УДК 517.956 :004.9
DOI 10.18822/byusu20240297-106

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Евсеев Федор Александрович
аспирант,
Инженерная школа цифровых технологий,
Югорский государственный университет
Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: fedor_evseev@rambler.ru

Предмет исследования: разрешимость первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости.

Методы исследования: доказательство основано на методе Галеркина с использованием априорных оценок.

Основные результаты исследования: доказана теорема существования обобщенных решений.

Ключевые слова: начально-краевая задача, квазигидродинамическая система, априорные оценки, теорема существования.

SOLVABILITY OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A QUASIHYDRODYNAMIC SYSTEM OF EQUATIONS IN THE CASE OF A WEAKLY COMPRESSIBLE FLUID

Fedor A. Evseev
Postgraduate Student,
Engineering School of Digital Technologies,
Yugra State University
Khanty-Mansiysk, Russia
E-mail: fedor_evseev@rambler.ru

Subject of research: solvability of the first initial-boundary value problem for a quasi-hydrodynamic system of equations in the case of a weakly compressible fluid.

Method of research: the proof is based on the Galerkin method using a priori estimates.

Main results of research: the existence theorem for generalized solutions is proven.

Keywords: initial-boundary value problem, quasi-hydrodynamic system, a priori estimate, existence theorem.

ВВЕДЕНИЕ

Система квазигидродинамических (далее, КГиД) уравнений в случае слабосжимаемой жидкости имеет вид:

$$div\,\vec{u} = div\,\vec{w},\ (t,x)\in Q=(0,T)\times G, G\subset\mathbb{R}^3,$$
$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u}+\frac{1}{\rho}\nabla p=$$
$$\vec{f}+\mu\Delta\vec{u}+\mu\nabla(div\,\vec{u})+(\vec{u},\nabla)\vec{w}+\vec{w}\,div\,\vec{u},$$
$$\mu=\frac{\eta}{\rho},\ \vec{w}=\tau\left((\vec{u},\nabla)\vec{u}+\frac{1}{\rho}\nabla p-\vec{f}\right), \tag{1}$$

где плотность ρ, динамическая вязкость μ и характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константами. Векторное поле $\vec{f}=\vec{f}(x,t)$ определяет массовую плотность внешних сил. Система (1) замкнута относительно неизвестных функций – вектора скорости $\vec{u}=\vec{u}(x,t)$ и давления $p=p(x,t)$. Символы div и ∇ определяют операции дивергенции и градиента соответственно. Уравнение рассматривается в ограниченной области G с границей $\Gamma\in C^2$.

Система (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$\vec{u}\,|_{\hat{A}}=0,\ \vec{w}\cdot\nu\,|_S=0,\ \vec{u}\,|_{t=0}=$$
$$\vec{u}_0(x),\ \int_G p(t,x)\,dx=0, \tag{2}$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к Γ.

Система (1) в более общем виде была выведена в статьях [1], [2] на основе известной кинетической модели. Первые варианты системы называются системой квазигазодинамических (далее – КГД) уравнений. Посвященную ей теорию и ее вывод можно найти в монографиях [3], [4]. Позднее, на основе более общего уравнения состояния, была предложена еще одна модель [5], [6] (КГиД система уравнений). В частности, вывод этой модели и некоторые результаты можно найти в монографии [7]. Здесь в случае слабосжимаемой жидкости (т. е. для системы (1)) были доказаны теоремы о диссипации полной энергии, а также теоремы единственности для классических решений системы. В статьях [8, 9, 10] Злотником А.А. были получены результаты по части анализа некоторых неклассических задач для КГиД уравнений. Для линеаризованной КГиД системы им получены результаты о существовании и единственности обобщенных решений задач Коши и начально-краевых задач в случае реального и политропного газа на произвольном временном промежутке. Позднее на основе линеаризованной КГД системы уравнений на постоянном решении строилась система с общей регуляризующей скоростью, а также устанавливалось вырождение свойства параболичности исходной системы [11]. Для КГиД системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости авторами работы [12] были доказаны теоремы существования и единственности обобщенных и регулярных решений при некоторых условиях на данные. В работе [13] исследуется модель на основе КГД и КГиД уравнений в многомасштабных средах, которую можно использовать в приложениях с пористыми средами. В качестве основы для такой модели был предложен вычислительный многомасштабный метод, основанный на идее минимизаций энергии связи, для решения задач КГД и повышения точности моделирования. Стоит отметить, что в последнее время регуляризованные уравнения гидродинамики КГиД-типа широко используются для построения численных методов. Некоторые последние результаты представлены в [13-17]. Несмотря на обширные исследования, посвященные решению задач квазигидродинамики, работы, посвященные доказательству теоремы о существовании и единственности глобального решения начально-краевой задачи для нелинейных систем КГиД уравнений, вероятно, отсутствуют. В данной работе будет предпринята попытка восполнить этот пробел.

В настоящей работе устанавливается, что при определенных условиях на данные КГиД системы уравнений существует обобщенное решение первой начально-краевой задачи и его можно найти как предел приближенных решений, вычисляемых по методу Галеркина с использованием априорных оценок.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Вспомогательные результаты и определения

Пусть u, p – достаточно гладкое решение задачи (1), (2). Первое и второе уравнение системы умножим на функции φ и $\vec{\psi}$ соответственно, такие что

$\varphi \in L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right)$, $\int\limits_G \varphi(x),dx = 0$,

$\vec{\psi} \in L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right)$, $\vec{\psi}\,|_S = 0$.

Интегрируя по G, придем к равенствам:

$$\int\limits_G \vec{u}\cdot\nabla\varphi\,dx = \int\limits_G \vec{w}\cdot\nabla\varphi dx = \tau\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla\varphi\right)+$$

$$\frac{\tau}{\rho}(\nabla p,\nabla\varphi)-\tau\left(\vec{f},\nabla\varphi\right),$$

$$\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}\right)+\left(\left((\vec{u}-\vec{w}),\nabla\right)\vec{u},\vec{\psi}\right)+$$

$$\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi}) = (f,\vec{\psi}) - \mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi})-$$

$$\mu\left(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi}\right)+\left((\vec{u},\nabla)\vec{w},c\psi\right)+$$

$$\left(\vec{w}\,div\,\vec{u},\vec{\psi}\right), \tag{3}$$

где точка $\cdot$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ и $(u,v)=\int\limits_G uv\,dx$ для скалярных функций и $(\vec{u},\vec{v})=\int\limits_G \vec{u}\cdot\vec{v}\,dx$ для векторных. Интегрируя по частям, имеем:

$$\left((\vec{u},\nabla)\vec{w},\vec{\psi}\right)=\int\limits_G(\vec{u},\nabla)\vec{w}\cdot\vec{\psi}\,dG=$$

$$-\int\limits_G div\,\vec{u}\vec{w}\cdot\vec{\psi}\,dG-\int\limits_G(\vec{u},\nabla)\vec{\psi}\cdot\vec{w}dG \tag{4}$$

Используя это равенство в (3), получаем равенства:

$$\left(\vec{u},\nabla\varphi\right)=\left(\vec{w},\nabla\varphi\right),\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}\right)-$$

$$\left((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}\right)+\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})+$$

$$\mu\left(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}\right)+\mu\left(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi}\right)$$

$$+\left((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}\right)=\left(\vec{f},\vec{\psi}\right), \tag{5}$$

справедливые при п.в. t. Равенство (5) может служить основой для определения обобщенного решения задачи. Пусть $p_0\in[1,3/2]$, $q_0=2p_0/(4p_0-3)$, $p_1=5/4$.

Функции
$\vec{u}\in L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right)\cap L_\infty\left(0,T;L_2(G)\right)$,

$u_t\in L_{p_1}\left(0,T;W_{p_1}^{-1}(G)\right)$, $p\in L_{p_1}\left(0,T;W_{p_1}^{1}(G)\right)$

такие, что $\dfrac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\in L_2(Q)$, удовлетворяюшие (2) называются обобщенным решением задачи (1), (2), если

$$\int\limits_0^T(\vec{u},\nabla\varphi)\,dt=\int\limits_0^T(\vec{w},\nabla\varphi)\,dt,\int\limits_0^T[\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}\right)-$$

$$\left((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}\right)+\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})+$$

$$\mu\left(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}\right)+\mu\left(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi}\right)+$$

$$\left((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}\right)igr]dt=\int_0^T(\vec{f},\vec{\psi})\,dt,$$

для всех функций $\varphi\in L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right)$ с

$\int_G\varphi(t,x)\,dx=0,\ \vec{\psi}\in L_5\left(0,T;W_5^1(G)\right)$ и

$\vec{\psi}\,|_S=0$.

Пусть

$$a(\vec{u},\vec{\psi})=\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}\right)-\left((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}\right)+$$

$$\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{\psi})+\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi})+$$

$$\left((\vec{u},\nabla)\vec{\psi},\vec{w}\right).$$

Основные результаты

Теорема. *Пусть* $f\in L_2(Q)$, $u_0\in L_2(G)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи (1), (2) что* $\nabla p,(u,\nabla u)u\in L_{q_0}\left(0,T;L_{p_0}(G)\right)$ *длялюбого* $p_0\in[1,3/2]$, *где* $q_0=2p_0/(4p_0-3)$.

Доказательство. Вначале для гладких решений задачи получим первую априорную оценку. Пусть $\varphi=p$ и $\vec{\psi}=\vec{u}$ в (5), тогда:

$$\tau\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p\right)+\frac{\tau}{\rho}(\nabla p,\nabla p)-$$

$$\tau(\vec{f},\nabla p)-(\vec{u},\nabla p)=0,$$

$$\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{u}\right)-\left((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u},\vec{u}\right)+$$

$$\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{u})+\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u})+$$

$$\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},\left(\tau(\vec{u},\nabla)\vec{u}+\frac{\tau}{\rho}\nabla p-\tau\vec{f}\right)\right)=(\vec{f},\vec{u}).\quad(6)$$

Разделив первое из равенств в (6) на ρ и сложив его со вторым равенством и используя равенство $\left((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{u},\vec{u}\right)=0$ в силу первого уравнения в (1) и интегрирования по частям, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx+\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+$$

$$\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u})+\frac{\tau}{\rho^2}(\nabla p,\nabla p)+$$

$$\frac{\tau}{\rho}\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p\right)-\frac{\tau}{\rho}(\vec{f},\nabla p)-\frac{1}{\rho}(\vec{u},\nabla p)+$$

$$\frac{1}{\rho}(\nabla p,\vec{u})+\tau\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)+$$

$$\frac{\tau}{\rho}\left(\nabla p,(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)-\tau\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{f}\right)=(\vec{f},\vec{u}),\quad(7)$$

Приводя подобные, заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx+\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+$$

$$\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u})+\frac{\tau}{\rho^2}(\nabla p,\nabla p)+$$

$$\tau\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)+\frac{2\tau}{\rho}\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},\nabla p\right)-$$

$$\frac{\tau}{\rho}(\vec{f},\nabla p)-\tau\left((\vec{u},\nabla)\vec{u},\vec{f}\right)=(\vec{f},\vec{u}),\quad(8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx+\mu(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+\mu(div\,\vec{u},div\,\vec{u})+$$

$$\tau\left(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)=$$

$$\tau\left(\vec{f},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)+(\vec{f},\vec{u}),\quad(9)$$

Оценим правую часть, используя неравенство Коши:

$$|ab|\le\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2,\ (\varepsilon>0).\quad(10)$$

Имеем, что

$$\tau\left|\left(\vec{f},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)\right|\le\tau\int_G\frac{|\vec{f}|^2}{2}dx+\frac{\tau}{2}\int_G|$$

$$\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\,|^2\,dx, \tag{11}$$

$$\left|\left(\vec{f},\vec{u}\right)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\int_G|\vec{u}|^2\,dx+\int_G|\vec{f}|^2\,dx\frac{1}{2\varepsilon}\ , \tag{12}$$

Используя эти неравенства в (9), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx+\ \mu\left(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\right)+\ \mu\left(div\,\vec{u},div\,\vec{u}\right)+$$

$$\frac{\tau}{2}\left(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)\le$$

$$\frac{\tau}{2}\int_G|\vec{f}|^2\,dx+\frac{1}{2\varepsilon}\int_G|\vec{f}|^2\,dx+\frac{\varepsilon C_0}{2}\int_G|\nabla\vec{u}|^2\,dx, \tag{13}$$

где постоянная C_0 взята из неравенства Пуанкаре $\int_G|\vec{u}|^2\,dx\le C_0\int_G|\nabla\vec{u}|^2\,dx,$

справедливого для всех $\vec{u}\in W_2^1(G)$, таких, что $\vec{u}\,|_{\Gamma}=0$. Возьмем $\varepsilon=\dfrac{\mu}{C_0}$, тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_G\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx+\ \frac{\mu}{2}\left(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\right)+\ \mu\left(div\,\vec{u},div\,\vec{u}\right)+$$

$$\frac{\tau}{2}\left(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)\le$$

$$\int_G|\vec{f}|^2\,dx\left(\frac{\tau}{2}+\frac{C_0}{2\mu}\right). \tag{14}$$

Пусть $J=\dfrac{\mu}{2}\left(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u}\right)+\mu\left(div\,\vec{u},div\,\vec{u}\right)+$

$$\frac{\tau}{2}\left(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u},\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right).$$

Интегрируем от 0 до t:

$$\int_G\frac{|\vec{u}|^2(t)}{2}dx+\int_0^t\int_G Jdxdt\le$$

$$C_1\int_0^t\int_G|\vec{f}|^2\,dxdt+\int_G\frac{u_0^2}{2}dx=M \tag{15}$$

Отсюда получим оценки

$$max_t\int_G|\vec{u}(t)|^2\,dx\le M, \tag{16}$$

$$\int_Q\frac{\mu}{2}(\nabla\vec{u},\nabla\vec{u})+\mu(div\,\vec{u})^2+$$

$$\frac{\tau}{2}\left(\frac{\nabla\vec{p}}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u},\frac{\nabla\vec{p}}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)\le M \tag{17}$$

Как следствие, имеем априорные оценки для решений:

$$\|\vec{u}\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right)}+\|div\,\vec{u}\|_{L_2(Q)}+$$

$$\|\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\,\|_{L_2(Q)}\le C_1(M). \tag{18}$$

где $C_1(M)$ – некоторая постоянная, зависящая от M,μ,τ,

$$\|\vec{u}\|_{L_\infty(0,T;L_2(G))}\le C_1(M). \tag{19}$$

Оценим все слагаемые, входящие в определение обобщенного решения. Покажем, что

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\,\|_{L_{s_0}\left(0,T;L_{p_0}(G)\right)}\le C,\ p_0\in[1,3/2]. \tag{20}$$

Оцениваем по неравенству Гельдера:

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\,\|_{L_{p_0}(G)}\le C\,\|\nabla\vec{u}\,\|_{L_2(G)}\cdot\|\vec{u}\,\|_{L_{p_0q}(G)}, \tag{21}$$

где $q=\dfrac{2}{2-p_0}$. Далее, используем теорему вложения: $W_2^S(G)\subset L_r(G)$. Возьмем

$$p_0q=r=\frac{6}{3-2S},$$

тогда

$$\frac{p_0}{2-p_0}=\frac{3}{3-2S}\Rightarrow S=\frac{3(p_0-1)}{p_0}.$$

Необходимое неравенство $S\le1$ эквивалентно неравенству $p_0\le3/2$. Из (21) вытекает оценка:

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\,\|_{L_{p_0}(G)}\le C_1\,\|\nabla\vec{u}\,\|_{L_2(G)}\cdot\|\vec{u}\,\|_{W_2^S(G)}\cdot \tag{22}$$

Последний множитель оцениваем, используя интерполяционное неравенство:

$$\|\vec{u}\|_{W_2^S(G)} \le C\|\vec{u}\|^{\Theta}_{W_2^1(G)} \cdot \|\vec{u}\|^{1-\Theta}_{L_2(G)}, \tag{23}$$

где $S=\Theta$. Из (22) получаем оценку:

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p0}(G)} \le C\|\vec{u}\|^{1+S}_{W_2^1(G)} \cdot \|\vec{u}\|^{1-S}_{L_2(G)}. \tag{24}$$

Воспользовавшись (19), получим

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q0}(0,T;L_{p0}(G))} \le$$

$$C_1(M)\left(\int_0^T \|\vec{u}\|^{q_0(1+S)}_{W_2^1(G)}\,dt\right)^{1/q_0} \le C_2(M), \tag{25}$$

где выберем:

$$q_0(1+S)=2, \text{ т.е., } q_0 = 2p_0/(4p_0-3). \tag{26}$$

Легко увидеть, в силу условий на параметр p_0, что $q_0 \ge 1$. Имеем из оценки (18), что

$$\left\|\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right\|_{L_2(Q)} \le C. \tag{27}$$

Отметим, что

$$\|\vec{u}\|_{L_2(Q)} \ge C\|\vec{u}\|_{L_{q0}(0,T;L_{p0}(G))}. \tag{28}$$

Действительно, используя неравенство Гельдера, получим:

$$\left[\int_0^T\left(\int_G |\vec{u}|^p\,dx\right)^{\frac{q_0}{p_0}} dt\right]^{\frac{1}{q_0}} \le C_0\left[\vphantom{\int}\right.$$

$$\int_0^T\left(\int_G |\vec{u}|^2\,dx\right)^{\frac{q_0}{2}} dt\Bigg]^{\frac{1}{q_0}} \le C_1\|\vec{u}\|_{L_2(Q)}. \tag{29}$$

Отсюда получим:

$$C(M) \ge \left\|\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right\|_{L_2(Q)} \ge$$

$$C\left\|\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right\|_{L_{q0}(0,T;L_{p0}(G))} \ge$$

$$\left\|\frac{\nabla p}{\rho}\right\|_{L_{q0}(0,T;L_{p0}(G))} - \|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q0}(0,T;L_{p0}(G))} \ge$$

$$\left\|\frac{\nabla p}{\rho}\right\|_{L_{q0}(0,T;L_{p0}(G))} - C_3(M). \tag{30}$$

Получаем оценки:

$$\|\nabla p\|_{L_{q0}(0,T;L_{p0}(G))} +$$

$$\|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{q0}(0,T;L_{p0}(G))} \le C_4(M), \tag{31}$$

Как следствие, при $p_0 = p_1 = 5/4$, поскольку $p_0 = q_0$, в этом случае, имеем:

$$\|\nabla p\|_{L_{p1}(Q)} + \|(\vec{u},\nabla)\vec{u}\|_{L_{p1}(Q)} \le C_4(M). \tag{32}$$

Так как

$$\vec{w} = \tau\left(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}-\vec{f}\right), \tag{33}$$

то отсюда имеем равенство для нормы $\vec{w}$:

$$\|\vec{w}\|_{L_2(Q)} \le \left\|\left(\frac{\nabla p}{\rho}+(\vec{u},\nabla)\vec{u}\right)\right.$$

$$\Big\|_{L_2(Q)} + \|\vec{f}\|_{L_2(Q)} \le C_5(M). \tag{34}$$

Оценим слагаемые из определения обобщенного решения. Имеем:

$$\left((\vec{u}-\vec{w},\nabla)\vec{\psi},\vec{u}\right) = \int_G \sum_{i,j}(\vec{u}_i-\vec{w}_i)\vec{\psi}_{jx_i}\vec{u}_j\,dx \tag{35}$$

Используем неравенство Гельдера:

$$I = \int_G \vec{w}_i\vec{\psi}_{jx_i}\vec{u}_j dx, |I| \le \|\vec{w}_i\vec{u}_j\|_{L_{p0}(G)} \cdot \|\vec{\psi}_{jx_i}$$

$$\|_{Lq(G)}, 1/p_0 + 1/q = 1. \tag{36}$$

Показатель p_0 тот же. Далее, аналогично получаем (см. (19)):

$$I_1 = \left[\int_G (\vec{w}_i)^{p_0}(\vec{u}_j)^{p_0}\,dx\right]^{\frac{1}{p_0}} \le$$

$$\|\overrightarrow{w_i}\|_{L_2(G)} \cdot \|\overrightarrow{u_j}\|_{L_{p0q}} \le C_6\|\overrightarrow{w_i}\|_{L_2(G)} \cdot \|\overrightarrow{u_j}\|_{W_2^S(G)} \le$$

$$\|\overrightarrow{w_i}\|_{L_2(G)} \cdot \|\overrightarrow{u_j}\|^S_{W_2^1(G)} \cdot \|\overrightarrow{u_j}\|^{1-S}_{L_2(G)} \le$$

$$C_7\|\overrightarrow{w_i}\|_{L_2(G)} \cdot \|\overrightarrow{u_j}\|^S_{W_2^1(G)}. \tag{37}$$

Имеем оценку интеграла:

$$\| I_1 \|_{L_{q_0}(0,T)} \le [\int_0^T \| \overrightarrow{w_i} \|^{q_0}_{L_2(G)} \cdot \| \overrightarrow{u_j} \|^{Sq_0}_{W_2^1(G)} \, dt]^{\frac{1}{q_0}}. \quad (38)$$

Применим неравенство Гельдера с $q = \frac{2}{q_0}$:

$$\| I_1 \|_{L_{q_0}(0,T)} \le \| \overrightarrow{w_i} \|_{L_2(Q)} \cdot [\int_0^T \| \overrightarrow{u_j} \|^{Sq_0 \frac{2}{2-q_0}}_{W_2^1(G)} \, dt]^{\frac{2-q_0}{2q_0}}. \quad (39)$$

Отметим, что $\frac{2Sq_0}{2-q_0} \le 2$. Тогда

$$\| I_1 \|_{L_{q_0}(0,T)} \le C_8(M). \quad (40)$$

Воспользуемся неравенством (см. (36)):

$$I \le C_7 \| \overrightarrow{w_i u_j} \|_{L_{p_0}(G)} \cdot \| \vec{\psi} \|_{W_q^1(G)}. \quad (41)$$

Выражение

$$l(\vec{\psi}) = \sum_{i,j} \int_G \overrightarrow{w_i} \vec{\psi}_{jx_i} \overrightarrow{u_j} dx = ((\vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) \quad (42)$$

– есть линейный непрерывный функционал над $\overset{\circ}{W}{}_q^1(G)$. Из (37), (41) вытекает, что

$$\| l(\vec{\psi}) \|_{W_{p_0}^{-1}(G)} = \sup_{\vec{\psi} \in \overset{\circ}{W}{}^1(G)} \frac{\| l(\vec{\psi}) \|}{\| \vec{\psi} \|_{\overset{\circ}{W}{}_q^1(G)}} \le$$

$$C_9 \| \vec{w} \|_{L_2(G)} \cdot \| \vec{u} \|^S_{W_2^1(G)}, \quad q = p_0 / (p_0 - 1) \quad (43)$$

Используя (40), получим

$$\| l(\vec{\psi}) \|_{L_{q_0}(0,T;W_{p_0}^{-1}(G))} \le C_{10}(M). \quad (44)$$

Обозначим

$$(\nabla p, \vec{\psi}) = l_1(\vec{\psi}), \nabla p \in L_{q_0}(0,T; L_{p_0}(G)). \quad (45)$$

Выражение имеет смысл для

$$\forall \vec{\psi} \in L_{q_0'}(0,T; L_q(G)).$$

Тогда имеем

$$l_1(\vec{\psi}) \le \| \nabla p \|_{L_{p_0}} \cdot \| \vec{\psi} \|_{L_q(G)}. \quad (46)$$

Значит, имеем оценку:

$$\| l_1(\vec{\psi}) \|_{L_{q_0}(0,T;W_{p_0}^{-1}(G))} \le C_{11}(M). \quad (47)$$

Для интегралов вида

$$l_2(\vec{\psi}) = \int_0^T ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) \, dt =$$

$$\int_0^T \sum_{i,j} \int_G \overrightarrow{u_i} \vec{\psi}_{jx_i} \overrightarrow{u_j} dx dt, l_3(\vec{\psi}) = \int_0^T ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}) \, dt$$

аналогично оценке (46) получим оценку:

$$\| l_i(\vec{\psi}) \|_{L_{q_0}(0,T;W_{p_0}^{-1}(G))} \le C_{12}(M), i = 2,3. \quad (48)$$

Пусть $\{\varphi_i\}$ – базис в подпространстве пространства $W_2^1(G)$, состоящего из функций φ, удовлетворяющих условию $\int_G \varphi \, dx = 0$.

В качестве вектор-функций $\{\vec{\psi}_i\}$ выбираем собственные функции задачи:

$$-\Delta \vec{\psi} = \lambda \vec{\psi}, \vec{\psi}|_{\Gamma} = 0, \; \vec{\psi} =$$

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in W_2^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G). \quad (49)$$

Они образуют ортонормированный базис в $L_2(G)$ (после нормировки) и ортогональный базис в пространстве $V = W_2^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, если в последнем взять в качестве скалярного произведения выражение

$$< \vec{u}, \vec{v} >_V = (\Delta \vec{u}, \Delta \vec{v}).$$

Пусть P_N – ортопроектор в $L_2(G)$ на подпространство $V_N = Lin\{\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \ldots, \vec{\psi}_N\}$.

Очевидно, что $P_N \in L(V,V)$ и в силу двойственности и самопряженности он допускает продолжение до ограниченного оператора класса $L(V', V')$, где V' – двойственное пространство, построенное по $L_2(G)$ и V как пополнение $L_2(G)$ относительно нормы

$$\| u \|_{V'} = \sup_{v \in V} |< u, v >_V / \| v \|_V.$$

В частности, имеем, что $(u, P_N v) = (P_N u, v)$ для всех $v \in V, u \in V'$. Отметим, что $W_2^2(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset \overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$ и вложение плотно. Это следствие теорем вложения. Поскольку $V \subset \overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$, имеем, что $W_{5/4}^{-1}(G) \subset V'$. Пусть λ_i – соответствующие собственные значения.

Ищем приближенное решение задачи в виде:

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\vec{\psi}_i(x),\ p_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\varphi_i(x),$$

где $c_i(t)$ и $\alpha_i(t)$ есть решение системы:

$$\left(\vec{u}_N - \vec{w}_N, \nabla\varphi_j\right) = 0,\ a\left(\vec{u}_N, \vec{\psi}_j\right) =$$

$$\left(\vec{f}, \vec{\psi}_j\right), c_i(0) = \left(\vec{u}_0, \overrightarrow{\psi_i}\right),\ j = 1,.., N. \tag{50}$$

Первое уравнение системы можно переписать в виде

$$\left(\vec{u}_N - \frac{\tau\nabla p_N}{\rho} - \tau\left(\vec{u}_N\nabla\right)\vec{u}_N + f\tau, \nabla\varphi_i\right) = 0. \tag{51}$$

Имеем, что

$$\left(\frac{\tau\nabla p_N}{\rho}, \nabla\varphi_i\right) = \frac{\tau}{\rho}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)\left(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i\right),$$

$$\det(\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i) \neq 0 \tag{52}$$

Последний определитель – определитель Грама и он отличен от нуля. Действительно, напомним, что имеет место оценка:

$$\|\nabla p\|_{L_2(G)} \geq c_0 \|p\|_{L_2(G)}$$

$$\forall p \in W_2^1(G): \int_G p\,dx = 0$$

Это неравенство гарантирует, что в искомом подпространстве функций φ можно ввести эквивалентное скалярное произведение $\langle u, v\rangle = (\nabla u, \nabla v)$, что и гарантирует утверждение. Пусть A – матрица с элементами $a_{ij} = \left(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j\right)$. Тогда система (51) перепишется в виде

$$\vec{\alpha} = \frac{\rho}{\tau}A^{-1}\begin{pmatrix}\left(\vec{u}_N - \tau\left(\vec{u}_N, \nabla\right)\vec{u}_N + \tau f, \varphi_1\right)\\ \left(\vec{u}_N - \tau\left(\vec{u}_N, \nabla\right)\vec{u}_N + \tau f, \varphi_N\right)\end{pmatrix}. \tag{53}$$

Подставляя $\vec{\alpha}$ во вторую систему, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $c_i(t)$. Априорная оценка ниже гарантирует, что задача Коши для этой системы имеет решение на всем промежутке $[0, T]$.

Далее получим априорные оценки для приближенных решений. Умножим первое и второе уравнение системы (50) на α_i и на c_i, соответственно, и суммируем равенства по i. Тогда получим:

$$\left(\vec{u}_N - \vec{w}_N, \nabla p_N\right) = 0,\ a\left(\vec{u}_N, \vec{u}_N\right) = \left(f, \vec{u}_N\right). \tag{54}$$

Для решений мы имеем уже доказанную оценку (18), (19), и, таким образом,

$$\|\vec{u}_N\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right)} + \|div\,\vec{u}_N\|_{L_2(Q)} +$$

$$\left\|\frac{\nabla p_N}{\rho} + \left(\vec{u}_N, \nabla\right)\vec{u}_N\right\|_{L_2(Q)} \leq C_1(M), \tag{55}$$

где $C_1(M)$ – некоторая постоянная, зависящая от M, μ, τ,

$$\|\vec{u}_N\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(G)\right)} \leq C_1(M). \tag{56}$$

Оценка имеет тот же самый вид, поскольку

$$\|P_N f\|_{L_2(G)} \leq \|f\|_{L_2(G)},\ \|P_N u_0\|_{L_2(G)} \leq \|u_0\|_{L_2(G)},$$

$$u_N(0, x) = P_N u_0.$$

$$\|\nabla p_N\|_{L_{q0}\left(0,T;L_{p0}(G)\right)} + \|\left(\vec{u}_N, \nabla\right)\vec{u}_N$$

$$\|_{L_{q0}\left(0,T;L_{p0}(G)\right)} \leq C_4(M), \tag{57}$$

Как следствие из (25), (27), (32), (34), имеем:

$$\|w_N\|_{L_2(Q)} + \|\nabla p_N\|_{L_{5/4}(Q)} +$$

$$\|\left(\vec{u}_N, \nabla\right)\vec{u}_N\|_{L_{5/4}(Q)} \leq C_4(M), \tag{58}$$

Получим оценку на производную по времени от решения. Перепишем второе уравнение системы в виде:

$$\left(\frac{\partial\vec{u}_N}{\partial t}, \vec{\psi}\right) = \left(\left(\vec{u}_N - \vec{w}_N, \nabla\right)\vec{\psi}, \vec{u}_N\right) -$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\nabla p_N, \vec{\psi}\right) + \mu\left(\nabla\vec{u}_N, \nabla\vec{\psi}\right) -$$

$$\mu\left(div\,\vec{u}_N, div\,\vec{\psi}\right) - \left(\left(\vec{u}_N, \nabla\right)\vec{\psi}, \vec{w}_N\right) +$$

$$\left(\vec{f}, \vec{\psi}\right) = L_0\left(\vec{\psi}\right), \tag{59}$$

где $\vec{\psi} \in V_N$. Выражение $L_0(\vec{\psi})$ есть линейный непрерывный функционал над пространством $\overset{\circ}{W}{}_5^1(G)$ в силу оценок (46), (47), (48) (где вместо $\vec{u}$ используется вектор $\vec{u}_N$) и, следовательно, и над пространством V. Следовательно, найдется $g_N(t) \in V'$ такой, что $L_0(\vec{\psi}) = (g_N, \vec{\psi})$ для всех $\psi \in V$. В силу оценок (46), (47), (48), (54)-(58) имеем, что

$$\| g_N \|_{L_{5/4}(0,T;V')} \le \| g_N \|_{L_{5/4}\left(0,T;W_{5/4}^{-1}(G)\right)} \le C_{12}(M),$$

где C_{12} – некоторая постоянная, зависящая от величины M и не зависящая от N. Равенство (59) можно переписать в виде:

$$u_{Nt} = P_N g_N.$$

Тогда из предыдущей оценки и ограниченности оператора P_N в V' вытекает неравенство

$$\| u_{Nt} \|_{L_{5/4}(0,T;V')} \le C_{12}(M). \tag{60}$$

Далее мы воспользуемся теоремой о компактности (теорема 5.1 в [18]). Отметим, что вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G) \subset L_2(G)$ компактно (теоремы вложения). Последовательность u_N ограничено в пространстве с нормой

$$\| u \| = \| u \|_{L_2\left(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)\right)} + \| u_t \|_{L_{5/4}(0,T;V')}$$

и, следовательно, по теореме о компактности, существует подпоследовательность u_{N_k} и функция $u \in L_2(Q)$ такие, что $u_{N_k} \to u$ в $L_2(Q)$ и п. в. в Q. Выделяя еще подпоследовательности из этой подпоследовательности, если необходимо, без ограничения общности можем считать, что

$$u \in L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right),\ u_{N_k x_i} \to u_{x_i}$$

слабо в $L_2(Q)$, $u_{N_k t} \to u_t$

слабо в $L_{5/4}(0,T;V')$, $div\, u_{N_k} \to div\, u$

слабо в $L_2(Q)$, $w_N \to w$,

слабо в $L_2(Q)$, $p_N \to p$ в $L_{5/4}(Q)$,

$\nabla p_N \to \nabla p$ и $(u_N, \nabla) u_N \to u_1$

слабо в $L_{5/4}(Q)$, $u_N \to u$ * -

слабо в $L_\infty(0,T;L_2(G))$. Покажем, что

$$\vec{w} = \frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} - \vec{f},\ \vec{u}_1 = (\vec{u}, \nabla)\vec{u}, \tag{61}$$

Имеем, что $\nabla p_{N_k} \to \nabla p$ слабо в $L_{5/4}(Q)$, покажем, что $(\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \to (\vec{u}, \nabla)\vec{u}$ в некотором слабом смысле. Действительно, рассмотрим

$$\int_Q \left((\vec{u}_{N_k}, \nabla)\vec{u}_{N_k} - (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \right) \cdot \vec{\psi}\, dQ =$$

$$\int_Q \left(\left((\vec{u}_{N_k} - \vec{u}), \nabla \right)\vec{u}_{N_k} + (\vec{u}, \nabla)\left(\vec{u} - \vec{u}_{N_k}\right) \right) \cdot \vec{\psi}\, dQ.$$

Для удобства считаем, что $\vec{\psi} \in L_\infty(Q)$.
Для первого интеграла имеем оценку

$$\left| \int_Q \left((\vec{u}_{N_k} - \vec{u}, \nabla)\vec{u}_{N_k} \cdot \vec{\psi}\, dQ \right) \right| \le C_{13} \| \vec{u}_{N_k} - \vec{u} \|_{L_2(Q)}$$

$$\| \nabla \vec{u}_{N_k} \|_{L_2(Q)} \to 0 \ \ при\ \ k \to \infty$$

Для второго интеграла имеем:

$$\int_Q (\vec{u}, \nabla)\left(\vec{u} - \vec{u}_{N_k}\right) \cdot \vec{\psi}\, dQ \to 0 \ \ при\ \ k \to \infty,$$

в силу слабой сходимости ∇u_{N_k} в $L_2(Q)$.

Возьмем набор функций $\alpha_i(t) \in C([0,T])$, $c_i(t) \in C([0,T])$, умножим соответствующие равенства (50) с $N = N_k$ на эти функции, просуммируем результат по i от 1 до n $(n \le N_k)$ и проинтегрируем полученные равенства по t. В результате имеем:

$$\int_0^T (\vec{u}_{N_k} - \vec{w}_{N_k}, \nabla\varphi)\, dt =$$

$$0,\ \int_0^T a\left(\vec{u}_{N_k}, \vec{\psi}\right) dt = \int_0^T (\vec{f}, \vec{\psi})\, dt, \tag{62}$$

где $\vec{\psi} = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ и $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$.

Рассмотрим последовательно все слагаемые. По уже доказанному мы можем перейти к пределу в первом равенстве и получим предельное равенство:

$$\int_0^T (\vec{u}-\vec{w},\nabla\varphi)\,dt = 0,$$

$$\vec{w}=\tau\left(\left(\vec{u},\nabla\right)\vec{u}+\frac{1}{\rho}\nabla p-\vec{f}\right). \qquad (63)$$

Во втором равенстве мы рассмотрим только нелинейные слагаемые, поскольку в линейной части переход осуществляется за счет слабой сходимости.

Возьмем слагаемое:

$$J_{N_k}=\int_0^T \left(\left(\vec{u}_{N_k}-\vec{w}_{N_k},\nabla\right)\vec{\psi},\vec{u}_{N_k}\right)dt.$$

Покажем что $J_{N_k}\to J=\int_0^T \left(\left(\vec{u}-\vec{w},\nabla\right)\vec{\psi},\vec{u}\right)dt$.

Составим разность:

$$J_{N_k}-J=\int_0^T \left(\left(\vec{u}_{N_k}-\vec{w}_{N_k},\nabla\right)\vec{\psi},\,\vec{u}_{N_k}-\vec{u}\right)dt+$$

$$\int_0^T \left(\left(\vec{u}_{N_k}-\vec{w}_{N_k},\nabla\right)\vec{\psi}),\vec{u}\right)dt$$

Второй интеграл стремится к нулю в силу слабой сходимости, а для первого интеграла имеем оценку

$$|\int_0^T \left(\left(\vec{u}_{N_k}-\vec{w}_{N_k},\nabla\right)\vec{\psi},\vec{u}_{N_k}-\vec{u}\right)$$

$$dt\,|\le c\,\|\,\vec{u}_{N_k}-\vec{u}\,\|_{L_2(Q)}\to 0 \;при\; k\to\infty,$$

Аналогично показываем, что

$$\int_0^T \left(\left(\vec{u}_{N_k},\nabla\right)\vec{\psi},\vec{w}_{N_k}\right)dt\to\int_0^T \left(\left(\vec{u},\nabla\right)\vec{\psi},\vec{w}\right)dt$$

при $k\to\infty$. Переходя к пределу

при $k\to\infty$, придем к тому, что выполнено интегральное тождество

$$\int_0^T \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\vec{\psi}\right)-\left(\left(\vec{u}-\vec{w},\nabla\right)\vec{\psi},\vec{u}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\nabla p,\vec{\psi}\right)-$$

$$\mu\left(\nabla\vec{u},\nabla\vec{\psi}\right)+\mu\left(div\,\vec{u},div\,\vec{\psi}\right)+$$

$$\left(\left(\vec{u},\nabla\right)\vec{\psi},\vec{w}\right)dt=\in t_0^T\left(\vec{f},\vec{\psi}\right)dt$$

В силу базисности выбранных функций φ_i, $\vec{\psi}_i$ мы получим, что u есть обобщенное решение задачи. Доказательство последнего утверждения теоремы, т. е. включений $\nabla p,\left(u,\nabla u\right)u\in L_{q_0}\left(0,T;L_{p_0}\left(G\right)\right)$ для любого $p_0\in\left[1,3/2\right]$, мы фактически уже провели в первой половине доказательства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе рассмотрена разрешимость первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в случае слабосжимаемой жидкости. Доказана теорема существования обобщенных решений. Доказательство было основано на методе Галеркина с использованием априорных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Elizarova, T. G. On a computational algorithm for the calculation of gas-dynamic flows / T. G. Elizarova, B. N. Chetverushkin // Soviet Physics. Doklady. –1984. – V. 29. – P. 907-909.
2. Елизарова, Т. Г. Использование кинетических моделей для расчета газодинамических течений / Т. Г. Елизарова, Б. Н. Четверушкин. – Текст : непосредственный // Математическое моделирование: процессы в нелинейных средах. – М.: Наука. – 1986. – С. 261-278.
3. Elizarova, T. G. Quasi-Gas Dynamic Equations / T. G. Elizarova // Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg. – 2009.
4. Четверушкин, Б. Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике / Б. Н. Четверушкин. – Текст : непосредственный. – Москва, МГУ. – 1999. – 232 с.
5. Шеретов, Ю. В. Об одной новой математической модели в гидродинамике / Ю. В. Шеретов. – Текст : непосредственный // В книге Применение функционального анализа в теории приближений (Тверь: Тверской государственный университет). – 1996. – С. 124-134.
6. Шеретов, Ю. В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды / Ю.В. Шеретов. – Текст : непосредственный // В книге Применение функционального анализа в теории приближений. (Тверь: Тверской государственный университет). – 1997. – С. 127-155.
7. Шеретов, Ю. В. Регуляризованные уравнения гидродинамики / Ю. В. Шеретов. – Текст : непосредственный // Тверь: Тверской государственный университет. – 2016. – 222 с.
8. Злотник, А. А. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее / А. А. Злотник. – Текст : непосредственный // Матем. Заметки. – 2008. – Т. 83, № 5. – С. 667-682. – DOI: 10.4213/mzm4722

9. Злотник, А. А. О критериях параболичности квазигидродинамической системы уравнений в случае реального газа / А. А. Злотник, В. А. Гаврилин. – Текст : непосредственный // Вестник Московского энергетического института (Вестник МЭИ). – 2009. – № 6. – С. 116-126.
10. Злотник, А. А. Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений / А. А. Злотник. – Текст : непосредственный // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 433, № 6. – С. 599-603.
11. Zlotnik, A. A. On properties of aggregated regularized systems of equations for a homogeneous multicomponent gas mixture / A. A. Zlotnik, A. S. Fedchenko // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2022. – V. 45. No. 15. – P. 8906-8927. – DOI: 10.1002/mma.8214
12. Evseev, F.A. On Some Properties of a Linearized Quasi-Hydrodynamical System of Equations / F.A. Evseev, S.G. Pyatkov // Lobachevskii J Math. – V. 44, 3266–3276 (2023). – DOI: 10.1134/S1995080223080139
13. Chetverushkin, B. Chung E, Efendiev Y, Pun SM, Zhang Z. Computational multiscale methods for quasi-gas dynamic equations / B. Chetverushkin, E. Chung, Y. Efendiev, SM. Pun, Z. Zhang // Journal of Computational Physics. – 2021. – V. 440. P. 110352. – DOI: 10.1088/1361-6420/ac99f9
14. Балашов, В. А. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания системы «жидкость-твердое тело» с учетом химических реакций / В. А. Балашов, Е. Б. Савенков. – Текст : непосредственный // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2021. – № 82. – С. 1-20.
15. Kraposhin, M. V. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM / M.V. Kraposhin, D.A. Ryazanov, T.G. Elizarova // Computer Physics Communications. – 2022. – V. 271, № 1. – ID 108216.
16. Chetverushkin, B. N. Numerical solution of high-temperature gas dynamics problems on high-performance computing systems / B. N. Chetverushkin, O. G. Olkhovskaya, I. P. Tsigvintsev // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2021. – V. 390. – P. 113374. – DOI: 10.1016/j.cam.2020.113374
17. Елизарова, Т. Г. Численное моделирование газовых смесей в рамках квазигазодинамического подхода на примере взаимодействия ударной волны с пузырьком газа / Т. Г. Елизарова, Е. В. Шильников. – Текст : непосредственный // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, № 1. – С. 124-135.
18. Лионс, Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. – Текст : непосредственный. – М.: Мир. – 1972. – 588 с.