Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 173–183
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 173–183
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-173-183, EDN: ERHSOY

Научная статья
УДК 517.95,519.63,51–73

О проекционном методе решения уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью

Е. В. Серегина[1]✉**, М. А. Степович**[2]

[1]Калужский филиал Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета), Россия, 248000, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2
[2]Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского, Россия, 248023, г. Калуга, ул. Степана Разина, д. 26

Серегина Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры систем автоматического управления, evfs@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0002-9683-0617, SPIN: 6075-1022, AuthorID: 701298

Степович Михаил Адольфович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник кафедры физики и математики, m.stepovich@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-6456-4644, SPIN: 2242-8941, AuthorID: 149370

Аннотация. В настоящей работе изложены некоторые результаты возможности использования проекционного метода наименьших квадратов для решения уравнений теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью на полупрямой. Дана порядковая оценка погрешности рассмотренной проекционной схемы, соответствующей приближенному решению уравнения теплопроводности с использованием базиса из многочленов Лагерра – Якоби. Приведены результаты расчетов для двумерной модельной задачи.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, сосредоточенная теплоемкость, проекционный метод наименьших квадратов, многочлены Лагерра – Якоби, модуль непрерывности

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23-21-10069, https://rscf.ru/project/23-21-10069/.

Для цитирования: *Серегина Е. В., Степович М. А.* О проекционном методе решения уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 173–183. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-173-183, EDN: ERHSOY

Article

On the projection method for solving the heat equation with lumped heat capacity

E. V. Seregina[1]✉**, M. A. Stepovich**[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch), 2 Bazhenova St., Kaluga 248000, Russia
[2]Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovski, 26 Stepan Razin St., Kaluga 248023, Russia

Elena V. Seregina, evfs@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0002-9683-0617, SPIN: 6075-1022, AuthorID: 701298
Mikhail A. Stepovich, m.stepovich@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-6456-4644, SPIN: 2242-8941, AuthorID: 149370

Abstract. This paper presents some results of the possibility of using the least squares projection method for solving heat equations with concentrated heat capacity on a half-line. An order estimate of the error is given of the considered projection scheme corresponding to an approximate solution of the heat equation using a basis of Laguerre – Jacobi polynomials. The results of calculations for a two-dimensional model problem are presented.

Keywords: heat equation, lumped heat capacity, least squares projection method, Laguerre – Jacobi polynomials, modulus of continuity

Acknowledgements: This work was supported by the grant of the Russian Science Foundation and the Government of Kaluga Region (project No. 23-21-10069, https://rscf.ru/en/project/23-21-10069/).

For citation: Seregina E. V., Stepovich M. A. On the projection method for solving the heat equation with lumped heat capacity. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 173–183 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-173-183, EDN: ERHSOY

Введение

В работе [1] был представлен алгоритм и проведено обоснование проекционного метода Галеркина для решения стационарного трехмерного дифференциального уравнения тепломассопереноса в полубесконечной области.

В настоящей работе изложен алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов (МНК) для нахождения решения на полупрямой нестационарного дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью. Искомое решение находится в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра – Якоби. В работе [2] было проведено обоснование модифицированной проекционной схемы метода наименьших квадратов для моделирования распределения неравновесных неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах. Настоящая статья продолжает такие исследования и ставит задачу дать оценку погрешности предложенной проекционной схемы МНК, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью, для расчета температурного поля.

1. Постановка задачи

Будем искать решение дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью

$$\left(C + C_0 \delta\left(z - z_0\right)\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = f(z, t). \tag{1}$$

Для конкретности зададим граничные условия

$$\theta(z, 0) = \varphi\left(z\right), \quad \left.\frac{d\theta(z,t)}{dz}\right|_{z=0} = 0, \; 0 \leqslant z < \infty, \; 0 \leqslant t < \infty. \tag{2}$$

Здесь $\theta(z,t)$ — температура, $f(z,t)$ — удельная мощность внутреннего тепловыделения, C — теплоемкость единицы объема, k — коэффициент теплопроводности. Пусть также выполняются условия

$$f\left(+\infty, t\right) = 0, \; f\left(z, +\infty\right) = 0 \tag{3}$$

и

$$\varphi\left(+\infty\right) = 0. \tag{4}$$

Условия (3) возможны, например, для электронного или светового пучков, когда источник описывается классической функцией Гаусса или экспонентой, убывающей на бесконечности до нуля [3–5], а также произведением некоторого многочлена на убывающую экспоненту, характеризующую плотность потока энергии [6,7]. Условие (4) имеет место, например, если вместо температуры $\theta(z,t)$ ищется разность температур, что обычно актуально при небольших нагревах [4,5]. В этом случае обычно задают нулевое начальное условие: $\theta(z,0) = 0$. В точке $z = z_0$ помещена сосредоточенная теплоемкость величины C_0. Тогда в этой точке

$$[\theta] = \theta\left(z_0 + 0, t\right) - \theta\left(z_0 - 0, t\right) = 0, \tag{5}$$

$$C_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \left[k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]. \tag{6}$$

Последнее выполняется при $z = z_0$.

Для решения этой задачи можно воспользоваться проекционным методом МНК, в котором, в отличие от метода Галеркина, приближенное решение не обязано удовлетворять начальным условиям. Однако авторы большинства работ не уделяют достаточного внимания вопросам обоснования применяемых проекционных методов. В связи с этим целью настоящей работы является изложение алгоритма применения проекционного метода МНК, получение оценки погрешности предложенной проекционной схемы, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью, и сравнение приближенных результатов расчета с точным решением для модельной задачи.

2. Алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов

Согласно классическому методу МНК вместо задачи (1)–(6) вводится в рассмотрение функционал

$$J\left(\theta(z,t)\right) = \left\| L^{(\theta)}\left(\theta_1(z,t)\right) - f_1(z,t) \right\|_{L_2}^2 + \left\| L^{(\theta)}\left(\theta_2(z,t)\right) - f_2(z,t) \right\|_{L_2}^2 +$$
$$+ \left\| \theta_1(z,0) - \varphi_1(z) \right\|_{L_2}^2 + \left\| \theta_2(z,0) - \varphi_2(z) \right\|_{L_2}^2 + \left\| \left. \frac{d\theta_1(z,t)}{dz} \right|_{z=0} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \theta_1(z_0,t) - \theta_2(z_0,t) \right\|_{L_2}^2 +$$
$$+ \left\| \left. \left(C_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + k \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - k \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \right|_{z=z_0} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \left. \left(C_0 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + k \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - k \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \right|_{z=z_0} \right\|_{L_2}^2,$$

где $L^{(\theta)} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{k}{C} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — дифференциальный оператор, и решение

$$\theta(z,t) = \begin{cases} \theta_1(z,\ t), & 0 \leqslant z \leqslant z_0,\ 0 \leqslant t < \infty, \\ \theta_2(z,\ t), & z_0 \leqslant z < \infty,\ 0 \leqslant t < \infty \end{cases}$$

ищется из требования, чтобы оно доставляло минимум функционалу $J(\theta(z,t))$.

Для реализации проекционного метода МНК выберем двумерный базис из многочленов Якоби $\tilde{P}_i\left(z;\ \alpha,\ \beta\right) = P_i\left((2z - z_0)/z_0;\ \alpha,\ \beta\right)$ [8] по переменной $z \in [0, z_0]$ с параметрами $\alpha \geqslant -1/2$ и $\beta \geqslant -1/2$, использующий модифицированные функции Лагерра по переменной $z \in [z_0,\ \infty)$

$$\varphi_i^{\alpha_1,\gamma_1}(z) = \exp\left(-\gamma_1(z - z_0)/2\right) L_i\left(\gamma_1(z - z_0); \alpha_1\right)$$

и по переменной $t \in [0,\ \infty)$

$$\varphi_i^{\alpha_2,\gamma_2}(t) = \exp\left(-\gamma_2 t/2\right) L_i\left(\gamma_2 t; \alpha_2\right),$$

которые определяются через многочлены Чебышева–Лагерра по переменной z — $L_i\left(\gamma_1(z - z_0); \alpha_1\right)$ и многочлены по переменной t — $L_j\left(\gamma_2 t; \alpha_2\right)$ [8], $i, j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Здесь параметры $\alpha_1 > -1$, $\alpha_2 > -1$ и $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ используются для оптимизации вычислительной схемы.

Для простоты будем брать одинаковое число базисных функций m. Тогда каждую функцию от переменных z и t, входящую в исходную систему уравнений, аппроксимируем частичной суммой двойного ряда Фурье по системе многочленов Якоби и функций Лагерра.

Приближенное решение $\theta_m(z,t)$ ищем из требования, чтобы оно доставляло минимум функционалу $J\left(\theta_m(z,t)\right)$.

Обозначим через $C_{mm}^{\theta_1}$, $C_{mm}^{\theta_2}$ и $C_{mm}^{f_1}$, $C_{mm}^{f_2}$ столбцы (матрицы, растянутые в столбцы) [9] из коэффициентов разложения неизвестных функций $\theta_1(z,t)$, $\theta_2(z,t)$ и известных функций $f_1(z,t)$, $f_2(z,t)$ по выбранному базису соответственно; $C_m^{\varphi_1}$, $C_m^{\varphi_2}$ — столбцы из коэффициентов разложения известных функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ соответственно. Далее введем матрицы $D^{z_1} = E\otimes D_1$, $D^{z_2} = E\otimes D_2$ и $D^t = D_3\otimes E$, где D_1 — матрица дифференцирования в одномерном базисе из многочленов Якоби, а D_2, D_3 — матрицы дифференцирования в одномерном базисе из модифицированных функций Лагерра, элементы которых находятся с помощью элементарных алгебраических операций [10, 11]

$$d_{ij}^{2,3} = \begin{cases} -\gamma_{1,2}/2, & i=j,\\ -\gamma_{1,2}, & i<j,\\ 0, & i>j. \end{cases}$$

Здесь E — единичная матрица. Элементы матрицы дифференцирования D_1 могут быть найдены по формуле

$$d_{ij}^1 = \begin{cases} \left((\alpha+\beta+j)\,\Gamma\left(\alpha+\beta+2\right)/(z_0\Gamma\left(\alpha+\beta+j+1\right))\right)\times \\ \times\left(\Gamma\left(\beta+j\right)/\Gamma\left(\beta+1\right)+(-1)^{j-2}\,\Gamma\left(\alpha+j\right)/\Gamma\left(\alpha+1\right)\right), \quad i=1,\\ \left((\alpha+\beta+j)\left(\alpha+\beta+2i-1\right)\Gamma\left(\alpha+\beta+i\right)/(z_0\Gamma\left(\alpha+\beta+j+1\right))\right)\times \\ \times\left(\Gamma\left(\beta+j\right)/\Gamma\left(\beta+i\right)+(-1)^{j-i-1}\,\Gamma\left(\alpha+j\right)/\Gamma\left(\alpha+i\right)\right), \quad i\leqslant j, \end{cases}$$

d_{ij}^1 определяются с использованием формулы дифференцирования и известных рекуррентных формул для многочленов Якоби [8].

Обозначим через $\tilde{P}_m^{\alpha,\beta}(z)$, $\varphi_m^{\alpha_1,\gamma_1}(z)$ и $\varphi_m^{\alpha_2,\gamma_2}(t)$ столбцы из m первых базисных функций по переменным z и t , смещенным на соответствующих интервалах.

В силу ортогональности базисных функций функционал $J\left(\theta_m(z,t)\right)$ можно представить в виде

$$J\left(\theta_m(z,t)\right) = J\left(C^\theta\right) = \left(AC^\theta - G\right)^T\left(AC^\theta - G\right) \to \inf, \tag{7}$$

где матрица A имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} D^t-\frac{k}{C}\left(D^{z_1}\right)^2 & \mathrm{O}_{m^2\times m^2}\\ \mathrm{O}_{m^2\times m^2} & D^t-\frac{k}{C}\left(D^{z_2}\right)^2\\ \left(\varphi_m^{\alpha_2,\gamma_2}(0)\right)^T\otimes E & \mathrm{O}_{m\times 1}\\ \mathrm{O}_{m\times 1} & \left(\varphi_m^{\alpha_2,\gamma_2}(0)\right)^T\otimes E\\ E\otimes\left(\tilde{P}_m^{\alpha,\beta}(0)\right)^T D_1 & \mathrm{O}_{m\times 1}\\ E\otimes\left(\tilde{P}_m^{\alpha,\beta}(z_0)\right)^T & -E\otimes\left(\varphi_m^{\alpha_1,\gamma_1}(z_0)\right)^T\\ D_3\otimes\left(\tilde{P}_m^{\alpha,\beta}(z_0)\right)^T+\frac{k}{C_0}\left(E\otimes\left(\tilde{P}_m^{\alpha,\beta}(z_0)\right)^T D_1\right) & \frac{k}{C_0}\left(E\otimes\left(\varphi_m^{\alpha_1,\gamma_1}(z_0)\right)^T D_2\right)\\ -\frac{k}{C_0}\left(E\otimes\left(\tilde{P}_m^{\alpha,\beta}(z_0)\right)^T D_1\right) & D_3\otimes\left(\varphi_m^{\alpha_1,\gamma_1}(z_0)\right)^T-\frac{k}{C_0}\left(E\otimes\left(\varphi_m^{\alpha_1,\gamma_1}(z_0)\right)^T D_2\right) \end{bmatrix}.$$

Здесь G — столбец $G=\begin{bmatrix} C_{mm}^{f_1} & C_{mm}^{f_2} & C_m^{\varphi_1} & C_m^{\varphi_2} & \mathrm{O}_{m\times 1} & \mathrm{O}_{m\times 1} & \mathrm{O}_{m\times 1} & \mathrm{O}_{m\times 1}\end{bmatrix}^T$.

Далее находим нормальное псевдорешение задачи минимизации (7) $C^{\theta+}=\begin{bmatrix} C^{\theta_1^+} & C^{\theta_2^+}\end{bmatrix}^T$ с помощью псевдообратной матрицы, т. е.

$$C^{\theta+} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T G.$$

Получив нормальное псевдорешение $C^{\theta+}$, можно восстановить приближенное решение исходной задачи:

$$\theta_1(z,t) \approx \left(\varphi_m^{\alpha_2,\gamma_2}(t)\right)^T C^{\theta_1^+} \tilde{P}_m^{\alpha,\beta}(z)\,, \quad z\in[0,z_0]\,, \quad t\in[0,\infty)\,,$$
$$\theta_2(z,t) \approx \left(\varphi_m^{\alpha_2,\gamma_2}(t)\right)^T C^{\theta_2^+} \varphi_m^{\alpha_1,\gamma_1}(z), \quad z\in[z_0,\infty)\,, \quad t\in[0,\infty)\,.$$

3. Условие сходимости

Исследуем сходимость последовательности $\left\{C_m^\theta\right\}$ по функционалу J, т.е. покажем, что $\lim\limits_{m\to\infty} J\left(C_m^\theta\right)=0$.

Следуя [12], введем обозначения:

$$D_1=\left(\frac{4z}{z_0}-\frac{4z^2}{z_0^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}+\left(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\left(\frac{2z-z_0}{z_0}\right)\right)\frac{d}{dz}+t\frac{d^2}{dt^2}+(\alpha_2-t+1)\frac{d}{dt},$$
$$D_2=(z-z_0)\frac{d^2}{dz^2}+(\alpha_1-z+z_0+1)\frac{d}{dz}+t\frac{d^2}{dt^2}+(\alpha_2-t+1)\frac{d}{dt}.$$

Здесь $L_2^n(D_1)$ $(n=0,1,...)$ — класс функций f таких, что функции $\tilde{f}(z,t)=f(z,t)\times$ $\times\exp(\gamma_2 t/2)\in L_2$ и имеющие обобщенные частные производные в смысле Леви [13]

$$\frac{\partial^k}{\partial z^i\partial t^j}\tilde{f}(z,t), \quad i+j=k, \quad k=0,1,\dots,$$

принадлежащие пространству L_2, для которых $D_1^n\tilde{f}\in L_2$, $n=0,1,\dots$, где $D_1^0\tilde{f}=\tilde{f}$, $D_1^n\tilde{f}=D_1\left(D_1^{n-1}\tilde{f}\right)$, $n=1,2,...$, $L_2^0(D_1)=L_2$. Также $L_2^n(D_2)$ $(n=0,1,\dots)$ — класс функций f таких, что функции $\tilde{f}(z,\ t)=f(z,\ t)\exp(\gamma_1(z-z_0)/2)\exp(\gamma_2 t/2)\in L_2$ и имеющие обобщенные частные производные в смысле Леви [13]

$$\frac{\partial^k}{\partial z^i\partial t^j}\tilde{f}(z,t), \quad i+j=k, \quad k=0,1,\dots,$$

принадлежащие пространству L_2, для которых $D_2^n\tilde{f}\in L_2$ $n=0,1,\dots$, где $D_2^0\tilde{f}=\tilde{f}$, $D_2^n\tilde{f}=D_2\left(D_2^{n-1}\tilde{f}\right)$, $n=1,2,...$, $L_2^0(D_2)=L_2$.

Далее нам понадобится вспомогательная теорема, которой будем пользоваться ниже.

Справедлива

Теорема 1. *Для любых функций $f_1(z,t)\in L_2^n(D_1)$ и $f_2(z,t)\in L_2^n(D_2)$ справедлива оценка (см. [1, 12])*

$$\|f_1-S_{m,m}(f_1)\|\leqslant\left[1-(1-h)^m\right]^{-k}m^{-n}\Omega_k\left(D_1^n\tilde{f}_1;h\right), \tag{8}$$
$$\|f_2-S_{m,m}(f_2)\|\leqslant\left[1-(1-h)^m\right]^{-k}m^{-n}\Omega_k\left(D_2^n\tilde{f}_2;h\right), \tag{9}$$

где $r=0,\,1,...,\ 0<h<1$. Величины $\Omega_k\left(D_1^n\tilde{f}_1;h\right)$ и $\Omega_k\left(D_2^n\tilde{f}_2;h\right)$ — обобщенные модули непрерывности функций $D_1^n\tilde{f}$ и $D_2^n\tilde{f}_2$ (см. [12]), а $S_{m,m}(f_1)=\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{j=0}^{m-1}c_{ij}^{f_1}\tilde{P}_i(z;\ \alpha,\ \beta)\,\varphi_j^{\alpha_2,\gamma_2}(t)$ и $S_{m,m}(f_2)=\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{j=0}^{m-1}c_{ij}^{f_2}\varphi_i^{\alpha_1,\gamma_1}(z)\varphi_j^{\alpha_2,\gamma_2}(t)$ — прямоугольные частичные суммы двойных рядов Фурье функций $f_1(z,t)$ и $f_2(z,t)$ соответственно.

Если погрешности в исходных данных и погрешности вычислений отсутствуют, а учитываются лишь погрешности аппроксимаций, тогда имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $r = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta\} \geqslant -1/2$, а функции $f_1(z,t) \in L_2^n(D_1)$, $f_2(z,t) \in L_2^n(D_2)$ и имеют непрерывные частные производные до порядка $n > \frac{r}{2} + \frac{11}{4}$ по обоим пространственным направлениям. Тогда последовательность нормальных псевдорешений $\left\{C_{mm}^{\theta+}\right\}$ будет минимизирующей для функционала $J\left(C_{mm}^{\theta}\right)$ и справедлива оценка*

$$\sqrt{J\left(C_{mm}^{\theta+}\right)} < \left(\frac{2k}{C} + 15 + 6k + 4C_0\right)\left[1-\left(1-m^{-1}\right)^m\right]^{-k}(m)^{-n}\,\Omega(m^{-1}) + \\ + O\left(m^{-n+\frac{r}{2}+\frac{11}{4}}\right)\omega(m^{-1}), \quad m \to \infty,$$

где $\Omega(m^{-1})$ — мажоранта обобщенных модулей непрерывности и $\omega(m^{-1})$ — заданная мажоранта модулей непрерывности.

Доказательство. Имеем:

$$\sqrt{J\left(C_{mm}^{\theta+}\right)} \leqslant \sqrt{J\left(C_{mm}^{\theta}\right)} \leqslant \left\|\frac{\partial\theta_1(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial\theta_1^m(z,t)}{\partial t}\right\|_{L_2} + \\ + \frac{k}{C}\left\|\left(\frac{\partial^2\theta_1(z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\theta_1^m(z,t)}{\partial z^2}\right)\right\|_{L_2} + \|f_1(z,t) - f_1^m(z,t)\|_{L_2} + \\ + \left\|\frac{\partial\theta_2(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial\theta_2^m(z,t)}{\partial t}\right\|_{L_2} + \frac{k}{C}\left\|\left(\frac{\partial^2\theta_2(z,t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\theta_2^m(z,t)}{\partial z^2}\right)\right\|_{L_2} + \\ + \|f_2(z,t) - f_2^m(z,t)\|_{L_2} + \|\varphi_1(z) - \varphi_1^m(z)\|_{L_2} + \|\varphi_2(z) - \varphi_2^m(z)\|_{L_2} + \\ + \|\theta_1(z,0) - \theta_1^m(z,0)\|_{L_2} + \|\theta_2(z,0) - \theta_2^m(z,0)\|_{L_2} + \|\theta_2(z_0,t) - \theta_2^m(z_0,t)\|_{L_2} + \\ + 2k\left\|\left(\frac{\partial\theta_2(z,t)}{\partial z} - \frac{\partial\theta_2^m(z,t)}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}\right\|_{L_2} + C_0\left\|\left(\frac{\partial\theta_2(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial\theta_2^m(z,t)}{\partial t}\right)\Big|_{z=z_0}\right\|_{L_2} + \\ + \|\theta_1(z_0,t) - \theta_1^m(z_0,t)\|_{L_2} + \left\|\left(\frac{d\theta_1(z,t)}{dz} - \frac{d\theta_1^m(z,t)}{dz}\right)\Big|_{z=0}\right\|_{L_2} + \\ + 2k\left\|\left(\frac{\partial\theta_1(z,t)}{\partial z} - \frac{\partial\theta_1^m(z,t)}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}\right\|_{L_2} + C_0\left\|\left(\frac{\partial\theta_1(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial\theta_1^m(z,t)}{\partial t}\right)\Big|_{z=z_0}\right\|_{L_2}.$$

Обозначим слагаемые в правой части последнего неравенства через $S_1, \dots, S_{17}$ и оценим их сверху. В силу оценок (8), (9):

$$S_1 \leqslant \left[1-(1-h)^m\right]^{-k-1} m^{-n}\Omega_{k+1}\left(D_1^n\left(\tilde{\theta}'_{1_t}(z,t) + \left(\frac{\gamma_2}{2}\right)\tilde{\theta}_1(z,t)\right); h\right),$$

$$S_2 \leqslant \frac{k}{C}\left[1-(1-h)^m\right]^{-k} m^{-n}\Omega_k\left(D_1^n\left(\tilde{\theta}''_{1_{zz}(z,t)}\right); h\right),$$

$$S_3 \leqslant \left[1-(1-h)^m\right]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_1^{n+1}\left(\tilde{f}_1(z,t)\right); h\right),$$

$$S_4 \leqslant [(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n}\Omega_{k+1}\left(D_2^n\left(\tilde{\theta}'_{2_t}(z,t) + \left(\frac{\gamma_2}{2}\right)\tilde{\theta}_2(z,t)\right); h\right),$$

$$S_5 \leqslant \frac{k}{C}[1-(1-h)^m]^{-k} m^{-n}\Omega_k\left(D_2^n\left(\tilde{\theta}''_{2_{zz}}(z,t) + \gamma_1\tilde{\theta}'_{2_z}(z,t) + (\gamma_1^2/4)\tilde{\theta}_2(z,t)\right); h\right),$$

$$S_6 \leqslant [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_2^{n+1}\left(\tilde{f}_2(z,t)\right); h\right),$$

$$S_7 \leqslant [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_1^{n+1}\left(\tilde{\varphi}_1(z)\right); h\right),$$

$$S_8 \leqslant [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_2^{n+1}\left(\tilde{\varphi}_2(z)\right); h\right).$$

Далее оценим слагаемые $S_9, \dots, S_{13}$:

$$S_9 \leqslant [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_1^{n+1}\left(\tilde{\theta}_1(z,0)\right); h\right) + \sum_{i=0}^{m-1}\left|\tilde{c}_i^{\theta_1(z,0)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} L_j(0;\alpha_2)\right|.$$

Для оценки выражения

$$\left|\tilde{c}_i^{\theta_1(z,0)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} L_j\left(0;\alpha_2\right)\right|$$

воспользуемся асимптотической формулой для коэффициентов Фурье–Лагерра [14]

$$c_{im}^{\theta_1(z,t)} = O\left(m^{-(\alpha_2+2n+2)/2-1/4}\right)\omega\left(m^{-1/2}\right), \tag{10}$$

учитывая, что $c_1 m^{\alpha_2} \leqslant L_m\left(0;\alpha_2\right) \leqslant c_2 m^{\alpha_2}$ [8]. Здесь c_1 и c_2 — некоторые фиксированные положительные постоянные, а $\omega\left(t\right)$ — заданная мажоранта модулей непрерывности. Тогда в силу (10) и $\sum\limits_{j=m}^{\infty} j^{-\beta} = O\left(m^{-\beta+1}\right)$ при $\beta > 1$ для отклонения сумм Фурье–Лагерра находим

$$\left|\tilde{c}_i^{\theta_1(z,0)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} L_j\left(0;\alpha_2\right)\right| = \left|\sum_{j=m}^{\infty} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} L_j\left(0;\alpha_2\right)\right| =$$

$$= O\left(1\right)\sum_{j=m}^{\infty} j^{\frac{(-2n-2)}{2}+\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{4}}\omega\left(j^{-1/2}\right) = O\left(m^{-n+\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{4}}\right)\omega\left(m^{-1/2}\right).$$

Заметим, что последнее имеет место, если $n > \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{4}$. Ясно, что если функция $\theta_1(z,t)$ бесконечное число раз непрерывно дифференцируема, то всегда будет сходиться ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j^{\frac{(-2n-2)}{2}+\frac{\alpha_2}{2}-\frac{1}{4}}\omega\left(j^{-1/2}\right)$, т.е. в этом случае будем учитывать, что полученная оценка справедлива при любом $n > \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{4}$. Итак,

$$S_9 \leqslant [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_1^{n+1}\left(\tilde{\theta}_1(z,0)\right);h\right) + O\left(m^{-n+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{3}{4}}\right)\omega\left(m^{-1/2}\right).$$

Аналогичным способом получаем оценки для слагаемых $S_{10},\ldots,S_{13}$:

$$S_{10} \leqslant \left[1-(1-h)^m\right]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_2^{n+1}\left(\tilde{\theta}_2(z,0)\right);h\right) + O\left(m^{-n+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{3}{4}}\right)\omega\left(m^{-1/2}\right),$$

$$S_{11} \leqslant [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_2^{n+1}\left(\tilde{\theta}_2(z_0,t)\right);h\right) + O\left(m^{-n+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{3}{4}}\right)\omega\left(m^{-1/2}\right),$$

$$S_{12} \leqslant 2k[(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n}\Omega_{k+1}\left(D_2^{n}\left(\tilde{\theta}_{2_z}'(z_0,t) + (\gamma_1/2)\,\tilde{\theta}_2(z_0,t)\right);h\right) +$$
$$+O\left(m^{-n+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{9}{4}}\right)\omega\left(m^{-1/2}\right),$$

$$S_{13} \leqslant C_0[(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n}\Omega_{k+1}\left(D_2^{n}\left(\tilde{\theta}_{2_t}'(z_0,t) + (\gamma_2/2)\,\tilde{\theta}_2(z_0,t)\right);h\right) +$$
$$+O\left(m^{-n+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{5}{4}}\right)\omega\left(m^{-1/2}\right).$$

Оценим слагаемые $S_{14},\ldots,S_{17}$:

$$S_{14} \leqslant [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1}\Omega_{k+2}\left(D_1^{n+1}\left(\tilde{\theta}_1(z_0,t)\right);h\right) +$$
$$+\sum_{i=0}^{m-1}\left|\tilde{c}_i^{\theta_1(z_0,t)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z,t)}\hat{P}_j(z_0;\alpha,\beta)\right|,$$

где $\hat{\varphi}_i^{\alpha_2,\gamma_2}(t)$ — ортонормированные функции Лагерра.

Для оценки выражения

$$\left|\tilde{c}_i^{\theta_1(z_0,t)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} \hat{P}_j\left(z_0;\ \alpha,\ \beta\right)\right|$$

воспользуемся следующей оценкой для многочленов Якоби [8]:

$$\left|\tilde{c}_i^{\theta_1(z_0,t)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} \hat{P}_j\left(z_0;\ \alpha,\ \beta\right)\right| = O\left(m^{-2n+q-1}\right)\omega(m^{-1}),$$

где $q = \max\{\alpha,\beta\} \geqslant -1/2$ [8]. Заметим, что последнее имеет место, если $n > \frac{q}{2} - \frac{1}{2}$. Ясно, что если функция $\theta_1(z,t)$ бесконечное число раз непрерывно дифференцируема, то в этом случае полученная оценка справедлива при любом $n > \frac{q}{2} - \frac{1}{2}$. Итак,

$$S_{14} \leqslant [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2}\left(D_1^{n+1}\left(\tilde{\theta}_1(z_0,t)\right); h\right) + O\left(m^{-2n+q}\right)\omega(m^{-1}).$$

Аналогичным способом получаем оценки для слагаемых $S_{15},\ S_{16},\ S_{17}$:

$$S_{15} \leqslant [(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1}\left(D_1^{n}\left(\tilde{\theta}'_{1_z}(0,t)\right); h\right) + O\left(m^{-2n+q+2}\right)\omega(m^{-1}),$$
$$S_{16} \leqslant 2k[(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1}\left(D_1^{n}\left(\tilde{\theta}'_{1_z}(z_0,t)\right); h\right) + O\left(m^{-2n+q+2}\right)\omega(m^{-1}),$$
$$S_{17} \leqslant C_0[(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1}\times$$
$$\times\left(D_1^{n}\left(\tilde{\theta}'_{1_t}(z_0,t) + (\gamma_2/2)\,\tilde{\theta}_1(z_0,t)\right); h\right) + O\left(m^{-2n+q+1/2}\right)\omega(m^{-1}).$$

Полагая $h = m^{-1}$ и учитывая, что $\omega\left(m^{-1/2}\right) \leqslant 2\sqrt{m}\,\omega(m^{-1})$ [15], собрав все оценки вместе, получаем оценку для функционала

$$\sqrt{J\left(C_{mm}^{\theta+}\right)} < \left(\frac{2k}{C} + 15 + 6k + 4C_0\right)\left[1 - \left(1 - m^{-1}\right)^m\right]^{-k}(m)^{-n}\,\Omega(m^{-1}) +$$
$$+ O\left(m^{-n+\frac{r}{2}+\frac{11}{4}}\right)\omega(m^{-1}),$$

где $\Omega(m^{-1})$ — мажоранта обобщенных модулей непрерывности, $r = \max\{\alpha_1,\alpha_2,q\} \geqslant -\frac{1}{2}$.

Теорема 2 доказана. □

4. Результаты расчетов

Расчеты проведены с помощью математического пакета Matlab (MathWorks, Inc.) для двумерной модельной задачи. На глубине $z_0 = 1$ помещена сосредоточенная теплоемкость. Рассматривалась следующая задача:

$$(2 + 4\delta(z-1))\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = f(z,t), \quad 0 \leqslant z < \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty$$

с граничными условиями

$$\theta_1(z,0) = z^2\exp(-z), \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \theta_2(z,0) = (z-2)^2\exp(-z), \ \ 1 \leqslant z < \infty,$$
$$\left.\frac{d\theta(z,t)}{dz}\right|_{z=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Здесь

$$f_1(z,t) = \exp(-t)\exp(-z)\left(-1.5z^2 + 2z - 1\right)),$$

$$f_2(z,t) = \exp(-t)\exp(-z)\left(-1.5z^2 + 8z - 11\right).$$

Точное решение этой задачи

$$\theta_1^*(z,t) = z^2\exp(-t)\exp(-z), \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$
$$\theta_2^*(z,t) = (z-2)^2\exp(-t)\exp(-z), \quad 1 \leqslant z < \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Приведем оценки относительной погрешности по норме пространства L_2 и значения функционала для $m = 4, 5, 6$:

$$\Delta_1(\theta^*, \theta_4) = \frac{\|\theta^*(z,t) - \theta_4(z,t)\|_{L_2}}{\|\theta^*(z,t)\|_{L_2}} \cdot 100\% \approx 34.62\%, \quad \tilde{J}\left(\theta^4(z,t)\right) = 954.78,$$
$$\Delta_2(\theta^*, \theta_5) = \frac{\|\theta^*(z,t) - \theta_5(z,t)\|_{L_2}}{\|\theta^*(z,t)\|_{L_2}} \cdot 100\,\% \approx 9.02\%, \quad \tilde{J}\left(\theta^5(z,t)\right) = 28.88,$$
$$\Delta_3(\theta^*, \theta_6) = \frac{\|\theta^*(z,t) - \theta_6(z,t)\|_{L_2}}{\|\theta^*(z,t)\|_{L_2}} \cdot 100\,\% \approx 0.16\%, \quad \tilde{J}\left(\theta^6(z,t)\right) = 0.73.$$

Значения модифицирующих параметров равны $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Результаты расчетов показали, что предложенный алгоритм метода МНК позволяет получить решение уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью с использованием небольшого числа удерживаемых членов разложения в ряд. Вычисления производились в символьном виде и с помощью встроенных функций MATLAB.

Заключение

Изложен алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов и получена порядковая оценка погрешности предложенной проекционной схемы, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью. Метод позволяет находить матрицу, определяющую приближенное решение рассматриваемой задачи, не прибегая к операциям дифференцирования и интегрирования, а используя только алгебраические операции, что существенно сокращает время вычислений. Проведено сравнение приближенных результатов расчета с точным решением для двумерной модельной задачи. Приближенное решение содержит небольшое число членов разложения по базису из многочленов Лагерра–Якоби.

Список литературы

1. *Макаренков А. М., Серегина Е. В., Степович М. А.* Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 5. С. 801–813. https://doi.org/10.7868/S0044466917050076
2. *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 11. С. 65–69. https://doi.org/10.7868/S0207352813110176, EDN: RDJUUP
3. *Михеев Н. Н., Степович М. А.* Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1996. Т. 62, № 4. С. 20–25.
4. *Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А.* Об одной особенности моделирования нагрева полупроводниковой мишени электронным зондом // Известия РАН. Серия физическая. 2018. Т. 82, № 9. С. 1304–1309. https://doi.org/10.1134/S036767651809003X
5. *Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А., Филиппов М. Н.* Оценка нагрева поверхности полупроводниковой мишени низкоэнергетичным электронным зондом // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2018. № 8. С. 48–52. https://doi.org/10.1134/S0207352818080036

6. *Ханефт А. В., Долгачев В. А., Дугинов Е. В., Иванов Г. А.* Критерии зажигания энергетических материалов коротким лазерным и электронным импульсами // Вестник Кемеровского государственного университета. 2013. Т. 3, № 3 (55). С. 31–39.
7. *Seregina E. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V.* Modeling of heating in the epitaxial structure $Cd_xHg_{1-x}Te/CdTe$ with the projection least squares method // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1163. Art. 012013. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1163/1/012013
8. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. Москва : Физматлит, 2007. 480 с.
9. *Лапин С. В., Егупов Н. Д.* Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 496 с.
10. *Петров В. И., Самохвалов А. А., Степович М. А., Чайковский М. М.* Матричный метод решения задачи коллективного движения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66, № 9. С. 1310–1316.
11. *Belov A. A., Egupov N. D., Samokhvalov A. A., Stepovich M. A., Tchaikovsky M. M.* Orthogonal-projection method for solving equations of diffusion of minority charge carriers generated by the electron beam in semiconductors // SPIE Proceedings. 2003. Vol. 5025. P. 149–159. https://doi.org/10.1117/12.498033
12. *Абилов В. А., Абилов М. В., Керимов М. К.* Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 7. С. 1109–1117. https://doi.org/10.7868/S0044466915070029, EDN: TXUKCZ
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Наука, 1969. 480 с.
14. *Лащенов В. К.* Приближение дифференцируемых функций частными суммами ряда Фурье – Лагерра // Известия вузов. Математика. 1981. № 1. С. 44–57.
15. *Тимман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. Москва : Физматлит, 1960. 624 с.

References

1. Makarenkov A. M., Seregina E. V., Stepovich M. A. The projection Galerkin method for solving the time-independent differential diffusion equation in a semi-infinite domain. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, iss. 5, pp. 802–814. https://doi.org/10.1134/S0965542517050074
2. Seregina E. V., Stepovich M. A., Makarenkov A. M. On a modified projection scheme of the least squares method for the modeling of the distribution of minority charge carriers generated by an electron beam in a homogeneous semiconductor material. *Journal of Surface Investigation X-ray Synchrotron and Neutron Techniques*, 2013, vol. 7, iss. 6, pp. 1077–1080.
3. Mikheev N. N., Stepovich M. A. Distribution of energy losses in interaction of an electron probe with material. *Industrial Laboratory*, 1996, vol. 62, iss. 4, pp. 221–226. EDN: LDPTZB
4. Amrastanov A. N., Seregina E. V., Stepovich M. A. Aspects of modeling the electron probe heating of a semiconductor target. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 2018, vol. 82, iss. 9, pp. 1187–1192. https://doi.org/10.3103/S1062873818090034
5. Amrastanov A. N., Seregina E. V., Stepovich M. A., Filippov M. N. Estimation of the heating of a semiconductor target surface by a low-energy electron beam. *Journal of Surface Investigation. X–Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2018, vol. 12, iss. 4, pp. 778–782. https://doi.org/10.1134/S1027451018040225
6. Khaneft A. V., Dolgachev V. A., Duginov E. V., Ivanov G. A. Criteria of energetic materials ignition by short laser and electron pulses. *Bulletin of Kemerovo State University*, 2013, vol. 3, iss. 3 (55), pp. 31–39 (in Russian).
7. Seregina E. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. Modeling of heating in the epitaxial structure $Cd_xHg_{1-x}Te/CdTe$ with the projection least squares method. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1163, art. 012013. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1163/1/012013
8. Suetin P. K. *Klassicheskiye ortogonal’nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 480 p. (in Russian).
9. Lapin S. V., Egupov N. D. *Teoriya matrichnykh operatorov i ee prilozheniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* [The theory of matrix operators and its application to automatic control problems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 496 p. (in Russian).
10. Petrov V. I., Samokhvalov A. A., Stepovich M. A., Tchaikovsky M. M. A matrix method for solving

the problem of collective motion of non-basic charge carriers generated in a semiconductor material by an electron beam. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 2002, vol. 66, iss. 9, pp. 1310–1316 (in Russian).
11. Belov A. A., Egupov N. D., Samokhvalov A. A., Stepovich M. A., Tchaikovsky M. M. Orthogonal-projection method for solving equations of diffusion of minority charge carriers generated by the electron beam in semiconductors. *SPIE Proceedings*, 2003, vol. 5025, pp. 149–159. https://doi.org/10.1117/12.498033
12. Abilov V. A., Abilov M. V., Kerimov M. K. Sharp estimates for the rate of convergence of double Fourier series in classical orthogonal polynomials. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, iss. 7, pp. 1094–1102. https://doi.org/10.1134/S0965542515070027
13. Nikolsky S. M. *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of functions of many variables and embedding theorems]. Moscow, Nauka, 1969. 480 p. (in Russian).
14. Laschenov V. K. Approximation of differentiable functions by partial sums of the Fourier – Laguerre series. *Russian Mathematics*, 1981, iss. 1, pp. 44–57 (in Russian).
15. Timman A. F. *Teoriya priblizheniya funktsiy deystvitel'nogo peremennogo* [The theory of approximation of functions of a real variable]. Moscow, Fizmatlit, 1960. 624 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 25.02.2024
Принята к публикации / Accepted 21.10.2024
Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025