на основе совместного конечного элемента треугольной формы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2019. Т. 15. № 2. С. 117–126. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-117-126

RESEARCH PAPER

Numerical analysis of the stress-strain state of thin shells based on a joint triangular finite element

Yuriy V. Klochkov, Anatoliy P. Nikolaev, Olga V. Vakhnina*

Volgograd State Agricultural University, 26 University Ave., Volgograd, 400002, Russian Federation
*klotchkov@bk.ru

Received: February 05, 2019

Revised: March 13, 2019

Accepted: March 18, 2019

Keywords:

shell construction;
nodal unknowns;
triangular finite element;
Lagrange coefficients

Abstract

Relevance. The use of the finite element method for determining the stress-strain state of thin-walled elements of engineering structures predetermines their discretization into separate finite elements. Splitting irregular parts of the structure is impossible without the use of triangular areas. The triangular elements of shell structures are joint in displacements and in their derivatives only at the nodal points. Therefore, ways to improve the compatibility conditions at the boundaries of triangular elements are relevant.

Aims of research. The aim of the work is to improve the compatibility conditions at the boundaries of adjacent triangular elements based on equating the derivatives of normal displacements in the middle of the boundary sides.

Methods. In order to improve the compatibility conditions at the boundaries of triangular elements in this work, the Lagrange functional is used with the condition of ensuring equality in the middle of the sides of adjacent elements derived from normal displacements in the directions of perpendiculars tangent to the middle surface of the shell.

Results. Using the example of analysing an elliptical shell, the efficiency of using a joint triangular finite element is shown, whose stiffness matrix is formed in accordance with the algorithm outlined in this article.

References

1. Krivoshapko S.N., Gbaguidi-Aisse G.L. (2016). Geometry, static, vibration and bucking analysis and ap-

The investigation was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region as part of the research project No. 18-41-340007 p_a.

plications to thin elliptic paraboloid shells. *The Open Construction and Building Technology Journal*, 10, 3–28.

2. Krivoshapko S.N., Galishnikova V.V. (2015). *Arhitekturno-stroitel'nye konstrukcii: uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata [Architectural and building structures: a textbook for academic undergraduate]*. Moscow: Urait Publ., 476. (In Russ.)

3. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S., Yatsura A.V. (2018). Stress-Strain State Near a Hole in a Shear-Compliant Composite Cylindrical Shell with Elliptical Cross-Section. *International Applied Mechanics*, 54(5), 559–567.
4. Pyatikrestovskiy K.P., Travush V.I. (2015). O programmirovanii nelineynogo metoda rascheta derevyannykh konstruktсий [On programming nonlinear method for calculating wooden structures]. *Academia. Arhitektura i stroitel'stvo*, (2), 115–119. (In Russ.)
5. Kim A.Yu., Polnikov S.V. (2016). Sravnenie eksperimental'nogo i chislennogo issledovaniya bol'sheproletnogo pnevmaticheskogo linzobraznogo sooruzheniya [Comparison of experimental and numerical studies of large-span pneumatic lenticular structures]. *Nauchnoe obozrenie*, (15), 36–41. (In Russ.)
6. Khayrullin F.S., Sakhbiev O.M. (2016). Metod opredeleniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya trekhmernykh konstruktсий slozhnoy formy [The method for determining the stress-strain state of three-dimensional structures of complex shape]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 36–42. (In Russ.)
7. Kayumov R.A. (2016). Bol'shie progiby balok, arok i panelej v uprugoy srede s uchetom deformatsiy sdviga [Large deflections of beams, arches and panels in an elastic medium with regard to shear deformations]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktсий i sploshnykh sred: materialy XXII Mezhdunarodnogo simpoziuma imeni A.G. Gorshkova*, 111–113. (In Russ.)
8. Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Gazmatova E.A. (2018). Raschet tonkiykh plastin po metodu konechnykh elementov v forme klassicheskogo smeshannogo metoda s isklyucheniem peremesheniy konechnykh elementov kak zhestkogo tselogo [Analysis of thin plates according to the finite element method in the form of the classical mixed method with the exception of the displacements of finite elements as a rigid whole]. *Izvestiya visshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo*, 3(711), 5–13. (In Russ.)
9. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. (2006). *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktсий* [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow: Fizmatlit Publ., 392. (In Russ.)
10. Zhelezov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. (2018). Nelineynoye deformirovaniye i ustoychivost' diskretno podkreplennykh ellipticheskikh tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri kruchenii i vnutrennem davlenii [Nonlinear deformation and stability of discretely supported elliptical cylindrical composite shells under torsion and internal pressure]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatsionnaya tekhnika*, (2), 27–34. (In Russ.)
11. Sheshenin S.V., Bakhmetev S.G. (2014). Model effektivnogo sloya dlya rezinokordnogo materiala [Effective layer model for the rubber-cord material]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, (5), 41–45. (In Russ.)
12. Agapov V.P., Aydemirov K.R. (2016). Raschet ferm metodom konechnykh elementov s uchetom geometricheskoy nelineynosti [Analysis of farms by the method of finite elements taking into account the geometric nonlinearity]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and civil engineering]*, (11), 4–7. (In Russ.)
13. Nguyen N., Waas A.M. (2016). Nonlinear, finite deformation, finite element analyses. *Z. Angew. Math. and Phys.*, 67(9), 35/1–35/24.
14. Lei Z., Gillot F., Jezeguel L. (2015). Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *Int. J. Mech*, 54, 105–119.
15. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. (2015). Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Comput. Mech*, 56(1), 87–95.
16. Yamashita H., Valkeapaa A.I., Jayakumar P., Syqiyama H. (2015). Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn*, 10(5), 051012/1–051012/9.
17. Ren H. (2015). Fast and robust full quadrature triangular elements for thin plates/shells, with large deformations and large rotations. *Trans. ASME. J. Comput. and Nonlinear Dyn*, 10(5), 051018/1–051018/13.
18. Sartorato M., de Medeiros R., Tita V. (2015). A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Compos. Struct.*, (127), 185–198.
19. Pogorelov A.V. (1974). *Differencial'naja geometriya [Differential geometry]*. M.: Nauka Publ., 176. (In Russ.)
20. Sedov L.I. (1976). *Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum mechanics]*. M.: Nauka Publ., 574. (In Russ.)
21. Klochkov Y.V., Nikolaev A.P., Kiseleva T.A., Marchenko S.S. (2016). Comparative analysis of the results of finite element calculations based on an ellipsoidal shell. *Journal of machinery manufacture and reliability*, 45(4), 328–336.

About the authors

Yuriy V. Klochkov – DSc. in Technical Sciences, Professor, Head of the Higher Mathematics Department, Volgograd State Agricultural University. He published 165 scientific articles, 4 monographs, 4 titles of educational literature. eLIBRARY SPIN-code; 9436-3693. Author ID: 161677. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of analysis, surface geometry, computational algorithms, and programming. *Contact information*: e-mail – klotchkov@bk.ru

Anatoliy P. Nikolaev – DSc. in Technical Sciences, Professor, Professor of the Applied Geodesy, Environmental Engineering and Water Use Department, Volgograd State Agricultural University. He published 149 scientific articles, 6 monographs, 5 titles of educational literature. eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484. Author ID: 161676. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of calculation, surface geometry, computational algorithms, and programming. *Contact information*: e-mail – anpetr40@yandex.ru

Olga V. Vakhnina – PhD in Technical Sciences, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Volgograd State Agricultural University. She published 47 scientific articles, 1 monograph, 8 titles of educational

literature. eLIBRARY SPIN-code: 3593-0159. Author ID: 573151. *Scientific interests*: shell mechanics, solid mechanics, numerical methods of analysis, shell analysis based on the finite element method using Lagrange coefficients. *Contact information*: e-mail – ovahnina@bk.ru

For citation

Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. (2019). Numerical analysis of the stress-strain state of thin shells based on a joint triangular finite element. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(2), 117–126. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-117-126