

## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 189–202

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 189–202

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-189-202>

EDN: FPIOWJ

Научная статья

УДК [533+536]:51-73

### Табулирование решения задачи Римана в методе Годунова для уравнения состояния Соаве – Редлиха – Квонга

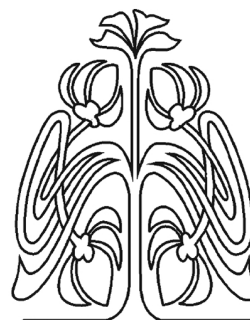
М. Р. Королева<sup>✉</sup>, В. А. Тенев

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН, Россия, 426067, г. Ижевск, ул. Татьяны Барамзиной, д. 34

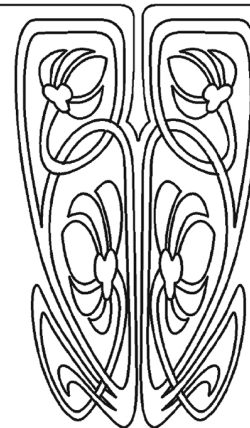
**Королева Мария Равиловна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [koroleva@udman.ru](mailto:koroleva@udman.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5697-9199>, SPIN: 5085-4691, AuthorID: 154514

**Тенев Валентин Алексеевич**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, [v.tenenev@gmail.com](mailto:v.tenenev@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-7685-609X>, SPIN: 4793-8214, AuthorID: 119471

**Аннотация.** В работе рассматриваются вопросы использования точных решений задачи Римана для описания течений реальных газов, описываемых уравнением состояния Соаве – Редлиха – Квонга. Формулируются основные математические выражения для построения точного решения задачи о распаде произвольного разрыва. Исследуются особенности поведения функций, входящих в состав решения. Показано, что форма уравнения состояния Соаве – Редлиха – Квонга не допускает явного выражения зависимости между давлением и внутренней энергией газа. Связь между данными параметрами определяется через температуру, что значительно усложняет процедуру нахождения точного решения на разрывах. Возникающие сложности определяются, во-первых, особенностями математической постановки задачи, которая включает ряд нелинейных уравнений и интегралов, требующих привлечения итерационных методов поиска решения. Это приводит к существенному повышению трудоемкости алгоритма. Во-вторых, специфическое поведение ряда функций в составе математической модели не гарантирует корректное построение точного решения задачи Римана при использовании итерационных методов. Все это делает классический подход неприменимым для решения сложных задач нестационарной газовой динамики для реального газа Соаве – Редлиха – Квонга. Предлагаемый в работе подход использует интерполирование решений на основе предварительных точных расчетов задачи Римана, выполненных без дополнительных допущений во всем диапазоне изменения газодинамических параметров задачи. Использование табулированных значений гарантирует точность построения приближенного решения и сокращает трудоемкость вычислительного алгоритма. Описанный подход используется для численного моделирования течения водорода в ударной трубе в широком диапазоне изменения газодинамических величин в областях классической и неклассической газовой динамики, а также для численного моделирования газодинамики водород-



Научный  
отдел





ного предохранительного клапана. Полученные результаты подтверждают, что применение табулированных параметров оправданно в очень широком диапазоне изменения параметров, а предложенный подход может быть использован для решения сложных задач нестационарной газовой динамики, в том числе с областями смешанной нелинейности.

**Ключевые слова:** задача Римана, метод Годунова, реальный газ, уравнение состояния Соаве–Редлиха–Квонга, табулирование решения, интерполяция

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках темы государственного задания УдмФИЦ УрО РАН «Разработка и развитие новых методов исследований в естественно-научных, технических и социогуманитарных направлениях на основе технологий глубоких нейронных сетей, машинного обучения и математического моделирования» (проект № 22040700011-4).

**Для цитирования:** Королева М. Р., Тенев В. А. Табулирование решения задачи Римана в методе Годунова для уравнения состояния Соаве–Редлиха–Квонга // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 189–202. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-189-202>, EDN: FPIOWJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Tabulation of the Riemann problem solution in Godunov method for Soave–Redlich–Kwong equation of state

M. R. Koroleva<sup>✉</sup>, V. A. Tenenev

Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the RAS, 34 Tat'iany Baramzinoi St., Izhevsk 426067, Russia

**Maria R. Koroleva**, koroleva@udman.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5697-9199>, SPIN: 5085-4691, AuthorID: 154514

**Valentin A. Tenenev**, v.tenenev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7685-609X>, SPIN: 4793-8214, AuthorID: 119471

**Abstract.** The work is devoted to the using of the exact solutions of the Riemann problem on the decay of an arbitrary discontinuity to describe the real gases flows with the Soave–Redlich–Kwong equation of state. The governing mathematical expressions are formulated for constructing an exact solution to the Riemann problem. The features of the functions included in the solution are investigated. It is demonstrated that the form of the Soave–Redlich–Kwong equation of state does not allow to define explicitly the relationship between pressure and internal energy of the gas. The connection between these is determined through gas temperature that leads to significant complication of the task solution technique on the discontinuities. The arising difficulties are determined, firstly, by the features of the mathematical formulation of the problem. It includes a number of nonlinear equations and definite integrals that require the using of the iterative methods to find an exact Riemann solution. This leads to a significant increase in numerical algorithm complexity. Secondly, the specific behavior of some functions in the mathematical model does not guarantee the correct construction of an exact solution to the Riemann problem in using the iterative methods. All these reasons make the classical approach inappropriate for solving complex problems of nonstationary gas dynamics for a real Soave–Redlich–Kwong gas. The approach proposed in this work uses interpolation of solutions constructed on the preliminary accurate calculations of the Riemann problem, performed without additional assumptions over the entire range of changes in gas-dynamic parameters. The use of tabulated values provides the accuracy of constructing an approximate solution and reduces the complexity of the computational algorithm. In the present work this approach is used for numerical simulation of the hydrogen flow in shock tube in a wide range of gas parameters in the fields of classical and non-classical gas dynamics and for numerical simulation of the gas dynamics of a hydrogen safety valve. The obtained results confirm that the use of tabulated parameters is justified in a wide range of gas parameters variations, and the proposed approach can be used to solve complex problems of non-stationary gas dynamics, including those with areas of mixed nonlinearity.



**Keywords:** Riemann problem, Godunov method, real gas, discontinuity decay, Soave – Redlich – Kwong equation of state, solution tabulation, interpolation

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences “Design and development of new research methods in natural sciences, technology and social-humanitarian directions based on deep neural network technologies, machine learning and mathematical modeling” (project No. 22040700011-4).

**For citation:** Koroleva M. R., Tenenev V. A. Tabulation of the Riemann problem solution in Godunov method for Soave – Redlich – Kwong equation of state. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 189–202 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-189-202>, EDN: FPIOWJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Метод Годунова [1] был построен для решения нестационарных задач классической газовой динамики. Однако спектр задач, для успешного решения которых применима схема Годунова и различные ее модификации, значительно шире [2–12]. Данный метод использовался для решения задач о распространении волн горения и детонации в сверхзвуковых потоках, сопровождаемых большим количеством физико-химических реакций [4, 5]; описания кумуляции взрывных волн в трехмерных замкнутых объемах сложной геометрии [6]; моделирования распространения в атмосфере продуктов испарения метеоритных тел [7]; численного расчета упругопластической деформации твердого тела [8]; решения задач релятивистской и нерелятивистской магнитной гидродинамики [9], описания разрывов в двухтемпературной и трехтемпературной газовой динамике, а также различного рода обобщений этих систем на многофазные среды [10, 11]. Одним из направлений развития метода Годунова является внедрение в классическую схему сложных уравнений состояния. Такие уравнения описывают, например, процессы в средах в состоянии насыщения или близком к нему. Они, как правило, являются широкодиапазонными, частично полуэмпирическими, учитывают многофазность и метастабильность и описывают поведение вещества не только в газообразном состоянии, но также в плазменном, твердом и жидком состояниях [9, 13].

В качестве сложного уравнения состояния в работе рассматривается известное уравнение реального газа – уравнение Соаве – Редлиха – Квонга [12]. Данное уравнение является модификацией уравнения состояния Редлиха – Квонга [14, 15], которое положило начало возникновению целого семейства уравнений состояний, характеризующихся относительной простотой и точностью описания критических свойств веществ. Уравнение имеет сложную аналитическую форму, не допускающую однозначного выражения энтропии, внутренней энергии и температуры газа через давление и в результате является труднореализуемым на практике, особенно в области неклассического поведения решения, когда в потоке формируются сложные составные волновые конструкции [16, 17]. Применение данного уравнения требует модификации метода Годунова, что в случае сохранения строгой физической интерпретации метода приводит к появлению следующих особенностей.

Во-первых, возрастает трудоемкость процедуры поиска точного решения задачи Римана и, соответственно, снижается скорость вычислительного алгоритма. Ускорить алгоритм возможно за счет использования приближенных решений задачи о распаде разрыва, однако данный подход не всегда оправдан, так как может привести к количественному и качественному искажению результатов нестационарных и автоколебательных (квазипериодических) процессов, как это было отмечено, например, в работе [2].

Во-вторых, специфический характер нелинейных функций в составе решения затрудняет использование итерационных процедур поиска решения нелинейных уравнений. Это связано с наличием нескольких действительных корней нелинейных уравнений, располо-



женных близко друг к другу. Встает проблема выбора начального приближения в итерационных методах вроде метода бисекций или метода Ньютона.

В качестве подхода, сохраняющего ориентированность метода Годунова на точные решения задачи Римана с применением сложных уравнений состояния, предлагается использование интерполяционных зависимостей по табулированным значениям ключевых газодинамических параметров потока. Данный подход гарантирует корректное построение точных решений задачи распада разрыва и не требует применения итерационных вычислительных процедур, что существенно сокращает временные затраты при решении сложных задач.

## 1. Задача Римана о распаде произвольного разрыва для уравнения состояния Соаве – Редлиха – Квонга

Рассмотрим задачу Римана для уравнений Эйлера, содержащих законы сохранения массы, импульса и энергии для сжимаемого газа без учета свойств вязкости и теплопроводности. В качестве неизвестных величин примем плотность  $\rho$ , давление  $p$ , удельную внутреннюю энергию  $e$  и скорость газа  $u$ . В этом случае система уравнений Эйлера для одномерного нестационарного случая записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho (e + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u (e + u^2/2) + pu}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнением состояния в общем виде  $e = e(p, \rho)$ .

Начальные условия в задаче Римана формируют разрыв между двумя исходными состояниями слева  $(p_l, \rho_l, u_l)$  и справа  $(p_r, \rho_r, u_r)$  от разрыва. Согласно классической газовой динамике решение задачи Римана представляет собой систему волн, которая включает ударную волну или волну разрежения, соединяющую левое исходное состояние  $(p_l, \rho_l, u_l)$  с состоянием слева от контактного разрыва  $(R_l, P, U)$ , и волну разрежения или ударную волну, соединяющую состояние справа от контактного разрыва  $(R_r, P, U)$  с правым исходным состоянием  $(p_r, \rho_r, u_r)$ .

Распределение параметров на ударных волнах подчиняется соотношениям Ренкина – Гюгоньо [1]:

$$[u] = \pm \frac{1}{m} [p], \quad \left[ \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{1}{m^2} [p], \quad [e] = -\frac{P + p_H}{2} \left[ \frac{1}{\rho} \right]. \quad (4)$$

В уравнениях (4) квадратные скобки обозначают разницу между параметрами слева/справа от ударной волны, а  $m$  является массовой скоростью на ударной волне [1]. Нижний индекс « $H$ » принимает значения « $l$ », « $r$ » с разных сторон начального разрыва.

В волне разрежения выполняется условие постоянства энтропии, что приводит к следующим соотношениям, содержащим величину локальной скорости звука  $c$ :

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2, \quad \frac{du}{dp} \pm \frac{1}{\rho c} = 0. \quad (5)$$

В общем случае по соотношениям (4) и (5) строится система из трех уравнений, решение которой позволяет определить значения параметров  $(P, R_l, R_r)$  на разрывах, а в дальнейшем и скорость газа между волнами –  $U$ . Аналитические выражения для функций на разрывах получены лишь для случая идеального газа или вещества, подчиняющегося двучленному уравнению состояния [1, 9]. Решение такой системы уравнений итерационное, требует хорошего начального приближения и включает в себя интегрирование второго уравнения системы (5) в волне разрежения.



Рассмотрим решение задачи Римана для уравнения состояния реального газа Соаве – Редлиха – Квонга. Данное уравнение в приведенной форме имеет вид

$$p(\rho, T) = \frac{8}{3} \frac{T\rho}{1 - B_s\rho} - \frac{A_s\alpha(T)\rho^2}{1 + B_s\rho}, \quad (6)$$

где  $T$  – температура газа,  $\alpha(T) = (1+n-n\sqrt{T})^2$  – модифицирующая функция с параметром  $n = 0.48 + 1.574\omega - 0.176\omega^2$ , учитывающим фактор ацентричности молекул реальных газов  $\omega$  [18], а константы  $A_s$  и  $B_s$  равны 3.03987 и 0.23104 соответственно.

В случае политропного газа для описания термодинамической системы можно использовать следующие фундаментальные термодинамические соотношения, определяющие изменение внутренней энергии газа и условие изоэнтропийности процесса [19]:

$$e(\rho, T) = \frac{8T}{3\delta} - \frac{A_s}{B_s} \ln(1 + B_s\rho)^{\chi(T)}, \quad (7)$$

$$T \left( \frac{1 - B_s\rho}{\rho} \right)^{\delta} (1 + B_s\rho)^{\beta(T)} = \text{const}. \quad (8)$$

Здесь величина  $\delta = c_v/R$  определяется удельной теплоемкостью  $c_v$  и удельной газовой постоянной  $R$ , а показатели степеней определяются следующим образом:

$$\beta(T) = -\frac{3}{8}\delta\frac{A_s}{B_s}n \left( \frac{1+n}{\sqrt{T}} - n \right), \quad \chi(T) = (1+n)\alpha^{0.5}(T).$$

Более подробно постановка задачи для реальных газов представлена в работе [20].

Решение задачи Римана для реального газа, описываемого уравнениями (6)–(8), определяется параметрами на контактном разрыве и начинается с решения нелинейного уравнения для давления [1]:

$$F(p) = F_l(p) + F_r(p) + u_l - u_r = 0, \quad (9)$$

где функция  $F_H(p)$  определяется в зависимости от величины текущего давления изменением скорости либо в волне разрежения ( $\Delta u^{rar}$ ), либо на ударной волне ( $\Delta u^{sh}$ ):

$$F_H(p) = \begin{cases} z_H \Delta u^{rar}(p, p_H, \rho_H), & p < p_H, \\ z_H \Delta u^{sh}(p, p_H, \rho_H), & p > p_H. \end{cases} \quad (10)$$

Величина  $z_H = \pm 1$  зависит от направления распространения волны. Величины  $\Delta u^{rar}$  и  $\Delta u^{sh}$  определяются текущим давлением и параметрами газа перед волной и согласно (4) и (5) определяются следующими уравнениями:

$$\Delta u^{rar}(p, p_H, \rho_H) = \int_{p_H}^p \frac{dp}{\rho(p)c(p)}, \quad (11)$$

$$\Delta u^{sh}(p, p_H, \rho_H) = \left[ (p - p_H) \left( \frac{1}{\rho_H} - \frac{1}{\rho(p)} \right) \right]^{0.5}. \quad (12)$$

Таким образом, с учетом уравнений (9)–(11) для определения параметров в волне разрежения необходимо знать зависимости плотности и скорости звука от давления. Из уравнения (8) можно получить еще одно нелинейное уравнение, которое связывает между собой плотность и температуру газа:

$$S(p, \rho) = T(p, \rho) \left( \frac{1 - B_s\rho}{\rho} \right)^{\delta} (1 + B_s\rho)^{\beta(T)} - T_H \left( \frac{1 - B_s\rho_H}{\rho_H} \right)^{\delta} (1 + B_s\rho_H)^{\beta(T_H)} = 0. \quad (13)$$



Температура, в свою очередь, находится из уравнения состояния (6) как корень квадратного уравнения и определяется соотношением

$$T(p, \rho) = \left[ \frac{-B(\rho) + \sqrt{B^2(\rho) - 4A(\rho)C(p, \rho)}}{2A(\rho)} \right]^2 \quad (14)$$

с величинами

$$A(\rho) = \frac{8}{3} \frac{\rho}{1 - B_s \rho} - \frac{A_s n^2 \rho^2}{1 + B_s \rho}, \quad B(\rho) = 2n(n+1) \frac{A_s \rho^2}{1 + B_s \rho}, \quad C(p, \rho) = -\frac{A_s (n+1)^2 \rho^2}{1 + B_s \rho} - p.$$

Уравнение (13) решается итерационно совместно с уравнением (14), при этом изменение скорости в волне разрежения определяется с помощью интеграла (11) численно.

Изменение скорости на ударной волне (12) определяется значением плотности при текущей величине давления, которая может быть найдена из решения уравнения

$$e(p, \rho) - e_H + 0.5(p + p_H) \left( \frac{1}{\rho(p)} - \frac{1}{\rho_H} \right) = 0 \quad (15)$$

методом Ньютона при начальном приближении  $\rho = \rho_H$ . В формуле (15) величина  $e_H$  является внутренней энергией газа, определяемой исходными значениями параметров на разрыве  $e_H = e(\rho_H, T(\rho_H, p_H))$ .

Определив величины  $\Delta u^{rag}$  и  $\Delta u^{sh}$ , можно построить функцию  $F(p)$ , а решение нелинейного уравнения (9) позволит определить давление  $P$  на контактном разрыве и автоматически волновую структуру решения. При этом соотношения (11) или (12) определяют скорость контактного разрыва  $U$ . В зависимости от вида распространяющихся волн можно найти плотность газа  $R_l$  и  $R_r$  по соотношениям (13) и/или (15). Комплект величин  $(P, R_l, R_r, U)$  определяет точное решение задачи Римана и используется в численном решении задач нестационарной газовой динамики для нахождения потоков массы импульса и энергии через грань контрольного объема.

Описанный выше алгоритм включает итерационное решение уравнения (9), на каждой итерации выполнения которого необходимо также итерационно решать еще два нелинейных уравнения — (13) и/или (15), и при необходимости находить с использованием квадратурных формул интеграл (11).

Сложность алгоритма увеличивается в случае решения задачи для неклассической области газодинамики, которая характеризуется уменьшением и отрицательным значением величины фундаментальной производной  $G = G(p, \rho)$  при постоянной энтропии газа [21] (рис. 1). Характер течения в области отрицательных значений фундаментальной производной  $G < 0$  может существенно отличаться от поведения политропных газов в классических областях. Например, в этом случае ударная волна разрежения является физически допустимой, поскольку кривизна изоэнтропии и, следовательно, кривой Ренкина – Гюгоннио между двумя состояниями обратная (отрицательная) по отношению к классическому случаю [22]. Невыпуклый характер изоэнтроп делает возможным существование неклассических плавно изменяющихся волн сжатия и формирование сложных составных волн, состоящих из двух/трех классических и/или неклассических простых волн. Наличие таких волн впервые было теоретически показано Зельдовичем и неоднократно подтверждено в различных веществах экспериментально [23–28].

В неклассической области функция  $S(p, \rho)$  имеет нелинейный характер. На рис. 2 приведены графики изменения функции  $S(p, \rho)$  в зависимости от плотности при различных значениях давления  $p$  для вариантов исходных данных (1) :  $\rho_H = 1$ ,  $T_H = 0.9$  и (2) :  $\rho_H = 1.3$ ,  $T_H = 1.2$ . Видно, что расположение корней сильно зависит от начальных параметров задачи Римана. Кроме того, в неклассической области уравнение (13) может иметь более одного решения. В связи с этим возникает проблема задания начального приближения при нахождении актуального корня уравнения с использованием итерационных методов. Выбор



универсального начального приближения, например, для метода Ньютона, в таких условиях невозможен, особенно в широком диапазоне изменения параметров задачи. Расчеты показали, что в этом случае метод бисекции является более приемлемым, но и тогда точно требуется «ручное» управление процедурой поиска решения, что неприемлемо при решении сложных задач газовой динамики.

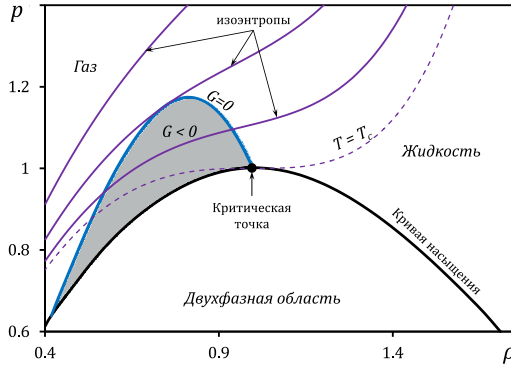


Рис. 1. Фазовая диаграмма вещества для политропного газа Соаве – Редлиха – Квонга, неклассическая область выделена серым цветом (цвет онлайн)

Fig. 1. Phase diagram for the polytropic Soave – Redlich – Kwong gas, non-classical area is highlighted in grey color (color online)

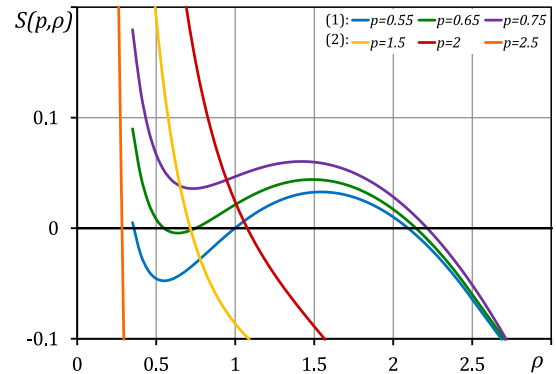


Рис. 2. Функция  $S(p, \rho)$  для разных значений давления, (1) :  $\rho_H = 1$ ,  $T_H = 0.9$ , (2) :  $\rho_H = 1.3$ ,  $T_H = 1.2$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Function  $S(p, \rho)$  for different pressure values, (1) :  $\rho_H = 1$ ,  $T_H = 0.9$ , (2) :  $\rho_H = 1.3$ ,  $T_H = 1.2$  (color online)

Для решения данной проблемы можно использовать два подхода. Первый подход заключается в аппроксимации уравнений (6), (7) двухчленным уравнением состояния в окрестности распада разрыва. Данный способ применялся при расчете течений реального газа в работах [29, 30], однако его использование требует обоснования, особенно в областях неклассического изменения давления и плотности [16, 17].

Второй подход предполагает использование интерполяции решения на основе предварительно рассчитанных и затабулированных значений основных газодинамических величин. Такой подход гарантирует правильное построение точного решения задачи Римана и позволит существенно снизить трудоемкость алгоритма.

## 2. Метод табулирования решения задачи Римана

Рассмотрим метод табулирования на примере решения тестовых задач в ударной трубе. Приближенное решение строится на равномерной сетке  $X_k = \{(x_k) : (x_k) = x_{k-1} + \Delta x, k = 1, \dots, N_x - 1\}$ , где  $N_x$  — число узлов сетки. Два соседних узла сетки формируют слой, внутри которого газодинамические величины  $(\rho_k, p_k, u_k)$  постоянны. Разрыв формируется на границе двух слоев, соответствующей общему узлу сетки.

Для реализации метода необходимо рассчитать зависимости изменения скорости в волне разрежения  $\Delta u^{rar}$  и на ударной волне  $\Delta u^{sh}$  при различных значениях газодинамических параметров  $(p_H, \rho_H)$  по обе стороны предполагаемых разрывов, формирующихся на сетке  $X_k$  с течением времени. Для реализации решения задачи Римана вводится неравномерная интерполяционная сетка  $(p_H^i, \rho_H^j)$ , на которой будет проводиться табулирование зависимостей (11) и (12) в заданном диапазоне изменения давления  $(p_{\min}, p_{\max})$  и плотности  $(\rho_{\min}, \rho_{\max})$ :

$$(p_H^i, \rho_H^j) : \begin{cases} p_H^i = p_H^{i-1} + \Delta p_i, & i = 1 \dots N - 1, p_H^0 = p_{\min}, p_H^{N-1} = p_{\max}, \\ \rho_H^j = \rho_H^{j-1} + \Delta \rho_j, & j = 1 \dots M - 1, \rho_H^0 = \rho_{\min}, \rho_H^{M-1} = \rho_{\max}. \end{cases} \quad (16)$$

где  $N, M$  — число узлов интерполяционной сетки по давлению и плотности соответственно, а  $\Delta p_i$  и  $\Delta \rho_j$  — переменные шаги этих сеток. Интерполяционная сетка сгущается в области



резкого изменения величин  $\Delta u^{rar}$  и  $\Delta u^{sh}$ . Определение шагов интерполирования  $\Delta p_i$  на неравномерной сетке по давлению проводится по формулам

$$\Delta p_i = \begin{cases} (p_H^{n_r} - p_H^0) \frac{r-1}{r^{n_r-1} - 1} r^i, & i = 0 \dots n_r - 1, \\ \frac{p_H^{N-1} - p_H^{n_r}}{N - n_r}, & i = n_r \dots N - 1, \end{cases} \quad (17)$$

где  $(p_H^{n_r} - p_H^0)$  — интервал, на котором проводится сгущение интерполяционной сетки,  $n_r$  — число узлов сетки на данном интервале,  $r \geq 1$  — коэффициент сгущения. Аналогичные соотношения записываются для шагов  $\Delta \rho_j$  интерполяционной сетки для плотности.

Из закона распределения узлов интерполяции (16), (17) можно явно определить местоположение ячейки интерполяционной сетки  $p_H^{i-1} < p_H < p_H^i$ , в которую попадают значения параметров  $p_H$  слева или справа от локального разрыва по формулам

$$\begin{cases} i = \frac{\ln \left( 1 + \frac{p_H - p_H^{n_r}}{p_H^{n_r}} (r-1) r^{n_r-1} \right)}{\ln(r)}, & i < n_r, \\ i = n_r - 1 + \frac{p_H - p_H^{n_r}}{p_H^{N-1} - p_H^{n_r}} (N - n_r), & i \geq n_r. \end{cases}$$

Значения в точке  $(p_H, \rho_H)$  определяются с использованием билинейной интерполяции по величинам  $p_H^{i-1}, p_H^i, \rho_H^{j-1}, \rho_H^j$ . В результате строится сеточная функция  $F(p_k)$  по соотношениям (9) и (10). Определив интервал смены знака  $[p_{k-1}, p_k]$  уравнения (9) и предполагая линейное изменение функции  $F(p)$  между узлами сетки  $p_{k-1}$  и  $p_k$ , величина давления на локальном разрыве находится по формуле

$$P = p_k - F(p_k) \frac{p_k - p_{k-1}}{F(p_k) - F(p_{k-1})}. \quad (18)$$

Следует отметить, что для нахождения давления на разрыве при таком подходе не требуется использование итерационных процессов. Скорость на разрыве находится по формуле

$$U = u_H + F_H(P). \quad (19)$$

Текущее значение давления в волне разрежения в зависимости от значения характеристики  $\xi = x/t$  определяется из аналогичного уравнения

$$u_H + F_H(p) - z_H c(p) - \xi = 0. \quad (20)$$

Зависимости плотности и скорости звука от давления также табулируются и определяются текущим давлением. Табулированные зависимости параметров от давления полностью определяют решение задачи Римана без каких-либо дополнительных допущений и упрощений.

### 3. Результаты расчетов

Апробация метода табулирования рассматривается на примере расчета течений в ударной водородной трубе в классической и неклассической областях газовой динамики.

Для классической области начальное распределение параметров газа определяется величинами  $(p_l = 78.935, \rho_l = 2.140, u_l = 0)$  и  $(p_r = 0.077, \rho_r = 0.054, u_r = 0)$ . В данном случае задача характеризуется широким диапазоном изменения параметров: давление слева и справа от разрыва различается на три порядка, а плотность — на два порядка. Решением является система волн: волна разрежения, распространяющаяся влево, ударная волна,двигающаяся вправо, и однонаправленный ей контактный разрыв. Расчет в ударной трубе





с применением разностной схемы Годунова по табулированным параметрам мало отличается от решения задачи Римана. Наблюдается лишь обычное схемное сглаживание резких скачков. Максимальная относительная ошибка по давлению не превышает 1.5%.

Для неклассической области начальные данные идентичны тестовой задаче, рассмотренной в работе [16], и равны ( $p_l = 1.256$ ,  $\rho_l = 1.222$ ,  $u_l = 0.141$ ) и ( $p_r = 1.028$ ,  $\rho_r = 0.918$ ,  $u_r = 1.894$ ) с параметром  $\delta = 0.008$ . Решение является составным и включает комбинацию «волна разрежения — ударная волна разрежения — волна разрежения», движущуюся влево, и двойную комбинацию «волна разрежения — ударная волна разрежения», распространяющуюся вправо по газу. На рис. 3, а представлена термодинамическая диаграмма данного решения. Части изоэнтроп, лежащие в области  $G < 0$ , формируют неклассические ударные составляющие. Характеристическое поле решения с тройной составной волной « $fSf$ » и двойной составной волной « $fS$ » по обе стороны контактного разрыва « $c$ » показано на рис. 3, б. Обе составные волны являются волнами разрежения, поэтому их неклассические ударные компоненты вносят вклад в расширение газа.

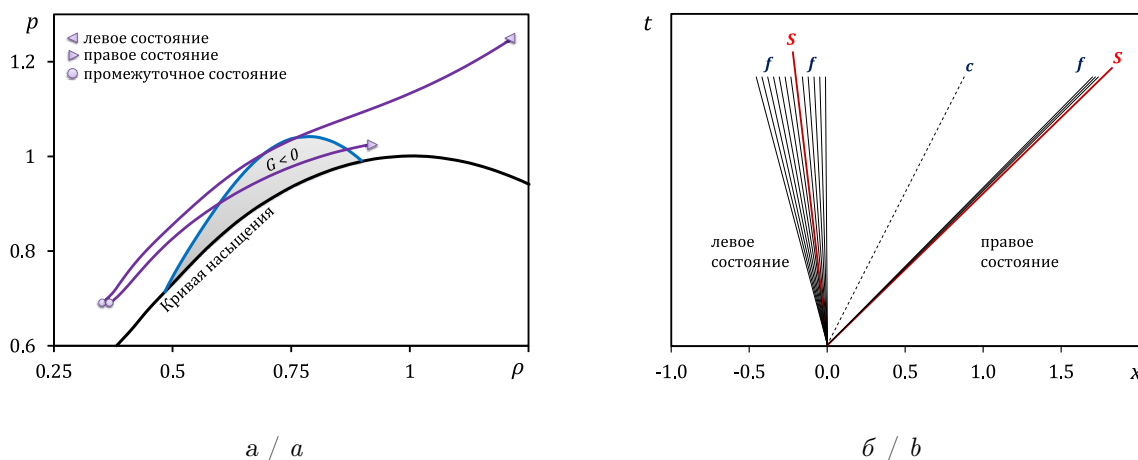


Рис. 3. Задача Римана в неклассической области: а — термодинамическая диаграмма решения; б — схема решения ( $f$  — волна разрежения,  $S$  — ударная волна разрежения,  $c$  — контактный разрыв) (цвет онлайн)

Fig. 3. Riemann problem in nonclassical region:  $a$  is solution thermodynamic plane;  $b$  is solution sketch ( $f$  — rarefaction wave,  $S$  — rarefaction shock,  $c$  — contact discontinuity) (color online)

Результаты, полученные с использованием табулированных значений газодинамических величин в неклассической области, приведены на рис. 4, где сплошной линией показано точное решение задачи Римана, основанное на уравнениях (9)–(15), а маркерами — приближенное решение, полученное с применением схемы Годунова по табулированным значениям (18)–(20). Оба решения построены на идентичных сетках с числом узлов  $N_x = 400$  при длине расчетной области, равной 1. Табулирование проводилось на неравномерной интерполяционной сетке (16), содержащей 50 точек для интерполяции давления и 30 точек для плотности.

На рис. 4 показано распределение давления и плотности газа в ударной трубе. Видно, что метод табулирования сохраняет все особенности неклассического решения задачи Римана, хорошо разрешая составные волновые структуры. Ошибка описания сложных волн разрежения не превышает 1.6%.

Предлагаемый подход был реализован при численном моделировании газодинамических процессов в водородном предохранительном клапане. Условия срабатывания клапана соответствуют диапазону параметров газа для тестовой задачи в ударной трубе в классической области. Результаты расчетов в виде распределения давления и скорости в центральном сечении клапана показаны на рис. 5.

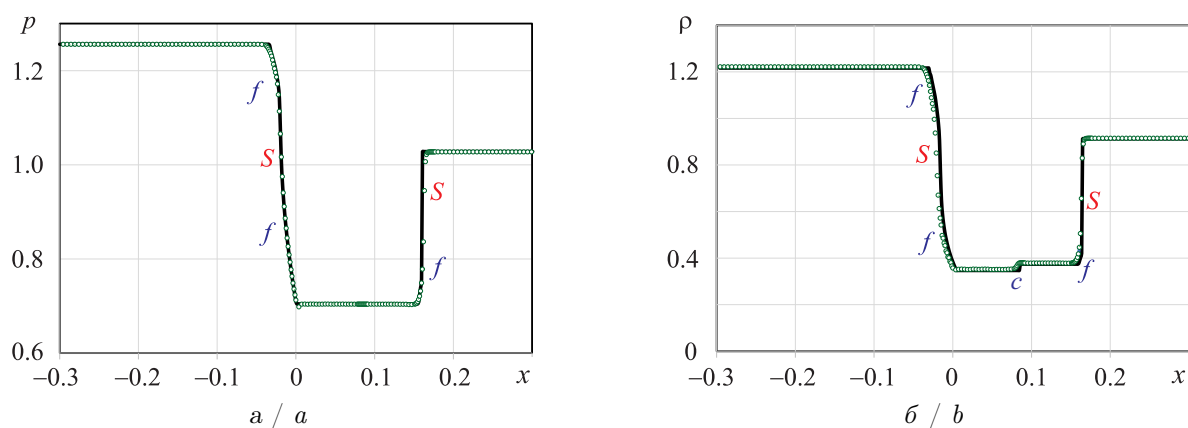


Рис. 4. Сравнение точного решения задачи Римана с табулированным решением для распределения плотности газа в неклассической области:  $a$  — давление;  $b$  — плотность, линия — точное решение, маркеры — табулированное решение (цвет онлайн)

Fig. 4. Comparison of the exact and tabulated solutions of the Riemann problem for nonclassical region:  $a$  is pressure;  $b$  is density, line — exact solution, marker — tabulated solution (color online)

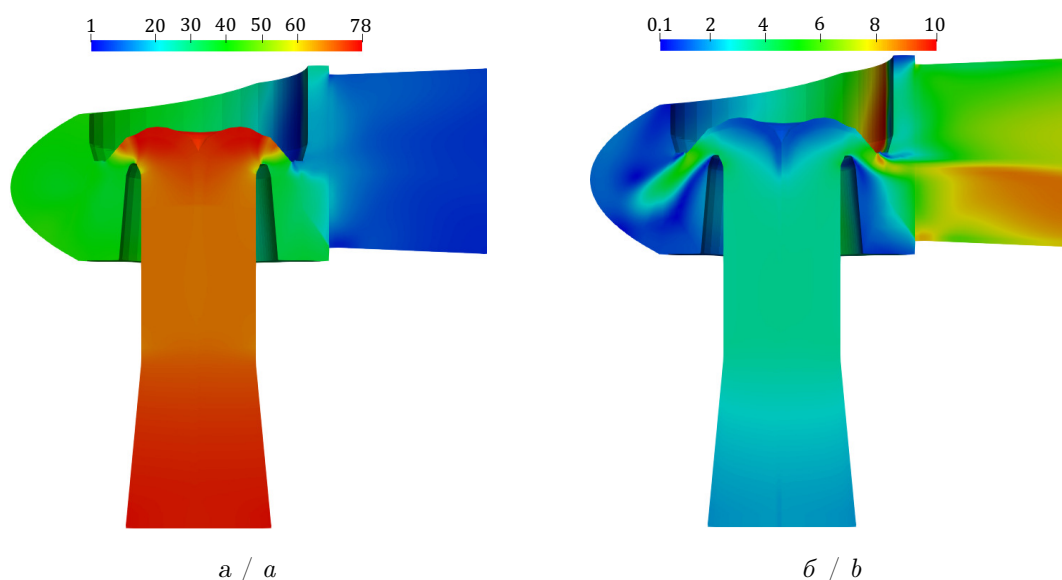


Рис. 5. Газодинамика водородного предохранительного клапана:  $a$  — распределение давления,  $b$  — распределение скорости (цвет онлайн)

Fig. 5. Gas dynamics of the hydrogen safety valve:  $a$  — pressure field,  $b$  — velocity field (color online)

Структура течения определяется сложной геометрической формой внутреннего объема клапана. В критическом сечении между корпусом и подвижным диском поток максимально разгоняется, и после перехода в выходной патрубок в нижней части выходного канала формируется высокоскоростная струя газа. Поля распределения газодинамических величин, полученные методом табулирования, соответствуют решению, полученному с использованием классической схемы Годунова, что подтверждает обоснованность его использования для решения аналогичных задач с режимами смешанной нелинейности [31].

## Заключение

В работе описан подход, основанный на использовании в методе Годунова интерполяционных зависимостей по табулированным значениям ключевых газодинамических параметров потока, которые получены в результате точного решения задачи Римана для реального газа, описываемого уравнением состояния Соаве–Редлиха–Квонга. Использование такого



подхода позволяет сохранить ориентированность метода на точные решения задачи Римана. При этом гарантируется корректное построение точного решения задачи распада разрыва и не требуется выполнения многократных итерационных вычислительных процедур, что позволяет существенно повысить скорость вычислительного алгоритма. Оценка предлагаемого подхода проводилась на основе решения тестовых задач в ударной трубе в областях классического и неклассического поведения газа, а также на примере численного моделирования газодинамики водородного предохранительного клапана. Полученные результаты подтверждают, что применение табулированных значений ключевых газодинамических величин оправданно в очень широком диапазоне изменения параметров, а предложенный подход может быть использован для решения сложных задач нестационарной газовой динамики, в том числе с областями смешанной нелинейности.

### Список литературы

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Москва : Наука, 1976. 400 с. EDN: [UESERL](#)
2. Бочарова О. В., Лебедев М. Г. Тестирование метода Годунова первого порядка точности на некоторых модельных и практических задачах // Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Москва : МАКС Пресс, 2016. Т. 51. С. 24–44. EDN: [XHMDZT](#)
3. Прокопов Г. П., Северин А. В. Экономичная реализация метода Годунова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2009. № 29. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-29> (дата обращения: 02.04.2024), EDN: [OYBUIR](#)
4. Туник Ю. В. Детонационное горение водорода в сопле Лаваля с центральным коаксиальным цилиндром // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 5. С. 142–148. EDN: [SUCSCT](#)
5. Туник Ю. В., Герасимов Г. Я., Левашов В. Ю., Славинская Н. А. Численное моделирование детонационного горения паров керосина в расширяющемся сопле // Физика горения и взрыва. 2020. Т. 56, № 3. С. 105–114. <https://doi.org/10.15372/FGV20200311>, EDN: [WBOTUC](#)
6. Базаров С. Б., Набоко И. М. Фокусировка взрывных волн: трехмерное математическое моделирование // Химическая физика. 2008. Т. 27, № 10. С. 58–62. EDN: [JRFTSV](#)
7. Ситник В. В. Моделирование разрушения лесного массива ударной волной, вызванной падением крупного космического тела // Химическая физика. 2009. Т. 28, № 5. С. 45–55. EDN: [KFRINJ](#)
8. Сузов В. С. Об одном варианте метода Годунова для расчета упругопластической деформации среды // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 1. С. 30–39. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.3>, EDN: [MTTPAB](#)
9. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Москва : Физматлит, 2012. 656 с. EDN: [UGLJBR](#)
10. Fechter S., Jaegle F., Schleper V. Exact and approximate Riemann solvers at phase boundaries // Computers and Fluids. 2013. Vol. 75. P. 112–126. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.01.024>
11. Garavello M., Marcellini F. The Riemann problem at a junction for a phase transition traffic model // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2017. Vol. 37. P. 5191–5209. <https://doi.org/10.3934/dcds.2017225>
12. Akberov R. R. Calculating the vapor-liquid phase equilibrium for multicomponent systems using the Soave–Redlich–Kwong equation // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2011. Vol. 45. P. 312–318. <https://doi.org/10.1134/S004057951103002>
13. Болотнова Р. Х., Бузина В. А. Пространственное моделирование нестационарной стадии истечения вскипающей жидкости из камер высокого давления // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 343–352. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.33>, EDN: [TCSUMX](#)
14. Soave G. 20 years of Redlich–Kwong equation of state // Fluid Phase Equilibria. 1993. Vol. 82. P. 345–359. [https://doi.org/10.1016/0378-3812\(93\)87158-W](https://doi.org/10.1016/0378-3812(93)87158-W)
15. Soave G. S. An effective modification of the Benedict–Webb–Rubin equation of state // Fluid Phase Equilibria. 1999. Vol. 164. P. 157–172. EDN: [ADVWMV](#)
16. Quartapelle L., Castelletti L., Guardone A., Quaranta G. Solution of the Riemann problem of classical gasdynamics // Journal of Computational Physics. 2003. Vol. 190. P. 118–140. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00267-5](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00267-5)



17. Fossati M., Quartapelle L. The Riemann problem for hyperbolic equations under a nonconvex flux with two inflection points // arXiv:1402.5906 [physics.flu-dyn], 24 Feb 2014. 104 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1402.5906>
18. Zohuri B. Properties of Pure Substances. Physics of Cryogenics. Berlin ; Gottingen ; Heidelberg : Elsevier, 2018. 710 p. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-70551-4\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70551-4_2)
19. Callen H. B. Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics. Hoboken : John Wiley&Sons, 1988. 534 p.
20. Тененев В. А., Королева М. Р. Постановка задачи Римана для политропных газов, описываемых сложными уравнениями состояния // Химическая физика и мезоскопия. 2023. Т. 25, № 4. С. 507–514. <https://doi.org/10.15350/17270529.2023.4.44>, EDN: YGFVBN
21. Thompson P. A., Carofano G. C., Kim Y.-G. Shock waves and phase changes in a large–heat–capacity fluid emerging from a tube // Journal of Fluid Mechanics. 1986. Vol. 166. P. 57–92. <https://doi.org/10.1017/s0022112086000046>
22. Zamfirescu C., Guardone A., Colonna P. Admissibility region for rarefaction shock waves in dense gases // Journal of Fluid Mechanics. 2008. Vol. 599. P. 363–381. <https://doi.org/10.1017/S0022112008000207>
23. Зельдович Я. Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 188 с. EDN: RXGUKX
24. Borisov A. A., Borisov Al. A., Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E. Rarefaction shock wave near the critical liquid–vapour point // Journal of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 126. P. 59–73. <https://doi.org/10.1017/s002211208300004x>, EDN: XNAHEG
25. Кутателадзе С. С., Борисов Ал. А., Накоряков В. Е. Экспериментальное обнаружение ударной волны разрежения вблизи критической точки жидкость–пар // Доклады АН СССР. 1980. Т. 252, № 3. С. 595–598.
26. Barker L. M., Hollenbach R. E. Shock-wave studies of PMMA, fused silica, and sapphire // Journal of Applied Physics. 1970. Vol. 41, iss. 10. P. 4208–4226. <https://doi.org/10.1063/1.1658439>
27. Ivanov A. G., Novikov S. A. Rarefaction shock waves in iron from explosive loading // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 1986. Vol. 22, iss. 3. P. 343–350. <https://doi.org/10.1007/bf00750354>
28. Drummond W. E. Multiple shock production // Journal of Applied Physics. 1957. Vol. 28, iss. 9. P. 998–1001. <https://doi.org/10.1063/1.1722925>
29. Raeder T., Chernova A. A., Tenenev V. A. Incorporation of fluid compressibility into the calculation of the stationary mode of operation of a hydraulic device at high fluid pressures // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 17, iss. 2. P. 195–209. <https://doi.org/10.20537/nd210205>, EDN: FTAVMO
30. Тененев В. А., Королева М. Р. Численное моделирование течения реального газа Ван-дер-Ваальса в ударной трубе // Интеллектуальные системы в производстве. 2021. Т. 19, № 2. С. 96–103. <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2021-2-96-103>, EDN: QCOAFK
31. Raeder T., Tenenev V. A., Koroleva M. R., Mishchenkova O. V. Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state // Russian Journal Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 17, iss. 1. P. 119–138. <https://doi.org/10.20537/nd210109>, EDN: FTAVMO

## References

1. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow, Nauka, 1976. 400 p. (in Russian). EDN: UESERL
2. Bocharova O. V., Lebedev M. G. Testing the first order accurate Godunov method on some prototype and applied problems. *Computational Mathematics and Modeling*, 2016, vol. 28, iss. 1, pp. 18–31. <https://doi.org/10.1007/s10598-016-9342-1>
3. Prokopov G. P., Severin A. V. Rational realization of Godunov’s method. *Keldysh Institute Preprints*, 2009, iss. 29. 24 p. (in Russian). Available: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-29> (accessed 2 April, 2024), EDN: OYBUIR
4. Tunik Y. V. Detonation combustion of hydrogen in a convergent-divergent nozzle with a central coaxial cylinder. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, iss. 5, pp. 688–693. <https://doi.org/10.1134/S0015462814050160>, EDN: UFJCMV
5. Tunik Y. V., Gerasimov G. Y., Levashov V. Y., Slavinskaya N. A. Numerical simulation of detonation combustion of kerosene vapors in an expanding nozzle. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*,



- 2020, vol. 56, iss. 3, pp. 344–352. <https://doi.org/10.1134/S0010508220030119>, EDN: JCFZVW
6. Bazarov S. B., Naboko I. M. Focusing blast waves: Three-dimensional mathematical modeling. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2008, vol. 2, iss. 5, pp. 809–813. <https://doi.org/10.1134/S1990793108050242>
7. Sitnik V. V. Simulation of the destruction of a woodland massif by the shock wave generated by the impact of a large cosmic body. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2009, vol. 3, iss. 3, pp. 373–382. <https://doi.org/10.1134/S1990793109030063>
8. Surov V. S. On one version of the Godunov method for calculating elastoplastic deformations of a medium. *Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, iss. 1, pp. 30–39 (in Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.3>, EDN: MTTPAB
9. Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical issues in the numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow, Fizmatlit, 2012. 656 p. (in Russian). EDN: UGLJBR
10. Fechter S., Jaegle F., Schleper V. Exact and approximate Riemann solvers at phase boundaries. *Computers and Fluids*, 2013, vol. 75, pp. 112–126. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.01.024>
11. Garavello M., Marcellini F. The Riemann problem at a junction for a phase transition traffic model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2017, vol. 37, pp. 5191–5209. <https://doi.org/10.3934/dcds.2017225>
12. Akberov R. R. Calculating the vapor-liquid phase equilibrium for multicomponent systems using the Soave–Redlich–Kwong equation. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2011, vol. 45, pp. 312–318. <https://doi.org/10.1134/S004057951103002>
13. Bolotnova R. Kh., Buzina V. A. Spatial modeling of the nonstationary processes of boiling liquid outflows from high pressure vessels. *Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, iss. 4, pp. 343–352 (in Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.33>, EDN: TCSUMX
14. Soave G. 20 years of Redlich–Kwong equation of state. *Fluid Phase Equilibria*, 1993, vol. 82, pp. 345–359. [https://doi.org/10.1016/0378-3812\(93\)87158-W](https://doi.org/10.1016/0378-3812(93)87158-W)
15. Soave G. S. An effective modification of the Benedict–Webb–Rubin equation of state. *Fluid Phase Equilibria*, 1999, vol. 164, pp. 157–172. EDN: ADVWMV
16. Quartapelle L., Castelletti L., Guardone A., Quaranta G. Solution of the Riemann problem of classical gasdynamics. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 190, pp. 118–140. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00267-5](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00267-5)
17. Fossati M., Quartapelle L. The Riemann problem for hyperbolic equations under a nonconvex flux with two inflection points. *arXiv:1402.5906 [physics.flu-dyn]*, 24 Feb 2014. 104 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1402.5906>
18. Zohuri B. *Properties of pure substances. Physics of cryogenics*. Berlin, Gottingen, Heidelberg, Elsevier, 2018. 710 p. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-70551-4\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70551-4_2)
19. Callen H. B. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Hoboken, John Wiley & Sons, 1988. 534 p.
20. Tenenev V. A., Koroleva M. R. Statement of the Riemann problem for polytropic gases described by complex equations of state. *Chemical Physics and Mesoscopy*, 2023, vol. 25, iss. 4, pp. 507–514 (in Russian). <https://doi.org/10.15350/17270529.2023.4.44>, EDN: YGFVBN
21. Thompson P. A., Carofano G. C., Kim Y.-G. Shock waves and phase changes in a large–heat–capacity fluid emerging from a tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, vol. 166, pp. 57–92. <https://doi.org/10.1017/s0022112086000046>
22. Zamfirescu C., Guardone A., Colonna P. Admissibility region for rarefaction shock waves in dense gases. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, vol. 599, pp. 363–381. <https://doi.org/10.1017/S0022112008000207>
23. Zeldovich Ya. B. *Teoriya udarnykh voln i vvedenie v gazodinamiku* [Shock wave theory and introduction to gas dynamics]. Moscow, Izhevsk, R&C Dynamics, 2004. 188 c. (in Russian). EDN: RXGUKX
24. Borisov A. A., Borisov Al. A., Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E. Rarefaction shock wave near the critical liquid–vapour point. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 126, pp. 59–73. <https://doi.org/10.1017/s002211208300004x>, EDN: XNAHEG
25. Kutateladze S. S., Borisov Al. A., Nakoryakov V. E. Experimental detection of a rarefaction shock wave near the liquid–vapor critical point. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1980, vol. 252, iss. 3, pp. 595–598 (in Russian).
26. Barker L. M., Hollenbach R. E. Shock-wave studies of PMMA, fused silica, and sapphire. *Journal*





- of *Applied Physics*, 1970, vol. 41, iss. 10, pp. 4208–4226. <https://doi.org/10.1063/1.1658439>
27. Ivanov A. G., Novikov S. A. Rarefaction shock waves in iron from explosive loading. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1986, vol. 22, iss. 3, pp. 343–350. <https://doi.org/10.1007/bf00750354>
28. Drummond W. E. Multiple shock production. *Journal of Applied Physics*, 1957, vol. 28, iss. 9, pp. 998–1001. <https://doi.org/10.1063/1.1722925>
29. Raeder T., Chernova A. A., Tenenev V. A. Incorporation of fluid compressibility into the calculation of the stationary mode of operation of a hydraulic device at high fluid pressures. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 195–209. <https://doi.org/10.20537/nd210205>, EDN: FTAVMO
30. Tenenev V. A., Koroleva M. R. Numerical modeling of the real Van der Waals gas flow in the shock tube. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2021, vol. 19, iss. 2, pp. 96–103 (in Russian). <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2021-2-96-103>, EDN: QCOAFK
31. Raeder T., Tenenev V. A., Koroleva M. R., Mishchenkova O. V. Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state. *Russian Journal Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 119–138. <https://doi.org/10.20537/nd210109>, EDN: FTAVMO

Поступила в редакцию / Received 15.04.2024

Принята к публикации / Accepted 10.09.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025