Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 157–168
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 157–168
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-157-168, EDN: QSUBAS

Научная статья
УДК 517.538.5

О скорости интерполяции наипростейшими дробями аналитических функций с регулярно убывающими коэффициентами

М. А. Комаров

Владимирский государственный университет, Россия, 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87

Комаров Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и его приложений, kami9@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-4831-081X, AuthorID: 169871

Аннотация. Рассматриваются задачи кратной интерполяции по узлу $z = 0$ аналитических в единичном круге функций $f(z) = f_0 + f_1 z + \dots$ посредством наипростейших рациональных дробей (логарифмических производных алгебраических многочленов) со свободными полюсами и с полюсами, лежащими на окружности $|z| = 1$. Получены оценки остатков интерполяции при условии вида $|f_{m-1}| < C/\sqrt{m}$, $m = 1, 2, \dots$. Точнее, мы предполагаем, что модули коэффициентов Маклорена f_m функции f не превосходят соответствующих коэффициентов α_m в разложении $a/\sqrt{1-x}$ ($-1 < x < 1$, $0 < a \leqslant a^* \approx 0.34$) по степеням x. Для доказательства оценок используются конструкции наипростейших дробей Паде со свободными полюсами, разработанные В. И. и Д. Я. Данченко (2001), О. Н. Косухиным (2005), В. И. Данченко и П. В. Чунаевым (2011), и развитая автором статьи (2020) конструкция интерполирующих наипростейших дробей с полюсами на окружности. Наши теоремы дополняют и усиливают ряд результатов перечисленных работ. Используя свойства последовательности $\{\alpha_m\}$, удается доказать, в частности, что при ограничении $|f_m| \leqslant \alpha_m$ все полюсы наипростейшей дроби Паде функции f расположены во внешности единичной окружности.
Ключевые слова: наипростейшая дробь, рациональная аппроксимация, кратная интерполяция, аналитическая функция, степенная сумма
Для цитирования: *Комаров М. А.* О скорости интерполяции наипростейшими дробями аналитических функций с регулярно убывающими коэффициентами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 157–168. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-157-168, EDN: QSUBAS

Article

Rate of interpolation of analytic functions with regularly decreasing coefficients by simple partial fractions

M. A. Komarov

Vladimir State University, 87 Gorky St., Vladimir 600000, Russia
Mikhail A. Komarov, kami9@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-4831-081X, AuthorID: 169871

Abstract. We consider the problems of multiple interpolation of analytic functions $f(z) = f_0 + f_1 z + \ldots$ in the unit disk with node $z = 0$ by means of simple partial fractions (logarithmic derivatives of algebraic polynomials) with free poles and with all poles on the circle $|z| = 1$. We obtain estimates of the interpolation errors under a condition of the form $|f_{m-1}| < C/\sqrt{m}$, $m = 1, 2, \ldots$. More precisely, we assume that the moduli of the Maclaurin coefficients f_m of a function f do not exceed the corresponding coefficients α_m in the expansion of $a/\sqrt{1-x}$ ($-1 < x < 1$, $0 < a \leqslant a^* \approx 0.34$) in powers of x. To prove the estimates, the constructions of Padé simple partial fractions with free poles developed by V. I. and D. Ya. Danchenko (2001), O. N. Kosukhin (2005), V. I. Danchenko and P. V. Chunaev (2011) and the construction of interpolating simple partial fractions with poles on the circle developed by the author (2020) are used. Our theorems complement and improve a number of results of the listed works. Using properties of the sequence $\{\alpha_m\}$ it is possible to prove, in particular, that under the condition $|f_m| \leqslant \alpha_m$ all the poles of the Padé simple partial fraction of a function f lie in the exterior of the unit circle.
Keywords: simple partial fraction, rational approximation, multiple interpolation, analytic function, power sum
For citation: Komarov M. A. Rate of interpolation of analytic functions with regularly decreasing coefficients by simple partial fractions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 157–168 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-157-168, EDN: QSUBAS

1. Введение. Конструкции кратной интерполяции

В теории рациональных приближений хорошо известны *наипростейшие дроби* (н.д.) — рациональные функции вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k \in \mathbb{C}.$$

Начало активному исследованию аппроксимационных и интерполяционных свойств н.д. со свободными полюсами z_k положила работа В. И. и Д. Я. Данченко [1]; подробный обзор результатов можно найти в [2].

1.1. Один из важных способов аппроксимации этими аппаратами заключается в построении так называемых *наипростейших дробей Паде кратной интерполяции*. Напомним, что н.д. ρ_ν порядка $\nu \leqslant n$ является н.д. Паде n-кратной интерполяции (с узлом $z = 0$) аналитической вблизи $z = 0$ функции

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

если

$$R_n(f; z) := f(z) - \rho_\nu(z) = O(z^n), \quad z \to 0. \tag{2}$$

Задача (2) всегда однозначно разрешима [1], причем, как показал О. Н. Косухин [3], н.д. ρ_ν совпадает с логарифмической производной n-го полинома Маклорена

$$p_n(z) := 1 + g_1 z + \ldots + g_n z^n \tag{3}$$

функции

$$g(z) := \exp\left(\int_0^z f(t)\,dt\right) = 1 + g_1 z + \ldots + g_n z^n + \ldots. \tag{4}$$

С помощью этой конструкции в [3] получена оценка остаточного члена интерполяции (2) в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ в случае, когда f аналитична в D и принадлежит классу Харди $H^1 = H^1(D)$:

$$|R_n(f; z)| \leqslant |z|^n e^{2\pi\|f\|_1} \frac{\|f\|_1 + |zf(z)|}{1 - |z| - |z|^{n+1}e^{2\pi\|f\|_1}}, \quad z \in D \tag{5}$$

(при любом n, для которого знаменатель положителен). Здесь

$$\|f\|_1 := \|f\|_{H^1(D)} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Следует подчеркнуть, что, в отличие от задачи (2), для н.д. задача интерполяции по *нескольким* узлам может не иметь решений либо иметь более одного решения; некоторые признаки однозначной разрешимости см. в работах [4, 5].

1.2. В [1] разработан следующий метод построения н.д. Паде. Для заданной функции (1) и натурального n обозначим через

$$\lambda_{n,1}, \ \ldots, \ \lambda_{n,n} \tag{6}$$

решение системы

$$S_m := \lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m = -f_{m-1}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

где S_m — степенные суммы неизвестных комплексных чисел λ_k. Как известно, такая система моментов имеет решение при любых правых частях, притом единственное, и это решение совпадает с корнями многочлена

$$P(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_n,$$

коэффициенты которого выражаются через значения степенных сумм S_m по рекуррентным формулам Ньютона

$$d_1 = -S_1, \quad d_k = -\frac{1}{k}\left(S_k + \sum_{j=1}^{k-1} S_{k-j}d_j\right), \quad k = 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Обозначив через ν ($\nu \leqslant n$) количество отличных от нуля чисел (6), можем, не нарушая общности, полагать, что

$$\lambda_{n,1} \neq 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{n,\nu} \neq 0, \quad \lambda_{n,\nu+1} = \cdots = \lambda_{n,n} = 0.$$

Тогда искомая дробь n-кратной интерполяции функции f представится в виде

$$\rho_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{z - z_{n,k}}, \qquad z_{n,k} := \lambda_{n,k}^{-1},$$

ибо $\rho_\nu(z) = -S_1 - S_2 z - \cdots - S_n z^{n-1} + O(z^n) = f_0 + f_1 z + \cdots + f_{n-1}z^{n-1} + O(z^n)$ по выбору чисел $z_{n,k}$.

Опираясь на эту конструкцию, В. И. Данченко и П. В. Чунаев [6] доказали и возможность представления н.д. Паде в интегральной форме:

$$\rho_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{Q(z)} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^n} \frac{\zeta^n Q(z) - z^n Q(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G = G(\gamma), \tag{8}$$

где γ — спрямляемый жорданов контур, охватывающий точку $z_0 = 0$, G — внутренность контура (предполагается, что f аналитична в замыкании области G), а Q — полином степени ν с корнями в определенных выше точках $z_{n,1}, \dots, z_{n,\nu}$. Выражение (8) дает удобную для оценок форму остатка интерполяции (2):

$$R_n(f;z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{z^n}{Q(z)}\int_\gamma \frac{f(\zeta)Q(\zeta)}{(\zeta - z)\,\zeta^n}\,d\zeta, \quad z \in G. \tag{9}$$

Соответствующая оценка дана в [6] для интерполяции функций, коэффициенты которых подчиняются условию $|f_{m-1}| \leqslant \alpha^m$, $m = 1, 2, \dots$, с некоторым $\alpha > 0$. В частности, в основном случае $\alpha = 1$ получается следующее:

если $|f_{m-1}| \leqslant 1$ для всех m, то

$$|R_n(f;z)| \leqslant \frac{1}{1-r}\frac{|z|^n}{r^n}\left(\frac{1-\tau_n+r}{1-\tau_n-r}\right)^n \ln\frac{3r}{r-|z|}, \quad |z| < r < 1-\tau_n, \tag{10}$$

где $\tau_n \in (0,1)$ удовлетворяет соотношениям $\tau_n^2 = (1-\tau_n)^{n+1}$, $\tau_n \asymp n^{-1}\ln n$.

Скорость приближения нельзя существенно повысить, что видно из примера функции $(1-z)^{-1}$ [7]. Доказательство неравенства (10) опирается на интересный сам по себе результат [7, лемма 3], [8, лемма 3]:

если степенные суммы S_m чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ допускают оценку

$$|S_m| \leqslant 1, \quad m = 1, \dots, n, \tag{11}$$

то

$$|\lambda_k| < (1-\tau_n)^{-1}, \quad k = 1, \dots, n;$$

при этом, для любого достаточно большого нечетного n существуют наборы чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ с тем же свойством (11) такие, что

$$\max\nolimits_k |\lambda_k| > 1 + (10n)^{-1}. \tag{12}$$

В оценке (10) при каждом n радиус r отделен от 1 (и (12) показывает, что это ограничение нельзя вовсе убрать), тогда как функция f ввиду $|f_{m-1}| \leqslant 1$ аналитична во всем открытом единичном круге. В теореме 1 настоящей работы при небольшом усилении ограничения на коэффициенты ($|f_{m-1}| = O(m^{-1/2})$) мы установим оценку, применимую при любом $r \in (0,1)$ и демонстрирующую лучшую, чем оценки (5) и (10), аппроксимацию вблизи границы круга.

1.3. Задача аппроксимации посредством н.д. допускает естественное толкование как задача о размещении n единичных зарядов, создающих поле, близкое к заданному. Поэтому особый интерес представляют приближения наипростейшими дробями при тех или иных ограничениях на расположение их полюсов.

Принципиальная возможность аппроксимаций посредством н.д. с полюсами на предписанных множествах исследовалась начиная с 1960-х гг. в работах Я. Корevаара, М. Томпсона, Ч. Чуи и др. (недавние результаты по этой тематике см. в статье П. А. Бородина [9]). В то же время скорость таких аппроксимаций исследовалась мало. В случае равномерной метрики наиболее общим результатом является, по-видимому, следующая оценка [10] n-кратной интерполяции функций из класса Харди H^1 в круге D посредством н.д. порядка $2n+1$ с полюсами на окружности $|z| = 1$:

для любой функции $f \in H^1$ и достаточно больших $n \geqslant n_0(f)$ существуют попарно различные числа $z_1, \dots, z_{2n+1}$ (все $|z_k| = 1$) такие, что

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} \right| \leqslant |z|^n C(f) \frac{n+1}{(1 - |z|^{n+1})^2}, \quad |z| < 1, \tag{13}$$

где $C(f) = 2e^{\pi\|f\|_1}(1 + \|f\|_1)(1 + \pi\|f\|_1 e^{\pi\|f\|_1})$.

Напомним схему построения интерполирующих н.д. (13). Для заданной аналитической вблизи $z = 0$ функции f снова строим функцию (4) и полином (3):

$$g(z) = p_n(z) + \pi_n(z), \quad p_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} g_k z^k, \quad \pi_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k z^k. \tag{14}$$

Хорошо известно (см., например, [10, лемма 1]), что если при данном n полином p_n не имеет корней в открытом единичном круге, то все $2n + 1$ корней полинома

$$Q^*(z) := p_n(z) + z^{2n+1}\,\overline{p_n(1/\overline{z})} \tag{15}$$

попарно различны и принадлежат окружности $|z| = 1$. Эти корни и выбираются в качестве $z_1, \dots, z_{2n+1}$. Нетрудно проверить, что для н.д. $\rho^*(z) = (Q^*(z))'/Q^*(z)$ (ее порядок равен $2n + 1$) действительно $f(z) - \rho^*(z) = O(z^n)$, $z \to 0$.

Ниже в теореме 2 при сохранении конструкции полюсов z_k результат (13) будет усилен и дополнен на том же классе функций, что в теореме 1.

2. Основные результаты

Для формулировки результатов положим

$$c_1 = 1, \qquad c_k = \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!}, \quad k = 2, 3, \dots. \tag{16}$$

Ввиду известного разложения

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k$$

имеем при $x \in [-1, 1]$ и $x \in (-1, 1)$ соответственно

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} x^k \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{k-1}. \tag{17}$$

Числа c_k убывают, причем для $k = 1, 2, \dots$ имеем по формуле Стирлинга

$$c_{k+1} \equiv \frac{(2k)!}{k!^2 4^k} = \frac{\theta_{2k}}{\sqrt{\pi k}\ \theta_k^2} < \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \quad (1 < \theta_{n+1} < \theta_n < e^{\frac{1}{12n}}).$$

Положим также

$$U(t, a) = 2a\frac{2\sqrt{1-at} - (1+a)\sqrt{1-t}}{1-a} - 2a, \quad 0 \leqslant at \leqslant a < 1, \tag{18}$$

$$v(a) = \frac{4a}{\sqrt{1-a}} - 2a \quad (v(a) \equiv U(1,a)),$$

и обозначим через a^* лежащий в интервале $(0,1)$ корень уравнения $v(a) = 1$. Функция U возрастает по первому аргументу, поэтому

$$0 \leqslant U(t,a) \leqslant v(a) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant a \leqslant a^* = 0.3414\ldots$$

для каждого $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть $f(z) = f_0 + f_1 z + \ldots$ и при некотором $a \in (0, a^*]$*

$$|f_{m-1}| \leqslant a c_m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где c_m — числа, определяемые равенствами (16). *Тогда при любых $n = 1, 2, \ldots$ и $r \in (0,1)$ погрешность интерполяции Паде* (2) *допускает оценку*

$$|R_n(f;z)| \leqslant \frac{|z|^n}{r^n} \frac{a}{\sqrt{1-r}} \frac{1+U(r,a)}{1-U(|z|,a)} \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{r^2}{r^2 - |z|^2}\right), \quad |z| < r,$$

а полюсы $z_{n,1}, \ldots, z_{n,\nu}$ н.д. Паде ρ_ν удовлетворяют неравенству

$$|z_{n,k}| > (v(a))^{-1/n} \geqslant 1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Для сравнения напомним, что в предположении $|f_{m-1}| \leqslant 1$ оценка $\min_k |z_{n,k}| \geqslant 1$, вообще говоря, невозможна (см. (12)). Мы фактически доказываем, что если (11) заменить условием $|S_m| \leqslant a c_m$ ($a \leqslant a^*$; $m = 1, \ldots, n$), то $\max_k |\lambda_k| < (v(a))^{1/n} \leqslant 1$.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *при любом $n = 1, 2, \ldots$ найдутся попарно различные числа $z_1, \ldots, z_{2n+1}$ (все $|z_k| = 1$) такие, что в круге $|z| < 1$*

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} \right| \leqslant \frac{2|z|^n}{1 - |z|^{n+1}} \frac{(1+a)(1-a)^{-1}}{1 - U(|z|,a)} \left(n + \frac{1}{2} + \frac{a}{\sqrt{1-|z|}} \right). \tag{19}$$

Заметим, что теорема 2 дополняет и усиливает оценку (13) в двух направлениях. Во-первых, при $|z| \to 1$ и фиксированном n оценка (19) имеет порядок $O((1-|z|)^{-3/2})$, тогда как оценка (13) — лишь порядок $O((1-|z|)^{-2})$. Во-вторых, функции, удовлетворяющие условиям теоремы 2, не обязаны принадлежать классу Харди H^1. Так, ввиду свойств чисел (16) имеем

$$\sqrt[k]{c_k} \to 1 \ (k \to \infty), \qquad c_1^2 + c_2^2 + \ldots = \infty,$$

следовательно, почти для любого выбора знаков $\epsilon_k = \pm 1$ функция

$$f_\epsilon(z) = a \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k c_k z^{k-1}, \quad a > 0,$$

по теореме Литтлвуда [11, стр. 228] не имеет радиальных пределов почти нигде на единичной окружности (т.е. множество тех $\varphi \in [-\pi, \pi]$, для которых существует $\lim\limits_{r \to 1-0} f_\epsilon(re^{i\varphi})$, имеет меру нуль). Следовательно, при таком выборе множителей ϵ_k функция f_ϵ не может принадлежать H^1. В то же время теорема 2 применима к функции f_ϵ при любом $a \leqslant a^*$.

Между теоремой 1 и оценками (5), (10) справедливо аналогичное сравнение.

3. Вспомогательные результаты

3.1. Нам потребуется решение рекуррентного уравнения

$$r_1 = a, \quad r_k = \frac{1}{2a}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{r_j r_{k-j}}{j} \quad (k \geqslant 2); \quad a > 0. \tag{20}$$

Воспользуемся методом производящих функций. Если обозначить

$$F_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^k, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k}{k}x^k, \quad A = \frac{1}{2a},$$

то в силу определения последовательности $\{r_k\}$ формально будем иметь

$$AF(x)F_0(x) = A\left(\frac{r_1}{1}x + \frac{r_2}{2}x^2 + \ldots\right)\left(r_1 x + r_2 x^2 + \ldots\right) =$$
$$= A\frac{r_1}{1}r_1 x^2 + A\left(\frac{r_1}{1}r_2 + \frac{r_2}{2}r_1\right)x^3 + \ldots = r_2 x^2 + r_3 x^3 + \ldots = F_0(x) - r_1 x,$$

а также $F_0(x) = xF'(x)$. Видим, что $F(x)$ удовлетворяет задаче Коши

$$(1 - Ay)y' = r_1, \quad y(0) = 0,$$

имеющей интеграл $y - Ay^2/2 = r_1 x$. Отсюда, учитывая $F(0) = 0$, находим

$$F(x) = A^{-1}(1 - \sqrt{1 - 2Ar_1 x}).$$

Но $A = (2a)^{-1}$, $r_1 = a$, так что (см. (17))

$$F(x) = 2a(1 - \sqrt{1 - x}) = a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{k}x^k.$$

Из сравнения этого разложения с разложением $F(x) = \sum r_k x^k/k$ вытекает

Лемма 1. *Решение уравнения* (20) *при любом* $a > 0$ *дается формулой*

$$r_k = ac_k,$$

где c_k — *числа, определяемые равенствами* (16).

3.2. С помощью леммы 1 докажем следующие оценки.

Лемма 2. *Пусть элементы числовых последовательностей* $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *связаны рекуррентными соотношениями*

$$g_1 = b_1, \quad g_k = \frac{1}{k}\left(b_k + \sum_{j=1}^{k-1} b_{k-j}g_j\right), \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{21}$$

Пусть $n = 1, 2, \ldots$, *а* c_k — *числа* (16). *Тогда при условии*

$$|b_k| \leqslant ac_k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad a \in (0, 1),$$

выполняется оценка

$$|g_k| \leqslant \frac{ac_k}{k}\varepsilon_k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \varepsilon_k := \frac{1 + a - 2a^k}{1 - a}, \tag{22}$$

а следовательно, и оценка

$$|g_1|t + \ldots + |g_n|t^n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ac_k}{k}\varepsilon_k t^k = U(t, a), \tag{23}$$

где t — любое число из промежутка $(0, 1]$.

Доказательство. При $k = 1$ и $k = 2$ оценка (22) верна, ибо $c_1 = \varepsilon_1 = 1$, $c_2 = 1/2$, $\varepsilon_2 = 1 + 2a$,

$$|g_1| = |b_1| \leqslant a, \qquad |g_2| \leqslant \frac{|b_2| + |b_1|^2}{2} \leqslant \frac{a(1 + 2a)}{4}.$$

Положим $r_j := ac_j$ и допустим, что неравенство $|g_j| \leqslant r_j\varepsilon_j/j$ выполнено при всех $j \leqslant k - 1$, где k — целое, большее двух. Тогда в силу (21) и $|b_j| \leqslant ac_j$ имеем

$$k|g_k| \leqslant |b_k| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_j||b_{k-j}| \leqslant r_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{r_j\varepsilon_j}{j} r_{k-j} = r_k + r_1 r_{k-1} + \sum_{j=2}^{k-1} \varepsilon_j \frac{r_j r_{k-j}}{j}.$$

Учитывая монотонное возрастание множителей ε_j и тот факт, что последовательность $\{r_j\}$ доставляет решение уравнения (20) (см. лемму 1), получаем

$$k|g_k| \leqslant r_k + r_1 r_{k-1} + \varepsilon_{k-1} \sum_{j=2}^{k-1} \frac{r_j r_{k-j}}{j} = r_k + r_1 r_{k-1}(1 - \varepsilon_{k-1}) + \varepsilon_{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{r_j r_{k-j}}{j} =$$
$$= r_k + ar_{k-1}(1 - \varepsilon_{k-1}) + \varepsilon_{k-1} \cdot 2ar_k.$$

Но $1 - \varepsilon_{k-1} \leqslant 0$, а $r_{k-1} > r_k$, следовательно,

$$k|g_k| \leqslant r_k + ar_k(1 - \varepsilon_{k-1}) + 2ar_k\varepsilon_{k-1} = r_k(1 + a + a\varepsilon_{k-1}) = r_k\varepsilon_k.$$

Оценка (22) доказана по индукции.

Докажем неравенство (23). При любом $t \in (0, 1]$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ac_k}{k}\varepsilon_k t^k = a \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 + a}{1 - a} - \frac{2a^k}{1 - a} \right) \frac{c_k t^k}{k},$$

причем в силу первого из тождеств (17)

$$S(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} t^k = 2 - 2\sqrt{1 - t}.$$

Следовательно,

$$|g_1|t + \ldots + |g_n|t^n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ac_k}{k}\varepsilon_k t^k = a\frac{1 + a}{1 - a}S(t) - \frac{2a}{1 - a}S(at) \equiv U(t, a).$$

Лемма полностью доказана. □

Отметим, что из совпадения $U(t, a)$ с суммой ряда $\sum ac_k\varepsilon_k t^k/k$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, сразу видно возрастание функции U по первому аргументу.

3.3. Наконец, нам будет нужно следующее утверждение, фактически установленное в [7]. Для полноты изложения мы приводим здесь и его доказательство.

Лемма 3. *Коэффициенты g_m функции* (4) *выражаются через коэффициенты f_m функции* (1) *по формулам* (21)*, в которых $b_k := f_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.*

Доказательство. Напомним, что

$$g(z) = e^{F(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k,$$

где

$$F(z) = \int_0^z f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} z^k, \quad b_k = f_{k-1}.$$

Ясно, что $g_0 = g(0) = 1$. Покажем, что

$$g_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} g_j, \quad k = 1, 2, \dots.$$

При $k = 1$ равенство верно, ибо $g_1 = g'(0) = g(0)F'(0) = b_1$. Предположив, что оно верно при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$, докажем его справедливость при $k = m$ $(m \geqslant 2)$.

С помощью формулы Лейбница находим

$$m! g_m = g^{(m)}(0) = (gf)^{(m-1)}(0) = \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j g^{(j)}(0) f^{(m-1-j)}(0) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j j! g_j (m-1-j)! b_{m-j} = (m-1)! \sum_{j=0}^{m-1} g_j b_{m-j}.$$

Отсюда и следует искомое. □

4. Доказательство теоремы 1

В условиях теоремы функция f аналитична во всем круге $|z| < 1$, поэтому в качестве контура γ в (9) можно взять окружность $|\zeta| = r$ с любым $r \in (0, 1)$. Полагая $M_r(f) = \sup_{|\zeta|=r} |f(\zeta)|$ и оценивая интеграл в (9), получим при любом натуральном n

$$|R_n(f; z)| \leqslant \frac{|z|^n}{2\pi r^n} \frac{M_r(f) M_r(Q)}{|Q(z)|} \int_{|\zeta|=r} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}, \quad |z| < r.$$

Из отмеченных в п. 1 результатов ясно, что с точностью до постоянного множителя (не влияющего на значения логарифмической производной Q'/Q) полином Q совпадает с n-ым полиномом Маклорена функции g, определенной в (4). Таким образом, можем положить

$$Q(z) = p_n(z) = 1 + g_1 z + \dots + g_n z^n.$$

Но согласно лемме 3 величины $g_1, g_2, \dots$ выражаются через величины $b_1, b_2, \dots$ $(b_j := f_{j-1})$ по рекуррентным формулам (21), тогда как в условиях теоремы $|b_j| \leqslant a c_j$ при всех j. Следовательно, в силу (23) и $a \leqslant a^*$ имеем

$$M_r(Q) < 1 + U(r, a), \quad |Q(z)| \geqslant 1 - U(|z|, a) > 0, \quad |z| < r < 1.$$

Кроме того, из условия $|f_{m-1}| \leqslant ac_m$ следует (см. (17))

$$M_r(f) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |f_m| r^m \leqslant a \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{k-1} = \frac{a}{\sqrt{1-r}}, \quad r < 1.$$

Тем самым

$$|R_n(f;z)| \leqslant \frac{|z|^n}{2\pi r^n} \frac{a}{\sqrt{1-r}} \frac{1+U(r,a)}{1-U(|z|,a)} \int_{|\zeta|=r} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}, \quad |z| < r.$$

Последний интеграл может быть выражен [12, с. 416] через значение полного эллиптического интеграла 1-го рода $\mathbf{K}(\kappa)$:

$$\frac{1}{2} \int_{|\zeta|=r} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta \cos t + \delta^2}} = 2\mathbf{K}(\delta),$$

где

$$\mathbf{K}(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \delta = \frac{|z|}{r} < 1.$$

Но [13, с. 26]

$$2\mathbf{K}(\kappa) \leqslant \pi - \ln(1-\kappa^2), \quad 0 < \kappa < 1,$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leqslant 1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{r^2}{r^2 - |z|^2}, \quad |z| < r,$$

и мы приходим к искомой оценке остатка интерполяции.

Положим $v = v(a)$. Для оценки полюсов н.д. Паде $\rho_\nu(z) = Q'(z)/Q(z)$ (корней $z_{n,k}$ полинома Q) достаточно заметить, что при $|z| \leqslant \beta := v^{-1/n}$ ($\beta \geqslant 1$ в силу $a \leqslant a^*$) имеем $|z|^k \leqslant \beta^k \leqslant \beta^n = v^{-1}$ при всех $k = 1, \ldots, n$, а значит,

$$|Q(z)| \geqslant 1 - (|g_1| + \ldots + |g_n|) v^{-1} > 1 - vv^{-1} = 0$$

(применили оценку (23) при $t = 1$). Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Рассуждая как при доказательстве теоремы 1, придем к оценкам (22), (23) коэффициентов g_k функции g (см. (4)). С помощью (23) при любом $n = 1, 2, \ldots$ установим, что n-ый полином Маклорена этой функции не имеет корней в круге $|z| < 1$:

$$|p_n(z)| = |1 + g_1 z + \ldots + g_n z^n| \geqslant 1 - U(|z|, a) > 0 \quad (a \leqslant a^*).$$

Следовательно, все $2n+1$ корней $z_1, \ldots, z_{2n+1}$ полинома Q^* (см. (15)) попарно различны и лежат на окружности $|z| = 1$. При этом верна оценка [10, лемма 2]

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} \right| \leqslant \frac{|h_n(z)| + |z^{n+1} f(z)| M}{(1 - |z|^{n+1}) |p_n(z)|}, \quad |z| < 1,$$

где

$$|h_n(z)| \leqslant |z|^n (2n+1) M + |\pi_n'(z)|, \quad M = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|,$$

и, как отмечено выше, $|p_n(z)| \geqslant 1 - U(|z|, a)$ (обозначение $\pi_n(z)$ см. в (14)).

Оценим числитель дроби. В круге $|z| < 1$ ввиду (22) и свойств чисел c_k имеем $|f(z)| \leqslant a/\sqrt{1-|z|}$ и

$$|\pi_n'(z)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} k|g_k||z|^{k-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} ac_k\varepsilon_k|z|^{k-1} \leqslant |z|^n a\frac{1+a}{1-a}\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k|z|^{k-n-1} \leqslant$$
$$\leqslant |z|^n a\frac{1+a}{1-a}\sum_{k=1}^{\infty} c_k|z|^{k-1} = \frac{|z|^n a}{\sqrt{1-|z|}}\frac{1+a}{1-a}.$$

С учетом $M < 1 + v(a) < (1+a)/(1-a)$ мы получаем

$$|h_n(z)| + |z^{n+1}f(z)|M \leqslant |z|^n\left(2n+1+\frac{(1+|z|)a}{\sqrt{1-|z|}}\right)\frac{1+a}{1-a},$$

откуда и следует искомое. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Данченко В. И., Данченко Д. Я.* О приближении наипростейшими дробями // Математические заметки. 2001. Т. 70, вып. 4. С. 553–559. https://doi.org/10.4213/mzm767
2. *Данченко В. И., Комаров М. А., Чунаев П. В.* Экстремальные и аппроксимативные свойства наипростейших дробей // Известия вузов. Математика. 2018. № 12. С. 9–49.
3. *Косухин О. Н.* О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2005. 80 с.
4. *Кондакова Е. Н.* Интерполяция наипростейшими дробями // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 30–37. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-2-30-37
5. *Комаров М. А.* Критерий наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями в терминах альтернанса // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2015. Т. 79, вып. 3. С. 3–22. https://doi.org/10.4213/im8266
6. *Danchenko V. I., Chunaev P. V.* Approximation by simple partial fractions and their generalizations // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 176, iss. 6. P. 844–859. https://dx.doi.org/10.1007/s10958-011-0440-5
7. *Чунаев П. В.* Об одном нетрадиционном методе аппроксимации // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 270. С. 281–287. EDN: MVSMGZ
8. *Chunaev P. V.* Interpolation by generalized exponential sums with equal weights // Journal of Approximation Theory. 2020. Vol. 254. Art. 105397. https://doi.org/10.1016/j.jat.2020.105397
9. *Бородин П. А.* Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы. II // Математический сборник. 2016. Т. 207, вып. 3. С. 19–30. https://doi.org/10.4213/sm8500
10. *Комаров М. А.* О скорости аппроксимации в единичном круге функций класса H^1 логарифмическими производными полиномов с корнями на границе круга // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2020. Т. 84, вып. 3. С. 3–14. https://doi.org/10.4213/im8901
11. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. New York ; London : Academic Press, 1970. 258 p.
12. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды : в 3 т. Т. 1 : Элементарные функции. Москва : Наука, 1981. 800 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 3 : Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Москва : Наука, 1967. 300 с.

References

1. Danchenko V. I., Danchenko D. Ya. Approximation by simplest fractions. *Mathematical Notes*, 2001, vol. 70, iss. 4, pp. 502–507. https://doi.org/10.1023/A:1012328819487
2. Danchenko V. I., Komarov M. A., Chunaev P. V. Extremal and approximative properties of simple partial fractions. *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, iss. 12, pp. 6–41. https://doi.org/10.3103/S1066369X18120022
3. Kosukhin O. N. *On some non-traditional methods of approximation, related to complex polynomials*. Diss. Cand. Sci. (Phiz. and Math.). Moscow, 2005. 80 p. (in Russian).
4. Kondakova E. N. Interpolation by simple partial fractions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 2, pp. 30–37 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-2-30-37
5. Komarov M. A. A criterion for the best uniform approximation by simple partial fractions in terms of alternance. *Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, iss. 3, pp. 431–448. https://doi.org/10.1070/IM2015v079n03ABEH002749
6. Danchenko V. I., Chunaev P. V. Approximation by simple partial fractions and their generalizations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 176, iss. 6, pp. 844–859. https://dx.doi.org/10.1007/s10958-011-0440-5
7. Chunaev P. V. On a nontraditional method of approximation. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 270, iss. 1, pp. 278–284. https://doi.org/10.1134/S0081543810030223, EDN: OHNDBB
8. Chunaev P. V. Interpolation by generalized exponential sums with equal weights. *Journal of Approximation Theory*, 2020, vol. 254, Art. 105397. https://doi.org/10.1016/j.jat.2020.105397
9. Borodin P. A. Approximation by simple partial fractions with constraints on the poles. II. *Sbornik: Mathematics*, 2016, vol. 207, iss. 3, pp. 331–341. https://doi.org/10.1070/SM8500
10. Komarov M. A. On the rate of approximation in the unit disc of H^1-functions by logarithmic derivatives of polynomials with zeros on the boundary. *Izvestiya: Mathematics*, 2020, vol. 84, iss. 3, pp. 437–448. https://doi.org/10.1070/IM8901
11. Duren P. L. *Theory of H^p spaces*. New York, London, Academic Press, 1970. 258 p.
12. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. T. 1: Elementarnye funktsii* [Integrals and Series. Vol. 1: Elementary Functions]. Moscow, Nauka, 1981. 800 p. (in Russian).
13. Bateman H., Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. 3: Ellipticheskie i avtomorfnye funktsii. Funktsii Lame i Mat'e* [Higher Transcendental Functions. Vol. 3: Elliptic and Automorphic Functions, Lamé and Mathieu functions]. Moscow, Nauka, 1967. 300 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 23.03.2022
Принята к публикации / Accepted 16.11.2022
Опубликована / Published 31.05.2023