



## ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 434–441

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 434–441

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441>

EDN: <https://elibrary.ru/PBFZMW>

Научная статья

УДК 519.237.8

### Дендрограммы электроэнцефалограмм и их характеристика на основе метрик

Л. Б. Тяпаев<sup>1</sup>✉, В. С. Анашин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, ул. Ленинские горы, д. 1

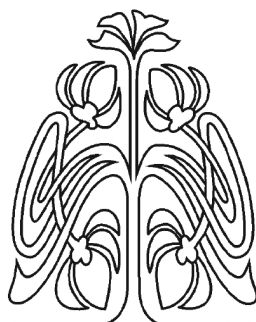
<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

**Тяпаев Ливат Борисович**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой дискретной математики и информационных технологий, [tiapaevlb@info.sgu.ru](mailto:tiapaevlb@info.sgu.ru), ORCID: [0000-0002-3573-6937](https://orcid.org/0000-0002-3573-6937), SPIN: [8417-3339](https://elibrary.ru/8417-3339), AuthorID: [147693](https://elibrary.ru/147693)

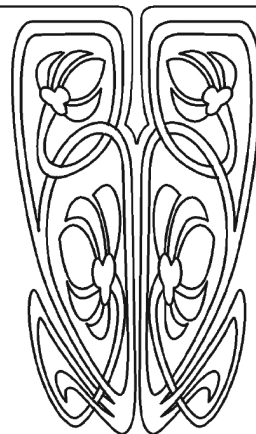
**Анашин Владимир Сергеевич**, доктор физико-математических наук, <sup>2</sup>профессор кафедры информационной безопасности; <sup>3</sup>ведущий научный сотрудник, [vladimir.anashin@cs.msu.ru](mailto:vladimir.anashin@cs.msu.ru), ORCID: [0000-0001-5319-7159](https://orcid.org/0000-0001-5319-7159), AuthorID: [156116](https://elibrary.ru/156116)

**Аннотация.** Дендрограммы, полученные из электроэнцефалограмм, изучаются как максимальные префиксные коды. Дендрограмма задает распределение на пространстве целых 2-адических чисел и представляет разбиение с точностью до множества нулевой меры Хаара на шары ненулевых радиусов. Предложены неархимедова и архимедова метрики для характеристики дендрограмм, ассоциированных с ЭЭГ заданных ментальных классов. Для более надежного отличия одного ментального класса от другого предлагается использовать расстояние Громова – Хаусдорфа между несвязными компактными пространствами: неархимедовым в виде объединения 2-адических шаров, представленных ветвями дендрограммы, с одной стороны, и архимедовым в виде (толстого) канторова множества — с другой.

**Ключевые слова:** дендрограмма ЭЭГ, максимальный префиксный код, целые 2-адические числа, ультраметрика, метрическое пространство дендрограмм, характеристическая функция распределения, 2-адический шар, метрика Громова – Хаусдорфа



Научный  
отдел





**Для цитирования:** Тяпаев Л. Б., Анашин В. С. Дендрограммы электроэнцефалограмм и их характеристика на основе метрик // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 434–441. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441), EDN: PBFZMW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Dendrograms of electroencephalograms and their characterization based on metrics

L. B. Tyapaev<sup>1✉</sup>, V. S. Anashin<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, GSP-1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

<sup>3</sup>Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44, bldg. 2 Vavilova St., Moscow 119333, Russia

**Livat B. Tyapaev**, [tiapaevlb@info.sgu.ru](mailto:tiapaevlb@info.sgu.ru), ORCID: [0000-0002-3573-6937](https://orcid.org/0000-0002-3573-6937), SPIN: [8417-3339](https://sp.institute.ru/8417-3339), AuthorID: [147693](https://authorid.ru/147693)

**Vladimir S. Anashin**, [vladimir.anashin@cs.msu.ru](mailto:vladimir.anashin@cs.msu.ru), ORCID: [0000-0001-5319-7159](https://orcid.org/0000-0001-5319-7159), AuthorID: [156116](https://authorid.ru/156116)

**Abstract.** Dendrograms obtained from electroencephalograms are studied as maximal prefix codes. A dendrogram defines a distribution on the space of 2-adic integers and represents a partition, up to the set of zero Haar measure, into balls of nonzero radii. Non-Archimedean and Archimedean metrics are proposed for the characterization of dendrograms associated with the electroencephalograms of given mental classes. To more reliably distinguish one mental class from another, it is proposed to use the Gromov–Hausdorff distance between disconnected compact spaces: non-Archimedean in the form of a union of 2-adic balls represented by branches of a dendrogram, on the one hand, and Archimedean in the form of a (fat) Cantor set, on the other hand.

**Keywords:** EEG dendrogram, maximal prefix code, 2-adic integers, ultrametric, metric space of dendrograms, characteristic distribution function, 2-adic ball, Gromov–Hausdorff distance

**For citation:** Tyapaev L. B., Anashin V. S. Dendrograms of electroencephalograms and their characterization based on metrics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 434–441 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-434-441), EDN: PBFZMW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Мотивацией для данного исследования послужил метод анализа электроэнцефалограмм (ЭЭГ), предварительно разделенных на классы по вынесенному врачебному вердикту, на основе величины  $p$ -адического квантового потенциала [1, 2]. Медицинское исследование соответствовало правилам и положениям Хельсинкской декларации и было одобрено Институциональным наблюдательным советом (IRB) Медицинского центра Рабина (Rabin Medical Center, Petach Tikva, Israel (0275-20-RMC)). Все данные пациентов были полностью анонимизированы перед рассмотрением. Данные ЭЭГ были предоставлены О. Шором с согласия Медицинского центра Рабина.

В исследовании используются записи ЭЭГ и частота их дискретизации в виде двумерного массива, в котором представлены единичные считывания сигнала и 19 значений электрических потенциалов электродов в мВ. Всего записей ЭЭГ 235: alz (43 пациента; болезнь Альцгеймера), dep (28 пациентов; депрессия), mci (27 пациентов; умеренное когнитивное расстройство), schiz (41 пациент; шизофрения), controls (96 пациентов; контрольная группа).



Данное исследование — это продолжение работ [3, 4] по классификации ментальных классов на основе анализа дендрограмм, построенных по набору временных рядов ЭЭГ головного мозга. Напомним, что дендрограммы суть плоские двоичные деревья с  $2s + 1$  вершинами (или с  $s + 1$  концевыми вершинами). Поскольку любая дендрограмма является максимальным префиксным кодом, то для каждой ветви любой дендрограммы можно оценить математическое ожидание длины кодовой последовательности, дисперсию и энтропию. В [3] была выявлена следующая особенность: средние значения математического ожидания, энтропии и дисперсии для группы дендрограмм пациентов одного ментального класса являются уникальными. В [4] было обнаружено следующее свойство: при сопоставлении пациенту точки на плоскости, где точка соответствует длинам двух выбранных ветвей его дендрограммы, для некоторых классов было обнаружено выстраивание точек в параллельные линейные структуры, называемые эпсилон-цилиндрами. На основании найденного свойства был разработан алгоритм для их выявления и классификации по углам поворота относительно осей координат и линии сравнения. В данной работе рассматривается задача распределения пациентов по различным классам на основе анализа префиксных кодов, полученных посредством обработки ЭЭГ через их преобразования к виду дендрограмм с использованием различных метрик.

## 1. Построение дендрограмм

В данном исследовании извлечение данных ЭЭГ производится непосредственно из анализируемых файлов с данными формата HDF5. К записи ЭЭГ применяются два фильтра. Первый — режекторный фильтр с бесконечной импульсной характеристикой, используемый для исключения помех частотой 50 Гц, вызванных колебаниями в электрической сети. Второй — фильтр высоких частот Баттерворта для исключения частот ниже 1 Гц. Устанавливается временное окно в 1 с. Переменная времени  $t \in [1, n/W]$ , где  $n = \lfloor \frac{\text{число единичных считываний сигнала}}{\text{частота дискретизации}} \rfloor$ , а  $W$  — размер временного окна. Единичное считывание — это вектор из 19 значений, по одному на электрод. Производится нормализация значений электрических потенциалов внутри каждого окна. Для расчета применяется следующая формула:  $\hat{e}p_{elec,t} = \frac{|ep_{elec,t}|}{\max |ep_{elec,t}|}$ , где  $\hat{e}p_{elec,t} \in [0, 1]$  — нормализованная во временном окне запись ЭЭГ для соответствующего электрода,  $|ep_{elec,t}|$  — абсолютные значения записи ЭЭГ во временном окне. Производится свёртка ЭЭГ данных во временном окне. Каждую секунду записи сворачиваем с шагом в 5 единичных считываний сигнала, получаем новый набор данных  $h_{elec,t}$ . В данном исследовании свёртка производится независимо от частоты дискретизации, а в качестве операции свёртки используется вычисление среднего значения. Затем вычисляем расстояние Хеллингера попарно для векторов электродов по формуле  $H(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\sum_{i=1}^k (\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2} \right)$ , где  $k$  — число единичных считываний записи ЭЭГ,  $x = h_{elec,t}$  — временной ряд электрода  $elec$ ,  $t$  — время в секундах,  $y = h'_{elec,t}$  — временной ряд для иного электрода. Дендрограмма строится посредством алгоритма «ближайшая соседняя цепь». Для вычисления расстояний между кластерами используется формула полной связи —  $\max\{d(I, K), d(J, K)\}$ , где  $I$  и  $J$  — объединяемые кластеры,  $K$  — любой другой, а  $d$  — рефлексивное и симметричное отношение (расстояние между кластерами). Каждому электроду сопоставляется бесконечная последовательность из нулей и единиц — целое 2-адическое число, на основании бинарного кодирования ветвей дендрограммы, причем префикс такой последовательности ассоциирован с конечной ветвью дендрограммы. Двоичные коды ветвей дендрограммы образуют максимальный префиксный код.

## 2. Метрические пространства дендрограмм

### 2.1. Ультраметрика

В силу того, что дендрограммы являются максимальными префиксными кодами, они могут быть рассмотрены как функции на обратном спектре колец вычетов по модулю  $2^k$ ,



т.е. на множестве всех дендрограмм можно задать неархимедову метрику (ультраметрику)  $\rho$ , которая индуцирована 2-адической  $\sup$ -нормой. Иными словами, расстояние  $\rho$  между двумя дендрограммами  $a$  и  $b$  равно  $2^{-k}$ , где  $k$  — максимальное натуральное такое, что дендрограммы  $a$  и  $b$  по модулю  $2^k$  совпадают. Более того, любая дендрограмма задает упорядоченное разбиение пространства  $\mathbb{Z}_2$  целых 2-адических чисел на непересекающиеся шары, объединение которых и образуют дендрограмму. Шар есть смежный класс по идеалу, порожденному степенью двойки, в кольце вычетов по модулю  $2^k$ . Каждый шар радиуса  $2^{-\ell}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  однозначно определяется словом длины  $\ell$ , следовательно, ветвью длины  $\ell$ , исходящей из корня дендрограммы. Средние значения ультраметрики для исследуемых классов дендрограмм представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Средние значения  $\rho$  / Average values of  $\rho$ 

$\rho$	alz	controls	dep	mci	schiz
alz	0.23438	0.19375	0.19375	0.23438	0.23438
controls	—	0.16406	0.19375	0.19375	0.19375
dep	—	—	0.23438	0.23438	0.23438
mci	—	—	—	0.23438	0.23438
schiz	—	—	—	—	0.23438

С помощью ультраметрики  $\rho$  мы сравниваем дендрограммы топологически. Как видно из данных, приведенных в таблице, для  $\rho$ , число возможных различных значений невелико, поэтому структура исследуемых классов дендрограмм слабо различима: трудно сказать что-либо о принадлежности ЭЭГ конкретному классу ввиду большого числа совпадений, но различия встречаются, значит, можно предположить, что при изменении параметров предобработки исходных данных ЭЭГ ультраметрика может стать выразительнее.

## 2.2. Метрика

Дендрограмма есть распределение на пространстве  $\mathbb{Z}_2$  целых 2-адических чисел, следовательно, дендрограмма представляет разбиение с точностью до множества нулевой меры Хаара на шары ненулевых радиусов. Распределение это дискретно, характеристическая функция которого имеет вид

$$\chi(C) = \sum_{w \in C} 2^{-\Lambda(w)} e^{iN(w)}, \quad (1)$$

где  $C$  — префиксный код,  $\Lambda(w)$  — длина слов  $w$ ,  $N(w)$  — номер шара, который задается словом  $w$ .

Отметим, что  $\sum_{w \in C} 2^{-\Lambda(w)} = 1$ , поскольку дендрограмма — максимальный префиксный код. Все характеристические функции распределений (1) есть элементы гильбертова пространства  $\ell^2$  последовательностей  $x$  над полем  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, суммируемых вместе со своими квадратами. На пространстве  $\ell^2$  норма  $\|x\|$  задается так:  $\|x\| = \sqrt{x\bar{x}}$ , где  $x = \sum_{w \in C} 2^{-\Lambda(w)} e^{iN(w)}$ ,  $\bar{x} = \sum_{w \in C} 2^{-\Lambda(w)} e^{-iN(w)}$ . В случае максимальных префиксных кодов

$$x\bar{x} = \sum_{w \in C} 2^{-2\Lambda(w)}, \quad (2)$$

и ряд (2) сходится, поскольку величины  $2^{-\Lambda(w)}$  — вероятности, их сумма равна единице. Таким образом, норма задана корректно, все характеристические функции распределения (1) имеют норму не больше 1, расстояние между ними есть норма разности. Более того, характеристическая функция (1) есть волновая функция квантовой системы с дискретным



спектром (см. [5]). Далее, при фиксированной нумерации ветвей дендрограмм  $1, 2, \dots, m$  (в исследуемых дендрограммах ЭЭГ  $m = 19$ ) расстояние  $\delta$  между дендрограммами  $a, b$  определим следующим образом:

$$\delta(a, b) = \sqrt{\sum_{n=1}^m (2^{-\Lambda(w_a(n))} - 2^{-\Lambda(w_b(n))})^2},$$

где  $\Lambda(w_a(n))$ ,  $\Lambda(w_b(n))$  — длины ветвей  $w_a(n)$ ,  $w_b(n)$ , идущих к концевой вершине с номером  $n$  в дендрограммах  $a, b$  соответственно. Средние значения метрик  $\delta$  для исследуемых классов дендрограмм представлены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Средние значения  $\delta$  / Average values of  $\delta$ 

$\delta$	alz	controls	dep	mci	schiz
alz	0.36956	0.39052	0.35165	0.35553	0.35904
controls	—	0.38591	0.35566	0.36843	0.36143
dep	—	—	0.31622	0.33241	0.33108
mci	—	—	—	0.33832	0.33514
schiz	—	—	—	—	0.32982

Для метрики  $\delta$  чем больше значение, тем больше различие в длинах кодовых последовательностей. Для ультраметрики  $\rho$  чем меньше значение, тем больше совпадение префиксных кодов.

### 2.3. Метрика Громова – Хаусдорфа

Для метрического пространства  $X$  обозначим через  $\mathcal{H}(X)$  семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства  $X$ . На  $\mathcal{H}(X)$  можно задать метрику Хаусдорфа  $d_H$ . Известно, что  $\mathcal{H}(X)$  компактно тогда и только тогда, когда  $X$  компактно (см. [6]). Пусть  $X$  и  $Y$  — метрические пространства. Тройка  $(X', Y', Z)$ , состоящая из метрического пространства  $Z$  и двух его подпространств  $X'$  и  $Y'$ , изометричных соответственно  $X$  и  $Y$ , называется реализацией пары  $(X, Y)$ . Метрика Громова – Хаусдорфа  $d_{GH}(X, Y)$  есть точная нижняя грань чисел  $r$ , для которых существует такая реализация  $(X', Y', Z)$  пары  $(X, Y)$ , что  $d_H(X', Y') \leq r$ . Множество  $\mathcal{M}$  классов изометрии всех метрических компактов, наделенное метрикой Громова – Хаусдорфа, образует пространство Громова – Хаусдорфа.

Множество всех непустых бинарных отношений между  $X$  и  $Y$  обозначим через  $\mathcal{P}(X, Y)$ . Для отношения  $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$  искажением называется число

$$\text{dis}\sigma = \sup\{|x - x'| - |y - y'|\} : (x, y), (x', y') \in \sigma\}.$$

Отношение  $R \subset X \times Y$  называется соответствием (см. [6]), если ограничения на  $R$  канонических проекций  $\pi_X : (x, y) \mapsto x$  и  $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$  сюръективны. Множество всех соответствий обозначим  $\mathcal{R}(X, Y)$ . Для любых метрических пространств  $X$  и  $Y$

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\{\text{dis}R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\}.$$

Соответствие  $R$  называется оптимальным, если  $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{dis}R$ .

Рассмотрим оптимальное соответствие между пространством  $X = \mathbb{Z}_2$  целых 2-адических чисел с неархимедовой метрикой  $d_2(x, y) = |x - y|_2$  и канторовым множеством  $Y = \mathcal{C}$  с





евклидовой метрикой  $d(a, b) = |a - b|$  в виде гомеоморфизма  $\psi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{C}$  вида

$$\psi : \sum_{i=0}^{\infty} x_i 2^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2x_i}{3^{i+1}}.$$

Отметим, что и  $\mathbb{Z}_2$ , и  $\mathcal{C}$  являются несвязными компактными пространствами. Точка  $x = x_0 + x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 2^2 + x_3 \cdot 2^3 + \dots$  из  $\mathbb{Z}_2$  гомеоморфизмом  $\psi$  отображается в точку единичного отрезка  $\psi(x) = \frac{2}{3}x_0 + \frac{2}{3^2}x_1 + \frac{2}{3^3}x_2 + \dots$ , где  $x_0, x_1, x_2, \dots \in \{0, 1\}$ . Например, образом шара  $B_{1/4}(0) \subset \mathbb{Z}_2$  (представленного соответствующей ветвью дендрограммы, ассоциированной с конкретным электродом) в  $\mathcal{C}$  будет множество точек единичного отрезка вида  $\frac{2}{3^3}x_2 + \frac{2}{3^4}x_3 + \dots$ .

Пространства  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathcal{C}$  являются элементами пространства Громова – Хаусдорфа. Тогда, например, расстояние между шаром  $B_{1/4}(0) \subset \mathbb{Z}_2$  с центром в точке  $x = 0$  радиуса  $1/4$  и множеством  $\psi(B_{1/4}(0)) \subset \mathcal{C}$  будет удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{5}{72} \leq d_{GH}(B_{1/4}(0), \psi(B_{1/4}(0))) \leq \frac{1}{8}$$

в силу того (см. [6]), что

$$\frac{1}{2} |\text{diam} X - \text{diam} Y| \leq d_{GH}(X, Y) \leq \frac{1}{2} \max\{\text{diam} X \text{diam} Y\} \quad (3)$$

для любых  $X, Y \in \mathcal{M}$ . В формуле (3)  $\text{diam} X$  и  $\text{diam} Y$  — диаметры  $X$  и  $Y$  соответственно.

Известно, что пространство  $\mathcal{M}$  геодезическое (см. [6]). Это значит, что любые точки  $X, Y \in \mathcal{M}$  можно соединить геодезической кривой  $\gamma$ , длина которой  $L(\gamma)$  равна расстоянию Громова – Хаусдорфа  $d_{GH}(X, Y)$  между  $X$  и  $Y$ . Вычисление  $d_{GH}(X, Y)$  для  $X = \cup_{k_j} B_{1/2^{k_j}}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) и  $Y = \psi(X)$  является нетривиальной и трудоемкой задачей. Тем не менее, можно рассматривать различные классы дендрограмм (классы разбиений  $\mathbb{Z}_2$  на шары) и их  $\psi$ -образы в канторовом множестве  $\mathcal{C}$  и усреднять расстояния (длины геодезических) для каждого класса дендрограмм до их образов в канторовом множестве с целью характеристики исследуемых ментальных классов. Канторово множество  $\mathcal{C}$  можно заменить на толстое канторово множество  $\mathcal{FC}$ , мера которого, в отличие от меры  $\mathcal{C}$ , будет положительной.  $\mathcal{FC}$  можно построить (см. [7]) с помощью функции  $c_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ :  $c_t(x) = (1 - t) \cdot x + t \cdot c(x)$ , где  $t \in (0, 1)$  и  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  есть функция Кантора

$$c(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}, & \text{если } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i} \in \mathcal{C}, \quad x_i \in \{0, 1\}; \\ \sup_{x \leq y, y \in \mathcal{C}} c(y), & \text{если } x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}. \end{cases} \quad (4)$$

Например, при  $t = 1/3$  расстояние Громова – Хаусдорфа между 2-адическим шаром  $B_{1/4}(0)$  и его образом в  $\mathcal{FC}$  удовлетворяет двойному неравенству

$$\frac{5}{108} \leq d_{GH}(B_{1/4}(0), c_{1/3}(\psi(B_{1/4}(0)))) \leq \frac{1}{8}.$$

Здесь предварительно мы строим  $\psi$ -образ в  $\mathcal{C}$ , затем с помощью (4) вычисляем образ отображения  $c_t$ . Отметим, что величина  $t \in (0, 1)$  будет определять меру толстого канторова множества  $\mathcal{FC}$ . Для «тонкой» характеристики ветви дендрограммы (в дополнении к «грубой» характеристике дендрограммы с помощью метрик  $\rho$  и  $\delta$ ) важна нижняя оценка в неравенстве для расстояния  $d_{GH}$  между 2-адическим шаром и его образом в  $\mathcal{C}$  (либо в  $\mathcal{FC}$ ). Для 2-адического шара  $B_{1/4}(0)$  нижняя оценка равна  $5/72 \approx 0.0694$  (случай  $\mathcal{C}$ ) и  $5/108 \approx 0.0463$  (случай  $\mathcal{FC}$ ,  $t = 1/3$ ).



## Заключение

Таким образом, в данном исследовании предложены неархимедова и архимедова метрики дендрограмм ЭЭГ для нахождения отличий между ментальными классами. Цель исследования — надежно различать классы пациентов по ЭЭГ, и в этом смысле, в дополнении к метрикам дендрограмм ЭЭГ, метрика Громова–Хаусдорфа представляется более релевантной, так как она позволяет выявлять связь между неархимедовыми и архимедовыми характеристиками данных.

## Список литературы

1. Shor O., Glik A., Yaniv-Rosenfeld A., Valevski A., Weizman A., Khrennikov A., Benninger F. EEG  $p$ -adic quantum potential accurately identifies depression, schizophrenia and cognitive decline // *PLoS ONE*. 2021. Vol. 16, iss. 8. P. e0255529. DOI: [10.1371/journal.pone.0255529](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0255529)
2. Shor O., Yaniv-Rosenfeld A., Valevski A., Weizman A., Khrennikov A., Benninger F. EEG-based spatio-temporal relation signatures for the diagnosis of depression and schizophrenia // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13. Art. 776. DOI: [10.1038/s41598-023-28009-0](https://doi.org/10.1038/s41598-023-28009-0)
3. Анашин В. С., Тяпаев Л. Б., Давыдов В. В. Классификация психических заболеваний на основе дендрограмм ЭЭГ головного мозга и их характеристик // *Дискретная математика и её приложения : труды XIV междунар. науч. семинара им. академика О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2022 г.)*. Москва : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2022. С. 207–210. DOI: [10.20948/dms-2022-64](https://doi.org/10.20948/dms-2022-64)
4. Тяпаев Л. Б., Анашин В. С., Давыдов В. В. О методе обработки большой совокупности аналоговых сигналов с целью выделения характеристических признаков источников сигналов // *Дискретные модели в теории управляющих систем : труды XI междунар. конф. (Москва, 26–29 мая 2023 г.)*. Москва : МАКС Пресс, 2023. С. 110–113. EDN: [XTMWWX](https://www.edn.ru/XTMWWX)
5. Anashin V. Free choice in quantum theory: A  $p$ -adic view // *Entropy*. 2023. Vol. 25, iss. 5. Art. 830. DOI: [10.3390/e25050830](https://doi.org/10.3390/e25050830)
6. Борзов С. И., Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояния Громова–Хаусдорфа на классе всех метрических пространств // *Математический сборник*. 2022. Т. 213, № 5. С. 68–87. DOI: [10.4213/sm9651](https://doi.org/10.4213/sm9651), EDN: [YZVCVW](https://www.edn.ru/YZVCVW)
7. Liu J. G., Pego R. L. A simple construction of fat Cantor sets // *The American Mathematical Monthly*. 2024. Vol. 131, iss. 6. Art. 525. DOI: [10.1080/00029890.2024.2322909](https://doi.org/10.1080/00029890.2024.2322909)

## References

1. Shor O., Glik A., Yaniv-Rosenfeld A., Valevski A., Weizman A., Khrennikov A., Benninger F. EEG  $p$ -adic quantum potential accurately identifies depression, schizophrenia and cognitive decline. *PLoS ONE*, 2021, vol. 16, iss. 8, pp. e0255529. DOI: [10.1371/journal.pone.0255529](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0255529)
2. Shor O., Yaniv-Rosenfeld A., Valevski A., Weizman A., Khrennikov A., Benninger F. EEG-based spatio-temporal relation signatures for the diagnosis of depression and schizophrenia. *Scientific Reports*, 2023, vol. 13, art. 776. DOI: [10.1038/s41598-023-28009-0](https://doi.org/10.1038/s41598-023-28009-0)
3. Anashin V. S., Tyapaev L. B., Davydov V. V. Classification of mental illnesses based on EEG dendrograms and their characteristics. *Diskretnaya matematika i eyo prilozheniya* [Discrete Mathematics and its Applications. Proceedings of the XIV International Scientific Seminar named after Academician O. B. Lupanov (Moscow, June 20–25, 2022)]. Moscow, M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS Publ., 2022, pp. 207–210 (in Russian). DOI: [10.20948/dms-2022-64](https://doi.org/10.20948/dms-2022-64)
4. Tyapaev L. B., Anashin V. S., Davydov V. V. On the method of processing a large set of analog signals in order to isolate the characteristic features of signal sources. *Diskretnye modeli v teorii upravlyayuschih sistem* [Discrete Models in Control Systems Theory. Proceedings of the XI International Conference (Moscow, May 26–29, 2023)]. Moscow, MAKS Press, 2023, pp. 110–113 (in Russian). EDN: [XTMWWX](https://www.edn.ru/XTMWWX)



5. Anashin V. Free choice in quantum theory: A  $p$ -adic view. *Entropy*, 2023, vol. 25, iss. 5, art. 830. DOI: [10.3390/e25050830](https://doi.org/10.3390/e25050830)
6. Borzov S. I., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Geometry of the Gromov – Hausdorff distance on the class of all metric spaces. *Sbornik: Mathematics*, 2022, vol. 213, iss. 5, pp. 641–658. DOI: [10.1070/SM9651](https://doi.org/10.1070/SM9651)
7. Liu J. G., Pego R. L. A simple construction of fat Cantor sets. *The American Mathematical Monthly*, 2024, vol. 131, iss. 6, art. 525. DOI: [10.1080/00029890.2024.2322909](https://doi.org/10.1080/00029890.2024.2322909)

Поступила в редакцию / Received 12.02.2025

Принята к публикации / Accepted 19.03.2025

Опубликована / Published 29.08.2025