



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 406–418

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 406–418

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418>

EDN: <https://elibrary.ru/OFVTQE>

Научная статья

УДК 539.374

Термосиловое резонансное нагружение трехслойной пластины

Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко[✉]

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, д. 34

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций, edstar0@yandex.by, ORCID: [0000-0002-2550-5377](https://orcid.org/0000-0002-2550-5377), SPIN: [3890-2740](https://spin.id.au/3890-2740), AuthorID: [152968](https://authorid.ru/152968)

Леоненко Денис Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики, геотехники и строительных конструкций, leoden@list.ru, ORCID: [0000-0001-8003-9279](https://orcid.org/0000-0001-8003-9279), SPIN: [6686-0799](https://spin.id.au/6686-0799), AuthorID: [518257](https://authorid.ru/518257)

Аннотация. Исследовано воздействие теплового удара на вынужденные колебания круговой трехслойной пластины, возбужденные резонансной нагрузкой. Пластина несимметричная по толщине, теплоизолированная на нижней поверхности и контуре. Распределение нестационарной температуры по толщине пластины вычисляется по приближенной формуле, полученной в результате решения задачи теплопроводности при усреднении теплофизических свойств материалов трехслойного пакета. В соответствии с гипотезой Неймана на свободные колебания, вызванные тепловым ударом (мгновенным падением теплового потока), накладываются вынужденные колебания от резонансной нагрузки. Используются следующие кинематические гипотезы. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко, согласно которой нормаль к срединной поверхности в процессе деформации перестает быть нормалью, но остается прямолинейной и несжимаемой. В постановку начально-краевой задачи входят дифференциальные уравнения поперечных колебаний пластины в частных производных, полученные вариационным методом, однородные начальные условия и граничные условия шарнирного опирания контура. Искомые функциями выступают прогиб пластины, угол поворота нормали в заполнителе (относительный сдвиг) и радиальное перемещение срединной поверхности заполнителя. Для их получения использована известная система собственных ортонормированных функций. Приведены соответствующие расчетные формулы и результаты числового параметрического анализа зависимости решения от интенсивности и времени воздействия теплового потока, величины силовой нагрузки.

Ключевые слова: круговая трехслойная пластина, тепловой удар, резонансная гармоническая нагрузка

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ Республики Беларусь «Конвергенция-2025».

Для цитирования: Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Термосиловое резонансное нагружение трехслойной пластины // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 406–418. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418), EDN: [OFVTQE](https://elibrary.ru/OFVTQE)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Thermal force resonant loading of a three-layer plate

E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko[✉]

Belarusian State University of Transport, 34 Kirova St., Gomel 246653, Belarus

Eduard I. Starovoitov, edstar0@yandex.by, ORCID: [0000-0002-2550-5377](https://orcid.org/0000-0002-2550-5377), SPIN: 3890-2740, AuthorID: 152968**Denis V. Leonenko**, leoden@list.ru, ORCID: [0000-0001-8003-9279](https://orcid.org/0000-0001-8003-9279), SPIN: 6686-0799, AuthorID: 518257

Abstract. The effect of thermal shock on forced vibrations of a circular three-layer plate excited by a resonant load is investigated. The plate is asymmetrical in thickness, thermally insulated on the lower surface and contour. The distribution of the non-stationary temperature over the thickness of the plate is calculated using an approximate formula obtained as a result of solving the problem of thermal conductivity by averaging the thermophysical properties of materials of a three-layer package. In accordance with the Neumann hypothesis, forced oscillations from a resonant load are superimposed on free oscillations caused by heat stroke (instantaneous drop in heat flow). The hypothesis of a broken line is used as a kinematic one: for high-strength thin bearing layers, the Kirchhoff hypothesis; for an incompressible thicker filler, the Timoshenko hypothesis about the straightness and incompressibility of a deformed normal that rotates by some additional angle (relative shift). The formulation of the initial boundary value problem includes differential equations of transverse vibrations of the plate in partial derivatives obtained by the variational method, homogeneous initial conditions and boundary conditions of the spherical support of the contour. The desired functions are plate deflection, relative shear, and radial displacement of the median plane of the filler. The analytical solution of the initial boundary value problem is constructed by decomposing the desired displacements into a series according to a system of proper orthonormal functions. The corresponding calculation formulas and the results of numerical parametric analysis of the dependence of the solution on the intensity and time of exposure to the heat flux, the magnitude of the power load are presented.

Keywords: circular three-layer plate, heat stroke, resonant harmonic load

Acknowledgements: The work was supported by the State Scientific Research Program of the Republic of Belarus “Convergence-2025”.

For citation: Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Thermal force resonant loading of a three-layer plate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 406–418 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-406-418), EDN: OFVTQE

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Современные требования машиностроительного комплекса к прочности и надежности конструкций, работающих в условиях воздействия комплексных динамических и температурных нагрузок, обуславливают применение композитных материалов. Конструктивные слоистые элементы широко применяются с середины прошлого века в транспортном машиностроении, аэрокосмическом комплексе и строительстве. Исследование их поведения при динамическом нагружении в нестационарных температурных полях является одной из наиболее актуальных проблем в последнее время. Поэтому созданию необходимых математических моделей посвящен достаточно широкий ряд публикаций. Рассмотрим некоторые из них.

Монографии [1–3] посвящены разработке расчетных моделей статического и динамического деформирования слоистых конструкций при воздействии различных физико-механических полей. Предлагаются подходы к выбору кинематических гипотез, постановке и методике решения краевых и начально-краевых задач, отмечаются возникающие особенности при тепловых воздействиях. В обзорной работе [4] изложены суть асимптотического

метода решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и методика применения этого метода для решения статических и динамических краевых задач тонких тел (балки, пластины, оболочки). Рассмотрены как классические, так и неклассические краевые задачи, более общие результаты проиллюстрированы решениями конкретных задач.

В статье [5] рассмотрено деформирование трехслойного упругопластического стержня, связанного с упругим основанием Винклера. В работе [6] предложена конечно-элементная формулировка для геометрически точных многослойных балок. Межслойное скольжение и подъем не учитываются. Решение получено численно. Изгиб трехслойных пластин в нейтронном потоке и деформирование при квазистатических переменных нагрузках в стационарном температурном поле приводится в статьях [7–10]. Несущая способность круглой многослойной пластины при большом прогибе исследована в [11]. Численное моделирование деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагрузках с кручением проведено в статьях [12, 13].

Свободные, вынужденные колебания и продольные волны в цилиндрических оболочках, включая вызванные резонансными нагрузками, рассмотрены в статьях [14–23]. Нестационарное динамическое воздействие на неоднородные балки изучалось в работах [24, 25]. Реакция слоистых пластин на ударное и импульсное воздействие исследована в публикациях [26–30]. Задачи об аэродинамических колебаниях и сверхзвуковом флаттере многослойных композитных пластин решались в [31, 32]. В статьях [33–37] анализируются характеристики динамических процессов в трехслойных пластинах и балках, взаимодействующих с упругим основанием или вязкой жидкостью. В статье [38] исследованы вынужденные колебания трехслойной круговой пластины, возбужденные мгновенно приложенной непрерывной нагрузкой и тепловым потоком.

Здесь рассмотрена постановка и предложено аналитическое решение задачи о резонансных колебаниях трехслойной упругой пластины круглой формы в нестационарном температурном поле.

1. Постановка задачи

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат. За координатную принимается плоскость, связанная со срединной поверхностью заполнителя (рис. 1).

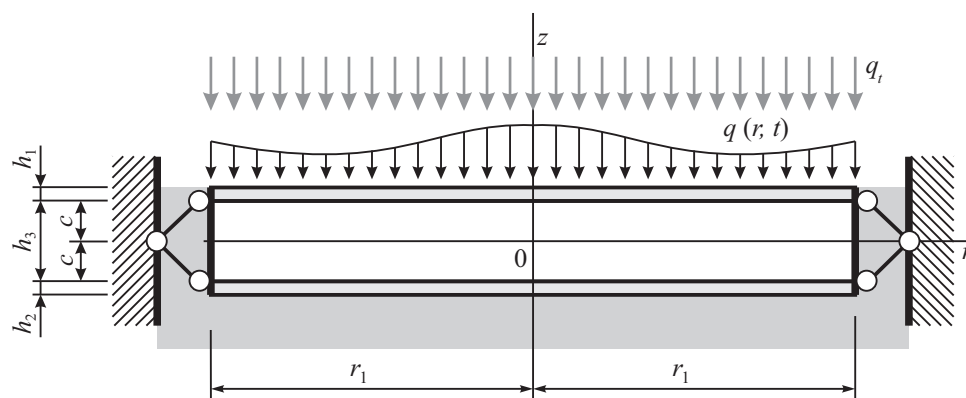


Рис. 1. Трехслойная круговая пластина под действием резонансной нагрузки и теплового потока

Fig. 1. A three-layer circular plate under resonant load and heat flow

Принимается, что к внешней плоскости $z = c + h_1$ в начальный момент времени ($t = 0$) подается тепловой поток постоянной интенсивности q_t . Пластина несимметричная по толщине. Для тонких несущих слоев с толщинами h_1, h_2 справедливы гипотезы Кирхгофа, т.е. нормаль после приложения нагрузки остается прямолинейной, не изменяет своей длины и



перпендикулярности к деформированной срединной поверхности слоя. В легком достаточно толстом заполнителе ($h_3 = 2c$) деформирование подчиняется гипотезе Тимошенко. В этом случае нормаль к срединной поверхности заполнителя после приложения нагрузки также прямолинейна, несжимаема, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r, t)$.

При решении задачи теплопроводности принималось, что контур пластины и ее нижняя поверхность ($z = -c - h_2$) теплоизолированы. В этом случае приращение температуры $T(z, t)$ во времени t и его изменение по толщине пластины будет определяться приближенной формулой, приведенной в [2]:

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где $a = \lambda/C$, $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$, $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k / H$, $H = \sum_{k=1}^3 h_k$, $s = z/H$, $\tau = ta/H^2$; a — усредненная температуропроводность; λ_k — коэффициент теплопроводности, C_k — коэффициент теплоемкости; здесь и далее $k = 1, 2, 3$ — номер слоя.

В качестве физических уравнений состояния принимался закон Гука в девиаторно-сферовой форме с учетом температуры:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k e_{\alpha}^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T) \quad (\alpha = r, \varphi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k e_{rz}^{(3)} \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $(e_{\alpha}^{(k)}, e_{rz}^{(3)})$ — девиаторы тензоров напряжений (деформаций), $\sigma^{(k)}$, $(\varepsilon^{(k)})$ — среднее напряжение (деформация); G_k , K_k — модули сдвига и объемного деформирования; α_{0k} — коэффициент линейного температурного расширения материалов слоев.

На пластину в начальный момент падают тепловой поток интенсивностью q_t и гармоническая силовая нагрузка, равномерно распределенная по внешней поверхности верхнего слоя:

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (3)$$

где $q_0 = \text{const}$, ω_k — интенсивность и частота внешней нагрузки, которая совпадает с одной из собственных частот ω_n пластины $\omega_k = \omega_n$; D , E — параметры нагрузки.

Общие уравнения собственных колебаний рассматриваемой пластины в нестационарном температурном поле (1) приведены в [38]. В нашем случае в третьем уравнении появится резонансная нагрузка (3):

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \end{aligned} \quad (4)$$

где $w(r, t)$, $\psi(r, t)$, $u(r, t)$ — искомые прогиб, относительный сдвиг и радиальное перемещение координатной поверхности; $M_0 \ddot{w}$ — инерционные силы, причем

$$M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_1^2,$$

ρ_k — плотность материала, точка сверху обозначает однократную производную по времени; дифференцирование по координате обозначено запятой в нижнем индексе; a_i — коэффициенты, выраженные через механические и геометрические параметры слоев [38]; L_2 , L_3 — дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$



На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу между слоями $\psi(r_1, t) = 0$. Следовательно, на шарнирно опертом контуре $r = r_1$ должны выполняться условия

$$u(r_1, t) = \psi(r_1, t) = w(r_1, t) = 0, \quad M_r(r_1, t) = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0, \quad (5)$$

где $\sigma_r^{(k)}$ — радиальное напряжение в k -м слое, M_r — обобщенный изгибающий момент, учитывающий тепловое воздействие,

$$M_r = a_3 u_{,r} + a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1} - M_t, \quad M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_k K_k \int_{h_k} T z dz,$$

$$a_{60} = h_1 \left(K_1 - \frac{2}{3} G_1 \right) \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + h_2 \left(K_2 - \frac{2}{3} G_2 \right) \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) +$$

$$+ \frac{2}{3} c^3 \left(K_3 - \frac{2}{3} G_3 \right),$$

M_t — температурный момент, возникающий из-за объемной тепловой деформации (2), выражение для которого получено с использованием (1) и приведено в [38].

В начальный момент времени прогиб, скорость и приращение температуры предполагаются нулевыми

$$w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = 0, \quad T(z, 0) = 0. \quad (6)$$

2. Решение начально-краевой задачи

Система (4) после элементарных преобразований приводится к виду

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r},$$

$$L_3(w, r) + M^4 \ddot{w} = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (7)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2}.$$

Перемещения в центре пластины должны быть ограниченными, поэтому необходимо в (7) обнулить константы интегрирования $C_2 = C_4 = 0$. Из первых двух граничных условий (5) следуют константы интегрирования

$$C_1 = -\frac{b_1}{r_1} w_{,r}(r_1, t), \quad C_3 = -\frac{b_2}{r_1} w_{,r}(r_1, t).$$

В результате для прогиба имеем два граничных условия при $r = r_1$:

$$w = 0, \quad a_7 w_{,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{,r} = -M_t, \quad (8)$$

где $a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2$, $a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2$.

Согласно гипотезе Неймана решение рассматриваемой задачи получим, накладывая на свободные колебания, вызванные тепловым ударом, вынужденные колебания за счет резонансной нагрузки. Суммируя решения, получим искомые перемещения.



Собственные колебания, вызванные мгновенным падением теплового потока (тепловым ударом), исследованы в [38], поэтому остановимся на колебаниях от резонансной нагрузки (3). Искомые функции и нагрузку разложим в ряд по системе собственных функций $v_n \equiv v_n(\beta_n r)$:

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} v_{,r} T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} v_{,r} T_n(t),$$

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (9)$$

где $T_n(t)$ — неизвестная функция времени; β_n — собственные числа оператора L_3 , d_n — нормировочный коэффициент; $J_0(\beta_n r)$, $I_0(\beta_n r)$ — функции Бесселя; $q_n(t)$ —

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t),$$

$$D_n = \frac{D q_0 r_1}{M_0 d_n \beta_n} \left[J_1(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right],$$

$$E_n = \frac{E q_0 r_1}{M_0 d_n \beta_n r_1} \left[J_1(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right],$$

ω_n — частоты собственных колебаний, причем $\omega_n^2 = \beta_n^4 / M^4$.

Если в третье уравнение системы (4) подставить выражения (9) с учетом коэффициентов $q_n(t)$, то получим дифференциальное уравнение второго порядка для искомой функции $T_n(t)$. В результате, учитывая ортонормированность системы v_n , имеем

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \ddot{M}_t, \quad (10)$$

где

$$I(\beta_n) = \frac{2}{d_n \beta_n^2} \left(J_2(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_2(\beta_n r_1) \right), \quad \ddot{M}_t = \sum_{k=1}^3 \ddot{M}_{kt};$$

$$\ddot{M}_{1t} = - \frac{6 q_t \alpha_{01} a^2 \pi}{\lambda H^2} K_1 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \left(\frac{H}{\pi} \left((-1)^n - \cos \frac{\pi n (2c + h_2)}{H} \right) - n c \sin \frac{\pi n (2c + h_2)}{H} \right);$$

$$\ddot{M}_{2t} = - \frac{6 q_t \alpha_{02} a^2 \pi}{\lambda H^2} K_2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \left(\frac{H}{\pi} \left(\cos \frac{\pi n h_2}{H} - 1 \right) - n c \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right);$$

$$\ddot{M}_{3t} = - \frac{6 q_t \alpha_{03} a^2 \pi}{\lambda H^2} K_3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \times$$

$$\times \left(\frac{H}{\pi} \left(\cos \frac{\pi n (2c + h_2)}{H} - \cos \frac{\pi n h_2}{H} \right) + n c \left(\sin \frac{\pi n (2c + h_2)}{H} + \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \right).$$

Решение уравнения (10) можно представить в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} \int_0^t \ddot{M}_t(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau + y_n(t), \quad (11)$$



где $y_n(t)$ — частное решение, зависящее от частоты резонансной нагрузки ω_k ,

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t), & n \neq k, \\ -\frac{E_k}{2\omega_k} t \cos(\omega_k t) + \frac{D_k}{2\omega_k} t \sin(\omega_k t), & n = k. \end{cases}$$

Начальные прогиб, скорость движения пластины и температуру считаем нулевыми (6). Производная от температуры в начальный момент задана:

$$\dot{T}_n(0) = -\frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \dot{M}_t(0),$$

где $\dot{M}_t(0)$ — величина скорости температурного момента,

$$\begin{aligned} \dot{M}_t(0) &= \sum_{k=1}^3 \dot{M}_{kt}(0), \quad \dot{M}_{1t}(0) = \frac{3q_t \alpha_{01} a K_1}{\lambda H} \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{H}{\pi n} \left((-1)^n - \cos \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} \right) - c \sin \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} \right) \right], \\ \dot{M}_{2t}(0) &= \frac{3q_t \alpha_{02} a K_2}{\lambda H} \left[-h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{H}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n h_2}{H} - 1 \right) - c \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \right], \\ \dot{M}_{3t}(0) &= \frac{6q_t \alpha_{03} a K_3}{\lambda \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times \\ &\quad \times \left(\frac{H}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} - \cos \frac{\pi n h_2}{H} \right) + c \left(\sin \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} + \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \right). \end{aligned}$$

Подставив в начальные условия выражение для прогиба (9) и функцию (11), получим константы интегрирования

$$\begin{aligned} A_n &= - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k, \\ 0, & n = k, \end{cases} \\ B_n &= -\frac{1}{\omega_n} \left[\begin{cases} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k}, & n = k \end{cases} \right] - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \dot{M}_t(0). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, резонансные колебания рассматриваемой пластины, учитывающие тепловой удар, описываются выражениями (9) с функцией времени (11) и константами интегрирования (12).

3. Численная апробация решения

Численная апробация решения проведена для круговой шарнирно опертой трехслойной пластины радиуса $r_1 = 1$ м, находящейся под совместным воздействием теплового потока и резонансной нагрузки с амплитудой $q_0 = 100$ Па. Толщины слоев $h_1 = h_2 = 0.02$ м, $h_3 = 0.05$ м. Температура усреднялась по толщине пластины. Для вычисления частот собственных колебаний ω_n использовались собственные числа β_n , приведенные в [38].

На рис. 2 показан рост амплитуды прогиба в центре пластины Д16-Т—фторопласт-4—Д16-Т при частоте нагрузки ω_k , совпадающей с одной из частот основного тона: $\omega_k = \omega_0$ (рис. 2, а) и $\omega_k = \omega_1$ (рис. 2, б).

Нагревание пластины примерно на 200°C приводит к среднему росту амплитуды колебаний на 11% и отклонению оси колебаний навстречу тепловому потоку. Увеличение собственной частоты колебаний приводит к большему отклонению оси колебаний.

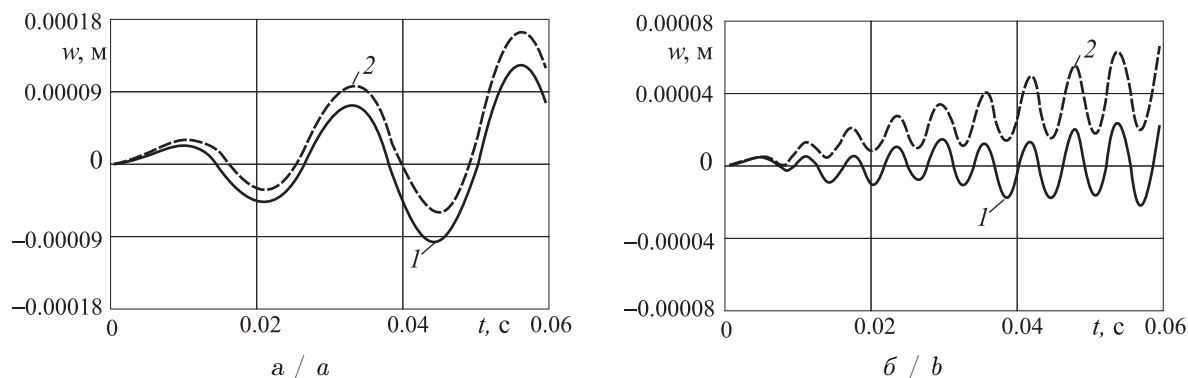


Рис. 2. Изменение прогиба пластины во времени при резонансных колебаниях в тепловом потоке (Д16-Т—фторопласт-4—Д16-Т) при $\omega_k = \omega_0$ (а) и $\omega_k = \omega_1$ (б). Кривая 1 соответствует величине теплового потока $q_t = 0$ Дж/(м²с); кривая 2 — $q_t = 2 \cdot 10^5$ Дж/(м²с)

Fig. 2. Change in plate deflection over time during resonant oscillations in the heat flow (D16-T—fluoroplastic-4—D16-T) at $\omega_k = \omega_0$ (a) and $\omega_k = \omega_1$ (b). Curve 1 corresponds to the heat flux value $q_t = 0$ J/(m²s); curve 2 corresponds to $q_t = 2 \cdot 10^5$ J/(m²s)

Аналогичные результаты для пластины, набранной из материалов ВТ-20—фторопласт-4—Д16-Т, приведены на рис. 3. Здесь, по сравнению с предыдущим случаем, отклонение оси колебаний наблюдается в большей степени в обоих случаях резонанса. Амплитуда колебаний уменьшается, что объясняется относительно большей жесткостью на изгиб титанового несущего слоя.

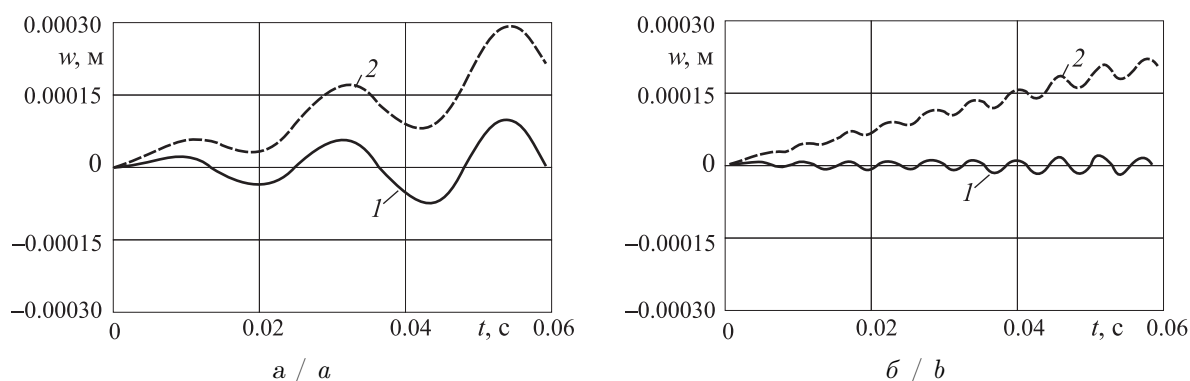


Рис. 3. Изменение прогиба пластины во времени при резонансных колебаниях в тепловом потоке (ВТ-20—фторопласт-4—Д16-Т) при $\omega_k = \omega_0$ (а) и $\omega_k = \omega_1$ (б). Кривая 1 соответствует величине теплового потока $q_t = 0$ Дж/(м²с); кривая 2 — $q_t = 2 \cdot 10^5$ Дж/(м²с)

Fig. 3. Change in plate deflection over time during resonant oscillations in a heat flow (VT-20—PTFE-4—D16-T) at $\omega_k = \omega_0$ (a) and $\omega_k = \omega_1$ (b). Curve 1 corresponds to the heat flux value $q_t = 0$ J/(m²s); curve 2 corresponds to $q_t = 2 \cdot 10^5$ J/(m²s)

Заключение

Предложенная математическая модель термосилового резонансного воздействия на трехслойную упругую круговую пластину позволяет учитывать влияние теплового удара на параметры колебаний. При шарнирно опертом контуре пластины тепловой удар приводит к возникновению свободных колебаний, на которые накладываются вынужденные колебания от резонансной силовой нагрузки. Повышение жесткости верхнего несущего слоя приводит к уменьшению амплитуды прогиба и увеличению отклонения оси колебаний.

Список литературы

1. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Boca Raton : CRC Press, 2003. 858 p. DOI: [10.1201/b12409](https://doi.org/10.1201/b12409)



2. Zhuravkov M. A., Lyu Yongtao, Starovoitov E. I. Mechanics of solid deformable body. Singapore : Springer, 2023. 317 p. DOI: [10.1007/978-981-19-8410-5](https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5), EDN: YECKNS
3. Carrera E., Fazzolari F. A., Cinefra M. Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: Computational modelling and applications. Academic Press, 2016. 440 p.
4. Aghalovyan L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. Singapore ; London : World Scientific Publishing Co., 2015. 376 p.
5. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В. Упругопластический изгиб трехслойного стержня на упругом основании // Прикладная механика. 2007. Т. 43, вып. 4. С. 110–120. EDN: ZISSEX
6. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // Acta Mechanica. 2014. Vol. 225, iss. 2. P. 523–541. DOI: [10.1007/s00707-013-0972-5](https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5)
7. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины в нейтронном потоке локальной нагрузкой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 360–375. DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375), EDN: DIDXGQ
8. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 60–75. DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75), EDN: HAOYOL
9. Zadeh H. V., Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load // International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering. 2017. Vol. 6, iss. 1. DOI: [10.14810/ijmech.2017.6101](https://doi.org/10.14810/ijmech.2017.6101)
10. Яровая А. В. Термоупругий изгиб трехслойной пластины на деформируемом основании // Прикладная механика. 2006. Т. 42, № 2. С. 96–103. EDN: HFGHJZ
11. Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection // Journal of Engineering Mechanics. 2017. Vol. 143, iss. 9. DOI: [10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243)
12. Паймушин В. Н. Теория среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53, № 1. С. 3–26.
13. Баженов В. Г., Линник Е. Ю., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А. Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 14–27. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27), EDN: DFKLFV
14. Mikhasev G. I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells // Mikhasev G. I., Altenbach H. Thin-walled laminated structures. Cham : Springer, 2019. P. 157–198. (Advanced Structured Materials, vol. 106). DOI: [10.1007/978-3-030-12761-9_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4)
15. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Harmonic vibrations of a three-layered cylindrical viscoelastoplastic shell // Прикладная механика. 2001. Т. 37, № 9. С. 100–107. EDN: MPVWIL
16. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 2. С. 69–76. EDN: SEJMAV
17. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 196–204. DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204), EDN: EAHYFO
18. Бакулин В. Н., Бойцова Д. А., Недбай А. Я. Параметрический резонанс подкрепленной шпангоутами трехслойной цилиндрической композитной оболочки // Механика композитных материалов. 2021. Т. 57, № 5. С. 887–900. DOI: [10.22364/mkm.57.5.06](https://doi.org/10.22364/mkm.57.5.06)
19. Блинков Ю. А., Месянжсин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 184–197. DOI: [10.18500/hm1816-9791-2016-16-2-184-197](https://doi.org/10.18500/hm1816-9791-2016-16-2-184-197), EDN: WCNQLF
20. Лекомцев С. В., Матвеев В. П. Собственные колебания композитных эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью // Известия Саратовского университета. Новая серия.



- Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 71–85. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85), EDN: [QFММАН](#)
21. Крылова Е. Ю. Математическая модель колебаний ортотропных сетчатых микрополярных цилиндрических оболочек в условиях температурных воздействий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 231–244. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244), EDN: [VLEBOS](#)
 22. Суворов Е. М., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 850–859. EDN: [PGRKRJ](#)
 23. Дзедзисавили Г. Т., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 49–56. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56), EDN: [BFHZFQ](#)
 24. Кубенко В. Д., Плещачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании // Прикладная механика. 2006. Т. 42, № 5. С. 57–63. EDN: [VDICMO](#)
 25. Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, iss. 4. P. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061), EDN: [UGSEFV](#)
 26. Смирнов А. Л., Васильев Г. П. Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 227–237. DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237), EDN: [TSGRWC](#)
 27. Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates // Composite Structures. 2015. Vol. 133. P. 1127–1136. DOI: [10.1016/j.compstruct.2015.08.035](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035)
 28. Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material // International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. 2015. Vol. 3, iss. 08. P. 1487–1493. DOI: [10.18535/ijmeit/v2i8.02](https://doi.org/10.18535/ijmeit/v2i8.02)
 29. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442–451. DOI: [10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451), EDN: [KRMOVZ](#)
 30. Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К. Статическое и моногармоническое акустическое воздействия на многослойную пластину // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53, № 3. С. 407–436.
 31. Паймушин В. Н., Фирсов В. А., Шиликин В. М. Моделирование динамической реакции при резонансных колебаниях углепластиковой пластины с учетом внутреннего трения в материале и внешнего аэродинамического демпфирования // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53, № 4. С. 609–630.
 32. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // Aerospace Science and Technology. 2016. Vol. 52. P. 41–51. DOI: [10.1016/j.ast.2016.02.017](https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017)
 33. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок // Механика композитных материалов. 2016. Т. 52, вып. 5. С. 943–954. EDN: [SBWKDH](#)
 34. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 944. Art. 012057. DOI: [10.1088/1742-6596/944/1/012057](https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057)
 35. Быкова Т. В., Грушенкова Е. Д., Попов В. С., Попова А. А. Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 351–366. DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366), EDN: [ECKRZN](#)
 36. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3–11. EDN: [RXRDZJ](#)



37. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient // *Meccanica*. 2016. Vol. 51, iss. 3. P. 725–739. DOI: [10.1007/s11012-015-0229-6](https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6)
38. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Вынужденные колебания трехслойной пластины в нестационарном температурном поле // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 123–137. DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137), EDN: [TMUGDP](https://www.edn.ru/1816-9791-2024-24-1-123-137)

References

1. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2003. 858 p. DOI: [10.1201/b12409](https://doi.org/10.1201/b12409)
2. Zhuravkov M. A., Lyu Yongtao, Starovoitov E. I. *Mechanics of Solid Deformable Body*. Singapore, Springer, 2023. 317 p. DOI: [10.1007/978-981-19-8410-5](https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5), EDN: [YECKNS](https://www.edn.ru/978-981-19-8410-5)
3. Carrera E., Fazzolari F. A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press, 2016. 440 p.
4. Aghalovyan L. *Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells*. Singapore, London, World Scientific Publishing, 2015. 376 p.
5. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, iss. 4, pp. 451–459. DOI: [10.1007/s10778-007-0042-6](https://doi.org/10.1007/s10778-007-0042-6), EDN: [MCMQPR](https://www.edn.ru/10778-007-0042-6)
6. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, iss. 2, pp. 523–541. DOI: [10.1007/s00707-013-0972-5](https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5)
7. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of an elastic circular three-layer plate in a neutron flux by a local load. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 360–375 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375), EDN: [DIDXGQ](https://www.edn.ru/1816-9791-2022-22-3-360-375)
8. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Repeated alternating loading of a elastoplastic three-layer plate in a temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 60–75 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75), EDN: [HAOYOL](https://www.edn.ru/1816-9791-2021-21-1-60-75)
9. Zadeh H. V., Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*, 2017, vol. 6, iss. 1. DOI: [10.14810/ijmech.2017.6101](https://doi.org/10.14810/ijmech.2017.6101)
10. Yarovaya A. V. Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation. *International Applied Mechanics*, 2006, vol. 42, iss. 2, pp. 206–213. DOI: [10.1007/s10778-006-0078-z](https://doi.org/10.1007/s10778-006-0078-z), EDN: [MCMQPR](https://www.edn.ru/10778-006-0078-z)
11. Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017, vol. 143, iss. 9. DOI: [10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243)
12. Paimushin V. N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 1, pp. 1–16. DOI: [10.1007/s11029-017-9636-1](https://doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1)
13. Bazhenov V. G., Linnik E. Yu., Nagornyykh E. V., Samsonova D. A. Numerical modeling of the processes of deformation and buckling of multilayer shells of revolution under combined quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 14–27 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27), EDN: [DFKLFV](https://www.edn.ru/1816-9791-2024-24-1-14-27)
14. Mikhasev G. I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled laminated structures*. Advanced Structured Materials, vol. 106. Cham, Springer, 2019, pp. 157–198. DOI: [10.1007/978-3-030-12761-9_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4)
15. Gorshkov A. G., Starovoitov É. I., Yarovaya A. V. Harmonic vibrations of a three-layered cylindrical viscoelastoplastic shell. *International Applied Mechanics*, 2001, vol. 37, iss. 9, pp. 1196–1203. DOI: [10.1023/A:1013290600951](https://doi.org/10.1023/A:1013290600951), EDN: [LGYIHX](https://www.edn.ru/1013290600951)
16. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 2, pp. 145–152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178), EDN: [SKRUSB](https://www.edn.ru/1052618814010178)
17. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 196–204 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204), EDN: [EAHYFO](https://www.edn.ru/1816-9791-2022-22-2-196-204)



18. Bakulin V. N., Boitsova D. A., Nedbai A. Ya. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*, 2021, vol. 57, iss. 5, pp. 623–634. DOI: [10.1007/s11029-021-09984-9](https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9), EDN: [OWFMTR](#)
19. Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave occurrences mathematical modeling in two geometrically nonlinear elastic coaxial cylindrical shells, containing viscous incompressible liquid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197), EDN: [WCNQLF](#)
20. Lekontsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibration of composite elliptical cylindrical shells filled with fluid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 71–85 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85), EDN: [QFMMAH](#)
21. Krylova E. Yu. Mathematical model of orthotropic meshed micropolar cylindrical shells oscillations under temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 231–244 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-231-244), EDN: [VLEBOS](#)
22. Suvorov Y. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 5, pp. 511–518. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015), EDN: [WQYBID](#)
23. Dzebisashvili G. T., Smirnov A. L., Filippov S. B. Free vibration frequencies of prismatic thin shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 49–56 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56), EDN: [BFHZFQ](#)
24. Kubenko V. D., Pleskachevskii Yu. M., Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2006, vol. 42, iss. 5, pp. 541–547. DOI: [10.1007/s10778-006-0118-8](https://doi.org/10.1007/s10778-006-0118-8), EDN: [MKSHTX](#)
25. Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 4, pp. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061), EDN: [UGSEFV](#)
26. Smirnov A. L., Vasiliev G. P. Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 227–237 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237), EDN: [TSGRWC](#)
27. Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, vol. 133, pp. 1127–1136. DOI: [10.1016/j.compstruct.2015.08.035](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035)
28. Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*, 2015, vol. 3, iss. 08, pp. 1487–1493. DOI: [10.18535/ijmeit/v2i8.02](https://doi.org/10.18535/ijmeit/v2i8.02)
29. Belostochny G. N., Myltcina O. A. The geometrical irregular plates under the influence of the quick changed on the time coordinate forces and temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 442–451 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451), EDN: [KRMOVZ](#)
30. Paimushin V. N., Gazizullin R. K. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 3, pp. 283–304. DOI: [10.1007/s11029-017-9662-z](https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z)
31. Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 4, pp. 425–440. DOI: [10.1007/s11029-017-9673-9](https://doi.org/10.1007/s11029-017-9673-9)
32. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, iss. 52, pp. 41–51. DOI: [10.1016/j.ast.2016.02.017](https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017)
33. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads. *Mechanics of Composite Materials*, 2016, vol. 52, iss. 5, pp. 665–672. DOI: [10.1007/s11029-016-9615-y](https://doi.org/10.1007/s11029-016-9615-y), EDN: [YXHNYN](#)
34. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 944, art. 012057. DOI: [10.1088/1742-6596/944/1/012057](https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057)



35. Bykova T. V., Grushenkova E. D., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic response of a sandwich plate possessing a compressible core and interacting with a rigid die via a viscous fluid layer. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 351–366 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366), EDN: [ECKRZN](#)
36. Ageev R. V., Mogilevich L. I., Popov V. S. Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 1, pp. 1–8. DOI: [10.3103/S1052618814010026](https://doi.org/10.3103/S1052618814010026), EDN: [WQYYKN](#)
37. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 725–739. DOI: [10.1007/s11012-015-0229-6](https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6)
38. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Forced oscillations of a three-layer plate in an unsteady temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 123–137 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137), EDN: [TMUGDP](#)

Поступила в редакцию / Received 18.07.2024

Принята к публикации / Accepted 05.10.2024

Опубликована / Published 29.08.2025