



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 380–390

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 380–390

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390>

EDN: <https://elibrary.ru/JCMIBQ>

Научная статья

УДК 517.98

## К вопросу о физическом смысле материальных констант гиперупругих моделей

С. А. Муслов<sup>1</sup>✉, П. Ю. Сухочев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Российский университет медицины, Россия, 127006, г. Москва, ул. Долгоруковская, д. 4

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

**Муслов Сергей Александрович**, кандидат физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики, [muslov@mail.ru](mailto:muslov@mail.ru), ORCID: [0000-0002-9752-6804](https://orcid.org/0000-0002-9752-6804), SPIN: [7213-2852](https://sp.inria.fr/213-2852), AuthorID: [185513](https://authorid.ru/185513)

**Сухочев Павел Юрьевич**, научный сотрудник лаборатории математического обеспечения имитационных динамических систем, [P.Sukhochev@vrmsu.ru](mailto:P.Sukhochev@vrmsu.ru), ORCID: [0000-0002-8004-6011](https://orcid.org/0000-0002-8004-6011), SPIN: [7780-8694](https://sp.inria.fr/7780-8694), AuthorID: [1004519](https://authorid.ru/1004519)

**Аннотация.** Известна востребованность гиперупругих моделей деформирования при проектировании изделий технического назначения с использованием эластомерных материалов (резины и резиноподобных полиуретанов, силиконов и термоэластопластов ТЭП), реализующих высокие (до 500%) обратимые деформации и демпфирующую способность при циклической и ударной нагрузке. К таким изделиям относятся автомобильные шины, амортизаторы, передачи с гибкой связью, «compliance mechanisms» в робототехнике и т.п. Не менее актуальным и при этом социально значимым является применение теории гиперупругости с целью разработки имплантируемых материалов и устройств для общей, кардио- и пластической хирургии, включая замещение мягких биологических тканей (кожи, мышц, связок и т.д.) их функциональными аналогами в виде биосовместимых синтетических материалов. Но одной из нерешенных проблем механики гиперупругих моделей материалов остается физическая интерпретация их материальных констант. В данном сообщении материальные постоянные моделей сопоставлены с упругими модулями материалов ( $E_0$  и  $G_0$ ) в недеформированном состоянии. Верифицировано, что для неогуксовской модели выполняется соотношение  $\mu = E_0/6$ , для двухпараметрической модели Муни–Ривлина —  $C_{01} + C_{10} = E_0/6$ . Установлено, что такая же формула справедлива и для 3-, 5- и 9-параметрических моделей Муни–Ривлина и полиномиальной модели второго порядка. Получено для модели Огдена  $3\mu\alpha = 2E_0$ , Йео  $C_1 = E_0/6$ , Веронда–Вестманн  $6(C_1C_2 + C_3) = E_0$ . Сделан вывод, что материальные постоянные являются показателями механической стабильности гиперупругих моделей вследствие условия Hill–Drucker. На примере биоматериала произведено сравнение результатов, полученных с помощью найденных формул, между собой и с показателями других моделей: линейной, билинейной и экспоненциальной. Установлено, что ряд моделей неудовлетворительно описывают поведение материала при малых деформациях.

**Ключевые слова:** гиперупругие модели, материальные постоянные, модули упругости

**Для цитирования:** Муслов С. А., Сухочев П. Ю. К вопросу о физическом смысле материальных констант гиперупругих моделей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 380–390. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390), EDN: [JCMIBQ](https://elibrary.ru/JCMIBQ)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

## On the question of the physical interpretation of material constants of hyperelastic models

S. A. Muslov<sup>1✉</sup>, P. Yu. Sukhochev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Russian University of Medicine, 4 Dolgorukovskaya St., Moscow 127006, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, GSP-1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

**Sergey A. Muslov**, muslov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-9752-6804, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

**Pavel Yu. Sukhochev**, P.Sukhochev@vrmsu.ru, ORCID: 0000-0002-8004-6011, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

**Abstract.** There is a known demand for hyperelastic deformation models in the design of technical products using elastomeric materials (rubber and rubber-like polyurethanes, silicones, and TPE thermoplastic elastomers), which realize high (up to 500%) reversible deformations and damping capacity under cyclic and impact loading. Such products include car tires, shock absorbers, flexible gears, “compliance mechanisms” in robotics, etc. No less relevant and at the same time socially significant is the application of the theory of hyperelasticity for the purpose of developing implantable materials and devices for general, cardiac, and plastic surgery, including the replacement of soft biological tissues (skin, muscles, ligaments, etc.) with their functional analogues in the form of biocompatible synthetic materials. One of the unsolved problems in the mechanics of hyperelastic models remains the physical interpretation of their material constants. In this report, the material constants of the models are compared with the elastic moduli of the materials ( $E_0$  and  $G_0$ ) in the unstrained state. It is verified that for the neo-Hookean model, the relation  $\mu = E_0/6$  holds, for the 2-parameter Mooney–Rivlin model  $C_{01} + C_{10} = E_0/6$ . It has been established that the same formula is valid for the 3-, 5-, and 9-parameter Mooney–Rivlin models and the  $n$ th order polynomial model. For the Ogden model  $3\mu\alpha = 2E_0$ , Yeoh  $C_1 = E_0/6$ , Veronda–Westmann  $6(C_1C_2 + C_3) = E_0$ . Material constants are indicators of the mechanical stability of hyperelastic models due to the Hill–Drucker condition. Using the example of a biomaterial, the results obtained using the derived formulas are compared with each other and with the indicators of elastic models: linear, bilinear, and exponential. A number of models characterize cases of small deformations unsatisfactorily.

**Keywords:** hyperelastic models, material constants, elastic moduli

**For citation:** Muslov S. A., Sukhochev P. Yu. On the question of the physical interpretation of material constants of hyperelastic models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 380–390 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-380-390), EDN: JCMIBQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

При малых изменениях аргумента изменения функции всегда линейны. В математической формулировке это следует из разложения функций в ряд Тейлора, где первый член разложения в бесконечной сумме степенных функций пропорционален приращению аргумента. Этому правилу удовлетворяет известный из механики закон Гука «*Ut tension sic vis*» («Какова сила, таково и растяжение»). Действительно, на начальном участке деформирования удлинение или сжатие пропорциональны величине вызвавшей их силы. Для большинства материалов при росте деформации пропорциональность деформации и силы с некоторого момента перестает выполняться. Упругая обратимая деформация сменяется неупругой с остаточной деформацией при разгрузке. Однако существуют материалы, которые способны испытывать гигантские (до 500%) деформации, а потом возвращаться к исходному состоянию или близкому к нему, аннигилируя при этом всю или почти всю приобретенную деформацию. Коэффициент Пуассона таких материалов близок к теоретическому пределу 0.5, а деформационное изменение объема ничтожно мало. Они называются

эластомерами, резиноподобными или гиперупругими, а деформации, которые они испытывают, — конечными, большими, нелинейно упругими. Строгое определение гиперупругой деформации весьма непростое и основано на тензорном анализе и параметрах специальных тензоров (Пиола – Кирхгоффа, Коши – Грина и др.) [1].

Большинство мягких тканей в организме человека (кожа, желчные протоки, кровеносные сосуды, ткани сердца, печени, желудка и других органов) также считаются гиперупругими. Изучение механических свойств биотканей сложнее, чем изучение традиционных конструкционных материалов. Основная проблема, возникающая при исследовании мягких биологических структур, — это выбор гиперупругой модели, которая бы наиболее точно предсказывала поведение биоматериала [2].

Каждой из семейства гиперупругих моделей (неогуковской, Муни – Ривлина, Арруда – Бойса, Огдена, Йео, Гента, полиномиальной и др.) посвящено достаточно большое число оригинальных работ и обзоров [3–8], и их число неуклонно растет (рис. 1).

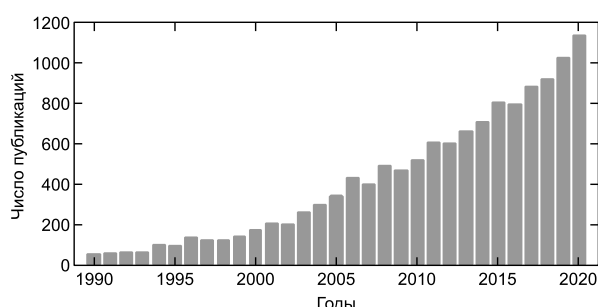


Рис. 1. Число публикаций по гиперупругим моделям, индексированным в БД SCOPUS по годам [6]

Fig. 1. The number of publications on hyperelastic models indexed in the SCOPUS database by years [6]

По мнению авторов [9], для полимеров плотность сшивки определяется постоянной  $C_{10}$  2-параметрической модели Муни – Ривлина:

$$n = \frac{|C_{10}|}{RT},$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — абсолютная температура. Как известно, высокая степень сшивки улучшает механические свойства полимеров. Авторы также декларируют, что  $C_{10}$  отвечает за упругое поведение, а  $C_{01}$  — за отклонение от упругости, т. е. усиливает нелинейность. Дополнительные параметры 3-, 5- и 9-параметрических моделей инициируют появление на деформационных кривых точек перегиба.

Там же материальные постоянные рассмотрены авторами как индикаторы механической стабильности тел, что вытекает из неравенства

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} \geq 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно. В литературной форме критерий означает, что деформации должны расти при увеличении приложенного напряжения, а не наоборот. Критерий стабильности представляет собой также условие изменения внутренней энергии деформируемого тела, согласно которому приращение внутренней энергии при деформации не может быть отрицательным. В недеформированном состоянии и при малых деформациях ( $\varepsilon \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 1$ ) оно равносильно неравенству

$$E_0 \geq 0,$$

где  $E_0$  — начальный модуль упругости материала.

Гиперупругие модели с полученными материальными константами, как правило, предназначаются для дальнейших исследований напряженно-деформированного состояния тел. Одной из нерешенных задач механики гиперупругих моделей остается физическая интерпретация их материальных констант. Известно, что они содержатся в разложении энергии деформации по степеням инвариантов  $I_1, I_2$  и  $I_3$  тензора деформации — правого тензора деформации Коши – Грина — и измеряются в единицах плотности энергии ( $\text{Дж/м}^3 = \text{Па}$ ) или безразмерны.



Условие (1), разработанное R. Hill (1958 г.) [10] и D. C. Drucker (1959 г.) [11], предусматривает определенные ограничения на параметры моделей Муни – Ривлина при одноосной нагрузке, как указано в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Критерии стабильности моделей Муни – Ривлина  
Stability criteria of Mooney – Rivlin models

Модели Муни – Ривлина	Критерии
2-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0, C_{01} \geq 0$
3-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0, C_{11} \geq 0$
5-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0, C_{20} \geq 0, C_{20} + C_{02} + C_{11} \geq 0$
9-параметрическая	$C_{10} + C_{01} \geq 0, C_{30} \geq 0, C_{02} \leq 0, C_{03} \leq 0,$ $C_{20} + C_{02} + C_{11} \geq 0, C_{30} + C_{03} + C_{12} + C_{21} \geq 0$

Действительно, для 2-параметрической модели при малых одноосных деформациях

$$\sigma = 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) = 2C_{10} (1 + \varepsilon - (1 - 2\varepsilon)) + 2C_{01} (1 - (1 - 3\varepsilon)) = 2C_{10} (3\varepsilon) + 2C_{01} (3\varepsilon) = 6\varepsilon (C_{10} + C_{01}).$$

Здесь учтено, что коэффициент деформации  $\lambda = \varepsilon + 1$  и  $(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon$  при  $\varepsilon \ll 1$ .

Отсюда получаем, что

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 6(C_{10} + C_{01}). \quad (2)$$

Вследствие несоблюдения постулата Hill – Drucker та или иная феноменологическая модель может не подходить для описания малых деформаций материала. Это нередко встречается в литературе при обработке результатов одноосного растяжения материалов, например, образцов биотканей позвоночной артерии [2] или надкостницы носа человека, как на рис. 2 (гиперупругие модели рассчитаны авторами статьи).

## Цель работы

Цель работы — определить физический смысл материальных постоянных гиперупругих моделей на основе расчетов начального модуля упругости  $E_0$ , сравнить численные результаты расчетов между собой и с соответствующими характеристиками упругих моделей на примере биоматериала.

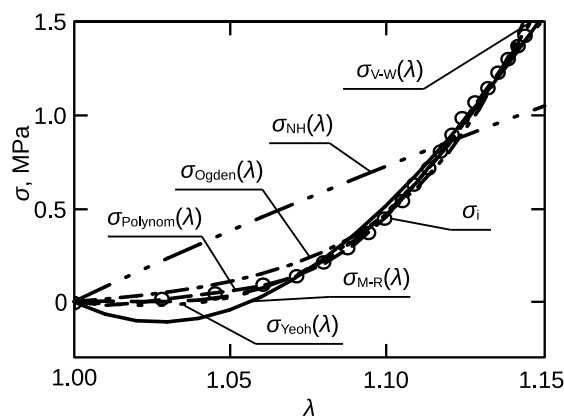


Рис. 2. Гиперупругие модели надкостницы носа человека:  $\sigma_{NH}$  — неогуксовская;  $\sigma_{M-R}$  — 2-параметрическая Муни – Ривлина при  $C_{10} + C_{01} = -1.35$  МПа;  $\sigma_{Ogden}$  — Огдена 1-го порядка;  $\sigma_{Yeoh}$  — Йео 3-го порядка;  $\sigma_{Polynom}$  — полиномиальной 2-го порядка;  $\sigma_{V-W}$  — Веронда – Вестманн. Здесь и на рис. 3 точками обозначены данные механических испытаний [12]

Fig. 2. Hyperelastic models of human nasal periosteum:  $\sigma_{NH}$  is neo-Hookean;  $\sigma_{M-R}$  is 2-parametric Mooney – Rivlin for  $C_{10} + C_{01} = -1.35$  MPa;  $\sigma_{Ogden}$  is Ogden of the 1st order;  $\sigma_{Yeoh}$  is Yeoh of the 3rd order;  $\sigma_{Polynom}$  is polynomial of the 2nd order;  $\sigma_{V-W}$  is Veronda – Westmann (V-W). The dots here and in Fig. 3 indicate the data of mechanical tests [12]



## Материалы и методы

Расчеты производились в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 (PTC Inc., США). В рамках интерпретации материальных постоянных гиперупругих моделей тел были исследованы пределы функций  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon) = \sigma'_\lambda(\lambda)$  при малых деформациях ( $\varepsilon \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 1$ ):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}.$$

Рассматривали одноосное растяжение несжимаемых гиперупругих тел. Численный расчет выполнен на примере надкостницы носа человека [12]. Как известно, надкостница состоит из соединительной ткани, образованной преимущественно коллагеновыми волокнами. Интерес к исследованию гиперупругих свойств данного биоматериала обусловлен популярностью сегодня эстетической пластической хирургии и имплантационной ринопластики, выполнение которой требует поиска и подбора механически совместимых с тканями носа замещающих материалов.

## Результаты и их обсуждение

### 1. Исследование пределов $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon) = \sigma'_\lambda(\lambda)$ гиперупругих моделей при малых деформациях (начального модуля упругости)

*Неогуковская модель материала* [13]. Самая простая, однопараметрическая модель, пролонгирует закон Гука в область больших деформаций. В отличие от линейно-упругих материалов, кривая напряжения-деформации неогуковского материала нелинейная. Неогуковская модель основана на статистической термодинамике сшитых полимерных цепей и может использоваться для пластмасс и резиноподобных материалов. Сшитые полимеры действуют неогуковским образом, потому что первоначально полимерные цепи могут перемещаться относительно друг друга при приложении напряжения. Однако в определенный момент полимерные цепи будут растянуты до максимальной величины, допускаемой ковалентными поперечными связями, и это вызовет резкое увеличение модуля упругости материала<sup>1</sup>. Напряжение в неогуковском несжимаемом ( $I_3 = 1$ ) материале определяется формулой

$$\sigma = 2\mu \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right).$$

Вычисление предела обнаруживает, что (синтаксис Mathcad 15.0)

$$E(\mu) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, \mu) \rightarrow 6\mu,$$

откуда

$$\mu = \frac{E_0}{6}, \quad (3)$$

где  $E_0$  — начальный модуль упругости. Отметим, что для несжимаемых материалов, какими являются гиперупругие тела, модуль сдвига  $G = E/3$ , поэтому

$$2\mu = G.$$

*Модель Муни – Ривлина* [14, 15]. Модель Муни – Ривлина является дальнейшим развитием неогуковской модели и одним из наиболее распространенных видов потенциала энергии деформации [2]. При этом 2-параметрическая — наиболее удобная для анализа поскольку содержит наименьшее число параметров в семействе тел Муни – Ривлина.

<sup>1</sup>Неогуковское твердое тело – Neo-Hookean solid. URL: [https://ru.wikibrief.org/wiki/Neo-Hookean\\_solid](https://ru.wikibrief.org/wiki/Neo-Hookean_solid) (дата обращения: 12.08.2023).



Модель 2-параметрическая:

$$\sigma_{2p} = 2 \left( C_{10} - \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right).$$

В этом случае

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10}, \quad (4)$$

т. е.

$$C_{01} + C_{10} = \frac{E_0}{6}, \quad (5)$$

что согласуется с формулой (2). Нетрудно видеть, что для модуля сдвига  $2(C_{01} + C_{10}) = G_0$ .

Модель 3-параметрическая:

$$\sigma_{3p} = 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 6C_{11} \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} \right). \quad (6)$$

Аналогично 2-параметрической модели находим, что

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}, C_{11}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10},$$

т. е. для 3-параметрической модели снова имеем формулу (5).

Модель 5-параметрическая:

$$\begin{aligned} \sigma_{5p} = & 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 6C_{11} \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} \right) + \\ & + 4C_{20} \lambda \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 4C_{02} \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right). \end{aligned}$$

Точно такой же результат вычисления дают и для 5-параметрической модели:

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{02}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10}.$$

Модель 9-параметрическая:

$$\begin{aligned} \sigma_{9p} = & 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 6C_{11} \left( \lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} \right) + \\ & + 4C_{20} \lambda \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 4C_{02} \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) + \\ & + 2C_{21} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left( 2\lambda^3 - 4\lambda + \frac{1}{\lambda^2} + 1 \right) + \\ & + 2C_{12} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right) \left( 4\lambda^2 - \frac{5}{\lambda} - 3\lambda - 6 \right) + \\ & + 6C_{30} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 6C_{03} \left( 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right). \end{aligned}$$

Для самой многочисленной по числу параметров модели Муни – Ривлина также обнаруживается, что

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{02}, C_{21}, C_{12}, C_{30}, C_{03}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10}.$$



Таким образом, для всех моделей Муни–Ривлина, независимо от числа параметров, справедливы формулы (5), (6), т. е. удвоенная сумма материальных постоянных  $C_{01}$  и  $C_{10}$  гиперупругих тел Муни–Ривлина представляет собой  $1/3$  модуля Юнга или модуль сдвига в недеформированном состоянии.

*Модель Огдена* [16]. Устанавливающим уравнением является

$$\sigma = \sum_{p=1}^n \mu_p \left( \lambda^{\alpha_p} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_p} \right).$$

Модель Огдена — феноменологическая модель, основывающаяся на главных относительных удлинениях в большей степени, чем на инвариантах деформаций. Для модели 1-го порядка устанавливающей функцией является

$$\sigma(\lambda, \mu, \alpha) := \mu \left( \lambda^\alpha - \lambda^{-\frac{\alpha}{2}} \right),$$

предел производной от которой при  $\lambda \rightarrow 1$  равен

$$E(\mu, \alpha) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, \mu, \alpha) \rightarrow \frac{3\mu\alpha}{2}.$$

Следовательно, для модели Огдена 1-го порядка

$$3\mu\alpha = 2E_0. \quad (7)$$

*Модель Йео* [17]. Модель  $n$ -порядка строится из соотношения

$$\sigma = 2\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n i C_i (I_1 - 3)^{i-1}.$$

В случае модели 3-го порядка

$$\sigma(\lambda, C_1, C_2, C_3) := 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( C_1 + 2C_2 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 3C_3 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \right)$$

и

$$E(C_1) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_1, C_2, C_3) \rightarrow 6C_1.$$

В итоге получаем

$$C_1 = \frac{E_0}{6}, \quad (8)$$

а модуль сдвига можно найти по формуле

$$G_0 = 2C_1.$$

*Полиномиальная модель 2-го порядка* [18]:

$$\begin{aligned} \sigma = & 2(\lambda - \lambda^{-2})(C_{10} + C_{01}\lambda^{-1} + 2C_{20}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + \\ & + 2\lambda^{-1}C_{02}(2\lambda + \lambda^{-2} - 3) + 3C_{11}(\lambda - 1 - \lambda^{-1} + \lambda^{-2})). \end{aligned}$$

Полиномиальная модель — это наиболее общий вариант записи потенциала энергии деформации. Она лежит в основе других известных моделей [2]. Например, модели Муни–Ривлина можно легко получить как частные случаи полиномиальной модели. Поэтому закономерно для полиномиальной модели

$$E(C_{10}, C_{01}) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{02}) \rightarrow 6C_{01} + 6C_{10}, \quad (9)$$





что соответствует формуле (4) для моделей Муни–Ривлина. Отметим, что полиномиальная модель — это феноменологическая модель, в основе которой используются 1-й и 2-й инварианты деформаций  $I_1$  и  $I_2$  [2].

Модель Веронда – Вестманн [19]:

$$\sigma = 2C_1C_2e^{C_2(\lambda^2+2\lambda^{-1}-3)}(\lambda - \lambda^{-2}) + 2C_3(1 - \lambda^{-3}).$$

Эта модель весьма часто применяется в исследованиях *in silico* биологических материалов [20, 21]. В иерархии гиперупругих моделей она обеспечила хорошее соответствие всем исследованным материалам в широком интервале деформаций. Предел производной функции  $\sigma(\varepsilon)$  для этой модели

$$E(C_1, C_2, C_3) := \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{d}{d\lambda} \sigma(\lambda, C_1, C_2, C_3) \rightarrow 6C_3 + 6C_1C_2,$$

откуда следует

$$6(C_1C_2 + C_3) = E_0. \quad (10)$$

## 2. Сравнение результатов расчетов начального упругого модуля и прогностической способности гиперупругих моделей при малых деформациях

Представляет интерес сравнение численных результатов, полученных с помощью формул (3), (5), (7)–(10), между собой и с показателями упругих моделей (рис. 3): линейной (однофазной)  $\sigma = E\varepsilon$ , билинейной (двухфазной)  $\sigma = E_1\varepsilon + E_2(\varepsilon - \varepsilon_{cr})\Theta(\varepsilon_{cr})$  и экспоненциальной  $\sigma = a \cdot (\exp[b \cdot \varepsilon] - 1)$ , где  $E$  — модуль упругости в линейной модели,  $E_1, E_2$  — модули упругости в билинейной модели,  $\Theta$  — функция Хэвисайда,  $\varepsilon_{cr}$  — критическая деформация (для биологических тканей деформация, при которой эластиновый механизм сменяется коллагеновым),  $a$  и  $b$  — параметры экспоненциальной модели (представлена на рис. 3 сплошной линией). В качестве примера рассмотрены характеристики биоматериала — надкостницы носа (nasal periosteum) человека при малых деформациях, рассчитанные на основе опытных  $\sigma - \varepsilon$  данных [12].

Из результатов сравнения, приведенных в табл. 2, видно, что численные данные весьма сильно отличаются друг от друга. Наиболее близки между собой значения модулей упругости, рассчитанные в билинейной и экспоненциальной моделях, гиперупругих моделях Огдена и Веронда – Вестманн (в последних двух они одного порядка). По показателям к линейной модели наиболее близка гиперупругая неогуковская модель ( $E_0 = 6\mu = 7.948$  МПа), а к билинейной и экспоненциальной — модель Огдена ( $E_0 = 1.5\mu\alpha = 1.284$  МПа) и Веронда – Вестманн ( $E_0 = 6(C_1C_2 + C_3) = 0.621$  МПа).

Механическую нестабильность ( $E_0 < 0$ ) продемонстрировали модели 2-параметрическая Муни – Ривлина, Йео и полиномиальная, что подтверждают графики функций  $\sigma(\lambda)$  этих моделей при малых деформациях (см. рис. 2). Особенно явно наличие интервала нестабильности ( $\lambda = 1.00 \div 1.03$ ) выражено у модели Муни – Ривлина ( $6(C_{10} + C_{01}) = -8.094$  МПа), менее четко — у полиномиальной ( $6(C_{10} + C_{01}) = -5.074$  МПа) и модели Йео ( $C_1 = -1.311$  МПа).

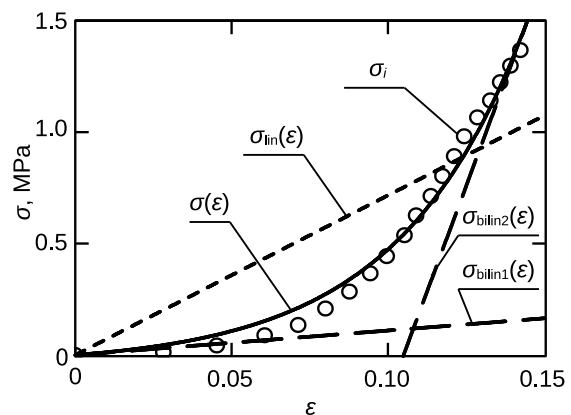


Рис. 3. Упругие модели надкостницы носа. Сплошной линией представлена экспоненциальная модель

Fig. 3. Elastic models of nasal periosteum. The solid line represents the exponential model





Таблица 2 / Table 2

Начальный модуль упругости различных моделей биоматериала  
Initial modulus of elasticity of different biomaterial models

Типы моделей		Модуль Юнга, МПа	
Упругие	Линейная	$E$	7.177
	Билинейная	$E_1$	1.10
	Экспоненциальная	$E_0$	1.10
Гиперупругие	Неогуковская	$E_0$	7.95
	Муни – Ривлина		–8.10
	Огдена		1.28
	Йео		–1.31
	Полиномиальная		–5.07
	Веронда – Вестманн		0.62

Таким образом, модели Муни – Ривлина, Йео и полиномиальная неточно описывают экспериментальную кривую тканей надкостницы носа на старте деформаций. Отметим, что во всем интервале деформаций полностью адекватно с точки зрения механической устойчивости проявили себя модели неогуксовская ( $\Delta = 0.276$ ,  $\delta = 27.81\%$ ,  $R = 0.898$ ), Огдена ( $\Delta = 0.053$ ,  $\delta = 6.35\%$ ,  $R = 0.995$ ) и Веронда – Вестманн ( $\Delta = 0.020$ ,  $\delta = 2.94\%$ ,  $R = 0.9992$ ), где параметры  $\Delta$  – стандартное отклонение,  $\delta$  – максимальная приведенная погрешность,  $R$  – коэффициент корреляции соответственно.

Комплекс этих результатов подтверждает тезис, согласно которому основная проблема, возникающая при исследовании гиперупругих тел, заключается в выборе модели, наиболее адекватно описывающей поведение материала.

## Выводы

1. Рассмотрена физическая интерпретация материальных постоянных наиболее распространенных гиперупругих моделей тел. Материальные постоянные моделей сопоставлены с упругими модулями материалов в недеформированном состоянии.

2. Верифицировано, что для неогуксовской модели  $\mu = E_0/6$ , для 2-параметрической модели Муни – Ривлина  $C_{01} + C_{10} = E_0/6$ . Установлено, что такая же формула справедлива, кроме того, для 3-, 5- и 9-параметрических моделей Муни – Ривлина и полиномиальной модели 2-го порядка. Для моделей Огдена  $3\mu\alpha = 2E_0$ , Йео  $C_1 = E_0/6$ , Веронда – Вестманн  $6(C_1C_2 + C_3) = E_0$ . Численные результаты расчетов  $E_0$  сопоставлены между собой и с показателями упругих моделей на примере биоматериала.

3. Материальные постоянные являются показателями механической стабильности гиперупругих моделей вследствие условия Hill – Drucker.

4. Отдельные гиперупругие модели неудовлетворительно характеризуют случаи малых деформаций. Адекватно прогнозируют механическое поведение исследованного биоматериала в широком интервале деформаций модели неогуксовская, Огдена и Веронда – Вестманн.

## Список литературы

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / пер. с англ. Ю. В. Немировского ; под ред. Ю. Н. Работнова. Москва : Мир, 1965. 455 с.
2. Шмурак М. И., Кучумов А. Г., Воронова Н. О. Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // Master's Journal. 2017. № 1. Р. 230–243. EDN: YUOPFB.
3. Melly S. K., Liu L., Liu Y., Leng J. A review on material models for isotropic hyperelasticity // International Journal of Mechanical System Dynamics. 2021. Vol. 1, iss. 1. Р. 71–88. DOI: [10.1002/msd2.12013](https://doi.org/10.1002/msd2.12013)



4. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data // Computational Mechanics. 2004. Vol. 34. P. 484–502. DOI: [10.1007/s00466-004-0593-y](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y)
5. Zhao Z., Mu X., Du F. Modeling and verification of a new hyperelastic model for rubber-like materials // Mathematical Problems in Engineering. 2019. Vol. 2019. Art. 2832059. DOI: [10.1155/2019/2832059](https://doi.org/10.1155/2019/2832059)
6. Khaniki H. B., Ghayesh M. H., Chin R., Amabili M. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures // Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 110. P. 963–994. DOI: [10.1007/s11071-022-07700-3](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07700-3)
7. Payan Y., Ohayon J. Preface // Biomechanics of Living Organs: Hyperelastic Constitutive Laws for Finite Element Modeling. Elsevier, 2017. P. xxv–xxvi. DOI: [10.1016/b978-0-12-804009-6.10000-8](https://doi.org/10.1016/b978-0-12-804009-6.10000-8)
8. Hackett R. M. Hyperelasticity primer. Cham : Springer, 2018. 186 p. DOI: [10.1007/978-3-319-73201-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-73201-5)
9. Kumar N., Rao V. V. Hyperelastic Mooney – Rivlin model: Determination and physical interpretation of material constants // MIT International Journal of Mechanical Engineering. 2016. Vol. 6, iss. 1. P. 43–46.
10. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1958. Vol. 6, iss. 3. P. 236–249. DOI: [10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
11. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material // Journal of Applied Mechanics. 1959. Vol. 26, iss. 1. P. 101–106. DOI: [10.1115/1.4011929](https://doi.org/10.1115/1.4011929)
12. Zeng Y. J., Sun X. P., Yang J., Wu W., Xu X., Yan Y. P. Mechanical properties of nasal fascia and periosteum // Clinical Biomechanics. 2003. Vol. 18, iss. 8. P. 760–764. DOI: [10.1016/S0268-0033\(03\)00136-0](https://doi.org/10.1016/S0268-0033(03)00136-0)
13. Иванов Д. В., Фомкина О. А. Определение постоянных для моделей нео-Гука и Муни – Ривлина по результатам экспериментов на одноосное растяжение // Математика. Механика. 2008. Вып. 10. С. 114–117. EDN: [URZIV](https://www.edn.ru/urziv/)
14. Mooney M. A theory of large elastic deformations // Journal of Applied Physics. 1940. Vol. 11, iss. 9. P. 582–592. DOI: [10.1063/1.1712836](https://doi.org/10.1063/1.1712836)
15. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials // Collected Papers of R. S. Rivlin / eds. G. I. Barenblatt, D. D. Joseph. New York, NY, Springer, 1997. P. 120–142. DOI: [10.1007/978-1-4612-2416-7\\_10](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2416-7_10)
16. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data // Computational Mechanics. 2004. Vol. 34, iss. 6. P. 484–502. DOI: [10.1007/s00466-004-0593-y](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y)
17. Yeoh O. H. Some forms of the strain energy function for rubber // Rubber Chemistry and Technology. 1993. Vol. 66, iss. 5. P. 754–771. DOI: [10.5254/1.3538343](https://doi.org/10.5254/1.3538343)
18. Rivlin R. S. Some applications of elasticity theory to rubber engineering // Collected Papers of R. S. Rivlin / eds. G. I. Barenblatt, D. D. Joseph. New York, NY, Springer, 1997. P. 9–16. DOI: [10.1007/978-1-4612-2416-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2416-7_2)
19. Veronda D. R., Westmann R. A. Mechanical characterizations of skin-finite deformations // Journal of Biomechanics. 1970. Vol. 3, iss. 1. P. 111–124. DOI: [10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)
20. Муслов С. А., Перцов С. С., Арутюнов С. Д. Физико-механические свойства биологических тканей / под ред. О. О. Янушевича. Москва : Практическая медицина, 2023. 456 с.
21. Муслов С. А., Перцов С. С., Чижмаков Е. А., Асташина Н. Б., Никитин В. Н., Арутюнов С. Д. Упругая линейная, билинейная, нелинейная экспоненциальная и гиперупругие модели кожи // Российский журнал биомеханики. 2023. Т. 27, № 3. С. 89–103. DOI: [10.15593/RZhBiomeh/2023.3.07](https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2023.3.07), EDN: [QKAJEL](https://www.edn.ru/qkajel/)

## References

1. Green A., Adkins J. *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Clarendon Press, 1960. 348 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1965. 455 p.).
2. Shmurak M. I., Kuchumov A. G., Voronova N. O. Hyperelastic models analysis for description of soft human tissues behavior. *Master's Journal*, 2017, iss. 1, pp. 230–243 (in Russian). EDN: [YUOPFB](https://www.edn.ru/yuopfb/)
3. Melly S. K., Liu L., Liu Y., Leng J. A review on material models for isotropic hyperelasticity. *International Journal of Mechanical System Dynamics*, 2021, vol. 1, iss. 1, pp. 71–88. DOI: [10.1002/msd2.12013](https://doi.org/10.1002/msd2.12013)
4. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 2004, vol. 34, pp. 484–502. DOI: [10.1007/s00466-004-0593-y](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y)



5. Zhao Z., Mu X., Du F. Modeling and verification of a new hyperelastic model for rubber-like materials. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, vol. 2019, art. 2832059. DOI: [10.1155/2019/2832059](https://doi.org/10.1155/2019/2832059)
6. Khaniki H. B., Ghayesh M. H., Chin R., Amabili M. A review on the nonlinear dynamics of hyperelastic structures. *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 110, pp. 963–994. DOI: [10.1007/s11071-022-07700-3](https://doi.org/10.1007/s11071-022-07700-3)
7. Payan Y., Ohayon J. Preface. In: *Biomechanics of Living Organs: Hyperelastic Constitutive Laws for Finite Element Modeling*. Elsevier, 2017, pp. xxv–xxvi. DOI: [10.1016/b978-0-12-804009-6.10000-8](https://doi.org/10.1016/b978-0-12-804009-6.10000-8)
8. Hackett R. M. *Hyperelasticity primer*. Cham, Springer, 2018. 186 p. DOI: [10.1007/978-3-319-73201-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-73201-5)
9. Kumar N., Rao V. V. Hyperelastic Mooney–Rivlin model: Determination and physical interpretation of material constants. *MIT International Journal of Mechanical Engineering*, 2016, vol. 6, iss. 1, pp. 43–46.
10. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1958, vol. 6, iss. 3, pp. 236–249. DOI: [10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
11. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics*, 1959, vol. 26, iss. 1, pp. 101–106. DOI: [10.1115/1.4011929](https://doi.org/10.1115/1.4011929)
12. Zeng Y. J., Sun X. P., Yang J., Wu W., Xu X., Yan Y. P. Mechanical properties of nasal fascia and periosteum. *Clinical Biomechanics*, 2003, vol. 18, iss. 8, pp. 760–764. DOI: [10.1016/S0268-0033\(03\)00136-0](https://doi.org/10.1016/S0268-0033(03)00136-0)
13. Ivanov D. V., Fomkina O. A. Determination of constants for neo-Hooke and Mooney–Rivlin models based on uniaxial tension experiments. *Mathematics. Mechanics*, 2008, iss. 10, pp. 114–117 (in Russian). EDN: [UIRZIV](https://www.edn.ru/uirziv)
14. Mooney M. A theory of large elastic deformations. *Journal of Applied Physics*, 1940, vol. 11, iss. 9, pp. 582–592. DOI: [10.1063/1.1712836](https://doi.org/10.1063/1.1712836)
15. Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. In: Barenblatt G. I., Joseph D. D. (eds.) *Collected Papers of R. S. Rivlin*. New York, NY, Springer, 1997, pp. 120–142. DOI: [10.1007/978-1-4612-2416-7\\_10](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2416-7_10)
16. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 2004, vol. 34, iss. 6, pp. 484–502. DOI: [10.1007/s00466-004-0593-y](https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y)
17. Yeoh O. H. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 1993, vol. 66, iss. 5, pp. 754–771. DOI: [10.5254/1.3538343](https://doi.org/10.5254/1.3538343)
18. Rivlin R. S. Some applications of elasticity theory to rubber engineering. In: Barenblatt G. I., Joseph D. D. (eds.) *Collected Papers of R. S. Rivlin*. New York, NY, Springer, 1997, pp. 9–16. DOI: [10.1007/978-1-4612-2416-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2416-7_2)
19. Veronda D. R., Westmann R. A. Mechanical characterizations of skin-finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 1970, vol. 3, iss. 1, pp. 111–124. DOI: [10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)
20. Muslov S. A., Pertsov S. S., Arutyunov S. D. *Fiziko-mekhanicheskie svoystva biologicheskikh tkaney* [Physical and mechanical properties of biological tissues]. Ed. by O. O. Yanushevich. Moscow, Prakticheskaya meditsina, 2023. 456 p. (in Russian).
21. Muslov S. A., Pertsov S. S., Chijhnikov E. A., Astashina N. B., Nikitin V. N., Arutyunov S. D. Elastic linear, bilinear, nonlinear exponential and hyperelastic skin models. *Russian Journal of Biomechanics*, 2023, vol. 27, iss. 3, pp. 89–103 (in Russian). DOI: [10.15593/RZhBiomeh/2023.3.07](https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2023.3.07), EDN: [QKAJEL](https://www.edn.ru/qkajel)

Поступила в редакцию / Received 20.01.2024

Принята к публикации / Accepted 20.03.2024

Опубликована / Published 29.08.2025