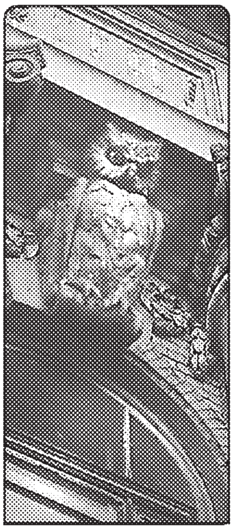

Научный отдел

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 4–14
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 4–14
https://mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-4-14
EDN: BELGZJ

Научная статья
УДК 517.2+519.853

Об одном следствии чебышевского альтернанса

С. И. Дудов, М. А. Осипцев✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и математической экономики, DudovSI@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0098-3652, SPIN: 9937-8404, AuthorID: 3409

Осипцев Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Osipcevm@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1051-0250, SPIN: 5249-2944, AuthorID: 13323

Аннотация. Рассматривается классическая задача наилучшего приближения непрерывной функции полиномом по чебышевской системе функций. Известно, что решение задачи характеризуется альтернансом. Кроме того, имеет место линейная функция роста отклонения целевой функции коэффициентов полинома от ее минимального значения относительно отклонения вектора коэффициентов от оптимального. С помощью средств выпуклого анализа получена формула точного коэффициента этого линейного роста. В отличие от полученных ранее, она выражена в конструктивной для реализации форме через значения функций чебышевской системы в точках, реализующих альтернанс.

Ключевые слова: наилучшее приближение, чебышевская система функций, альтернанс, константа сильной единственности, субдифференциал, острый минимум

Благодарности: Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за конструктивные замечания и М. В. Балашову за указанные на относящиеся к рассматриваемой теме работы.

Для цитирования: *Дудов С. И., Осипцев М. А.* Об одном следствии чебышевского альтернанса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 4–14. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-4-14, EDN: BELGZJ

Article

On one consequence of the Chebyshev alternance

S. I. Dudov, M. A. Osiptsev✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Sergei I. Dudov, DudovSI@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0098-3652, SPIN: 9937-8404, AuthorID: 3409
Mikhail A. Osiptsev, Osipcevm@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1051-0250, SPIN: 5249-2944, AuthorID: 13323

Abstract. The classical problem of the best approximation of a continuous function by a polynomial over a Chebyshev system of functions is considered. It is known that the solution of the problem is characterized by alternance. In addition, there is a linear growth function of the deviation of the target function of the coefficients of the polynomial from its minimum value with respect to the deviation of the vector of coefficients from the optimal one. In this article, the formula for the exact coefficient of this linear growth function is obtained by means of convex analysis. In contrast to those obtained earlier, it is expressed in a form constructive for realization through the values of the Chebyshev system functions at the points realizing alternance.
Keywords: best approximation, Chebyshev system of functions, alternance, strong uniqueness constant, subdifferential, sharp minimum
Acknowledgements: The authors express their deep gratitude to the reviewer for constructive comments and to M. V. Balashov for the works related to the topic under consideration.
For citation: Dudov S. I., Osiptsev M. A. On one consequence of the Chebyshev alternance. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 4–14 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-4-14, EDN: BELGZJ

Введение

В работе [1] получен результат, количественно характеризующий единственность элемента наилучшего приближения в общей задаче равномерного на компакте приближения непрерывной функции конечномерным чебышевским подпространством. Для его формулировки примем обозначения.

Пусть T — компакт, $C(T)$ — пространство непрерывных на T вещественных функций с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{t\in T}|f(t)|$. Напомним, что подпространство $\Psi \subset C(T)$ называется чебышевским, если для любой функции $f \in C(T)$ существует и единствен элемент наилучшего приближения $\psi^* \in \Psi$, т. е. на котором $\|f-\psi^*\|_C = \min\limits_{\psi\in\Psi}\|f-\psi\|$.

Интересующий нас результат можно выразить в следующем виде. Пусть $\Psi \subset C(T)$ — конечномерное чебышевское подпространство. Тогда для любой функции $f \in C(T)$ элемент наилучшего приближения $\psi^* \in \Psi$ является единственным, причем существует такая константа $k > 0$, зависящая от f и Ψ, что

$$\|f-\psi\|_C - \|f-\psi^*\|_C \geqslant k\|\psi-\psi^*\|_C, \quad \forall\, \psi \in \Psi. \tag{1}$$

Это свойство стали называть сильной единственностью решения. А наибольшую константу $k = k(f)$, для которой выполняется (1), называют константой сильной единственности, соответствующей функции f. Для произвольного конечномерного чебышевского пространства Ψ и $f \in C(T)\setminus\Psi$ получена формула [2, 3]

$$k(f) = \min_{\substack{\psi\in\Psi\\ \|\psi\|_C=1}} \max_{t\in H(f)} \sigma_f(t)\psi(t), \tag{2}$$

где $H(f) = \{t \in T : |f(t)-\psi^*(t)| = \|f-\psi^*\|_C\}$, $\sigma_f(t) = \operatorname{sign}(f(t)-\psi^*(t))$.

Однако, как отмечалось и подробно анализировалось в [4], этот эффект сильной единственности элемента наилучшего приближения в неявном виде уже присутствовал в статье Н. Г. Чеботарева [5] (см. также [6]), опубликованной на 20 лет ранее [1]. Обратимся к ней.

В ней рассматривается минимаксная задача

$$\Phi(A) = \max_{x \in X} f(x, A) \to \inf_{A \in D}, \tag{3}$$

где X — компакт в $\mathbb{R}^k$, D — область в $\mathbb{R}^n$, а функция $f(x, A)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по компонентам вектора A на $X \times D$. Основным результатом [5] являлось достаточное условие локального по направлениям строгого минимума функции $\Phi(A)$ в точке A_0, т. е. когда неравенство $\Phi(A) > \Phi(A_0)$ выполняется на пересечении прямой, проходящей через точку A_0, с некоторой ее окрестностью. Автор [4] указывает на то, что используя это достаточное условие Н. Г. Чеботарева можно:

1) доказать существование $\beta > 0$ и $\epsilon > 0$ таких, что

$$\Phi(A) > \Phi(A_0) + \beta \|A - A_0\|, \quad \forall\ A \in D, \quad \|A - A_0\| < \epsilon, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^n$;

2) доказать, что при дополнительном предположении выпуклости функционала $\Phi(A)$ на $\mathbb{R}^n$ и $D = \mathbb{R}^n$ имеет место

$$\Phi(A) \geqslant \Phi(A_0) + \lambda \|A - A_0\|, \quad \forall\ A \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где

$$\lambda = \inf_{\|g\|=1} \max_{x \in R(A_0)} \langle f'_A(x, A_0), \quad g\rangle > 0, \tag{6}$$
$$R(A) = \{x \in X : f(x, A) = \Phi(A)\},$$

а $f'_A(x, A)$ — градиент функции $f(x, A)$ по A;

3) интерпретируя задачу из [1] как задачу вида (3), получить оценку (1), (2).

Отметим также, что сам Н. Г. Чеботарев демонстрировал выполняемость своего достаточного условия на примере задачи приближения непрерывной функции алгебраическими полиномами заданной степени.

Тем не менее формально неравенства вида (1), (4) или (5) в работе Н. Г. Чеботарева отсутствуют.

В настоящей статье мы рассматриваем задачу о равномерном на компакте наилучшем приближении непрерывной функции обобщенным полиномом по заданной чебышевской системе функций. С помощью средств выпуклого анализа дадим строгое доказательство сильной единственности элемента наилучшего приближения в форме (5) с получением точной константы сильной единственности. Она будет выражена в конструктивной для реализации формуле через значения функций, образующих чебышевскую систему, в точках реализации альтернанса.

1. Вспомогательный факт

В основе получения искомого коэффициента скорости роста лежит излагаемый ниже вспомогательный факт.

Примем следующие обозначения: $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ — система непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций; $\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}}$ — система точек (узлов) на $\mathbb{R}$, $0_n = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение; $B(0_n, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в 0_n; $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$; $P_n(A, t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(t)$ — обобщенный полином по системе $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$; $co\,G$ — выпуклая оболочка множества G;

$$D = \begin{pmatrix} -\varphi_0(t_0) & \varphi_0(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_0(t_{n+1}) \\ -\varphi_1(t_0) & \varphi_1(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_1(t_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varphi_n(t_0) & \varphi_n(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_n(t_{n+1}) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Если* $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ *чебышевская система функций на отрезке* $[a,b]$ *и* $\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}} \subset [a,b]$, *причем* $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$, *то:*

1) матрица D *невырождена и обратная к ней матрица* $C = (c_{i,j})_{i,j=\overline{1,n+2}}$ *имеет последний столбец с положительными элементами* $c_{k,n+2} > 0$, $k = \overline{1,n+2}$*;*

2) выполняется включение

$$B(0_{n+1}, \delta_0) \subset co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) :\ j = \overline{0,n+1}\}, \tag{7}$$

где

$$\delta_0 = \min_{k=\overline{1,n+2}} \frac{c_{k,n+2}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n+1} c_{k,j}^2}}. \tag{8}$$

Доказательство. 1. Раскладывая определитель матрицы D по элементам последней строки, мы получаем $n+2$ слагаемых одного знака знака, поскольку $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ — чебышевская система [7, гл. 1, § 1].

2. Теперь покажем, что

$$0_{n+1} \in co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) :\ j = \overline{0,n+1}\}. \tag{9}$$

Предположим противное. Тогда, по теореме отделимости (см., например, [8]), существует вектор $A \in \mathbb{R}^{n+1}$, $A \neq 0_{n+1}$, для которого

$$\langle A, v\rangle < 0, \quad \forall\ v \in co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) :\ j = \overline{0,n+1}\}.$$

Следовательно, и

$$\langle A, (-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j))\rangle = (-1)^j P_n(A, t_j) < 0, \quad j = \overline{0,n+1}.$$

Таким образом, полином $P_n(A,t)$ последовательно $n+1$ раз меняет знак и $n+1$ раз принимает нулевые значения на $[t_0, t_{n+1}] \subset [a,b]$. Это противоречит тому, что $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ чебышевская система.

3. Теперь покажем, что все элементы последнего столбца матрицы $C = D^{-1}$ положительны.

Из (9), в соответствии с определением выпуклой оболочки, следует существование набора чисел $\{\alpha_j\}_{j=\overline{0,n+1}} :\ \alpha_j \geqslant 0$, для которого

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n+1} \alpha_j (-1)^j (\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) = 0_{n+1}, \\ \sum\limits_{j=0}^{n+1} \alpha_j = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Как и в [9, гл. 6, § 8, п. 2], покажем, что все $\alpha_j > 0$. Предположим, например, что $\alpha_{n+1} = 0$. Тогда, с одной стороны, из (10) вытекает

$$\sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (-1)^j \langle A, (\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j))\rangle = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (-1)^j P_n(A, t_j) = 0 \tag{11}$$

для любого вектора коэффициентов $A \in \mathbb{R}^{n+1}$.

С другой стороны, поскольку $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ — чебышевская система, то в линейной по A системе уравнений

$$P_n(A, t_j) = y_j, \quad j = \overline{0, n},$$

определитель отличен от нуля [10, гл. 1, § 2, теорема 1], и относительно A система имеет единственное решение. Тогда возьмем в качестве $y_j = \alpha_j(-1)^j$, $j = \overline{0, n}$ и подставим в (11). Получим $\sum\limits_{j=0}^{n+1} \alpha_j^2 = 0$, что противоречит (10).

Итак, мы доказали, что решение системы (10)

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) > 0_{n+2}. \tag{12}$$

Но система (10) может быть записана в виде

$$D\alpha = \begin{pmatrix} 0_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Поэтому, учитывая невырожденность матрицы D, из (12), (13) получаем

$$\alpha = C \begin{pmatrix} 0_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \{c_{1,n+2}, c_{2,n+2}, \dots, c_{n+2,n+2}\}' > 0_{n+2}.$$

4. Рассмотрим уравнение

$$D\alpha = \begin{pmatrix} \delta b \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1}) \in B(0_{n+1}, 1)$. Его решение можно записать в виде $\alpha(\delta) = (\alpha_0(\delta), \alpha_1(\delta), \dots, \alpha_{n+1}(\delta))$:

$$\alpha_k(\delta) = \delta \sum_{j=1}^{n+1} c_{k+1,j} b_j + c_{k+1,n+2}, \quad k = \overline{0, n+1}.$$

Отсюда, учитывая

$$\min_{b \in B(0_{n+1},1)} \sum_{j=1}^{n+1} c_{k+1,j} b_j = -\left(\sum_{j=1}^{n+1} c_{k+1,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

следует $\alpha(\delta) \geqslant 0_{n+2}$ при $\delta \in (0, \delta_0]$. Это и означает (ср. (10) и (13)), что любой элемент из $B(0_{n+1}, \delta_0)$ представим в виде выпуклой комбинации элементов множества $\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}$, т.е. включение (7) тем самым доказано. □

Замечание 1. Из доказательства, по сути, следует, что определенное формулой (8) значение δ_0 есть радиус наибольшего евклидова шара с центром в 0_{n+1}, вложенного в многогранник $M = co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}$.

2. Основной результат

Пусть $f(t)$ — непрерывная на множестве $T \subset \mathbb{R}$ функция, $|T| \geqslant n + 2$. Рассматриваем задачу

$$\Phi(A) \equiv \max_{t \in T} |f(t) - P_n(A, t)| \to \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \tag{15}$$

равномерного на T приближения функции $f(t)$ обобщенным полиномом. Далее считаем, что $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ чебышевская на T система функций.

Теорема 1. *Пусть на векторе коэффициентов* A^* *функция* $\Phi(A)$ *достигает минимума на* $\mathbb{R}^{n+1}$, *и при этом альтернанс реализуется на системе точек* $\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \subset T : t_0 < < t_1 < \ldots < t_{n+1}$:

$$\Phi(A^*) = |f(t_j) - P_n(A^*, t_j)|, \quad j = \overline{0, n+1},$$
$$f(t_j) - P_n(A^*, t_j) = P_n(A^*, t_{j+1}) - f(t_{j+1}), \quad j = \overline{0, n},$$

и, кроме того, $[t_0, t_{n+1}] \subset T$. *Тогда для любого* $A \in \mathbb{R}^{n+1}$ *выполняется неравенство*

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geqslant \delta_0 \|A - A^*\|, \tag{16}$$

где $\delta_0 > 0$ *определяется формулой* (8).

Доказательство. Используя известный факт из субдифференциального исчисления для выпуклых функций (см. [8, гл. 2, § 3, теорема 3.14]), формулу субдифференциала выпуклой на $\mathbb{R}^{n+1}$ функции $\Phi(A)$ можно записать в форме

$$\partial\Phi(A) = co\{\xi(t)(\phi_0(t), \ldots, \phi_n(t)) : t \in R(A)\}. \tag{17}$$

Здесь $R(A) = \{t \in T : \Phi(A) = |f(t) - P_n(A, t)|\}$, а функция $\xi(\cdot)$ определена на $R(A)$ так:

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi(A) = P_n(A, t) - f(t), \\ -1, & \text{если } \Phi(A) = f(t) - P_n(A, t). \end{cases}$$

Поскольку по условию точки $\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}}$ реализуют альтернанс для вектора коэффициентов A^*, то

$$\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \subset R(A^*), \quad \xi(t_j) = -\xi(t_{j+1}), \quad j = \overline{0, n}.$$

Это, учитывая (17) и считая для определенности $\xi(t_0) = 1$, означает

$$co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \ldots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\} \subset \partial\Phi(A^*).$$

Отсюда, используя лемму, получаем

$$B(0_{n+1}, \delta_0) \subset \partial\Phi(A^*). \tag{18}$$

В соответствии с определением субдифференциала (см. [8, гл. 2]) выполняется неравенство

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geqslant \langle v, A - A^* \rangle, \quad \forall\, v \in \partial\Phi(A^*), \quad A \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{19}$$

Теперь, используя (18) и подставляя в (19) в качестве

$$v = \delta_0 \frac{A - A^*}{\|A - A^*\|} \in B(0_{n+1}, \delta_0),$$

получаем оценку (16) роста функции $\Phi(A)$ в зависимости от отклонения A от A^*. □

Замечание 2. Оценка (16) является точной в том смысле, что заменить в ней δ_0 на некоторое большее значение нельзя.

Действительно, как уже отмечалось (замечание 1), шар $B(0_{n+1}, \delta_0)$ является наибольшим из шаров с центром в 0_{n+1} вложенных в многогранник $M = co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \ldots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}$. Если $R(A^*) = \{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}}$, то $\partial\Phi(A^*) = M$. Пусть v_0 — точка касания этого шара с гранью этого многогранника, а значит, $\delta_0 = \|v_0\|$. Из этого следует (см. [8, гл. 2, § 3, теорема 3.5])

$$\Phi'(A^*, v_0) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\Phi(A^* + \alpha v_0) - \Phi(A^*)}{\alpha} = \max_{v \in \partial F(A^*)} \langle v, v_0 \rangle = \|v_0\|^2. \tag{20}$$

С другой стороны, если предположить, что существует $\delta_1 > \delta_0$, для которого

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geqslant \delta_1 \|A - A^*\|, \quad \forall\ A \in \mathbb{R}^{n+1},$$

то для $A = A^* + \alpha v_0$ имеем

$$\Phi(A^* + \alpha v_0) - \Phi(A^*) \geqslant \alpha \delta_1 \|v_0\|.$$

Отсюда следует $\Phi'(A^*, v_0) \geqslant \delta_1 \|v_0\|$, что противоречит (20).

Кроме того, неравенство (16) говорит об «остром» минимуме функции $\Phi(\cdot)$ в точке A^* (см. [11]).

Замечание 3. Одна из эквивалентных форм записи достаточного условия локального решения задачи (3) у Н. Г. Чеботарева выглядит как принадлежность нуля внутренности выпуклой оболочки градиентов функции $f(x, A)$ по A для $x \in R(A)$. Ввиду вышеизложенного лемма отвечает на вопрос: с какой именно по размеру окрестности нуль содержится в этой выпуклой оболочке для задачи (15).

Замечание 4. Для применения численных методов решения к задаче (15) интерес представляет следующее.

Следствие. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда справедлива следующая оценка для производной функции $\Phi(A)$ по направлению наискорейшего спуска в любой точке $A \in \mathbb{R}^{n+1}$, $A \neq A^*$,*

$$\min_{\substack{g \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \|g\|=1}} \Phi'(A, g) \leqslant -\delta_0.$$

Доказательство. В силу выпуклости $\Phi(A)$ имеем

$$\Phi((1-\alpha)A + \alpha A^*) \leqslant (1-\alpha)\Phi(A) + \alpha \Phi(A^*), \quad \forall\ \alpha \in [0, 1].$$

Перепишем неравенство в форме

$$\Phi(A + \alpha(A^* - A)) - \Phi(A) \leqslant \alpha(\Phi(A^*) - \Phi(A)).$$

Отсюда, используя неравенство (16), получаем $\Phi'(A, g) \leqslant -\delta_0$ для $g = \dfrac{A^* - A}{\|A^* - A\|}$. □

3. Сравнение оценок

3.1. Очевидно, задача (15) является частным случаем задачи (3). Приведем сравнение коэффициентов λ из (6) и δ_0 из (16) (см. (8)).

Поскольку градиент $f'_A(x, A^*)$ в задаче (3) для задачи (15) при замене x на t и для $t \in R(A^*)$ примет вид $f'_A(t, A^*) = \xi(t)(\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t))$, то, учитывая (17), имеем

$$\max_{t \in R(A^*)} \langle f'_A(t, A^*), g\rangle = \max_{v \in co\{f'_A(t, A^*) : t \in R(A^*)\}} \langle v, g\rangle = \max_{v \in \partial\Phi(A^*)} \langle v, g\rangle.$$

Следовательно, для задачи (15) формула (6) коэффициента λ принимает вид

$$\lambda = \inf_{\|g\|=1} \max_{v \in \partial\Phi(A^*)} \langle v, g\rangle. \tag{21}$$

В [12, гл. 1, § 6] фактически доказано, что если $\delta > 0$ и D — некоторый выпуклый компакт из $\mathbb{R}^{n+1}$, то эквивалентны соотношения

$$B(0_{n+1}, \delta) \subset D, \tag{22}$$

$$\max_{v \in D} \langle v, g\rangle \geqslant \delta, \quad \forall\ g \in \mathbb{R}^{n+1} : \|g\| = 1. \tag{23}$$

Как следует из леммы, для системы точек $\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \subset T$, на которой реализуется альтернанс, выполняется

$$\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \subset R(A^*),$$
$$B(0_{n+1}, \delta_0) \subset co\{\xi(t)(\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t)) : t \in \{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}}\} \subset \partial\Phi(A^*).$$

Отсюда, учитывая (21), эквивалентность соотношений (22) и (23), получаем $\lambda \geqslant \delta_0$. Равенство $\lambda = \delta_0$, очевидно, будет выполняться, если $R(A^*) = \{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}}$.

3.2. Проведем сравнение оценок линейного роста приращения целевой функции (1) и (16) на следующем примере. Пусть $f(t) = t^2$ — приближаемая функция на $T = [-1,1]$, $n = 1$, $\{\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t\}$ — чебышевская на T система функций, $P_1(A,t) = a_0 + a_1 t$, $A = (a_0, a_1) \subset \mathbb{R}^2$. Рассматриваем задачу

$$\Phi(A) \equiv \max_{t\in[-1,1]} |t^2 - a_0 - a_1 t| \to \min_{A\in\mathbb{R}^2}.$$

1. Нетрудно убедиться, что оптимальным является вектор коэффициентов $A^* = (0.5, 0)$, т.е. $a_0^* = 0.5$, $a_1^* = 0$. При этом $R(A^*) = \{t_0, t_1, t_2\}$, где $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Для $f(t,A) = |t^2 - a_0 - a_1 t|$ получаем $f'_A(t_0, A^*) = (-1, 1)$, $f'_A(t_1, A^*) = (1, 0)$, $f'_A(t_2, A^*) = (-1,-1)$, и тогда $\partial\Phi(A^*) = co\{(-1,1), (1,0), (-1,-1)\}$. Следовательно, максимальный радиус круга, содержащегося в $\partial\Phi(A^*)$ и с центром в 0_2, равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом, $\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Теперь найдем $k(f)$ по формуле (2).

Нтерудно видеть, что

$$\{A : \max_{t\in[-1,1]} |a_0 + a_1 t| = 1\} = \{(a_0, a_1) : a_0 \in [-1,1], a_1 = -1 + |a_0| \text{ или } a_1 = 1 - |a_0|\}.$$

Тогда, учитывая $\sigma_f(t_i) = (-1)^{i+1}$, $i = 0, 1, 2$, получаем

$$k(f) = \min_{a_0\in[-1,1]} \max_{i=0,1,2} \{(-1)^{i+1}(a_0 + (|a_0| - 1)t_i), (-1)^{i+1}(a_0 + (1 - |a_0|)t_i)\} =$$
$$= \min_{a_0\in[-1,1]} \max\{a_0, 1 - a_0 - |a_0|, -1 - a_0 + |a_0|\} = \frac{1}{3}.$$

3. Таким образом, в соответствии с (2) и (16) имеем

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geqslant \frac{1}{3} \max_{t\in[-1,1]} |a_0 - \frac{1}{2} + a_1 t| \equiv f_1(A), \tag{24}$$

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}((a_0 - \frac{1}{2})^2 + a_1^2)^{\frac{1}{2}} \equiv f_2(A). \tag{25}$$

Для сравнения $f_1(A)$ и $f_2(A)$ рассмотрим некоторые варианты.

Вариант 1. Для $A_1(\alpha) = (0.5, \alpha)$, $\alpha > 0$ имеем

$$f_1(A_1(\alpha)) = \frac{\alpha}{3} < f_2(A_1(\alpha)) = \frac{\alpha}{\sqrt{5}},$$
$$\Phi(A_1(\alpha)) - \Phi(A^*) = \max_{t\in[-1,1]} |t^2 - 0.5 - \alpha t| - 0.5 = \alpha \text{ при } \alpha \in [0,2].$$

Вариант 2. Для $A_2(\alpha) = (0.5 + \alpha, \alpha)$, $\alpha > 0$ получаем

$$f_1(A_2(\alpha)) = \frac{1}{3} \max_{t\in[-1,1]} |\alpha + \alpha t| = \frac{2}{3}\alpha, f_2(A_2(\alpha)) = \sqrt{\frac{2}{5}}\alpha.$$

При этом для $\alpha \in [0,2]$

$$\Phi(A_2(\alpha)) - \Phi(A^*) = \max_{t\in[-1,1]} |t^2 - 0.5 - \alpha - \alpha t| - 0.5 = \max\{|2\alpha - 0.5|, |\alpha + \frac{\alpha^2}{4} + 0.5|\} - 0.5 > \alpha.$$

Таким образом, при $\alpha \in [0, 2]$ теперь $f_1(A_2(\alpha)) > f_2(A_2(\alpha))$, а неравенства (24) и (25) выполняются так же строго, как и в первом варианте.

Вариант 3. Для $A_3(\alpha) = (0.5 + \alpha, 2\alpha)$ имеем

$$f_1(A_3(\alpha)) = \frac{1}{3} \max_{t\in[-1,1]} |\alpha + 2\alpha t| = \alpha, f_2(A_3(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2 + 4\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha.$$

При этом для $\alpha \in [0, 1]$

$$\Phi(A_3(\alpha)) - \Phi(A^*) = \max_{t\in[-1,1]} |t^2 - 0.5 - \alpha - 2\alpha t| - 0.5 = \max_{t=-1,1,\alpha} |t^2 - 0.5 - \alpha - 2\alpha t| - 0.5 =$$
$$= \max\{|0.5 + \alpha|, |0.5 - 3\alpha|, |0.5 + \alpha + \alpha^2|\} - 0.5.$$

Итак, в этом случае $f_1(A_3(\alpha)) = f_2(A_3(\alpha)) = \alpha$ и при $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$ $\Phi(A_3(\alpha)) - \Phi(A^*) = \alpha + \alpha^2$, т.е. оценки (24) и (25) становятся точными при малом $\alpha > 0$.

4. Об оценке снизу коэффициента роста

Для применения численных методов решения и оценки скорости их сходимости полезно располагать оценкой снизу для δ_0. Эта оценка будет зависеть как от используемой чебышевской системы функций $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$, так и от системы узлов, на которой реализуется альтернанс. При получении этой оценки можно иметь в виду следующие обстоятельства. Обозначим через

$$D(\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}, \{t_j\}_{j=\overline{0,n}}) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t_0) & \dots & \varphi_0(t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(t_0) & \dots & \varphi_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

В [10, гл. 1, § 2, следствие теоремы 1] доказан следующий факт.

Предложение 1. *Если система функций $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ является чебышевской на $[a, b]$ и $\{t_j\}_{j=\overline{0,n}}$ — система различных точек из $[a, b]$, расстояние между которыми не меньше некоторого $\Delta > 0$, то*

$$|D(\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}, \{t_j\}_{j=\overline{0,n}})| \geqslant r(\Delta) > 0,$$

где $r(\Delta)$ не зависит от системы точек $\{t_j\}_{j=\overline{0,n}}$ из $[a, b]$.

Из этого предложения, считая $T \subset [a, b]$, следует оценка для элементов последнего столбца матрицы $C = D^{-1}$.

$$c_{k,n+2} = \frac{|D(\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}, \quad \{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \setminus t_{k-1})|}{|D|} \geqslant \frac{r(\Delta)}{|D|}. \tag{26}$$

Для оценки знаменателя в формуле (8) имеем

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_{k,j}^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1} D_{jk}^2}{|D|^2}, \tag{27}$$

где D_{jk} — алгебраическое дополнение элемента $d_{k,j}$ матрицы D. Эти дополнения ограничены на $[a, b]$, в силу непрерывности функций образующих чебышевскую систему. Используя специфику этих функций, можно получить независимую от $\{t_j\}_{j=\overline{0,n}} \subset [a, b]$ оценку

$$\sum_{j=1}^{n+1} D_{jk}^2 \leqslant M^2. \tag{28}$$

Таким образом, из (27), (28) имеем
$$\delta_0 \geqslant \frac{r(\Delta)}{M}.$$

Приведем примеры реализации формулы (8) для «классической» чебышевской системы:
1) $n = 1$, $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=0,1} = \{1, t\}$, на системе узлов $\{t_0, t_1, t_2\}$
$$\delta_0 = \min\left\{\frac{t_2 - t_1}{\sqrt{4 + (t_1 + t_2)^2}}, 1, \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{4 + (t_0 + t_1)^2}}\right\};$$

2) $n = 2$, $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=0,1,2} = \{1, t, t^2\}$, на системе узлов $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$
$$\delta_0 = \min\left\{\frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}{\sqrt{4(t_1 - t_3)^2 + 4\left(t_1^2 - t_3^2\right)^2 + (t_1 - t_3)^2 (t_2 (t_3 - t_2) + t_1 (t_2 + t_3))^2}},\right.$$
$$\frac{(t_2 - t_0)(t_3 - t_0)(t_3 - t_2)}{\sqrt{4(t_0 - t_2)^2 + 4\left(t_0^2 - t_2^2\right)^2 + \left(t_2 t_3 (t_3 - t_2) + t_0^2 (t_2 + t_3) - t_0\left(t_2^2 + t_3^2\right)\right)^2}},$$
$$\frac{(t_1 - t_0)(t_3 - t_1)(t_3 - t_0)}{\sqrt{4(t_1 - t_3)^2 + 4\left(t_1^2 - t_3^2\right)^2 + (t_1 - t_3)^2\left(-t_0^2 + t_1 t_3 + t_0 (t_1 + t_3)\right)^2}},$$
$$\left.\frac{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)}{\sqrt{4(t_0 - t_2)^2 + 4\left(t_0^2 - t_2^2\right)^2 + (t_0 - t_2)^2 (t_1 (-t_1 + t_2) + t_0 (t_1 + t_2))^2}}\right\}.$$

В заключение отметим, что альтернанс (в некотором обобщенном виде) имеет место в задачах по полиномиальным оценкам и приближении сегментных функций (см. [13–16]), где также могут быть получены оценки роста целевой функции, подобные оценке (16).

Список литературы

1. *Newman D. J., Shapiro H. S.* Some theorems on Cebysev approximation // Duke Mathematical Journal. 1963. Vol. 30, iss. 4. P. 673–681. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-63-03071-0
2. *Cline A. K.* Lipschitz conditions on uniform approximation operators // Journal of Approximation Theory. 1973. Vol. 8, iss. 2. P. 160–172. https://doi.org/10.1016/0021-9045(73)90025-7
3. *Bartelt M.* On Lipschitz conditions, strong unicity and a Theorem of A. K. Cline // Journal of Approximation Theory. 1975. Vol. 14, iss. 4. P. 245–250. https://doi.org/10.1016/0021-9045(75)90072-6
4. *Маринов А. В.* О равномерных константах сильной единственности в чебышевских приближениях и основополагающих результатах Н. Г. Чеботарева // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2011. Т. 75, вып. 3. С. 161–188. https://doi.org/10.4213/im4255
5. *Чеботарев Н. Г.* Об одном критерии минимакса // Доклады Академии наук СССР. 1943. Т. 39, № 9. С. 373–376.
6. *Чеботарев Н. Г.* Собрание сочинений : в 2 т. Т. 2. Москва : Изд-во Академии наук СССР, 1949. 588 с.
7. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. Москва : Наука, 1976. 568 с.
8. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. Москва : Наука, 1980. 320 с.
9. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. Москва : Наука, 1972. 368 с.
10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Москва : Наука, 1977. 510 с.
11. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. Москва : Наука, 1983. 383 с.
12. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. Москва : Наука, 1981. 384 с.
13. *Выгодчикова И. Ю., Дудов С. И., Сорина Е. В.* Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.

14. *Дудов С. И., Сорина Е. В.* Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой фиксированной ширины // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 11. С. 1981–1994.
15. *Дудов С. И., Сорина Е. В.* Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 5. С. 44–71.
16. *Волосивец С. С., Дудов С. И., Прохоров Д. В., Хромова Г. В.* Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2016. 296 с. EDN: XSCTLV

References

1. Newman D. J., Shapiro H. S. Some theorems on Cebysev approximation. *Duke Mathematical Journal*, 1963, vol. 30, iss. 4, pp. 673–681. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-63-03071-0
2. Cline A. K. Lipschitz conditions on uniform approximation operators. *Journal of Approximation Theory*, 1973, vol. 8, iss. 2, pp. 160–172. https://doi.org/10.1016/0021-9045(73)90025-7
3. Bartelt M. On Lipschitz conditions, strong unicity and a theorem of A. K. Cline. *Journal of Approximation Theory*, 1975, vol. 14, iss. 4, pp. 245–250. https://doi.org/10.1016/0021-9045(75)90072-6
4. Marinov A. V. On uniform constants of strong uniqueness in Chebyshev approximations and fundamental results of N. G. Chebotarev. *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 603–630. https://doi.org/10.1070/IM2011v075n03ABEH002546
5. Cebotarev N. G. On a general criterion of the minimax. *Doklady Academy of Science URSS*, 1943, vol. 39, iss. 9, pp. 373–376 (in Russian).
6. Chebotarev N. G. *Sobranie socineniy* [Collected works]. Vol. 2. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1949. 588 p. (in Russian).
7. Karlin S., Studden W. J. *Tchebycheff systems: With applications in analysis and statistics*. Interscience Publishers, 1966. 586 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 568 p.).
8. Pshenichnyy B. N. *Vypuklyy analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow, Nauka, 1980. 320 p. (in Russian).
9. Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. Introduction to minimax. New York, Dover Publications, 1990. 307 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1972. 368 p.).
10. Dzyadyk V. K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funkciy polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow, Nauka, 1977. 510 p. (in Russian).
11. Polyak B. T. *Introduction to optimization*. New York, Optimization Software, Inc., Publications Division, 1987. 438 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1983. 383 p.).
12. Demyanov V. F., Vasiliev L. V. *Nondifferentiable optimization*. New York, Springer-Optimization Software, 1985. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1981. 384 p.).
13. Vygodchikova I. Yu., Dudov S. I., Sorina E. V. External estimation of a segment function by a polynomial strip. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, iss. 7, pp. 1119–1127. https://doi.org/10.1134/S0965542509070057
14. Dudov S. I., Sorina E. V. Uniform estimation of a segment function by a polynomial strip of fixed width. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, iss. 11, pp. 1864–1877. https://doi.org/10.1134/S0965542511110066
15. Dudov S. I., Sorina E. V. Uniform estimate for a segment function in terms of a polynomial strip. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2013, vol. 24, iss. 5, pp. 723–742. https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2013-01262-3
16. Volosivets S. S., Dudov S. I., Prokhorov D. V., Khromova G. V. *Novye metody approksimatsii i optimizatsii v zadachakh deystvitel'nogo i kompleksnogo analiza* [New methods of approximation and optimization in the problems of real and complex analysis]. Saratov, Saratov State University Publ., 2016. 296 p. (in Russian). EDN: XSCTLV

Поступила в редакцию / Received 23.01.2023
Принята к публикации / Accepted 02.09.2024
Опубликована / Published 28.02.2025