Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 15–23
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 15–23
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-15-23, EDN: CCBEOV

Научная статья
УДК 512.541

Хопфовы аддитивные группы колец

Е. В. Кайгородов

Горно-Алтайский государственный университет, Россия, 649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1

Кайгородов Евгений Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, заведующий научно-исследовательской лабораторией алгебры и математических методов в естественных науках, gazetaintegral@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-5172-5915, SPIN: 1353-4138, AuthorID: 762359

Аннотация. Группа называется хопфовой, если она не изоморфна никакой своей собственной фактор-группе, или любой ее эпиморфизм на себя является изоморфизмом, т. е. автоморфизмом. Это свойство было впервые доказано швейцарским математиком Х. Хопфом для фундаментальных групп римановых поверхностей. Результаты настоящей работы концентрируются вокруг проблемы исследования общих свойств хопфовых абелевых групп и описания хопфовых групп в некоторых классах абелевых групп. Среди вопросов, связанных с хопфовыми абелевыми группами, важное место занимает вопрос об изучении свойства хопфовости в таком специфическом классе абелевых групп, как аддитивные группы колец. Аддитивные группы колец — одна из линий, связывающих теорию абелевых групп с теорией колец. По методам исследования и характеру результатов это новое направление, возникшее в середине прошлого века, традиционно относят к теории абелевых групп. При рассмотрении аддитивных групп конкретных классов колец возникают интересные примеры хопфовых абелевых групп. В работе изучается свойство хопфовости в аддитивных группах E-колец (называющихся также E-группами) и артиновых колец. Доказывается, что аддитивная группа E-кольца является хопфовой, а также дается полное описание строения хопфовых аддитивных групп артиновых колец.

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, аддитивная группа кольца, E-кольцо, артиново кольцо

Для цитирования: *Кайгородов Е. В.* Хопфовы аддитивные группы колец // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 15–23. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-15-23, EDN: CCBEOV

Article

Hopfian additive groups of rings

E. V. Kaigorodov

Gorno-Altaisk State University, 1 Lenkin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia

Evgeniy V. Kaigorodov, gazetaintegral@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-5172-5915, SPIN: 1353-4138, AuthorID: 762359

Abstract. A group is called Hopfian if it is not isomorphic to any of its proper factor groups, or, equivalently, any of its epimorphisms on itself is an isomorphism, i.e., an automorphism. This property was first proved by the Swiss mathematician H. Hopf for fundamental groups of Riemann surfaces. The results of the present paper concentrate around the problem of investigating general properties of Hopfian abelian groups and describing Hopfian groups in certain classes of abelian groups. Among the questions relating to Hopfian abelian groups, the study of the hopficity property in such a specific class of abelian groups as additive groups of rings occupies an important place. Additive groups of rings are one of the directions of research connecting the theory of abelian groups with the theory of rings. With regards to the methods of investigation and the nature of the results, this newly emerged direction, which appeared in the middle of the last century, is traditionally referred to the theory of abelian groups. When considering additive groups of particular classes of rings, some interesting examples of Hopfian abelian groups arise. The paper studies the hopficity in additive groups of E-rings (also called E-groups) and artinian rings. The work, in particular, proves that the additive group of an E-ring is Hopfian, and also gives a full description of how Hopfian additive groups of artinian rings are structured.

Keywords: abelian group, Hopfian group, additive group of ring, E-ring, artinian ring

For citation: Kaigorodov E. V. Hopfian additive groups of rings. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 15–23 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-15-23, EDN: CCBEOV

Введение

Вопрос о существовании групп с конечным числом образующих, изоморфных какой-нибудь своей собственной факторгруппе, поставленный швейцарским математиком Хайнцем Хопфом в 1932 г., носит ныне название *проблемы Хопфа* [1]. Чуть позже группы, удовлетворяющие противоположному условию (т. е. не изоморфные никакой собственной факторгруппе) стали называться *хопфовыми*. Прошедшие девяносто лет породили множество связанных с проблемой Хопфа вопросов и распространили ее на прочие известные алгебраические системы. Нельзя не отметить, что арсенал последних в настоящее время постоянно расширяется: иные зарождаются в самой алгебре, а некоторые появляются в других разделах математики, например, в связи с потребностями геометрии, математической логики, дискретной математики. Часто новые типы алгебраических систем приходят из физики, химии, криптографии.

На наш взгляд, именно актуальные проблемы криптографии побуждают сейчас специалистов задумываться над конструированием новых алгебраических систем с заданными свойствами, на основе которых будут разработаны криптосистемы для постквантовой криптографии. Так, в декабре 2022 г. группа китайских ученых нашла способ [2] взломать 2048-битный ключ криптосистемы RSA, используя квантовый компьютер всего с 372 кубитами. Это обстоятельство дает мощный толчок к ускорению алгебраических исследований в области постквантовой криптографии: крайне необходимо, чтобы таковая была построена и уверенно получала развитие к моменту квантового взлома. Поэтому изучение алгебраических систем, их свойств и отображений в настоящее время приобретает значительную важность.

Хопфовость представляет собой довольно экзотическое свойство алгебраической системы, которое в определенном смысле приближает ее к конечной. Следуя Курошу [1] и Гретцеру [3], можно сказать, что хопфовость является некоторым обобщением конечности. Исследования, посвященные хопфовым алгебраическим системам и другим, граничным с хопфовостью, свойствам алгебраических систем, весьма многочисленны и содержательны. Однако, хопфовы абелевы группы представлены в обозримой литературе слабо. Изучением таких групп занимались Баумслаг [4–6], Корнер [7], Ирвин и Такаши [8, 9], Голдсмит и Гонг [10–13], Паолини и Шелах [14].

Настоящая работа продолжает исследования автора по хопфовым абелевым группам [15, 16]. Все обозначения и терминология в тексте работы стандартны и согласуются с [17, 18]. Всюду далее слово «группа» означает аддитивно записанную абелеву группу. Буква p обозначает простое число. Используем символ $\mathbb{Q}_p^*$ для обозначения кольца целых p-адических чисел и J_p — для группы целых p-адических чисел, являющейся аддитивной группой кольца $\mathbb{Q}_p^*$.

1. Основные определения и вспомогательные результаты

Определение 1. Группа называется *хопфовой*, если она не изоморфна никакой своей собственной факторгруппе.

Помимо такого определения, введенного самим Хопфом для групп (не обязательно абелевых), в ряде случаев удобнее пользоваться эквивалентным определением.

Определение 2. Группа называется *хопфовой*, если любой ее эпиморфизм на себя является автоморфизмом.

Теорема 1. *Если $A = A_1 \oplus A_2$ и группа A является хопфовой, то группы A_1 и A_2 также хопфовы.*

Доказательство. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ и A — хопфова группа. Предположим противное: пусть группа A_1, например, не хопфова. Следовательно, существует эпиморфизм $\alpha_1 \colon A_1 \to A_1$, у которого $\operatorname{Ker}\alpha_1 \neq 0$. Зададим эпиморфизм $\alpha\colon A \to A$, полагая $\alpha(a) = \alpha_1(a_1) + id_{A_2}(a_2)$ для любого $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Имеем: $\alpha(a) = \alpha(a_1 + a_2) = \alpha_1(a_1) + id_{A_2}(a_2) = \alpha_1(a_1) + a_2$. Очевидно, α — эпиморфизм, однако $\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\alpha_1 \neq 0$. Получили противоречие с хопфовостью группы A, а значит, группы A_1 и A_2 хопфовы. □

Несложно показать, что теорема 1 обобщается на случай, когда количество прямых слагаемых в разложении группы A более 2 и даже бесконечно.

Следствие 1. *Пусть A_i — семейство групп, $i \in I$, где I — произвольное индексное множество, и пусть группа $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ является хопфовой. Тогда все группы A_i также хопфовы.*

Как неожиданно показал Корнер [7], утверждение, обратное к теореме 1, в общем случае неверно. На вопрос о том, допускает ли обращение эта теорема при каких-то ограничениях на прямые слагаемые, отвечает

Теорема 2. *Если $A = A_1 \oplus A_2$, где группы A_1 и A_2 являются хопфовыми, и по крайней мере одна из них вполне характеристична в группе A, то группа A также хопфова.*

Доказательство. Пусть для определенности прямое слагаемое A_1 вполне характеристично в группе A. Рассмотрим некоторый эпиморфизм $\alpha\colon A \to A$. Его можно представить в виде матрицы $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, где $\alpha_{11} \in \mathsf{E}(A_1)$, $\alpha_{22} \in \mathsf{E}(A_2)$ и $\alpha_{12} \in \operatorname{Hom}(A_2, A_1)$. Вначале докажем, что эндоморфизм $\alpha_{22} : A_2 \to A_2$ является автоморфизмом. Возьмем произвольный элемент $a_2 \in A_2$. Поскольку α — эпиморфизм, то в группе A существует такой элемент $b = b_1 + b_2$, где $b_1 \in A_1$ и $b_2 \in A_2$, что $\alpha(b) = a_2$. Действие эндоморфизма α на элементе b запишется в виде умножения матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ на матрицу-столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Итак, $\alpha(b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(b_1) + \alpha_{12}(b_2) \\ \alpha_{22}(b_2) \end{pmatrix}$. Вместе с тем $\alpha(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$, откуда $\alpha_{22}(b_2) = a_2$. Поэтому α_{22} — эпиморфизм, а так как группа A_2 хопфова, то α_{22} — автоморфизм.

Осталось показать, что отображение α_{11} тоже является автоморфизмом. Произвольно выберем элемент $a_1 \in A_1$. Сюръективность эндоморфизма α гарантирует существование в группе A такого элемента $c = c_1 + c_2$, где $c_1 \in A_1$ и $c_2 \in A_2$, что $\alpha(c) = a_1$. Имеем: $\alpha(c) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(c_1) + \alpha_{12}(c_2) \\ \alpha_{22}(c_2) \end{pmatrix}$. Учитывая, что $\alpha(c) = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, получаем $\alpha_{11}(c_1) + \alpha_{12}(c_2) = a_1$ и $\alpha_{22}(c_2) = 0$. Другими словами, $c_2 \in \operatorname{Ker}\alpha_{22}$, однако эндоморфизм α_{22} биективен, поэтому $c_2 = 0$. Получаем: $\alpha_{11}(c_1) = a_1$, откуда α_{11} — эпиморфизм. Группа A_1 хопфова, следовательно, α_{11} — автоморфизм группы A_1. Поэтому матрица $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ обратима, а это значит, что α — автоморфизм, что доказывает хопфовость группы A. □

Свойство вполне характеристичности позволяет дать необходимое и достаточное условие хопфовости прямой суммы любого числа групп.

Теорема 3. *Пусть A_i — семейство групп, $i \in I$, где I — произвольное индексное множество, $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, причем все группы A_i вполне характеристичны в A. Тогда хопфовость группы A эквивалентна хопфовости каждого прямого слагаемого A_i.*

Доказательство. Необходимость вытекает напрямую из следствия 1. Докажем теперь достаточность. Пусть все группы A_i являются хопфовыми и α — некоторый эпиморфизм группы A. Ограничения $\alpha_i \colon A_i \to A_i$ этого эпиморфизма на прямых слагаемых — тоже эпиморфизмы, но в силу хопфовости групп A_i — еще и автоморфизмы, поэтому α — автоморфизм. □

Нам понадобится следующий простой факт.

Теорема 4. *Если группа без кручения имеет конечный ранг, то она хопфова.*

Доказательство. Пусть группа A без кручения имеет конечный ранг, а B — некоторая подгруппа группы A. Тогда имеет место равенство: $\mathrm{rk}_0(A) = \mathrm{rk}_0(B) + \mathrm{rk}_0(A/B)$ [17, разд. 3.4, упражнение 3]. Если $A \cong A/B$, то факторгруппа A/B тоже является группой без кручения, откуда $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) + \mathrm{rk}(A/B)$. С другой стороны, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A/B)$, поэтому $\mathrm{rk}(B) = 0$. Тогда $B = 0$, что доказывает хопфовость группы A. □

Докажем теперь две леммы, позволяющие построить достаточно обширный класс примеров нехопфовых групп.

Лемма 1. *Прямая сумма бесконечного числа копий произвольной ненулевой группы является нехопфовой группой.*

Доказательство. Пусть сначала число копий некоторой группы в прямом разложении счетно. Запишем прямое разложение в виде $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где все прямые слагаемые A_i изоморфны некоторой группе G. Построим эпиморфизм $\alpha \colon A \to A$, не являющийся автоморфизмом. Пусть он отображает A_1 в 0, а каждое прямое слагаемое A_i, где $i \geqslant 2$, изоморфно отображает на прямое слагаемое A_{i-1}. Ясно, что $\operatorname{Ker}\alpha \neq 0$ и α — не автоморфизм, следовательно, группа A нехопфова.

Пусть теперь $A = \bigoplus\limits_{i\in M} A_i$, где индексное множество M несчетно, а P — некоторое счетное подмножество множества M. Введем обозначения $N = M \setminus P$, $B = \bigoplus\limits_{i\in P} A_i$, $C = \bigoplus\limits_{k\in N} A_k$ и запишем группу A в виде прямой суммы «счетной» и «несчетной» компонент: $A = B \oplus C$. Если допустить, что группа A является хопфовой, то по теореме 1 группа B также будет хопфовой, но, как только что было доказано, это невозможно. □

Лемма 2. *Квазициклическая группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ нехопфова.*

Доказательство. Построим какой-нибудь эпиморфизм α квазициклической группы на себя, не являющийся автоморфизмом. Пусть, например, он действует как умножение на число p. Ясно, что $\operatorname{Ker}\alpha \neq 0$, значит, α — не инъективен и группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ нехопфова. □

Дадим в следующей теореме полное описание строения хопфовых делимых групп. Это становится возможным сделать, поскольку строение делимых групп хорошо известно, и вообще, теория делимых групп настолько удовлетворительна, насколько это может быть при современном состоянии алгебры.

Теорема 5. *Делимая группа хопфова, если и только если она представляет собой прямую сумму конечного числа копий рациональной группы.*

Доказательство. Для всякой делимой группы D имеет место разложение $D = \bigoplus_{p} T_p \oplus E$, где T_p — прямая сумма групп $\mathbb{Z}(p^\infty)$, а E — прямая сумма групп $\mathbb{Q}$ [17, разд. 4.3, теорема 3.1]. Если группа D хопфова, то, применяя следствие 1, утверждаем хопфовость групп T_p и E. По лемме 2 имеем $T_p = 0$, поэтому $D = E$. Используя лемму 1, получаем, что E — прямая сумма конечного числа копий рациональной группы.

Обратное утверждение следует из теоремы 4. □

Ответим теперь на вопрос о том, когда произвольная прямая сумма циклических групп является хопфовой группой.

Теорема 6. *Прямая сумма $A = \bigoplus_{i\in M} A_{p_i} \oplus A_0$ циклических групп, где M — некоторое индексное множество, A_{p_i} — прямая сумма циклических p_i-групп, A_0 — прямая сумма циклических групп бесконечного порядка, хопфова тогда и только тогда, когда все группы A_{p_i} конечны, а группа A_0 имеет конечный ранг.*

Доказательство. Из хопфовости группы A и следствия 1 вытекает хопфовость всех групп A_{p_i} и A_0. Отсюда по лемме 1 A_0 — свободная группа конечного ранга. Покажем, что все группы A_{p_i} конечны. Если это не так, то в группе A_{p_i} можно выделить прямое слагаемое B, являющееся прямой суммой счетного числа циклических p_i-групп. Такая группа B нехопфова. В самом деле, запишем $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots$, где все B_i — циклические группы с неубывающими при возрастании значений индекса i порядками. Построим какой-нибудь эпиморфизм $\beta\colon B \to B$ с ненулевым ядром. Пусть β отображает B_1 в 0, а каждое прямое слагаемое B_i отображает на прямое слагаемое B_{i-1}, $i \geqslant 2$. Ясно, что $\operatorname{Ker}\beta \neq 0$ и группа B нехопфова, что невозможно, так как группа A_{p_i} хопфова.

Обратно, пусть все группы A_{p_i} конечны, а группа A_0 имеет конечный ранг. Обозначим $C = \bigoplus_{i\in M} A_{p_i}$ и запишем $A = C \oplus A_0$. Группа C является периодической, поэтому $\operatorname{Hom}(C, A_0) = 0$, другими словами, подгруппа C вполне характеристична в группе A. Следовательно,

$$\mathsf{E}(A) \cong \begin{pmatrix} \mathsf{E}(C) & \operatorname{Hom}(A_0, C) \\ 0 & \mathsf{E}(A_0) \end{pmatrix}.$$

Из теорем 1 и 2 следует, что хопфовость группы A эквивалентна хопфовости прямых слагаемых C и A_0, которая, в свою очередь, получается из теорем 3 и 4. Таким образом, A — хопфова группа. □

2. Хопфовость аддитивных групп *E*-колец и артиновых колец

Изучение аддитивных групп колец — сравнительно новое направление исследований, возникшее в середине прошлого века внутри теории абелевых групп. В настоящее время это направление получило значительный прогресс в своем развитии, что связано, прежде всего, с тем, что аддитивная группа кольца, даже если она устроена достаточно несложно, может дать определенную важную информацию о самом кольце. Вопросы о связях структуры кольца и структуры его аддитивной группы тесно переплетаются с теорией колец эндоморфизмов абелевых групп как содержательно, так и методологически. Органично дополняющие друг друга работы Фукса [17, гл. 18] и Фейгельштока [19] на сегодняшний день наиболее полно отражают современное состояние исследований по аддитивным группам колец.

Аддитивные группы некоторых конкретных классов колец служат интересными примерами хопфовых абелевых групп. Здесь мы рассмотрим аддитивные группы E-колец и артиновых колец, обладающих свойством хопфовости, а именно покажем, что аддитивная группа произвольного E-кольца хопфова, и охарактеризуем хопфовы аддитивные группы артиновых колец.

Хорошо известно, что E-кольца были введены Шульцем [20] в 1973 г. Однако нельзя утверждать, что таковые не появлялись в более ранних работах (разумеется, без употребления термина, предложенного Шульцем). Так, например, еще Коши на заре XIX в. знал, что кольца $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ и $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ являются E-кольцами. Этот факт учитывался им при изучении функций действительного переменного, являющихся решениями функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ныне носящего название «уравнение Коши». Знаменитый французский математик доказал даже, что над полем действительных чисел любое непрерывное решение уравнения Коши имеет вид $f(x) = f(1) \cdot x$.

Базовые факты и классические результаты о E-кольцах изложены в [17, разд. 18.6; 18, § 6; 21]. Рассмотрим некоторые из них.

Определение 3. Ассоциативное кольцо с единицей R называется *E-кольцом*, если $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, R) = \mathrm{Hom}_R(R, R)$.

Отметим следующий важный критерий E-кольца. Кольцо R является E-кольцом тогда и только тогда, когда произвольный эндоморфизм α аддитивной группы кольца R совпадает с умножением слева кольца R на элемент $\alpha(1)$.

В самом деле, если R — E-кольцо и $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\ R)$, то для любого элемента r кольца R имеем $\alpha(r) = \alpha(1_R \cdot r) = \alpha(1_R) \cdot r$. Обратно, если $\alpha(r) = \alpha(1_R) \cdot r$, то для любого $s \in R$ $\alpha(rs) = \alpha(1_R)(rs) = \big(\alpha(1_R)r\big)s = \alpha(r)s$.

Другими словами, если R есть E-кольцо, то канонический (естественный) гомоморфизм кольца R в кольцо эндоморфизмов его аддитивной группы $\mathsf{E}(R^+)$, отображающий элемент $x \in R$ в эндоморфизм левого умножения на x, является изоморфизмом. Иначе, для E-кольца R имеет место канонический изоморфизм $R \cong \mathsf{E}(R^+)$.

Аддитивные группы E-колец получили название *E-групп*. Группа A является E-группой, если и только если $A \cong \mathrm{End}\, A$ и кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ коммутативное [22]. Для E-групп сформулируем достаточно простой, но вместе с тем исчерпывающий результат.

Теорема 7. *Любая E-группа хопфова.*

Доказательство. Пусть R — E-кольцо. Ввиду сказанного выше произвольный эндоморфизм $f \in \mathsf{E}(R^+)$ совпадает с умножением слева кольца R на элемент $f(1_R)$. Таким образом, имеет место канонический изоморфизм $\Phi\colon \mathsf{E}(R^+) \to R$, где $\Phi(f) = f(1_R)$. Пусть $\beta\colon R^+ \to R^+$ — произвольный эпиморфизм. Если доказать, что элемент $\beta(1_R)$ обратим в кольце R, то это будет означать, что отображение β обратимо в кольце $\mathsf{E}(R^+)$, т. е. β — автоморфизм. Предположим, напротив, что для каждого элемента r кольца R имеем $\beta(1_R) \cdot r \neq 1_R$. Учитывая, что R — E-кольцо, получаем $\beta(1_R) \cdot r = \beta(r)$, и $\beta(r) \neq 1_R$ для каждого элемента $r \in R$. Следовательно, для элемента $1_R \in R^+$ в аддитивной группе R^+ не найдется ни одного прообраза при отображении β. Противоречие с тем, что отображение β сюръективно. Поэтому элемент $\beta(1)$ обратим в кольце R, а β — автоморфизм. □

Ниже построим пример, в какой-то степени иллюстрирующий теорему 7, а сейчас запишем такой известный факт [18, § 3, пример 3.5].

Лемма 3. *Кольцо эндоморфизмов группы J_p целых p-адических чисел естественным образом изоморфно кольцу $\mathbb{Q}_p^*$ целых p-адических чисел.*

Доказательство. Пусть δ — некоторое целое p-адическое число. Умножение кольца $\mathbb{Q}_p^*$ на число δ определяет эндоморфизм группы J_p. Обозначим этот эндоморфизм через $\tau(\delta)$. Если ε — какое-то другое p-адическое число, то $\delta \cdot 1 \neq \varepsilon \cdot 1$, т. е. различные p-адические числа дают различные эндоморфизмы группы J_p. Получаем вложение кольца $\mathbb{Q}_p^*$ в кольцо $\mathsf{E}(J_p)$, т. е. регулярное представление кольца $\mathbb{Q}_p^*$.

Если α — какой-нибудь эндоморфизм группы J_p, то α совпадает с умножением кольца $\mathbb{Q}_p^*$ на элемент $\delta = \alpha(1)$. Действительно, из $\alpha(1) = \tau(\delta)(1)$ выводим $(\alpha - \tau(\delta))(1) = 0$ и $(\alpha - \tau(\delta))(x) = 0$ для любого целого рационального числа x. Следовательно, ядро $\mathrm{Ker}\,(\alpha - \tau(\delta))$ содержит подгруппу $\mathbb{Z}$ группы J_p, порожденную элементом 1. Легко проверить, что фактор-группа $J_p/\mathbb{Z}$ делима, а сама группа J_p редуцирована. Поэтому $J_p/\mathrm{Ker}\,(\alpha - \tau(\delta)) = 0$, откуда

$\alpha = \tau(\delta)$, т. е. α представляет собой умножение кольца $\mathbb{Q}_p^*$ на число δ. Значит, имеющееся вложение кольца $\mathbb{Q}_p^*$ в кольцо $\mathsf{E}(J_p)$ является изоморфизмом колец. $\square$

Из леммы 3 следует, что кольцо $\mathbb{Q}_p^*$ является E-кольцом, а группа J_p целых p-адических чисел хопфова. С другой стороны, этот факт вытекает также из [15, теорема 3].

В завершение охарактеризуем хопфовы аддитивные группы артиновых колец. Напомним, что кольцо R называется *артиновым слева (справа)*, если любая последовательность $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ левых (соответственно, правых) идеалов, где $I_m \neq I_n$ при $m \neq n$, конечна. Говорят также, что R — *кольцо с условием обрыва убывающих цепей левых (соответственно, правых) идеалов*. Отметим, что существование единицы в артиновом кольце в общем случае не предполагается.

Теорема 8. *Аддитивная группа A некоторого артинова кольца является хопфовой тогда и только тогда, когда она имеет вид $A = D \oplus T$, где D — прямая сумма конечного числа копий рациональной группы, а T — конечная группа.*

Доказательство. Аддитивная группа любого артинова кольца имеет вид $A = D \oplus C \oplus A_1 \oplus \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k$, где D — делимая группа без кручения, C — периодическая делимая группа, а все группы A_i — суть прямые суммы циклических групп одного и того же порядка, равного степени простого числа [17, разд. 18.4, теорема 4.4]. В силу следствия 1 из хопфовости группы A вытекает хопфовость прямых слагаемых D, C и всех A_i. Далее, по теореме 5 группа D есть прямая сумма конечного числа копий группы $\mathbb{Q}$, а $C = 0$. Применяя теорему 6, получаем, что все группы A_i конечны.

Обратно, поскольку группа D не имеет кручения, а T — периодическая группа, можно записать $\mathrm{Hom}(T,\ D) = 0$, а это значит, что подгруппа T вполне характеристична в группе A. Из хопфовости групп D, T и теоремы 2 следует хопфовость группы A. $\square$

Заключение

В алгебре хорошо известно, что свойства эндоморфизмов алгебраической системы во многом определяют свойства самой этой системы. Поэтому изучение алгебраических систем, эндоморфизмы которых удовлетворяют каким-то конкретным условиям, представляет большой интерес. Одним из таких условий является свойство хопфовости. Изначально затрагивающее только группы, оно получило распространение на абелевы группы, кольца, модули, упорядоченные алгебраические системы, топологические пространства, решетки и другие типы алгебраических систем.

Результаты настоящей работы группируются вокруг вопросов изучения свойства хопфовости в аддитивных группах отдельных классов колец. Получено весьма удовлетворительное описание хопфовых аддитивных групп E-колец и артиновых колец, что обусловлено хорошо известными строением и свойствами аддитивных групп таких колец. В целом же проблема описания хопфовых аддитивных групп колец нова, и еще очень многое необходимо наработать, чтобы сделать ее достаточно прозрачной. К названной проблеме примыкают и другие, не менее интересные. Так, например, заслуживают внимания хопфовы сепарабельные и векторные абелевы группы, абелевы группы, обладающие хопфовыми кольцами эндоморфизмов, хопфовы абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов и т. д.

Список литературы

1. *Курош А. Г.* Теория групп. Москва : Физматлит, 2011. 808 с. EDN: RBBEOR
2. *Bao Yan, Ziqi Tan, Shijie Wei, Haocong Jiang, Weilong Wang, Hong Wang, Lan Luo, Qianheng Duan, Yiting Liu, Wenhao Shi, Yangyang Fei, Xiangdong Meng, Yu Han, Zheng Shan, Jiachen Chen, Xuhao Zhu, Chuanyu Zhang, Feitong Jin, Hekang Li, Chao Song, Zhen Wang, Zhi Ma, H. Wang, Gui-Lu Long.* Factoring integers with sublinear resources on a superconducting quantum processor // ArXiv preprint arXiv:2212.12372. 2022. URL: https://arxiv.org/pdf/2212.12372.pdf (дата обращения: 14.01.2024).
3. *Гретцер Г.* Общая теория решеток : пер. с англ. / под ред. Д. М. Смирнова. Москва : Мир, 1981. 456 с.

4. *Baumslag G.* Hopficity and Abelian groups // Topics in Abelian groups : Proceedings of the New Mexico Symposium on Abelian Groups. Scott-Foresman-Chicago : New Mexico State University, 1962. P. 331–335.
5. *Baumslag G.* On Abelian Hopfian groups. I // Mathematische Zeitschrift. 1962. Vol. 78, iss. 1. P. 53–54. https://doi.org/10.1007/BF01195151
6. *Baumslag G.* Products of Abelian Hopfian groups // Journal of the Australian Mathematical Society. 1968. Vol. 8. P. 322–326. https://doi.org/10.1017/S1446788700005383
7. *Corner A. L. S.* Three examples on Hopficity in torsion-free Abelian groups // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1965. Vol. 16, iss. 3–4. P. 303–310. https://doi.org/10.1007/BF01904838
8. *Irwin J. M., Takashi J.* A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups // Pacific Journal of Mathematics. 1969. Vol. 29, iss. 1. P. 151–160. https://doi.org/10.2140/pjm.1969.29.151
9. *Takashi J., Irwin J. M.* A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2 // Journal of Faculty of Science, Hokkaido University. 1969. Vol. 20, iss. 4. P. 194–203. https://doi.org/10.14492/hokmj/1530064871
10. *Goldsmith B., Gong K.* On super and hereditarily Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Archiv der Mathematik. 2012. Vol. 99, iss. 1. P. 1–8. https://doi.org/10.1007/s00013-012-0402-2
11. *Goldsmith B., Gong K.* On adjoint entropy of Abelian groups // Communications in Algebra. 2012. Vol. 40. P. 972–987. https://doi.org/10.1080/00927872.2010.543447
12. *Goldsmith B., Gong K.* A note on Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Contemporary Mathematics. 2012. Vol. 576. P. 129–136. https://doi.org/10.1090/conm/576/11356
13. *Goldsmith B., Gong K.* On some generalizations of Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Acta Mathematica Hungarica. 2013. Vol. 139, iss. 4. P. 393–398. https://doi.org/10.1007/s10474-012-0290-8
14. *Paolini G., Shelah S.* On the existence of uncountable Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Israel Journal of Mathematics. 2023. Vol. 257, iss. 2. P. 533–560. https://doi.org/10.1007/s11856-023-2534-4
15. *Кайгородов Е. В.* Хопфовы алгебраически компактные абелевы группы // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, вып. 6. С. 667–675. EDN: RXKLUX
16. *Кайгородов Е. В.* О некоторых классах хопфовых абелевых групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, вып. 8. С. 59–61. EDN: TWUZML
17. *Fuchs L.* Abelian Groups. Cham : Springer, 2015. 747 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-19422-6
18. *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. Москва : Факториал Пресс, 2006. 512 с. EDN: QJPUCH
19. *Feigelstock S.* Additive groups of rings. Boston ; London ; Melbourne : Pitman Advanced Publishing Program, 1983. 113 p.
20. *Schultz P.* The endomorphism ring of the additive group of a ring // Journal of the Australian Mathematical Society. 1973. Vol. 15, iss. 1. P. 60–69. https://doi.org/10.1017/S1446788700012763
21. *Крылов П. А., Туганбаев А. А., Царев А. В.* E-группы и E-кольца // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 159. С. 111–132.
22. *Гришин А. В., Царев А. В.* $\mathcal{E}$-замкнутые группы и модули // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, вып. 2. С. 97–106. EDN: TWUYLX

References

1. Kurosh A. G. *Teoriya grupp* [The theory of groups]. Moscow, Fizmatlit, 2011. 808 p. (in Russian). EDN: RBBEOR
2. Bao Yan, Ziqi Tan, Shijie Wei, Haocong Jiang, Weilong Wang, Hong Wang, Lan Luo, Qianheng Duan, Yiting Liu, Wenhao Shi, Yangyang Fei, Xiangdong Meng, Yu Han, Zheng Shan, Jiachen Chen, Xuhao Zhu, Chuanyu Zhang, Feitong Jin, Hekang Li, Chao Song, Zhen Wang, Zhi Ma, H. Wang, Gui-Lu Long. Factoring integers with sublinear resources on a superconducting quantum processor. *ArXiv preprint arXiv:2212.12372*, 2022. Available at: https://arxiv.org/pdf/2212.12372.pdf (accessed January 14, 2024).
3. Grätzer G. *Lattice theory: Foundation*. Basel, Birkhäuser Verlag, 2011. 587 p. (Russ. ed. : Moscow, Mir, 1981. 456 p.). https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1
4. Baumslag G. Hopficity and Abelian groups. *Topics in Abelian groups. Proceedings of the New Mexico Symposium on Abelian Groups*. Scott-Foresman-Chicago, New Mexico State University, 1962, pp. 331–335.

5. Baumslag G. On Abelian Hopfian groups. I. *Mathematische Zeitschrift*, 1962, vol. 78, iss. 1. pp. 53–54. https://doi.org/10.1007/BF01195151
6. Baumslag G. Products of Abelian Hopfian groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1968, vol. 8, pp. 322–326. https://doi.org/10.1017/S1446788700005383
7. Corner A. L. S. Three examples on Hopficity in torsion-free Abelian groups. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1965, vol. 16, iss. 3–4, pp. 303–310. https://doi.org/10.1007/BF01904838
8. Irwin J. M., Takashi J. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups. *Pacific Journal of Mathematics*, 1969, vol. 29, iss. 1, pp. 151–160. https://doi.org/10.2140/pjm.1969.29.151
9. Takashi J., Irwin J. M. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2. *Journal of Faculty of Science, Hokkaido University*, 1969, vol. 20, iss. 4, pp. 194–203. https://doi.org/10.14492/hokmj/1530064871
10. Goldsmith B., Gong K. On super and hereditarily Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Archiv der Mathematik*, 2012, vol. 99, iss. 1, pp. 1–8. https://doi.org/10.1007/s00013-012-0402-2
11. Goldsmith B., Gong K. On adjoint entropy of Abelian groups. *Communications in Algebra*, 2012, vol. 40, pp. 972–987. https://doi.org/10.1080/00927872.2010.543447
12. Goldsmith B., Gong K. A note on Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Contemporary Mathematics*, 2012, vol. 576, pp. 129–136. https://doi.org/10.1090/conm/576/11356
13. Goldsmith B., Gong K. On some generalizations of Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Acta Mathematica Hungarica*, 2013, vol. 139, iss. 4, pp. 393–398. https://doi.org/10.1007/s10474-012-0290-8
14. Paolini G., Shelah S. On the existence of uncountable Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Israel Journal of Mathematics*, 2023, vol. 257, iss. 2, pp. 533–560. https://doi.org/10.1007/s11856-023-2534-4
15. Kaigorodov E. V. Hopfian algebraically compact Abelian groups. *Algebra and Logic*, 2014, vol. 52, iss. 6, pp. 442–447. https://doi.org/10.1007/s10469-014-9259-8
16. Kaigorodov E. V. Some classes of Hopfian Abelian groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 197, iss. 5, pp. 623–624. https://doi.org/10.1007/s10958-014-1744-z
17. Fuchs L. *Abelian Groups*. Cham, Springer, 2015. 747 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-19422-6
18. Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. Dordrecht, Springer, 2003. 443 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0345-1
19. Feigelstock S. *Additive groups of rings*. Boston, London, Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1983. 113 p.
20. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1973, vol. 15, iss. 1, pp. 60–69. https://doi.org/10.1017/S1446788700012763
21. Krylov P. A., Tuganbaev A. A., Tsarev A. V. E-groups and E-rings. *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 256, iss. 4, pp. 341–361. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05430-2
22. Grishin A. V., Tsarev A. V. $\mathcal{E}$-closed groups and modules. *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 186, iss. 4, pp. 592–598. https://doi.org/10.1007/s10958-012-1008-8

Поступила в редакцию / Received 16.01.2024
Принята к публикации / Accepted 15.05.2024
Опубликована / Published 28.02.2025