Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 53–56
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 53–56
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-53-56, EDN: JLOWEC

Краткое сообщение
УДК 512.572

Ранги планарности многообразий полугрупп нётеровых по уравнениям

Д. В. Соломатин

Омский государственный педагогический университет, Россия, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, д. 14

Соломатин Денис Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, solomatin_dv@omgpu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9356-9890, SPIN: 6289-6887, AuthorID: 693200

Аннотация. Изучается проблема описания многообразий полугрупп конечного ранга планарности. В дополнение к ранее полученным результатам автор указывает новые бесконечные счётные серии многообразий полугрупп конечного ранга планарности.

Ключевые слова: полугруппа, граф Кэли полугруппы, планарный граф, нетривиальное полугрупповое тождество
Благодарности: Автор благодарен профессору А. Н. Шевлякову за любезно предоставленные дополнительные материалы о многообразиях полугрупп нётеровых по уравнениям и конструктивные замечания.
Для цитирования: *Соломатин Д. В.* Ранги планарности многообразий полугрупп нётеровых по уравнениям // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 53–56. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-53-56, EDN: JLOWEC

Short communication

Planarity ranks for varieties of equationally noetherian semigroups

D. V. Solomatin

Omsk State Pedagogical University, 14 Tukhachevsky Emb., Omsk 644099, Russia

Denis V. Solomatin, solomatin_dv@omgpu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9356-9890, SPIN: 6289-6887, AuthorID: 693200

Abstract. The problem of describing semigroup varieties with finite planarity rank is researched. In addition to the previously obtained results the author finds new countable infinite series of semigroup varieties with finite planarity rank.

Keywords: semigroup, Cayley graph of a semigroup, planar graph, nontrivial semigroup identity
Acknowledgements: The author is grateful to Professor A. N. Shevlyakov for kindly providing additional materials on varieties of Noetherian semigroups by equations and constructive remarks.
For citation: Solomatin D. V. Planarity ranks for varieties of equationally noetherian semigroups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 53–56 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-53-56, EDN: JLOWEC

Введение

Полугрупповым многообразием $\mathbf{V}$ называем произвольное (возможно, и тривиальное) множество полугрупп, замкнутое относительно операций взятия подполугрупп, прямого произведения и гомоморфных образов. Для системы полугрупповых тождеств Σ условимся через $\mathrm{var}\Sigma$ обозначать многообразие полугрупп, определяемое этой системой. Попутно напомним, что *графом Кэли* полугруппы S относительно множества образующих её элементов X называем конечный ориентированный мультиграф $Cay(S, X)$, состоящий из множества вершин S и множества помеченных дуг — всевозможных троек (a, x, b), где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$. Таким образом, для каждого элемента из S граф Кэли имеет соответствующую вершину, и для всех элементов $a \in S$, $x \in X$ имеются дуги от a до ax, помеченные элементом x. При изучении вопросов планарности графов Кэли полугрупп удобен переход к основе анализируемого графа. *Основа графа Кэли* полугруппы S относительно множества образующих её элементов X обозначается $SCay(S, X)$ и получается из исходного графа $Cay(S, X)$ путём удаления петель, меток, потери направленности дуг и замены кратных рёбер одним ребром, соединяющим те же вершины. Таким образом, естественно называть граф Кэли планарным тогда и только тогда, когда его основа является обыкновенным планарным графом. Пусть $F_k(\mathbf{V})$ — свободная полугруппа ранга k данного многообразия $\mathbf{V}$. Наибольшее количество образующих k, относительно которых $F_k(\mathbf{V})$ допускает планарный граф Кэли, характеризует ранг планарности $r_\pi(\mathbf{V})$ данного многообразия. Более точно, если существует такое натуральное число r, что все $\mathbf{V}$-свободные полугруппы $F_k(\mathbf{V})$ ранга $k \leqslant r$ допускают планарные графы Кэли (относительно множеств их свободных образующих), а $\mathbf{V}$-свободная полугруппа $F_{r+1}(\mathbf{V})$ ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то *рангом планарности* многообразия $\mathbf{V}$ называется это число $r = r_\pi(\mathbf{V})$. Если для многообразия $\mathbf{V}$ такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет бесконечный ранг планарности, и пишут $r_\pi(\mathbf{V}) = \infty$. При этом удобно считать ранг планарности тривиального многообразия равным нулю. В ряде ключевых случаев ранг планарности оказывается бесконечным, поэтому вызывает особый интерес задача описания полугрупповых многообразий бесконечного ранга планарности, являющаяся продолжением поставленной Л. М. Мартыновым в 2015 г. проблематики, связанной с описанием рангов планарности многообразий полугрупп[1]. Частично удается приблизится к решению этой задачи путём приведения серий конкретных примеров, однако полного описания ещё не получено.

Стоит отметить, что очень мало операций над графами наследует свойство планарности, таким образом, «почти нет» планарных графов [1]. Тем не менее к нетривиальному описанию многообразий бесконечного ранга планарности возможно приблизиться методом исключения, если отсеивать серию за серией многообразия полугрупп конечного ранга планарности. В основной теореме настоящей заметки представим новую такую серию. Для получения этой серии оказалось интересным изучение полугрупповых многообразий, у которых планарные основы графов Кэли свободных полугрупп данного ранга являются произведением основ графов Кэли свободных полугрупп некоторых многообразий полугрупп того же ранга. Напомним, что *произведением графов* [2, с. 20] для любой пары обыкновенных графов $G = (VG, EG)$ и $H = (VH, EH)$ называется граф

$$G \times H = (VG \times VH, \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mid (u_1 = v_1 \in VG \wedge \{u_2, v_2\} \in EH) \vee \\ \vee (u_2 = v_2 \in VH \wedge \{u_1, v_1\} \in EG)\}).$$

В общем случае такое произведение планарных графов не всегда приводит к планарному графу.

[1]Новые проблемы алгебры и логики. Юбилейное 900-е заседание семинара: Омский алгебраический семинар, 12 ноября 2015. http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900 (дата обращения: 19.10.2023)

Основной результат

Рассмотрим $V_n = \mathrm{var}\{(xy)^{n+1} \approx xy; (xyx)^n \approx x^n; xxyx \approx xyxx; xy^nz \approx xt^nz\}$, — серию многообразий, которые играют важную роль при изучении вопроса нётеровости по уравнениям в теории полугрупп, так как известно [3], что полугрупповое многообразие V полностью состоит из полугрупп нётеровых по уравнениям, если существует $n \geqslant 1$ такое, что V удовлетворяет следующим тождествам: $(xy)^{n+1} \approx xy$, $(xyx)^n \approx x^n$, $xxyx \approx xyxx$, $xy^nz \approx xt^nz$. В структуре полугрупп из таких многообразий нет ничего сложного. Их идеал разложимых элементов $Red(S) = \{s \mid \exists a, b : s = ab\}$ является прямоугольной связкой абелевых групп, ранги планарности многообразий которых известны по серии работ [4, 5].

Соответственно, изучение вопроса планарности графа Кэли полугруппы $S \in V_n$ может сводиться к изучению планарности графа Кэли для подполугруппы $Red(S)$. Следовательно, ранги планарности многообразий данной серии конечны. В следующей теореме вычислим конкретные значения рангов планарности многообразий этой серии, не прибегая к сведению в $Red(S)$.

Теорема 1. *Пусть* $V_n = \mathrm{var}\{(x_1x_2)^{n+1} \approx x_1x_2;\ (x_1x_2x_1)^n \approx x_1^n;\ x_1x_1x_2x_1 \approx x_1x_2x_1x_1;\ x_1\left(x_2^n\right)x_3 \approx x_1\left(x_4^n\right)x_3\}$. *Тогда, для* $n = 1$ *ранг планарности многообразия* V_n *равен 4, для* $n = 2$ *равен 2, а для* $n > 2$ *равен 1.*

Доказательство. При $n = 1$ многообразие V_n является многообразием прямоугольных связок, ранг планарности которого $r_\pi(V_1) = 4$ известен из [6]. Интересно, что для многообразия V_1 оказалось

$$SCay(F_k(V_1), \{x_1, ..., x_k\}) = SCay(F_k(\mathrm{var}\{xy \approx x\}),$$
$$\{l_1, ..., l_k\}) \times SCay(F_k(\mathrm{var}\{xy \approx y\}), \{r_1, ..., r_k\}),$$

а это большая редкость. Плоская укладка основы графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия V_2 представлена на рис. 1, а 3-порожденная свободная полугруппа данного многообразия содержит изображенный на рис. 2 граф в качестве подграфа, следовательно, она не является планарной и $r_\pi(V_2) = 2$.

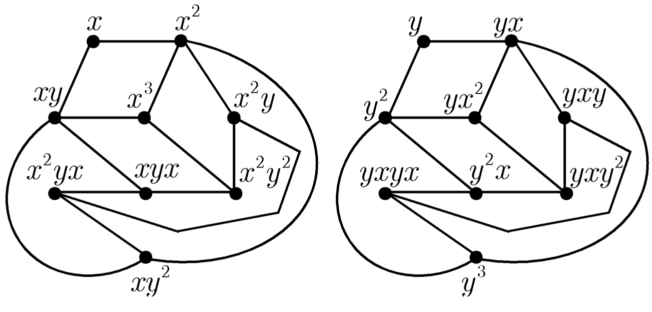

Рис. 1. Плоская укладка графа $SCay(F_2(V_2), \{x, y\})$
Fig. 1. Flat graph stacking $SCay(F_2(V_2), \{x, y\})$

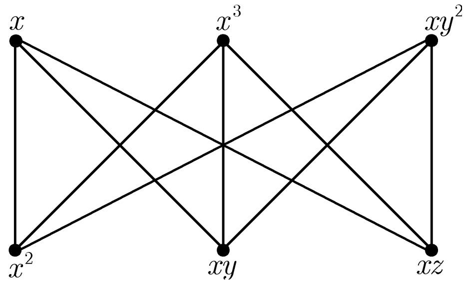

Рис. 2. Подграф графа $SCay(F_3(V_2), \{x, y, z\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$
Fig. 2. A subgraph of the graph $SCay(F_3(V_2), \{x, y, z\})$, homeomorphic to graph $K_{3,3}$

При $n > 2$ плоская укладка основы графа Кэли однопорожденной свободной полугруппы многообразия V_n очевидно совпадает с плоской укладкой графа $SCay(F_1(\mathrm{var}\{x^{n+2} = x^2\}), \{x\})$. Для большего числа образующих основа графа Кэли свободной полугруппы такого многообразия содержит гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф, изображенный на рис. 3. Таким образом, $r_\pi(V_n) = 1$ при $n > 2$. Что и требовалось доказать. □

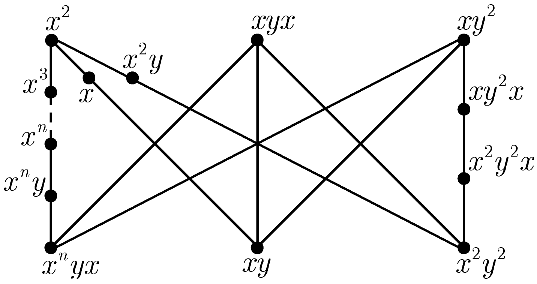

Рис. 3. Подграф графа $SCay\left(F_2\left(V_n\right), \{x, y\}\right)$ при $n \geqslant 3$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$

Fig. 3. Subgraph of graph $SCay\left(F_2\left(V_n\right), \{x, y\}\right)$ for $n \geqslant 3$, homeomorphic to graph $K_{3,3}$

Заметим, что если есть полугруппа S и двусторонний идеал K полугруппы S, то возникает естественный вопрос, когда фактор-полугруппа S/K будет планарной? Понятно, что если $K = \{0\}$, то S/K планарна тогда и только тогда, когда S планарна. А если $K = Red(S)$, то полугруппа S/K планарна всегда [6].

Список литературы

1. *Коршунов А. Д.* Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер // Успехи математических наук. 1985. Т. 40, вып. 1. С. 107–173.
2. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. Москва : Наука, 1990. 384 с.
3. *Shevlyakov A. N.* Direct powers of algebraic structures and equations // Прикладная дискретная математика. 2022. № 58. С. 31–39. https://doi.org/10.17223/20710410/58/4, EDN: SLWROD
4. *Соломатин Д. В.* Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов // Вестник Омского университета. 2012. № 4 (66). С. 41–45. EDN: RRQLSF
5. *Соломатин Д. В.* Ранги планарности многообразий коммутативных полугрупп // Прикладная дискретная математика. 2016. № 4 (34). С. 50–64. https://doi.org/10.17223/20710410/34/4, EDN: XEAAEX
6. *Соломатин Д. В.* Планарные многообразия полугрупп // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 232–247. https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.019, EDN: VKASBJ

References

1. Korshunov A. D. The main properties of random graphs with a large number of vertices and edges. *Russian Mathematical Surveys*, 1985, vol. 40, iss. 1, pp. 121–198. https://doi.org/10.1070/RM1985v040n01ABEH003529
2. Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., Tyshkevich R. I. *Lectures on graph theory*. Moscow, Nauka, 1990. 384 p. (in Russian).
3. Shevlyakov A. N. Direct powers of algebraic structures and equations. *Applied Discrete Mathematics*, 2022, iss. 58, pp. 31–39. https://doi.org/10.17223/20710410/58/4, EDN: SLWROD
4. Solomatin D. V. Planarity ranks of the varieties of commutative monoids. *Herald of Omsk University*, 2012, iss. 4 (66), pp. 41–45 (in Russian). EDN: RRQLSF
5. Solomatin D. V. The ranks of planarity for varieties of commutative semigroups. *Applied Discrete Mathematics*, 2016, iss. 4 (34), pp. 50–64. (in Russian). https://doi.org/10.17223/20710410/34/4, EDN: XEAAEX
6. Solomatin D. V. Planar varieties of semigroups. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, pp. 232–247 (in Russian). https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.019, EDN: VKASBJ

Поступила в редакцию / Received 19.12.2023
Принята к публикации / Accepted 13.03.2024
Опубликована / Published 28.02.2025