Научный отдел

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 154–166
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 154–166
https://mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-154-166
EDN: CQAXPK

Научная статья
УДК 517.51

Об оценках наилучших M-членных приближений функций многих переменных в пространстве с равномерной метрикой

Г. Акишев

Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Казахстан, 010010, г. Астана, ул. Кажымукана, д. 11

Акишев Габдолла, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, akishev_g@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8336-6192, SPIN: 1527-9433, AuthorID: 194028

Аннотация. В статье рассматриваются пространство непрерывных функций с равномерной метрикой и анизотропное пространство Лоренца – Зигмунда периодических функций многих переменных и класс Никольского – Бесова в этом пространстве. Установлены оценки наилучших M-членных тригонометрических приближений функций из класса Никольского – Бесова в равномерной метрике.

Ключевые слова: равномерная метрика, пространство Лоренца – Зигмунда, класс Никольского – Бесова, M-членное приближение

Благодарности: Работа выполнена в рамках грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК (проект № AP19677486). Автор благодарен Рецензенту за замечания.

Для цитирования: *Акишев Г.* Об оценках наилучших M-членных приближений функций многих переменных в пространстве с равномерной метрикой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 154–166. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-154-166, EDN: CQAXPK

Article

On estimates of the best M-term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric

G. Akishev

Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, 11 Kazhymukan St., Astana 010010, Kazakhstan

Gabdolla Akishev, akishev_g@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8336-6192, SPIN: 1527-9433, AuthorID: 194028

Abstract. The paper considers the space of continuous functions with a uniform metric and the anisotropic Lorentz – Zygmund space of periodic functions of many variables and the Nikol'skii – Besov class in this space. We have established estimates of the best M-term trigonometric approximations of functions from the Nikol'skii – Besov class in a uniform metric.

Keywords: uniform metric, Lorentz – Zygmund space, Nikol'skii – Besov class, M-term approximation

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project No. AP19677486). The author is grateful to the Reviewer for his comments.

For citation: Akishev G. On estimates of the best M-term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 154–166 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-154-166, EDN: CQAXPK

Введение

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами, $\mathbb{Z}_+^m$ — множество точек пространства $\mathbb{R}^m$ с неотрицательными целыми координатами, $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$, $C(\mathbb{T}^m)$ — пространство непрерывных функций, имеющих период 2π по каждой переменной с нормой $\|f\|_\infty := \max_{\overline{x}\in\mathbb{T}^m} |f(\overline{x})|$.

Напомним определения невозрастающей перестановки функции.

Определение 1. Пусть f — измеримая по Лебегу функция одной переменной на $[0, 1)$. *Функция распределения* для $|f|$ определяется как мера Лебега (см. например [1, с. 81])

$$\mu_f(y) := \mu\{x \in [0,1) : \ |f(x)| > y\}, \ 0 \leqslant y < \infty.$$

Две неотрицательные измеримые функции f и g называются *равноизмеримыми*, если их функции распределения равны (см. например [1, с. 82]).

Определение 2 (см. например [1, с. 83])**.** *Невозрастающей перестановкой функции f одной переменной* называется невозрастающая на $[0, 1)$ функция $f^*(t)$, равноизмеримая с функцией $|f(x)|$.

Невозрастающая перестановка f^* функции f одной переменной на $[0, 1)$ определяется по формуле (см. например [1, с. 83])

$$f^*(t) := \inf\{y > 0 : \ \mu_f(y) \leqslant t\}, \ t \in [0, 1).$$

Теперь напомним определение повторной невозрастающей перестановкой функции m переменных.

Определение 3 (см. [2, с. 53; 3]). Пусть $f(x_1,\ldots,x_m)$ — измеримая по Лебегу функция m переменных на $I^m=[0,1)^m$. *Невозрастающей перестановкой функции* $|f(x_1,\ldots,x_m)|$ *по первой переменной* понимается функция $f^{*_1}(t_1,x_2,\ldots,x_m)$, равноизмеримая на I^m, невозрастающая по t_1 и такая, что функции $|f(x_1,\ldots,x_m)|$ и $f^{*_1}(t_1,x_2,\ldots,x_m)$ равноизмеримы как функции одной переменной для почти всех фиксированных $x_2,\ldots,x_m$.

Аналогичным образом, рассматривая невозрастающую перестановку функции $f^{*_1}(t_1, x_2,\ldots,x_m)$ по переменной x_2, при фиксированных $t_1,x_3,\ldots,x_m$ определяется функция $f^{*_1*_2}(t_1,t_2,x_3,\ldots,x_m)$, равноизмеримая с функцией $f(x_1,\ldots,x_m)$. Продолжая этот процесс, определяется невозрастающая перестановка $f^{*_1*_2\cdots*_m}(t_1,t_2,\ldots,t_m)$, равноизмеримая с функцией $|f(x_1,\ldots,x_m)|$.

В статье рассматриваются следующие функциональные пространства.

Пусть даны числа $p,\tau\in[1,\infty)$, $\alpha\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Пространством Лоренца – Зигмунда $L_{p,\alpha,\tau}(\mathbb{T})$ называется множество всех измеримых по Лебегу и 2π периодических функций f, для которых (см. например, [4])

$$\|f\|_{p,\alpha,\tau}:=\left\{\int_0^1\Big(f^*(t)\Big)^{\tau}\Big(1+|\log_2 t|\Big)^{\alpha\tau}t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\right\}^{\frac{1}{\tau}}<+\infty,$$

где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi x)|$, $x\in[0,1)$, $\mathbb{T}=[0,2\pi)$.

Известно, что пространство Лоренца – Зигмунда $L_{p,\alpha,\tau}(\mathbb{T})$ является симметричным пространством [1, 4]. Поэтому, следуя [3], рассмотрим анизотропное пространство Лоренца – Зигмунда.

Пусть $\overline{p}=(p_1,\ldots p_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,\ldots\tau_m)$, $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots\alpha_m)$ и $p_j,\tau_j\in[1,\infty)$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,...,m$. Через $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца – Зигмунда — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f, имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}:=\|\ldots\|f^{*_1,\ldots,*_m}\|_{p_1,\alpha_1,\tau_1}\ldots\|_{p_m,\alpha_m,\tau_m}<\infty,$$

где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,...,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j\in[0,1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [3]) и

$$\|g\|_{p,\alpha,\tau}:=\left\{\int_0^1\big(g(t)\big)^{\tau}\big(1+|\log_2 t|\big)^{\alpha\tau}t^{\frac{\tau}{p}-1}dt\right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

Для $\alpha_j=0$, $j=1,...,m$ пространство $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ является анизотропным пространством Лоренца и обозначается $L^*_{\overline{p},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$, а $\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}=\|f\|^*_{\overline{p},\overline{\tau}}$ (см. [3]).

Если $\alpha_j=0$ и $p_j=\tau_j=p$, $j=1,...,m$, то $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)=L_p(\mathbb{T}^m)$ – известное пространство Лебега с нормой $\|f\|_p$.

$l_{\overline{p}}$ — пространство последовательностей $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m_+}$ действительных чисел с нормой

$$\left\|\Big\{a_{\overline{n}}\Big\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{p}}}=\left\{\sum_{n_m=0}^{\infty}\Big[\ldots\Big[\sum_{n_1=0}^{\infty}|a_{\overline{n}}|^{p_1}\Big]^{\frac{p_2}{p_1}}\ldots\Big]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}}<+\infty,$$

для $1\leqslant p_j<+\infty$, $j=1,2,...,m$, $\overline{p}=(p_1,\ldots,p_m)$ и $\big\|\{a_{\overline{n}}\}\big\|_{l_\infty}=\sup\limits_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m_+}|a_{\overline{n}}|$ для $p_j=\infty$, $j=1,...,m$.

Введем обозначения $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}$ и $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle=\sum\limits_{j=1}^{m}y_jx_j$, $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})=\sum\limits_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$, где $\rho(\overline{s})=\{\overline{k}=(k_1,...,k_m)\in\mathbb{Z}^m:\ \leqslant|k_j|<2^{s_j},\ j=1,...,m\}$, $[y]$ — целая часть действительного числа y и $s_j\in\mathbb{Z}_+$.

В теории функций и ее приложениях важное значение имеет $S^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ — пространство Никольского – Бесова в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p < \infty$ и его различные обобщения (см. [5,6]).

Рассматривается аналог класса Никольского – Бесова в анизотропном пространстве Лоренца – Зигмунда:

$$\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B := \Big\{ f \in \mathring{L}^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) : \ \|f\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} + \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} \Big\}_{\overline{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant 1 \Big\},$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, ..., \tau_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $0 < \theta_j \leqslant +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$.

В случае $\alpha_j = 0$ и $\tau_j = p_j = p$, $j = 1, \ldots, m$ класс $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}B$ совпадает с известным классом Никольского – Бесова $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$ (см. [5,6]).

Наилучшим M-членным тригонометрическим приближением функции $f \in C(\mathbb{T}^m)$ называется величина (см. [7])

$$e_M(f)_\infty = \inf_{\overline{k}^j, b_j} \Big\| f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{i\langle \overline{k}^j, \overline{x} \rangle} \Big\|_\infty,$$

где $\{\overline{k}^j\}_{j=1}^M$ — система векторов $\overline{k}^j = (k^j_1, ..., k^j_m)$ с целочисленными координатами, b_j — действительные или комплексные числа. Если F — некоторый функциональный класс в пространстве $C(\mathbb{T}^m)$, то положим $e_M(F)_\infty = \sup\limits_{f \in F} e_M(f)_\infty$.

В настоящее время M-членное приближение элементов функционального пространства находит много применений в задачах обработки сигналов, математической статистики, оптимизации, машинного обучения, нейронных сетей.

Оценки порядка M-членного приближения функций класса Никольского – Бесова $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\theta}B$ в равномерной метрике установлены Э. С. Белинским [8], А. С. Романюком [9] соответственно в случаях $\theta = \infty$ и $2 \leqslant \theta < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r_1 > \max\{1/p, 1/2\}$. При малых гладкостях $1/p < r_1 \leqslant 1/2$ оценки величины $e_M(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{p,\infty}B)_\infty$ установлены в недавней совместной работе В. Н. Темлякова и Т. Ульриха [10, теоремы 6.2–6.3].

Как отмечено в [7], неизвестны оценки снизу наилучших M-членных приближений класса Никольского – Бесова, в равномерной метрике совпадающие с известными оценками сверху.

Точные порядки наилучших M-членных приближений классов $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B$ в анизотропных пространствах Лоренца и Лоренца – Зигмунда ранее установлены в [11,12]. В отличие от [11,12], в предлагаемой статье рассмотрим задачу оценки наилучших M-членных приближений элементов класса $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B$ в равномерной метрике.

Основная цель статьи — найти точный порядок величины $e_M(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B)_\infty$.

В первом разделе приведено одно вспомогательное утверждение, необходимое для доказательства основных результатов статьи. В разделе 2 мы представим и докажем основные результаты.

Будем обозначать через $C(p, q, y, \ldots)$ различные положительные величины, которые зависят от указанных параметров. Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 A(y) \leqslant B(y) \leqslant C_2 A(y)$. Для краткости записи вместо $B \geqslant C_1 A$ или $B \leqslant C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Запись $\log y$ означает логарифм с основанием 2 от числа $y > 0$.

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $\overline{\gamma}' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m)$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ *и* $0 < \gamma'_j \leqslant \gamma_j$, $0 < \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, \ldots, m$ *и* $\alpha \in (0, \infty)$. *Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$I_n^m := \left\| \left\{ 2^{-\alpha \langle \overline{s}, \overline{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j + 1)^{\lambda_j} \right\}_{\overline{s} \in Y^m(n, \overline{\gamma}')} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \ll 2^{-n\alpha\delta} n^{\sum\limits_{j \in A} \lambda_j + \sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\delta = \min \left\{ \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \ldots, m \right\}$, $A = \left\{ j : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta, \ j = 1, \ldots, m \right\}$, $j_1 = \min\{j : j \in A\}$ *и числа* $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям*

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} \lambda_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}, \ \lambda_{j'} + \frac{1}{\theta'_j} \right\} > 0$$

и $j' = \max\{j \in A\}$.

Доказательство. Случай $0 < \theta_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$ доказан в [13, лемма 3]. Для $\theta_j = \infty$, $j = 1, 2$ доказательство приведено в [13, с. 9]. Поэтому мы рассмотрим случай $m \geqslant 3$ при $\theta_j = \infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Предположим, что утверждение леммы верно для $m - 1$ т. е.

$$I_n^{m-1} := \sup_{\overline{s} \in Y^{m-1}(n, \overline{\gamma}'_{m-1})} 2^{-\alpha \langle \overline{s}_{m-1}, \overline{\gamma}_{m-1} \rangle} \prod_{j=1}^{m-1} (s_j + 1)^{\lambda_j} \ll 2^{-n\alpha\delta_{m-1}} (n+1)^{\sum\limits_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \tag{1}$$

при условии $\lambda_j \geqslant 0$, для $j \in A_{m-1}$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$, для $j \notin A_{m-1}$, где $\overline{z}_{m-1} = (z_1, \ldots, z_{m-1})$, $\delta_{m-1} = \min \left\{ \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \ldots, m-1 \right\}$, $A_{m-1} := \left\{ j = 1, \ldots, m-1 : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta_{m-1} \right\}$, $j_{1,m-1} = \min\{j \in A_{m-1}\}$.

Докажем утверждение леммы для $m \geqslant 3$. По определению множества $Y^m(n, \overline{\gamma}')$ имеем

$$I_n^m = \sup_{0 \leqslant s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m\gamma_m\alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} \sup_{\overline{s} \in Y^{m-1}(n - s_m\gamma'_m, \overline{\gamma}'_{m-1})} 2^{-\alpha \langle \overline{s}_{m-1}, \overline{\gamma}_{m-1} \rangle} \prod_{j=1}^{m-1} (s_j + 1)^{\lambda_j} +$$

$$+ \sup_{s_m \geqslant n/\gamma'_m} 2^{-s_m\gamma_m\alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} \sup_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^{m-1}} 2^{-\alpha \langle \overline{s}_{m-1}, \overline{\gamma}_{m-1} \rangle} \prod_{j=1}^{m-1} (s_j + 1)^{\lambda_j} = \sigma_1(n) + \sigma_2(n). \tag{2}$$

В силу предположения (1) с заменой n на $n - s_m\gamma'_m$ получим

$$\sigma_1(n) \ll \sup_{0 \leqslant s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m\gamma_m\alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} 2^{-(n - s_m\gamma'_m)\alpha\delta_{m-1}} (n - s_m\gamma'_m)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} =$$

$$= C 2^{-n\alpha\delta_{m-1}} \sup_{0 \leqslant s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m\gamma'_m (\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1})\alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} (n - s_m\gamma'_m)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \tag{3}$$

при условии $\lambda_j \geqslant 0$, для $j \in A_{m-1}$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$, для $j \notin A_{m-1}$.

Если $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} > 0$, то $\delta = \delta_m = \min\{\frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \ldots, m\} = \delta_{m-1}$, $A = A_m = \{j : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta, j = 1, \ldots, m\} = A_{m-1}$, $j_1 = \min\{j \in A_m\} = j_{0,m-1}$. Поэтому, учитывая, что $\lambda_j \geqslant 0$, для $j \in A_{m-1}$ из неравенства (3) получим

$$\sigma_1(n) \ll 2^{-n\alpha\delta_{m-1}} (n+1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \sup_{0 \leqslant s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m\gamma'_m (\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1})\alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} \ll$$

$$\ll 2^{-n\alpha\delta} (n+1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \tag{4}$$

в случае $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} > 0$, для $\lambda_m \in \mathbb{R}$.

Пусть $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} < 0$. Тогда $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} < \frac{\gamma_j}{\gamma'_j}$, для $j = 1, \ldots, m-1$ и $A = \{m\}$. Выберем число $\eta \in (0,\ \alpha(\delta_{m-1} - \frac{\gamma_m}{\gamma'_m}))$. Учитывая, что для $\lambda > 0$ функция $\frac{t^\lambda}{2^t} \downarrow 0$ при $t \to +\infty$, будем иметь

$$\sup_{0\leqslant s_m<n/\gamma'_m} 2^{-s_m\gamma'_m(\frac{\gamma_m}{\gamma'_m}-\delta_{m-1})\alpha}(s_m+1)^{\lambda_m}(n-s_m\gamma'_m+1)^{\sum_{j\in A_{m-1}}\lambda_j} =$$
$$= \sup_{0\leqslant s_m<n/\gamma'_m} 2^{s_m\gamma'_m\alpha(\delta_{m-1}-\frac{\gamma_m}{\gamma'_m})}(s_m+1)^{\lambda_m}2^{(n-s_m\gamma'_m)\eta}2^{(n-s_m\gamma'_m)\eta}2^{-(n-s_m\gamma'_m)\eta}\times$$
$$\times 2^{(n-s_m\gamma'_m)\eta}(n-s_m\gamma'_m+1)^{\sum_{j\in A_{m-1}}\lambda_j} \ll \sup_{0\leqslant s_m<n/\gamma'_m} 2^{s_m\gamma'_m\alpha(\delta_{m-1}-\frac{\gamma_m}{\gamma'_m})}(s_m+1)^{\lambda_m}\times$$
$$\times 2^{(n-s_m\gamma'_m)\eta} = C2^{n\eta}\sup_{0\leqslant s_m<n/\gamma'_m} 2^{s_m\gamma'_m(\alpha(\delta_{m-1}-\frac{\gamma_m}{\gamma'_m})-\eta)}(s_m+1)^{\lambda_m} =$$
$$= C2^{n\eta}2^{n(\alpha(\delta_{m-1}-\frac{\gamma_m}{\gamma'_m})-\eta)}(n+1)^{\lambda_m} = C2^{n\alpha(\delta_{m-1}-\frac{\gamma_m}{\gamma'_m})}(n+1)^{\lambda_m}$$

для $\lambda_m \in \mathbb{R}$. Поэтому из неравенства (3) следует, что

$$\sigma_1(n) \ll 2^{-n\alpha\delta_{m-1}}2^{n\alpha(\delta_{m-1}-\frac{\gamma_m}{\gamma'_m})}(n+1)^{\lambda_m} = C2^{-n\alpha\frac{\gamma_m}{\gamma'_m}}(n+1)^{\lambda_m} \tag{5}$$

в случае $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} < 0$, для $\lambda_m \in \mathbb{R}$.

Таким образом, оценки (4) и (5) означают, что

$$\sigma_1(n) \ll 2^{-n\alpha\delta}(n+1)^{\sum_{j\in A_{m-1}}\lambda_j} \tag{6}$$

в случае $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} \neq \delta_{m-1}$, $\lambda_j \geqslant 0$, для $j \in A$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$, для $j \notin A$.

Пусть $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} = 0$. Тогда $A = A_m = A_{m-1} \cup \{m\}$ и $j_1 = \min\{j \in A_m\} = \min\{j \in A_{m-1}\} = j_{0,m-1}$. Поэтому, учитывая, что $\lambda_j \geqslant 0$ для $j \in A$, из неравенства (3) для $\lambda_m \geqslant 0$ будем иметь

$$\sigma_1(n) \ll 2^{-n\alpha\delta_{m-1}}\sup_{0\leqslant s_m<n/\gamma'_m}(s_m+1)^{\lambda_m}(n-s_m\gamma'_m)^{\sum_{j\in A_{m-1}}\lambda_j} \ll$$
$$\ll 2^{-n\alpha\delta_{m-1}}(n+1)^{\sum_{j\in A_{m-1}}\lambda_j}\sup_{0\leqslant s_m<n/\gamma'_m}(s_m+1)^{\lambda_m} \ll$$
$$\ll 2^{-n\alpha\delta_{m-1}}(n+1)^{\sum_{j\in A_{m-1}}\lambda_j}(n+1)^{\lambda_m} = C2^{-n\alpha\delta_m}(n+1)^{\sum_{j\in A}\lambda_j}. \tag{7}$$

Таким образом (см. (6) и (7)),

$$\sigma_1(n) \ll 2^{-n\alpha\delta}(n+1)^{\sum_{j\in A}\lambda_j}, \tag{8}$$

$\lambda_j \geqslant 0$ для $j \in A$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$ для $j \notin A$. Так как для $\lambda > 0$ функция $\frac{t^\lambda}{2^t} \downarrow 0$ при $t \to +\infty$, то

$$\sigma_2(n) \ll \sup_{s_m\geqslant n/\gamma'_m} 2^{-s_m\gamma_m\alpha}(s_m+1)^{\lambda_m} \ll 2^{-n\alpha\frac{\gamma_m}{\gamma'_m}}(n+1)^{\lambda_m} \tag{9}$$

для $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$.

Теперь из равенства (2) и неравенств (8), (9) следует, что

$$I_n^m \ll 2^{-n\alpha\delta}(n+1)^{\sum_{j\in A}\lambda_j} + 2^{-n\alpha\frac{\gamma_m}{\gamma'_m}}(n+1)^{\lambda_m} \ll 2^{-n\alpha\delta}(n+1)^{\sum_{j\in A}\lambda_j},$$

$\lambda_j \geqslant 0$ для $j \in A$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$ для $j \notin A$. $\square$

2. Основные результаты

Пусть $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $r_j > 0$, $b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, ..., m$. Рассмотрим вспомогательный класс

$$\mathbb{S}^{\overline{r},\overline{b}}_{2,\overline{\theta}}B = \left\{ f \in L_2(\mathbb{T}^m) : \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j}(s_j+1)^{b_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2 \right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant 1 \right\}.$$

Для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ положим (см. [7, 14])

$$f_{l,\overline{r}}(\overline{x}) = \sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle<l+1} \delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}), \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_m$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Для оценки M-членных наилучших приближений дифферецируемых функций конструктивным методом используется класс $W^{a,b}_A$ (см. [7, 14]). Пусть число $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$. Рассмотрим следующий класс определенный в [7, 14]:

$$W^{a,b}_{\mathcal{A}} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}^m) : \|f_{l,\overline{\gamma}}\|_{\mathcal{A}} \leqslant 2^{-la} l_0^{(\nu-1)b} \right\},$$

где $l_0 = \max\{1, l\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$ и

$$\|f_{l,\overline{\gamma}}\|_{\mathcal{A}} = \sum_{l\leqslant\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle<l+1} \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} |a_{\overline{n}}(f)|.$$

Используя класс $W^{a,b}_{\mathcal{A}}$, докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\overline{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, $b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, ..., m$, $0 < r_{j_0} = \min\{r_j : \ j = 1, ..., m\}$, $A = \{j = 1, ..., m : r_j = r_{j_0}\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$.

Если $r_{j_0} > 1/2$, *то*

$$e_M(S^{\overline{r},\overline{b}}_{2,\overline{\theta}}B)_\infty \ll \left(\frac{\log^{|A|-1} M}{M} \right)^{r_{j_0}} (\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j}) - \sum\limits_{j\in A} b_j} \sqrt{\log M}$$

при условии

$$\min\left\{ -\sum_{j\in A\setminus\{j'\}} b_j + \sum_{j\in A\setminus\{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j}, -b_{j'} + \frac{1}{\theta'_{j'}} \right\} > 0, \tag{10}$$

где $j' = \max\{j \in A\}$, $|A|$ *— количество элементов множества* $A \subset \{1, \ldots, m\}$.

Доказательство. Сначала докажем, что $S^{\overline{r},\overline{b}}_{2,\overline{\theta}}B \subset C(\mathbb{T}^m)$. Пусть $f \in S^{\overline{r},\overline{b}}_{2,\overline{\theta}}B$. По свойству нормы в пространстве $C(\mathbb{T}^m)$ и неравенству разных метрик Никольского для тригонометрического полинома [15, гл. 3, подразд. 3.4.3] имеем

$$\|f\|_\infty \leqslant \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_\infty \leqslant 2^m \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \prod_{j=1}^m 2^{s_j/2} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2 =$$

$$= 2^m \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j}(s_j+1)^{b_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2 \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j-1/2)}(s_j+1)^{-b_j}. \tag{11}$$

Если $\theta_j = \infty$, $j = 1, \ldots, m$, то из неравенства (11) получим

$$\|f\|_\infty \leqslant \sup_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j}(s_j+1)^{b_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2 \right) \sum_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j-1/2)}(s_j+1)^{-b_j}. \tag{12}$$

Если $1 \leqslant \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$, то, применяя неравенство Гельдера при $\frac{1}{\theta_j} + \frac{1}{\theta'_j} = 1$, $j = 1, \dots, m$ (при $\theta_j = 1$ считается, что $\theta'_j = \infty$), из неравенства (11) будем иметь

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} (s_j+1)^{b_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2 \right\}_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - 1/2)} (s_j+1)^{-b_j} \right\}_{\overline{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\overline{\theta}'}}, \tag{13}$$

где $\overline{\theta}' = (\theta'_1, \dots, \theta'_m)$. Так как $r_j - \frac{1}{2} > 0$, $j = 1, \dots, m$, то из неравенств (12) и (13) следует, что $S^{\overline{r}, \overline{b}}_{2, \overline{\theta}} B \subset C(\mathbb{T}^m)$.

Докажем оценку сверху величины $e_M(S^{\overline{r}, \overline{b}}_{2, \overline{\theta}} B)_\infty$. Пусть $f \in S^{\overline{r}, \overline{b}}_{2, \overline{\theta}} B$. Для $M \in \mathbb{N}$ существует натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$. Введем обозначения $\gamma_j = \frac{r_j}{r_{j_0}}$, $j = 1, \dots, m$ и $\gamma'_j = \gamma_j = 1$, для $j \in A$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, для $j \notin A$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\overline{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$. Как в доказательствах неравенств (11)–(13), применяя равенство Парсеваля [15, гл. 3, разд. 5.5], неравенство Гельдера при $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $\frac{1}{\theta_j} + \frac{1}{\theta'_j} = 1$, $j = 1, \dots, m$ и лемму 1, имеем

$$\|f_{l, \overline{\gamma}'}\|_{\mathcal{A}} = \sum_{l \leqslant \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < l+1} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\mathcal{A}} \leqslant 2^m \sum_{l \leqslant \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < l+1} 2^{\langle \overline{s}, \overline{1} \rangle \frac{1}{2}} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2 \ll$$

$$\ll \left\| \left\{ 2^{\langle \overline{s}, \overline{r} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j+1)^{b_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2 \right\}_{l \leqslant \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < l+1} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{2})} (s_j+1)^{-b_j} \right\}_{l \leqslant \langle \overline{s}, \overline{\gamma}' \rangle < l+1} \right\|_{l_{\overline{\theta}'}} \ll$$

$$\ll 2^{-l(r_{j_0} - \frac{1}{2})} l^{-\sum\limits_{j \in A} b_j + \sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j}} \tag{14}$$

для функции $f \in S^{\overline{r}, \overline{b}}_{2, \overline{\theta}} B$ при условии (10), где $\overline{1} = (1, \dots, 1)$. Поэтому согласно лемме 6.1 [7] при $a = r_{j_0} - \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{|A|-1} \Big(\sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j} - \sum\limits_{j \in A} b_j \Big)$ будем иметь

$$e_M(W^{r_{j_0} - \frac{1}{2}, b}_{\mathcal{A}})_\infty \ll M^{-1/2} M^{-(r_{j_0} - \frac{1}{2})} (\log M)^{(|A|-1)\left(r_{j_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{|A|-1} \left(\sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j} - \sum\limits_{j \in A} b_j \right) \right)} \sqrt{\log M} =$$

$$= C \left(\frac{\log^{|A|-1} M}{M} \right)^{r_{j_0}} \Big(\log M \Big)^{\sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}) - \sum\limits_{j \in A} b_j} \sqrt{\log M} \tag{15}$$

при условии (10). Из оценки (14) следует, что

$$S^{\overline{r}, \overline{b}}_{2, \overline{\theta}} B \subset W^{r_{j_0} - \frac{1}{2}, b}_{\mathcal{A}},$$

где $b = \frac{1}{|A|-1} \Big(\sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j} - \sum\limits_{j \in A} b_j \Big)$. Поэтому из оценки (15) следует, что утверждение теоремы 1 доказано. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $\overline{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\overline{r} = (r_1, \dots, r_m)$ *и* $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$ *и* $0 < r_{j_0} - \max\{\frac{1}{p_{j_0}}, \frac{1}{2}\} = \min\{r_j - \max\{\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\} : j = 1, ..., m\}$, $A = \{j : r_j - \max\{\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\} = r_{j_0} - \max\{\frac{1}{p_{j_0}}, \frac{1}{2}\}, j = 1, ..., m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$.

1. Если $2 \leqslant \theta_j \leqslant +\infty$, $p_j \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, $1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, ..., m$, *то*

$$e_M \big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p}, \overline{\alpha}, \overline{\tau}, \overline{\theta}} B \big)_\infty \ll M^{-(r_{j_0} - (\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{2})_+)} (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0} - (\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{2})_+) - \sum\limits_{j \in A} \alpha_j} \times$$

$$\times (\log M)^{\sum\limits_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} (\log M)^{1/2}$$

при условии $\min\{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})-\sum\limits_{j\in A\setminus\{j'\}}\alpha_j,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_{j'}}-\alpha_{j'}\}>0$, *где* $j'=\max\{j\in A\}$.

2. Если $p_j=2$ *и* $1<\tau_j<\infty$, $2\leqslant\theta_j\leqslant\infty$, $\alpha_j=0$, $j=1,...,m$, *то*

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\overline{0},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty\ll\Big(\frac{\log^{|A|-1}}{M}\Big)^{r_{j_0}}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})+\sum\limits_{j\in A}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})_+}(\log M)^{1/2}.$$

3. Если $\alpha_j=0$ *и* $2\leqslant\theta_j\leqslant+\infty$, $p_j\in(1,2)\cup(2,\infty)$, $1<\tau_j<\infty$, $j=1,...,m$, *то*

$$M^{-(r_{j_0}-(\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{2})_+)}(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}-(\frac{1}{p_{j_0}}-\frac{1}{2})_+)}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}\ll e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{0},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty.$$

Доказательство. Пусть $2<p_j<\infty$, $j=1,...,m$. Тогда $\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\subset\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\overline{0},2,\overline{\theta}}B=\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\overline{\theta}}B$ для $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,...,m$. В теореме 1, полагая $b_j=0$ для $j=1,...,m$, имеем

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty\ll e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\overline{\theta}}B\big)_\infty\ll M^{-r_{j_0}}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(r_{j_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}$$

в случае $2<p_j<\infty$, $2\leqslant\theta_j\leqslant+\infty$, $j=1,...,m$.

Пусть $1<p_j<2$, $j=1,...,m$. В статье [16], в теореме 2, полагая $\varphi_j(t)=t^{1/p_j}(1+|\log t|)^{\alpha_j}$ и $\psi_j(t)=t^{1/2}$, для $t\in(0,1]$, $j=1,...,m$ и $f(\overline{x})=\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})$, получим

$$\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2\ll\prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{2})}(s_j+1)^{-\alpha_j}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}$$

при $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $1<\tau_j<\infty$, $j=1,...,m$. В силу этого неравенства имеем $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\subset S^{\overline{\beta},\overline{\alpha}}_{2,\overline{\theta}}B$, где $\overline{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_m)$, $\beta_j=r_j-\frac{1}{p_j}+\frac{1}{2}$, для $j=1,...,m$. Поэтому согласно теореме 1 получим

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty\ll e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{\beta},\overline{\alpha}}_{2,\overline{\theta}}B\big)_\infty\ll M^{-\beta_{j_0}}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\beta_{j_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})-\sum\limits_{j\in A}\alpha_j}\sqrt{\log M}\ll$$
$$\ll M^{-(r_{j_0}-\frac{1}{p_j}+\frac{1}{2})}(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_{j_0}})-\sum\limits_{j\in A}\alpha_j}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}\sqrt{\log M}$$

в случае $1<p_j<2$, $j=1,...,m$, при условии

$$\min\Big\{-\sum_{j\in A}\alpha_j+\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j}),\quad-\alpha_{j'}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_{j'}}\Big\}>0.$$

Первое утверждение доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть $p_j=2$ и $1\leqslant\tau_j\leqslant2$, $\alpha_j=0$, $j=1,...,m$. Тогда из известного неравенства $\|f\|_2\ll\|f\|^*_{2,\overline{\tau}}$ для $f\in L^*_{2,\overline{\tau}}$ следует, что $S^{\overline{r}}_{2,\overline{\tau},\overline{\theta}}B\subset S^{\overline{r}}_{2,\overline{\tau},\overline{\theta}}B$. Следовательно, из теоремы 1 при $2<\theta_j\leqslant\infty$ и $b_j=0$, $j=1,...,m$ получим

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\overline{r}}_{2,\overline{\tau},\overline{\theta}}B\big)_\infty\ll M^{-r_{j_0}}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(r_{j_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}\sqrt{\log M}.$$

Если $2<\tau_j<\infty$ и $p_j=2$, $j=1,...,m$, то в силу неравенства разных метрик для тригонометрического полинома в анизотропном пространстве Лоренца [17] имеем

$$\|\delta_{\overline{s}}(f)\|_2\ll\prod_{j=1}^m(s_j+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{2,\overline{\tau}}.$$

Поэтому $S^{\bar r}_{2,\bar\tau,\bar\theta}B \subset S^{\bar r,\bar b}_{2,\bar\theta}B$, где $\bar b = (b_1,\ldots,b_m)$, $b_j = \frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{2}$, $2 < \tau_j < \infty$, $j = 1,...,m$. Следовательно, по теореме 1 будем иметь

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\bar r}_{2,\bar\tau,\bar\theta}B\big)_\infty \ll e_M\big(\mathbb{S}^{\bar r,\bar b}_{2,\bar\theta}B\big)_\infty \ll M^{-r_{j_0}}(\log M)^{\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(r_{j_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})+\sum\limits_{j\in A}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}\sqrt{\log M}$$

в случае $2 < \tau_j < \infty$ и $p_j = 2$, $j = 1,...,m$.

Докажем утверждение 3. Мы воспользуемся схемой доказательства оценки снизу в теореме [9]. Введем обозначения. Для $\bar s = (s_1,...,s_m)$, s_j — четные натуральные числа, для $j = 1,...,m$ обозначим $\rho^+(\bar s) = \{\bar k = (k_1,...,k_m) : 2^{s_j-1} \leqslant k_j < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{N}\}$ для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$B_n = \{\bar s = (s_1,...,s_m) : \langle \bar s, \bar 1\rangle = 2[n/2], s_j \in \mathbb{N}, j = 1,...,m\}, \quad \bar Q'_n = \cup_{\bar s\in B_n}\rho^+(\bar s).$$

Пусть $\mathfrak{F}(\bar Q'_n)$ — множество тригонометрических полиномов

$$t(\bar x) = \sum_{|\bar k|\in \bar Q'_n} c_{\bar k} e^{i\langle \bar k,\bar x\rangle}, \quad |\bar k| = (|k_1|,...,|k_m|).$$

Аналогично [18, с. 96], рассмотрим пространство $S^0_{q,\bar\theta}B$, которое для тригонометрических полиномов $t \in \mathfrak{F}(\bar Q'_n)$ определим формулой

$$\|t\|_{S^0_{q,\bar\theta}B} = \Big\|\Big\{\|A_{\bar s}(t)\|_q\Big\}_{\bar s\in B_n}\Big\|_{l_{\bar\theta}}$$

для $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1,...,m$. Далее, $(\mathfrak{F}(\bar Q'_n))_{S^0_{q,\bar\theta}B}$ означает единичный шар в пространстве $\mathfrak{F}(\bar Q'_n)$ по норме пространства $S^0_{q,\bar\theta}B$.

В [18, с. 97] доказано, что

$$e_M\big((\mathfrak{F}(\bar Q'_n))_{S^0_{\infty,\infty}B}, T\big)_q \geqslant e_M\big((\mathfrak{F}(\bar Q'_n))_{S^0_{\infty,\infty}B}, \{e^{i\langle \bar k,\bar x\rangle}\}_{\bar k\in \bar Q'_n}\big)_q \tag{16}$$

для $q \in (1,\infty)$, где $T = \{e^{i\langle \bar k,\bar x\rangle}\}_{\bar k\in\mathbb{Z}^m}$. Для $t \in \mathfrak{F}(\bar Q'_n)$ справедливо неравенство

$$\|t\|_{S^{\bar r}_{\infty,\bar\theta}B} \leqslant 2^{nr_1}\max_{\bar s\in B_n}\|A_{\bar s}(t)\|_\infty\Big\|\Big\{\chi_{B_n}(\bar s)\Big\}_{\bar s\in B_n}\Big\|_{l_{\bar\theta}}, \tag{17}$$

где χ_{B_n} — характеристическая функция множества B_n. В силу леммы 2 [19] имеем

$$\Big\|\Big\{\chi_{B_n}(\bar s)\Big\}\Big\|_{l_{\bar\theta}} \asymp n^{\sum_{j=2}^m 1/\theta_j}.$$

Поэтому из (17) следует, что

$$\|t\|_{S^{\bar r}_{\infty,\bar\theta}B} \ll 2^{nr_1} n^{\sum_{j=2}^m 1/\theta_j}\|t\|_{S^0_{\infty,\infty}B}.$$

Следовательно, существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что

$$C_0 2^{-nr_1} n^{-\sum_{j=2}^m 1/\theta_j}(\mathfrak{F}(\bar Q'_n))_{S^0_{\infty,\infty}B} \subset S^{\bar r}_{\infty,\bar\theta}B \cap \mathfrak{F}(\bar Q'_n). \tag{18}$$

Теперь из неравенств (16) и включения (18) следует, что

$$e_M\big(S^{\bar r}_{\infty,\bar\theta}B\big)_q \gg e_M\big(S^{\bar r}_{\infty,\bar\theta}B \cap \mathfrak{F}(\bar Q'_n)\big)_q \gg$$
$$\gg 2^{-nr_1} n^{-\sum_{j=2}^m 1/\theta_j} e_M\big((\mathfrak{F}(\bar Q'_n))_{S^0_{\infty,\infty}B}, \{e^{i\langle \bar k,\bar x\rangle}\}_{\bar k\in \bar Q'_n}\big)_q. \tag{19}$$

На основании теоремы 2.1 из [20] в [18, с. 98] доказано, что

$$e_M\big((\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n))_{B^0_{\infty,\infty}}, \{e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\}_{\bar{k}\in\bar{Q}'_n}\big)_q \gg n^{\frac{m-1}{2}}. \tag{20}$$

Далее, из неравеств (19) и (20) следует, что

$$e_M\big(B^{\bar{r}}_{\infty,\bar{\theta}}\big)_q \gg 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=2}^m(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})} \asymp M^{-r_1}(\log M)^{(m-1)r_1+\sum_{j=2}^m(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}. \tag{21}$$

Так как $S^{\bar{r}}_{\infty,\bar{\theta}}B \subset \mathbb{S}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}B$, то из соотношения (21) получим

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}B\big)_q \gg e_M\big(S^{\bar{r}}_{\infty,\bar{\theta}}B\big)_q \gg M^{-r_1}(\log M)^{(m-1)r_1+\sum_{j=2}^m(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})} \tag{22}$$

для $1 \leqslant q < \infty$. Далее, из неравенства (22) следует, что

$$e_M\big(\mathbb{S}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}B\big)_\infty \gg e_M\big(\mathbb{S}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}B\big)_q \gg M^{-r_1}(\log M)^{(m-1)r_1+\sum_{j=2}^m(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}. \qquad \square$$

Заключение

В случае $\tau_j = p_j = p$, $\theta_j = \theta$, $\alpha_j = 0$, для $j = 1, ..., m$ из теоремы 2 следует теорема 1 [9]. Теорема 2 анонсирована в [21].

Список литературы

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. Москва : Наука, 1978. 400 с.
2. *Kolyada V. I.* On embedding theorems // Nonlinear analysis, function spaces and application. Vol. 8: Proceedings of the Spring School held in Prague, May 30 – June 6, 2006 / ed. by J. Rákosník. Praha : Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 2007. P. 35–94.
3. *Blozinski A. P.* Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms // Transactions of the American Mathematical Society. 1981. Vol. 263, iss. 1. P. 146–167. https://doi.org/10.2307/1998649
4. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. Orlando : Academic Press, 1988. 469 p.
5. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1989. Т. 187. С. 143–161.
6. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата : Наука, 1976. 224 с.
7. *Темляков В. Н.* Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Математический сборник. 2015. Т. 206, № 11. С. 131–160. https://doi.org/10.4213/sm8466
8. *Belinskii E. S.* Approximation of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics and estimates of ϵ-entropy // Analysis Mathematica. 1989. Vol. 15, iss. 2. P. 67–74. https://doi.org/10.1007/BF01910941
9. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Математические заметки. 2007. Т. 82, вып. 2. С. 247–261. https://doi.org/10.4213/mzm3797
10. *Temlyakov V. N., Ullrich T.* Approximation of functions with small mixed smoothness in the uniform norm // Journal of Approximation Theory. 2022. Vol. 277. Art. 105718. https://doi.org/10.1016/j.jat.2022.105718
11. *Акишев Г.* О порядках M-членного приближения классов в пространстве Лоренца // Математический журнал. Алматы. 2011. Т. 11, № 1. С. 5–29.
12. *Акишев Г. А.* Об оценках порядка наилучших M-членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца – Караматы // Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15, вып. 1. С. 3–21.
13. *Akishev G.* On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space // arXiv:2106.07188v2 [mathCA]. 14 Jun 2021. 20 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.07188

14. *Temlyakov V. N.* Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // Constructive Approximation. 2017. Vol. 45, iss. 3. P. 467–495. https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3
15. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Наука, 1977. 456 с.
16. *Akishev G.* Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space // arXiv:2105.14810v1 [math.CA]. 31 May 2021. 18 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.14810
17. *Нурсултанов Е. Д.* Неравенство разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 197–215.
18. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 61–100. https://doi.org/10.4213/im427
19. *Акишев Г.* Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 8. С. 17–40. https://doi.org/10.4213/sm1127
20. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 5. С. 57–86.
21. *Акишев Г.* Об оценках наилучших M-членных приближений функций многих переменных в пространстве с равномерной метрикой // Современные проблемы теории функций и их приложения. 2024. Вып. 22. С. 12–15. EDN: KNYWGH

References

1. Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M. *Interpolyatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of linear operators]. Moscow, Nauka, 1978. 400 p. (in Russian).
2. Kolyada V. I. On embedding theorems. In: Rákosník J. (ed.) *Nonlinear analysis, function spaces and application*. Vol. 8: Proceedings of the Spring School held in Prague, May 30 – June 6, 2006. Praha, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic Publ., 2007, pp. 35–94.
3. Blozinski A. P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 263, iss. 1, pp. 146–167. https://doi.org/10.2307/1998649
4. Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of operators*. Orlando, Academic Press, 1988. 469 p.
5. Lizorkin P. I., Nikol'skii S. M. Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
6. Amanov T. I. *Prostranstva differentsiruyemykh funktsiy s dominiruyushchey smeshannoy proizvodnoy* [Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative]. Alma-Ata, Nauka, 1976. 224 p. (in Russian).
7. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness. *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, iss. 11, pp. 1628–1656. https://doi.org/10.1070/SM2015v206n11ABEH004507
8. Belinskii E. S. Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics and estimates of ε-entropy. *Analysis Mathematica*, 1989, vol. 15, iss. 2, pp. 67–74. https://doi.org/10.1007/BF01910941
9. Romanyuk A. S. Best trigonometric approximations for some classes of periodic functions of several variables in the uniform metric. *Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, iss. 2, pp. 216–228. https://doi.org/10.1134/S0001434607070279
10. Temlyakov V. N., Ullrich T. Approximation of functions with small mixed smoothness in the uniform norm. *Journal of Approximation Theory*, 2022, vol. 277, art. 105718. https://doi.org/10.1016/j.jat.2022.105718
11. Akishev G. On the order of the M-term approximation classes in Lorentz spaces. *Matematical Journal*, Almaty, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 5–29 (in Russian).
12. Akishev G. A. On estimates for orders of best M-term approximations of multivariate functions in anisotropic Lorentz – Karamata spaces. *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, iss. 1, pp. 1–20. https://doi.org/10.13108/2023-15-1-1
13. Akishev G. On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz – Zygmund space. *arXiv:2106.07188v2 [mathCA]*, 14 Jun 2021. 20 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.07188

14. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness. *Constructive Approximation*, 2017, vol. 45, iss. 3, pp. 467–495. https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3
15. Nikol'skii S. M. *Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of functions of several variables and imbedding theorems]. Moscow, Nauka, 1977. 456 p. (in Russian).
16. Akishev G. Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space. *arXiv:2105.14810v1 [math.CA]*, 31 May 2021. 18 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.14810
17. Nursultanov E. D. Nikol'skii's inequality for different metrics and properties of the sequence of norms of the Fourier sums of a function in the Lorentz space. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 255, pp. 185–202. https://doi.org/10.1134/S0081543806040158
18. Romanyuk A. S. Best M-term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables. *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, iss. 2, pp. 265–302. https://doi.org/10.1070/IM2003v067n02ABEH000427
19. Akishev G. A. Approximation of function classes in spaces with mixed norm. *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, iss. 8, pp. 1121–1144. https://doi.org/10.1070/SM2006v197n08ABEH003791
20. Kashin B. S., Temlyakov V. N. On best m-term approximations and the entropy of sets in the space L_1. *Mathematical Notes*, 1994, vol. 56, iss. 5, pp. 1137–1157. https://doi.org/10.1007/BF02274662
21. Akishev G. On estimates of the best m-term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*, 2024, iss. 22, pp. 12–15 (in Russian). EDN: KNYWGH

Поступила в редакцию / Received 24.02.2024
Принята к публикации / Accepted 16.07.2024
Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025