Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 183–194
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 183–194
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194, EDN: VJGXBX

Научная статья
УДК 517.958,517.956.32

Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения

В. С. Рыхлов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Рыхлов Виктор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, rykhlovvs@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1556-7707, AuthorID: 2936

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка на конечном отрезке с постоянными коэффициентами и смешанной производной. Рассматривается случай закрепленных концов. Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Определяется классическое решение начально-граничной задачи. Формулируется и доказывается теорема единственности классического решения. Дается формула для решения в виде ряда, членами которого являются контурные интегралы, содержащие исходные данные задачи. Строится соответствующая спектральная задача для квадратичного пучка и формулируется теорема о разложении первой компоненты вектор-функции по производным цепочкам, соответствующим собственным функциям пучка. Эта теорема существенно используется при доказательстве теоремы единственности классического решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, второй порядок, постоянные коэффициенты, смешанная производная в уравнении, конечный отрезок, начально-граничная задача, закрепленные концы, классическое решение, единственность решения, формула для решения, разложение первой компоненты вектор-функции в ряд

Для цитирования: *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 183–194. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194, EDN: VJGXBX

Article

The uniqueness of the solution of an initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution

V. S. Rykhlov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Victor S. Rykhlov, rykhlovvs@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1556-7707, AuthorID: 2936

Abstract. An initial boundary value problem for an inhomogeneous second-order hyperbolic equation on a finite segment with constant coefficients and a mixed derivative is investigated. The case of fixed ends is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on different sides of the origin. The classical solution of the initial boundary value problem is determined. The uniqueness theorem of the classical solution is formulated and proved. A formula is given for the solution in the form of a series whose members are contour integrals containing the initial data of the problem. The corresponding spectral problem for a quadratic beam is constructed and a theorem is formulated on the expansion of the first component of a vector-function with respect to the derivative chains corresponding to the eigenfunctions of the beam. This theorem is essentially used in proving the uniqueness theorem for the classical solution of the initial boundary value problem.

Keywords: hyperbolic equation, second order, constant coefficients, mixed derivative in the equation, finite segment, initial boundary value problem, fixed ends, classic solution, uniqueness of the solution, formula for the solution, expansion of the first component of the vector-function in a series

For citation: Rykhlov V. S. The uniqueness of the solution of an initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 183–194 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194, EDN: VJGXBX

Введение

Рассмотрим следующую начально-граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные, $\varphi, \psi \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in L_1(Q_T)$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ при любом $T > 0$.

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1), т. е. выполняется условие

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны.

Требуется найти классическое решение этой задачи в области Q при как можно более слабых условиях на параметры задачи, т. е. на функции φ, ψ, f.

Под *классическим решением* (используются также термины: почти классическое решение, классическое решение почти всюду (п.в.) или — более кратко — решение п.в.) понимается функция $u(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$, которая непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$) абсолютно непрерывны по x и t, выполняется п.в. в Q равенство

$$u_{xt}(x,t) = u_{tx}(x,t), \tag{4}$$

удовлетворяющая условиям (2)–(3) и п.в. уравнению (1).

Отметим, что необходимость в условии (4) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [1].

В случае классического решения задачи (1)–(3) по необходимости должны выполняться следующие условия:

1) условия гладкости: $\varphi(x), \varphi'(x), \psi(x)$ абсолютно непрерывны;

2) условия согласования: $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$.

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \tag{5}$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{6}$$

В случае (5) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биркгофу [2, с. 66–67], а в случае (6) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (5).

Отметим, что конкретный вид краевых условий (2) не принципиален. Могут быть рассмотрены и более общие, но регулярные по Биркгофу однородные краевые условия.

Большой вклад в решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны при самых общих предположениях внес А. П. Хромов. Он предложил новый подход для решения такой задачи, изложенный в статьях [3–7]. Этот метод использует идеи А. Н. Крылова [8] об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера [9] о расходящихся рядах.

В работах [10–14] указанные выше результаты были распространены на различные обобщения уравнений колебаний струны и различные постановки начально-граничных задач. В указанных ранее работах рассматривался только случай $p_1 = 0$ (или, что то же самое, $\omega_1 + \omega_2 = 0$). Задача (1)–(3) в случае, когда $p_1 \neq 0$ (или, что то же самое, $\omega_2 + \omega_1 \neq 0$), насколько нам известно, впервые была рассмотрена в работах [15, 16].

1. Спектральная задача, соответствующая начально-граничной задаче, и теорема о разложении первой компоненты

С задачей (1)–(3) тесно связана следующая спектральная задача:

$$L(\lambda)y = 0, \tag{7}$$

порожденная оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \tag{8}$$

и краевыми условиями

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \tag{9}$$

В качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ рассмотрим систему решений

$$y_1(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x,\lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель $L(\lambda)$ [2, с. 26] имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_1 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1},$$

и его корни, очевидно, есть числа

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{10}$$

Эти числа, кроме точки $\lambda_0 = 0$, являются простыми собственными значениями $L(\lambda)$. Число $\lambda_0 = 0$, как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Линеаризуем задачу (7) с учетом (8). Положим $z_1 = y$, $z_2 = \lambda y$. Получим следующую задачу в пространстве вектор-функций $Z = (z_1, z_2)^T$:

$$AZ = \lambda Z, \tag{11}$$

$$BZ(0) + CZ(1) = 0, \tag{12}$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{p_2} d_x^2 & -\dfrac{p_1}{p_2} d_x \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_x := \frac{d}{dx}.$$

Введем оператор $\mathcal{L}$ в пространстве вектор-функций

$$\mathcal{L}Z := AZ, \quad D_{\mathcal{L}} = \{Z := (z_1, z_2)^T : z_1'', z_2' \in L_1[0,1], BZ(0) + CZ(1) = 0\}. \tag{13}$$

Как показано в [17], собственные значения и прозводные цепочки [2, с. 28]), построенные по собственным функциям оператор-функции $L(\lambda)$, совпадают с собственными значениями и собственными вектор-функциями оператора $\mathcal{L}$, а следовательно, двукратное разложение по собственным функциям оператор-функции $L(\lambda)$ есть не что иное, как разложение по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$.

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E})^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$. Для этого решим задачу

$$\mathcal{L}Z - \lambda Z = H,$$

где $H = (h_1, h_2)^T$ или в подробной записи

$$\begin{cases} z_2 - \lambda z_1 = h_1, \\ -\dfrac{1}{p_2} z_1'' - \dfrac{p_1}{p_2} z_2' - \lambda z_2 = h_2, \end{cases} \tag{14}$$

$$z_1(0) = z_1(1) = 0.$$

Выразим z_2 из первого уравнения системы (14)

$$z_2 = \lambda z_1 + h_1 \tag{15}$$

и подставим во второе уравнение системы (14). Получим

$$-\frac{1}{p_2} z_1'' - \frac{p_1}{p_2}(\lambda z_1' + h_1') - \lambda(\lambda z_1 + h_1) = h_2$$

или

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = h_\lambda,$$

где

$$h_\lambda := -p_1 h_1' - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2. \tag{16}$$

Таким образом, первая компонента вектора $\mathcal{R}_\lambda H$ является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = h_\lambda, \quad z_1(0) = z_1(1) = 0. \tag{17}$$

Пусть R_λ есть резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ — ее функция Грина. Тогда из (17) получим представление

$$z_1(x, \lambda) = (R_\lambda h_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi)\, d\xi. \tag{18}$$

А из (15) тогда найдем

$$z_2(x, \lambda) = \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) = \lambda (R_\lambda h_\lambda)(x) + h_1(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi)\, d\xi + h_1(x). \tag{19}$$

Из общей теории линейных операторов следует, что двукратное разложение вектор-функции H в ряд по собственным функциям $L(\lambda)$ или, что то же самое, разложение по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$ имеет вид

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \mathcal{R}_\lambda H\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ z_2(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ \lambda z_1(x, \lambda)(x, \lambda) + h_1(x) \end{pmatrix} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ \lambda z_1(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda.$$

Найдем условия на компоненты вектор-функции H, при которых имеет место формула

$$h_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(\mathcal{R}_\lambda H\right)_1 d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} z_1(x, \lambda)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi)\, d\xi\, d\lambda. \tag{20}$$

Здесь запись $(\dots)_j$ означает, что рассматривается j-я компонента вектора, стоящего внутри скобок. Для функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ имеет место следующее представление:

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)\Delta(\lambda)}\Big(e^{\lambda(\omega_1 x+\omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + e^{\lambda(\omega_1(1-\xi)+\omega_2 x)} -$$
$$-e^{\lambda(\omega_1+\omega_2(x-\xi))}\Big) - \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)}\Big(e^{\lambda\omega_1(x-\xi)}\chi(x-\xi) + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)}\chi(\xi-x)\Big), \tag{21}$$

где $\chi(x)$ есть функция Хевисайда ($\chi(x)=1$, если $x\geqslant 0$, и $\chi(x)=0$, если $x<0$).

Формулу (20) можно доказать хорошо известным методом контурного интеграла Пуанкаре – Коши [2, с. 91–98]. При этом существенно используется «хорошая» оценка функции Грина (21) при $|\rho|\to\infty$, которая имеет место в регулярном по Биркгофу случае (5). А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если $h_1', h_2 \in L_p[0,1]$ ($p>1$), $h_1(0)=h_1(1)=0$, то справедлива формула (20), где ряд справа сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0,1]$.*

2. Единственность классического решения начально-граничной задачи

Сформулируем и докажем основной результат данной статьи. Пусть $R_{1\lambda}$ есть интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

Теорема 2. *Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3), $f\in L_1(Q_T)$, и дополнительно выполняется условие $u_{tt}\in L_1(Q_T)$ при любом $T>0$, то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k \int\limits_{\gamma_k}\Big(\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}R_\lambda f(\cdot,\tau)\,d\tau -$$
$$-p_1 e^{\lambda t}R_{1\lambda}\varphi + p_2 e^{\lambda t}\lambda R_\lambda\varphi + p_2 e^{\lambda t}R_\lambda\psi\Big)\,d\lambda, \tag{22}$$

в которой ряд справа сходится абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ при любом фиксированном $t>0$.

Доказательство. Запишем задачу (1)–(3) в другом виде. Обозначим

$$v_1 = u, \quad v_2 = \frac{d}{dt}v_1\left(=\frac{d}{dt}u\right), \tag{23}$$

тогда уравнение (1) запишется в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_1 = v_2, \\ \dfrac{d}{dt}v_2 = -\dfrac{1}{p_2}d_x^2 v_1 - \dfrac{p_1}{p_2}d_x v_2 + \dfrac{1}{p_2}f, \end{cases} \tag{24}$$

где, как и раньше, $d_x := d/dx$.

Если обозначить

$$V := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{p_2}f \end{pmatrix}$$

и использовать уже введенный ранее оператор A, то система (24) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}V(\cdot,t) = AV(\cdot,t) + F(\cdot,t), \tag{25}$$

где, по предположению теоремы, $V_t, F \in L_1(Q_T)$. А с использованием введенного формулой (13) оператора $\mathcal{L}$ и с учетом формулы (25) задача (1)–(3) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}V(\cdot,t) = \mathcal{L}V(\cdot,t) + F(\cdot,t), \tag{26}$$

$$V(x,0) = \Xi(x), \tag{27}$$

где $\Xi(x) = (\varphi(x), \psi(x))^T$. При этом вектор-функция V удовлетворяет уравнению (26) п.в. в области Q и всюду на $[0,1]$ удовлетворяет равенству (27).

Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3), то $V(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 о разложении по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$ для первой компоненты, т. е. имеет место представление

$$v_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_k \int_{\gamma_k} \big(\mathcal{R}_\lambda V(\cdot,t)\big)_1 \, d\lambda, \tag{28}$$

где ряд справа сходится абсолютно и равномерно по переменной $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

По построению для вектор-функции V п.в. выполняется соотношение (26). Подействуем оператором $\mathcal{R}_\lambda$ на обе части этого соотношения. Получим равенство

$$\mathcal{R}_\lambda V_t = \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{L}V) + \mathcal{R}_\lambda F. \tag{29}$$

Обозначим

$$Y(x,t,\lambda) := \mathcal{R}_\lambda V(\cdot,t), \tag{30}$$

и пусть $\mathcal{G}$ есть функция Грина оператора $\mathcal{L}$. Из (30) тогда получим представление

$$Y(x,t,\lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V(\xi,t)\,d\xi. \tag{31}$$

Покажем, что

$$\frac{d}{dt}Y(x,t,\lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V_t(\xi,t)\,d\xi = \mathcal{R}_\lambda V_t(\cdot,t). \tag{32}$$

Для этого воспользуемся рассуждениями, аналогичными рассуждениям из статьи [10, с. 287–288].

Так как по построению $V(\xi,t)$ является абсолютно непрерывной функцией по переменной t, то из (31) получим

$$Y(x,t,\lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V(\xi,0)\,d\xi + \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)\int_0^t V_t(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi. \tag{33}$$

Но как уже отмечалось выше, на основании предположения теоремы и обозначения (23) имеем $V_t(\xi,\tau) \in L_1(Q_T)$. Следовательно, и $\mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V_t(\xi,\tau) \in L_1(Q_T)$ по переменным ξ и τ. Поэтому по теореме Фубини $\int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V_t(\xi,\tau)\,d\xi \in L_1[0,T]$ по τ. А значит, (33) можно представить в виде

$$Y(x,t,\lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V(\xi,0)\,d\xi + \int_0^t \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi,\lambda)V_t(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Отсюда следует, что $Y(x,t,\lambda)$ абсолютно непрерывна по t и почти при всех t выполняется равенство (32).

Далее, преобразуем первое слагаемое справа в (29) следующим образом:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{L}V) = \mathcal{R}_\lambda\big((\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})V\big) = V + \lambda\mathcal{R}_\lambda V = V + \lambda Y. \tag{34}$$

Из (29), (32), (34) тогда получим, что при фиксированных x и λ вектор-функция $Y(x,t,\lambda)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}Y(x,t,\lambda) - \lambda Y(x,t,\lambda = V(x,t) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot,t). \tag{35}$$

И, кроме того, на основании (27)

$$Y(x,0,\lambda) = \mathcal{R}_\lambda V(\cdot,0) = \mathcal{R}_\lambda \Xi. \tag{36}$$

Таким образом, $Y(x,t,\lambda)$ при любых фиксированных x и λ является решением задачи Коши (35)–(36).

Без особого труда можно установить, что общее решение уравнения (35) есть

$$Y_{\text{о.н.}}(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} C + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\big(V(x,\tau) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot,\tau)\big)\,d\tau, \tag{37}$$

где $C = (C_1, C_2)^T$ есть вектор, не зависящий от переменной t, т. е. $C_j = C_j(x,\lambda)$, $j = 1,2$.

Удовлетворим решение (37) начальному условию (36)

$$Y_{\text{о.н.}}(x,0,\lambda) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\lambda \Xi.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$C_1(x,\lambda) = (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1, \quad C_2(x,\lambda) = (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_2. \tag{38}$$

Используя формулы (37)–(38), получим следующее представление для решения задачи Коши (35)–(36):

$$Y(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 \\ e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_2 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\big(V(x,\tau) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot,\tau)\big)\,d\tau, \tag{39}$$

причем это решение единственное.

Нас интересует только первая компонента равенства (39) (см. формулу (28)), т. е. если $Y(x,t,\lambda) = \big(y_1(x,t,\lambda), y_2(x,t,\lambda)\big)^T$, то из (39) получим с учетом (30)

$$y_1(x,t,\lambda) = \big(\mathcal{R}_\lambda V(\cdot,t)\big)_1 = e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\Big(v_1(x,\tau) + \big(\mathcal{R}_\lambda F(\cdot,\tau)\big)_1\Big)\,d\tau. \tag{40}$$

Учитывая, что $u(x,t)=v_1(x,t)$, из формул (28) и (40) получим

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int_{\gamma_k}e^{\lambda t}\big(\mathcal{R}_\lambda\Xi\big)_1\,d\lambda-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int_{\gamma_k}\left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\Big(v_1(x,\tau)+\big(\mathcal{R}_\lambda F(\cdot,\tau)\big)_1\Big)\,d\tau\right)d\lambda.$$

А так как $\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}v_1(x,\tau)\,d\tau$ есть целая аналитическая функция по λ, то все интегралы по контурам γ_k от нее равны нулю. В результате получим

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int_{\gamma_k}e^{\lambda t}\big(\mathcal{R}_\lambda\Xi\big)_1\,d\lambda-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int_{\gamma_k}\left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\big(\mathcal{R}_\lambda F(\cdot,\tau)\big)_1\,d\tau\right)d\lambda. \qquad (41)$$

Запишем эту формулу в другом, более удобном для применения виде, используя представление, которое следует из (18), (19) и (16):

$$\mathcal{R}_\lambda H=\mathcal{R}_\lambda\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_\lambda\big(-p_1h_1'-\lambda p_2h_1-p_2h_2\big)\\ \lambda R_\lambda\big(-p_1h_1'-\lambda p_2h_1-p_2h_2\big)+h_1\end{pmatrix}. \qquad (42)$$

С учетом того, что $\Xi=(\varphi,\psi)^T$, из (42) найдем

$$\big(\mathcal{R}_\lambda\Xi\big)_1=R_\lambda\big(-p_1\varphi'-\lambda p_2\varphi-p_2\psi\big). \qquad (43)$$

А с учетом того, что $F=\left(0,\dfrac{1}{p_2}f\right)^T$, из (42) найдем

$$\big(\mathcal{R}_\lambda F\big)_1=R_\lambda\big(-f(\cdot,\tau)\big). \qquad (44)$$

Тогда из (41), (43), (44) получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int_{\gamma_k}e^{\lambda t}R_\lambda\big(p_1\varphi'+\lambda p_2\varphi+p_2\psi\big)\,d\lambda+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int_{\gamma_k}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}R_\lambda f(\cdot,\tau)\,d\tau\,d\lambda. \qquad (45)$$

Имеет место равенство

$$R_\lambda\varphi'=\int_0^1G(x,\xi,\lambda)\varphi'(\xi)\,d\xi=G(x,1,\lambda)\varphi(1)-G(x,0,\lambda)\varphi(0)-$$
$$-\int_0^1G_\xi(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)\,d\xi=-\int_0^1G_\xi(x,\xi,\lambda)\varphi(\xi)\,d\xi=-R_{1\lambda}\varphi, \qquad (46)$$

так как

$$G(x,1,\lambda)=G(x,0,\lambda)=0$$

ввиду того, что функция Грина $G(x,t,\lambda)$ по ξ удовлетворяет сопряженным краевым условиям к условиям (9) (см. [2, с. 20–21]).

Учитывая (46) в (45), получим в результате формулу (22) из формулировки доказываемой теоремы, причем ряды справа в этой формуле сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Тем самым теорема 2 полностью доказана. □

Список литературы

1. *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной // Математический сборник. 1949. Т. 24 (66), № 1. С. 27–51.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. Москва : Наука, 1969. 528 с.
3. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 2. С. 239–251. https://doi.org/10.7868/S0044466916020149
4. *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 280–288. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288
5. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // Современные методы теории краевых задач : материалы междунар. конф. : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXX». Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2019. С. 291–300. EDN: TXWNBY
6. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й междунар. Саратовской зимней школы. Саратов : Научная книга, 2020. С. 433–439. EDN: IFLQGK
7. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 319–324.EDN: JPPSUX
8. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
9. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1949. 580 с.
10. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 286–300. https://doi.org/10.1134/S0044466919020091
11. *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 444–456. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456
12. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238
13. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2021. № 4. С. 37–42. EDN: IUPUAQ
14. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 178–180. EDN: TZKVJG

15. *Рыхлов В. С.* Метод расходящихся рядов решения смешанной задачи для гиперболического уравнения // Сборник материалов международной конференции «XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2021). Симферополь : Полипринт, 2021. С. 22.
16. *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы (Саратов, 31 января – 4 февраля 2022 г.). Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. Вып. 21. С. 252–255. EDN: ICBZND
17. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара имени И. Г. Петровского. Москва : Изд-во Московского ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.

References

1. Tolstov G. P. On the mixed second derivative. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1949, vol. 24 (66), iss. 1, pp. 27–51 (in Russian).
2. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar Publ. Co. Part I, 1967. 144 p.; Part 2, 1968. 352 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1969. 528 p.).
3. Khromov A. P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, iss. 2, pp. 243–255. https://doi.org/10.1134/S0965542516020135
4. Khromov A. P. On classic solution of the problem for a homogeneous wave equation with fixed end-points and zero initial velocity. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 280–288 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288
5. Khromov A. P. Divergent series and functional equations related to geometric progression analogues. *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhdun. konf. : Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola "Pontryaginskie chteniya – XXX"* [Modern methods of the Theory of boundary value problems: Materials of the International conference Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin Readings – XXX"]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 2019, pp. 291–300 (in Russian). EDN: TXWNBY
6. Khromov A. P. Divergent series and Fourier method for wave equation. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*: Materials of the 20th International Saratov Winter School. Saratov, Nauchnaya kniga, 2020, pp. 433–439 (in Russian). EDN: IFLQGK
7. Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for wave equation. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022). Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 319–324 (in Russian). EDN: JPPSUX
8. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics that Have Applications to Technical Problems]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
9. Euler L. *Differentsial'noe ischislenie* [Differential Calculus]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949. 580 p. (in Russian).
10. Khromov A. P., Kornev V. V. Classical and generalized solutions of a mixed problem for a nonhomogeneous wave equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, iss. 2, pp. 275–289. https://doi.org/10.1134/S096554251902009X
11. Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A. Mixed problem for a homogeneous wave equation with a nonzero initial velocity and a summable potential. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp, 444–456 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456

12. Khromov A. P., Kornev V. V. Divergent series in the Fourier method for the wave equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, iss. 4, pp. 215–238 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238
13. Lomov I. S. Effective application of the Fourier technique for constructing a solution to a mixed problem for a telegraph equation. *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2021, vol. 45, iss. 4, pp. 168–173. https://doi.org/10.3103/S0278641921040038, EDN: IUPUAQ
14. Lomov I. S. Effectiv application of the Fourier method to solving a mixed problem for the telegraph equation. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022). Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 178–180 (in Russian). EDN: TZKVJG
15. Rykhlov V. S. Divergent series method for solving a mixed problem for a hyperbolic equation. *Sbornik materialov mezhdunarodnoj konferentsii "XXXII Krymskaya Osennyaya Matematicheskaya Shkola-simpozium po spektral'nym i evolyucionnym zadacham" (KROMSH-2021)* [Collection of Materials of the International Conference "XXXII Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems" (KROMSH-2021)]. Simferopol, Polyprint, 2021, pp. 22 (in Russian).
16. Rykhlov V. S. The solution of the initial boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*: Materials of the 21st International Saratov Winter School (Saratov, January 31 – February 4, 2022). Saratov, Saratov State University Publ., 2022, iss. 21, pp. 252–255 (in Russian). EDN: ICBZND
17. Shkalikov A. A. Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311–1342. https://doi.org/10.1007/BF01084754

Поступила в редакцию / Received 15.04.2022
Принята к публикации / Accepted 01.09.2022
Опубликована / Published 31.05.2023